167926

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ CHEBYSHEV MATRİS METODU İLE ÇÖZÜMLERİ

Osman KELEKCİ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Prof. Dr. Gabil ALİYEV

Aralık 2005

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil ALİYEV, Niğde Üniversitesi (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV, Niğde Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE, Selçuk Üniversitesi

ONAY :

Bu tez 16/12/2005 tarihinde, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21/12/2005 tarih ve 2005/24-05 sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

30./12/2005

Doç. Dr. Meysun İBRAHİM

Enstitü Müdürü

# ÖZET

## LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ CHEBYSHEV MATRİS METODU İLE ÇÖZÜMLERİ

KELEKCİ, Osman

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil ALİYEV

Aralık 2005, 101 sayfa

Pek çok önemli fiziki proseslerin dinamiksel denge problemleri çok değişkene bağlı zayıf lineer olmayan diferansiyel denklemler ile yazılmaktadır.

Tezin içeriğinde, n-değişkenli fonksiyonların küresel polinomlar ile seri açılımları oluşturulmuş ve tanımlanmıştır. Özellikle, n-değişkenli fonksiyonların Chebyshev, Legendre, Hermite ve Laguerre polinomları ile seri açılımları verilmiştir. Üstelik, genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülleri oluşturulmuştur. Ayrıca, genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının kuvvetlerinin ve türevlerinin bazı özel bağıntıları oluşturulmuştur.

Son olarak, zayıf lineer olmayan ikinci dereceden özel bir sınıf diferansiyel denklemlerin çözümünde özel bir matris metodu oluşturulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Chebyshev, Lineer Olmayan, Matris, Rekurans Formüller

## SUMMARY

THE SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED CHEBYSHEV MATRIX METHOD

KELEKCI, Osman

Niğde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil ALIYEV

December 2005, 101 pages

The dynamical equilibrium problems of many important physical processes are described as a weak nonlinear differential equations with several variables.

In this thesis, the series expansions of functions of n-variables with spherical polynomials are formed and described. Especially, the series expansions of functions of n-variables are given by using Chebyshev, Legendre, Hermite and Laguerre polynomials. Furthermore, recurrence relations of generalized Chebyshev polynomials are formed. In addition to that some special relations are constitued for powers and derivatives of generalized Chebyshev polynomials.

Finally, a special matrix method is developed for the solutions of a special class of weak nonlinear second order differential equations.

Keywords: Chebyshev, Nonlinear, Matrix, Recurrence Formulas

**TEŞEKKÜR**

Bu araştırmayı hazırlarken yaptığım çalışmaların her safhasında yardımını esirgemeyen tez danışmanım Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Hocam Prof. Dr. Gabil ALİYEV' e katkılarından dolayı; çalışmalarım esnasında uygun ortamı sağlayan Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Sayın Adil KILIÇ'a, başta Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ olmak üzere Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince göstermiş olduğu teşvik ve yardımlarından dolayı Sayın Selcen ERDOĞAN' a ve manevi desteğini esirgemeyip bu günlere gelmemi sağlayan aileme minnet borçluyum.

## İÇİNDEKİLER


ÖZET................................................................................... iii

SUMMARY................................................................................... iv

TEŞEKKÜR................................................................................... v

İÇİNDEKİLER DİZİNİ................................................................................... vi

ŞEKİLLER DİZİNİ................................................................................... ix

TABLOLAR DİZİNİ................................................................................... x

BÖLÜM 1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Giriş................................................................................... 1

1.2. Önceki Çalışmalar................................................................................... 2

1.3. Araştırmanın Amacı................................................................................... 4

BÖLÜM 2. n-DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN KÜRESEL POLİNOMLAR İLE SERİ AÇILIMLARI

2.1. n-Değişkenli Fonksiyonların Chebyshev Polinomları ile Seri Açılımları................................................................................... 6

2.1.1. Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının tanım ve özellikleri........... 6

2.1.2. Fonksiyonların Chebyshev polinomları ile seriye açılması................ 9

2.1.3. Tek değişkenli fonksiyonların Chebyshev polinomları ile seri açılımları................................................................................... 10

2.1.4. n-değişkenli fonksiyonların Chebyshev polinomları ile seri açılımları................................................................................... 10

2.1.5. Örnek................................................................................... 13

2.2. n-Değişkenli Fonksiyonların Legendre Polinomları ile Seri Açılımları...... 15

2.2.1. Tek değişkenli Legendre polinomlarının tanım ve özellikleri............ 15

2.2.2. Fonksiyonların Legendre polinomları ile seriye açılması................ 18

2.2.3. Tek değişkenli fonksiyonların Legendre polinomları ile seri açılımları................................................................................... 19

2.2.4. n-değişkenli fonksiyonların Legendre polinomları ile seri açılımları..... 20

2.2.5. Örnek................................................................................... 22

2.3. n-Değişkenli Fonksiyonların Hermite Polinomları ile Seri Açılımları........ 24

2.3.1. Tek değişkenli Hermite polinomlarının tanım ve özellikleri............. 24

2.3.2. Fonksiyonların Hermite polinomları ile seriye açılması .................. 27
2.3.3. Tek değişkenli fonksiyonların Hermite polinomları ile seri açılımları... 27
2.3.4. n-değişkenli fonksiyonların Hermite polinomları ile seri açılımları...... 28
2.3.5. Örnek ........................................................................ 31
2.4. n-Değişkenli Fonksiyonların Laguerre Polinomları ile Seri Açılımları......... 33
2.4.1. Tek değişkenli Laguerre polinomlarının tanım ve özellikleri.............. 33
2.4.2. Fonksiyonların Laguerre polinomları ile seriye açılması .................. 36
2.4.3. Tek değişkenli fonksiyonların Laguerre polinomları ile seri açılımları ........................................................................ 36
2.4.4. n-değişkenli fonksiyonların Laguerre polinomları ile seri açılımları..... 37
2.4.5. Örnek ........................................................................ 39
BÖLÜM 3. n-DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ CHEBYSHEV POLİNOMLARININ REKURANS FORMÜLLERİNİN, KUVVET VE TÜREV BAĞINTILARININ OLUŞTURULMASI
3.1. n-Değişkenli Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Rekurans Formüllerinin Oluşturulması ........................................................................ 42
3.1.1. Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının rekurans formülü............. 42
3.1.2. İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülü ........................................................................ 43
3.1.3. Üç değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülü ........................................................................ 46
3.1.4. n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülü ........................................................................ 47
3.2. n-Değişkenli Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının n. Dereceden Kuvvetlerinin Oluşturulması ........................................................................ 47
3.2.1. Tek değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri ........................................................................ 47
3.2.2. İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri ........................................................................ 48
3.2.3. Üç değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri ........................................................................ 50
3.2.4. n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri ........................................................................ 51

3.3. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Türevlerinin Oluşturulması..... 52
3.3.1. Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının n. dereceden türevleri.......... 52
3.3.2. Chebyshev polinomlarının türevleri için rekurans bağıntısı.............. 55
3.3.3. İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının türevleri...... 58
BÖLÜM 4. CHEBYSHEV KATSAYILARINI HESAPLAMA YÖNTEMİ
4.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Chebyshev Katsayıları........................ 62
4.2. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Chebyshev Katsayıları..................... 64
4.3. Fonksiyonların Türevleri İçin Chebyshev Katsayıları......................... 66
BÖLÜM 5. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CHEBYSHEV MATRİS METODU
5.1. Giriş..................................................................... 70
5.2. Temel Matris Gösterimleri................................................. 70
5.2.1. f(x) fonksiyonunun matris gösterimi........................................ 70
5.2.2. y(x) fonksiyonunun matris gösterimi....................................... 71
5.2.3. $[y(x)]^2$ fonksiyonunun matris gösterimi..................................... 72
5.2.4. $x^p y^{(s)}$ türev fonksiyonunun matris gösterimi ............................. 73
5.2.5. Koşulların matris formunda gösterimi....................................... 76
5.3. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemin Matris Denklemi...................... 77
BÖLÜM 6. CHEBYSHEV TİPLİ LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ONLARIN ÇÖZÜM METODUNUN OLUŞTURULMASI
6.1. Chebyshev Tipli Zayıf Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Metodunun Oluşturulması........................................................... 79
BÖLÜM 7. UYGULAMALAR..................................................... 88
SONUÇ VE ÖNERİLER........................................................... 98
KAYNAKLAR................................................................... 100

# ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. İlk Beş Chebyshev Polinomunun Grafiği........................................ 9
Şekil 2.2. İlk Beş Legendre Polinomunun Grafiği........................................... 18
Şekil 2.3. İlk Beş Hermite Polinomunun Grafiği............................................. 27
Şekil 2.4. İlk Beş Laguerre Polinomunun Grafiği........................................... 35

# TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1. $b_i = (a_r a_s)$ Katsayılarının Hesabı.................................................. 73

Tablo 2. Örnek 7.1.' in Sayısal Çözümleri.................................................. 90

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

## 1.1. Giriş

Lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemler fen ve mühendislik dallarında bir matematik modeli olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tür denklemlerle özellikle, elektronik devrelerde kullanılan transistörlerde, akışkanlar mekaniğinde, lineer ve harmonik osilatör problemlerinde, kuantum fiziği, dalga teorisi ve haberleşme gibi çeşitli alanlarda karşılaşılmaktadır.

Pek çok önemli fiziki proseslerin kararlı ve kararsız dinamiksel denge problemleri matematiksel olarak çok değişkene bağlı zayıf lineer olmayan diferansiyel denklemler vasıtasıyla ifade edilmektedir. Bir taraftan problemin çok değişkene bağlı olması, ikinci taraftan denklemin lineer olmayan bileşeninin tipi, üçüncü taraftan denklemin katsayılarının singülerliği (tekilliği) bu tür denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasını zorlaştırır. O nedenle yaklaşık çözümlerin bulunması gereği doğar.

Özel Fonksiyonlar Teorisinde yer alan ve küresel fonksiyonlar olarak adlandırılan Chebyshev, Legendre, Hermite ve Laguerre Polinomlarının her biri Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin özel bir durumu olan ve kendi isimleriyle anılan diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Ayrıca bu polinomlar ve bu polinomların serileri, yukarda bahsedilen fiziksel olaylarda karşımıza çıkan lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında uygun birer metottur.

Yaklaşık çözümler için uygun yöntemlerden biri Chebyshev seri veya polinomlarını kullanan yöntemlerdir. Bunların en önemlisi Chebyshev matris metodudur. Chebyshev polinomları yüzyıl kadar önce Rus matematikçi Chebyshev tarafından bulunmuştur. Elli yıl kadar sonra C. Lanczos sayısal hesaplamalardaki önemini ortaya çıkarmıştır. Bilgisayarların kullanılmaya başlamasıyla Chebyshev yaklaşımları, Chebyshev polinom ve serilerinin uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar hızla artmıştır.

Yaklaşık çözüm için geliştirilen yöntem ilk önce, denklem içindeki katsayı fonksiyonlarının, lineer olmayan kısmının ve bilinmeyen fonksiyon ile türevlerinin kesilmiş (sonlu) Chebyshev seri açılımlarının alınmasına sonra bunların matris formlarının yerine konularak sadeleştirilmesine ve bir matris denklemine dönüştürülmesine dayandırılır. Bu matris denklemi lineer olmayan denklem sistemine karşılık gelir. Bu da bilinen sayısal yöntemlerle çözülebilir.

## 1.2. Önceki Çalışmalar

***Pafnuty Lvovich Chebyshev:*** 1821-1894 tarihleri arasında yaşamış Rus bilim adamı lineer olmayan diferansiyel denklemler için Chebyshev matrisi metodunu vermiştir. Buna göre bu metodu kısaca şöyle açıklayabiliriz.

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y + S(x)y^2 = f(x)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N} a'_r T_r(x) \qquad , \quad -1 \le x \le 1 \quad , \qquad N \in IN$$

formunda kesilmiş bir Chebyshev seri çözümü bulmaktadır. Burada $a_r$ bilinen katsayılar, $T_r(x)$ Chebyshev polinomları, $N \in IN$ serinin kesme sınırıdır.

***Jules Henri Poincare:*** 1854-1912 tarihleri arasında yaşamış Fransız bilim adamı lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin üretilen çözümünün olması için gerekli olan şartları inceleyen Poincare teoremini sunmuştur. Buna göre bu teorem: Üretilen çözümün verilen fonksiyonel determinantı $\beta_1 = \beta_2 = ......... = \beta_n = \mu = 0$ durumunda sıfıra eşit değilse bu durumda yeteri kadar küçük $\mu$ için lineer olmayan denklem sisteminin yalnız bir tane periyodik çözümü mevcut olacaktır. Üstelik $\mu = 0$ durumunda sıfır üretilen çözüme eşit olacaktır.

***Aleksandr Mikhailovich Liapunov:*** 1857-1918 tarihleri arasında yaşamış Rus bilim adamı lineer olan ve lineer olmayan teoriler arasındaki niteliksel ve niceliksel farkları prensip olarak incelenmiş ve " Hareketin dinamik kararlılık problemi " olarak adlandırılmıştır. Ayrıca lineer olmayan diferansiyel denklemlerin dinamik kararlılık ve dinamik kararsızlık alanında yapmış olduğu çalışmalarla lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerine katkılar sağlamıştır.

***Aleksei Nikolaevich Krylov:*** 1863-1945 tarihleri arasında yaşamış Rus bilim adamı Bogoliubov ile birlikte lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için, "Birinci Krylov ve Bogoliubov " yaklaşım metodunu bilimin hizmetine sunmuşlardır. Buna göre Birinci Kryloff ve Bogoliuboff yaklaşımını açıklamak için:

$$x'' + \omega^2 x + \mu f(x, x') = 0$$

denklemini göz önüne alalım burada $\mu$ yeteri kadar küçük bir parametredir. Böylece lineer olmayan $\mu f(x, x')$ terimi nispeten küçüktür. Metot temel olarak parametrelerin değişim metodudur.

***Van-Der-Pol:*** Verilen koşullar çerçevesinde küçük lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında sık sık yavaş değişen ampletut (genlik) metodu kullanılmaktadır. Bu metodun adı Van-Der-Pol metodudur. Bu metot bir çok fiziksel problemlerde geniş biçimde kullanılmaktadır. Özellikle bu metodun yardımıyla radyo teknik alanlarında bir çok önemli netice bulunmuştur.

***Mehmet Kaynak:*** Dokuz Eylül Üniversitesi öğretim üyelerindendir. Lineer diferansiyel denklemlerde Chebyshev matris yöntemini geliştirmiş ve sonuçlarını pratik anlamda kullanmıştır.

***Setenay Doğan:*** Dokuz Eylül Üniversitesi öğretim üyelerindendir. Lineer ve lineer olmayan integral denklemlerde Chebyshev matris yöntemini oluşturmuş ve sonuçlarını pratik anlamda kullanmıştır.

***Hayrettin Köroğlu:*** Dokuz Eylül Üniversitesi öğretim üyelerindendir. Lineer integro-diferansiyel denklemlerde Chebyshev matris yöntemini genişletmiş ve sonuçlarını pratik anlamda kullanmıştır.

***Gabil Aliyev:*** Azeri bilim adamıdır. Matematik ve fizik dallarında esas olan bilimsel çalışmaları; lineer olmayan singüler tipli adi diferansiyel denklemlerin, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için özel metotların bulunmasıyla bağlıdır.

Özellikle Laplace-Karson integral dönüşümünün ve ardışık yaklaştırma metotlarının aynı anda kullanımıyla özel çözüm metotları oluşturmuştur.

Bu çalışmalar ve oluşturulan çözüm metotları onun aşağıdaki eserlerinde geniş biçimde yer almıştır.

Özel Fonksiyonlar, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Matematiğin Fizik ve Mühendisliğe Uygulamaları, Kompozit Maddeler Mekaniğinin Matematik Temelleri.

Daha sonra bu yöntem ile ilgili araştırma yapanların başında; D. Elliot, M. A. Wolfe, S. E. El-gendi, N. K. Basu, M. Smasaki, T. Kiyono, R. Piessens ve M. Branders gelmektedir.

### 1.3. Araştırmanın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı aşağıda verilen ana başlıklar altında toplanmıştır.

- Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde var olan Chebyshev matris metodunun temellerini açıklamak.

- n-değişkene bağlı fonksiyonların küresel polinomlar ile seri açılımlarını oluşturmak. Özellikle n-değişkenli fonksiyonların Chebyshev polinomları ile, Legendre polinomları ile, Hermite polinomları ile ve Laguerre polinomları ile seri açılımlarını oluşturmak. Ayrıca alınan çok değişkenli küresel polinomları tanımlamak.

- n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formüllerini oluşturmak. Üstelik onların kuvvetlerinin ve türevlerinin bağıntılarını göstermek.

- Genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının katsayılarını matris şeklinde göstermek ve onların hesaplama yöntemini oluşturmak. Ayrıca istenilen fonksiyonun ve onların kuvvetlerinin ve türevlerinin Chebyshev matris metodunu göstermek. Üstelik lineer olmayan diferansiyel denklemin matris biçiminde olan denklemini göstermek.

- Böyle tipli serilerin ve Chebyshev tipli matrislerin vasıtasıyla özel bir sınıf zayıf lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde özel matris metodu oluşturmak.

## BÖLÜM 2

## n-DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN KÜRESEL POLİNOMLAR İLE SERİ AÇILIMLARI

Bu bölümde, küresel polinomlar olarak adlandırılan Chebyshev, Legendre, Hermite ve Laguerre Polinomlarının temel tanım ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca n-değişkene bağlı fonksiyonların küresel polinomlar ile seri açılımları oluşturulmuştur.

### 2.1. n-Değişkenli Fonksiyonların Chebyshev Polinomları ile Seri Açılımları

#### 2.1.1. Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının tanım ve özellikleri

Sturm-Liouville sınır değer probleminin özel bir durumu olan,

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad (2.1.1)$$

denklemine "Chebyshev Diferansiyel Denklemi" denir. Burada n reel sayıdır. Bu denklemin çözümlerine n. dereceden Chebyshev Fonksiyonları denir. n=0,1,2,3,...üzere Chebyshev Fonksiyonları, $T_n(x)$ Chebyshev Polinomları olarak adlandırılırlar.

Chebyshev polinomlarının özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

**1. Rodrigues Formülü**

$T_n(x)$ Chebyshev Polinomları,

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n (2n-1)(2n-3)\ldots 1} \frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \quad n=0,1,2,3,\ldots \qquad (2.1.2)$$

şeklinde Rodrigues Formülüyle ifade edilir.

**2. Üretici Fonksiyon**

Chebyshev Polinomlarının üretici fonksiyonu,

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \qquad (2.1.3)$$

şeklindedir.

**3. Ortogonallik**

n=0,1,2,3,... olmak üzere $T_n(x)$ Chebyshev Polinomları, $-1\leq x\leq 1$ aralığında $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ağırlık fonksiyonuyla tam ortogonal bir küme oluştururlar.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)dx=\begin{cases}0 & , \quad m\neq n\\ \pi & , \quad m=n=0\\ \pi/2 & , \quad m=n=1,2,3,...\end{cases} \qquad (2.1.4)$$

**4. Tek/Çift Fonksiyonlar**

$T_n(x)$ Chebyshev Polinomlarının tekliği ve çiftliği onun derecesi olan n' ye bağlıdır.

$$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x) \qquad (2.1.5)$$

- n çift ise $T_n(x)$ çift fonksiyondur.
- n tek ise $T_n(x)$ tek fonksiyondur.

**5. Rekurans Formülü**

Bir noktadaki Chebyshev Polinomu aynı nokta komşuluğundaki Chebyshev Polinomları ile ifade edilebilir.

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2.1.6}$$

**6. Özel Sonuçlar**

i. $$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{2.1.7}$$

ii. $$T_n(1) = 1 \tag{2.1.8}$$

iii. $$T_n(-1) = (-1)^n \tag{2.1.9}$$

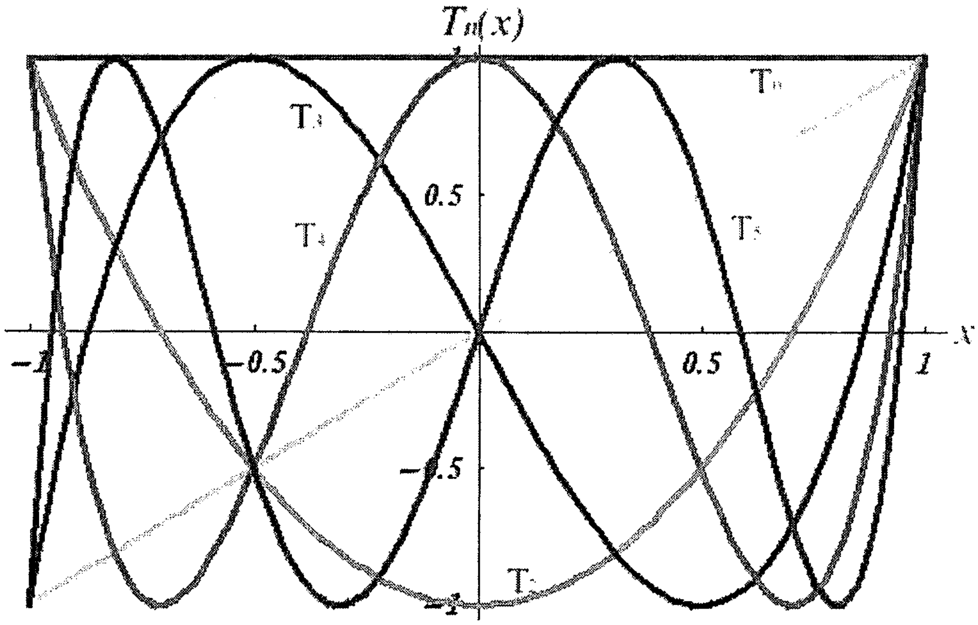
iv. $$T_n(0) = \begin{cases} 0 & ,\ n\ tek \\ (-1)^{n/2}, & n\ çift \end{cases} \tag{2.1.10}$$

v. $$T_{-n}(x) \equiv T_n(x) \tag{2.1.11}$$

(2.1.2) formülü yardımıyla hesaplanmış ilk birkaç Chebyshev Polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.




**Şekil 2.1.** İlk beş Chebyshev polinomunun grafiği

### 2.1.2. Fonksiyonların Chebyshev polinomları ile seriye açılması

Chebyshev Polinomlarının ortogonallik şartı kullanılarak,n-değişkenli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu, sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası hariç, $[-1,1]$ aralığında sürekli ve sınırlı ise ve bu aralıkta ancak sonlu sayıda extremuma sahip ise x' in her değeri için yakınsak olan ve toplamı bu fonksiyona eşit olan bir Chebyshev Serisi kabul eder.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \quad \textit{sürekli ise} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & , \textit{süreksizlik noktalarında} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx & , n = 0 \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx & , n = 1,2,3,... \end{cases}$$

### 2.1.3. Tek değişkenli fonksiyonların Chebyshev polinomları ile seri açılımları

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterilsin. Yani,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \tag{2.1.13}$$

olsun. Chebyshev Polinomlarının ortogonallik özelliklerinden yararlanılarak (2.1.13) açılımındaki $a_n$ katsayıları bulunabilir.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , \; m \neq n \\ \pi & , \; m = n = 0 \\ \pi/2 & , \; m = m = 1,2,3,... \end{cases} \tag{2.1.14}$$

((2.1.14) eşitliği Chebyshev Polinomlarının ortogonallik şartıdır.)

Gerçekten, (2.1.13) serisi $T_m(x)$ fonksiyonu ile çarpılarak $[-1,1]$ aralığında integre edilirse ve (2.1.14) göz önüne alınırsa $a_n$ katsayıları,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx & , \; n = 0 \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx & , \; n = 1,2,3,... \end{cases} \tag{2.1.15}$$

şeklinde bulunur.

### 2.1.4. n-değişkenli fonksiyonların Chebyshev polinomları ile seri açılımları

Yukarıda verilen bir değişkene bağlı fonksiyonların Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösteriminden faydalanarak iki ve daha çok değişkenli fonksiyonların Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

İlk önce $f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu seriye açılsın. Bunun için bu fonksiyon x değişkenine göre incelenirse ve (2.1.13)-(2.1.15) formüllerine esasen,

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y)T_n(x) \tag{2.1.16}$$

olur. Burada,

$$a_n(y)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)T_n(x)dx \qquad n=1,2,3,... \tag{2.1.17}$$

şeklindedir. $a_n(y)$ fonksiyonu ise tekrar (2.1.13)-(2.1.15) formüllerine dayanarak,

$$a_n(y)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}T_m(y) \tag{2.1.18}$$

seriye açılırsa,

$$a_{nm}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}a_n(y)T_m(y)dy \tag{2.1.19}$$

bulunur. (2.1.17)' teki $a_n(y)$ formülü (2.1.19)' de yerine yazılırsa,

$$a_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)T_n(x)T_m(y)dxdy \tag{2.1.20}$$

elde edilir. (2.1.18) formülü (2.1.16)' de yerine yazılırsa,

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}T_m(y)\right)T_n(x) \tag{2.1.21}$$

ve parantezler açılırsa,

$$f(x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{nm}T_n(x)T_m(y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{nm}T_{n,m}(x,y) \tag{2.1.22}$$

elde edilir.

Buradan elde edilen (2.1.22) formülü istenilen iki değişkenli fonksiyonun Chebyshev Polinomları vasıtasıyla ile seriye açılımıdır. Ayrıca (2.1.22) formülündeki $a_{nm}$ katsayıları (2.1.20) formülüyle bulunur.

Aynı şekilde üç değişkenli fonksiyonların Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı gösterilebilir. $f(x,y,z)$ fonksiyonunun seri şeklinde gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y,z)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}a_{ijk}T_i(x)T_j(y)T_k(z) \tag{2.1.23}$$

ve burada,

$$a_{ijk}=\frac{8}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}f(x,y,z)T_i(x)T_j(y)T_k(z)dxdydz \tag{2.1.24}$$

şeklinde bulunur.

Bu şekilde devam ederek rekürans anlayışında n-değişkenli $f(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonunun Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı şu şekilde gösterilebilir.

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}T_{\alpha_1}(x_1)T_{\alpha_2}(x_2)...T_{\alpha_n}(x_n) \tag{2.1.25}$$

burada,

$$a_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_{-1}^{1} ...(n)... \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{1-x_n^2}} f(x_1,...,x_n) T_{\alpha_1}(x_1)...T_{\alpha_n}(x_n) dx_1...dx_n \tag{2.1.26}$$

şeklinde elde edilir.

**2.1.5. Örnek** $f(x,y)=xy$ fonksiyonunu N=2 için Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seriye açalım.

**Çözüm.** İki değişkenli keyfi fonksiyonun Chebyshev Polinomları vasıtasıyla seriye açılması konusundaki (2.1.16)-(2.1.22) formülleri uyarınca,

$$xy = \sum_{n=0}^{2} a_n(y)T_n(x) = a_0(y)T_0(x) + a_1(y)T_1(x) + a_2(y)T_2(x)$$

$$a_0(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} xyT_0(x)dx = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

$$a_1(y) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} xyT_1(x)dx = \frac{2y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -y$$

$$a_2(y) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} xyT_2(x)dx = \frac{4y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{2y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

$$\begin{aligned} a_n(y) = \sum_{m=0}^{2} a_{nm}T_m(y) &= a_{00}T_0(y) + a_{01}T_1(y) + a_{02}T_2(y) + \\ &+ a_{10}T_0(y) + a_{11}T_1(y) + a_{12}T_2(y) + \\ &+ a_{20}T_0(y) + a_{21}T_1(y) + a_{22}T_2(y) \end{aligned}$$

$$a_{00} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} a_0(y)T_0(y)dy = 0$$

$$a_{01} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_0(y)T_1(y)dy = 0$$

$$a_{02} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_0(y)T_2(y)dy = 0$$

$$a_{10} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_1(y)T_0(y)dy = 0$$

$$a_{11} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_1(y)T_1(y)dy = 1$$

$$a_{12} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_1(y)T_2(y)dy = 0$$

$$a_{20} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_2(y)T_0(y)dy = 0$$

$$a_{21} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_2(y)T_1(y)dy = 0$$

$$a_{22} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}a_2(y)T_2(y)dy = 0$$

$$xy = \sum_{n=0}^{2}\left(\sum_{m=0}^{2}a_{nm}T_m(y)\right)T_n(x) = \sum_{n,m=0}^{2}a_{nm}T_n(x)T_m(y) = \sum_{n,m=0}^{2}a_{nm}T_{n,m}(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
xy = & a_{00}T_0(x)T_0(y)+a_{01}T_0(x)T_1(y)+a_{02}T_0(x)T_2(y)+\\
& + a_{10}T_1(x)T_0(y)+a_{11}T_1(x)T_1(y)+a_{12}T_1(x)T_2(y)+\\
& + a_{20}T_2(x)T_0(y)+a_{21}T_2(x)T_1(y)+a_{22}T_2(x)T_2(y)
\end{aligned}
$$

$$
xy = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm}T_{n,m}(x,y) = a_{11}T_1(x)T_1(y)
$$

şeklinde elde edilir.

## 2.2. n-Değişkenli Fonksiyonların Legendre Polinomları İle Seri Açılımları

### 2.2.1. Tek değişkenli Legendre polinomlarının tanım ve özellikleri

Sturm-Liouville sınır değer probleminin özel bir durumu olan,

$$
(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{2.2.1}
$$

denklemine "Legendre Diferansiyel Denklemi" denir. Burada n reel sayídır. Bu denklemin çözümlerine n. dereceden Legendre Fonksiyonları denir. n=0,1,2,3,...üzere Legendre Fonksiyonları, $P_n(x)$ Legendre Polinomları olarak adlandırılırlar.

Legendre Polinomlarının özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

**1. Rodrigues Formülü**

$P_n(x)$ Legendre Polinomları,

$$
P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad \text{n=0,1,2,3,...} \tag{2.2.2}
$$

şeklinde Rodrigues Formülüyle ifade edilebilir.

**2. Üretici Fonksiyon**

Legendre Polinomlarının üretici fonksiyonu,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{2.2.3}$$

şeklindedir.

**3. Ortogonallik**

n=0,1,2,3,... olmak üzere $P_n(x)$ Legendre Polinomları, $-1 \le x \le 1$ aralığında tam ortogonal bir küme oluştururlar.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases} \tag{2.2.4}$$

**4. Tek/Çift Fonksiyonlar**

$P_n(x)$ Legendre Polinomlarının tekliği ve çiftliği onun derecesi olan n' ye bağlıdır.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{2.2.5}$$

- n çift ise $P_n(x)$ çift fonksiyondur.
- n tek ise $P_n(x)$ tek fonksiyondur.

**5. Rekurans Formülü**

Bir noktadaki Legendre Polinomu aynı nokta komşuluğundaki Legendre Polinomları ile ifade edilebilir.

- $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ (2.2.6)

- $(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$ (2.2.7)

- $(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ (2.2.8)

- $P_{n-1}'(x) = xP_n'(x) - nP_n(x)$ (2.2.9)

- $P_{n+1}'(x) = xP_n'(x) + (n+1)P_n(x)$ (2.2.10)

**6. Özel Sonuçlar**

**i.** $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}(x)^{n-2k} \quad (2.2.11)$$

**ii.** $$P_n(1) = 1 \quad (2.2.12)$$

**iii.** $$P_n(-1) = (-1)^n \quad (2.2.13)$$

**iv.** $$P_n(0) = \begin{cases} 0 & , \ n \ \textit{tek} \\ (-1)^{n/2} \dfrac{1.3.5.....(n-1)}{2.4.6.....n} & , \ n \ \textit{çift} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

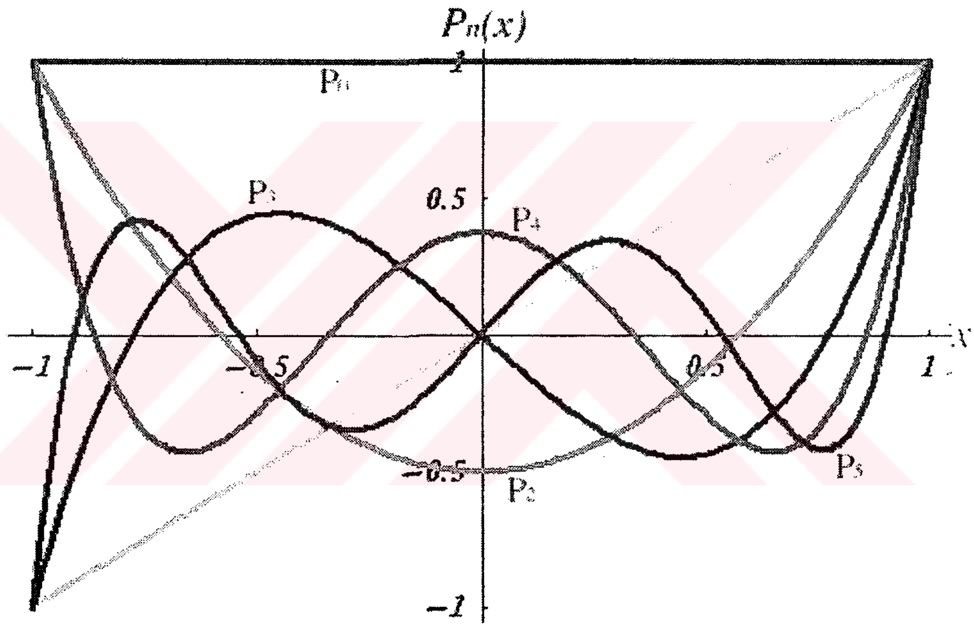
**v.** $$|P_n(x)| \leq 1 \quad (2.2.15)$$

**vi.** $$P_n'(-x) = (-1)^{n+1} P_n'(x) \quad (2.2.16)$$

(2.2.2) formülü yardımıyla hesaplanmış ilk birkaç Legendre Polinomu aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - x\right) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

Bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.




**Şekil 2.2.** İlk beş Legendre polinomunun grafiği

### 2.2.2. Fonksiyonların Legendre polinomları ile seriye açılması

Legendre Polinomlarının ortogonallik şartı kullanılarak, n-değişkenli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu, sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası hariç, $[-1,1]$ aralığında sürekli ve sınırlı ise ve bu aralıkta ancak sonlu sayıda extremuma sahip ise x' in her değeri için yakınsak olan ve toplamı bu fonksiyona eşit olan bir Legendre Serisi kabul eder.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \ f(x) \ sürekli \ ise \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & , \ süreksizlik \ noktalarında \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

### 2.2.3. Tek değişkenli fonksiyonların Legendre polinomları ile seri açılımları

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu Legendre Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterilsin. Yani,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{2.2.18}$$

olsun. Legendre Polinomlarının ortogonallik özelliklerinden yararlanılarak (2.2.1) açılımındaki $a_n$ katsayıları bulunabilir.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \tag{2.2.19}$$

((2.2.19) eşitliği Legendre Polinomlarının ortogonallik şartıdır.)

Gerçekten, (2.2.18) serisi $P_m(x)$ fonksiyonu ile çarpılarak $[-1,1]$ aralığında integre edilirse ve (2.2.19) göz önüne alınırsa $a_n$ katsayıları,

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \tag{2.2.20}$$

şeklinde bulunur.

### 2.2.4. n-değişkenli fonksiyonların Legendre polinomları ile seri açılımları

Yukarıda verilen bir değişkene bağlı fonksiyonların Legendre Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösteriminden faydalanarak iki ve daha çok değişkenli fonksiyonların Legendre Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

İlk önce $f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu seriye açılsın. Bunun için bu fonksiyon x değişkenine göre incelenirse ve (2.2.18)-(2.2.20) formüllerine esasen,

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y)P_n(x) \tag{2.2.21}$$

olur. Burada,

$$a_n(y)=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x,y)P_n(x)dx \tag{2.2.22}$$

şeklindedir. $a_n(y)$ fonksiyonu ise tekrar (2.2.18)-(2.2.20) formüllerine dayanılarak,

$$a_n(y)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}P_m(y) \tag{2.2.23}$$

seriye açılırsa,

$$a_{nm}=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}a_n(y)P_m(y)dy \tag{2.2.24}$$

bulunur. (2.2.22)' teki $a_n(y)$ formülü (2.2.24)' de yerine yazılırsa,

$$a_{nm}=\frac{2m+1}{2}\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)P_n(x)P_m(y)dxdy \tag{2.2.25}$$

elde edilir. (2.2.23) formülü (2.2.21)' de yerine yazılırsa,

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}P_m(y)\right)P_n(x) \tag{2.2.26}$$

ve parantezler açılırsa,

$$f(x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{nm}P_n(x)P_m(y) \tag{2.2.27}$$

elde edilir.

Buradan elde edilen (2.2.27) formülü istenilen iki değişkenli fonksiyonun Legendre Polinomları vasıtasıyla ile seriye açılımıdır. Ayrıca (2.2.27) formülündeki $a_{nm}$ katsayıları (2.2.25) formülüyle bulunur.

Aynı şekilde üç değişkenli fonksiyonların Legendre Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı gösterilebilir. $f(x,y,z)$ fonksiyonunun seri şeklinde gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y,z)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}a_{ijk}P_i(x)P_j(y)P_k(z) \tag{2.2.28}$$

ve burada,

$$a_{ijk}=\frac{2i+1}{2}\frac{2j+1}{2}\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y,z)P_i(x)P_j(y)P_k(z)dxdydz \tag{2.2.29}$$

şeklinde bulunur.

Bu şekilde devam ederek rekürans anlayışında n-değişkenli $f(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonunun Legendre Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı şu şekilde gösterilebilir.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} P_{\alpha_1}(x_1)P_{\alpha_2}(x_2)\dots P_{\alpha_n}(x_n) \qquad (2.2.30)$$

burada,

$$a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}=\frac{(2\alpha_1+1)\dots(2\alpha_n+1)}{2^n}\int_{-1}^{1}\dots(n)\dots\int_{-1}^{1} f(x_1,\dots,x_n)P_{\alpha_1}(x_1)\dots P_{\alpha_n}(x_n)dx_1\dots dx_n$$

(2.2.31)

şeklinde elde edilir.

**2.2.5. Örnek** $f(x,y)=xy$ fonksiyonunu N=2 için Legendre Polinomları vasıtasıyla seriye açalım.

**Çözüm.** İki değişkenli keyfi fonksiyonun Legendre Polinomları vasıtasıyla seriye açılması konusundaki (2.2.21)-(2.2.27) formüllerine dayanılarak,

$$xy=\sum_{n=0}^{2} a_n(y)P_n(x)=a_0(y)P_0(x)+a_1(y)P_1(x)+a_2(y)P_2(x)$$

$$a_0(y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xyP_0(x)dx=\frac{y}{2}\int_{-1}^{1} xdx=0$$

$$a_1(y)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} xyP_1(x)dx=\frac{3y}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx=y$$

$$a_2(y)=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} xyP_2(x)dx=\frac{15y}{4}\int_{-1}^{1} x^3dx-\frac{5y}{4}\int_{-1}^{1} xdx=0$$

$$a_n(y) = \sum_{m=0}^{2} a_{nm} P_m(y) = a_{00} P_0(y) + a_{01} P_1(y) + a_{02} P_2(y) +$$
$$+ a_{10} P_0(y) + a_{11} P_1(y) + a_{12} P_2(y) +$$
$$+ a_{20} P_0(y) + a_{21} P_1(y) + a_{22} P_2(y)$$

$$a_{00} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} a_0(y) P_0(y) dy = 0$$

$$a_{01} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} a_0(y) P_1(y) dy = 0$$

$$a_{02} = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} a_0(y) P_2(y) dy = 0$$

$$a_{10} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} a_1(y) P_0(y) dy = 0$$

$$a_{11} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} a_1(y) P_1(y) dy = 1$$

$$a_{12} = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} a_1(y) P_2(y) dy = 0$$

$$a_{20} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} a_2(y) P_0(y) dy = 0$$

$$a_{21} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} a_2(y) P_1(y) dy = 0$$

$$a_{22} = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} a_2(y) P_2(y) dy = 0$$

$$xy = \sum_{n=0}^{2} \left( \sum_{m=0}^{2} a_{nm} P_m(y) \right) P_n(x) = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} P_n(x) P_m(y) = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} P_{n,m}(x,y)$$

$$\begin{aligned} xy &= a_{00} P_0(x) P_0(y) + a_{01} P_0(x) P_1(y) + a_{02} P_0(x) P_2(y) + \\ &+ a_{10} P_1(x) P_0(y) + a_{11} P_1(x) P_1(y) + a_{12} P_1(x) P_2(y) + \\ &+ a_{20} P_2(x) P_0(y) + a_{21} P_2(x) P_1(y) + a_{22} P_2(x) P_2(y) \end{aligned}$$

$$xy = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} P_n(x) P_m(y) = a_{11} P_1(x) P_1(y)$$

şeklinde bulunur.

## 2.3. n-Değişkenli Fonksiyonların Hermite Polinomları ile Seri Açılımları

### 2.3.1. Tek değişkenli Hermite polinomlarının tanım ve özellikleri

Sturm-Liouville sınır değer probleminin özel bir durumu olan,

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{2.3.1}$$

denklemine "Hermite Diferansiyel Denklemi" denir. Burada n reel sayıdır. Bu denklemin çözümlerine n. dereceden Hermite Fonksiyonları denir. n=0,1,2,3,...üzere Hermite Fonksiyonları, $H_n(x)$ Hermite Polinomları olarak adlandırılırlar.

Hermite Polinomlarının özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

**1. Rodrigues Formülü**

$H_n(x)$ Hermite Polinomları,

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad n=0,1,2,3,... \tag{2.3.2}$$

şeklinde Rodrigues Formülüyle ifade edilebilir.

**2. Üretici Fonksiyon**

Hermite Polinomlarının üretici fonksiyonu,

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)t^n}{n!} \tag{2.3.3}$$

şeklindedir.

**3. Ortogonallik**

n=0,1,2,3,... olmak üzere $H_n(x)$ Hermite Polinomları, $-\infty \le x \le \infty$ aralığında $e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuyla tam ortogonal bir küme oluştururlar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n\end{cases} \tag{2.3.4}$$

**4. Tek/Çift Fonksiyonlar**

$H_n(x)$ Hermite Polinomlarının tekliği ve çiftliği onun derecesi olan n' ye bağlıdır.

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x) \tag{2.3.5}$$

- n çift ise $H_n(x)$ çift fonksiyondur.
- n tek ise $H_n(x)$ tek fonksiyondur.

**5. Rekurans Formülü**

Bir noktadaki Hermite Polinomu aynı nokta komşuluğundaki Hermite Polinomları ile ifade edilebilir.

- $$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{2.3.6}$$

- $$H_n{}'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{2.3.7}$$

**6. Özel Sonuçlar**

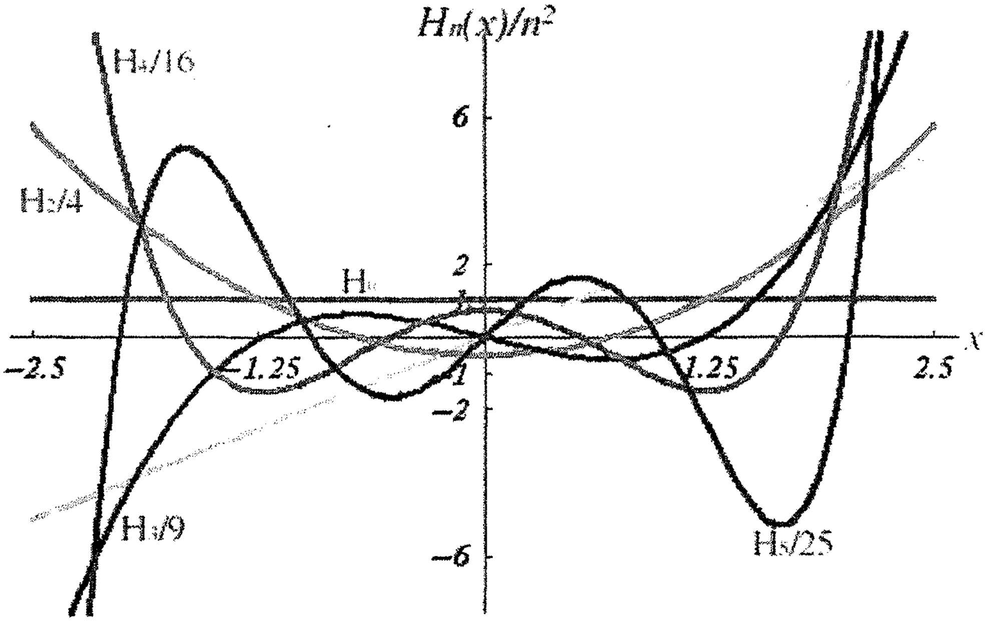
i. $$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{2.3.8}$$

ii. $$H_n(0) = \begin{cases} 0, & n \quad tek \\ (-1)^{n/2} 2^{n/2} 1.3.5.....(n-1), & n \quad çift \end{cases} \tag{2.3.9}$$

(2.3.2) formülü yardımıyla hesaplanmış ilk birkaç Hermite Polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.




**Şekil 2.3.** İlk beş Hermite polinomunun grafiği

### 2.3.2. Fonksiyonların Hermite polinomları ile seriye açılması

Hermite Polinomlarının ortogonallik şartı kullanılarak,n-değişkenli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu, sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası hariç, $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı ise ve bu aralıkta ancak sonlu sayıda extremuma sahip ise x' in her değeri için yakınsak olan ve toplamı bu fonksiyona eşit olan bir Hermite Serisi kabul eder.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \ \textit{sürekli ise} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & , \textit{süreksizlik noktalarında} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$$

### 2.3.3. Tek değişkenli fonksiyonların Hermite polinomları ile seri açılımları

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu Hermite Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterilsin. Yani,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \tag{2.3.11}$$

olsun. Hermite Polinomlarının ortogonallik özelliklerinden yararlanılarak (2.3.11) açılımındaki $a_n$ katsayıları bulunabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases} \tag{2.3.12}$$

((2.3.12) eşitliği Hermite Polinomlarının ortogonallik şartıdır.)

Gerçekten, (2.3.11) serisi $H_m(x)$ fonksiyonu ile çarpılarak $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilirse ve (2.3.12) göz önüne alınırsa $a_n$ katsayıları,

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx \tag{2.3.13}$$

şeklinde bulunur.

**2.3.4. n-değişkenli fonksiyonların Hermite polinomları ile seri açılımları**

Yukarıda verilen bir değişkene bağlı fonksiyonların Hermite Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösteriminden faydalanarak iki ve daha çok değişkenli fonksiyonların Hermite Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

İlk önce $f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu seriye açılsın. Bunun için bu fonksiyon x değişkenine göre incelenirse ve (2.3.11)-(2.3.13) formüllerine esasen,

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) H_n(x) \tag{2.3.14}$$

olur. Burada,

$$a_n(y) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x,y) H_n(x) dx \tag{2.3.15}$$

şeklindedir. $a_n(y)$ fonksiyonu ise tekrar (2.3.11)-(2.3.13) formüllerine dayanılarak,

$$a_n(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} H_m(y) \tag{2.3.16}$$

şeklinde seriye açılırsa,

$$a_{nm} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} a_n(y) H_m(y) dy \tag{2.3.17}$$

bulunur. (2.3.15)' teki $a_n(y)$ formülü (2.3.17)' de yerine yazılırsa,

$$a_{nm} = \frac{1}{2^{n+m} n! m! \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} f(x,y) H_n(x) H_m(y) dx dy \tag{2.3.18}$$

elde edilir. (2.3.16) formülü (2.3.14)' de yerine yazılırsa,

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} H_m(y) \right) H_n(x) \tag{2.3.19}$$

ve parantezleri açılırsa,

$$f(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} H_n(x) H_m(y) \tag{2.3.20}$$

elde edilir.

Buradan elde edilen (2.3.20) formülü istenilen iki değişkenli fonksiyonun Hermite Polinomları vasıtasıyla ile seriye açılımıdır. Ayrıca (2.3.20) formülündeki $a_{nm}$ katsayıları (2.3.18) formülüyle bulunur.

Aynı şekilde üç değişkenli fonksiyonların Hermite Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı gösterilebilir. $f(x,y,z)$ fonksiyonunun seri şeklinde gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y,z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} H_i(x) H_j(y) H_k(z) \tag{2.3.21}$$

ve burada,

$$a_{ijk} = \frac{1}{2^{i+j+k}\, i!\, j!\, k!\, \pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} f(x,y,z) H_i(x) H_j(y) H_k(z)\, dx dy dz \tag{2.3.22}$$

şeklinde bulunur.

Bu şekilde devam ederek rekurans anlayışında n-değişkenli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun Hermite Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı şu şekilde gösterilebilir.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) H_{\alpha_2}(x_2) \ldots H_{\alpha_n}(x_n) \tag{2.3.23}$$

burada,

$$\frac{1}{2^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\, \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n! (\pi)^{n/2}} = H$$

denirse,

$$a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = H\int_{-\infty}^{\infty}\ldots(n)\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2-\ldots-x_n^2} f(x_1,\ldots,x_n)H_{\alpha_1}(x_1)\ldots H_{\alpha_n}(x_n)dx_1\ldots dx_n \tag{2.3.24}$$

şeklinde elde edilir.

**2.3.5. Örnek** $f(x,y)=xy$ fonksiyonunu N=2 için Hermite Polinomları vasıtasıyla seriye açalım.

**Çözüm.** İki değişkenli keyfi fonksiyonun Hermite Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı konusundaki (2.3.14)-(2.3.20) formüllerine esasen,

$$xy = \sum_{n=0}^{2} a_n(y)H_n(x) = a_0(y)H_0(x) + a_1(y)H_1(x) + a_2(y)H_2(x)$$

$$a_0(y) = \frac{1}{2^0 0!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} xyH_0(x)dx = \frac{y}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} xdx = 0$$

$$a_1(y) = \frac{1}{2^1 1!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} xyH_1(x)dx = \frac{y}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{y}{2}$$

$$a_2(y) = \frac{1}{2^2 2!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} xyH_2(x)dx = \frac{y}{8\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(4x^3 - 2x\right)dx = 0$$

$$\begin{aligned} a_n(y) = {} & \sum_{m=0}^{2} a_{nm}H_m(y) = a_{00}H_0(y) + a_{01}H_1(y) + a_{02}H_2(y) + \\ & + a_{10}H_0(y) + a_{11}H_1(y) + a_{12}H_2(y) + \\ & + a_{20}H_0(y) + a_{21}H_1(y) + a_{22}H_2(y) \end{aligned}$$

$$a_{00} = \frac{1}{2^0 0!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_0(y)H_0(y)dy = 0$$

$$a_{01} = \frac{1}{2^1 1! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_0(y) H_1(y) dy = 0$$

$$a_{02} = \frac{1}{2^2 2! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_0(y) H_2(y) dy = 0$$

$$a_{10} = \frac{1}{2^0 0! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_1(y) H_0(y) dy = 0$$

$$a_{11} = \frac{1}{2^1 1! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_1(y) H_1(y) dy = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = \frac{1}{2^2 2! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_1(y) H_2(y) dy = 0$$

$$a_{20} = \frac{1}{2^0 0! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_2(y) H_0(y) dy = 0$$

$$a_{21} = \frac{1}{2^1 1! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_2(y) H_1(y) dy = 0$$

$$a_{22} = \frac{1}{2^2 2! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_2(y) H_2(y) dy = 0$$

$$xy = \sum_{n=0}^{2} \left( \sum_{m=0}^{2} a_{nm} H_m(y) \right) H_n(x) = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} H_n(x) H_m(y) = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} H_{n,m}(x, y)$$

$$xy = a_{00}H_0(x)H_0(y) + a_{01}H_0(x)H_1(y) + a_{02}H_0(x)H_2(y) +$$
$$+ a_{10}H_1(x)H_0(y) + a_{11}H_1(x)H_1(y) + a_{12}H_1(x)H_2(y) +$$
$$+ a_{20}H_2(x)H_0(y) + a_{21}H_2(x)H_1(y) + a_{22}H_2(x)H_2(y)$$

$$xy = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm}H_n(x)H_m(y) = a_{11}H_1(x)H_1(y)$$

şeklinde bulunur.

## 2.4. n-Değişkenli Fonksiyonların Laguerre Polinomları ile Seri Açılımları

### 2.4.1. Tek değişkenli Laguerre polinomlarının tanım ve özellikleri

Sturm-Liouville sınır değer probleminin özel bir durumu olan,

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (2.4.1)$$

denklemine "Laguerre Diferansiyel Denklemi" denir. Burada n reel sayıdır. Bu denklemin çözümlerine n. dereceden Laguerre Fonksiyonları denir. n=0,1,2,3,...üzere Laguerre Fonksiyonları, $L_n(x)$ Laguerre Polinomları olarak adlandırılırlar.

Laguerre Polinomlarının özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

**1. Rodrigues Formülü**

$L_n(x)$ Laguerre Polinomları,

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) \quad n=0,1,2,3,... \qquad (2.4.2)$$

şeklinde Rodrigues Formülüyle ifade edilebilir.

## 2. Üretici Fonksiyon

Laguerre Polinomlarının üretici fonksiyonu,

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \tag{2.4.3}$$

şeklindedir.

## 3. Ortogonallik

n=0,1,2,3,... olmak üzere $L_n(x)$ Laguerre Polinomları, $0 \leq x \leq \infty$ aralığında $e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuyla tam ortogonal bir küme oluştururlar.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases} \tag{2.4.4}$$

## 4. Rekurans Formülü

Bir noktadaki Laguerre Polinomu aynı nokta komşuluğundaki Laguerre Polinomları ile ifade edilebilir.

- $$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \tag{2.4.5}$$
- $$L_n{}'(x) = nL_{n-1}{}'(x) - nL_{n-1}(x) \tag{2.4.6}$$
- $$xL_n{}'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x) \tag{2.4.7}$$

## 5. Özel Sonuçlar

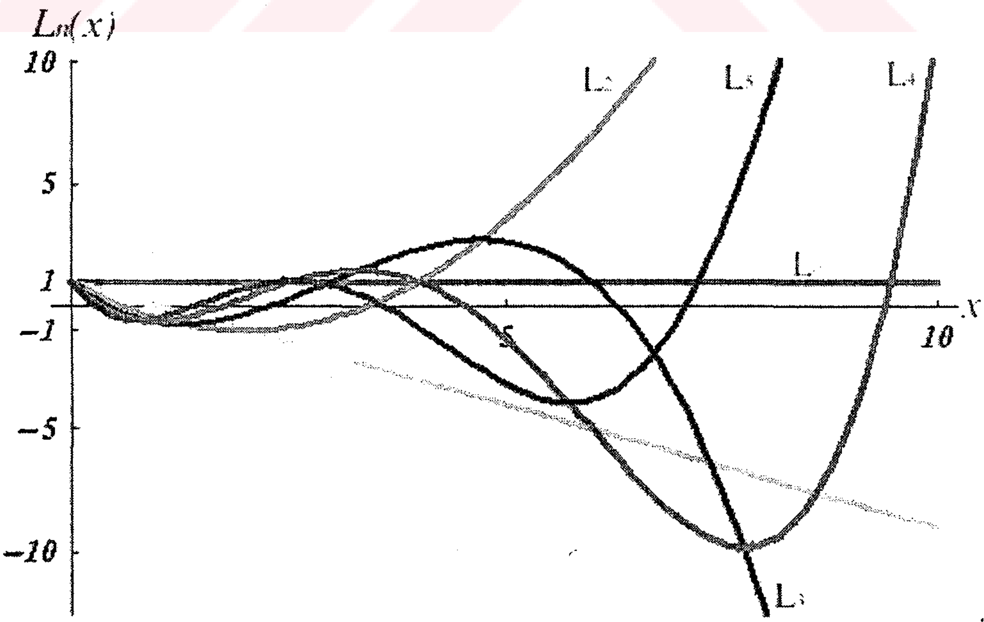
**i.** $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2 (n-k)!} (x)^k \qquad (2.4.8)$$

**ii.** $$L_n(0) = 1 \qquad (2.4.9)$$

(4.2) formülü yardımıyla hesaplanmış ilk birkaç Laguerre Polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= -x + 1 \\
L_2(x) &= \frac{1}{2!}\left(x^2 - 4x + 2\right) \\
L_3(x) &= \frac{1}{3!}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right) \\
L_4(x) &= \frac{1}{4!}\left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\right)
\end{aligned} \qquad (2.4.10)$$

Bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.




**Şekil 2.4.** İlk beş Laguerre polinomunun grafiği

### 2.4.2. Fonksiyonların Laguerre polinomları ile seriye açılması

Laguerre Polinomlarının ortogonallik şartı kullanılarak,n-değişkenli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu, sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası hariç, $(0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı ise ve bu aralıkta ancak sonlu sayıda extremuma sahip ise x' in her değeri için yakınsak olan ve toplamı bu fonksiyona eşit olan bir Laguerre Serisi kabul eder.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \textit{ sürekli ise} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & , \textit{süreksizlik noktalarında} \end{cases}$$

$$a_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx$$

### 2.4.3. Tek değişkenli fonksiyonların Laguerre polinomları ile seri açılımları

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu Laguerre Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterilsin. Yani,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) \tag{2.4.11}$$

olsun. Laguerre Polinomlarının ortogonallik özelliklerinden yararlanılarak (2.4.11) açılımındaki $a_n$ katsayıları bulunabilir.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases} \tag{2.4.12}$$

((2.4.12) eşitliği Laguerre Polinomlarının ortogonallik şartıdır.)

Gerçekten, (2.4.11) serisi $L_m(x)$ fonksiyonu ile çarpılarak $(0,\infty)$ aralığında integre edilirse ve (2.4.12) göz önüne alınırsa $a_n$ katsayıları,

$$a_n = \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_n(x) dx \tag{2.4.13}$$

şeklinde bulunur.

### 2.4.4. n-değişkenli fonksiyonların Laguerre polinomları ile seri açılımları

Yukarıda verilen bir değişkene bağlı fonksiyonların Laguerre Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösteriminden faydalanarak iki ve daha çok değişkenli fonksiyonların Laguerre Polinomları vasıtasıyla seri şeklinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

İlk önce $f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu seriye açılsın. Bunun için bu fonksiyon x değişkenine göre incelenirse ve (2.4.11)-(2.4.13) formüllerine esasen,

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) L_n(x) \tag{2.4.14}$$

olur. Burada,

$$a_n(y) = \int_0^\infty e^{-x} f(x,y) L_n(x) dx \tag{2.4.15}$$

şeklindedir. $a_n(y)$ fonksiyonu ise tekrar (2.4.11)-(2.4.13) formüllerine dayanılarak,

$$a_n(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} L_m(y) \tag{2.4.16}$$

seriye açılırsa,

$$a_{nm} = \int_0^\infty e^{-y} a_n(y) L_m(y) dy \tag{2.4.17}$$

bulunur. (2.4.15)' teki $a_n(y)$ formülü (2.4.17)' de yerine yazılırsa,

$$a_{nm} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} f(x,y) L_n(x) L_m(y) dx dy \tag{2.4.18}$$

elde edilir. (2.4.16) formülü (2.4.14)' de yerine yazılırsa,

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} L_m(y) \right) L_n(x) \tag{2.4.19}$$

ve parantezler açılırsa,

$$f(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} L_n(x) L_m(y) \tag{2.4.20}$$

elde edilir.

Buradan elde edilen (2.4.20) formülü istenilen iki değişkenli fonksiyonun Laguerre Polinomları vasıtasıyla ile seriye açılımıdır. Ayrıca (2.4.20) formülündeki $a_{nm}$ katsayıları (2.4.18) formülüyle bulunur.

Aynı şekilde üç değişkenli fonksiyonların Laguerre Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı gösterilebilir. $f(x,y,z)$ fonksiyonunun seri şeklinde gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y,z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z) \tag{2.4.21}$$

ve burada,

$$a_{ijk} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y-z} f(x,y,z) L_i(x) L_j(y) L_k(z) dxdydz \tag{2.4.22}$$

şeklinde bulunur.

Bu şekilde devam ederek rekürans anlayışında n-değişkenli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonunun Laguerre Polinomları vasıtasıyla seriye açılımı şu şekilde gösterilebilir.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n = 0}^{\infty} a_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} L_{\alpha_1}(x_1) L_{\alpha_2}(x_2) ... L_{\alpha_n}(x_n) \tag{2.4.23}$$

burada,

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = \int_0^{\infty} ...(n)... \int_0^{\infty} e^{-x_1 - ... - x_n} f(x_1, ..., x_n) L_{\alpha_1}(x_1) ... L_{\alpha_n}(x_n) dx_1 ... dx_n \tag{2.4.24}$$

şeklinde elde edilir.

**2.4.5. Örnek** $f(x,y) = xy$ fonksiyonunu N=2 için Laguerre Polinomları vasıtasıyla seriye açalım.

**Çözüm.** İki değişkenli keyfi fonksiyonun Laguerre Polinomları vasıtasıyla seriye açılması konusundaki (2.4.14)-(2.4.20) formülleri göz önüne alınırsa,

$$xy = \sum_{n=0}^{2} a_n(y) L_n(x) = a_0(y) L_0(x) + a_1(y) L_1(x) + a_2(y) L_2(x)$$

$$a_0(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} xy L_0(x) dx = y$$

$$a_1(y) = \int_0^\infty e^{-x} xy L_1(x) dx = -y$$

$$a_2(y) = \int_0^\infty e^{-x} xy L_2(x) dx = 0$$

$$a_n(y) = \sum_{m=0}^{2} a_{nm} L_m(y) = a_{00} L_0(y) + a_{01} L_1(y) + a_{02} L_2(y) +$$
$$+ a_{10} L_0(y) + a_{11} L_1(y) + a_{12} L_2(y) +$$
$$+ a_{20} L_0(y) + a_{21} L_1(y) + a_{22} L_2(y)$$

$$a_{00} = \int_0^\infty e^{-y} a_0(y) L_0(y) dy = 1$$

$$a_{01} = \int_0^\infty e^{-y} a_0(y) L_1(y) dy = -1$$

$$a_{02} = \int_0^\infty e^{-y} a_0(y) L_2(y) dy = 0$$

$$a_{10} = \int_0^\infty e^{-y} a_1(y) L_0(y) dy = -1$$

$$a_{11} = \int_0^\infty e^{-y} a_1(y) L_1(y) dy = 1$$

$$a_{12} = \int_0^\infty e^{-y} a_1(y) L_2(y) dy = 0$$

$$a_{20} = \int_0^{\infty} e^{-y} a_2(y) L_0(y) dy = 0$$

$$a_{21} = \int_0^{\infty} e^{-y} a_2(y) L_1(y) dy = 0$$

$$a_{22} = \int_0^{\infty} e^{-y} a_2(y) L_2(y) dy = 0$$

$$xy = \sum_{n=0}^{2} \left( \sum_{m=0}^{2} a_{nm} L_m(y) \right) L_n(x) = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} L_n(x) L_m(y) = \sum_{n,m=0}^{2} a_{nm} L_{n,m}(x,y)$$

$$\begin{aligned} xy &= a_{00} L_0(x) L_0(y) + a_{01} L_0(x) L_1(y) + a_{02} L_0(x) L_2(y) + \\ &+ a_{10} L_1(x) L_0(y) + a_{11} L_1(x) L_1(y) + a_{12} L_1(x) L_2(y) + \\ &+ a_{20} L_2(x) L_0(y) + a_{21} L_2(x) L_1(y) + a_{22} L_2(x) L_2(y) \end{aligned}$$

$$xy = a_{00} L_0(x) L_0(y) + a_{01} L_0(x) L_1(y) + a_{10} L_1(x) L_0(y) + a_{11} L_1(x) L_1(y)$$

şeklinde bulunur.

# BÖLÜM 3

# n-DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ CHEBYSHEV POLİNOMLARININ REKURANS FORMÜLLERİNİN, KUVVET VE TÜREV BAĞINTILARININ OLUŞTURULMASI

Bu bölümde, tek değişkenli Chebyshev polinomlarının tanım ve özelliklerinden hareketle genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının tanımı verilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülleri oluşturulmuş, üstelik onların kuvvet ve türev bağıntıları verilmiştir.

## 3.1. n-Değişkenli Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Rekurans Formüllerinin Oluşturulması

### 3.1.1. Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının rekurans formülü

Tek değişkenli Chebyshev polinomu,

$$T_r(x)=\cos(r\theta)\ ,\quad \cos\theta=x\ ,\quad -1\leq x\leq 1 \tag{3.1.1}$$

olarak tanımlanmıştır. Tek değişkenli Chebyshev polinomunun rekurans bağıntısı ise,

- $$2xT_r(x)=T_{r+1}(x)+T_{r-1}(x) \tag{3.1.2}$$

veya

- $$2xT_r(x)=\sum_{i=0}^{1}T_{r+(-1)^i}(x) \tag{3.1.3}$$

şeklinde ifade edilir.

### 3.1.2. İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülü

İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{n,m}(x,y) = T_n(x)T_m(y) \tag{3.1.4}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $T_n(x)$ ve $T_m(y)$ tek değişkenli Chebyshev polinomlarıdır ve şöyle tanımlanmışlardır.

$$T_n(x) = \cos(r\theta),\ \cos\theta = x,\ -1 \le x \le 1 \tag{3.1.5}$$

$$T_m(y) = \cos(s\phi),\ \cos\phi = y,\ -1 \le y \le 1 \tag{3.1.6}$$

Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının rekurans bağıntısından ve özelliklerinden hareketle aşağıdaki rekurans formüller elde edilebilir.

**1)** $$T_{-r}(x) \equiv T_r(x) \tag{3.1.7}$$

olduğundan,

$$T_{-r,-s}(x,y) = T_{-r}(x)T_{-s}(y) = T_r(x)T_s(y) = T_{r,s}(x,y) \tag{3.1.8}$$

olur.

**2)** $$T_0(x) = 1 \tag{3.1.9}$$

olduğundan,

$$T_{0,0}(x,y) = T_0(x)T_0(y) = 1.1 = 1 \tag{3.1.10}$$

bulunur.

**3)** $T_1(x) = x$ (3.1.11)

olduğundan,

$$T_{1,1}(x,y) = T_1(x)T_1(y) = x.y = xy \tag{3.1.12}$$

olur.

**4)** $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$ (3.1.13)

trigonometrik eşitliğinden yararlanarak,

$$2T_r(x)T_s(x) = T_{r+s}(x) + T_{r-s}(x) \tag{3.1.14}$$

idi. Buradan,

$$T_{r,s}(x,y)T_{p,q}(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} T_{r+(-1)^i p,\, s+(-1)^j q}(x,y) \tag{3.1.15}$$

bulunur.

**5)** $T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x)$ (3.1.16)

idi.

$$T_{r,s}(x,y) = T_r(x)T_s(y) \tag{3.1.17}$$

olduğundan,

$$T_{r+1,s+1}(x,y) = T_{r+1}(x)T_{s+1}(y) \tag{3.1.18}$$

yazılabilir.

$$T_{r+1,s+1}(x,y)=[2xT_r(x)-T_{r-1}(x)][2yT_s(y)-T_{s-1}(y)]=$$

$$=4xyT_r(x)T_s(y)-2xT_r(x)T_{s-1}(y)-2yT_{r-1}(x)T_s(y)+T_{r-1}(x)T_{s-1}(y)$$

$$=4xyT_{r,s}(x,y)-2xT_{r,s-1}(x,y)-2yT_{r-1,s}(x,y)+T_{r-1,s-1}(x,y) \qquad (3.1.19)$$

bulunur.

**6)** İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomunun rekurans bağıntısı, verilmiş olan tek değişkenli Chebyshev polinomunun rekurans bağıntısından hareketle,

$$2xT_r(x)2yT_s(y)=4xyT_{r,s}(x,y) \qquad (3.1.20)$$

$$\{T_{r+1}(x)+T_{r-1}(x)\}\{T_{s+1}(y)+T_{s-1}(y)\}=4xyT_{r,s}(x,y)$$

$$4xyT_{r,s}(x,y)=(T_{r+1,s+1}+T_{r+1,s-1}+T_{r-1,s+1}+T_{r-1,s-1})$$

- $$2^2xyT_{r,s}(x,y)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}T_{r+(-1)^i,s+(-1)^j}(x,y) \qquad (3.1.21)$$

bulunur.

**7)** $$2xT_{r,s}(x,y)=T_{r+1,s}(x;y)+T_{r-1,s}(x,y) \qquad (3.1.22)$$

$$2yT_{r,s}(x,y)=T_{r,s+1}(x,y)+T_{r,s-1}(x,y) \qquad (3.1.23)$$

**8)** $$x^m y^n T_{r,s}(x,y)=\frac{1}{2^{m+n}}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}T_{r-m+2i,s-n+2j}(x,y) \qquad (3.1.24)$$

9) $$\int T_{r,s}(x,y)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}\frac{(-1)^i T_{r+(-1)^i,s}(x,y)}{r+(-1)^i} \tag{3.1.25}$$

10) $$\int T_{r,s}(x,y)dy = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\frac{(-1)^j T_{r,s+(-1)^j}(x,y)}{s+(-1)^j} \tag{3.1.26}$$

### 3.1.3. Üç değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülü

Üç değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{r,s,t}(x,y,z) = T_r(x)T_s(y)T_t(z) \tag{3.1.27}$$

olarak tanımlanmıştır. Rekurans bağıntısı ise,

$$2xT_r(x)2yT_s(y)2zT_t(z) = 8xyzT_{r,s,t}(x,y,z) \tag{3.1.28}$$

$$\{T_{r+1}(x)+T_{r-1}(x)\}\{T_{s+1}(y)+T_{s-1}(y)\}\{T_{t+1}(z)+T_{t-1}(z)\} = 2^3 xyzT_{r,s,t}(x,y,z)$$

$$2^3 xyzT_r(x)T_s(y)T_t(z) = \begin{Bmatrix} T_{r+1,s+1,t+1} + T_{r+1,s-1,t+1} + T_{r-1,s+1,t+1} + T_{r-1,s-1,t+1} + \\ + T_{r+1,s+1,t-1} + T_{r+1,s-1,t-1} + T_{r-1,s+1,t-1} + T_{r-1,s-1,t-1} \end{Bmatrix}$$

- $$2^3 xyzT_{r,s,t}(x,y,z) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} T_{r+(-1)^i,s+(-1)^j,t+(-1)^k}(x,y,z) \tag{3.1.29}$$

şeklinde bulunur.

### 3.1.4. n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülü

n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{r_1,r_2,\ldots,r_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=T_{r_1}(x_1)T_{r_2}(x_2)\ldots T_{r_n}(x_n) \tag{3.1.30}$$

olarak tanımlanmıştır. Aynı yöntem izlenerek rekurans anlayışında n-değişkenli Chebyshev polinomunun rekurans formülü aşağıdaki gibi bulunur.

$$2^n x_1,x_2,\ldots,x_n T_{r_1}(x_1)T_{r_2}(x_2)\ldots T_{r_n}(x_n)=2x_1T_{r_1}(x_1)2x_2T_{r_2}(x_2)\ldots 2x_nT_{r_n}(x_n)$$

$$2^n x_1,x_2,\ldots,x_n T_{r_1}(x_1)T_{r_2}(x_2)\ldots T_{r_n}(x_n)=\{T_{r_1+1}+T_{r_1-1}\}\{T_{r_2+1}+T_{r_2-1}\}\ldots\{T_{r_n+1}+T_{r_n-1}\}$$

- $$2^n x_1,x_2,\ldots,x_n T_{r_1,r_2,\ldots,r_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\ldots(n)\ldots\sum_{i_n=0}^{1}A \tag{3.1.31}$$

$$A=T_{r_1+(-1)^{i_1},r_2+(-1)^{i_2},\ldots,r_n+(-1)^{i_n}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

şeklinde ifade edilir.

## 3.2. n-Değişkenli Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının n. Dereceden Kuvvetlerinin Oluşturulması

### 3.2.1. Tek değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri

Tek değişkenli Chebyshev polinomu,

$$T_r(x)=\cos(r\theta)\ ,\quad \cos\theta=x\ ,\quad -1\le x\le 1 \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlanmıştı.

$$\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\} \tag{3.2.2}$$

trigonometrik eşitliği kullanılarak,

- $$T_r(x)T_s(x) = \frac{1}{2}\{T_{r+s}(x)+T_{r-s}(x)\} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1} T_{r+(-1)^i s}(x) \tag{3.2.3}$$

- $$T_r(x)T_s(x)T_t(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} T_{r+(-1)^i s+(-1)^j t}(x) \tag{3.2.4}$$

- $$T_r(x)T_s(x)T_t(x)T_p(x) = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} T_{r+(-1)^i s+(-1)^j t+(-1)^k p}(x) \tag{3.2.5}$$

Bu şekilde devam edilirse,

- $$T_{r_1}(x)T_{r_2}(x)...T_{r_n}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}...(n-1)...\sum_{i_{n-1}=0}^{1} T_{r_1+(-1)^{i_1} r_2+(-1)^{i_2} r_3+...+(-1)^{i_{n-1}} r_n}(x) \tag{3.2.6}$$

bağıntısı bulunur.

### 3.2.2. İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri

İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{r,s}(x,y) = T_r(x)T_s(y)\ , \quad -1 \le x, y \le 1 \tag{3.2.7}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada,

$$T_r(x) = \cos(r\theta)\ , \quad \cos\theta = x\ , \quad -1 \le x \le 1 \tag{3.2.8}$$

$$T_s(y) = \cos(s\phi)\ ,\ \cos\phi = y\ ,\ -1 \le y \le 1 \tag{3.2.9}$$

tek değişkenli Chebyshev polinomlarıdır.

$$\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\} \tag{3.2.10}$$

trigonometrik eşitliği kullanılarak,

- $$T_{r,s}(x,y)T_{p,q}(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} T_{r+(-1)^i p,\, s+(-1)^j q}(x,y) \tag{3.2.11}$$

- $$T_{r,s}(x,y)T_{p,q}(x,y)T_{m,n}(x,y) = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1} T_{r+(-1)^i p+(-1)^j m,\, s+(-1)^k q+(-1)^l n}(x,y) \tag{3.2.12}$$

- $$T_{r,s}(x,y)T_{p,q}(x,y)T_{m,n}(x,y)T_{t,v}(x,y) = \frac{1}{64}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{1} T_{r+(-1)^i p+(-1)^j m+(-1)^k t,\, s+(-1)^l q+(-1)^a n+(-1)^b v}(x,y) \tag{3.2.13}$$

Bu şekilde devam edilirse,

- $$T_{r_1,s_1}(x,y)T_{r_2,s_2}(x,y)\ldots T_{r_n,s_n}(x,y) = \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{i_1=0}^{1} .(n-1).\sum_{i_{n-1}=0}^{1}\ \sum_{j_1=0}^{1} .(n-1).\sum_{j_{n-1}=0}^{1} A \tag{3.2.14}$$

$$A = T_{r_1+(-1)^{i_1} r_2+\ldots+(-1)^{i_{n-1}} r_n,\, s_1+(-1)^{j_1} s_2+\ldots+(-1)^{j_{n-1}} s_n}(x,y)$$

bağıntısı bulunur.

### 3.2.3. Üç değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri

Üç değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{r,s,t}(x,y,z) = T_r(x)T_s(y)T_t(z)\ , \quad -1 \le x,y,z \le 1 \tag{3.2.15}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$T_r(x) = \cos(r\theta)\ , \quad \cos\theta = x\ , \quad -1 \le x \le 1 \tag{3.2.16}$$

$$T_s(y) = \cos(s\phi)\ , \quad \cos\phi = y\ , \quad -1 \le y \le 1 \tag{3.2.17}$$

$$T_t(z) = \cos(t\psi)\ , \quad \cos\psi = z\ , \quad -1 \le z \le 1 \tag{3.2.18}$$

$$\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} \tag{3.2.19}$$

trigonometrik eşitliği kullanılarak,

- $$T_{r,s,t}(x,y,z)T_{p,q,m}(x,y,z) = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} T_{r+(-1)^i p,\, s+(-1)^j q,\, t+(-1)^k m}(x,y,z) \tag{3.2.20}$$

- $$T_{r,s,t}(x,y,z)T_{p,q,m}(x,y,z)T_{n,u,v}(x,y,z) = \\ = \frac{1}{64}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{1} T_{r+(-1)^i p+(-1)^j n,\, s+(-1)^k q+(-1)^l u,\, t+(-1)^a m+(-1)^b v}(x,y,z) \tag{3.2.21}$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$T_{r_1,s_1,t_1}(x,y,z)T_{r_2,s_2,t_2}(x,y,z)\ldots T_{r_n,s_n,t_n}(x,y,z) = \\ = \frac{1}{2^{3n-3}}\sum_{i_1=0}^{1}\ldots(n-1)\ldots\sum_{i_{n-1}=0}^{1}\ \sum_{j_1=0}^{1}\ldots(n-1)\ldots\sum_{j_{n-1}=0}^{1}\ \sum_{k_1=0}^{1}\ldots(n-1)\ldots\sum_{k_{n-1}=0}^{1} a \tag{3.2.22}$$

$$a=T_{r_1+(-1)^{i_1}r_2+...+(-1)^{i_{n-1}}r_n,s_1+(-1)^{j_1}s_2+...+(-1)^{j_{n-1}}s_n,t_3+(-1)^{k_1}t_2+...+(-1)^{k_{n-1}}t_n}(x,y,z)$$

bağıntısı bulunur.

### 3.2.4. n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının n. dereceden kuvvetleri

n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{r_1,r_2,...,r_n}(x_1,x_2,...,x_n)=T_{r_1}(x_1)T_{r_2}(x_2)...T_{r_n}(x_n)\ ,\ -1\leq x_1,x_2,...,x_n\leq 1 \tag{3.2.23}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada,

$$T_{r_1}(x_1)=\cos(r_1\theta)\ ,\ \cos\theta=x_1\ ,\ -1\leq x_1\leq 1 \tag{3.2.24}$$

$$T_{r_2}(x_2)=\cos(i_2\phi)\ ,\ \cos\phi=x_2\ ,\ -1\leq x_2\leq 1 \tag{3.2.25}$$

.

.

$$T_{r_n}(x_n)=\cos(i_n\psi)\ ,\ \cos\psi=x_n\ ,\ -1\leq x_n\leq 1 \tag{3.2.26}$$

şeklinde tek değişkenli Chebyshev polinomlarıdır.

$$\cos A.\cos B=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\} \tag{3.2.27}$$

trigonometrik eşitliği kullanılarak,

$$T_{r_1,r_2,...,r_n}(x_1,x_2,...,x_n)T_{s_1,s_2,...,s_n}(x_1,x_2,...,x_n)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{i_1=0}^{1}...(n)...\sum_{i_n=0}^{1}T_{r_1+(-1)^{i_1}s_1,r_2+(-1)^{i_2}s_2,...,r_n+(-1)^{i_n}s_n}(x_1,x_2,...,x_n) \tag{3.2.28}$$

$$T_{r_1,r_2,\ldots,r_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)T_{s_1,s_2,\ldots,s_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)T_{t_1,t_2\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$

- $$=\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{i_1=0}^{1}\ldots(n)\ldots\sum_{i_n=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\ldots(n)\ldots\sum_{j_n=0}^{1}A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

(3.2.29)

$$A= \quad T_{r_1+(-1)^{i_1}s_1+(-1)^{j_1}t_1,\,r_2+(-1)^{i_2}s_2+(-1)^{j_2}t_2,\ldots,r_n+(-1)^{i_n}s_n+(-1)^{j_n}t_n}$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$T_{r_1,r_2,\ldots,r_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)T_{s_1,s_2,\ldots,s_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ldots.T_{t_1,t_2\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$

- $$=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^n \sum_{i_1=0}^{1}\ldots(n-1)\ldots\sum_{i_{n-1}=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\ldots(n-1)\ldots\sum_{j_{n-1}=0}^{1}\ldots n\ldots\sum_{k_1=0}^{1}\ldots(n-1)\ldots\sum_{k_{n-1}=0}^{1}A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

(3.2.30)

$$A=T_{r_1+(-1)^{i_1}s_1+\ldots+(-1)^{i_{n-1}}t_1,\,r_2+(-1)^{j_1}s_2+\ldots+(-1)^{j_{n-1}}t_2,\ldots,r_n+(-1)^{k_1}s_n+\ldots+(-1)^{k_{n-1}}t_n}$$

bağıntısı bulunur.

## 3.3. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Türevlerinin Oluşturulması

### 3.3.1. Tek değişkenli Chebyshev polinomlarının n. dereceden türevleri

$$\begin{aligned}
T_0(x)&=1\\
T_1(x)&=x\\
T_2(x)&=2x^2-1\\
T_3(x)&=4x^3-3x\\
T_4(x)&=8x^4-8x^2-1\\
T_5(x)&=16x^5-20x^3+5x\\
&.\\
&.
\end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

İlk birkaç polinomu açık şekilde yazılmış Chebyshev polinomlarının genel terimi,

$$T_r(x)=\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^k\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!}(2x)^{r-2k} \tag{3.3.2}$$

şeklindedir. Burada,

$$\left[\frac{r}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{r}{2} & , r \text{ çift ise}\\ \dfrac{r-1}{2} & , r \text{ tek ise}\end{cases} \tag{3.3.3}$$

dır.

Bu tanımdan hareketle Chebyshev polinomlarının türevlerini alırsa,

$$\begin{aligned} T'_0(x)&=0\\ T'_1(x)&=1\\ T'_2(x)&=4x\\ T'_3(x)&=12x^2-3\\ T'_4(x)&=32x^3-16x\\ T'_5(x)&=80x^4-60x^2+5\\ &.\\ &. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Yukarıda verilen açık şekilde yazılmış Chebyshev polinomlarından yararlanarak yazılan ilk birkaç türev polinomunun genel terimi ise,

$$T'_r(x)=\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^k\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!}2(r-2k)(2x)^{r-2k-1} \tag{3.3.5}$$

veya

- $$T^{I}{}_{r}(x)=r\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^{k}\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-1)!}(2x)^{r-2k-1} \tag{3.3.6}$$

veya

- $$T^{I}{}_{r}(x)=r\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^{k}\binom{n-k-1}{k}(2x)^{r-2k-1} \tag{3.3.7}$$

şeklinde bulunur.

Yukarıda verilen Chebyshev polinomlarının birinci türevinin genel ifadesinden bir kez daha türev alınırsa,

$$T^{II}{}_{r}(x)=r\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^{k}\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-1)!}2(r-2k-1)(2x)^{r-2k-2} \tag{3.3.8}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi daha düzenli biçimde,

- $$T^{II}{}_{r}(x)=2r\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^{k}\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-2)!}(2x)^{r-2k-2} \tag{3.3.9}$$

şeklinde yazılır.

Bu ikinci türevin genel ifadesinden bir kez daha türev alınırsa, Chebyshev polinomlarının üçüncü mertebeden türevinin genel ifadesini aşağıdaki gibi bulunur.

- $$T^{III}{}_{r}(x)=4r\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^{k}\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-3)!}(2x)^{r-2k-3} \tag{3.3.10}$$

Bu şekilde devam edilerek Chebyshev polinomlarını n. mertebeden türevi,

- $$T^{(n)}{}_r(x) = 2^{n-1} r \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^k \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-n)!} (2x)^{r-2k-n} \qquad (3.3.11)$$

şeklinde bulunur.

### 3.3.2. Chebyshev polinomlarının türevleri için rekurans bağıntısı

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + n^2 y = 0 \ , \quad n = 0,1,2,...$$

Lineer Chebyshev diferansiyel denkleminin çözümleri n. dereceden Chebyshev Polinomları adlandırılır.

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \ , \ x = \cos\theta \ , \ \theta = \cos^{-1} x \ , \ n = 0,1,2,...$$

(Birinci cins Chebyshev polinomu) şeklindedir. $T_n(x)$ Chebyshev polinomunun birinci türevi;

$$(T_n(x))' = \frac{d}{dx}\left(\cos\left(n\cos^{-1} x\right)\right) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin\left(n\cos^{-1} x\right) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n\theta)$$

olarak bulunur. $x = \cos\theta$ olarak tanımlandığından,

$$(T_n(x))' = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n\theta) = \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \sin(n\theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin\theta}$$

olarak bulunur. Şimdi,

$$U_n(x) = \frac{\sin\left\{(n+1)\cos^{-1} x\right\}}{\sin\left(\cos^{-1} x\right)} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

polinomunu tanımlayalım. Bu $U_n(x)$ polinomu, ikinci cins Chebyshev polinomudur. İkinci çeşit $U_n(x)$ Chebyshev polinomu ile birinci çeşit $T_n(x)$ Chebyshev polinomu arasında,

$$\left(1-x^2\right)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x) \tag{3.3.12}$$

rekurans bağıntısı vardır. Buradan,

$$T_n^{I}(x) = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta} = nU_{n-1}(x)$$

elde edilir. (1) denkleminden, $T_n^{I}(x)$ Chebyshev polinomlarının türevleri ile $T_n(x)$ Chebyshev polinomları arasındaki rekurans bağıntısı;

$$T_n^{I}(x) = nU_{n-1}(x) = \frac{n}{1-x^2}\left\{xT_n(x) - T_{n+1}(x)\right\} \tag{3.3.13}$$

veya

$$\left(1-x^2\right)T_n^{I}(x) = nxT_n(x) - nT_{n+1}(x) \tag{3.3.14}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi ise Chebyshev Polinomlarının ikinci, üçüncü ve rekurans anlayışında m. dereceden türevleri için rekurans bağıntıları oluşturalım. Bunun için (3.3.14) bağıntısından bir kez türev alalım.

$$(-2x)T_n^{I}(x) + \left(1-x^2\right)T_n^{II}(x) = nT_n(x) + nxT_n^{I}(x) - nT_{n+1}^{I}(x)$$

bulunur. Buradan Chebyshev polinomlarının ikinci türevi için,

$$\left(1-x^2\right)T_n^{II}(x)=nT_n(x)+(n+2)xT_n^I(x)-nT_{n+1}^I(x) \qquad (3.3.15)$$

şeklinde bir rekurans bağıntısı elde edilir. (3.3.15)' ten bir kez daha türev alınırsa,

$$(-2x)T_n^{II}(x)+\left(1-x^2\right)T_n^{III}(x)=nT_n^I(x)+(n+2)T_n^I(x)+(n+2)xT_n^{II}(x)-nT_{n+1}^{II}(x)$$

olur. Buradan Chebyshev polinomlarının üçüncü türevi için,

$$\left(1-x^2\right)T_n^{III}(x)=(2n+2)T_n^I(x)+(n+4)xT_n^{II}(x)-nT_{n+1}^{II}(x) \qquad (3.3.16)$$

şeklinde bir rekurans bağıntısı elde edilir. (3.3.16)' dan bir kez daha türev alınırsa,

$$(-2x)T_n^{III}(x)+\left(1-x^2\right)T_n^{(4)}(x)=(2n+2)T_n^{II}(x)+(n+4)T_n^{II}(x)+(n+4)xT_n^{III}(x)-nT_{n+1}^{III}(x)$$

olur. Buradan Chebyshev polinomlarının dördüncü türevi için,

$$\left(1-x^2\right)T_n^{(4)}(x)=(3n+6)T_n^{II}(x)+(n+6)xT_n^{III}(x)-nT_{n+1}^{III}(x) \qquad (3.3.17)$$

şeklinde bir rekurans bağıntısı elde edilir. (3.3.17)' den bir kez daha türev alınırsa,

$$(-2x)T_n^{(4)}(x)+\left(1-x^2\right)T_n^{(5)}(x)=(3n+6)T_n^{III}(x)+(n+6)T_n^{III}(x)+(n+6)xT_n^{(4)}(x)-nT_{n+1}^{(4)}(x)$$

olur. Buradan Chebyshev polinomlarının beşinci türevi için,

$$\left(1-x^2\right)T_n^{(5)}(x)=(4n+12)T_n^{III}(x)+(n+8)xT_n^{(4)}(x)-nT_{n+1}^{(4)}(x) \qquad (3.3.18)$$

şeklinde bir rekurans bağıntısı elde edilir. Bu şekilde devam edilerek rekurans anlayışında Chebyshev polinomlarının m. dereceden türevleri için,

$$\left(1-x^2\right)T_n^{(m)}(x)=\{(m-1)n+(m-2)(m-1)\}T_n^{(m-2)}(x)+\{n+2(m-1)\}xT_n^{(m-1)}(x)-nT_{n+1}^{(m-1)}(x)$$
(3.3.19)

şeklinde bir rekurans bağıntısı elde edilir.

### 3.3.3. İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının türevleri

İki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomu,

$$T_{r,s}(x,y)=T_r(x)T_s(y)\ ,\quad -1\le x,y\le 1 \tag{3.3.20}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada,

$$T_r(x)=\cos(r\theta)\ ,\quad \cos\theta=x\ ,\quad -1\le x\le 1 \tag{3.3.21}$$

$$T_s(y)=\cos(s\phi)\ ,\quad \cos\phi=y\ ,\quad -1\le y\le 1 \tag{3.3.22}$$

şeklindedir.

- $$T_r(x)=\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^k\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!}(2x)^{r-2k} \tag{3.3.23}$$

- $$T'_r(x)=r\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^k\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-1)!}(2x)^{r-2k-1} \tag{3.3.24}$$

Bu tanımlardan yola çıkarak iki değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomunun diferansiyelleme problemini inceleyelim.

**1)** $T_x{}'_{r,s}(x,y)=\dfrac{\partial T_{r,s}(x,y)}{\partial x}=?$

olarak bulunur.

**2)** $T_{y}{}'_{r,s}(x,y)=\dfrac{\partial T_{r,s}(x,y)}{\partial y}=?$

$$=T_{r}(x)T'_{s}(y)=\left\{\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^{k}\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!}(2x)^{r-2k}\right\}\left\{s\sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^{l}\frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l-1)!}(2y)^{s-2l-1}\right\}$$

$$=\left\{\frac{rs}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^{k}(-1)^{l}\frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!}(2x)^{r-2k}\frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l-1)!}(2y)^{s-2l-1}\right\} \quad (3.3.26)$$

elde edilir.

**3)** $T_{xx}{}''_{r,s}(x,y)=\dfrac{\partial^{2}T_{r,s}(x,y)}{\partial x^{2}}=?$

$$= T''_r(x)T_s(y) = \left\{ 2r \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^k \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-2)!} (2x)^{r-2k-2} \right\} \left\{ \frac{s}{2} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^l \frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l)!} (2y)^{s-2l} \right\}$$

$$= \left\{ rs \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^k (-1)^l \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-2)!} (2x)^{r-2k-2} \frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l)!} (2y)^{s-2l} \right\} \quad (3.3.27)$$

şeklinde elde edilir.

4) $T_{yy}{}''_{r,s}(x,y) = \dfrac{\partial^2 T_{r,s}(x,y)}{\partial y^2} = ?$

$$= T_r(x)T''_s(y) = \left\{ \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^k \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!} (2x)^{r-2k} \right\} \left\{ 2s \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^l \frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l-2)!} (2y)^{s-2l-2} \right\}$$

$$= \left\{ rs \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^k (-1)^l \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k)!} (2x)^{r-2k} \frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l-2)!} (2y)^{s-2l-2} \right\} \quad (3.3.28)$$

olarak bulunur.

5) $T_{xy}{}''_{r,s}(x,y) = \dfrac{\partial^2 T_{r,s}(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial T_{r,s}(x,y)}{\partial x} \dfrac{\partial T_{r,s}(x,y)}{\partial y} = T'_r(x)T'_s(y) = ?$

$$= T'_r(x)T'_s(y) = \left\{ r \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^k \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-1)!} (2x)^{r-2k-1} \right\} \left\{ s \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^l \frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l-1)!} (2y)^{s-2l-1} \right\}$$

$$= \left\{ rs \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^k (-1)^l \frac{(r-k-1)!}{k!(r-2k-1)!} (2x)^{r-2k-1} \frac{(s-l-1)!}{l!(s-2l-1)!} (2y)^{s-2l-1} \right\}$$

(3.3.29)

şeklinde bulunur.

**NOT:** Tek değişkenli Chebyshev Polinomlarının türev bağıntılarından hareketle aynı yöntem takip edilerek iki değişkenli Chebyshev Polinomlarının türev bağıntıları gibi üç, dört, ... n-değişkenli Chebyshev Polinomlarının türev bağıntıları oluşturulabilir.

## BÖLÜM 4

## CHEBYSHEV KATSAYILARINI HESAPLAMA YÖNTEMİ

Bu bölümde tek ve iki değişkene bağlı fonksiyonlar için ve ayrıca bu fonksiyonların türevleri için Chebyshev katsayılarının hesaplanma yöntemi verilmiştir.

### 4.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Chebyshev Katsayıları

$x=0$ civarında Taylor seri açılımı yardımıyla $-1 \le x \le 1$ aralığında bir $f(x)$ fonksiyonunun Chebyshev seri açılımı bulunabilir. Bu yöntemin özü Lanczos $[6]$ tarafından verilmiştir ve aşağıdaki formüllerin kullanımına bağlıdır.

$$x^{2n} = 2^{-2n+1} \sum_{i=0}^{n}{}' \binom{2n}{n-i} T_{2i}(x)$$

$$x^{2n+1} = 2^{-2n} \sum_{i=0}^{n}{}' \binom{2n+1}{n-i} T_{2i+1}(x)$$

Bu formüller kullanılarak Taylor serisindeki x'in kuvvetleri yerine Chebyshev polinomlarındaki açılımları konularak seriler aşağıdaki formda yeniden düzenlenirler.

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' f_r T_r(x)$$

Burada $r = 0,1,2,\ldots,N$ alınır ve kullanılan bu metot ile şu sonuçlar çıkarılabilir.

$$f(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' f_r T_r(x) \tag{4.1.1}$$

formunda N. dereceden kesilmiş tek değişkenli Chebyshev serisi olan bir $f(x)$ fonksiyonu alalım. Bu $f(x)$ fonksiyonu matris formunda yazılabilir.

$$f(x) = T_x F \tag{4.1.2}$$

Burada,

$$T_x = [T_0(x)\ T_1(x)\ \dots\ T_N(x)] \quad \text{ve} \quad F = \left[\frac{1}{2}f_0\ f_1\ \dots\ f_N\right]^t$$

dır. Şimdi de $f(x)$ fonksiyonuna $x = 0$ civarında N. dereceden Taylor polinomları yardımıyla yaklaşılsın, yani;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n \tag{4.1.3}$$

$$X = \left[x^0\ x^1\ \dots\ x^N\right] \qquad \text{ve} \qquad B = [b_0\ b_1\ \dots\ b_N]^t$$

olmak üzere (4.1.3)' ün matris formu

$$f(x) = XB \tag{4.1.4}$$

şeklindedir. (4.1.2) ve (4.1.4) denklemlerinden şu bağıntı elde edilebilir.

$$T_x F = XB \tag{4.1.5}$$

Diğer taraftan,

$$x^r = \frac{1}{2^r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i} T_{2i-r}(x)$$

bağıntısı göz önüne alınırsa ve $n = 0,1,2,\ldots,N$ alınırsa matris denklemleri

$$X^t = DT_x^t \qquad \text{ya da} \qquad X = T_x D^t \tag{4.1.6}$$

olur. Burada X (4.1.4)' te ve $T_x$ (4.1.2)' de tanımlanmıştır. D aşağıdaki şekildedir.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2^{-2n}\binom{2n}{n-0} & 0 & 2^{-2n+1}\binom{2n}{n-1} & 0 & \cdots & 2^{-2n}\binom{2n}{0} & 0 \\ 0 & 2^{-2n}\binom{2n+1}{n-0} & 0 & 2^{-2n}\binom{2n+1}{n-1} & \cdots & 0 & 2^{-2n}\binom{2n+1}{0} \end{bmatrix}$$

D matrisinde N tek için son satır, N çift için bir önceki satırı matrisin son satırı olarak kullanılır. (4.1.6)' yı (4.1.5)' te yerine yazarsak,

$$F = D^t B \qquad \text{veya} \qquad B = \left(D^t\right)^{-1} F \tag{4.1.7}$$

matris eşitliğini elde edilir ki bu da $f(x)$ fonksiyonu için Taylor ve Chebyshev katsayıları arasındaki ilişkidir.

### 4.2. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Chebyshev Katsayıları

$K(x,y)$ fonksiyonuna $-1 \leq x, y \leq 1$ için

$$K(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{\infty}{}' k_{r,s} T_{r,s}(x,y) \tag{4.2.1}$$

formunda x ve y' ye göre N. dereceden iki değişkenli kesilmiş bir Chebyshev serisi ile yaklaşılsın. $T_{r,s}(x,y) = T_r(x)T_s(y)$ olduğunu göz önüne alınır ve

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}k_{00} & \frac{1}{2}k_{01} & \cdots & \frac{1}{2}k_{0N} \\ \frac{1}{2}k_{10} & k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{2}k_{N0} & k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

denirse (4.2.1)' i matris formunda

$$K(x,y) = T_x K T_y \qquad (4.2.2)$$

olarak ifade edilebilir.

Şimdi de $K(x,y)$ fonksiyonuna $x = y = 0$ civarında x ve y' ye göre N. dereceden Taylor polinomları vasıtasıyla yaklaşılsın, yani [16]' daki gibi

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_{n,m} x^n y^m \qquad (4.2.3)$$

serisi yardımıyla yaklaşalım. Burada,

$$c_{n,m} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} K(0,0)}{\partial x^n \partial y^m}$$

olur.

$$X = [x^0 \ x^1 \ \ldots \ x^N], \ Y = [y^0 \ y^1 \ \ldots \ y^N] \text{ ve } C = [c_{n,m}], \ n,m = 0,1,2,\ldots,N$$

olmak üzere (4.2.3) matris formunda,

$$K(x,y) = XCY^t \tag{4.2.4}$$

olarak elde edilir. (4.1.6), (4.2.2) ve (4.2.4) bağıntıları kullanılarak Chebyshev ve Taylor katsayıları arasındaki ilişkiyi

$$K = D^t CD \tag{4.2.5}$$

şeklinde bulunur.

### 4.3. Fonksiyonların Türevleri İçin Chebyshev Katsayıları

$-1 \le x \le 1$ aralığında $y(x)$ fonksiyonunu ve n. dereceden türevlerini alalım ki Chebyshev seri açılımları.

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' a_r T_r(x) \text{ ve } y^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' a_r^{(n)} T_r(x) \tag{4.3.1}$$

olarak ifade edilsin. Burada $a_r^{(n)}$ ve $a_r$ Chebyshev katsayılarıdır. $a_r^{(0)} = a_r$ ve $y^{(0)} = y$ olduğu açıkça görülmektedir.

$$\int T_r(x)dx = \begin{cases} T_1(x) & ,(r=0) \\ \frac{1}{4}T_2(x) & ,(r=1) \\ \frac{T_{r+1}(x)}{2(r+1)} - \frac{T_{r-1}(x)}{2(r-1)} & ,(r>1) \end{cases}$$

bağıntısı kullanılarak. $y^{(n)}$ ve $y^{(n+1)}$, in katsayıları arasındaki rekurans bağıntısı [6,10] tarafından aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$2ra_r^{(n)} = a_{r-1}^{(n+1)} - a_{r+1}^{(n+1)} \quad , \quad r \ge 1 \tag{4.3.2}$$

(4.3.2) bağıntısına dayalı olarak şu bağıntılar yazılabilir.

$$2(r+1)a_{r+1}^{(n)} = a_r^{(n+1)} - a_{r+2}^{(n+1)}$$
$$2(r+3)a_{r+3}^{(n)} = a_{r+2}^{(n+1)} - a_{r+4}^{(n+1)}$$
$$2(r+5)a_{r+5}^{(n)} = a_{r+4}^{(n+1)} - a_{r+6}^{(n+1)}$$
$$\vdots$$

ve bu bağıntılardan

$$a_r^{(n+1)} = 2\left[(r+1)a_{r+1}^{(n)} + (r+3)a_{r+3}^{(n)} + (r+5)a_{r+5}^{(n)} + \ldots\right]$$

ya da

$$a_r^{(n+1)} = 2\sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1}^{(n)} \tag{4.3.3}$$

elde edilir. (4.3.3) bağıntısına dayanarak $a_r^{(1)}$ ve $a_r^{(2)}$ katsayılarını açılırsa,

$$a_r^{(1)} = 2\sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1}$$

ve

$$a_r^{(2)} = 2\sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1}^{(1)} = 4\sum_{i=0}^{\infty}i(r+i)(r+2i)a_{r+2i} \tag{4.3.4}$$

bulunur. Burada, $r = 0,1,2,\ldots,N$ alınır ve $r > N$ ise $a_r = a_r^{(1)} = a_r^{(2)} = \ldots = 0$ kabul edilir. (4.3.3) bağıntısı matris formunda

$$A^{(n+1)} = 2MA^{(n)} \ , \ n = 0,1,2,... \tag{4.3.5}$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$A^{(n)} = \left[ \frac{1}{2} a_0^{(n)} \quad a_1^{(n)} \quad ... \ a_N^{(n)} \right]^t$$

şeklindedir.

(4.3.5)' den N tek için,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & . & . & . & \frac{N}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & . & . & . & N \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

ve N çift için,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

elde edilir. (4.3.5) bağıntısında $n = 0,1,2,...$ için

$$
\begin{aligned}
&A^{(1)} = 2MA \\
&A^{(2)} = 2MA^{(1)} = 2^2 M^2 A \\
&A^{(3)} = 2MA^{(2)} = 2^3 M^3 A \\
&. \\
&. \\
&. \\
&A^{(n)} = 2MA^{(n-1)} = 2^n M^n A
\end{aligned}
\tag{4.3.6}
$$

bulunur. Burada $A^{(0)} = A$ olduğu açıkça görülmektedir. [17]

## BÖLÜM 5

## LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CHEBYSHEV MATRİS METODU

### 5.1. Giriş

Bu bölümde amaç, aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$P(x)y^{II} + Q(x)y^{I} + R(x)y + S(x)y^2 = f(x) \qquad (5.1.1)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x) \qquad -1 \le x \le 1 \ , \ N \in IN \qquad (5.1.2)$$

formunda kesilmiş bir Chebyshev seri çözümünü bulmaktır. Burada, $a_r$ bilinmeyen katsayılar, $T_r(x)$ Chebyshev polinomları ve $N \in IN$ serinin kesme sınırıdır.

### 5.2. Temel Matris Gösterimleri

Burada daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı fonksiyonların Chebyshev açılımlarının matris gösterimini sunulacaktır.

#### 5.2.1. f(x) fonksiyonunun matris gösterimi

Bilinen f(x) fonksiyonunun kesilmiş Chebyshev seri formunda yazılışı

$$f(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' f_r T_r(x)$$

şeklindedir. Bu fonksiyonun matris gösterimi ise,

$$f(x)=T_x F \tag{5.2.1}$$

$$F=\left[\frac{1}{2}f_0 \ f_1 \ \ldots f_N\right]^t, \quad T_x=[T_0(x) \ T_1(x) \ \ldots \ T_N(x)]$$

biçimindedir. Burada $f_r$' ler $f(x)$ fonksiyonunun Chebyshev seri açılımındaki katsayılardır.

**5.2.2. y(x) fonksiyonunun matris gösterimi**

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x)=[T_0(x) \ T_1(x) \ \ldots \ T_N(x)]\begin{bmatrix}\frac{1}{2}a_0\\ a_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_N\end{bmatrix}.$$

Eğer,

$$T_x=[T_0(x) \ T_1(x) \ \ldots \ T_N(x)] \ \text{ve} \ A=\left[\frac{1}{2}a_0 \ a_1 \ \ldots \ a_N\right]^t$$

olarak alınırsa $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun matris formu

$$y(x)=T_x A \tag{5.2.2}$$

şeklinde yazılır.

### 5.2.3. $[y(x)]^2$ fonksiyonunun matris gösterimi

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x)$$

olduğuna göre,

$$[y(x)]^2=\left[\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x)\right]^2=\sum_{r=0}^{N}{}'\sum_{s=0}^{N}{}' a_r a_s T_r(x) T_s(x)$$

$$=\sum_{r=0}^{N}{}'\sum_{s=0}^{N}{}'\frac{a_r a_s}{2}\left[T_{r+s}(x)+T_{r-s}(x)\right]$$

elde edilir. Bu ifade açılıp tek bir toplam altında düzenlenirse,

$$[y(x)]^2=\sum_{i=0}^{2N}{}' b_i T_i(x)==\sum_{r=0}^{N}{}'\sum_{s=0}^{N}{}'\frac{a_r a_s}{2}\left[T_{r+s}(x)+T_{r-s}(x)\right] \qquad (5.2.3)$$

olur. Burada $b_i$ katsayıları $(a_r a_s)$; $r,s=0,1,2,\ldots,N$ bilinmeyen katsayılar türünden bulunur.

O zaman $[y(x)]^2$ fonksiyonunun matris formu [7]

$$[y(x)]^2=\sum_{i=0}^{2N}{}' b_i T_i(x)=EB \qquad (5.2.4)$$

$$E=\left[T_0(x)\ T_1(x)\ \ldots\ T_{2N}(x)\right]$$

$$B=\left[\frac{1}{2}b_0\ \ \mathrm{b}_1\ \ldots\ \mathrm{b}_{2N}\right]^t$$

olarak yazılır. Burada $a_{-r} = a_r$ olmak üzere

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{\frac{i}{2}}\right)^2}{2} + \displaystyle\sum_{r=1}^{N-\frac{i}{2}} \left(a_{\frac{i}{2}-r}\right)\left(a_{\frac{i}{2}+r}\right) & : i \text{ çift için} \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{N-\frac{i-1}{2}} \left(a_{\frac{i+1}{2}-r}\right)\left(a_{\frac{i-1}{2}+r}\right) & : i \text{ tek için} \end{cases}$$

şeklindedir.

**Tablo 1.** $b_i = (a_r a_s)$ katsayılarının hesabı

| | |
|---|---|
| $N=0$ | $b_0 = \frac{1}{2}a_0{}^2$ |
| $N=1$ | $b_0 = \frac{1}{2}a_0{}^2 + a_1{}^2$<br>$b_1 = a_0 a_1$<br>$b_2 = \frac{1}{2}a_1{}^2$ |
| $N=2$ | $b_0 = \frac{1}{2}a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2$<br>$b_1 = a_0 a_1 + a_1 a_2$<br>$b_2 = \frac{1}{2}a_1{}^2 + a_0 a_2$<br>$b_3 = a_1 a_2$<br>$b_4 = \frac{1}{2}a_2{}^2$ |

### 5.2.4. $x^p y^{(s)}$ türev fonksiyonunun matris gösterimi

$x^p y^{(s)}$ terimlerinin Chebyshev açılımı,

$$x^p y^{(s)} = \sum_{r=0}^{N}{}' \sum_{j=0}^{p} 2^{-p} \binom{p}{j} a^{(s)}_{|r-p+2j|} T_r(x) \tag{5.2.5}$$

Clenshaw tarafından verilmiştir [6]. (5.2.5)' in matris gösterimi

$$x^p y^{(s)} = T_x M_p A^{(s)}$$

şeklindedir. $A^{(s)} = 2^s M^s A$ olduğundan bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$x^p y^{(s)} = T_x M_p 2^s M^s A \qquad s = 0,1,2 \quad , \quad p = 0,1,2,\ldots,N \tag{5.2.6}$$

elde edilir.

Lineer olmayan kısım için (5.2.5) bağıntısı düzenlenirse,

$$x^p [y(x)]^2 = \sum_{r=0}^{2N}{}' \sum_{j=0}^{p} 2^{-p} \binom{p}{j} b_{|r-p+2j|} T_r(x) = T_x M_p B \tag{5.2.7}$$

elde edilir.

Burada $M_p = \lfloor m_{i,j} \rfloor$ $(i = 0,1,2,\ldots,N+1$ ve $\mathrm{j} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{N}+1)$ matrisi $(N+1)x(N+1)$ tipinde bir matristir. $M_p$ 'nin elemanları

$p$ tek ise;

$$m_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^p}\left[\dbinom{p}{\dfrac{p-|i+j|}{2}} + \dbinom{p}{\dfrac{p+|i-j|}{2}}\right] & ; \ i+j \ \ tek\ için \\ 0 & ; \ i+j \ \ çift\ için \end{cases}$$

$p$ çift ise;

$$m_{i,j}=\begin{cases} 0 & ;\ i+j\ \textit{tek için} \\ \dfrac{1}{2^p}\left[\begin{pmatrix} p \\ \dfrac{p-|i+j|}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p \\ \dfrac{p+|i-j|}{2}\end{pmatrix}\right] & ;\ i+j\ \textit{çift için} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $i+j>p$ için $\begin{pmatrix} p \\ \dfrac{p-|i+j|}{2}\end{pmatrix}=0$, $|i-j|>p$ için $\begin{pmatrix} p \\ \dfrac{p+|i-j|}{2}\end{pmatrix}=0$ kabul edilir.

Buna göre ilk birkaç $M_p$ matrisi şu şekildedir.

$$M_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

(Birim Matris)

$$M_1=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

### 5.2.5. Koşulların matris formunda gösterimi

$y(a) = \lambda$ ve $y'(a) = \mu$ başlangıç koşulları verildiğinde (5.1.2) bağıntısından

$$UA = [\lambda] \text{ ve } VA = [\mu] \tag{5.2.1}$$

bulunur. Burada,

$$A = \left[\frac{1}{2}a_0 \; a_1 \ldots\ldots\ldots a_N\right]^t$$

$$U = T_x(a) = [T_0(a)\, T_1(a) \ldots\ldots\ldots T_N(a)]$$

$$V = 2T_x(a)M$$

şeklinde yazılabilir.

## 5.3. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemin Matris Denklemi

(5.1.1) Denkleminde $P(x), Q(x), R(x)$ ve $S(x)$ polinomları $x=0$ civarında $N$. dereceden Taylor polinomları cinsinden yazılırsa,

$$P(x)=\sum_{i=0}^{N} p_i x^i \quad Q(x)=\sum_{i=0}^{N} q_i x^i \quad R(x)=\sum_{i=0}^{N} r_i x^i \quad S(x)=\sum_{i=0}^{N} s_i x^i \tag{5.3.1}$$

elde edilir. Bu durumda (5.1.1) denklemi,

$$\sum_{r=0}^{N}\left[p_i x^i y'' + q_i x^i y' + r_i x^i y\right]A + s_i x^i y^2 B = f(x) \tag{5.3.2}$$

eşitliğine dönüşür.

(5.2.1), (5.2.4) ve (5.2.6) bağıntıları (5.3.2)'de yerine yazılırsa lineer olmayan diferansiyel denklem,

$$\sum_{i=0}^{N}\left[4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i\right]A + s_i M_i B = F \tag{5.3.3}$$

matris denklemine dönüşmüş olur. Böylece $a_r\ (r=0,1,2,\ldots,N)$ aranan Chebyshev katsayıları için $(N+1)$ bilinmeyenli $(N+1)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

(5.1.1) denklemine karşılık gelen (5.3.3) matris denklemi

$$W=\left[w_{m,n}\right]=\sum_{i=0}^{N}\left[4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i\right] \text{ ve } Z=\left[z_{i,j}\right]=\sum_{i=0}^{N} s_i M_i$$

olmak üzere,

$$WA + ZB = F \tag{5.3.4}$$

formunda yazılabilir. Böylece (4.3.4)'ün arttırılmış matrisi

$$[W : Z; F] \tag{5.3.5}$$

olur. Verilen koşul (4.3.5) 'in son satırı ile yer değiştirirse

$$[\overline{W} : \overline{Z}; \overline{F}]$$

arttırılmış matrisi veya

$$\overline{W}A + \overline{Z}B = \overline{F} \tag{5.3.6}$$

matris denklemi elde edilmiş olur. Buradan bilinmeyen Chebyshev katsayıları bulunur. Elde edilen Chebyshev katsayıları (5.1.2)'de yerine konularak (5.1.1) 'in çözümüne $N$. dereceden bir Chebyshev polinomu ile yaklaşmış olunur.

Benzer şekilde (5.1.1) diferansiyel denklemi $0 \le x \le 1$ aralığında da matris denklemine dönüştürülebilir.

## BÖLÜM 6

## CHEBYSHEV TİPLİ LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ONLARIN ÇÖZÜM METODUNUN OLUŞTURULMASI

### 6.1. Chebyshev Tipli Zayıf Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Metodunun Oluşturulması

Chebyshev tipli zayıf lineer olmayan diferansiyel denklemlerle, elektronik devrelerde kullanılan transistorlerde, osilatör problemlerinin çözümünde, akışkanlar mekaniğinde ve kuantum fiziği gibi çeşitli alanlarda karşılaşılmaktadır.

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + n^2 y + \Omega\left(y, y', y''\right) = 0 \tag{6.1}$$

denklemi Chebyshev tipli zayıf lineer olmayan diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümünde,

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{6.2}$$

lineer Chebyshev tipli diferansiyel denklemin çözümünden faydalanılacaktır. (6.2) denkleminin çözümü,

$$y(a) = \lambda \qquad \text{ve} \qquad y'(a) = \mu$$

koşulları çerçevesinde,

$$y(x) = cT_n(x) \tag{6.3}$$

şeklindedir. n reel sayıdır. –n durumunda Chebyshev polinomlarının simetriklik özelliğinden $T_{-n}(x) = T_n(x)$ olur. Böylece, (6.1) denkleminin çözümü (6.3) çözümünün vasıtasıyla,

$$y(x)=c(x)T_n(kx) \tag{6.4}$$

biçiminde aranır.

(6.4) çözümünün birinci türevi,

$$y'(x)=c'(x)T_n(kx)+kc(x)T_n'(kx)$$

biçimindedir. Chebyshev polinomunun,

$$T_n'(x)=\frac{n}{1-x^2}\{xT_n(x)-T_{n+1}(x)\}$$

rekurans formülünde $x=kx$ alınırsa,

$$T_n'(kx)=\frac{n}{1-k^2x^2}\{kxT_n(kx)-T_{n+1}(kx)\} \tag{6.5}$$

olduğu alınır. Böylece,

$$y'(x)=\left\{c'(x)+\frac{nk^2xc(x)}{1-(kx)^2}\right\}T_n(kx)-\frac{nkc(x)}{1-(kx)^2}T_{n+1}(kx) \tag{6.6}$$

elde edilir. $y(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi ise,

$$\begin{aligned} y''(x)=&\left\{c''(x)+\frac{\left[\left(nk^2c(x)+nk^2xc'(x)\right)\left(1-k^2x^2\right)+2k^2x\left(nk^2xc(x)\right)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2}\right\}T_n(kx)+\\ &+\left\{c'(x)+\frac{nk^2xc(x)}{1-k^2x^2}\right\}T_n'(kx)-\left\{\frac{\left[nkc'(x)\left(1-k^2x^2\right)+2k^2xnkc(x)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2}\right\}T_{n+1}(kx) \\ &-\left\{\frac{nkc(x)}{1-k^2x^2}\right\}T_{n+1}'(kx) \end{aligned} \tag{6.7}$$

olarak bulunur. Şimdi ise Chebyshev polinomunun,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

rekurans formülünde $x = kx$ alınırsa,

$$T_{n+1}(kx) = 2kxT_n(kx) - T_{n-1}(kx) \tag{6.8}$$

elde edilir. (6.5) ve (6.8) denklemleri göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(kx) &= \frac{(n+1)kxT_{n+1}(kx) - (n+1)T_{n+2}(kx)}{1-k^2x^2} \\ &= -\frac{(n+1)kx}{1-k^2x^2}T_{n+1}(kx) + \frac{(n+1)}{1-k^2x^2}T_n(kx) \end{aligned}$$

$$T'_{n+1}(kx) = \frac{(n+1)}{1-k^2x^2}T_n(kx) - \frac{(n+1)kx}{1-k^2x^2}T_{n+1}(kx) \tag{6.9}$$

elde edilir. (6.5) ve (6.9) bağıntıları (6.7)' de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y''(x) = &\left\{ \begin{aligned} &c''(x) + \frac{\left[\left(nk^2c(x) + nk^2xc'(x)\right)\left(1-k^2x^2\right) + 2k^2x\left(nk^2xc(x)\right)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2} + \\ &+ \frac{nkxc'(x)}{1-k^2x^2} + \frac{n^2k^3x^2c(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} - \frac{(n+1)nkc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} \end{aligned} \right\} T_n(kx) + \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\frac{(n+1)nk^2xc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} - \frac{nc'(x)}{1-k^2x^2} - \\ &- \frac{\left[nkc'(x)\left(1-k^2x^2\right) + 2k^2xnkc(x)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2} - \frac{n^2k^2xc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} \end{aligned} \right\} T_{n+1}(kx) + \end{aligned} \tag{6.10}$$

bulunur.

$\Omega\left(y, y^{I}, y^{II}\right)$ parametresinin Chebyshev ayrışımı,

$$\Omega\left(y, y^{I}, y^{II}\right)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(kx) \tag{6.11}$$

şeklinde yapılmaktadır. Burada $a_i$ katsayıları $[-1,1]$ aralığında

$$a_i=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\Omega\left(y, y^{I}, y^{II}\right)T_i(kx)\,dx$$

integrali ile hesaplanır. (6.4), (6.6), (6.10) ve (6.11) eşitlikleri (6.1) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\left(1-x^2\right)y^{II}-xy^{I}+n^2y+\Omega\left(y, y^{I}, y^{II}\right)=0$$

denklemi,

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)\left[\left\{\begin{array}{l} c^{II}(x)+\dfrac{\left[\left(nk^2c(x)+nk^2xc^{I}(x)\right)\left(1-k^2x^2\right)+2k^2x\left(nk^2xc(x)\right)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2}+ \\ +\dfrac{nkxc^{I}(x)}{1-k^2x^2}+\dfrac{n^2k^3x^2c(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2}-\dfrac{(n+1)nkc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} \end{array}\right\}T_n(kx)+\right. \\
&\left.+\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(n+1)nk^2xc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2}-\dfrac{nc^{I}(x)}{1-k^2x^2}- \\ -\dfrac{\left[nkc^{I}(x)\left(1-k^2x^2\right)+2k^2xnkc(x)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2}-\dfrac{n^2k^2xc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} \end{array}\right\}T_{n+1}(kx)+\right]- \\
&-x\left[\left\{c^{I}(x)+\frac{nk^2xc(x)}{1-(kx)^2}\right\}T_n(kx)-\frac{nkc(x)}{1-(kx)^2}T_{n+1}(kx)\right]+n^2\left[c(x)T_n(kx)\right]+\sum_{i=0}^{\infty}a_iT_i(kx)=0
\end{aligned} \tag{6.12}$$

denklemine dönüşür.

(6.12) denklemi $\Omega\left(y, y^{\prime}, y^{\prime\prime}\right)$ lineer olmayan bileşeninin Chebyshev seri açılımında $i = n$ ve $i = n+1$ olmak üzere yeniden düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1-x^2\right)\left\{\begin{array}{l} c^{\prime\prime}(x)+\dfrac{\left[\left(nk^2c(x)+nk^2xc^{\prime}(x)\right)\left(1-k^2x^2\right)+2k^2x\left(nk^2xc(x)\right)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2}+ \\ +\dfrac{nkxc^{\prime}(x)}{1-k^2x^2}+\dfrac{n^2k^3x^2c(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2}-\dfrac{(n+1)nkc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} \end{array}\right\} - x\left\{c^{\prime}(x)+\dfrac{nk^2xc(x)}{1-k^2x^2}\right\}+n^2c(x)+a_n\right]T_n(kx)+ \\
&+\left[\left(1-x^2\right)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(n+1)nk^2xc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2}-\dfrac{nc^{\prime}(x)}{1-k^2x^2}- \\ -\dfrac{\left[nkc^{\prime}(x)\left(1-k^2x^2\right)+2k^2xnkc(x)\right]}{\left(1-k^2x^2\right)^2}-\dfrac{n^2k^2xc(x)}{\left(1-k^2x^2\right)^2} \end{array}\right\}+x\left\{\dfrac{nkc(x)}{1-k^2x^2}\right\}+a_{n+1}\right]T_{n+1}(kx)=0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklem $c(x)$ fonksiyonuna göre düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{l} \left(1-x^2\right)c^{\prime\prime}(x)+\left\{\left(1-x^2\right)\left(\dfrac{nk^2x+nkx}{1-k^2x^2}\right)-x\right\}c^{\prime}(x)+ \\ +\left\{\left(1-x^2\right)\left(\dfrac{2nk^4x^2+n^2k^3x^2-n(n+1)k}{\left(1-k^2x^2\right)^2}+\dfrac{nk^2}{1-k^2x^2}\right)-\dfrac{nk^2x^2}{1-k^2x^2}+n^2\right\}c(x)+a_n \end{array}\right]T_n(kx)+ \\
&+\left[\begin{array}{l} \left\{\left(1-x^2\right)\left(\dfrac{-n-nk}{1-k^2x^2}\right)\right\}c^{\prime}(x)+ \\ +\left\{\left(1-x^2\right)\left(\dfrac{n(n+1)k^2x-2nk^3x-n^2k^2x}{\left(1-k^2x^2\right)^2}\right)+\dfrac{nkx}{1-k^2x^2}\right\}c(x)+a_{n+1} \end{array}\right]T_{n+1}(kx)=0
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

denklemi elde edilir. Burada $T_n(kx)\neq 0$ ve $T_{n+1}(kx)\neq 0$ olduğundan parantez içleri sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{cases} A_2(k,x,n)c''(x)+A_1(k,x,n)c'(x)+A_0(k,x,n)c(x)+a_n=0 \\ B_1(k,x,n)c'(x)+B_0(k,x,n)c(x)+a_{n+1}=0 \end{cases} \tag{6.14}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemde ikinci denklemi çözelim.

$$B_1(k,x,n)c'(x)+B_0(k,x,n)c(x)=-a_{n+1} \tag{6.15}$$

heterojen adi diferansiyel denklemi çözülürken ilk önce

$$B_1(k,x,n)c'(x)+B_0(k,x,n)c(x)=0 \tag{6.16}$$

homojen denklemi çözülür. (6.16)' da eşitliğin her iki tarafı da integre edilirse,

$$\int\frac{dc(x)}{c(x)}=-\int\frac{B_0(k,x,n)}{B_1(k,x,n)}dx$$

olur. Buradan,

$$\ln c(x)=-c_0\int\frac{B_0(k,x,n)}{B_1(k,x,n)}dx=-c_0\int\varphi(k,x,n)dx$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$c(x)=c_0e^{-\int\varphi(x)dx} \tag{6.17}$$

elde edilir. (6.17)' de $c_0$ sabit ve $\dfrac{B_0(k,x,n)}{B_1(k,x,n)}=\varphi(k,x,n)$' dır. (6.17), (6.16) homojen denklemin çözümüdür. (6.15) yanlı denkleminin çözümünün (6.17) biçiminde olması gerekir.

$$c(x)=c_0(x)e^{-\int\varphi(k,x,n)dx} \tag{6.18}$$

alınsın. Burada $c_0(x)$ x' e bağlı bilinmeyen fonksiyondur. (6.18)' den

$$c^{I}(x)=c_0^{I}(x)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}-c_0(x)\varphi(k,x,n)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx} \tag{6.19}$$

bulunur. (6.18) ve (6.19) eşitlikleri (6.15) denklemine yerleştirilirse,

$$B_1\left[c_0^{I}(x)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}-c_0(x)\varphi(k,x,n)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}\right]+B_0\left[c_0(x)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}\right]=-a_{n+1}$$

veya

$$B_1c_0^{I}(x)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}+c_0(x)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}\left[B_0-B_1\varphi(k,x,n)\right]=-a_{n+1}$$

elde edilir. Burada,

$$B_0(k,x,n)-B_1(k,x,n)\varphi(k,x,n)=B_0(k,x,n)-B_1(k,x,n)\frac{B_0(k,x,n)}{B_1(k,x,n)}=B_0(k,x,n)-B_0(k,x,n)=0$$

olduğundan,

$$B_1(k,x,n)c_0^{I}(x)e^{-\int \varphi(k,x,n)dx}=-a_{n+1}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı integre edilirse,

$$\int dc_0(x)=-\int \frac{a_{n+1}}{B_1(k,x,n)}e^{\int \varphi(k,x,n)dx}dx$$

olur. Buradan $c_0(x)$ fonksiyonu,

$$c_0(x)=-\int \frac{a_{n+1}}{B_1(k,x,n)}e^{\int \varphi(k,x,n)dx}dx+c_{01} \tag{6.20}$$

şeklinde bulunur. (6.20)' de $c_{01}$ sabittir. Şimdi (6.20), (6.18)' e yerleştirilirse,

$$c(x) = \phi[k, x, n, c_{01}] \tag{6.21}$$

şeklinde bulunur. (6.21)' deki gibi tanımlanan $c(x)$ fonksiyonu ve onun birinci ve ikinci türevleri (6.14)' teki sistemin birinci denklemine yerleştirilirse,

$$\psi[k, x, n, a_n] = 0 \tag{6.22}$$

şeklinde k' ya göre bir cebirsel denklem elde edilir. (6.22) denkleminden,

$$k = k[x, n, c_{01}]$$

operatörü elde edilir. Buradan $k$ kökleri,

$$k_1 = k_1^* \text{ , } k_2 = k_2^* \text{ , } k_3 = k_3^* \text{ , } k_4 = k_4^* \tag{6.23}$$

olacak şekilde bulunur. (6.23), (6.21) eşitliğine yerleştirilirse,

$$c_i(x) = \phi_i^* \left[k_i^*, x, n, c_{01}\right] \tag{6.24}$$

fonksiyonları belirlenir. Daha sonra (6.23) ve (6.24) formülleri (6.4) çözümüne yerleştirilirse aşağıdaki biçimde (6.1) zayıf lineer olmayan Chebyshev tipli diferansiyel denklemin özel çözümleri bulunur.

$$y_1(x) = c_1(x) T_1(k_1 x)$$

$$y_2(x) = c_2(x) T_2(k_2 x)$$

$$y_3(x) = c_3(x) T_3(k_3 x)$$

$$y_4(x) = c_4(x) T_4(k_4 x)$$

(6.1) denkleminin genel çözümü ise,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i(x) = \sum_{i=1}^{4} c_i(x) T_i(k_i x) \tag{6.25}$$

şeklinde olacaktır.

# BÖLÜM 7

# UYGULAMALAR

Bu çalışmada sunulan Chebyshev matris yöntemi lineer veya lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılır. Bu bölümde yöntemin daha iyi anlaşılması için bazı örnekler verilmiştir.

**Örnek 7.1.**

$$y' = x^2 + y^2 \qquad -1 \le x \le 1 \tag{7.1}$$

Lineer olmayan diferansiyel denkleminin $y(0)=1$ koşuluna göre ve $N=2$ olacak şekilde ikinci dereceden Chebyshev polinomları cinsinden bir çözümünü araştıralım. (4.3.1) bağıntısını (7.1) denklemine yerleştirilirse,

$$P(x)=0 \quad \mathrm{Q}(\mathrm{x})=1 \quad \mathrm{R}(\mathrm{x})=0 \quad \mathrm{S}(\mathrm{x})=-1$$

elde edilir. Böylece,

$$p_0 = p_1 = p_2 = 0 \quad q_0 = 1 \quad q_1 = q_2 = 0 \quad r_0 = r_1 = r_2 = 0 \quad s_0 = -1 \quad s_1 = s_2 = 0$$

olur.

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{2}T_0(x) + \frac{1}{2}T_2(x) \qquad F = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

(7.1) denklemi (5.3.3) matris denklemine göre

$$\sum_{i=0}^{2}(4p_iM_iM^2 + 2q_iM_iM + r_iM_i)A + s_iM_iB = 2M_0MA - M_0B = F$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ; & 1/2 \end{bmatrix}$$

$y(0)=1$ koşuluna göre matris denklemi (5.2.8) bağıntısından,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

ve arttırılmış matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak (6.1) problemi için yeni arttırılmış matris;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Buna karşı gelen lineer olmayan denklem sistemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_1 - \frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{2} \qquad\qquad a_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + a_2^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$4a_2 - b_1 = 0 \qquad \text{veya} \qquad 4a_2 - (a_0 a_1 + a_1 a_2) = 0$$

$$\frac{1}{2}a_0 - a_2 = 1 \qquad\qquad \frac{1}{2}a_0 - a_2 = 1$$

Bu denklem sistemi Newton yöntemiyle çözülürse,

$$a_0 = 3{,}0134 \quad , \quad a_1 = 0{,}9998 \quad \text{ve} \quad a_2 = 0{,}5067$$

olarak bulunur. (7.1) diferansiyel denkleminin çözümü,

$$y(x) = \frac{1}{2}3{,}0134T_0(x) + 0{,}9998T_1(x) + 0{,}5067T_2(x)$$

veya

$$y(x) = 1 + 0{,}9998x + 1{,}0134x^2$$

olur. Bu çözümün Taylor Matris çözümüyle karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 2 ile verilmiştir.

**Tablo 2.** Örnek 7.1.' in sayısal çözümleri

| x | Taylor Matris Yöntemi | Chebyshev Matris Yöntemi |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3,0132 |
| 0,5 | 1,75 | 1,75325 |
| 0,25 | 1,3125 | 1,3132 |
| 0 | 1 | 1 |
| -0,25 | 0,8125 | 0,8133 |
| -0,5 | 0,75 | 0,7534 |
| -1 | 1 | 1,0136 |

**Örnek 7.2.**

$$y' - 2(x-1)y + y^2 = -x^2 + 2x + 1 \qquad -1 \le x \le 1 \qquad (7.2)$$

Lineer olmayan diferansiyel denkleminin $N=1$ için çözümünü araştıralım. (7.2) denkleminde,

$$P(x)=0 \quad Q(x)=1 \quad R(x)=-2x+2 \quad S(x)=1$$

şeklindedir. Böylece

$$p_0 = p_1 = 0 \ , \ q_0 = 1 \quad q_1 = 0 \ , \ r_0 = 2 \quad r_1 = -2 \ , \ s_0 = 1 \quad s_1 = 0$$

olur.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 = \frac{T_0(x)}{2} + 2T_1(x) - \frac{T_2(x)}{2} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(7.2) denklemi için (5.3.3) matris denklemi yazılırsa;

$$\sum_{i=0}^{1}(4p_iM_iM^2 + 2q_iM_iM + r_iM_i)A + s_iM_iB = (2M_0M - 2M_1 + 2M_0)A + M_0B = F$$

şeklinde olur.

$$\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen lineer olmayan denklem sistemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$2a_0 + \frac{1}{2} a_0^2 + a_1^2 = 1$$

$$-a_0 + 2a_1 + a_0 a_1 = 2$$

Bu denklem sisteminin iki çözümü;

$$I = \{a_0 = 0, \quad a_1 = 1\}$$
$$II = \{a_0 = -4, \quad a_1 = 1\}$$

şeklindedir.

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = -2 + x$$

olarak elde edilir. Bu iki çözüm (7.2) lineer olmayan diferansiyel denkleminin özel çözümleridir.Genel çözümü bilinen yöntemlerle; [1,15]

$$\frac{y(x) - x}{y(x) - x + 2} = ce^{2x} \qquad \text{veya} \qquad \frac{1}{y(x) - x} = \frac{1}{2} ce^{-2x} - \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

**Örnek 7.3.**

$$y' - y + xy^2 = x - 1 \qquad , \qquad -1 \le x \le 1 \tag{7.3}$$

Lineer olmayan diferansiyel denkleminin $N = 2$ için çözümünü araştıralım. (7.3) denkleminde,

$$P(x) = 0 \quad Q(x) = 1 \quad R(x) = -1 \quad S(x) = x$$

olduğu açıkça görülmektedir.Buna göre;

$$p_0 = p_1 = p_2 = 0\ ,\ q_0 = 1 \quad q_1 = q_2 = 0\ ,\ r_0 = -1 \quad r_1 = r_2 = 0\ ,\ s_1 = 1 \quad s_0 = s_2 = 0$$

$$f(x) = x - 1 = -T_0(x) + T_1(x) \qquad \Rightarrow \qquad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(7.3) denklemi için (4.3.3) matris denklemini yazarsak,

$$\sum_{i=0}^{2} (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i)A + s_i M_i B = (2M_0 M - M_0)A + M_1 B = F$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşı gelen lineer olmayan denklem sistemi şu şekildedir.

$$-\frac{1}{2}a_0 + a_1 + \frac{a_0 a_1 + a_1 a_2}{2} = -1$$

$$-a_1+4a_2+\frac{1}{4}a_0^2+\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_0a_2}{2}+\frac{a_1^2}{4}=1$$

$$-a_1+\frac{a_0a_1}{2}+a_1a_2=0$$

Bu denklem sisteminin çözümünden $a_0=2$, $a_1=0$, $a_2=0$ bulunur. Buradan (7.3) denkleminin çözümü:

$$y(x)=1$$

bulunur. Bu çözüm (7.3) denkleminin bir özel çözümüdür. Bir özel çözümü bilinen Riccati denkleminin genel çözümünü bulmak için bilinen yöntemler kullanılırsa,

$$\frac{e^{x^2-x}}{y(x)-1}\int -xe^{x^2-x}dx$$

bulunur.İlk birkaç terime göre integral alınırsa,

$$\frac{e^{x^2-x}}{y(x)-1}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+c$$

olarak bulunur.

**Örnek 7.4.**

$$y''-3y'+2y+y^2=1 \qquad , \qquad -1\le x\le 1 \tag{7.4}$$

İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin $N=2$ olacak şekilde Chebyshev polinomları cinsinden çözümünü araştıralım. (7.4) denkleminde,

$$P(x)=1 \quad Q(x)=-3 \quad R(x)=2 \quad S(x)=1$$

şeklindedir. Böylece,

$$p_0 = 1 \quad p_1 = p_2 = 0 \;,\; q_0 = -3 \quad q_1 = q_2 = 0 \;,\; r_0 = 2 \quad r_1 = r_2 = 0 \;,\; s_1 = 1 \quad s_0 = s_2 = 0$$

olur.

$$f(x) = 1 = T_0(x) \qquad\qquad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(7.4) denklemi (5.3.3) matris denklemine göre;

$$\sum_{i=0}^{2} (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i)A + s_i M_i B = F$$

$$\left(4M_0 M^2 - 6M_0 M + 2M_0\right)A + M_0 B = F$$

yazılabilir.

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşı gelen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi şu şekildedir.

$$a_0 - 3a_1 + 4a_2 + \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 = 1$$

$$2a_1 - 12a_2 + a_0 a_1 + a_1 a_2 = 0$$

$$2a_2 + a_0 a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 = 0$$

Bu denklem sisteminin iki çözümü;

$$I = \{a_0 = 2\sqrt{2} - 2, \quad a_1 = a_2 = 0\}$$

$$II = \{a_0 = -2\sqrt{2} - 2, \quad a_1 = a_2 = 1\}$$

şeklindedir.

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{2}$$

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{2}$$

olarak elde edilir. Bu iki çözüm (7.4) lineer olmayan diferansiyel denkleminin özel çözümleridir.

**Örnek 7.5.**

$$y'' - \frac{3}{2}y^2 = 0 \qquad , \qquad -1 \le x \le 1 \tag{7.5}$$

İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin $N = 2$ için çözümünü araştıralım.

$$P(x) = 1 \quad Q(x) = 0 \quad R(x) = 0 \quad S(x) = \frac{-3}{2}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$p_0 = 1 \;\; p_1 = p_2 = 0 \;\; , \;\; q_0 = q_1 = q_2 = 0 \;\; , \;\; r_0 = r_1 = r_2 = 0 \; , \; s_0 = \frac{-3}{2} \;\; s_1 = s_2 = 0$$

olur.

$$f(x) = 0 \qquad\qquad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(7.5) denklemi (5.3.3) matris denklemine göre yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^{2} (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i)A + s_i M_i B = F$$

$$4M_0 M^2 A - \frac{3}{2} M_0 B = F$$

bulunur.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen lineer olmayan denklem sistemi şu şekildedir.

$$4a_2 - \frac{3}{8}a_0{}^2 - \frac{3}{4}a_1{}^2 - \frac{3}{4}a_2{}^2 = 0$$

$$-\frac{3}{4}a_0 a_1 - \frac{3}{4}a_1 a_2 = 0$$

$$-\frac{3}{2}a_0 a_2 - \frac{3}{4}a_1{}^2 = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümü;

$$y(x) = 0$$

şeklindedir. Bu (7.5) denkleminin bir özel çözümüdür.

## SONUÇ VE ÖNERİLER

Pek çok önemli fiziki proseslerin kararlı ve kararsız dinamiksel denge problemleri matematiksel olarak çok değişkene bağlı zayıf lineer olmayan diferansiyel denklemler vasıtasıyla ifade edilmektedir. Böyle tipli matematiksel problemlerin esas zorlukları; bir taraftan problemin çok değişkene bağlı olmasıyla, ikinci taraftan denklemin lineer olmayan bileşeninin tipiyle, üçüncü taraftan denklemin katsayılarının singülerliği (tekilliği) ile bağlıdır. Bunların hepsi sonsuz seri biçiminde aranan çok değişkene bağlı çözümün bulunmasının çok zor olduğunu göstermektedir.

Bu durum dikkate alınarak tezin içeriğinde çok değişkenli fonksiyonların küresel polinomlar vasıtasıyla seri açılımları oluşturulmuş, diğer taraftan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde özel yaklaşık bir matris metodu oluşturulmuştur.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki bilimsel sonuçlar elde edilmiştir.

1) Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde literatürde var olan Chebyshev matris metodunun temelleri geniş biçimde açıklanmıştır.

2) n-değişkenli fonksiyonların küresel polinomlar ile seri açılımları oluşturulmuştur. Özellikle n-değişkenli fonksiyonların Chebyshev polinomları ile, Legendre polinomları ile, Hermite polinomları ile ve Laguerre polinomları ile seri açılımları oluşturulmuştur. Ayrıca alınan çok değişkenli küresel polinomlar tanımlanmıştır.

3) n-değişkenli genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının rekurans formülleri oluşturulmuştur. Üstelik onların kuvvetlerinin ve türevlerinin özel bağıntıları oluşturulmuştur.

4) Genelleştirilmiş Chebyshev polinomlarının katsayıları matris şeklinde yazılmış ve onların özel hesaplama yöntemi oluşturulmuştur. Ayrıca istenilen fonksiyonlar ve onlardan oluşan kuvvetler ve türevler Chebyshev tipli matris şeklinde gösterilmiştir.

5) Böyle tipli yeni serilerin ve Chebyshev tipli matrislerin vasıtasıyla özel bir zayıf lineer olmayan diferansiyel denklem sınıfı oluşturulmuş ve matris metodunun kullanımıyla özel matris çözümü oluşturulmuştur.

## KAYNAKLAR


[1] Aydın M., Gökmen G., Kuryel B. & Gündüz G., Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Barış Yayınları, İzmir, (1990).

[2] Aliyev G. G. ve Turhan H. N., Özel Fonksiyonlar, Ankara, (2000).

[3] Aliyev G. G., Matematiğin Fizik ve Mühendisliğe Uygulamaları, Niğde Üniversitesi Yayınları, Niğde, (1998).

[4] Aliyev G. G., Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, İstanbul, (1995).

[5] Güngör F., Diferansiyel Denklemler, İstanbul, (2000).

[6] Clenshaw C. W., Chebyshev Series for Mathematical Functions, National Physical Laboratory (Mathematical Tables), 5, (1962), 1-15.

[7] Doğan S., Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemiyle Çözümleri, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (1994).

[8] Günhan B. C., Lineer Olmayan Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemiyle Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, İzmir, (2001).

[9] Basu N. K., On Double Chebyshev Series Approximation, SIAM J. Numer. Anal., 10, 3 , 496-505, (1973).

[10] Fox L. & Parker I. B., Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, London Oxford Uni. Pres., (1968).

[11] El-Gendi S.E., Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integrodifferential Equations, Computer Journal, 12, 282-287, (1969).

[12] Aliyev G. G., Kompozit Maddeler Mekaniğinin Matematik Temelleri, Niğde Üniversitesi Yayınları, Niğde, (1998).

[13] Dernek A. N. & Dernek A., Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Yayınları, İstanbul, (2001).

[14] Karaoğlu B., Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemleri, Bilgi Tek Yayıncılık, İstanbul, (1977).

[15] Ross S. L., Differential Equations, John Wiley Sons. Inc., Newyork, (1974).

[16] Sezer M. & Doğan S., A Taylor Polynomial Approximation for Solving Linear Fredholm Integral Equations, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, Yıl 2, Sayı 2, (1993), 39-49.

[17] Sezer M. & Kaynak M., Chebyshev Polynomial Solution of Linear Differential Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 27, 4, (1996), 607-618.

[18] Hasanov E., Uzgören G. ve Büyükaksoy A., Diferansiyel Denklemler Teorisi, İstanbul, (2002).

[19] Fıçıcıoğlu T., İkinci Dereceden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler ve Onların Çözüm Metotları, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2004).

[20] Sunar C., Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Metotları, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2005).