

**BAŞKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HELİKOPTER DENETİMİ UYGULAMALARI

AVNİ SELİM ÖZÇUKURLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANKARA

2010

HELİKOPTER DENETİMİ UYGULAMALARI

APPLICATIONS FOR HELICOPTER CONTROL

AVNİ SELİM ÖZÇUKURLU

Başkent Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
ELEKTRİK-ELEKTRONİK Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2010

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından **ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Prof. Dr. Alper URAZ

Üye :Yrd. Doç. Dr. Yakup ÖZKAZANÇ

Danışman :Yrd. Doç. Dr. Mustafa DOĞAN

ONAY

Bu tez 20 / 01 / 2010 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

/ 01 / 2010

Prof. Dr. Emin AKATA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖZ

HELİKOPTER DENETİMİ UYGULAMALARI

Avni Selim ÖZÇUKURLU

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Dalgalı bir denizdeki uçak gemisine, hava araçlarının iniş-kalkış rejimlerindeki denetim tasarımının araştırılması gerekmektedir. Bu tezde hava araçlarından helikopter üzerindeki araştırmalar ve benzetim sonuçları yer almaktadır. Öncelikle bir helikopterin dikey, yanal ve boylamsal hareketinin analizleri yapılmış ve helikopter için bir model oluşturulmuştur.

Helikopter, her üç ekseninde de rastgele hareket eden bir uçak gemisine iniş ve kalkışlarını gerçekleştirir. Buradaki, bilinmeyen bozan etkenlerin sistem başarımını en az etkileyecek şekilde reddedilmesi ve bilinmeyen yörüngelerin izlenebilmesi gerekmektedir. Bunun için doğrusal olmayan uyarlamalı bir denetleyici tasarlanmıştır. Öncelikle Uyarlanı İç Model (UİM) doğrusal sistemler için araştırılmıştır. Daha sonra doğrusal olmayan sistemlerde UİM uygulamaları tasarlanmış ve dayanıklı denetim için tasarım geliştirilmiştir. Doğrusal olmayan sistemler için geliştirilen UİM tasarımı, oluşturulan helikopter modeli üzerinde uygulanmıştır. Denetleyici, MATLAB ortamında gerçekleştirilerek benzetim sonuçları elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Helikopter denetimi, uyarlanı iç model, helikopterin dikey, yanal ve boylamsal hareketi, doğrusal olmayan denetim, dayanıklı denetim

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa DOĞAN, Başkent Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü

ABSTRACT

APPLICATIONS FOR HELICOPTER CONTROL

Avni Selim ÖZÇUKURLU

Başkent University Institute of Science

The Department of Electrical and Electronics Engineering

It is necessary to investigate the design in landing-departure regimes of air vehicles for an aircraft carrier in a rough sea. Vertical, lateral and longitudinal movements of a helicopter have been analyzed and a new model has been established for the helicopter in simulation studies.

Helicopter makes landing on and departure from an aircraft carrier which moves in three dimensions randomly. It is necessary for unknown disturbance factors to be rejected in a way to have the least effect in the system performance and to be able to track the reference input. A nonlinear adaptive controller has been designed for the above purposes. After examining Adaptive Internal Model (AIM) for linear systems, AIM applications were investigated for nonlinear systems and the robust controller has been developed for an helicopter. Performance of the controller has been verified by the simulations.

Keywords: Helicopter control, Adaptive Internal Model, Vertical, Lateral and Longitudinal motion for helicopter, nonlinear control, robust control

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa DOĞAN, Başkent University, Electrical and Electronics Engineering Department

İÇİNDEKİLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER LİSTESİ	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. İÇ MODEL TABANLI DENETİM TEORİSİNİN TEMELLERİ	3
2.1. Sonuçurlu İzleme ve Bozanetkenin Zayıflaması.....	3
2.2. Doğrusal Sistem Modeli.....	7
2.3. Sistem Dayanıklılığı.....	15
2.4. Doğrusal Sistemler için Tasarım Yöntemleri	23
2.5. İç Model Uyarlaması	41
2.6. Doğrusal Olmayan Sistem Modeli.....	47
2.7. Doğrusal Olmayan Sistemler için Tasarım Yöntemleri.....	52
3. HELİKOPTERİN ANALİTİK MODELİ.....	72
3.1. Giriş	72
3.2. Helikopter Modeli.....	73
4. BİR HELİKOPTERİN DAYANIKLI VE DOĞRUSAL OLMAYAN HAREKET DENETİMİ	80
4.1. Problem Tanımlaması.....	80

4.2. Dikey Hata Dinamiğinin Analizi ve Kararlılığı	83
4.3. Yanal ve Boylamsal Dinamiklerin Analizi.....	88
4.4. Kararlılaştırıcının Yapısı	90
4.5. Benzetim Sonuçları	92
5. SONUÇ	107
KAYNAKLAR LİSTESİ	108
EKLER LİSTESİ.....	110
SÖZLÜK.....	121

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. (2.1) Denklemi Öbek Şeması.....	4
Şekil 2.2. Denetleyici (2.40).....	26
Şekil 3.1. Helikopter Açrı Tanımları.....	74
Şekil 3.2. Helikopterin yandan, üstten ve arkadan görünüşü.....	76
Şekil 3.3. Yaklaşık olarak hesaplanmış sistem dinamikleri modeli	79
Şekil 4.1. Açık denizde salınmakta olan bir güverteye inen bir helikopter.....	81
Şekil 4.2. Dikey Hata Denetleyicisi.....	87
Şekil 4.3. Genel sistem dinamikleri.....	89
Şekil 4.4. Kararlaştırıcıyı karakterize eden iç-dış döngü.....	91
Şekil 4.5. Denetleyici Genel Görünümü.....	92
Şekil 4.6. Helikopter model	93
Şekil 4.7. $z(t) \rightarrow z^{ref}(t) + h(t)$ [m] Dikey Hata.....	97
Şekil 4.8. $x(t), y(t)$ [m] Yanal ve Boylamsal Koordinatlar	98
Şekil 4.9. $T_M(t), T_T(t)$ [N] Ana ve Kuyruk Rotoru İtişleri.....	99
Şekil 4.10. $a(t)$ ve $b(t)$ [rad] Eğim Açrıları	100
Şekil 4.11. X-Y-Z [m] Dayanak Yörünge.....	101
Şekil 4.12. X-Y-Z [m] Dayanak Yörüngeinin İzlenmesi.....	102
Şekil 4.13. X-Y-Z [m] İzlenilen Yörüngeler.....	103
Şekil 4.14. X-Y-Z [m] İzlenilen ve Dayanak Yörüngeler	104
Şekil 4.15. X-Y-Z [m] İzlenilen Yörüngelerdeki Hatalar	105
Şekil 4.16. a ve b [rad] Eğim Açrıları.....	106

ÇİZELGELER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 Fiziksel sistemin nominal parametreleri.....	95

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

x	:Durum Değişkeni Vektörü
u	:Denetim Giriş Vektörü
ω	:Dışsistemin Bozaretkenleri
z	:Çıkış Vektörü
y	:Ölçüm Çıkışı
z_{ref}	:Dayanak Çıkışı
w	:Bilinmeyen Yörüngeler Vektörü
e	:Hata Vektörü
μ	:Fiziksel Sistem Parametresi
S	:Dışsistem Matrisi
ξ	:İç model Durum Vektörü
a	:Bilinmeyen Dışsistem Parametresi
Π	:Doğrusal Sistemdeki x' in Çözüm Vektörü
Σ	:Doğrusal Sistemdeki ξ' nin Çözüm Vektörü
Λ	:Doğrusal Sistemdeki u' nun Çözüm Vektörü
V	:Denetim Amaçlı Kullanılan Giriş Vektörü
Φ	:Dışsistemin Parametrelerini İçeren Matris
Γ	:Durum Değişkeninden Denetim Giriş Vektörünü Elde Eden Vektör
F	: Φ Matrisini Oluşturan Hurwitz Matrisi
G	: Φ Matrisini Oluşturan Satır Vektörü
Ψ	:Uyarlama Vektörü
γ	:Uyarlama Tasarım Parametresi
v	:Denetim Giriş Vektörü
V_0	:Doğrusal Sistemdeki x ve ξ Durumlarının Çözüm Alt Uzayı
ζ	:Bilinmeyen Dışsistem Parametresi
f, h, k	:Doğrusal Olmayan Sistemin İşlevleri
ϕ, θ	:Doğrusal Olmayan Sistem Denetleyicisinin İşlevleri

- M_0 :Doğrusal Olmayan Sistemdeki x ve ξ Durumlarının Çözümünü İçeren Manifold
- π :Doğrusal Olmayan Sistemdeki x' in Çözüm Vektörü
- σ :Doğrusal Olmayan Sistemdeki ξ' nin Çözüm Vektörü
- c :Doğrusal Olmayan Sistemdeki u' nun Çözüm Vektörü
- F_i :Helikopterin Eylemsizlik Koordinat Ekseni
- F_b :Helikopter Gövdesi Koordinat Ekseni
- P^i :Helikopterin Ağırlık Merkezi
- v^b :Helikopterin Dönme Hızı
- w^b :Helikopterin Açısal Hızı
- Skew(.) :Negatif Simetrik Matris
- R :Rotasyon Matrisi
- Φ :Yuvarlanma Açısı
- θ :Yunuslama Açısı
- ψ :Yanca Açısı
- f^b :Helikopterin Ana ve Kuyruk Motorlarının Ürettiği Kuvvet
- τ^b :Helikopterin Ana ve Kuyruk Motorlarının Ürettiği Tork
- M :Helikopterin Kütlesi
- J :Helikopterin Eylemsizlik Matrisi
- q :Quaternionlar
- T_M :Helikopterin Ana Motoru Tarafından Üretilen İtme Kuvveti
- T_T :Helikopterin Kuyruk Motoru Tarafından Üretilen İtme Kuvveti
- a : T_m' nin y eksenindeki bileşeni
- b : T_m' nin x eksenindeki bileşeni
- g :Yerçekimi İvmesi
- A_i :Helikopterin İzleyeceği Dayanak Yörüngesinin Genliği
- φ_i :Helikopterin İzleyeceği Dayanak Yörüngesinin Evresi
- Ω_i :Helikopterin İzleyeceği Dayanak Yörüngesinin Frekansı

- η :Helikopterin, Durum Uzayındaki Durum Değişkeni
 u_{st} :Kararlaştırıcı Denetleyicisinin Denetim Girişi
 u_{im} :İç Model Denetleyicisinin Denetim Girişi
 e_z :Helikopterin z-Dikey Eksenindeki Hata

1. GİRİŞ

Belirlenen yörüngelerin sonuçurlu bir şekilde izlenmesi ve/veya boznetkenlerin sonuçurlu reddedilmesi denetim teorisinde merkezi bir problemdir. Esasen bu probleme dair üç farklı yaklaşım olasılığı vardır: Dinamik evirme yolu ile izleme, uyarlanabilir izleme ve iç modeller yoluyla izleme. Dinamik evirme yoluyla izleme başlangıç durumun ve denetim girişinin (veya duruma dair eşdeğer bir dayanak yörüngesi) tam olarak hesaplanmasını içermekte ve böylece fiziksel sistem uygun bir şekilde başlatılır ve yönetilirse çıkışı dayanak sinyalinin yeniden oluşturmaktadır. Ancak böyle bir denetim girişinin hesaplanması, denetlenecek fiziksel sistemin modeline dair “birikimli bir bilgi” yanında izlenecek olan tüm yörüngeye dair “birikimli bir bilgiyi” de gerektirmektedir. Böylece, dayanak sinyallerinin üzerinde olanların yanında fiziksel sistem parametrelerinde de büyük ölçüde belirsizliklerin olması halinde, bu şekilde bir yaklaşım uygun olmayacaktır. Uyarlanabilir izleme hatasını sıfıra sonuçurlu bir şekilde yakınsamayı garanti edecek bir dinamik evirme ile hesaplanan denetim girişi parametrelerini ayarlamayı içermeyecektir. Bu yöntem parametre belirsizlikleri ile başarılı bir şekilde başa çıkabilir ama yine de izlenecek olan tüm yörüngeye (uyarlama algoritmasının hazırlanmasında kullanılacaktır) dair bir bilgi birikimini gerektirecek ve bu yüzden de bu tarz bir yaklaşım bilinmeyen yörüngeleri izleme problemi için uygun olmayacaktır. Tabii ki izleme problemi yavaş bir şekilde değişkenlik gösteren bilinmeyen bir parametrenin olması durumundaki bir kararlılık problemi gibi yavaşça değişkenlik gösteren bir dayanak yörüngesi olarak değerlendirilebilir ama bu birçok durumda çok tutucu bir çözüm sağlayacaktır. Diğer taraftan iç model tabanlı izleme, izlenecek olan yörünge de dâhil, fiziksel sistem parametrelerindeki belirsizliklerle eşzamanlı olarak ilgilenebilme olanağı sağlayacaktır. İzlenecek sabitlenmiş dinamik bir fiziksel sistem ile üretilmiş yörüngeleri kümesine ait olması durumunda böyle bir sistemin iç bir modelini kullanan bir denetleyicinin bu kümedeki her bir yörünge için izleme hatasının sonuçurlu bozulmasını sıfıra getireceği ve bunu parametre belirsizlikleri bakımından gerçekleştireceği gösterilmiştir. Bu, bir sinyalin dış bir sistem tarafından üretilen sinyaller sınıfı içinde olduğu varsayımının yerine izlenecek

yörüngenin geçmişi, şu ana ve geleceğe dair bilgilerinin tam olarak bilindiğinin varsayılmasının gerekeceği, yukarıda belirtilen iki yaklaşım ile yüksek ölçüde çelişkili bir durumdur. Bu yüzden bilinmeyen dayanak yörüngelerinin izlenmesi veya bilinmeyen bozantkenlerin reddedilmesi sorunlarına en uygun gözükten yaklaşım iç model tabanlı yaklaşımdır [4, 5, 7].

İç model denetiminin gelişmiş bir uygulaması olarak, belirsiz koşullarda salınan bir güverteye bir helikopterin güvenli bir şekilde inmesini sağlayabilecek bir otomatik pilotun tasarımı incelenecektir. Değerlendirmeye alınan kurgu bir helikopterin, dalga hareketine bağlı olarak, büyük dikey salınımlara tabi olduğu bir olası senaryoyu temsil eder. Denetim amacı iki ayrı göreve ayrılır: İlk olarak belirli bir yükseklik farkı ile, güverteninki ile helikopterin dikey hareketinin senkronizasyonudur. Senkronizasyon sağlandığında ikinci görev yükseklik farkının sıfıra inmesini sağlamaktır. Açık bir şekilde önemli olan kısım burada ilk görevi yerine getirebilecek bir denetleyici tasarlamaktır.

2. İÇ MODEL TABANLI DENETİM TEORİSİNİN TEMELLERİ

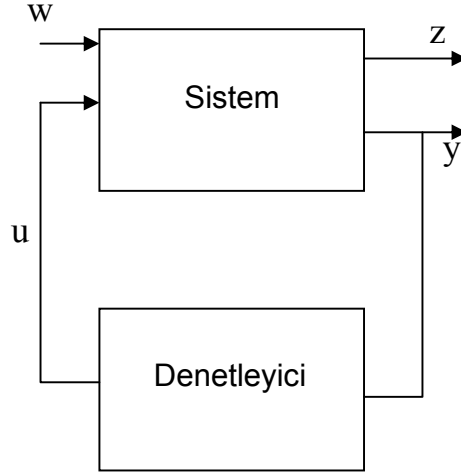
2.1. Sonuçurlu İzleme ve Bozanetkenin Zayıflaması

Önceden belirlenen dayanak yörüngeleri izlemek amacıyla bir fiziksel sisteme dair kesin çıkışlar elde etmek için geribesleme denetleyicisinin hazırlanması denetim teorisindeki merkezi bir problemdir. Fiziksel sistemin beklenilenden farklı hareket etmesine sebep olabilecek olan birçok olguya rağmen herhangi bir gerçekçi senaryoda bu denetim amacına ulaşılmalıdır. Bu olgular, örneğin somut parametre değişimleri gibi içyapılı ya da fiziksel sistemin davranış şeklini etkileyecek şekilde olan istenmeyen ek girişler gibi dış kaynaklıda olabilir.

Fiziksel sistem doğrusal, sonlu boyutlu, zamanda değişmez bir sistem şeklinde modellenebilir ise söz konusu problem şeklen aşağıdaki gibi verilebilir. Fiziksel sistemin modelinin birinci dereceden doğrusal türevsel denklem takımı olduğunu ve

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1u + B_2w \\ z &= C_1x + D_{11}u + D_{12}w \\ y &= C_2x + D_{21}u + D_{22}w\end{aligned}\tag{2.1}$$

şeklinde yazıldığını ve x' in bir durum değişkeni vektörü, u' nun denetim amaçları için kullanılacak olan bir giriş vektörü, w' nin denetlenemeyen ve böylece istenmeyen iç bozanetkenler olarak gösterilen bir girişler vektörü, z' nin denetlenmesi gereken çıkışlar vektörü, y' nin ise ölçüm için uygun olan ve böylece denetim işlemini sağlayan düzeneği beslemek için kullanılan bir çıkışlar vektörü olduğu varsayılır. (2.1) denklemini veren öbek şema Şekil 2.1 ile verilmektedir.



Şekil 2.1. (2.1) Denklemi Öbek Şeması

$z_{ref}(t)$, (2.1)' in $z(t)$ denetlenmiş çıkışının yeniden oluşturması gereken belirlenmiş olan davranışı zamanlı bir şekilde ifade etmektedir. Yukarıdaki tasarım problemini belirlemek için kullanılan yollardan birisi $y(t)$ ' yi giriş olarak alan ve $u(t)$ ' yi çıkış olarak üreten, ortaya çıkan kapalı döngü sisteminde $z(t)$ sonuçurlu izlemeleri $z_{ref}(t)$ gibi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - z_{ref}(t)\| = 0 \quad (2.2)$$

denklemini garanti eden bir denetleyici kullanmaktır. Böylelikle, diğer tüm tasarım amaçları için olduğu gibi, bu özgül tasarım amacı için de genel anlamda kabul edilen bir gereklilik olan denetleyici, aynı zamanda, sadece denetlenen z çıkışının bileşenlerini değil diğer tüm iç/durum değişkenlerinin “istenen davranışları” sağlayabilecek durumda olmalıdır. Bu gerekliliği ifade etmenin bir yolu, $w(t)$ ve $z_{ref}(t)$ bağlandığında ki bu durum, sonuçta sonuçurlu kararlılık özelliği ile otomatik olarak garanti edilen (sistemin doğrusal olması) bir durumdur, tüm değişkenlerin bağlı olarak kalacağını kabul ettirmektir.

Bu problemi başarılı bir şekilde belirleyebilmek için dış uyarın $w(t)$ ve $z_{ref}(t)$ ve onların özgül şekilleri hakkında denetleyicinin ne kadar bilgi sahibi olmasına izin verildiğine bağlı bir durumdur. $w(t)$ ve $z_{ref}(t)$ ' nin tam olarak ve önceden bilindiği ideal durumda, tasarım problemi çok daha basit görünmektedir. Ancak bu hiçbir

koşulda herhangi bir gerçekçi senaryoyu ifade etmeyen, iyimser bir durumdur. Diğer bir durum ise bu uyarılar hakkında hiçbir şeyin bilinmediği ama sadece onların tatmin ettikleri değişken sınırlar olduğu bilinen durumdur. Bu karamsar senaryoda beklenebilecek en iyi durumdur, (2.2) gibi tam bir amacın gerçekleştirilmesi değil $z(t)$ ve $z_{ref}(t)$ arasındaki fark için belirli esas sınırların garanti edilecek olmasıdır. Daha rahat, orta halli bir durum ise, örneğin verilmiş olan belirli bir küme üzerinde ilgili başlangıç şartlarının değişmesine izin verildiği sabit bir türevsel denklemden elde edilen tüm çözümlerin ailesine ait olanlar gibi, $w(t)$ ve $z_{ref}(t)$ ' nin sadece sabit bir zaman işlevleri ailesine ait olduğu bilinen durumlardır. Bu durum aslında ideal olan ama gerçeklik dışı olan $w(t)$ ve $z_{ref}(t)$ ' ye dair bir bilgi birikiminin olduğu durumdan ve $w(t)$ ile $z_{ref}(t)$ ' ye dair hiçbir bilginin olmadığı durumdan yeteri ölçüde uzak bir durumdur. Ama bununla birlikte daha sonrada görülebileceği gibi bu şekilde dış bir uyarının düşünülmesi başlıca pratik uygulamaların geçerliliğinin olduğu birçok durumu karşılamaktadır. $w(t)$ ve $z_{ref}(t)$ bileşenleri bu anlamda, sabit bir türevsel denklemden alınan çözümler ailesinin üyeleri gibi düşünüldüklerinde fiziksel sistemin modelinde onları ayrı ayrı tutmak için hiçbir sebep yoktur. Aslında onlar,

$$w^a = \begin{pmatrix} w \\ z_{ref} \end{pmatrix}$$

gibi yazılacak şekilde dışyapılı girişlerin daha geniş bir vektörünün bileşenleri olarak da gösterilebilir. Buna bağlı olarak (2.1) modelinde denetlenen z çıkışı,

$$e(t) = z(t) - z_{ref}(t)$$

izleme hatası ile yer değiştirilebilir. Bu da yukarıdaki denklemlerin de gösterdiği gibi aslında x durumunun, u denetim girişinin ve w^a bozanetkenin,

$$e = C_1^a x + D_{11}^a u + D_{12}^a w^a \quad (2.3)$$

şeklinde doğrusal bir işlevidir.

Başlangıç olarak ve sorunları basitleştirmek için doğrusal bir türevsel denklem olduğu varsayılan bir S^a sabit matrisi kullanılır. Bu, dış uyarının (bozanetkenlerin) çeşitli bileşenlerinin sabit bir türevsel denklem çözümleri ailesinin üyesi olarak,

$$\dot{w}^a = S^a w^a \quad (2.4)$$

gösterilir [1, 2]. Bu bağlamda (2.4)' deki fiziksel sistem, dışsistem olarak ifade edilmektedir. Aslında $w^a(0)$ başlangıç şartları önceden belirlenmiş W kümesinde farklılık göstereceğinden dolayı bu sistem tasarım probleminde olası tüm dışyapılı sinyallere dair bir model sağlamaktadır.

Bu şartlarda tasarım problemi, tüm başlangıç şartlarındaki fiziksel sistemin ve denetleyicinin durum uzaylarına dair (ikinci olarak bahsedileninin iç dinamiklerinin olması durumunda) ve dışsistemin durum uzayının W alt kümesinin tüm başlangıç koşullarına dair, ortaya çıkan kapalı döngü sisteminin yörüngelerinin bağlandığı (bunlar aynı zamanda (2.4)' e de ait ise) bir geribesleme denetleyicisi bulmaktır ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

şekilde geçerlidir. Yukarıdaki formülde, denetlenen $z(t)$ çıkışının davranışı ve onun önceden belirlenen $z_{ref}(t)$ davranışı arasındaki olası bir yanlış eşleşmeye dair diğer, ilgili başka bir kaynağın açık bir şekilde değerlendirmeye alınmamıştır. Fiziksel sistem parametresi belirsizliklerine dair uzlaşmış, bir şekilde basitleştirilmiş ama etkili olan düşünme şekli de model (2.1)' in katsayı matrislerinin önceden belirlenen bir P kümesinde çeşitlenen sabit bir vektöre ama bilinmeyen μ parametrelerine bağlıdır. Bu şekilde, (2.3)' ü değerlendirmeye alarak ve "a" üsttakısını aşağıdaki şekilde düşürerek fiziksel sistem (2.1),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu)x + B_1(\mu)u + B_2(\mu)w \\ e &= C_1(\mu)x + D_{11}(\mu)u + D_{12}(\mu)w \\ y &= C_2(\mu)x + D_{21}(\mu)u + D_{22}(\mu)w \end{aligned} \quad (2.5)$$

şekilde yeniden yazılabilir. Tabi ki μ , dışyapılı bir giriş olarak değerlendirilebilir ve 1. derece türevi

$$\dot{\mu} = 0$$

dir. Bu şekilde w ile toplanması sağlanabilir ama bu modelin doğrusallığına zarar verecektir. Bu sebeple doğrusal sistemler ele alınırken bu tür bir gösterim daha

uygun olacaktır. (Ancak, açıklayıcı amaçlar dışında, μ ve w' nin rollerini ayrı tutmak için özel bir sebebin olmadığı doğrusal olmayan sistemleri ele alırken kullanılmayacaktır.)

Yine bu daha genel anlamda söz konusu problem, μ' dan bağımsız tüm başlangıç şartları için fiziksel sistem ve denetleyici durum uzaylarında, dışsistemin uzayının önceden belirlenmiş bir W altkümesindeki başlangıç şartları için ve önceden belirlenmiş bir P altkümesinin tüm değerleri için, bir geribesleme denetleyicisi bulmaktır ve (2.4) ve $e(t)$ ' nin $t \rightarrow \infty$ olduğunda 0' a yaklaşır, ortaya çıkan kapalı döngü sisteminin yörüngeleri istenen değerler içinde sınırlandırılmış olur.

2.2. Doğrusal Sistem Modeli

Doğrusal, zamanla değişmeyen bir sistem olan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ y &= Cx + Qw \\ e &= C_e x + Q_e w\end{aligned}\tag{2.6}$$

ele alınır. Bu denklemlerde $x \in R^n$ durum vektörü, $u \in R^m$ denetim girişi, $w \in R^r$ bozanetken girişi, $y \in R^p$ ölçülen çıkış ve $e \in R^q$ bir izleme hatasıdır. Bu sistemi etkileyen w bozanetken girişi Bölüm 2.1' de verilen terminolojiye göre dışsistem olarak ifade edilecek olan,

$$\dot{w} = Sw\tag{2.7}$$

denklemini bağımsız zamanda değişmez bir doğrusal sistemdir. (2.6)' nın denetimi, ölçülen y çıkışını işleyen ve u denetim girişini üreten bir dinamik geribesleme denetleyici aracılığıyla sağlanır. Bu denetleyici doğrusal zamanda değişmez bir sistemdir ve $\xi \in R^v$ durumu ile

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F\xi + Gy \\ u &= H\xi + Ky\end{aligned}\tag{2.8}$$

şeklinde modellenmiştir [5]. e çıkışı ile bir doğrusal zamanda değişmez ve bağımsız bir sistem olan (2.6), (2.7) ve (2.8)' in bağlantısı,

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Sw \\ \dot{x} &= (A + BKC)x + BH\xi + (P + BKQ)w \\ \dot{\xi} &= F\xi + GCx + GQw \\ e &= C_e x + Q_e w\end{aligned}\quad (2.9)$$

şeklinde modellenmiştir. Bu, zorlanmış kapalı döngü sistemini göstermektedir. Dışsistemin bağlantısı kesildiğinde ve e çıkışı görmezden gelindiğinde elde edilen özel sistem, yani

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BKC)x + BH\xi \\ \dot{\xi} &= F\xi + GCx\end{aligned}\quad (2.10)$$

zorlanmamış kapalı döngü sistemi olarak anılacaktır.

Tasarım probleminin bazı genel isterleri şu şekildedir:

- a) Zorlanmamış kapalı döngü sistemi (2.10)' un denge noktası $(x, \xi) = (0, 0)$ sonuurlu kararlıdır,
- b) Zorlanmış kapalı döngü sisteminde (2.9) her bir başlangıç şartı için $(w(0), x(0), \xi(0))$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

dır.

Yukarıdaki formüllerle daha basit bir analiz yapabilmek için bazı varsayımlar kullanılmıştır.

Varsayım 1: (A, B) çifti kararlaştırılabilir ve (C, A) sezilebilir niteliktedir. Bu F, G, H, K matrislerinin varlığı için gerekli ve yeterli bir şarttır,

$$J = \begin{pmatrix} (A + BKC) & BH \\ GC & F \end{pmatrix}\quad (2.11)$$

matrisinin tüm özdeğerleri sol yarı düzlemde olacaktır.

Varsayım 2: (2.7) bozanetkenlerden oluşan dışsistem denklemini; a bilinmeyen dışsistem parametrelerini gösterecek şekilde,

$$\begin{aligned}\dot{w}^a &= S^a w^a \\ S^a &= \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \\ w_1^a &= r \cos(at + b_1) \\ w_2^a &= r \cos(at + b_2) \\ r &= \sqrt{w_1^{a^2}(0) + w_2^{a^2}(0)} \\ b_1 &= -\arctan\left(\frac{w_2^a(0)}{w_1^a(0)}\right) \\ b_2 &= \arctan\left(\frac{w_1^a(0)}{w_2^a(0)}\right)\end{aligned}$$

w sinüzoidal bozanetkenleri açık şekilde çözülmüştür. Söz konusu özellik tarafsız kararlılık olarak ifade edilecektir. Bu varsayım S' nin özdeğerleri, sadece sanal eksen üzerinde ise geçerli olacaktır. Bu şekilde, uygun koordinatlarda S her zaman için köşegen simetrik matris olarak ifade edilecektir. Bu varsayım geçerli olursa dışsistem (2.7)' e dair tüm yörüngeler ileriki bir zamanda sınırlanacaktır ve onlardan hiçbirisi $t \rightarrow \infty$ olduğu için sifıra gitmeyecektir. İleriki bir zamanda sınırlamak tasarım probleminin (a) gerekliliğinin yerine getirilmesi halinde herhangi bir $x(0)$, $\xi(0)$, $w(0)$ için zorlanmış kapalı döngü sistemi (2.9)' un sınırlanacağını garanti etmektedir. Aslında $x(t)$ ve $\xi(t)$ sonuçurlu kararlı bir doğrusal sistemin bağlı bir girişe yanıtı olarak değerlendirilebilir. Diğer taraftan, $t \rightarrow \infty$ iken, (2.7)' in yörüngelerinin var olmaması (a) gerekliliğinin yerine getirilmesi tarafından (b) gerekliliğinin yerine getirilmesinin öngörüleceği $w(t)$ bağlantısız yörüngeleri belirleyecektir.

Varsayım 3: $e = Ey$ eşitliğini sağlayan $q \times p$ boyutlu bir E matrisi bulunabilir. Bu özellikle genelde “ e' nin y' den okunabilme” özelliği ile ilgili olarak ifade

edilmektedir. Durumun böyle olması halinde, olası çıkış uzayındaki koordinatlarda bir değişiklikten, içinde C_1 ve Q_1 ' in bir C ve Q bölümünden

$$e = C_1x + Q_1w$$

olarak alındığı

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde düzenlenmiş e çıkışından sonra değerlendirmede bir genellik kaybı olmadığı görülmektedir.

Tutarlı bir şekilde $y_1 = e$ şeklinde ve

$$y_2 = C_2x + Q_2w$$

şeklinde yazılacaktır.

Bu varsayım esasen ölçüm için erişilen tüm değişken kümelerinin düzenlenmiş çıkış e ' nin bileşenleri ile birlikte vektör y_2 ' nin bileşenlerini içeren fazladan bir değişkenler kümesini içinde bulundurduğunu ifade etmektedir. Dayanıklılık özelliğinin tutulması gerekiyorsa bu varsayım gerekli olarak düşünülebilir.

Varsayım 4: e ' nin bileşenlerinin q sayısı, u ' nun bileşenlerinin m sayısına eşittir. e ' nin bileşenleri, q ' nun değişkenlerinin bağımsız dayanak yörüngelerinin eşit bir sayısını izlemesi gereken bir denetim probleminde bir izleme hatası bileşenleri olarak gösteriliyorsa değerlendirmeye alınması gerekmektedir. Bu durumda aslında denetim giderlerinin sayısı en azından denetlenecek bağımsız değişkenlerin sayısına eşit olmalıdır. Bu varsayım genel anlamda vazgeçilmez bir varsayım değildir ama analizi önemli ölçüde basitleştirir. Aynı zamanda Varsayım 3' ün ışığında bu durumun açık bir şekilde $p \geq q$ ' yu ifade ettiği de görülmektedir.

Ön Kuram 2.2.1. Kapalı döngü sistemi (2.9) ve tüm matrislerin özdeğerlerinin (2.11) negatif gerçek bölümlerinin olduğu varsayılırsa; O zaman her bir $x(0)$, $\xi(0)$, $w(0)$ başlangıç şartı için sadece

$$\begin{aligned}\Pi S &= (A + BKC)\Pi + BH\Sigma + P + BKQ \\ \Sigma S &= F\Sigma + GC\Pi + GQ\end{aligned}\quad (2.12)$$

tek (Π, Σ) çözüm çifti,

$$0 = C_1\Pi + Q_1 \quad (2.13)$$

şeklinde olacaktır. (Π, Σ) çözüm çifti sırasıyla, (x, ξ) durum değişkenlerinin çözümlerinde kullanılır [1, 5].

Kanıt: Matris biçiminde yazılmış olan denklem (2.12)

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} (A + BKC) & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P + BKQ \\ GQ \end{pmatrix}$$

bir Sylvester denklemidir. Varsayım 2 ile S' nin tüm özdeğerleri sıfır gerçek bölüme sahip olurken, ön kurama göre matris (2.11)' in tüm özdeğerlerinin negatif gerçek bölümü vardır; böylece denklem (2.12) tek olan bir (Π, Σ) çözüm çiftine sahiptir ve

$$\begin{pmatrix} w \\ \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\Pi & I & 0 \\ -\Sigma & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x - \Pi w \\ \xi - \Sigma w \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Yukarıdaki şekilde tanımlanan yeni koordinatlarda kapalı döngü sistemi (2.9)' un denklemleri,

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Sw \\ \dot{\bar{x}} &= (A + BKC)(\bar{x} + \Pi w) + BH(\bar{\xi} + \Sigma w) + (P + BKQ)w - \Pi Sw \\ \dot{\bar{\xi}} &= F(\bar{\xi} + \Sigma w) + GC(\bar{x} + \Pi w) + GQw - \Sigma Sw\end{aligned}$$

şekilde yeniden yazılır ve (2.12)' nin gösterimi,

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + BKC) & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}$$

şeklini alır.

Yeni koordinatlarda düzenlenmiş değişken e ,

$$e = C_1 \bar{x} + (C_1 \Pi + Q_1) w$$

şeklinde elde edilir.

Sistem (2.9)' u yeni koordinatlara eklemek ile,

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\xi}(t) \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{\xi}(0) \end{pmatrix}, \quad w(t) = e^{St} w(0)$$

elde edilir ve böylece

$$e(t) = (C_1 \quad 0) e^{Jt} \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{\xi}(0) \end{pmatrix} + (C_1 \Pi + Q_1) e^{St} w(0)$$

olur.

J ' nin negatif gerçekte bölümler ile tüm özdeğerlere sahip olmasından dolayı, sadece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 \Pi + Q_1) e^{St} = 0$$

olması halinde ve bunun da sonuç olarak $C_1 \Pi + Q_1 = 0$ durumunda gerçekleşmesi

halinde $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ koşulu her bir $w(0)$, $\bar{x}(0)$, $\bar{\xi}(0)$ için aynı kalır, çünkü Varsayım 2 ile tüm S özdeğerlerinin negatif olmayan gerçekte bölümleri vardır. Bu da ön kuramı geçerli kılar.

Bu ön kuramda oluşturulan koşul, sonra denetleyici ikiye ayrılacağı için yeniden tanımlanmaktadır. G ve K , $G = (G_1 \ G_2)$, $K = (K_1 \ K_2)$ şeklinde ölçümlerle hatayı aynı denklemde ayrı ayrı gösterebilmek için ikiye ayrılır.

Bu durumda (2.8) denetleyicisi,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F\xi + G_1 e + G_2 y_2 \\ u &= H\xi + K_1 e + K_2 y_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

olur.

Önerme 2.2.1. (2.14) denetleyicisinin (2.6)' yı kararlaştırdığı varsayılır. O zaman

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

olması durumunda burada

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B\Lambda + P \\ 0 &= C_1\Pi + Q_1\end{aligned}\quad (2.15)$$

ve

$$\begin{aligned}\Pi S &= F\Sigma + G_2(C_2\Pi + Q_2) \\ \Lambda &= H\Sigma + K_2(C_2\Pi + Q_2)\end{aligned}\quad (2.16)$$

şeklinde Π , Σ , Λ matrisleri oluşur [2, 5].

Kanıt. Ön kuram 2.2.1 ile, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ olması durumunda, (2.12)' nin tek (Π, Σ) çözümü (2.13)' ü karşılamaktadır. (2.12)' nin iki denklemi,

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + BK_1C_1\Pi + BK_2C_2\Pi + BH\Sigma + P + BK_1Q_1 + BK_2Q_2 \\ \Sigma S &= F\Sigma + G_1C_1\Pi + G_2C_2\Pi + G_1Q_1 + G_2Q_2\end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılır ve (2.13)' ün yardımı ile,

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + BK_2C_2\Pi + BH\Sigma + P + BK_2Q_2 \\ \Sigma S &= F\Sigma + G_2C_2\Pi + G_2Q_2\end{aligned}$$

şeklinde küçültülür. $\Lambda = H\Sigma + K_2(C_2\Pi + Q_2)$ denklemi, (2.15) ve (2.16)' nın gerekli oldukları şekilde aynı kaldıklarını gösterir:

Önerme 2.2.2. (2.14) şeklinde bir denetleyicinin (2.6)' yı kararlaştırdığını ve Π , Σ , R matrislerinin bazı üçlülerinde, (2.15) ve (2.16) şartlarının sabit kaldığı varsayıldığı zaman bu denetleyici genelleştirilmiş bir izleme problemini çözer [5].

Kanıt. Kapalı döngü sistemi,

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Sw \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + BK_1C_1 + BK_2C_2 & BH \\ G_1C_1 + G_2C_2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P + BK_1Q_1 + BK_2Q_2 \\ G_1Q_1 + G_2Q_2 \end{pmatrix} w\end{aligned}$$

ele alınır.

Hipotez olarak

$$J = \begin{pmatrix} A + BK_1C_1 + BK_2C_2 & BH \\ G_1C_1 + G_2C_2 & F \end{pmatrix}$$

matrisi negatif gerçek bölüm ile tüm özdeğerlere sahiptir. Sonuç olarak

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi} \\ \hat{\Sigma} \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} A + BK_1C_1 + BK_2C_2 & BH \\ G_1C_1 + G_2C_2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Pi} \\ \hat{\Sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P + BK_1Q_1 + BK_2Q_2 \\ G_1Q_1 + G_2Q_2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Sylvester denkleminin tek bir $\hat{\Pi}$, $\hat{\Sigma}$ çözümü olur. (2.15) ve (2.16)' yı kullanarak Π ve Σ ' nin bu denklem için bir çözüm sağlayıp sağlamadığını denetlemek önemsizdir. Bu da,

$$\hat{\Pi} = \Pi, \quad \hat{\Sigma} = \Sigma$$

Denklemlerini sağlar. Yine (2.15)' i kullanarak (2.17)' nin tek çözümünün

$$C_1 \hat{\Pi} + Q_1 = 0$$

şeklinde olduğu çıkarımı yapılır ve bu da ön kuram 2.2.1' in $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ eşitliğini kanıtlamaktadır.

2.2.1 ve 2.2.2 önermeleri genelleştirilmiş izleme sorununu çözebilecek bir denetleyicinin varlığı için yeterli ve gerekli şartları sağlarlar. Ancak henüz tasarım için kullanılamamaktadırlar. Çünkü tüm şartları karşılayan bir denetleyicinin nasıl oluşturulacağını tanımlamamaktadırlar.

Sonuç 2.2.1. $e = y$ şeklinde olduğu özel bir durumda (2.14) denetleyicisi,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F\xi + G_1e \\ u &= H\xi + K_1e \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklindeki bir denetleyiciye indirgenir ve 2.2.1 ve 2.2.2 önermeleri aşağıdaki sonucu verir.

(2.18) şeklinde bir denetleyici (2.6)' yı kararlaştırır. Bu denetleyici sadece aşağıdaki gibi Π , Σ , Λ matrislerinin olması durumunda genelleştirilmiş izleme problemini çözer ve

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B\Lambda + P \\ 0 &= C_1\Pi + Q_1\end{aligned}\quad (2.19)$$

ve

$$\begin{aligned}\Sigma S &= F\Sigma \\ \Lambda &= H\Sigma\end{aligned}\quad (2.20)$$

olur.

Not 2.2.1. Bu durumda iç model özelliği (2.16) tarafından varsayılan daha basit yapı, yani (2.20) şeklinin ölçülen y çıkışının sadece e' den oluşmadığı ama bir dizi açık olmayan ekstra y_2 değişkenlerini içerdiği durumlarda da gerçekleşebileceğini vurgulamak önemlidir. Özel (2.20) ifadesinin geçerli olması için aslında (2.19) düzenleyici denklemlerinin Π , çözümünün $C_2\Pi + Q_2 = 0$ şeklinde olması yeterlidir.

2.3. Sistem Dayanıklılığı

Bölüm 2.1' in sonunda gözlemlendiği üzere iyi bir tasarım aynı zamanda denetlenen fiziksel sistem modelinin (en azından parametrik olarak) belirsizliklere tabi olduğunu da değerlendirmeye almalıdır. Tasarım (2.6) modelini karakterize eden A, B, P, C, Q matrisleri (C_e ve Q_e matrisleri varsayım 3' ün ışığında C ve Q ' nun alt matrisleridir) belirli bir P kümesi içinde yer alacak şekilde belirsiz parametrelerinin bir μ vektörüne bağlı olduğu gerçeği değerlendirmeye alınır. Diğer taraftan denetleyici asıl değeri bilinmeyen μ vektöründen bağımsız olmalıdır ve bu da bir önceki bölümde sunulan analize dair bazı ilgili sonuçları beraberinde getirmektedir [1, 2, 5].

μ' ye bağımlı bir fiziksel sistemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\mu)x + B(\mu)u + P(\mu)w \\ e &= C_1(\mu)x + Q_1(\mu)w \\ y_2 &= C_2(\mu)x + Q_2(\mu)w\end{aligned}\quad (2.21)$$

ve (2.8) denetleyicisinin herhangi bir $\mu \in P$ değeri için izleme problemini çözmesi halinde dayanıklı olduğu söylenir. Bu formülasyonda (2.7) dışsisteminin

parametre belirsizliklerine tabi olmadığı varsayılır. Dışsistemde parametrik belirsizliklerin varlığı ayrı bir analiz gerektiren hassas bir sorundur ve Bölüm 2.5 içerisinde ele alınacaktır.

Genelleştirilmiş sonuçurlu bir izleme problemini çözen bir denetleyicinin, dayanıklı ve kararlı yapıda bir fiziksel sistem oluşturabilmesi için bazı varsayımlar yapılır:

Varsayım 5: Aşağıdaki matrisin tüm özdeğerlerinin tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçek bölümlere sahip olduğu F, G, H, K matrisleri bulunmaktadır ve

$$J = \begin{pmatrix} A(\mu) + B(\mu)KC(\mu) & B(\mu)H \\ GC(\mu) & F \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

matrisi şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.1. (2.14) şeklindeki denetleyicinin dayanıklı bir şekilde kararlılaştırıldığını (2.21) kabul eder. Bu denetleyici her bir $\mu \in P$ değeri için aşağıdaki şekilde Π, Σ, Λ matrisleri var ise dayanıklıdır [1, 5]. Bunlar,

$$\begin{aligned} \Pi S &= A(\mu)\Pi + B(\mu)\Lambda + P(\mu) \\ 0 &= C_1(\mu)\Pi + Q_1(\mu) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ve

$$\begin{aligned} \Pi S &= F\Sigma + G_2(C_2(\mu)\Pi + Q_2(\mu)) \\ R &= H\Sigma + K_2(C_2(\mu)\Pi + Q_2(\mu)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

dur.

(2.23) ve (2.24) denklemlerini çözmek için gerekli olan üç Π, Σ, Λ matrisinin μ' den bağımsız olmaları gerekmemektedir. Bunu vurgulamak için duruma göre daha açık $\Pi(\mu), \Sigma(\mu), \Lambda(\mu)$ biçimleri kullanabilir.

Belirsiz μ parametresi aşağıdaki beşli ile tanımlandığı ve P' nin boş olmayan bir iç alt kümesine sahip olduğu (bu beşlinin tanımlandığı vektör uzayının topolojisinde) durumda, bu denklemdeki çeşitli katsayı matrislerinin tüm girişlerinin bağımsız değişimlere elverişli olduğu düşünüldüğünde, her bir $\mu \in P$ için (2.23)

denklemlerinin, yani düzenleyici denklemlerin ilk kümesinin Π, Λ çözüm çiftinin varlığına basit ve açıklayıcı bir özellik belirlenebilir ve $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ matrisleri,

$$\{A, B, P, C_1, Q_1\} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \times \mathfrak{R}^{n \times m} \times \mathfrak{R}^{n \times r} \times \mathfrak{R}^{m \times n} \times \mathfrak{R}^{m \times r}$$

şekilde tanımlanır. Bu durumda aslında (2.23) denklemlerinin tüm $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ için çözümleri olduğunu söylemek

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Lambda + P \\ 0 &= C_1\Pi + Q_1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

şeklindeki denklemlerin boş olmayan bir içterse sahip kümedeki tüm $\mu \in P$ için çözümlere sahip olduğunu söylemek anlamına gelir. Durumun bundan ibaret olması için basit bir şart mevcuttur:

Ön kuram 2.3.1. (2.25) denklemleri sadece S' nin özdeğeri olan tüm $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ ' ler için

$$\det \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olması durumunda tüm $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ için açık bir kümede tek bir çözüme sahiptir [5, 6].

Kanıt. A, B, C_1 ve S' nin sabit matrisler ve

$$\mathfrak{R} : \mathfrak{R}^{n \times r} \times \mathfrak{R}^{m \times r} \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times r} \times \mathfrak{R}^{m \times r}$$

eşlemesi,

$$\mathfrak{R}(\Pi, \Lambda) = (\Pi S - A\Pi - B\Lambda, -C_1\Pi)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Π, Λ nin (2.25)' in çözümü olduğunu söylemek

$$\mathfrak{R}(\Pi, \Lambda) = (P, Q_1) \quad (2.26)$$

olduğunu söylemek anlamına gelmektedir.

Λ eşlemesi doğrusal bir eşlemedir ve bu eşlemenin sadece ön kuramının sabit kaldığı durumlarda çevrilebilir olduğu bilinmektedir. Döndürülebilirlik herhangi bir çift için (P, Q_1) (2.26)' nın tuttuğu gibi sadece bir çiftin (Π, Λ) olduğu anlamına gelir ve bu da aslında söz konusu koşulun yeterli olduğunu ispatlar. Bu koşulun gerekli

olduğunu göstermek için bu beşlilerin yer aldığı \mathcal{Q} kümesindeki herhangi bir $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ beşlisi ele alınır. ε yeterli ölçüde küçük ise herhangi bir belirli çift $(\bar{P}, \bar{Q}_1) \in \mathbb{R}^{n \times r} \times \mathbb{R}^{m \times r}$ için

$$\{A, B, P + \varepsilon \bar{P}, C_1, Q_1 + \varepsilon \bar{Q}_1\} \in \mathcal{Q}$$

olur çünkü \mathcal{Q} açıktır. (2.25) denklemleri tüm bu ε ' ler için çözümlenmelidir ve basit bir hesaplamanın da gösterdiği gibi ilgili çözüm,

$$\Pi = \Pi_0 + \varepsilon \bar{\Pi}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon \bar{\Lambda}$$

biçiminde verilebilir ve burada $\bar{\Pi}, \bar{\Lambda}$,

$$\Lambda(\bar{\Pi}, \bar{\Lambda}) = (\bar{P}, \bar{Q}_1) \quad (2.27)$$

olacaktır. (\bar{P}, \bar{Q}_1) çifti, doğrusal \mathbb{R} eşlemesinin aralığı üzerine olduğu ve eşlemenin yerinin ve aralığının aynı boyuta sahip olmasından dolayı eşlemenin dönüştürülebilir olduğunu kanıtlar. Bu şekilde ön kuramdaki, Λ' nin dönüştürülebilir olmasına dair koşul ortaya çıkar.

Bununla birleştirilmiş bir şekilde aşağıdaki yeni varsayım eklenir:

Varsayım 6: Herhangi bir $\mu \in P$ için

$$\begin{pmatrix} A(\mu) - \lambda I & B(\mu) \\ C_1(\mu) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

matrisi S' nin özdeğerleri olan tüm λ' lar için çözüm tek değildir. Bu varsayım rezonanssız koşul olarak ifade edilecektir.

Bu varsayımın geçerli olması durumunda (2.23) denklemlerinin gerektirdiği üzere her bir $\mu \in P$ için bir çözüme sahip olması durumu açık bir şekilde görülmektedir. (2.23) denklemlerinin her bir μ için bir çözüme sahip olduğu biliniyorsa (aslında bu varsayım 6' nın geçerli olması durumunda yukarıda da gösterildiği üzere mevcut olan durumdur) Önerme 2.3.1' deki ikinci küme denklemlerin de, mesela

iç model özelliğinin geçerli olması gibi, çözüleceği bir denetleyiciyi oluşturmak zor değildir. Bu amaçla

$$m(\lambda) = \lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

ifadesinin S matrisinin minimal çokterimli ifadesi

$$S^s + a_{s-1}S^{s-1} + \dots + a_1S + a_0I = 0$$

şeklindedir. Bu “Cayley-Hamilton” kuramından gelmektedir. Cayley-Hamilton kuramı, her matris kendi karakteristik denklemini sağlamaktadır.

Böylece herhangi bir m x s boyutlu V matrisi karakteristik denklemle çarpılırsa,

$$VS^s = -(a_{s-1}VS^{s-1} + \dots + a_1VS + a_0V) \quad (2.29)$$

denklemini elde edilir ve

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -a_0I & -a_1I & -a_2I & \dots & -a_{s-2}I & -a_{s-1}I \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\Gamma = (I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$$

şeklinde matrisler kullanılırsa, Φ matrisi S' nin tüm özdeğerlerini ve katlarını içerecektir.

(2.29)' u kullanarak,

$$T_s(V) = \begin{pmatrix} V \\ VS \\ \dots \\ VS^{s-2} \\ VS^{s-1} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

matrisinin

$$T_s(V)S = \Phi T_s(V)$$

$$V = \Gamma T_s(V)$$

denklemlerini sağladığı gözlemlenir.

Φ ve Γ ' nin μ parametresine değil sadece S' nin minimal çokterimli katsayılarına bağlı olduğunu ve V ' nin bu parametreye bağlı olması durumunda $T_S(V)$ ' nin bu parametreye bağlı olabileceği görülmektedir. Bu matrisleri kullanarak iç model özelliği (2.24)' ün geçerli olacağı bir denetleyici oluşturmak zor değildir.

Önerme 2.3.2. $\Pi(\mu)$ ve $\Lambda(\mu)$ ' nin (2.23) için bir çözümdür. (2.14)' teki F, G_1, G_2 ve H matrislerinin Φ ve Γ ile (2.30)' daki gibi olması kaydıyla

$$F = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ M_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad H = (\Gamma \quad N)$$

şekilde olduğunu varsayılır. Ayrıca L' nin özdeğerlerinin hiçbirinin S' nin bir özdeğeri olmadığını ve tüm $\mu \in P$ için

$$\Theta_2(C_2(\mu)\Pi(\mu) + Q_2(\mu)) = 0 \quad (2.32)$$

şeklinde olduğu varsayılır. O zaman $\Pi(\mu), \Sigma(\mu), \Lambda(\mu)$ ' nin (2.24)' ün bir çözümü olan bir $\Sigma(\mu)$ matrisi var olur [1, 2].

Kanıt.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} T_S(V) \\ W \end{pmatrix}$$

kümesinin bir denetleyicisi için (2.24) denklemleri (daha uygun olması için μ' ye bağımlılığı ortadan kaldırılır),

$$T_S(V)S = \Phi T_S(V) + \Theta_2(C_2\Pi + Q_2)$$

$$WS = LW + M_2(C_2\Pi + Q_2)$$

$$\Lambda = \Gamma T_S(V) + NW + K_2(C_2\Pi + Q_2)$$

şekle indirgenir. Bunlardan ikincisi, S' nin hiçbir özdeğerinin L' nin bir özdeğeri olmadığı için, tek $(C_2\Pi + Q_2)$ gibi μ' ye bağlı olabilecek olan) bir W çözümüne sahip bir Sylvester denklemdir. μ' ye bağlı olan

$$V = \Lambda - NW - K_2(C_2\Pi + Q_2)$$

matrisini düşünerek, son denklem

$$V = \Gamma T_S(V)$$

şeklini alır, birinci olan, $\theta_2(C_2\Pi + Q_2)$ hipotezi ile

$$T_s(V)S = \Phi T_s(V)$$

şekline indirgenir.

Böylece Σ matrisi (2.24)' i çözer.

Bu sonuç esasında (2.23) düzenleyici denklemlerinin (izlemeye dair genelleştirilmiş problemi çözmek için fiziksel sistemin zaten karşılması gereken bir koşul olan) tüm μ için bir çözüme sahip olması halinde F , G_1 , G_2 ve H' nin belirtilen şekillere sahip olduğu herhangi bir denetleyicinin, sadece S' nin özdeğerlerinin hiçbirinin L' nin özdeğerleri olmaması ve (2.32) koşulunun geçerli olması hipotezi içinde, önerme 2.3.1' in her bir (2.23) ve (2.24) denklem kümesinin bir çözüme sahip olduğunu belirtmektedir. Bu şekilde bu önermenin de belirttiği üzere tasarımda bırakılan serbestlik dereceleri, yani

$$L, M_1, M_2, N, K_1, K_2, \Theta_1, \Theta_2$$

matrisleri (2.21) fiziksel sistemin dayanıklı bir şekilde kararlılaştırabilmesi için seçilebilir, bu denetleyici dayanıklı bir denetleyicidir ve örneğin her bir $\mu \in P$ değeri için genelleştirilmiş izleme problemini çözebilir [5, 13].

Varsayım 6' nın dayanıklı bir denetleyicinin varlığı için gerekli olduğu aynı senaryoyu, yani μ belirsiz parametresinin $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ beşlisi ile tanımlanabildiği ve P' nin boş olmayan bir içterse sahip bir küme olduğu durum değerlendirmeye alınır; O zaman önerme 2.3.1' deki ikinci denklem kümelerinin, yani iç model özelliğinin herhangi bir dayanıklı denetleyicinin yapısı üzerinde önemli bir sonucu getirmesi mümkündür.

Önerme 2.3.3. Bir denetleyici sadece her bir $m \times r$ boyutlu V matrisi için,

$$\begin{aligned} TS &= FT \\ V &= HT \end{aligned} \tag{2.33}$$

şekilde $v \times r$ boyutlu V matrisi var ise dayanıklıdır [2, 5].

Kanıt. Ön kuram 2.3.1' in kanıtında olduğu üzere,

$$\left\{ A, B, P + \varepsilon \bar{P}, C_1, Q_1 + \varepsilon \bar{Q}_1 \right\}$$

gibi bir beşliyi P içtersinde $\{A, B, P, C_1, Q_1\}$ ile birlikte alınır.

(2.15) ve (2.16) denklemlerinin tüm küçük ε' ler için bir Π, Σ, Γ çözümü vardır ve basit bir hesaplama bu çözümleri,

$$\Pi = \Pi_0 + \varepsilon \bar{\Pi}$$

$$\Sigma = \Sigma_0 + \varepsilon \bar{\Sigma}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon \bar{\Lambda}$$

biçiminde verir. Burada $\bar{\Pi}, \bar{\Lambda}$ (2.27)' nin geçerli olduğu şekildedir ve

$$\bar{\Sigma} S = F \bar{\Sigma} + G_2 C_2 \bar{\Pi} \quad (2.34)$$

$$\bar{\Lambda} = H \bar{\Sigma} + K_2 C_2 \bar{\Pi}$$

şeklinde olur. Ön kuram 2.3.1' in kanıtında gösterildiği üzere Λ eşlemesi dönüştürülebilir olduğu için, her zaman (2.27)' yi çözen tek çift $\bar{\Pi}, \bar{\Lambda}$ ' nin $C_2 \bar{\Pi} = 0'$ ı karşıladığı şekilde \bar{P}, \bar{Q}_1 ' i bulmak mümkün olurken bu sırada $\bar{\Lambda}$ herhangi bir V matrisine denk gelecektir. Bu durumda (2.34) denklemleri,

$$\bar{\Sigma} S = F \bar{\Sigma}$$

$$V = H \bar{\Sigma}$$

olur ve bu da önermeyi kanıtlar.

Böylece önerme 2.3.2' nin (2.14)' teki F matrisindeki durumu,

$$F = \begin{pmatrix} \Phi & \Delta \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda L' nin herhangi bir özdeğerinin S' nin özdeğerlerinden birisi olmaması durumunda, aşağıdaki Sylvester denklemi

$$ZL = \Phi Z + \Delta \quad (2.35)$$

(tek) bir Z çözümüne sahiptir. Aslında yapı olarak Φ matrisi, öz çokterimlisi S' nin minimal çokterimlisinin m katı kadardır ve bu şekilde L' nin özdeğerlerinin hiçbirisi

Φ ' nin bir özdeğeri olamaz. Z matrisi koordinatlarda F ' yi önerme 2.3.2' de gösterilen biçime getirecek şekilde (2.14) durum uzayında bir değişiklik oluşturmak için kullanılır.

Sonuç 2.3.1. $\Pi(\mu)$, $\Lambda(\mu)$ ' nin (2.23)' nin bir çözümü olduğu ve (2.14)' teki F , G_1 , G_2 , H ' nin (2.30)' daki gibi Φ , Γ ile,

$$F = \begin{pmatrix} \Phi & \Delta \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ M_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad H = (\Gamma \quad N)$$

biçimindedirler. Aynı zamanda L özdeğerlerinin hiçbirinin S' nin özdeğerlerinden biri olmadığını ve tüm $\mu \in P$ için

$$(\Theta_2 - ZM_2)(C_2(\mu)\Pi(\mu) + Q_2(\mu)) = 0 \quad (2.36)$$

olduğunu varsayılır. O zaman $\Pi(\mu)$, $\Sigma(\mu)$, $\Lambda(\mu)$ ' nin (2.24)' in bir çözümü olduğu bir $\Sigma(\mu)$ matrisi oluşur [1, 2, 5, 13].

2.4. Doğrusal Sistemler için Tasarım Yöntemleri

Önceki bölümde genelleştirilmiş izleme problemini çözen bir denetleyicinin potansiyel yapısı ve bu denetleyicinin dayanıklı olduğu uygun şartlar tanımlanmıştır. Buna özet olarak her bir $\mu \in P$ için (2.28) matrisinin S' nin özdeğerleri olan tüm λ' lar için tekil olmadığı varsayılır (Varsayım 6) ve durumun bu şekilde olması halinde her bir $\mu \in P$ için (2.23) düzenleyici denklemlerinin tek bir $\Pi(\mu)$, $\Lambda(\mu)$ çözümü olduğu gözlemlenir. O zaman bir önceki bölümün sonuçları aşağıdaki sonuçları verir.

Önerme 2.4.1. (2.21) sistemi ele alınır. Tüm $\mu \in P'$ ler için bütün S' nin özdeğerleri olan λ' lar olarak

$$\det \begin{pmatrix} A(\mu) - \lambda I & B(\mu) \\ C_1(\mu) & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.37)$$

olduğu varsayılır. $\Pi(\mu)$, $\Lambda(\mu)$ ' nin (2.23)' nin tek çözümü olmasına ve Θ ' nin tüm $\mu \in P'$ ler için,

$$\Theta(C(\mu)\Pi(\mu) + Q(\mu)) = 0 \quad (2.38)$$

sağlayan bir matris olduğu varsayılır. L, M, N, K' deki L' nin hiçbir özdeğerinin S' nin özdeğerlerinden birisi olmadığı ve tüm $\mu \in P'$ ler için tüm özdeğerleri,

$$\begin{pmatrix} A(\mu) + B(\mu)KC(\mu) & B(\mu)\Gamma & B(\mu)N \\ \Theta C(\mu) & \Phi & 0 \\ MC(\mu) & 0 & L \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

matrisinin negatif gerçekte bölümlü olduğu matrislerin bir beşlisi olduğu varsayılır. O zaman denetleyici (2.40)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Theta y \\ \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M y \\ u &= \Gamma \xi' + N \xi'' + K y \end{aligned} \quad (2.40)$$

şeklinde dayanıklı bir denetleyici olacaktır [5, 11].

Kanıt. Hipotez olarak (2.40) denetleyicisi (2.21)' i tüm $\mu \in P'$ ler için kararlaştırır. Önerme 2.3.2' nin hipotezleri geçerli olduğundan tüm $\mu \in P'$ ler için (2.24) denklem kümelerini çözen bir $\Sigma(\mu)$ matrisi de vardır. Böylece Önerme 2.3.1' in gösteriminde bu denetleyici tüm $\mu \in P'$ ler için genelleştirilmiş izleme problemini çözer.

Not 2.4.1. Sonuç 2.3.1' in gösteriminde (2.40)' in yerine,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Delta \xi'' + \Theta y \\ \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M y \\ u &= \Gamma \xi' + N \xi'' + K y \end{aligned} \quad (2.41)$$

şekilde bir denetleyici değerlendirmeye alınırsa benzer bir sonuç oluşur. Aslında Φ ve L matrislerinin ortak herhangi bir özdeğerleri olmadığı için (2.40) denklemlerindeki ikinci denklem şeklindeki bir denetleyiciye denk olacaktır. Önerme 2.4.1' in koşullarını (2.41)' in parametreleri ile doğrudan bir şekilde ifade etmek için (2.38) hipotezi (2.35)' in tek çözüme sahip,

$$(\Theta - ZM)(C(\mu)\Pi(\mu) + Q(\mu)) = 0 \quad (2.42)$$

hipoteziyle değiştirilmelidir.

L, M, N, K' nın

$$\begin{pmatrix} A(\mu) + B(\mu)KC(\mu) & B(\mu)\Gamma & B(\mu)N \\ \Theta C(\mu) & \Phi & \Delta \\ MC(\mu) & 0 & L \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

ifadesinin tüm özdeğerlerinin bütün $\mu \in P'$ ler için negatif gerçekte bölümlere sahip olması halinde ortaya çıkan denetleyici dayanıklıdır.

Bu sonuçlar esasen dayanıklı bir denetleyici tasarımının, dayanıklı bir kararlılaştırıcının,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu)\Gamma \\ \Theta C(\mu) & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(\mu) \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (2.44)$$

$$y = \begin{pmatrix} C(\mu) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi' \end{pmatrix}$$

şekildeki bir sistem için bulunabilmesi halinde gerçekleştirilebileceğini göstermektedir.

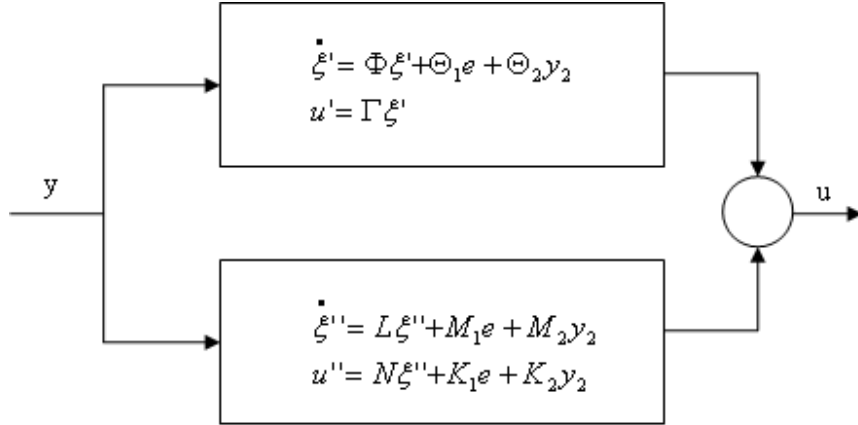
(2.40) denetleyicisinin basit bir yapısı vardır. Aslında bir tanesi

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Theta_1 e + \Theta_2 y_2 \\ u' &= \Gamma \xi' \end{aligned} \quad (2.45)$$

şeklindeki denklemler ile modellenirken diğeri de

$$\begin{aligned} \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M_1 e + M_2 y_2 \\ u'' &= N \xi'' + K_1 e + K_2 y_2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

şeklindeki denklemler ile modellenen, Şekil 2.2' de gösterildiği gibi, iki alt sistemin paralel bağlantısından oluşmaktadır.



Şekil 2.2. Denetleyici (2.40).

Başlangıç olarak $\bar{\mu}$ bilinen nominal değeri verilmiş ve onun yakınında açık bir şekilde μ parametresinin tüm değerleri için amaçlanan hedefe ulaşacak bir denetleyicinin tasarımı tanımlanır. Daha rahat olması için,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ e &= C_1 x + Q_1 w \\ y_2 &= C_2 x + Q_2 w \end{aligned} \quad (2.47)$$

ifadesinin $\mu = \bar{\mu}$ olduğunda denetlenen fiziksel sistemi tanımlaması sağlanır. $C_1 P + Q_1 = 0$ tanımı ile Önerme 2.4.1' in $\Theta_2 (C_2 P + Q_2) = 0$ koşulunu karşılamak için $\Theta_2 = 0$ şeklinde bir ayarlama yapmaktır. Aynı zamanda basitlik için de $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ şeklinde ayarlamalar yapmak,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Theta_1 e \\ \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M_1 e + M_2 y_2 \\ u &= \Gamma \xi' + N \xi'' \end{aligned} \quad (2.48)$$

denklemlerle modellenen bir denetleyiciyi oluşturur. Zorlanmamış kapalı döngü sistemi

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi}' \\ \dot{\xi}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma & BN \\ \Theta_1 C_1 & \Phi & 0 \\ MC & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

dir.

Burada, daha uygun olması için,

$$M = (M_1 \quad M_2), \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir ayarlama yapılmıştır. (2.30)' daki (Γ, Φ) çiftinin yapı olarak gözlemlenebilir olduğunu ve (Φ, Θ_1) çiftinin denetlenebilir olacağı şekilde Θ_1 ' i bulmak her zaman için mümkündür. Bu Θ_1 seçimi için aşağıdaki durum geçerlidir.

Ön kuram 2.4.1. (A, B) çifti kararlılaştırılabilir ve (C, A) çifti sezilebilirdir. S' in özdeğerleri olan tüm λ' lar için

$$\det \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.50)$$

ifadesi geçerlidir. Φ ve Γ (2.30)' daki denklemlerdeki gibidir ve (Φ, Θ_1) ' deki Θ_1 denetlenebilirdir. O zaman

$$(C \quad 0), \quad \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

çifti sezilebilir olur ve

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \Theta_1 C_1 & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

çifti kararlılaştırılabilir olur [2, 5, 11].

Kanıt. Genellik kaybı olmadan (C_1, A) çiftinin (C_{1d}, A_{dd}) sezilebilir çifti ile birlikte

$$(0 \quad C_{1d}), \quad \begin{pmatrix} A_{uu} & A_{ud} \\ 0 & A_{dd} \end{pmatrix}$$

şeklinde ayrıştırılır. B ve C_2 ' yi buna uygun olarak

$$B = \begin{pmatrix} B_u \\ B_d \end{pmatrix}, \quad C_2 = (C_{2u} \quad C_{2d})$$

şeklinde ayrılır. (2.51) çifti sezilebilir değildir. O zaman negatif olmayan gerçek bölüm ile bir λ sayısı ve

$$\begin{aligned}
(A_{uu} - \lambda I)x_u + A_{ud}x_d + B_u\Gamma\xi &= 0 \\
(A_{dd} - \lambda I)x_d + B_d\Gamma\xi &= 0 \\
(\Phi - \lambda I)\xi &= 0 \\
C_{1d}x_d &= 0 \\
C_{2u}x_u + C_{2d}x_d &= 0
\end{aligned}$$

saptayacak sıfır olmayan bir vektör olan $\text{col}(x_u, x_d, \xi)$ ortaya çıkar.

ξ vektörü sıfır olamaz. Aksi takdirde $(x_u, x_d) \neq (0, 0)$ ve geriye kalan diğer denklemler (C, A) çiftinin sezilebilirliği ile çelişkili olacaktır. Bu sebeple üçüncü denklemden λ' nın, Φ' nin bir özdeğeri olduğu ve böylece de S' nin bir özdeğeri olduğu görülmektedir. $\Gamma\xi'$ nin de sıfır olmayacağını çünkü aksi takdirde

$$\begin{pmatrix} (\Phi - \lambda I) \\ \Gamma \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kimliğinin (Γ, Φ) ' nin gözlemlenebilirliği ile çelişkili olacağı sonucu çıkar. Bu şekilde aşağıdaki ifadeyi karşılayan sıfır olmayan ve S' nin özdeğeri olarak λ' ya sahip bir $\text{col}(x_u, x_d, \Gamma\xi)$ vektörü

$$\begin{pmatrix} (A_{uu} - \lambda I) & A_{ud} & B_u \\ 0 & (A_{dd} - \lambda I) & B_d \\ 0 & C_{1d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ x_d \\ \Gamma\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur ve bu da (2.50) hipotezi ile çelişkili bir durumdur. Böylece (2.51) çifti sezilebilir olur. (2.52) çiftinin kararlılaştırılabilir olduğuna dair kanıt da buna benzerdir.

Sonuç 2.4.1. Ön kuram 2.4.1' in hipotezlerinin geçerli olduğu varsayıldığında; L' nin özdeğerlerinin hiçbirinin S' nin özdeğerleri olmadığı ve (2.49) sisteminin sonuşurlu olarak kararlı olduğu bir L, M, N üçlüsü var olacaktır [2, 5, 11].

Kanıt. Sezilebilir ve kararlılık sırasıyla çıkış üretilebilirliği ve durum geribesleme altında değişmez olduğundan

$$(C \ 0), \quad \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ \Theta_1 C_1 & \Phi \end{pmatrix}$$

çiftinin sezilebilir olduğunu ve

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ \Theta_1 C_1 & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

çiftinin kararlılaştırılabilir olduğunu fark etmek önemlidir. Bu şekilde (2.49)' un yapısına bakarak bu sistemi sonuçurlu olarak kararlı yapan L, M, N üçlüsünün varlığı standart sonuçlardan ileri gelir. L' nin küçük değişimleri sonuçurlu kararlılığı ortadan kaldırmaz ve bu sebeple L her zaman için özdeğerlerinden birinin S' nin özdeğerlerinden birisi olmayacağı şekilde seçilebilir.

Bu sonuçtan (A, B) çiftinin kararlılaştırılabilir ve (C, A) çiftinin de sezilebilir olması durumunda ve (2.50) koşulunun geçerli olması halinde, önerme 2.4.1' de belirtilen tüm gerekliliklerin (2.40) denetleyicisi tarafından karşılanabileceği şekilde θ_1 ve L, M, N, K' yi seçmek mümkündür. Bu sebeple bu denetleyici (2.47) için olan genelleştirilmiş izleme sorununu çözer. Bu denetleyici aynı zamanda, fiziksel sistem parametresi değişimlerinde, bu değişimler (2.37) koşulunun geçerli olmaya devam ettiği ve (2.39)' un tüm özdeğerlerinin negatif gerçek bölümde kaldığı şekilde devam ettiği sürece yapı olarak dayanıklıdır. Bu bakımdan bu koşulların bir $\bar{\mu}$ değeri için geçerli olmaya ve $\bar{\mu}$ ' nun yakınında bir yerde tüm μ' lar için geçerli olmaya devam ettiğini gözlemlemek önemli olabilir. Bu şekilde söz konusu denetleyici $\bar{\mu}$ ' nin yakınlardaki tüm μ değerleri için genelleştirilmiş izleme problemini çözer. Ancak bir önceki tasarım adımlarında verilmiş olan bir P kümesi üzerinde μ' nun değişmesinin serbest olması halinde ikinci koşulun (kapalı döngü sisteminin kararlılığı) geçerli olmaya devam edeceğine dair önceden bir garanti verilmediği de vurgulanmalıdır. Durumun bu olması halinde, L, M, N, K ve belki de θ' nin daha düzeltilmiş bir tasarımı gerekli olacaktır.

Bir tasarım yöntemini, uygun hipotezler çerçevesinde, verilen bir P kümesi içindeki tüm μ değerleri için dayanıklı bir kararlılık elde edilebildiği tasarım yöntemi tanımlanır. $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C_1(\mu)$ ' nin, P kümesinin üzerinde çeşitlenen belirsiz parametrelerin bir vektörü olan μ' nun sürekli işlevi olduğu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\mu)x + B(\mu)u + P(\mu)w \\ e &= C_1(\mu)x + Q_1(\mu)w\end{aligned}\quad (2.53)$$

şeklindeki bir sistemi ve tüm $\mu \in P$ değerleri için bu sistemin u girişi ve e çıkışı arasında aynı bağıllık derecesine sahip olduğu varsayılırsa; bu bazı $r \geq 1$ tamsayıları için,

$$\begin{aligned}C_1(\mu)B(\mu) &= C_1(\mu)A(\mu)B(\mu) = \dots = C_1(\mu)A^{r-2}(\mu)B(\mu) = 0 \\ C_1(\mu)A^{r-1}(\mu)B(\mu) &\neq 0\end{aligned}$$

ifadesini sağlayacaktır. Uygun bir μ' dan bağımsız koordinat değişikliği ile bu sistemin,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_{11}(\mu)x_1 + A_{12}(\mu)x_2 + P_1(\mu)w \\ \dot{x}_2 &= \bar{A}x_2 + \bar{B}(A_{21}(\mu)x_1 + A_{22}(\mu)x_2 + b(\mu)u) + P_2(\mu)w \\ e &= \bar{C}x_2 + Q_1(\mu)w\end{aligned}$$

şekilde yazıldığı bilinmektedir. Burada $\dim(x_1) = n - 2$, $\dim(x_2) = r$ olacak şekilde,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

ve

$$b(\mu) = C_1(\mu)A^{r-1}(\mu)B(\mu)$$

olacaktır.

Ek olarak yapılacak olan $\bar{x}_2 = x_2 + Z(\mu)w$ koordinatı değişikliği ile,

$$Z(\mu) = \begin{pmatrix} Q_1(\mu) \\ \bar{C} P_2(\mu) + Q_1(\mu)S \\ \bar{C} \bar{A}^{r-2} P_2(\mu) + \bar{C} \bar{A}^{r-3} \dots \\ \bar{C} \bar{A}^{r-2} P_2(\mu) + \bar{C} \bar{A}^{r-3} P_2(\mu)S + \dots + Q_1(\mu)S^{r-1} \end{pmatrix}$$

şeklindeki sistem,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}(\mu)x_1 + A_{12}(\mu)\bar{x}_2 + \bar{P}_1(\mu)w \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}\bar{x}_2 + \bar{B}(A_{21}(\mu)x_1 + A_{22}(\mu)\bar{x}_2 + b(\mu)u + \bar{P}_2(\mu)w) \\ e &= \bar{C}\bar{x}_2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

halini alacaktır.

(2.37) matrisinin sadece $A_{11}(\mu)$ ' nin bir özdeğeri olan λ' nin olması halinde tek olduğunu göstermektedir. Bu şekilde (2.37) temel koşulu sadece S' nin özdeğerlerinden hiçbirinin $A_{11}(\mu)$ ' nin özdeğerlerinden biri olmaması durumunda geçerli olacaktır. Bu özellikle $A_{11}(\mu)$ ' nin tüm özdeğerlerinin negatif gerçek bölümleri olduğunda geçerli olan durumdur. Alternatif bir şekilde (2.23) düzenleyici denklemlerinin her bir μ için çözümleri olup olmadığı denetlenmesi istenebilir. Bu durumda $\Pi(\mu)$ ' yı iki blok olarak,

$$\Pi(\mu) = \begin{pmatrix} \Pi_1(\mu) \\ \Pi_2(\mu) \end{pmatrix}$$

şeklinde (2.54) durum vektörünün üzerindeki bölüm ile tutarlı olacak şekilde ayrılır. S' nin özdeğerlerinin hiçbirisi $A_{11}(\mu)$ ' nin özdeğerlerinden birisi değilse aşağıdaki Sylvester denklemi

$$\Pi_1(\mu)S = A_{11}(\mu)\Pi_1(\mu) + \bar{P}_1(\mu) \quad (2.55)$$

tek bir $\Pi_1(\mu)$ çözümüne sahiptir. $\Pi_2(\mu) = 0$ olarak ve

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{b(\mu)}[-A_{21}(\mu)\Pi_1(\mu) + \bar{P}_2(\mu)] \quad (2.56)$$

olarak ayarlandığında; ileri beslemeli bir denetim $\Pi(\mu)$, $\Lambda(\mu)$ çiftini gösterir ve böylece bir (2.23) çözümü oluşturulur. Bu şekilde S' nin özdeğerlerinin hiçbirisinin $A_{11}(\mu)$ in bir özdeğeri olmaması halinde önerme 2.4.1' de belirtilen temel şartlar gerçekleştirilmiş olur.

(2.55)' in $\Pi_1(\mu)$ çözümün x_1 koordinatını,

$$\bar{x}_1 = x_1 - \Pi_1(\mu)w$$

şekilde değiştirmek için kullanmak uygun olabilir. Bu, (2.56)' nın gösteriminde (2.54)' ü,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}(\mu)\bar{x}_1 + A_{12}(\mu)\bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}\bar{x}_2 + \bar{B}(A_{21}(\mu)\bar{x}_1 + A_{22}(\mu)\bar{x}_2) + \bar{B}b(\mu)(u - \Lambda(\mu)w) \\ e &= \bar{C}\bar{x}_2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

şekle getirir. Önerme 2.4.1' in diğer temel koşulunun, yani (2.44) sisteminin dayanıklı bir şekilde kararlılığını yerine getirilmesi aşağıda gösterildiği şekilde gerçekleştirilebilir. $A_{11}(\mu)$ matrisi ve $b(\mu)$ katsayısı belirli koşulları karşılıyorsa, (2.54) şeklindeki bir sistemin dayanıklı bir şekilde kararlı yapılabilir.

Ön kuram 2.4.2. P , bir tıkHz kümedir. $b(\mu) \geq \bar{b}$ olacak şekilde bir $\bar{b} > 0$ sayısının olduğu ve $A_{11}(\mu)$ ' nun özdeğerlerinin tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçek bölümleri olduğu varsayıldığında; μ' dan bağımsız bir r -boyutu N satır vektörü olacak ve böylece tüm $\mu \in P'$ ler için

$$\begin{pmatrix} A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) \\ \bar{B}A_{21}(\mu) & \bar{A} + \bar{B}A_{22}(\mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{B}b(\mu) \end{pmatrix} (0 \quad N) \quad (2.58)$$

özdeğerlerinin negatif bir bölümü olacaktır [2, 5].

Kanıt. (2.54) sistemi ve $w = 0$ kümesi ele alınır. (Aslında, w' nin rolünün kararlılık analizi ile ilgisi yoktur). Tüm kökleri negatif gerçek bölümlere sahip olan bir çokterimli olan

$$d(\lambda) = \lambda^{r-1} + d_{r-2}\lambda^{r-2} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

ifadesinin,

$$D = (d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{r-2}), \quad \bar{N} = (D \quad 1)$$

şeklinde bir ayarlama yapıldığında ve \bar{x}_2 ,

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde ayrıldığında ve yeni bir koordinatlar kümesi,

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_{21} \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \bar{x}_{22} + D\bar{x}_{21} = \bar{N}\bar{x}_2$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\mu) & F_{12}(\mu) \\ F_{21}(\mu) & F_{22}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(\mu) \end{pmatrix} u \quad (2.59)$$

şekildeki sistemi oluşturur. Burada,

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{r-2} \end{pmatrix}$$

ve

$$F_{11}(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(\mu) & * \\ 0 & \bar{F} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Varsayım olarak (ve D' nin tanımı olarak) bu $F_{11}(\mu)$ matrisi tüm $\mu \in P'$ ler için negatif bölümlere sahip özdeğerlere sahiptir. Bu şekilde $\alpha > 0$ şeklinde verilmiş herhangi bir numara için,

$$Z(\mu)F_{11}(\mu) + F_{11}^T(\mu)Z(\mu) = -\alpha I$$

ifadesini verecek olan bir artı matris $Z(\mu)$ olacaktır. $F_{11}(\mu)$ girişleri μ' nun sürekli işlevleri olduğu için $Z(\mu)'$ nin de öyle olacaktır. Aşağıdaki gibi karesel biçimli ifadede;

$$V(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^T Z(\mu)\theta_1 + \theta_2^T \theta_2 \quad (2.60)$$

ve $u = -k\theta_2$ denetimi ile birlikte (2.59)' un yörüngelerinde bu işlevin türevi,

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\alpha I & Z(\mu)F_{12}(\mu) + F_{21}^T(\mu) \\ F_{12}^T(\mu)Z(\mu) + F_{21}(\mu) & 2F_{22}(\mu) - 2b(\mu)k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde karesel biçimli ifadedir. μ bir tıkkız kümede çeşitlendikçe köşegen dışı bloklar μ ' nun ve $b(\mu) \geq \bar{b} > 0$ ' in sürekli işlevleri olacaktır. $k \geq k^*$ olduğunda, bu ifadenin kesin negatif olacağı şekilde bir k^* sayısı olduğunu ve böylece $u = -k\theta_2$ denetimi ile (2.59)' un (dayanıklı bir şekilde) sonuçurlu olarak kararlı olduğunu göstermektedir. (2.54)' ün koordinatlarına tekrar bir geribesleme yaparak,

$$u = -k \bar{N} \bar{x}_2$$

denetimi sağlar ve bu da ön kuramı kanıtlar.

Ön kuram 2.4.3. P , tıkkız bir kümedir. $b(\mu) \geq \bar{b}$ olacağı şekilde bir $\bar{b} > 0$ sayısının olduğunu ve tüm $A_{11}(\mu)$ özdeğerlerinin tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçekte bölümleri olduğu varsayılır. N' nin ön kuram 2.4.2' deki gibi olduğu koşulda; $g > g^*$ olması durumunda,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) \\ \bar{B} A_{21}(\mu) & \bar{A} + \bar{B} A_{22}(\mu) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{B} b(\mu) \end{pmatrix}^N \\ M_1 \begin{pmatrix} 0 & \bar{C} \end{pmatrix} & L \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

matrisinin özdeğerleri tüm $\mu \in P'$ ler için negatif bölümleri olacağı bir g^* sayısı olacaktır [1, 2].

Kanıt. (2.61) matrisini; benzerlik dönüşümü kullanarak,

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & D_g & -D_g \end{pmatrix}$$

D_g, \bar{L} matrislerini

$$D_g = \begin{pmatrix} g^{r-1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & g & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} -c_{r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_{r-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -c_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde oluşturarak,

$$\begin{pmatrix} A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) & 0 \\ \bar{B} A_{21}(\mu) & \bar{A} + \bar{B}[A_{22}(\mu) + b(\mu)N] & -\bar{B}b(\mu)ND_g^{-1} \\ \bar{B} A_{21}(\mu) & \bar{B}[A_{22}(\mu) + b(\mu)N] & -\bar{B}b(\mu)ND_g^{-1} + g\bar{L} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

matrisi tüm özdeğerleri negatif gerçək bölüme sahip olacak şekilde yazılır.

(2.62)' nin üst sol köşesindeki dört bloktan oluşan alt matris tam olarak, N' nin Ön kuram 2.4.2' deki gibi seçilmesi halinde, tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçək bölüme sahip olacak (2.58) matrisidir. Bununla birlikte $g \geq 1$ olması halinde D_g^{-1} matrisi norm olarak 1 ile bağılı olacaktır. Böylece Ön kuram 2.4.2' nin kanıtında kullanılan tartışmalara benzer tartışmalar iddiayı kanıtlamaktadır.

(2.44) için dayanıklı bir düzenleyici tasarlama problemindeki fikir, Θ matrisini (2.44) sisteminin Ön kuram 2.4.3' ün hipotezlerini gerçəkleştiren bir sistem haline geleceğı bir şekilde seçmektir ve bu şekilde bir önceki Ön kuram' da tarif edilen dayanıklı kararlılaştırıcı kullanılabilir.

Ön kuram 2.4.4. (F_0, G_0) çiftinin denetlenebileceğı bir şekilde F_0' in herhangi bir $s \times s$ boyutlu bir Hurwitz matrisi, G_0' in herhangi bir $s \times 1$ boyutlu vektör olması, Φ' nin özdeğerleri negatif olmayan gerçək bölümler olan herhangi bir $s \times s$ matrisi

ve Γ' nin (Γ, Φ) çiftinin gözlemlenebileceği şekilde herhangi bir $1 \times s$ vektörü olması durumunda,

$$\begin{aligned}(F_0 + G_0\Psi)T &= T\Phi \\ \Psi T &= \Gamma\end{aligned}$$

ifadesini verecek bir tekil olmayan $s \times s$ matrisi ve bir $1 \times s$ vektörü oluştur [5, 13].

Kanıt. İlk olarak Sylvester denklemi olan,

$$T\Phi = F_0T + G_0T$$

tek bir T çözümdür. Çünkü Φ ve F_0' in ortak hiçbir özdeğeri yoktur. Burada T' nin tekil olmadığı kanıtlanır. T matrisinin kerneli sıfır olmadığı varsayılırsa ve $\{v_1, \dots, v_k\}'$ nin $\ker(T)$ için bir taban oluşturduğu düşünülürse,

$$j = 1, \dots, k \quad \text{için} \quad T\Phi v_j = G_0\Gamma v_j \quad (2.63)$$

ifadesi elde edilir. T kare matris olduğuda ve aynı zamanda $i = 1$ için $w_i T = 0$ olacağı şekilde $\{w_1, \dots, w_k\}$ bağımsız sıra vektörleri kümesi de oluşacaktır. O zaman

$$j = 1, \dots, k \quad \text{için} \quad w_i G_0 \Gamma v_j = 0$$

olur. Tüm j' ler için $\Gamma v_j = 0$ varsayılırsa, (2.63) $T\Phi v_j = 0$,

$$j = 1, \dots, k \quad \text{için} \quad \Phi v_j \in \ker(T) \quad (2.64)$$

şeklinde olur.

Bu şekilde $\ker(T)'$ nin Φ altında değişmez olduğu ve $\ker(\Gamma)$ içinde tutulduğu bulunur ve bu da $(\Gamma, \Phi)'$ nin gözlemlenebilirliği ile çelişkili olur. j' nin en azından bir değeri için $\Gamma v_j \neq 0$ ise o zaman $w_i G_0$ tüm i' ler için sıfır olmalıdır ve bunun $(F_0, G_0)'$ in denetlenebilirliği ile çelişkili olduğu ispat edilebilir. T' nin tekil olmadığını göstererek kanıtı tamamlamak için $\Psi = \Gamma^{-1}$ şeklinde bir ayarlama yapmak yeterlidir.

Not 2.4.2. Ψ matrisinin $F_0 + G_0\Psi'$ ye Φ' nin özdeğerleri ile denk gelen özdeğerler kümesini veren tek bir sıra vektörüdür [2].

Not 2.4.3. Φ ve Γ' nin (2.30) ifadesinin matrisleri olması halinde

$$T_s(\Lambda(\mu)) = \begin{pmatrix} \Lambda(\mu) \\ \Lambda(\mu)S \\ \dots \\ \Lambda(\mu)S^{s-1} \end{pmatrix}$$

matrisi,

$$\begin{aligned} T_s(\Lambda(\mu))S &= \Phi T_s(\Lambda(\mu)) \\ \Lambda(\mu) &= \Gamma T_s(\Lambda(\mu)) \end{aligned}$$

ifadesini karşılımaktadır. Bu şekilde $T(\mu)$ matrisi,

$$\begin{aligned} T(\mu)S &= (F_0 + G_0\Psi)T(\mu) \\ \Lambda(\mu) &= \Psi T(\mu) \end{aligned}$$

ifadesini karşılımaktadır.

Bu sonuçla (2.57), u ' nun dayanıklı bir kararlılık için kullanılacak olan,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= F_0 \xi' + G_0 u \\ u &= \Psi \xi' + v \end{aligned} \tag{2.65}$$

şeklindeki bir denetleyici tasarlanabilir [3, 5]. Bu denetleyici, kanonik iç model olarak ifade edilmektedir.

(2.65) denetleyicisi ile (2.57)' nin oluşturulması

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= (F_0 + G_0\Psi)\xi' + G_0 v \\ \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}(\mu)\bar{x}_1 + A_{12}(\mu)\bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}\bar{x}_2 + \bar{B}\left(A_{21}(\mu)\bar{x}_1 + A_{22}(\mu)\bar{x}_2\right) + \bar{B}b(\mu)\left(\Psi \xi' + v - \Lambda(\mu)w\right) \end{aligned}$$

sistemini oluşturur ve

$$\dot{\bar{\xi}}' = \xi' - T(\mu)w$$

şeklinde bir değişiklik ile ve Not 2.4.3' de belirtilen şekilde $T(\mu)$ ' nun özelliklerini kullanarak ikinci olarak bahsedilen,

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\xi}}' &= (F_0 + G_0 \Psi) \xi' + G_0 v \\
\dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}(\mu) \bar{x}_1 + A_{12}(\mu) \bar{x}_2 \\
\dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B} \left(A_{21}(\mu) \bar{x}_1 + A_{22}(\mu) \bar{x}_2 \right) + \bar{B} b(\mu) \left(\Psi \bar{\xi}' + v \right)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

şekle getirilir.

Not 2.4.4. v' nin aşağıdaki sisteminin bir çıkışına eşit bir şekilde ayarlanması durumunda

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}'' &= L \xi'' + M y \\
v &= N \xi'' + K y
\end{aligned}$$

ortaya çıkan denetleyicinin, Not 2.4.1' de değerlendirmeye alınan özel bir durum gibi,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}' &= (F_0 + G_0 \Psi) \xi' + G_0 N \xi'' + G_0 K y \\
\dot{\xi}'' &= L \xi'' + M y \\
u &= \Psi \xi' + N \xi'' + K y
\end{aligned}$$

ifadesindeki denetleyici gibi olacaktır. (2.65) kanonik iç modeli kullanmanın avantajı (2.66) bileşik sisteminin, u' nun bir giriş ve e' nin de bir çıkış olarak düşünülmesi ile hala ön kuram 2.4.3' deki dayanıklı bir kararlılaştırıcının varlığına dair koşulları karşılıyor olmasıdır. Durumun bundan ibaret olduğunu görmek için

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\bar{x}}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_0 & F_{01}(\mu) \\ 0 & A_{11}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{02}(\mu) \\ A_{12}(\mu) \end{pmatrix} \bar{x}_2 \\
\dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B} \left((\Psi b(\mu) \quad A_{21}(\mu)) \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} + F_{22}(\mu) \bar{x}_2 + b(\mu) v \right)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

ifadesini veren aşağıdaki durum değişkenlerinin değişkenliklerini değerlendirmeye alınırsa bu durumda $G_0(\Psi \xi + u)$ olur ve $-G_0(\Psi \xi + u)$ iptal olur. Yeni değişkenlerde (2.66) sistemi $F_{01}(\mu)$, $F_{02}(\mu)$, $F_{03}(\mu)$ 'nun uygun matrisler olduğu

$$\chi = \bar{\xi}' - \frac{1}{b(\mu)} G_0 \bar{C} \bar{A}^{r-1} \bar{x}_2$$

$$\dot{\chi} = (F_0 + G_0 \Psi) \bar{\xi}' + G_0 v - \frac{1}{b(\mu)} G_0 \left(A_{21}(\mu) \bar{x}_1 + A_{22}(\mu) \bar{x}_2 + b(\mu) (\Psi \bar{\xi}' + v) \right)$$

ifadesindeki bir sisteme indirgenir. Bu sistem (2.54) ile tam olarak aynı yapıya sahiptir ki burada $A_{11}(\mu)$ matrisinin yeri de

$$\begin{pmatrix} F_0 & F_{01}(\mu) \\ 0 & A_{11}(\mu) \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

matrisinden alınmaktadır.

F_0 bir Hurwitz matrisi olduğu için $A_{11}(\mu)$ özdeğerleri ve aynı zamanda (2.68)' in özdeğerleri tüm $\mu \in P'$ ler için negatif bir gerçekte bölüme sahiptir. Bu şekilde ön kuram 2.4.2' nin ve 2.4.3' ün sonuçlarına başvurulabilir. Özellikle L , M_1 ve N matrislerinin varlıklarının

$$\begin{pmatrix} F_0 & F_{01}(\mu) & F_{02}(\mu) \\ 0 & A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) \\ \bar{B}\Psi b(\mu) & \bar{B}A_{21}(\mu) & \bar{A} + \bar{B}F_{22}(\mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{B}b(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & N \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

ve

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 & F_{01}(\mu) & F_{02}(\mu) \\ 0 & A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) \\ \bar{B}\Psi b(\mu) & \bar{B}A_{21}(\mu) & \bar{A} + \bar{B}F_{22}(\mu) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{B}b(\mu) \end{pmatrix} \\ M_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{C} \end{pmatrix} & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

matrislerinin özdeğerlerinin tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçekte bölüme sahip olduğu iddia etmek mümkündür. Bu L , M_1 , N matrisleri dayanıklı bir denetleyicinin tasarımı için doğrudan kullanılabilirler [2].

Önerme 2.4.2. (2.54) sisteminde bir takım varsayımlar yapılırsa; $b(\mu) \geq \bar{b}$ şeklinde olduğu bir $\bar{b} > 0$ sayısı olduğu, $A_{11}(\mu)$ özdeğerlerinin tıkmaz bir P kümesi için μ' larda negatif bir gerçekte bölüme sahip olduğu ve s' nin S minimal

çokterimlinin boyutu olduğu varsayılır. F_0' in herhangi bir $s \times s$ Hurwitz matrisi olduğu ve G_0' in da (F_0, G_0) çiftinin denetlenebilir olduğu herhangi bir $s \times 1$ vektörü olduğu varsayılır. Ψ' nin $F_0 + G_0\Psi'$ ye Φ' nin özdeğerleri ile denk gelen bir özdeğerleri kümesini veren tek bir sıra vektörü olduğu varsayılır. L, M_1, N' nin (2.70)' nin özdeğerlerinin tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçek bölüme sahip olduğu durumda,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= (F_0 + G_0\Psi)\xi' + G_0N\xi'' \\ \dot{\xi}'' &= L\xi'' + M_1e \\ u &= \Psi\xi' + N\xi''\end{aligned}\tag{2.71}$$

denetleyicisi (2.54) için dayanıklı bir denetleyicidir [2, 5].

Kanıt. (2.54)' ü, (2.71)' i kullanarak uygun koordinatlarda,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}'' &= L\xi'' + M_1e \\ v &= N\xi''\end{aligned}$$

sistemi ile denetlemek, (2.67)' de görünen sistemi getirir. Tüm $\mu \in P'$ ler için bu şekilde elde edilen sistem sonuçsuz olarak sabittir ve özellikle $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ şeklindedir. Böylece bu denetleyici dayanıklı bir denetleyici olur.

Not 2.4.5. Sadece \bar{x}_2' nin, e' ye eşit olan, ilk bileşeninin değil aynı zamanda bu vektörün tüm diğer bileşenlerinin de ölçüm içim uygun olduğu durumlar olabilir.

Bu durumda bir önceki önermede tanımlanan denetleyici basitleştirilebilir. $y = \bar{x}_2$ şeklinde ve

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= (F_0 + G_0\Psi)\xi' + G_0Ny \\ u &= \Psi\xi' + Ny\end{aligned}\tag{2.72}$$

denetleyici ele alındığında; N' nin (2.69) matrisinin özdeğerlerinin tüm $\mu \in P'$ ler için negatif gerçek bölüme sahip olacak şekilde olması halinde bu denetleyici dayanıklı bir denetleyicidir.

Not 2.4.6. (2.71) ve (2.72) denetleyicileri yapı olarak (2.24) iç model özelliğine sahiptirler. Çünkü onlar sırasıyla (2.41)' in ve (2.40)' in özel durumlarıdır. Tamamlanmak amacıyla (2.24) koşulunu yerine getiren $\Sigma(\mu)$ matrisinin açık ifadesini belirlemek uygun olabilir. Örnek olarak (2.72) denetleyicisinin durumu değerlendirmeye alınırsa; Bu durumda $\Pi_2(\mu) = 0$ eşitliği ile $y = \bar{x}_2$ olur. Böylece (2.24),

$$\begin{aligned}\Sigma(\mu)S &= (F_0 + G_0\Psi)\Sigma(\mu) \\ \Lambda(\mu) &= \Psi\Sigma(\mu)\end{aligned}$$

ifadesine indirgenir. Not 2.4.3' deki gözlemlerle karşılaştırma yapılarak $\Sigma(\mu) = T(\mu)$ olduğu sonucu çıkarılır. (2.71) denetleyicisinin durumunda (2.24) iç model özelliği

$$\begin{aligned}\Sigma(\mu)S &= \begin{pmatrix} (F_0 + G_0\Psi) & G_0N \\ 0 & L \end{pmatrix} \Sigma(\mu) \\ \Lambda(\mu) &= (\Psi \quad N)\Sigma(\mu)\end{aligned}$$

ifadesine indirgenir. Böylece Not 2.4.3' ün gözlemleri ile karşılaştırma yaparak,

$$\Sigma(\mu) = \begin{pmatrix} T(\mu) \\ 0 \end{pmatrix}$$

sonucu elde edilir.

2.5. İç Model Uyarlaması

Dayanıklı bir denetleyicinin dikkat çeken özelliği büyük parametre belirsizliklerine rağmen $e(t)$ hata çıkışının sonuçsuz olarak sifira yakınsamasını güvence altına alma yeteneğidir. Aslında amaç bu şekilde oldukça iç model denetleyicisi kullanılabilir.

$$V_0(\mu) = \{(x, \xi, w) : x = \Pi(\mu)w, \xi = \Sigma(\mu)w\}$$

alt uzayı

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Sw \\ \dot{x} &= [A(\mu) + B(\mu)KC(\mu)]x + B(\mu)H\xi + [P(\mu) + B(\mu)KQ(\mu)]w \\ \dot{\xi} &= F\xi + GC(\mu)x + GQ(\mu)w\end{aligned}$$

kapalı döngü sisteminde, zorlanmamış kapalı döngü sistemi dayanıklı bir şekilde kararlı ise $V_0(\mu)$ uzayı kullanılabilir. Bu şekilde zorlanmış kapalı döngü sisteminin tüm yörüngeleri sonuşurlu olarak $V_0(\mu)$ ' a yaklaşır ve

$$e = C_1(\mu)x + Q_1(\mu)w$$

eşlemesi $V_0(\mu)$ üzerinde sıfır olur, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ düzenleme amacına ulaşılır.

Tabi ki $V_0(\mu)$ alt uzayı μ belirsiz parametresine bağlıdır ama Önerme 2.3.2' de veya Sonuç 2.3.1' de değerlendirilen denetleyicinin özel yapısının dikkate değer özelliği iç model özelliğini μ ' dan bağımsız olan bir denetleyicinin her yoluyla güvence altına almaktır. Aslında söz konusu denetleyici μ ' nun özgül değerinden bağımsız bir şekilde

$$S(\mu) = \{(x, w) : x = \Pi(\mu)w\}$$

alt uzayında kalmak için denetlenen sistemin $x(t)$ durumunu zorlayacak $R(\mu)w(t)$ ileri doğru besleme denetimi girişini üretme yeteneğine sahiptir.

Aslında her bir $w(0)$ için,

$$y(t) = (C(\mu)\Pi(\mu) + Q(\mu))w(t)$$

ölçülen çıkış ile denetleyicinin yönlendirildiği bir $(\xi(0) = \Sigma(\mu)w(0)$ olan) $\xi(0)$ başlangıç durumu vardır. Bu tam olarak $x(t) = \Pi(\mu)w(t)$ ile denk gelen bir denetim girişi ürettiğinde ortaya çıkan ölçülmüş çıkış olacaktır.

Bu şekilde dayanıklı bir denetleyiciyi etkili bir şekilde içeren denetim şemaları, (2.7) dışsistemi tarafından üretilen bozanetken girişlerini reddetme problemini işaret etmektedir. Bu anlamda iç denetim şemaları sabit ama bilinmeyen bozanetkenlerle uğraştıkları klasik bir yolu genelleştirirler. Aslında önerme 2.3.2' de (veya Sonuç 2.3.1' de) değerlendirilen denetleyici oluşumları S' nin minimal çokterimlisindeki katsayıların tam değerlerinin bilinmesini gerektirecek ((2.30)) (Φ, Γ) matrislerinin bir çiftini içermektedir. Söz konusu katsayıların yanlış değerlerinin Φ matrisini oluşturmak için kullanılması halinde iç model özelliği kaybedilecektir. Bu sınırlandırma belirsiz dışyapılı girişleri sabit olduğu ve böylece parametreden bağımsız, türevsel bir denkleme uyduğu, ayarlanmak istenen koordinatların denetimi problemi olarak

değerlendirilmeyecektir. Ama örneğin bilinmeyen bir genlikteki sinüzoidal bir düzensizliği reddetmenin probleminde açık bir şekilde görülür hale gelecektir.

Daha önceden dayanıklı bir denetleyici olan (2.53) sistemini yeniden değerlendirmeye alınırsa; w bozanetkenini üreten dışsistem modelinin,

$$\dot{w} = S(\zeta)w \quad (2.73)$$

ifadede olduğu gibi önceden belirlenen bir \mathcal{Q} kümesinde bulunan belirsiz parametrelerin bir ζ vektörüne bağlı olduğunu varsayılır. $S(\zeta)$ ' nin sadece sanal ekseninde özdeğerlere sahip olabildiği bir durumda dışsistemin kararlı olduğuna dair varsayım kabul edilir. Bu sebeple ζ değerine dair belirsizlik, özdeğerlerin sanal bölümünün değerine dair belirsizlik ile yansıtılıyor.

$$m_{\zeta}(\lambda) = \lambda^s + a_{s-1}(\zeta)\lambda^{s-1} + \dots + a_1(\zeta)\lambda + a_0(\zeta)$$

ifadesinde $S(\zeta)$ minimal çokterimlidir ve $a_{s-1}(\zeta), \dots, a_1(\zeta), a_0(\zeta)$ katsayılarının ζ ' nin sürekli işlevleri olduğu varsayılır. (2.30) gibi, ζ ' nin sürekli işlevi olduğu bir (Φ_{ζ}, Γ) matris çifti tanımlanır. Ön kuram 2.4.4' ü kullanarak (F_0, G_0) ' daki F_0 ' ın Hurwitz matrisi olduğu denetlenebilir bir çift olması halinde, Ψ_{ζ} vektörünün oluştuğu ve T_{ζ} tekil olmayan matrisinin,

$$\begin{aligned} (F_0 + G_0 \Psi_{\zeta})T_{\zeta} &= T_{\zeta} \Phi_{\zeta} \\ \Psi_{\zeta} T_{\zeta} &= \Gamma \end{aligned}$$

şekilde oluştuğu değerlendirilmesi yapılabilir. Özellikle, Φ gibi, Ψ_{ζ} ve T_{ζ} sürekli olarak ζ ' ye bağlıdır.

ζ bilinseydi önerme 2.4.2' de değerlendirmeye alınan, $\Psi = \Psi_{\zeta}$ ile birlikte olan, denetleyici (tabi ki önermenin varsayımlarının karşılandığı düşünülerek) dayanıklı bir denetleyici olurdu. ζ ' nin bilinmemesi durumunda (2.71)' deki Ψ vektörünü, uygun uyarılama yoluyla ayarlanacak olan Ψ_{ζ} ' nin bir $\hat{\Psi}$ hesaplaması ile değiştirmek düşünülebilir. Böylece tüm x_2 vektörü ölçüm için uygun olacak ve (2.72) bir denetim kuralı olarak alınabilecektir.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= (F_0 + G_0 \hat{\Psi})\xi' + G_0 Ny \\ u &= \hat{\Psi} \xi' + Ny\end{aligned}\tag{2.74}$$

şeklinde bir denetim kuralı ele alınırsa; burada $\hat{\Psi}$ ayarlanacak bir $1 \times s$ matrisi olacaktır ve daha sonra $\hat{\Psi}$ için,

$$\dot{\hat{\Psi}} = -\gamma(\bar{N} y)(\xi')^T\tag{2.75}$$

şeklinde bir uyarılama seçilir [5, 7]. Burada $\gamma > 0$ keyfi bir tasarım parametresi olacaktır. \bar{N} sıra vektörü,

$$\bar{N} = (d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{r-2} \quad 1)$$

ve d ifadesi,

$$d(\lambda) = \lambda^{r-1} + d_{r-2}\lambda^{r-2} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

biçimindedir. Burada d_0, d_1, \dots, d_{r-2} aşağıdaki Hurwitz çokterimlinin katsayılarını ifade eder ve $N = -k \bar{N}'$ dir.

Önerme 2.5.1. ζ' nin bir \mathcal{Q} tıkHz kümesi üzerinde bulunan belirsiz parametrelerin bir vektör olduğu (2.73) dışsistemi ile birlikte (2.54) sistemi değerlendirmeye alınırsa; $b(\mu) \geq \bar{b}$ olacak şekilde bir $\bar{b} > 0$ sayısı olduğunu ve $A_{11}(\mu)$ özdeğerlerinin bir P tıkHz kümesindeki tüm μ' lar için negatif gerçek bölümü olduğu varsayılır. s, S' nin minimal çokterimlinin boyutunu ifade etmektedir. F_0' in herhangi bir $s \times s$ Hurwitz matrisi ve G_0' in (F_0, G_0) çiftinin denetlenebilir olacağı şekilde herhangi bir $s \times 1$ vektördür. O zaman tüm $k \geq k^*$ için (2.75) uyarlaması ile birlikte $y = \bar{x}_2$ ölçülen çıkışı ile yönlendirilen (2.74) denetim kuralının ilgili kapalı döngü sisteminde tüm yörüngelerin bağlı olduğu ve $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ olduğu bir şekilde bir k^* sayısı mevcuttur [2, 8].

Kanıt. Bir $\bar{\Psi} = \hat{\Psi} - \Psi_{\zeta}$ hesaplama hatasıyla ve (2.54)' ün ve (2.74)' ün toplamını,

$\hat{\Psi}$ ' yi $\Psi_{\zeta} + \bar{\Psi}$ ve $y = \bar{x}_2$ ile yer değiştirilirse,

$$\dot{\xi}' = (F_0 + G_0 \Psi_{\zeta}) \xi' + G_0 N \bar{x}_2 + G_0 \bar{\Psi} \xi'$$

$$\dot{x}_1 = A_{11}(\mu) \bar{x}_1 + A_{12}(\mu) \bar{x}_2 + \bar{P}_1(\mu) w$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B}(A_{21}(\mu) \bar{x}_1 + A_{22}(\mu) \bar{x}_2 + b(\mu) \Psi_{\zeta} \xi' + b(\mu) N \bar{x}_2 + \bar{p}_2(\mu) w) + \bar{B} b(\mu) \bar{\Psi} \xi'$$

aşağıdaki

$$\Sigma_{\zeta}(\mu) = T_{\zeta} T_{\zeta}(\Lambda(\mu))$$

matrisinin

$$\Sigma_{\zeta}(\mu) S(\zeta) = (F_0 + G_0 \Psi_{\zeta}) \Sigma_{\zeta}(\mu), \quad \Lambda(\mu) = \Psi_{\zeta} \Sigma_{\zeta}(\mu)$$

ifadesini karşılar (Not 2.4.3).

Bu şekilde değişkenleri,

$$\bar{x}_1 = x_1 - \Pi_1(\mu) w$$

$$\bar{\xi}' = \xi' - \Sigma_{\zeta}(\mu) w$$

gibi değiştirmek, (2.55) ve (2.56)' nın değerlendirmesinde

$$\dot{\bar{\xi}}' = (F_0 + G_0 \Psi_{\zeta}) \bar{\xi}' + G_0 N \bar{x}_2 + G_0 \bar{\Psi} \bar{\xi}'$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_{11}(\mu) \bar{x}_1 + A_{12}(\mu) \bar{x}_2$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B}(A_{21}(\mu) \bar{x}_1 + A_{22}(\mu) \bar{x}_2 + b(\mu) \Psi_{\zeta} \bar{\xi}' + b(\mu) N \bar{x}_2) + \bar{B} b(\mu) \bar{\Psi} \bar{\xi}'$$

ifadesini getirir. Ek bir değişken değişikliği olan

$$\chi = \bar{\xi}' - \frac{1}{b(\mu)} G_0 \bar{C} \bar{A}^{r-1} \bar{x}_2$$

ile (Önerme 2.4.2' nin öncesindeki tartışmada zaten kullanılmıştır)

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= F_0 \chi + F_{01}(\mu) \bar{x}_1 + F_{02}(\mu) \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}(\mu) \bar{x}_1 + A_{12}(\mu) \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B} \left(A_{21}(\mu) \bar{x}_1 + [F_{22}(\mu) + b(\mu)N] \bar{x}_2 + b(\mu) \Psi_\zeta \chi \right) + \bar{B} b(\mu) \bar{\Psi} \xi\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{B} \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. Böylelikle elde edilen sistem basit bir şekilde,

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mu, \zeta) \mathbf{x} + \mathbf{b} b(\mu) \bar{\Psi} \xi'$$

şeklinde yazılır. Burada $A(\mu, \zeta)$ tam olarak $\Psi = \Psi_\zeta$ için yazılan (2.68) matrisidir.

Ön kuram 2.4.2' nin kanıtından, k' nın yeterince büyük olması halinde,

$$Z(\mu)A(\mu, \zeta) + A^T(\mu, \zeta)Z(\mu) < 0$$

şekilde bir $Z(\mu)$ ortaya çıkar. Bununla birlikte basit bir hesaplama $Z(\mu)$ matrisinin,

$$\mathbf{b}^T Z(\mu) \mathbf{x} = \bar{N} \bar{x}_2 \quad (2.76)$$

ifadesini verecek şekilde olduğunu gösterir. Ψ_ζ ' nin sabit olduğu ve (2.76)' yı kullanarak

$$\dot{\bar{\Psi}}^T = \hat{\Psi}^T = -\gamma \xi'^T \bar{N} \bar{x}_2 = -\gamma \xi'^T \mathbf{x}^T Z(\mu) \mathbf{b}$$

şeklinde olduğu görülür.

Aşağıdaki kesin pozitif karesel formdaki ifadenin kapalı döngü sisteminin yörüngelerindeki türevi hesaplanırsa,

$$U(\mathbf{x}, \bar{\Psi}) = \mathbf{x}^T Z(\mu) \mathbf{x} + \frac{b(\mu)}{\gamma} \bar{\Psi} \bar{\Psi}^T$$

denklemini

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \mathbf{x}^T [Z(\mu)A(\mu, \zeta) + A^T(\mu, \zeta)Z(\mu)] \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T Z(\mu) \mathbf{b} b(\mu) \bar{\Psi} \xi' + 2 \frac{b(\mu)}{\gamma} \bar{\Psi} \dot{\bar{\Psi}} \\ &\leq 2\mathbf{x}^T Z(\mu) \mathbf{b} b(\mu) \bar{\Psi} \xi' - 2b(\mu) \bar{\Psi} \xi'^T \mathbf{x}^T Z(\mu) \mathbf{b} = 0\end{aligned}$$

ifadesini sağlar. Böylece $U(x, \bar{\Psi})$ kesin pozitif olduğu için kapalı döngü sisteminin yörüngeleri sınırlıdır. Bununla birlikte Lyapunov kararlılık ölçütleri $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olduğunu gösterir. Özellikle bu önermeyi kanıtlayacak şekilde $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ olduğunu ifade eder [1, 2, 5, 8].

2.6. Doğrusal Olmayan Sistem Modeli

Burada, bir önceki bölümde anlatılan yöntem tanımları, doğrusal olmayan sistemlere genişletilecektir. Tabii ki özellikle de şu iki sebebe bağlı olarak doğrusal olan sistemlerde olduğu kadar kesin ve tam sonuçların alınması beklenmemektedir: (i) Bölüm 2.2' de sunulan çeşitli gerekli koşulların dayandırılmış olduğu (2.12) Sylvester denkleminin doğrusal olmayan bir dengeine ilgili gerekli koşulların elde edilmesinin dayandırılmayacak olması, (ii) dayanıklı ve kararlı tasarımın Bölüm 2.4' ün ilk kısmında sunulanlar kadar genel yöntemlere dayandırılmayacak olması. Önceden belirlenen bir denge noktasına dair bir problem yerel olarak çözülecek ise mevcut teori oldukça tatmin edicidir. Çünkü (2.12) Sylvester denklemi, lokal kararlılık tam olarak Bölüm 2.4' ün ilk bölümündeki doğrusal yöntemlerle garanti edilebilirken, bir merkez manifoldun varlığını karakterize eden bir doğrusal analog ile yer değiştirilebilir.

Başlangıç olarak (2.6) sisteminin doğrusal olmayan bir karşılığı olarak, aşağıdaki ifadedeki denklemlerle modellenen ve x, u, w, y, e değişkenlerinin (2.6)' daki ile aynı anlama (ve boyutlara) sahip olduğu,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w) \\ e &= h(x, w) \\ y &= k(x, w) \end{aligned} \tag{2.77}$$

sistemi değerlendirmeye alınır.

Özellikle $f(x, u, w)$, $h(x, w)$ ve $k(x, w)$ ' nun düzgün işlevler olduğu ve $f(0,0,0) = 0$, $h(0, 0) = 0$ ve $k(0, 0) = 0$ olduğu varsayılır. Sistemi etkileyen w düzensizliği, bilinen tüm tasarım yöntemlerinde (2.7) ifadesinin doğrusal bir dışsistemi değerlendirmeye alınıyor olsa da, olası doğrusal olmayan

$$\dot{w} = s(w) \quad (2.78)$$

ifadesi bir bağımsız sistem tarafından üretilir. Yine burada $s(w)$ ' nun düzgün bir işlev olduğu ve $s(0) = 0$ olduğu varsayılır. Ancak doğrusal olmayan modelleri ele alırken önemli bir farklılık söz konusudur: w dışyapılı girişinin ve olası bilinmeyen μ parametresinin (2.77) modelindeki rolünün artık ayrı tutulması gerekmemektedir. Doğrusal modelde neden ayrı tutulduklarının sebebi w ' daki doğrusallığın avantajını kullanmaktır. Ancak (2.77) denklemlerinin sağ tarafları w ' nun doğrusal işlevleri olmadığı sürece, $\dot{\mu} = 0$ önemsiz bağımsız türevsel denklemine uyarak, μ ' nun çeşitli bileşenlerinin bileşenleri olarak değerlendirmek doğaldır ve uygundur.

Genel olarak (2.77) sisteminin,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, y) \\ u &= \theta(\xi, y) \end{aligned} \quad (2.79)$$

ifadedeki denklemler ile modellendiği gibi (2.8) sisteminin doğrusal olmayan bir versiyonu tarafından denetlenmesi beklenilebilir. Burada $\phi(\xi, y)$ ve $\theta(\xi, y)$, $\phi(0, 0) = 0$ ve $\theta(0, 0) = 0$ 'ı karşılayacak şekilde düzgün işlevleridir. Ancak bir tasarımın başarılı olduğu durumların birçoğunda makul bir şekilde daha basit olan yapılar kullanılmaktadır. Bölüm 2.2' de olduğu gibi

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ \dot{x} &= f(x, \theta(\xi, k(x, w)), w) \\ \dot{\xi} &= \phi(\xi, k(x, w)) \\ e &= h(x, w) \end{aligned} \quad (2.80)$$

zorlanmış kapalı döngü sistemi değerlendirmeye alınır ve doğrusal olmayan genelleştirilmiş izleme problemini aşağıdaki gibi tanımlanır. (2.78) dışsistemi ile beraber (2.77) sistemi ve $\chi \in \mathbb{R}^n$ ve $W \in \mathbb{R}^r$ şeklinde iki kümenin verilmesi mümkünse kapalı döngü sisteminde aşağıdakileri sağlayacak şekilde bir (2.79) ifadesindeki denetleyiciyi ve $\Xi \in \mathbb{R}^v$ kümesini bulunmasını sağlar.

Her bir $(x(0), \xi(0)) \in \mathcal{X} \times \Xi \times W$ başlangıç koşulu için

- 1) $(x(t), \xi(t), w(t))$ yörüngesi sınırlıdır,
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ dır.

\mathcal{X} ve W ' nin önceden sabitlenmiş kümeler olmasından dolayı genel olarak yerel bir analizin anlamlı bir bakış açısı kazandırmak yetersiz olacaktır. (2.78) dışsisteminin tüm yörüngelerinin zamanda ileri ve geriye doğru bağlı olduğunu ve (2.78)' in $w = 0$ denge noktasını Lyapunov anlamında yine zamanda ileri ve geriye doğru olmak üzere kararlı olduğu varsayılmaktadır.

$$\pi : \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^n$$

$$\sigma : \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^v$$

ifadesinin iki düzgün eşlemedir ve

$$M_0 = \{(x, \xi, w) : x = \pi(w), \xi = \sigma(w)\}$$

düzgün manifoldun (2.80) zorlanmış kapalı döngü sistemi için değişmez olduğunu varsayılmaktadır. M_0 ' in (2.80) için değişmez olduğunu söylemek $\pi(w)$ ve $\sigma(w)$ ' nin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), \theta(\sigma(w), k(\pi(w), w)), w) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \phi(\sigma(w), k(\pi(w), w)) \end{aligned} \quad (2.81)$$

kısmi türevsel denklem çiftinin çözümleri olduğunu söylemek anlamına gelir [6]. Bu denklemler (2.12) denklemlerinin doğrusal olmayan karşılıklarıdır. Aslında $\pi(w)$ ve $\sigma(w)$ eşlemelerinin, $x = \Pi w$ ve $\xi = \Sigma w$ gibi doğrusal işlevler olmaları durumunda ve (2.80)' nin (2.9) gibi doğrusal bir sistem olması durumunda bu denklemler tam olarak (2.12) denklemlerine indirgenir ve M_0 manifoldu V_0 alt uzayına indirgenecektir.

Bir $\mathcal{X} \times \Xi \times W$ kümesindeki başlangıç koşulları ile (2.80) sistemindeki tüm yörüngelerin (zorlanmamış kapalı döngü sisteminin sonuçsuzlu olarak kararlı

olması halinde doğrusal sistemlerin durumlarında olduğu gibi) sınırlandırıldığını ve M_0 manifoldu tarafından çekildiğini ve

$$0 = h(\pi(w), w) \quad (2.82)$$

ifadeyi verecek şekilde her bir M_0 noktasında düzenlenmiş çıkışının e olacağı varsayılırsa; o zaman açık bir şekilde $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ olur. Aslında (2.82) koşulu (2.13) koşulunun doğrusal olmayan karşılığıdır.

Bu şekilde $\pi(w)$ ve $\sigma(w)$ eşlemelerinin (2.81) ve (2.82)' nin geçerli olması halinde ve (2.80) zorlanmış kapalı döngü sisteminde bir $\mathcal{X} \times \Xi \times W$ kümesindeki başlangıç koşullarının hepsinin M_0 ile sınırlandırılmış ve çekilmiş olması halinde, (2.79) denetleyicisi genelleştirilmiş izleme problemini çözer [5, 6].

Bölüm 2.2' de olduğu gibi $\pi(w)$ ve $\sigma(w)$ ' nin çözmesi beklenen denklemler (2.15) ve (2.16)' nin doğrusal olmayan karşılıkları olarak benzer yorumlamalar yapılabilecek olan iki ayrı denklem kümesi olarak yeniden yazılabilir. Aslında (2.81) ve (2.82) koşullarının sadece aşağıdaki ifadeleri verecek bir $\pi(w)$, $\sigma(w)$, $c(w)$ eşleme üçlemesinin mevcut olması durumunda geçerli olacağı açıktır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), c(w), w) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned} \quad (2.83)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \phi(\sigma(w), k(\pi(w), w)) \\ c(w) &= \theta(\sigma(w), k(\pi(w), w)) \end{aligned} \quad (2.84)$$

denklemleri doğrusal olmayan düzenleyici denklemler olarak ifade edilir. Bunlardan birincisi

$$S = \{(x, w) : x = \pi(w)\}$$

alt manifoldunun

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned} \quad (2.85)$$

doğrusal olmayan sistemi için olan, denetlenen bir değişimsiz alt manifold olduğuna dair özelliği ifade eder.

Aslında S yapı olarak (2.85)' i $u = c(w)$ "geribesleme" kuralı ile denetleyerek elde edilen bağımsız bir doğrusal olmayan sistem olan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, c(w), w) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned} \quad (2.86)$$

için değişimsizdir. Diğer taraftan ikincisi düzenlenmiş çıkışın S alt manifoldunun her noktasında sıfır olduğuna dair özelliği ifade eder.

Bölüm 2.2' de olduğu gibi, (2.78) dışsisteminin her $w(0)$ başlangıç koşulu için:

- 1) (2.77)' nin $x(0)$ ' ı, $x(0) = \pi(w(0))$ ' a eşitse
- 2) (2.77)' nin $u(t)$ denetim girişi, $u(t) = c(w(t))$ ' ye eşitse

o zaman tüm $t \in R'$ ler için $e(t) = 0$ olacaktır. Çünkü S değişimsizdir. Ancak bu yörünge $x(t)$ ' nin (2.77) açık döngü sisteminin $u(t) = c(w(t))$ denetim girişine ve $w(t)$ bozanetken girişine cevabı olarak yorumlanabileceği şekilde bir yörüngedir. Düzenlenmiş çıkış S' nin herhangi bir noktasında sıfır olduğu ve $(x(t), w(t))$ tüm $t \in R'$ ler için S' de kalması sebebiyle, tüm $t \in R'$ ler için $e(t) = 0$ olduğu sonucuna varılmıştır. Diğer bir deyişle, (2.77)' nin başlangıç şartlarının uygun bir şekilde ayarlanması durumunda, $u(t) = c(w(t))$, $e(t)$ ' yi aynı şekilde sıfırda tutabilecek olan bir ileri doğru besleme girişi olur.

Doğrusal olmayan iç özellik olarak ifade edilecek olan (2.84) denklemleri söz konusu $c(w(t))$ denetim girişinin aşağıda verilen bağımsız sonlu boyutlu ve doğrusal olmayan dinamik sistem

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, k(\pi(w), w)) \\ \dot{w} &= s(w) \\ u &= \theta(\xi, k(\pi(w), w)) \end{aligned} \quad (2.87)$$

olup olmadığı değerlendirmesi durumunu ifade eder [5, 6, 11].

Aslında birinci olan

$$R = \{(\xi, w) : \xi = \sigma(w)\}$$

alt manifoldunun (2.87) için değişmez olduğuna dair özelliği ifade eder. Bu şekilde eğer $\xi(0) = \sigma(w(0))$ ise o zaman tüm $t \in R'$ ler için $\xi(t) = \sigma(w(t))$ olur. Sonuç olarak bu başlangıç koşulları için (2.87)' nin $u(t)$ çıkışı (2.84)' ün ikincisi geçerli olduğu için

$$u(t) = \theta(\sigma(w(t)), k(\pi(w(t)), w(t))) = c(w(t))$$

şeklinde olur.

Doğrusal sistemlerin durumundaki (2.16) denklemleri için (2.84) denklemleri düzenlenmiş $e(t)$ çıkışını tam olarak sıfırda tutabilecek $c(w(t))$ denetim girişleri için denetleyicinin içinde gömülü bir jeneratör olduğuna dair özelliği ifade ederler.

Önerme 2.6.1. (2.79) ifadesindeki bir denetleyicinin bazı $\pi(w)$, $\sigma(w)$, $c(w)$ eşleme üçlüleri için geçerli olduğu ve zorlanmış kapalı döngü sisteminin tüm yörüngelerinin bir $\chi \times \Xi \times W$ kümesinde başlangıç koşulları ile M_0 manifoldu ile sınırladığı varsayılırsa; Denetleyici genelleştirilmiş izleme problemini çözer.

Ölçülen y çıkışının ve düzenlenmiş e çıkışının birbirlerine denk gelmeleri durumunda (2.84) koşulu basitleşmektedir. Aslında $k(x, w) = h(x, w)$ olursa $\pi(w)$ eşlemesi hipotez olarak $h(\pi(w), w) = 0$ ı karşıladığından dolayı (2.84) koşulu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \phi(\sigma(w), 0) \\ c(w) &= \theta(\sigma(w), 0) \end{aligned} \quad (2.88)$$

şekle indirgenir. Tabi ki aynı basitleşme $k(x, w)$ ' nin S manifoldunun herhangi bir noktasında sıfırda olması halinde de gerçekleşecektir [5].

2.7. Doğrusal Olmayan Sistemler için Tasarım Yöntemleri

(2.83) düzenleyici denklemleri için $\pi(w)$, $c(w)$ çözüm çiftinin varlığı kullanılan özgül denetleyici bağı olmayan bir koşuldur. Diğer taraftan özel bir $\pi(w)$, $c(w)$ çifti ile birlikte (2.84)' ü karşılayan bir $\sigma(w)$ eşlemesinin varlığı özgül denetleyicinin bir özelliğidir. Bölüm 2.3' de görüldüğü üzere yapıları otomatik olarak böyle $\sigma(w)$ ' lerin varlığını garanti eden denetleyicilere bakılması önemlidir. Sorunları

basitleştirmek için aşağıdakini karşılayacak şekilde ölçülen bir çıkışı tanımlayan $k(x, w)$ eşlemesinin

$$k(\pi(w), w) = 0 \quad (2.89)$$

iç model özelliğinin basitleştirilmiş (2.88) versiyonunun uygulanacağı şekilde olduğu varsayılmaktadır. Bölüm 2.4' de gösterilen ve doğrusal olmayan sistemlerin durumuna genişletilen tasarım prosedürünün değerlendirilmesi ile $\varphi(\xi')$, $\gamma(\xi')$ olduğu ve sırasıyla $\Delta(\xi'', y)$, $L(\xi'', y)$, $N(\xi'', y)$ ' nin (ξ', ξ'', y) ' de düzgün işlevler olduğu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \varphi(\xi') + \Delta(\xi'', y) \\ \dot{\xi}'' &= L(\xi'', y) \\ u &= \gamma(\xi') + N(\xi'', y) \end{aligned} \quad (2.90)$$

ifadesinin denetleyicileri değerlendirmeye alınır [5]. Durumun bu şekilde olması halinde (2.88) iç model özelliğinin,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'}{\partial w} s(w) &= \varphi(\sigma'(w)) \\ c(w) &= \gamma(\sigma'(w)) \end{aligned} \quad (2.91)$$

ifadeyi verecek şekilde bir $\sigma'(w)$ eşlemesi olması halinde geçerli olduğu görülür. Aslında, $\sigma'(w)$ ' nin (2.91)' i karşılaması halinde

$$\sigma(w) = \begin{pmatrix} \sigma'(w) \\ \sigma''(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'(w) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşlemesinin (2.88)' i karşılayıp karşılamadığını denetlemek önemsizdir.

Not 2.7.1. (2.91) denklemleri bu anlamda yorumlanabilir.

$$\dot{w} = s(w), \quad u = c(w) \quad (2.92)$$

ve

$$\dot{\xi}' = \varphi(\xi'), \quad u = \gamma(\xi') \quad (2.93)$$

çıkışları ile bağımsız sistem çiftleri değerlendirmeye alınır; bu sistemler $w \in \mathbb{R}^r$ ve $\xi' \in \mathbb{R}^v$ olarak iki farklı durum uzayı üzerinde tanımlanırlar ama $u \in \mathbb{R}^m$ şeklinde ortak bir çıkış uzayına sahiptirler. (2.91)' i karşılayan bir $\sigma'(w)$

eşlemesinin olduğu varsayılırsa, herhangi bir $w(0) \in R^r$ koşulunu ve başlangıç koşulu olarak $\xi'(0) \in R^v$ ve değer olarak $\xi'(0) = \sigma'(w(0))$ seçilirse; tüm $t \in R'$ ler için

$$\xi'(t) = \sigma'(w(t))$$

olduğu kolay bir şekilde denetlenebilir. Aslında (2.91) ilk koşulunun yerine getirilmesi $\sigma'(w(t))$ ' nin, $\xi'(0) = \sigma'(w(0))$ ' yi karşılayan tek çözüm olarak, $\dot{\xi}' = \varphi(\xi')$ türevsel denkleminin bir çözümü olduğunu garanti eder. (2.91)' deki ikinci koşul da geçerli olursa (2.92)' nin $w(t)$ yörüngesi ve (2.93)' ün $\xi'(t)$ yörüngesi,

$$c(w(t)) = \gamma(\xi'(t))$$

ifadeyi karşılar. Bu şekilde herhangi bir $w(0)$ için, (2.93) tarafından $\xi(0) \in R^v$ den üretilen çıkışın (2.92) tarafından $w(0) \in R^r$ den üretilen çıkışı tam olarak yeniden üreteceği şekilde bir $\xi'(0) \in R^v$ durumu olacaktır. Diğer bir deyişle, (2.93) sistemi (2.92) tarafından üretilen tüm olası çıkışları üretebilecek bir sistemdir ve bundan dolayı (2.91)' in şartının geçerli olması durumunda (2.92) sisteminin (2.93) sistemine dâhil edildiğini söylemek alışılmış bir durumdur.

Böylece (2.90) ifadesinin bir yapısı $\varphi(\xi')$ ve $\gamma(\xi')$ işlevleri bazı $\sigma'(w)$ için (2.91)' in geçerli olacağı şekilde var olmaya devam ettikleri sürece, iç model özelliğinin karşılanmasını garanti eder. Söz konusu koşul aslında, (2.93)' ün (2.92) ile denk gelmesi durumunda ve $\sigma'(w)$ ' nin kimlik eşlemesi olması halinde, önemsiz bir şekilde karşılanacağı için,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= s(\xi') + \Delta(\xi'', y) \\ \dot{\xi}'' &= L(\xi'', y) \\ u &= c(\xi') + N(\xi'', y)\end{aligned}$$

gibi bir denetleyicinin kullanılması istenebilir. Ancak bu çözüm her zaman için işe yaramaz çünkü istenen sonuçurlu özelliklerin elde edilmesi mümkün olmayacak bir kapalı döngü sistemi ile sonuçlanabilir. Örneğin geriye kalan $\Delta(\xi'', y)$, $L(\xi'', y)$, $N(\xi'', y)$ işlevlerini M_0 manifoldunu karşılayacak şekilde seçmek mümkün olmayabilir. Dayanıklı bir doğrusal durum ile bir karşılaştırma yapacak olursak;

μ' dan bağımsız bir doğrusal sistemin durumunda ((2.89) basitleştirme varsayımının geçerli olmaya devam ettiğini varsayarak) (2.92) sistemi,

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sw \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = R(\mu)w$$

ifadedeki gibi bir sistem olacaktır. Bu sistemin tam olarak bir kopyasını (2.90) sistemine yerleştirmek ve $\Delta(\xi'', y)$, $L(\xi'', y)$, $N(\xi'', y)$ doğrusal işlevlerini seçmek,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}'_1 &= S\xi'_1 + \Delta_1 \xi'' + \Theta_1 y \\ \dot{\xi}'_2 &= \Delta_2 \xi'' + \Theta_2 y \\ \dot{\xi}'' &= L\xi'' + My \\ u &= R(\xi'_2)(\xi'_1) + N\xi'' + Ky \end{aligned}$$

şekildeki gibi bir denetleyiciyi sağlayacaktır. Bu şekilde elde edilen, beklenildiği üzere doğrusal olmayan, denetleyicinin basit onaylamasının gösterdiği üzere tespit edilemez bir doğrusal yaklaşık hesaplaması vardır. Böylece bu denetleyicinin kullanılması durumunda zorlanmış kapalı döngü sistemi için yerel bir kararlılık bile elde etmek imkânsız olmasa da zor bir görev olacaktır. Bu engel daha önce tanımlanan analizde gözükmemiştir çünkü (2.48)' de bunun yerine

$$\varphi(\xi') = \Phi \xi', \quad \gamma(\xi') = \Gamma \xi' \quad (2.94)$$

gözlemlenebilir çifti kullanılmıştır.

Bu gözlem benzer özelliklere sahip bir $\varphi(\xi')$, $\gamma(\xi')$ çiftini arama fırsatını önerir. Aslında uygun ama yüksek ölçüde sınırlandırıcı olmayan hipotezler içinde böyle bir çiftin mevcut olması mümkündür. Bu hipotezlerden bir tanesi dışsistemin doğrusal bir sistem olduğudur. Bu durumda w dışyapılı girişi sabit belirsiz parametreler içerebileceği için genellik kaybı olmadan, sabit modları salınımlı modlardan ayırmak ve minimal çokterimlideki basit katlılık (söz konusu sistemin nötr olarak kararlı olduğu varsayılmaktadır) ile S' nin sadece sıfır olmayan sanal özdeğerlere sahip olduğu,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= Sw_1 \\ \dot{w}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

ifadeyi elde etmek için dışsistemin durum uzayındaki koordinatları değiştirmek uygun olacaktır. Diğer hipotez $c(w)$ eşlemesinin, w_2' nin düzgün işlevleri olan katsayılar ile w_1' in birçok bileşeninde çokterimli olduğu yönündedir. Bu durumda (2.91) koşulları (2.94) ifadesinin $\varphi(\xi')$, $\gamma(\xi')$ işlev çiftlerinin aracılığıyla karşılanabilir.

Durumun bu şekilde olduğunu göstermek için verilmiş olan bir $c: R^r \rightarrow R^m$ eşlemesi ile

$$L_{s(w)}c(w) = \frac{\partial c}{\partial w} s(w)$$

şeklinde yeni bir $L_s c: R^r \rightarrow R^m$ eşlemesi tanımlayan standart türevsel bir işlem kullanılabilir. (L, "Lie Türevi" olarak tanımlanmaktadır ve $L_f h(q) = [\partial h(q) / \partial q]^T f(g)$ şekilde formüle edilmektedir. "Çoklu Lie Türevi" ise $L_f^k h(q) = [\partial L_f^{k-1} h(q) / \partial q]^T f(g)$ şekilde formüle edilmektedir)

Bu işlem

$$L_{s(w)}^k c(w) = L_{s(w)} L_{s(w)}^{k-1} c(w), \quad L_{s(w)}^0 c(w) = c(w)$$

ile birlikte tekrar kullanılacaktır.

Ön kuram 2.7.1. (2.78) dışsisteminin doğrusal bir sistem olduğu varsayılır. $c(w)$ eşlemesinin w_2' den bağımsız katsayılar ile w_1' in bileşenlerinin birçokterimli olduğu varsayılır. O zaman,

$$L_{s(w)}^s c(w) + a_{s-1} L_{s(w)}^{s-1} c(w) + \dots + a_1 L_{s(w)} c(w) + a_0 c(w) = 0 \quad (2.96)$$

ifadeyi sağlayacak şekilde bir s tamsayısı ve a_0, a_1, \dots, a_{s-1} reel sayıları mevcut olacaktır. Sonuç olarak

$$\sigma'(w) = \begin{pmatrix} c(w) \\ L_{s(w)} c(w) \\ \dots \\ L_{s(w)}^{s-1} c(w) \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

eşlemesi (2.30)' daki gibi Φ ve Γ ile,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'}{\partial w} s(w) &= \Phi \sigma'(w) \\ c(w) &= \Gamma \sigma'(w)\end{aligned}\quad (2.98)$$

ifadeyi sağlayacak şekilde olacaktır [1, 2, 5].

Kanıt. Dışsistemin (2.95) ifadesi olarak yazılması halinde,

$$L_{s(w)} c(w) = \frac{\partial c}{\partial w_1} S w_1 \quad (2.99)$$

ifade elde edilir. $c(w)$ ' nin w_1 ' in bileşenlerinde k ' ye eşit veya ondan daha düşük bir derecede bir çokterimli olması durumunda (2.99)' un sağ tarafı da w_1 ' de k ' ye eşit veya ondan daha düşük derecede bir çokterimli olacaktır. Diğer bir deyişle, gerçek katsayılar ile k ' ye eşit veya ondan daha düşük bir derecede olan w_1 ' deki tüm çokterimlilerin P_k kümesi,

$$\begin{aligned}L_{S w_1} : P_k &\rightarrow P_k \\ p(w_1) &\mapsto \frac{\partial p}{\partial w_1} S w_1\end{aligned}\quad (2.100)$$

eşlemenin işlemi içinde kapatılan sonlu boyutlu doğrusal bir uzaydır. $L_{S w_1}$ sonlu boyutlu vektör uzayının kendi içine dair bir doğrusal eşleme olduğu için

$$m(\lambda) = \lambda^s + a_{s-1} \lambda^{s-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

minimal çokterimli P_k ' deki herhangi bir $p(w_1)$ çokterimlisi için

$$L_{S w_1}^s p(w_1) + a_{s-1} L_{S w_1}^{s-1} p(w_1) + \dots + a_1 L_{S w_1} p(w_1) + a_0 c(w) = 0$$

şeklinde olacaktır. (2.99)' un değerlendirmesinde bu (2.96)' yı kanıtlar. Ön kuramda belirtilen $\sigma'(w)$ eşlemesi aslında

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial w} s(w) = \begin{pmatrix} L_{s(w)} c(w) \\ L_{s(w)}^2 c(w) \\ \dots \\ L_{s(w)}^s c(w) \end{pmatrix}$$

ifadesini karşılar ve bu (2.96)' yı değerlendirilmesinde ve Φ ile Γ' nin (2.30) tanımının değerlendirilmesinde ön kuramı kanıtlar.

Dışsistemin doğrusal bir sistem olduğuna ve $c(w)$ ' deki w' nin (önemsiz olmayan) bileşenlerinde bir çokterimli olduğuna dair hipotezler doğrusal ve gözlemlenebilir $\varphi(\xi')$, $\gamma(\xi')$ işlev çiftleri aracılığıyla karşılanabilecek olan bir iç model özelliğine sahip olmayı mümkün kılar. Bu aslında tasarımın, kararlılık özelliği ile elde edilmesi gereken, daha sonraki aşamasını basitleştirir.

Önerme 2.7.1. (2.77) sistemi ele alınır ve şu varsayımlar yapılır: Dışsistemin (2.95)' deki gibi doğrusal olduğu varsayılır. Tüm $w \in R^r$ ler için (2.83)' ü karşılayan $\pi(w)$ ve $c(w)$ eşlemeleri olduğu varsayılır. Özellikle $c(w)$ ' nin w_2' ye bağlı katsayılar ile w_1' in bileşenlerinde bir çokterimli olduğu varsayılır. $\sigma'(w)$ ' nin (2.97)' de tanımlanan bir eşleme olduğu ve Φ ile Γ' nin (2.30)' da tanımlanan matrisler olduğu varsayılır ve

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Delta(\xi'', y) \\ \dot{\xi}'' &= L(\xi'', y) \\ u &= \Gamma \xi' + N(\xi'', y)\end{aligned}\tag{2.101}$$

şeklinde bir denetleyici ele alınır.

$\Delta(\xi'', y)$, $L(\xi'', y)$, $N(\xi'', y)$ ' nin ilgili zorlanmış kapalı döngü sisteminde bir $\chi \times \Xi \times W$ kümesindeki tüm başlangıç koşullarındaki yörüngelerin,

$$M_0 = \{(x, \xi', \xi'', w) : x = \pi(w), \xi' = \sigma'(w), \xi'' = 0\}$$

manifoldu ile bağlı olduğu veya türetildiği şekilde olduğu varsayımı yapılır. O zaman bu denetleyici genelleştirilmiş izleme problemini çözer.

Doğrusal sistemlerin durumundaki gibi, bu tür bir sonuç genelleştirilmiş bir izleme problemini bir kararlılık problemine indirger. Bu anlamda kapalı döngü sistemde koordinatların

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - \pi(w) \\ \bar{\xi}' &= \xi' - \sigma'(w)\end{aligned}\tag{2.102}$$

şeklinde değiştirilmesi halinde M_0 manifoldunun

$$M_0 = \left\{ (\bar{x}, \bar{\xi}', \xi'', w) : \bar{x} = 0, \bar{\xi}' = 0, \xi'' = 0 \right\}$$

kümesi haline gelmektedir.

Aşağıda denetleyicinin tasarımının nasıl tamamlanabileceğine dair iki örnek ele alınmaktadır. Bunlardan ilki yörüngelerin M_0 ' a yakınsaklığının sadece $(w, x, \xi) = (0, 0, 0)$ denge noktasının yakınlarında bazı yerlerdeki başlangıç koşullarında elde edildiğini göstermektedir. Dışsistemin doğrusal olması ve w_2 ' den bağımsız katsayılar ile w_1 ' in bileşenlerindeki bir $c(w)$ çokterimliyle (2.83)' ü karşılayan $\pi(w)$ ve $c(w)$ eşlemeleri olması gibi önerme 2.7.1' in çeşitli varsayımlarının karşılandığı varsayımı ile; (2.48) ile aynı olan,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Theta_1 e \\ \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M y \\ u &= \Gamma \xi' + N \xi'' \end{aligned} \quad (2.103)$$

şekilde başka bir denetleyici seçilir. Karşılık gelen zorlanmış kapalı döngü sistemi,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ \dot{x} &= f(x, \Gamma \xi' + N \xi'', w) \\ \dot{\xi}' &= \Phi \xi' + \Theta_1 h(x, w) \\ \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M k(x, w) \end{aligned} \quad (2.104)$$

ifadeye sahiptir. Değişkenleri (2.102)' deki gibi değiştirmek ve (2.83) ve (2.98)' i kullanmak,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x} + \pi(w), \Gamma \bar{\xi}' + N \xi'' + c(w), w) - f(\pi(w), c(w), w) \\ \dot{\bar{\xi}}' &= \Phi \bar{\xi}' + \Theta_1 h(\bar{x} + \pi(w), w) \\ \dot{\xi}'' &= L \xi'' + M k(\bar{x} + \pi(w), w) \end{aligned} \quad (2.105)$$

ifadeyi sağlar. Bu sistem hata sistemi olarak ifade edilecektir. Yapı olarak üç alt denklemden oluşan alt sistem, daha önce de gözlemlendiği gibi M_0 manifolduna karşılık gelen bir $(\bar{x}, \bar{\xi}', \xi'') = (0, 0, 0)$ denge noktasına sahiptir. Bu şekilde bu denge noktasında sonuçurlu olarak kararlı hale getirilirse izleme problemi çözülür [6].

$$\begin{pmatrix} \bar{x}, \bar{\xi}', \xi'', w \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0) \quad (2.106)$$

denge noktasında üç (2.105) alt denklemlerinin doğrusal bir yaklaşık hesaplamasını değerlendirmeye alınır; ilk çıkarımlar bu yaklaşık olarak hesaplamanın,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\Gamma\bar{\xi}' + BN\xi'' \\ \dot{\bar{\xi}}' &= \Phi\bar{\xi}' + \Theta_1 C_1 \bar{x} \\ \dot{\xi}'' &= L\xi'' + MC\bar{x} \end{aligned} \quad (2.107)$$

ifadenin bir sistemi olduğunu gösterir. Burada

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(0,0,0)} & B &= \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{(0,0,0)} \\ C_1 &= \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{(0,0)} & C &= \left[\frac{\partial k}{\partial x} \right]_{(0,0)} \end{aligned}$$

şeklinde olur.

(2.107) doğrusal sistemi (2.49) sistemi ile aynıdır ve bu sebepten sonuç 2.4.1 geçerli olur. Diğer bir deyişle A, B, C, C_1 ön kuram 2.4.1' in hipotezlerinin geçerli olacağı şekilde ise orada L, M, N sistemin sonuçurlu olarak kararlı olduğu şekilde var olur. İlk yaklaşık olarak hesaplamanın kararlılık prensibi için (2.105)' in üç alt denkleminin $(\bar{x}, \bar{\xi}', \xi'') = (0, 0, 0)$ denge noktası yerel anlamda sonuçurlu bir şekilde kararlıdır. Böylece, tüm başlangıç kümeleri için yörüngelerinin bağlı olacağı ve M_0 kümesine yaklaşacağı şekilde, (2.106) noktasına $\chi, \Xi' \times \Xi''$ ve W

şeklinde yakın açık komşuluklar var olacaktır. Söz konusu denetleyici bu başlangıç verilerinin kümeleri için genelleştirilmiş izleme problemini çözer.

Tasarıma dair ikinci örnek Bölüm 2.4' de (2.53) için varsayılan özelliklere benzer özelliklerdeki bir doğrusal olmayan sistemi değerlendirmeye alır. Bu durumda herhangi bir keyfi aralık için genelleştirilmiş izleme problemini çözen ama başlangıç verilerinin düzenli bir kümesinden oluşan bir denetleyici oluşturmak mümkündür. İlk önce (2.77)' nin sağ tarafının tamamının, söz konusu sistemin

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(w) \\ \dot{x} &= f(x, 0, w) + g(x, w)u \\ e &= h(x, w) \\ y &= k(x, w)\end{aligned}$$

ifadenin denklemleri ile modellenmesi gibi u' nun ilgin bir işlevi olduğu varsayılır. Örneğin bu sistemin son üç denklemini,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= f_1(x_1, C\bar{x}_2, w) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}\bar{x}_2 + \bar{B}(f_2(x_1, \bar{x}_2, w) + b(x_1, \bar{x}_2, w)u) \\ e &= \bar{C}\bar{x}_2 \\ y &= \bar{x}_2\end{aligned}\tag{2.108}$$

ifadedeki denklemlere dönüştürürse; burada $\dim(x_1) = n - r$, $\dim(\bar{x}_2) = r$ ve $b(x_1, \bar{x}_2, w) \neq 0$ olacaktır. (2.108)' deki ilk üç denklem (2.54) denklemlerinin doğrusal olmayan karşılıklarıdır. Diğer taraftan son denklem \bar{x}_2 vektörünün tüm bileşenlerinin (Not 2.4.5) ölçüm için uygun olduğuna dair basitleştirici varsayımı yansıtmaktadır.

Not 2.7.2. (2.54)' de tam olan \bar{x}_2 vektörüne $\dot{\bar{x}}_1$ ' in sağ tarafında olmasına izin verilirken (2.108)' de, \bar{x}_2 ' nin (e' ye denk gelen) ilk bileşeni gibi, sadece $\bar{C}\bar{x}_2$ mevcuttur. Doğrusal bir sistem için bu bir fark yaratmaz ve aslında (2.54)

Bu varsayımların geçerli olması durumunda (2.108) dinamikleri rahat bir şekilde

$$\bar{x}_1 = x_1 - \zeta(w)$$

değişkeninin aracılığıyla

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{C}\bar{x}_2, w) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}\bar{x}_2 + \bar{B}\bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, w) + \bar{B}\bar{b}(w_2)(u - c(w)) \end{aligned} \quad (2.109)$$

ifadesinin denklemlerinin kümelerine ((2.57) ile karşılaştırılabilir) dönüştürülebilir

ki burada $b(x_1, \bar{x}_2, w)$ için $\bar{b}(w_2)$ yazılabilir ve

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{C}\bar{x}_2, w) &= f_1(\bar{x}_1 + \zeta(w), \bar{C}\bar{x}_2, w) - f_1(\zeta(w), 0, w) \\ \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, w) &= f_2(\bar{x}_1 + \zeta(w), \bar{x}_2, w) - f_2(\zeta(w), 0, w) \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Burada,

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(0, 0, w) &= 0 \\ \bar{f}_2(0, 0, w) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Bununla birlikte, Φ' nin sadece sanal eksenin özdeğerlerine sahip olduğu ve Γ' nin (Γ, Φ) deki gözlenebileceği bir şekilde olduğu (2.30) ifadesinin Φ ve Γ matrisi çifti için (2.98)' in $\sigma'(w)$ eşleşmesinin mevcut olması gibi ön kuram 2.7.1' in sonuçları geçerli olur.

Ön kuram 2.4.4' e başvururken F_0' in bir $s \times s$ Hurwitz matrisi (s' nin Φ boyutuna eşit olması kaydıyla) ve G_0' in da (F_0, G_0) çiftinin denetlenebilir olacağı şekilde bir $s \times 1$ vektörü olması izin verilerek, T ile Ψ ,

$$T^{-1}(F_0 + G_0\Psi)T = \Phi, \quad \Psi T = \Gamma \quad (2.110)$$

ifadeyi verecek şekildedir ve (2.65) denetleyicinin yani

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= F_0 \xi' + G_0 u \\ u &= \Psi \xi' + v\end{aligned}\tag{2.111}$$

şeklindeki ve v 'nin kararlılık için kullanılacak ek bir giriş olduğu denetleyicisidir. Bu anlamda Not 2.4.3' de gösterilen sonuca benzer bir sonuçta geçerlidir. Aslında (2.110) ile (2.98)' i oluşturarak

$$\tau(w) = T\sigma'(w)$$

eşlemesinin

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial w} s(w) &= (F_0 + G_0 \Psi) \tau(w) \\ c(w) &= \Psi \tau(w)\end{aligned}\tag{2.112}$$

ifadesini karşıladığı görülür.

(2.109)' u (2.111) aracılığıyla denetlemek,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}' &= (F_0 + G_0 \Psi) \xi' + G_0 v \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{C} \bar{x}_2, w) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B} \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, w) + \bar{B} \bar{b}(w_2) (\Psi \xi' + v - c(w))\end{aligned}$$

sistemi sağlar. ξ' değişkenini

$$\bar{\xi}' = \xi' - \tau(w)$$

ifadesinde değiştirerek, (2.112)' yi kullanarak ve dışsistemin dinamiklerini ekleyerek

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(w) \\ \dot{\bar{\xi}}' &= (F_0 + G_0 \Psi) \bar{\xi}' + G_0 v \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{C} \bar{x}_2, w) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B} \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, w) + \bar{B} \bar{b}(w_2) (\Psi \bar{\xi}' + v)\end{aligned}\tag{2.113}$$

ifadesi şeklindeki bir sistem elde edilir.

Bu sistem bir önceki örnekteki (2.105) hata sistemine benzer bir rol oynar.

Aslında, $v = 0$ için bir denge noktası olan $(\bar{\xi}', \bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0, 0)$ noktası

$$M_0 = \left\{ (\bar{\xi}', x_1, \bar{x}_2) : \bar{\xi}' = \tau(w), \quad x_1 = \zeta_1(w), \quad \bar{x}_2 = 0 \right\}$$

manifolduna karşılık gelir.

Bu manifoldta düzenlenmiş e çıkışı sıfırdır. Böylece

$$v = v(\bar{x}_2)$$

denetimi $v(0) = 0$ ile tüm yörüngelerin ve M_0 manifoldunun sınırlı olacağı şekilde bulunabilirse (2.111) denetleyicisi genelleştirilmiş izleme sorununu çözer.

Aslında, Önerme 2.4.2' deki $A_{11}(\mu)$ özdeğerlerinin negatif gerçel bölüme sahip olduğuna dair hipotez karşılık gelen bir varsayım içinde aşağıdaki sonuçta da gösterildiği üzere bir v denetimi mevcuttur [5, 13].

Önerme 2.7.2. Sistem (2.108) ele alındığında: Yukarıdaki (i), (ii) ve (iii) varsayımlarının geçerli olduğu ve aynı zamanda bir $V: \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün işlevinin, K^∞ sınıfı $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ işlevlerinin ve $\delta > 0$, $a > 0$, $b > 0$ gerçel sayılarının tüm w' ler için aşağıdaki ifadeyi

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}\left(\left\|\bar{x}_1\right\|\right) &\leq V(\bar{x}_1) \leq \bar{\alpha}\left(\left\|\bar{x}_1\right\|\right) \\ \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} \bar{f}_1(\bar{x}_1, 0, w) &\leq -\alpha\left(\left\|\bar{x}_1\right\|\right) \end{aligned}$$

ve tüm $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-r}$ ler için de

$$\underline{\alpha}(s) = as^2, \quad \alpha(s) = bs^2$$

ifadesini verecek şekilde var olduğu varsayılırsa; χ, Ξ, W düzgün kümelerinin her bir seçimi için $v = N_{\bar{x}_2}$ denetimi ile $\chi \times \Xi \times W$ kümesindeki her bir başlangıç koşulu için (2.113) sisteminin tüm yörüngelerinin M_0 ile türetildiği veya bağlandığı r -boyutlu bir N sıra vektörü olacaktır. Sonuç olarak

$$\dot{\xi}' = (F_0 + G_0 \Psi) \xi' + G_0 N y$$

$$u = \Psi \xi' + N y$$

denetleyici verilmiş bir başlangıç verileri kümesi için izleme problemini çözer [5, 13].

Kanıt. (2.113)' de koordinatları

$$\chi = \bar{\xi}' - \frac{1}{b(w_2)} G_0 \bar{C} \bar{A}^{r-1} \bar{x}_2$$

şeklinde değiştirmek,

$$\dot{w} = s(w)$$

$$\dot{\chi} = F_0 \chi + \varphi_0(\bar{x}_1, \bar{x}_2, w)$$

•

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{C} \bar{x}_2, w)$$

•

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A} \bar{x}_2 + \bar{B} \varphi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \chi, w) + \bar{B} \bar{b}(w_2) v$$

yapıdaki ((2.67) ile karşılaştırılabilir) sistemi sağlar. Burada;

$$\varphi_0(0,0, w) = 0, \quad \varphi_2(0,0,0, w) = 0$$

olacak şekilde $\varphi_0(\bar{x}_1, \bar{x}_2, w)$ ve $\varphi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \chi, w)$ olur.

Buradan F_0 bir Hurwitz matrisi olacağı ve

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{f}_1(\bar{x}_1, 0, w)$$

sistemi önermede belirtilen özelliklere sahip olduğu için, gerekli özelliklere sahip bir N matrisinin var olduğunu kanıtlar.

Örnek 2.7.1. Doğrusal olmayan bir sistem olan,

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_{11}(w_2)z + p_0(\xi_1, w_1, w_2) \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 + p_1(z, \xi_1, w_1, w_2) \\
&\dots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r + p_{r-1}(z, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}, w_1, w_2) \\
\dot{\xi}_r &= p_r(z, \xi_1, \dots, \xi_r, w_1, w_2) + b(w_2)u \\
e &= \xi_1 + q(w_1, w_2)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

ele alınır. Burada z , 1-boyutlu vektördür ve ξ_1, \dots, ξ_r skaler değişkenlerdir. w_1 ve w_2 dışyapılı girişleri (2.95)' de olduğu gibi bir doğrusal dışsistemle ve (w_1, w_2) ' nin düzgün bir $W_1 \times W_2$ kümesi içinde çeşitlendiği şekilde üretilir. Durum bu şekilde ise yukarıdaki denklemlerde w_2 olası kesin olmayan bir parametre şeklinde sabittir.

- (a) Tam bir simetrik P matrisinin olduğunu ve her bir $w_2 \in W_2$ için aşağıdaki ifadeyi verecek şekilde bir $\alpha_0 > 0$ sayısının olduğu,

$$PA_{11}(w_2) + A_{11}^T(w_2)P \leq -\alpha_0 I$$

- (b) Her bir $w_2 \in W_2$, $b(w_2) \geq \bar{b}$ olacağı şekilde bir $\bar{b} > 0$ sayısının olduğu,

- (c) $P_0(\xi, w_1, w_2)$, $P_1(z, \xi_1, w_1, w_2)$, ..., $P_r(z, \xi_1, \dots, \xi_r, w_1, w_2)$ işlevleri ve $z, \xi_1, \dots, \xi_r, w_1$ katsayıları içerisindeki $q(w_1, w_2)$ çokterimlidir ve bu katsayılar w_2 ' nin düzgün işlevleridir.

Bu sistem özyineli bir hesaplama ile (2.108) ifadesinin bir sistemine dönüştürülebilir. Aslında $\Phi_1(w_1, w_2) = q(w_1, w_2)$ kümesi

$$e_1 = \xi_1 + \phi_1(w_1, w_2)$$

ifadesini tanımlar ve

$$\dot{e}_1 = \dot{\xi}_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial w_1} S w_1 = \xi_2 + p_1(z, \xi_1, w_1, w_2) + \frac{\partial \phi_1}{\partial w_1} S w_1$$

olduğunu gözlemler.

Bu şekilde \dot{e}_1 , sistemdeki hipotezlerin bir sonucu olarak $\Phi_2(z, \xi_1, w_1, w_2)$ ' deki w_2 ' nin düzgün işlevleri olan katsayılar ile birlikte z, ξ_1, w_1 ' de çokterimliler olduğu

$$\dot{e}_1 = \xi_2 + \phi_2(z, \xi_1, w_1, w_2)$$

ifadesi şeklinde açıklanabilir.

$$e_2 = \xi_2 + \phi_2(z, \xi_1, w_1, w_2)$$

şeklinde bir ayarlama yapılırsa

$$\dot{e}_1 = e_2$$

olacaktır.

Aynı şekilde \dot{e}_2 ' ye benzer bir açıklama verilebilir. Aslında

$$\dot{e}_2 = \dot{\xi}_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial w_1} \dot{w}_1$$

ve $\dot{z}, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ ifadelerini kullanarak sistemdeki hipotezlerin bir sonucu olarak $\Phi_3(z, \xi_1, \xi_2, w_1, w_2)$ ' deki w_2 ' nin düzgün işlevleri olan katsayılar ile birlikte z, ξ_1, ξ_2, w_1 ' de çokterimliler olduğu

$$\dot{e}_2 = \xi_3 + \phi_3(z, \xi_1, \xi_2, w_1, w_2)$$

ifadesini yazmak mümkündür.

$$e_3 = \xi_3 + \phi_3(z, \xi_1, \xi_2, w_1, w_2)$$

şeklinde bir ayarlama yapılarak özyineli bir şekilde türetme yapılabilir.

Bu şekilde yeni durum değişkenlerinin x_2 (kısmi) kümesi

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \phi_1(w_1, w_2) \\ \xi_2 + \phi_2(z, \xi_1, w_1, w_2) \\ \dots \\ \xi_r + \phi_r(z, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}, w_1, w_2) \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

şeklinde tanımlanır.

\bar{x}_2 ' nin çeşitli bileşenlerinin ξ_i 'ye bağılılığı üçgenel olduğu için (2.115) ile tanımlanan

$$(\xi_1, \dots, \xi_r) \rightarrow \bar{x}_2$$

eşlemesi global bir şekilde dönüştürülemez şekildedir ve ξ_i düzgün işlevleri olan katsayılar ile birlikte z, \bar{x}_2, w_1 de çokterimlidir.

Yeni değişkenlerde (2.114),

$$\begin{aligned} \bullet \\ z &= A_{11}(w_2)z + p_0(e_1 - q(w_1, w_2), w_1, w_2) \\ \bullet \\ e_1 &= e_2 \\ \dots \\ \bullet \\ e_{r-1} &= e_r \\ \bullet \\ e_r &= \Psi(z, e_1, \dots, e_r, w_1, w_2) + b(w_2)u \\ e &= e_1 \end{aligned} \tag{2.116}$$

şekilde yeniden yazılır.

Burada $P_0(e_1 - q(w_1, w_2), w_1, w_2)$ ve $\Psi(z, e_1, \dots, e_r, w_1, w_2)$ ' nin düzgün işlevleri olan katsayılar ile birlikte z, e_1, \dots, e_r, w_1 de çokterimlidir. Bu sistem açık bir şekilde, $x_1 = z, \bar{x}_2 = \text{col}(e_1, \dots, e_r)$ ve

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \bar{C}\bar{x}_2, w) &= A_{11}(w_2)z + p_0(e_1 - q(w_1, w_2), w_1, w_2) \\ f_2(x_1, \bar{x}_2, w) &= \Psi(z, e_1, \dots, e_r, w_1, w_2) \\ b(x_1, \bar{x}_2, w) &= b(w_2) \end{aligned}$$

ile (2.108) formunun bir sistemidir. Özellikle $\Psi(z, e_1, \dots, e_r, w_1, w_2), (z, e_1, \dots, e_r, w_1)$ içerisinde bir çokterimlidir.

(i) ve (ii) hipotezinin ((iii) hipotezi yukarıdaki (b) hipotezinin aynısıdır) geçerli olduğunu gösterilmiş olur. Bu anlamda p' nin bir çokterimli olduğu

$$f_1(x_1, 0, w) = A_{11}(w_2)z + p(w_1, w_2)$$

ifadesinin bir işlevi olduğu gözlemlenir. (i) hipotezinin geçerli olduğunu söylemek,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial w_1} S w_1 = A_{11}(w_2) \zeta(w_1, w_2) + p(w_1, w_2)$$

ifadesini sağlayan bir $\zeta(w_1, w_2)$ eşlemesi olduğunu söylemek ile aynı anlamdadır.

Bu ifade ön kuram 2.7.1' in kanıtlanmasında gösterilen biçim kullanılarak

$$L_{S w_1} \zeta(w_1, w_2) = A_{11}(w_2) \zeta(w_1, w_2) + p(w_1, w_2)$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

k' nin her bir $w_2 \in W_2$ için $p(w_1, w_2)$ ' nin 1 girişlerinin w_1' de k' yi aşamayacağı derecede çokterimliler olacağı bir tamsayıdır. $\zeta(w_1, w_2)$ ' nin 1 girişleri w_1' de k' yi aşmayan derecede çokterimliler ise $L_{S w_1} \zeta(w_1, w_2)$ girişleri (2.100) ifadesinin doğrusal eşlemesinde $\zeta(w_1, w_2)$ ' deki değerler olarak yorumlanabilir. Sonuç olarak yukarıdaki denklem bir sonlu boyutlu vektör uzayının (P_k ' nin 1-fold Kartezyen çarpımı ürünü) doğrusal bir şekilde eşlemesi ile bu vektör uzayının kendi içine doğru (sağ taraftaki kısım) ilgin eşleme değeri arasındaki bir kimliktir. Diğer bir deyişle, yukarıdaki denklem bir Sylvester denklemi olarak görülebilir. (a) hipotezi $A_{11}(w_2)$ özdeğerlerinin negatif gerçek bölümleri olduğunu ifade eder. S özdeğerlerinin sıfır gerçek bölümü olduğu için (2.100) eşlemesinin özdeğerlerinin sıfır gerçek bölümü vardır. O zaman her bir sabitlenmiş w_2 için söz konusu Sylvester denkleminin girişleri w_1' de çokterimliler olan tek $\zeta(w_1, w_2)$ çözümü olacaktır. Bununla birlikte denklem doğrusal olduğu için ve w_1' de bir çokterimli olarak gösterilen $p(w_1, w_2)$ katsayıları w_2' nin düzgün işlevleri olduğu için aynı zamanda w_1' de çokterimli olarak değerlendirilen $p(w_1, w_2)$ katsayılarının da w_2' nin düzgün işlevleri olduğu belirtilir. Bu şekilde (i) hipotezinin geçerli olduğu şeklinde bir sonuç çıkarılır.

(ii) hipotezini onaylamak için bu durumda

$$c(w) = - \frac{\psi(\zeta(w_1, w_2), 0, \dots, 0, w_1, w_2)}{b(w_2)}$$

şeklinde olduğunu gözlemlemek yeterlidir.

$\Psi(z, 0, \dots, 0, w_1, w_2)$ ' nin z, w_1' de ve $\zeta(w_1, w_2)$ ' in de w_1' de bir çokterimli olduğu için söz konusu hipotez geçerli olacaktır.

Sonuç olarak Önerme 2.7.2' nin ana hipotezinin geçerli olup olmadığı denetlenmiş olur. Bu anlamda $\bar{x}_1 = z - \zeta(w_1, w_2)$ değişkenlerinin değişiklikleri,

$$\bar{f}(\bar{x}_1, 0, w) = A_{11}(w_2) \bar{x}_1$$

ifadeyi verir. Bu şekilde $V(\bar{x}_1) = \bar{x}_1^T P \bar{x}_1$ işlevi istenen özelliklere sahip olacaktır.

3. HELİKOPTERİN ANALİTİK MODELİ

3.1. Giriş

Helikopterler için otomatik pilot tasarımı, sistem dinamiğinin doğrusal olmamasına ve araç tarafından üretilen tork ve güç arasındaki güçlü bağlaşım ile doğrusal olmayan bir geribesleme arasında zorlu bir tasarım sürecidir. Helikopterlerin hareketlerini denetleyebilmek için literatürde, dinamik evirmeden geribesleme doğrusallaştırmasına ve uyarlamalı denetime kadar çeşitlenen birçok yenilikçi teknik önerilmiştir [4, 5, 7]. Bir helikopter genel anlamda, düşük sayıda kumanda mekanizması kullanan ve bağımsız denetim girişlerinden daha fazla serbestlik derecesine sahip olan bir mekanik sistemdir. Bu da geribesleme doğrusallaştırma teknikleri kullanıldığında, tam olarak tanımlanamayan iç dinamiklerin varlığına karşılık gelmektedir. Aslında kapalı döngü sistem, doğrusal olmayan denetim kurallarını içermek zorundadır. Çünkü, denetleyici tasarımı büyük fiziksel parametre değişimlerinin ve modellenmemiş dinamiklerin doğurabileceği sorunları çözmelidir. Bu nedenle, iç model denetleyicisi, doğrusal olmayan yapıda ve uyarlamalı olarak tasarlanacaktır.

Burada bir helikopterin denizde salınmakta olan bir geminin güvertesine düzgün bir şekilde inme problemini helikopterin modelinin araştırılmasıyla başlanarak anlatılacaktır. Buradaki amaçlardan birisi, bilinmeyen frekans, genlik ve sinüzoidal sinyallerinin bir dayanak sinyalini izleyebilecek şekilde, uçağın kütle merkezinin dikey hareketini denetlemektir. Ancak helikopter dinamiklerinin, istenen yörüngeye dair kararlılığı bir uçağın denetimine göre çok daha zordur. Özellikle zor olan kısım, hareketi boylamsal ve yanal yönlerde ve ayrıca, iki ilgili dinamik birbirlerine sıkı bir şekilde bağlı oldukları için, helikopter yönelimini denetlemektir. Buna çözüm olarak; doğrusal olmayan uyarlanabilir denetleyici yoluyla ileri besleme şeklindeki dayanıklı ve kararlı sistemlere dair sonuçları birleştirmek gerekir [2, 5]. Bunlarla birlikte amaç; geribesleme denetim devresi üzerindeki zorlanmış iki zamanlı dinamikleri bir denetleyici yoluyla boylamsal ve yanal yönlerdeki hareketi ve yüksekliği denetlemektir.

Sistem, altı mekanik serbestlik derecesi ile ilgili olarak sadece dört bağımsız girişe sahip olacak şekilde, az sayıda kumanda kullandığından kütle merkezinin bir dayanak yörüngeyi izleyecek şekilde olmasını ve yönelimin de bir dayanağa yönlendirip izlemesi işi zorlaştırmaktadır. Bunun yerine kütle merkezinin hareketini ve helikopterin kafa kısmını denetlemek tercih edilmektedir; ama diğer yönelim değişkenlerinin, yunuslama ve yuvarlanma açılarının sabit ve gelişigüzel bir şekilde küçük sınırlar içinde kalmaktadır [9]. Modelin dayanıklı olması için, modele ait belirsizliklerin ve çok sayıdaki başlangıç verilerinin belirlenmesi gerekmektedir. Aynı zamanda oluşan modellenmemiş dinamiklerinde denetlenmesi gerekir. Denetleyiciyi basitleştirilmiş bir modele dayandırılarak tasarlanacaktır ve daha sonra benzetim yoluyla tasarım yöntemi karmaşık bir model üzerinde gösterilecektir.

3.2. Helikopter Modeli

Helikopter dinamiklerinin matematiksel bir modeli, $SE(3) = R^3 \times SO(3)$ yapılı bir uzaydaki Newton-Euler denklemlerinden elde edilebilir [Ek 1]. Bir öklit uzayındaki F_i , eylemsizlik koordinat eksenini ve F_b , gövdenin koordinat eksenini göstermektedir. $P^i = \text{col}(x, y, z) \in R^3$ helikopterin kütle merkezini işaret etmektedir ve $R \in SO(3)$ ' nin F_i eksenini ile ilgili olarak F_b ekseninin yönlendirmesini karakterize eden rotasyon matrisini işaret etmektedir. Helikopterin gövdesinin kütle merkezinin $v^b \in R^3$ dönme hızı ve onun $w^b \in R^3$ açısal hızı (her ikisi de F_b ' de ifade edilmiştir) olan helikopterin kinematik denklemleri tanım olarak,

$$\begin{aligned} \dot{P}^i &= Rv^b \\ \dot{R} &= R \cdot \text{Skew}(w^b) \end{aligned} \quad (3.1)$$

dir. Burada $\text{Skew}(\cdot)$ negatif simetrik matris olacaktır ve

$$\text{Skew}(w^b) = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

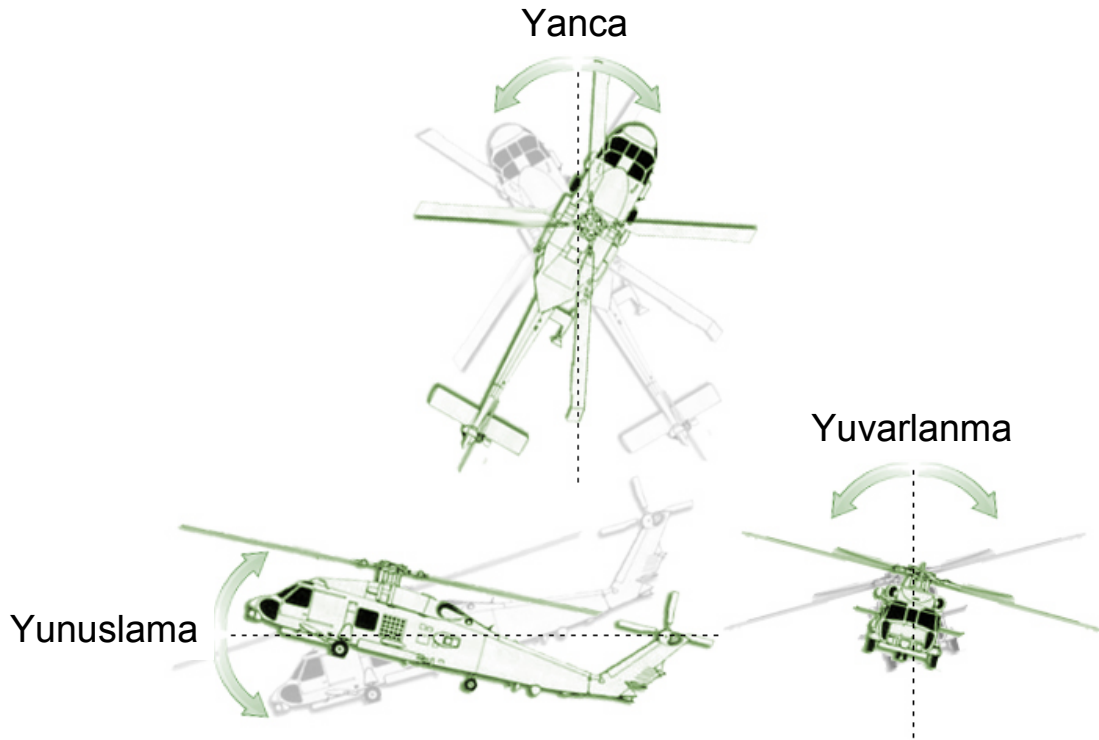
şeklinde tanımlanmaktadır.

R olarak gösterilen rotasyon matrisi ise

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta \sin \Phi & \sin \Phi \sin \psi + \cos \Phi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \theta \sin \psi & -\cos \psi \sin \Phi + \sin \psi \sin \theta \sin \Phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \Phi & \cos \theta \cos \Phi \end{bmatrix}$$

Φ :Yuvarlanma Açısı, θ :Yunuslama Açısı, ψ :Yanca Açısı

dir. Şekil 3.1' de yuvarlanma, yunuslama ve yanca açıları tanımlanmaktadır.



Şekil 3.1. Helikopter Açı Tanımları

Bununla birlikte $F^b = (f^b, \tau^b)$ olduğu,

$$\begin{aligned} M \dot{v}^b &= -M \cdot Skew(w^b)v^b + f^b \\ J \dot{w}^b &= -Skew(w^b)Jw^b + \tau^b \end{aligned} \quad (3.2)$$

helikopter gövdesine sabitlenmiş koordinatlardaki, M , kütle, J ise eylemsizlik matrisidir. Bu helikopterin dinamik denklemleri olarak tanımlanmaktadır [5].

Bir helikopterde (f^b, τ^b) burkulma matrisi ana ve kuyruk rotorları tarafından üretilen tork ve gücü göstermektedir.

Rotasyon matrisi, $q = (q_0, \mathbf{q}) \in S_4$ quaternionlar olarak gösterilir. q_0 skaler ve \mathbf{q} vektör bölümlerini gösterir.

(3.2)' deki $M \cdot Skew(w^b)v^b$ terimi, "Coriolis kuvveti" olarak bilinmektedir [12]. Coriolis kuvveti, havada hareket halindeki helikopterin, yerkürenin hareketinden dolayı maruz kaldığı kuvvettir. Helikopter kuzey yarım kürede ise bu kuvvet, hareket yönünün sağına doğrudur. Bu kuvvet, dönme hızı ile açısal hızın vektörel çarpımı ile hesaplanmaktadır. Yine (3.2)' deki $Skew(w^b)Jw^b$ terimi ise "açısal momentumun korunumu" yasası olarak bilinmektedir. Helikopterin konumunu koruyabilmesi için üreteceği torkun hesaplanmasında kullanılmaktadır.

(3.1)' deki ikinci denklem o zaman

$$\dot{q} = \frac{1}{2} E(q)w^b \quad (3.3)$$

quaternion yayılım denklemleri ile değiştirilir. Burada

$$E(q) = \begin{pmatrix} -q^T \\ q_0 I + Skew(q) \end{pmatrix}$$

gövdenin kütle merkezinin,

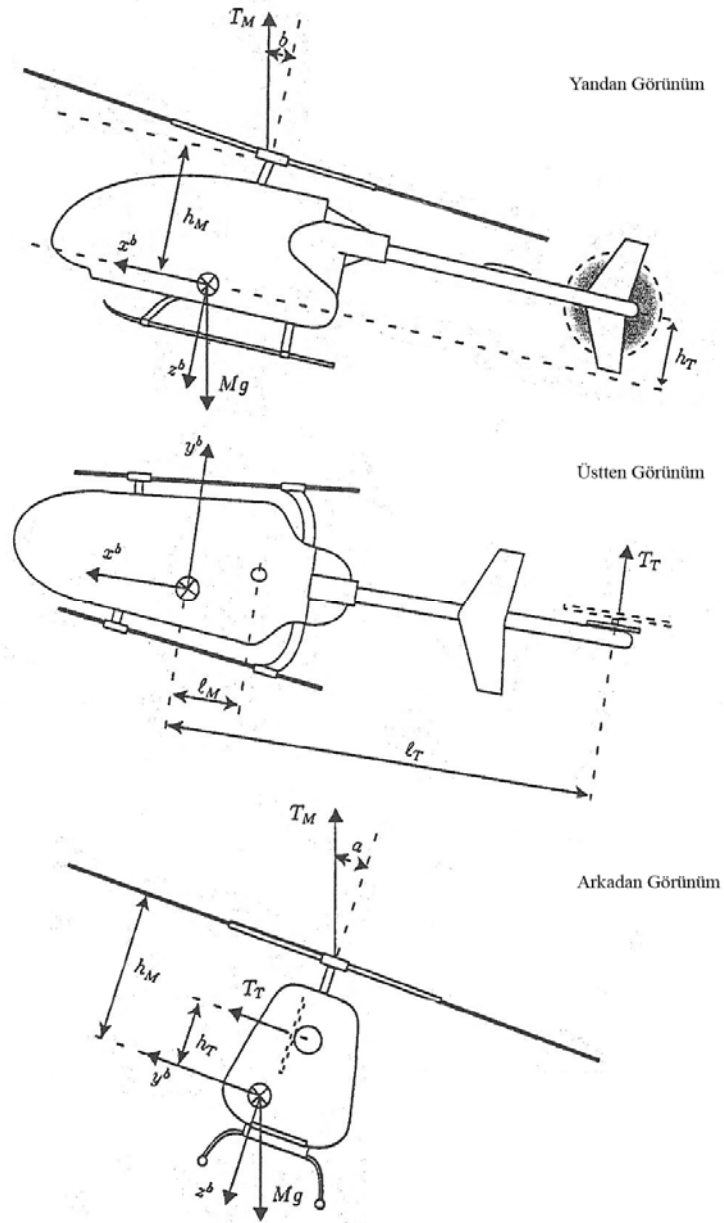
$$M \ddot{p}^i = Rf^b \quad (3.4)$$

eylemsizlikli koordinatlar ile ifade edilmektedir. (3.1) ve (3.2) denklemleriyle,

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &= Rv^b \\ \ddot{p}^i &= \dot{R}v^b + R\dot{v}^b \\ \dot{R} &= R \cdot Skew(w^b) \\ \ddot{p}^i &= R \cdot Skew(w^b)v^b + R\dot{v}^b \\ M \ddot{p}^i &= R \left[M \cdot Skew(w^b)v^b + M \dot{v}^b \right] \\ M \ddot{p}^i &= Rf^b \end{aligned}$$

şekilde (3.4) denklemi bulunmaktadır.

Şekil 3.2 ile ilgili olarak ana ve kuyruk itme kuvvetleri sırasıyla T_m ve T_t ile ifade edilir. Ana rotor mili z^b ekseninde denetlenirken, ana rotorun uç yolu düzlemi y^b eksenini etrafındaki bir a açısıyla ve x^b eksenini etrafındaki bir b açısıyla eğilir. Genel denetim (T_m , T_t , a , b) vektörü ile sağlanır.



Şekil 3.2. Helikopterin yandan, üstten ve arkadan görünüşü.

Ortaya çıkan f_b dışsal gücü,

$$f^b = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M + Y_T \\ Z_M \end{bmatrix} + R^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_g \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

olduğu

$$\begin{aligned} X_M &= -T_M \sin a, & Y_M &= T_M \sin b, \\ Z_M &= -T_M \cos a \cos b, & Y_T &= -T_T \end{aligned}$$

denklemleri ile verilir.

Benzer şekilde τ_b dışsal torku,

$$\tau^b = \begin{bmatrix} \tau_{f1} \\ \tau_{f2} \\ \tau_{f3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_M \\ M_M + M_T \\ N_M \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ile ifade edilirken burada (τ_{f1} , τ_{f2} , τ_{f3}) ana ve kuyruk rotorları tarafından üretilen momentleri ve (R_M , $M_M + M_T$, N_M) da aerodinamik güçlerin momentlerini ifade eder. Üretilen bu momentler,

$$\begin{aligned} \tau_{f1} &= Y_M h_M + Z_M y_M + Y_T h_T \\ \tau_{f2} &= -X_M h_M + Z_M l_M \\ \tau_{f3} &= -Y_M l_M - Y_T l_T \end{aligned}$$

ile verilirken burada (l_M , y_M , h_M) ve (l_T , y_T , h_T) sırasıyla gövdenin kütle merkezindeki sabitlenmiş koordinatlara bağlı ana ve kuyruk rotoru millerinin koordinatlarını belirler.

$$\begin{aligned} R_M &= c_b^M b - Q_M \sin a \\ M_M &= c_a^M a + Q_M \sin b \\ N_M &= -Q_M \cos a \cos b \\ M_T &= -Q_T \end{aligned}$$

ve

$$Q_M = c_M^Q T_M^{1.5} + D_M^Q, \quad Q_T = c_T^Q T_T^{1.5} + D_T^Q$$

denetim girişleri, aerodinamik güçler tarafından üretilen torklar ile ilişkilidir.

Burada $c_b^M, c_a^M, c_M^Q, c_T^Q, D_M^Q, D_T^Q$ fiziksel parametrelerdir.

a, b, T_M ve T_T denetim girişleri ve uygulanan güç ve torklar arasındaki ilişkiyi basitleştirmek için birkaç varsayım yapılmaktadır [3, 5]. İlk olarak a ve b eğim açıları küçük olduğundan,

$$\sin(a) \approx a, \quad \sin(b) \approx b, \quad \cos(a) \approx 1, \quad \cos(b) \approx 1 \quad (3.7)$$

varsayımları kullanılır. f^b dış gücüyle ilgili olarak T_M' nin x^b yönü üzerindeki katkısı görmezden gelinir ve T_T' nin y^b yönü üzerindeki katkısı T_M' nin x^b ile eşleştiğini varsayarsak böylece,

$$f^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_M \end{pmatrix} + R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

basitleştirilmiş model elde edilir. τ^b dış torku ile ilgili olarak, (3.7)' yi kullanarak (3.6),

$$\tau^b(v) = A(T_M)v + B(T_M), \quad v = \text{col}(a, b, T_T) \quad (3.9)$$

şekilde yazılır. Burada $A(T_M)$ ve $B(T_M)$ bir matris ve sırasıyla aerodinamik güçleri karakterize eden parametrelere ve helikopterin geometrisine bağlı katsayıları olan T_M itişinin ilgin işlevinin bir vektörüdür. A ve B matrisleri,

$$A = \begin{bmatrix} -Q_M & -T_M h_M + c_b^m & -h_T \\ T_M h_M + c_a^M & Q_M & 0 \\ 0 & -T_M l_M & l_T \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -T_M y_M \\ -T_M l_M \\ -Q_M \end{bmatrix}$$

dir.

Konum-Yönelim dinamiklerinin bir çizimi Şekil 3.3' de verilmiştir.

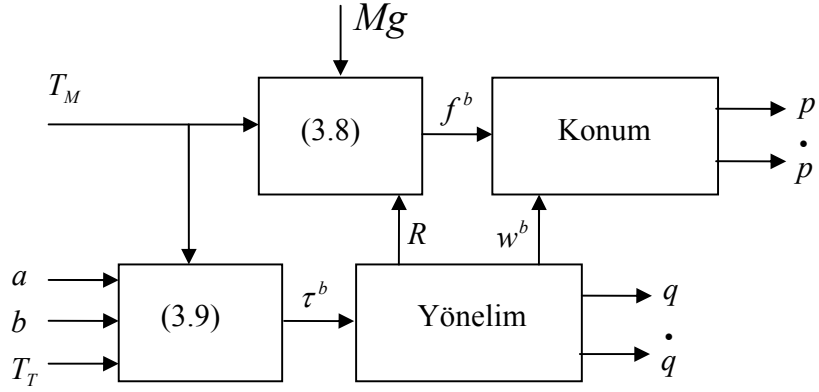
Fiziksel sistem parametrelerinin değişimiyle ve helikopterin M kütlesi, J eylemsizlik matrisi ve (3.9)' daki aerodinamik katsayılarını da içeren büyük parametre belirsizlikleri ile başa çıkabilen bir denetleyici tasarlanacaktır. Bir μ vektöründeki belirsizliğe sahip tüm parametreleri göz önüne alarak, μ_0 belirsizlik durumu için nominal değer olup ve $\mu_\Delta = \mu - \mu_0$ 'yi ifadesi de ayrıca tanımlanmaktadır. μ_Δ , belirli bir tıkkız P kümesinin elemanıdır. Buna bağlı olarak

$$M = M_0 + M_\Delta, \quad J = J_0 + J_\Delta$$

şeklinde ayarlama yapılır ve $A(T_M)$ ve $B(T_M)$ 'nin işlevleri de,

$$A(T_M) = A_0(T_M) + A_\Delta(T_M), \quad B(T_M) = B_0(T_M) + B_\Delta(T_M) \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır [12].



Şekil 3.3 Yaklaşık olarak hesaplanmış sistem dinamikleri modeli.

4. BİR HELİKOPTERİN DAYANIKLI VE DOĞRUSAL OLMAYAN HAREKET DENETİMİ

4.1. Problem Tanımlaması

Amaç; belirsiz koşullarda salınan bir güverteye bir helikopterin güvenli bir şekilde inmesini sağlayabilecek bir otomatik pilotun tasarımıdır. Değerlendirmeye alınan kurgu bir helikopterin, şekil 4.1' de gösterildiği gibi, dalga hareketine bağlı olarak, büyük dikey salınımlara tabi olduğu bir olası senaryoyu temsil eder. Denetim amacı iki ayrı göreve ayrılır: İlk olarak belirli bir h farkı ile, güverteninki ile helikopterin dikey hareketinin senkronizasyonudur. Senkronizasyon sağlandığında ikinci görev h dikey dengelemesinin sıfıra inmesine izin vermektir. Açık bir şekilde önemli olan kısım burada ilk görevi yerine getirebilecek bir denetleyici tasarlamaktır. Daha önce yapılan çalışmalardan biri tekil sarsımlar yöntemiyle aynı problemi çözmeye çalışmıştır [14]. Bu araştırmaya başlarken bu çalışmadan esinlenilmiştir.

Geribesleme için mevcut bulunan tüm bilgilerin sadece, helikopter ve güverte arasındaki ilgili konumu ve değişim oranını verecek şekilde, pasif alıcılarla sağlandığı varsayılır. Durumun bu şekilde olması halinde, helikopter tarafından izlenecek dikey dayanak yörüngesi bu şekilde uygun olmayacaktır. Ayrıca senkronizasyon hatası da hesaplanmalıdır. Aşağıda $z^*(t)$ şeklinde ifade edilen bu yörünge, bilinmeyen genlik (A_i), evre (φ_i) ve frekans (Ω_i) değerlerindeki işaretlerin toplamı olarak, yani

$$z^*(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i) \quad (4.1)$$

şeklinde modellenir [4, 5].



Şekil 4.1. Açık denizde salınmakta olan bir güverteye inen bir helikopter.

Bu ayarlama dayanak yörüngesinin belirsizliği $(A_i, \varphi_i, \Omega_i)$, $i = 1, \dots, N$ parametrelerinin tam değerlerinin belirsizliğine bağlıdır. Sonuç olarak tasarımda gerçekleştirilecek olan ana amaçlardan birisi de helikopterin kütle merkezinin sonuçurlu olarak,

$$(x^{ref}(t), y^{ref}(t), z^{ref}(t)) = (0, 0, h + z^*(t)) \quad (4.2)$$

dayanak hareketini izlemesine izin vermektir. Aynı zamanda aracın yüksekliğinin parametrelerle ifade edilen quaternion için,

$$q_0^{ref}(t) = 1, \quad q^{ref}(t) = (0, 0, 0)^T \quad (4.3)$$

olası seçeneğe karşılık gelen $R^{ref}(t) = I$ sabit dayanaklı, sonuçurlu bir şekilde izlemesinin istenmesi de uygun olacaktır [Ek 2]. $z(t)$ ' nin $z^{ref}(t)$ ' yi izlettirmeye dair sorun $z^{ref}(t)$ ' deki sinyal aşağıdaki doğrusal zamanda değişmeyen dışsistem tarafından üretilmesi sebebiyle, genelleştirilmiş bir izleme teorisi çerçevesinde (2.78) denklemi,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= S(\zeta)w \\ z^* &= r(w) \end{aligned}$$

şeklinde ele alınır. Burada $\zeta = \text{col}(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ ' dir.

$$S(\zeta) = \text{diag}(H(\Omega_1), \dots, H(\Omega_N))$$

$$H(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$r(w) = R w$$

şeklinde tanımlanmıştır. Belirli bir tıkHz küme için ζ aralığı değerleri varsayılır. $(A_i, \varphi_i), \dots, (A_N, \varphi_N)$ parametrelerinin rolünün dışsistemin $w(0)$ başlangıç koşulu ile oynamaktadır. $x(t), y(t)$ ve $q(t)$ ' nun izlenmesinde küçük hatalar kabul edilebilir. Özellikle

$$e = (x \ y \ z - z^{ref}), \quad \dot{e} = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} - \dot{r})$$

şeklinde bir ayarlama yapılarak tasarım problemi şu şekilde ifade edilir: Herhangi bir $\delta > 0$ sayısı verildiğinde,

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \varphi(\eta, e, \dot{e}, q, w^b) \\ T_M &= \psi_{T_M}(\eta, e, \dot{e}, q, w^b) \\ v &= \psi_v(\eta, e, \dot{e}, q, w^b) \end{aligned} \quad (4.4)$$

şekilde bir dinamik denetleyici tasarlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |z(t) - z^{ref}(t)| &= 0 \\ \|e(t)\| \leq \delta \text{ ve } \|q(t)\| &\leq \delta \quad \forall t \geq T \end{aligned}$$

dışsistem ve fiziksel sistemin kabul edilebilir parametre değerleri için yarı küresel bir çekim bölgesinde (gelişigüzel büyük tıkHz bir küme olan fiziksel sistem değerlerinin ilk koşulları) izleme hedefleri elde edilir. Denetleyicinin, kütle merkezinin e izleme hatası ve onun türevi \dot{e} hatasını işlemesine izin verildiği ama dışsistemin $w(t)$ durumu ve dikey $z(t)$ durumunu işlemesine izin verilmediği önemli bir ayrıntıdır. Sonuç olarak ana itiş T_M ' nin helikopteri (4.2)-(4.3) dayanak yörüngesinde tutmak için ihtiyaç duyulan sabit durum değeri $T_M^*(t) = M(g - \ddot{r}(w(t)))$ ile verilir. T_M ' nin artı olmasına gerek duyulduğu için dışsistemin kabul edilebilir başlangıç koşullarına bir üst sınırı,

$$\left| \ddot{r}(w(t)) \right| < g, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.5)$$

vermektedir.

4.2. Dikey Hata Dinamiğinin Analizi ve Kararlılığı

Buradaki amaç; helikopterin dikey konumunun, salınmakta olan güverte ile senkronizasyonunu sağlayabilecek ve iç model teorisini temel alacak dikey bir denetleyici tasarlamaktır.

Düzenleyici tasarımındaki ilk adım sabit durumda sıfır hatayı elde etmek için uygulanması gereken ileri besleme denetim sinyalinin hesaplanmasıdır. (3.1) ve (3.8)' den ve R rotasyon matrisinden elde edilen $z(t)$ için, Ek 2' de verilen quaternions anlamında,

$$M \ddot{z} = -(1 - 2q_1^2 - 2q_2^2)T_M + Mg \quad (4.6)$$

şekilde okunan denkleme değerlendirilmeye alınır. Yerçekimi gücünün nominal değerini karşılamak için $0 < c < 1$, $\text{sat}_c(s)$ 'nin (s, c ' den küçük olduğu yerlerde s ' ye eşittir [10]. Diğer durumlarda $\text{sgn}(s)c$ sonucunu verir.) u ' nun tanımlanacak olan ek bir denetim olduğu

$$T_M = \frac{gM_0 - u}{1 - \text{sat}_c(2q_1^2 + 2q_2^2)} \quad (4.7)$$

birinci denetim kuralı seçilir. Burada sat işlevi ile $2q_1^2 + 2q_2^2$ değerinin 1 ve 1' den büyük olması engellenmektedir. Böylece T_M değerinin anlamsız ya da sınırsız olmasının önüne geçilmektedir. Bu seçeneğe bağlı olarak (4.6) dikey dinamikleri

$$M \ddot{z} = \psi_c^z(q)u + g[M - M_0\psi_c^z(q)] \quad (4.8)$$

halini alır ki burada

$$\psi_c^z(q) = \frac{1 - 2q_1^2 - 2q_2^2}{1 - \text{sat}_c(2q_1^2 + 2q_2^2)}$$

olur.

Tanım olarak

$$2q_1^2 + 2q_2^2 \leq c \Rightarrow \psi_c^z(q) = 1$$

bilinmektedir [Ek 2].

$q(t)$ küçükse, $z(t) \equiv z^{ref}(t)$ şeklinde tutmak için ihtiyaç duyulan u girişi basitçe

$$c_u(w, \mu, \zeta) = -gM_\Delta + (M_0 + M_\Delta) \ddot{r}(w) \quad (4.9)$$

şeklindedir.

Tabi ki $c_u(w, \mu, \zeta)$ denetleyicisi dikey dayanak hızlanmasına yardımcı olması için olan bir ifadenin, yani $M \ddot{r}(w)$ ifadesinin $-gM_\Delta$ süper pozisyonunu ve verilen kalıcı yerçekimi gücünü karşılamak için olan bir ifadeyi içerecektir.

$c_u(w, \mu, \zeta)$ belirsiz parametrelere ve ölçülemeyen w durumuna bağlı oldukça (4.9) sabit durum denetleyicisinin bir "ileri besleme" denetleyicisi olarak uygulanabilir olmadığı açıktır. Ancak $r(w)$ ' nin w ' deki doğrusal bir işlev olması gibi doğrusal bir iç model ile sonuçurlu olarak yeniden üretilmesi mümkün olabilir. u ' yu kararlı bir denetleyicinin (u_{st}) ve iç model denetleyicisinin (u_{im}) özeti olarak,

$$u = u_{st} + u_{im}$$

şekilde yazılabilir. (F, G) , denetlenen bir çifttir. e_z ve \dot{e}_z ' deki üçüncü bileşen e ,

$$e_z = z - z^{ref}, \quad \dot{e}_z = \dot{z} - \dot{r}$$

ifade etmektedir ve $\dot{\xi} = (F + G\Psi)\xi + g_{st}$, $u = \Psi\xi + u_{st}$ denetimi ile birlikte

$$g_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_2 \end{pmatrix} u_{st} + L \dot{e}_z$$

$$u_{st} = -k_2(\dot{e}_z + k_1 e_z)$$

$$L = -\begin{pmatrix} H_2 \\ F_2 \end{pmatrix} G_2 M_0$$

ifadesi seçilir.

Bu,

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_2 \\ 0 & F_2 + G_2 \hat{\Psi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G_2 \end{pmatrix} u_{st} - \begin{pmatrix} H_2 \\ F_2 \end{pmatrix} G_2 M_0 \dot{e}_z \quad (4.10)$$

$$u = \xi_1 + \hat{\Psi}_2 \xi_2 + u_{st}$$

şekildeki gibi bir denetleyiciyi verir. Burada $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^{2N}$ ve $\hat{\Psi}_2$ bir $1 \times 2N$ sıra vektörüdür. Böyle bir sistem daha düzenli bir ifade olarak $\hat{\Psi} = (1 \ \hat{\Psi}_2)$ ile

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (F + G \hat{\Psi}) \xi + G u_{st} - F G M_0 \dot{e}_z \\ u_{im} &= \hat{\Psi} \xi + u_{st} \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir. ζ vektörünün bilinmesi durumunda $\hat{\Psi}_2 = \Psi_{2,\zeta}$ şeklinde ayarlanır. $\hat{\Psi}_2$ ' nin uyarlanacak parametre hesaplamaları olduğu düşünülür ve γ ' nin artı tasarım parametresi olduğu ve d ' nin

$$d > \max \left\{ |(\Psi_{2,\zeta})_i| \right\}$$

ifadesini karşılması ile “ölü bölge” ($tas_d(\Psi_i) = \Psi_i - sat_d(\Psi_i)$) işlevi olduğu

$$\dot{\hat{\Psi}}_2 = -\gamma \xi_2^T (\dot{e}_z + k_1 e_z) - \left[tas_d(\hat{\Psi}_2) \right]^T \quad (4.12)$$

kuralı ortaya çıkar.

Oluşan dikey hata denetleyicisi Şekil 4.2' de özetlenmektedir.

Yüksek kazanç ifadesi olan,

$$u_{st} = -k_2 (\dot{e}_z + k_1 e_z) \quad (4.13)$$

denkleminde k_1 ve k_2 pozitif parametrelerdir.

$\tau(w, \mu, \zeta) = T \zeta \tau(w, \mu)$ eşlemesini,

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \chi = \xi - \bar{\tau}(w, \mu, \zeta) - G M_0 \dot{e}_z \\ \hat{\Psi}_2 &\rightarrow \bar{\Psi}_2 = \hat{\Psi}_2 - \Psi_{2,\zeta} \\ \dot{e}_z &\rightarrow \zeta = \dot{e}_z + k_1 e_z \end{aligned} \quad (4.14)$$

koordinatlar ile değiştirerek, e_z , ξ , $\hat{\Psi}_2$ dinamikleri

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \frac{1}{M} \left[u_{st} + \Psi_{\zeta} \chi + \Psi_{\zeta} GM(\zeta - k_1 e_z) + \bar{\Psi}_2 \xi_2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{M} (1 - \psi_c^z(q))(gM_0 - u) + k_1 \zeta - k_1^2 e_z \\ \dot{\chi} &= F\chi + FGM_{\Delta}(\zeta - k_1 e_z) + (1 - \psi_c^z(q))G(gM_0 - u) \\ \dot{\bar{\Psi}} &= -\gamma \xi_2^T \zeta - \left[tas_d(\bar{\Psi}_2 + \Psi_{2,\zeta}) \right]^T\end{aligned}\tag{4.15}$$

halini alır.

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \quad ile \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} \chi \\ e_z \\ \zeta \end{pmatrix}$$

düzenlemesi yaparak (4.15) sistemi daha düzenli bir ifade ile,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \left(A + A_1[\psi_c^z(q) - 1] \right) \eta_1 + \left(\frac{1}{M} b - B[\psi_c^z(q) - 1] \right) \xi_2^T \eta_2 + B\rho \\ \dot{\eta}_2 &= -\gamma \xi_2^T b^T \eta_1 - tas_d(\eta_2 + \Psi_{2,\rho})\end{aligned}\tag{4.16}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada

$$\rho = \left(\psi_c^z(q) - 1 \right) \left(gM_0 - \Psi_{\zeta} \bar{\tau}(w, \mu, \zeta) \right)\tag{4.17}$$

eğer $\|q\| < c$ ise sıfır olacaktır. $\psi_c(q) = 1$ olduğu zaman (yani $\|q\| < c$ olduğunda) bu sistem,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= A\eta_1 + \frac{1}{M} b \xi_2^T \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -\gamma \xi_2^T b^T \eta_1 - tas_d(\eta_2 + \Psi_{2,\rho})\end{aligned}\tag{4.18}$$

şekilde basitleştirilir. Dışsistemin ilk değerleri tıkız bir W kümesine ($W = I_{[a, b]} \times \dots \times I_{[a, b]}$, $a < I < b$, a ve b pozitif reel sayılar) ait olması durumunda, (4.18) sisteminin $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$ denge noktasını fiziksel sistemde sonuşurlu ve yerel olarak sabit kılmakta, k_2 tasarım parametresinin büyük bir değerinin başarılı olduğunu söylemektir [3, 5, 9].

Önerme 4.2.1. (4.18) sistemi ele alınır. $w(t_0) \in W$ olduğu varsayılırsa, bir $\beta(\cdot, \cdot)$ işlevi ve $w(t_0)$ ve (μ, ζ) ' den bağımsız d_0, K, λ_0 pozitif sayıları mevcut olacaktır ve aşağıdaki durumları sağlayacaktır:

(i) Tüm $\eta(t_0)$ ' lar için (4.18)' in $\eta(t)$ çözümü

$$\|\eta(t)\| \leq \beta(\|\eta(t_0)\|), \quad t - t_0$$

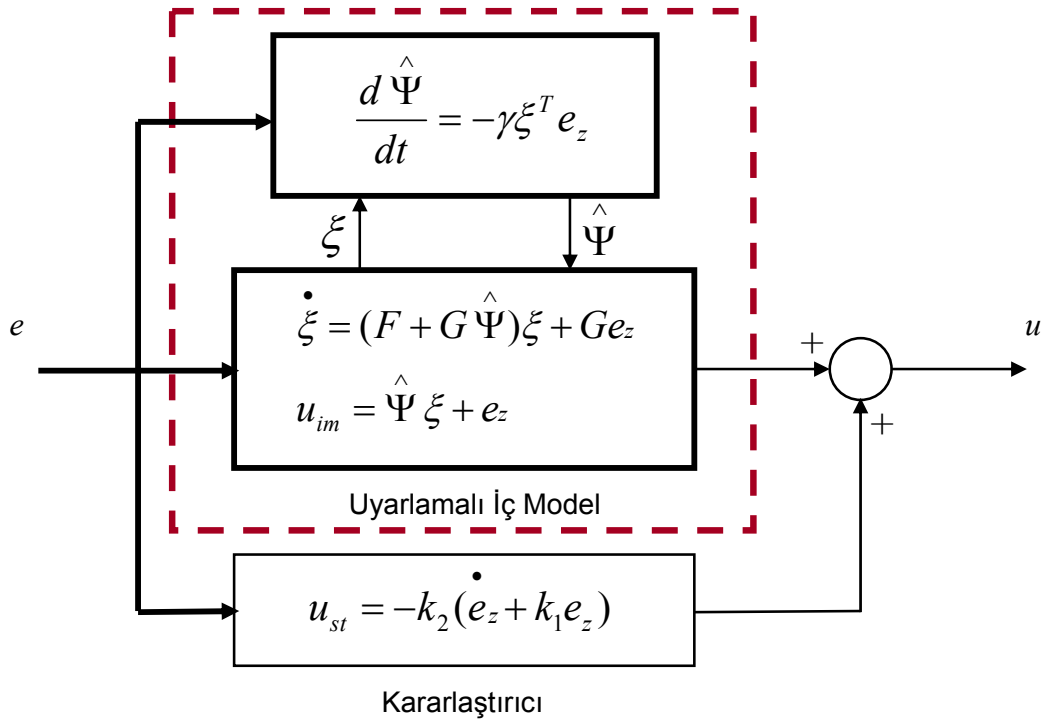
ifadesini tüm $t \geq t_0$ 'lar için karşılar.

(ii) $\|\eta(t_0)\| < d_0$ olacağı şekilde tüm $\eta(t_0)$ için (4.18)' in $\eta(t)$ çözümü

$$\|\eta(t)\| \leq K(\|\eta(t_0)\|)e^{-\lambda_0(t-t_0)}$$

ifadesini tüm $t \geq t_0$ 'lar için karşılar [5].

Bu sonuç dikey dinamiklerin kararlılaştırılmasını sonuçlandırır. Helikopter yönelim durumu $\rho = 0$ olacağı şekilde ve yeteri ölçüde istenene yakın tutulursa, (4.12) uyarlaması ile birlikte (4.7), (4.11), (4.13) denetleyicileri e_z dikey hatasını sonuşurlu olarak sıfıra yönlendirebilmektedir.



Şekil 4.2. Dikey Hata Denetleyicisi

4.3. Yanal ve Boylamsal Dinamiklerin Analizi

Buradaki amaç; bir önceki bölümde T_m ana itişine dair yapılan seçimden kaynaklanan yanal - boylamsal dinamikler için çıkarımları yapmaktır. Bu anlamda ilk olarak $gM_0 - u = gM_0 - u_{im} - u_{st}$ ifadesi

$$gM_0 - u = gM_0 - \hat{\Psi} \xi + k_2(\dot{e}_z + k_1 e_z)$$

şeklinde ayrıntılandırılır ve

$$\Psi_\zeta = (1 \quad \Psi_{2,\zeta})$$

şeklinde bir ayarlama yaparak ve x' in (4.14)' deki tanımıyla

$$\begin{aligned} gM_0 - u &= gM_0 - \Psi_\zeta \bar{\tau}(w, \mu, \zeta) - \bar{\Psi} \bar{\tau}(w, \mu, \zeta) - (\bar{\Psi} + \Psi_\zeta)(\chi + GM \dot{e}_z) \\ &\quad + k_2(\dot{e}_z + k_1 e_z) \\ &= gM_0 - c_u(w, \mu, \zeta) - \bar{\Psi} \bar{\tau}(w, \mu, \zeta) - (\bar{\Psi} + \Psi_\zeta)(\chi + GM \dot{e}_z) \\ &\quad + k_2(\dot{e}_z + k_1 e_z) \\ &= gM - M \ddot{r}(w) - y_z(z, w) \end{aligned}$$

ifadesini verir. Burada

$$(z, w) = \bar{\Psi} \bar{\tau}(w, \mu, \zeta) + (\bar{\Psi} + \Psi_\zeta)(\chi + GM \dot{e}_z) - k_2(\dot{e}_z + k_1 e_z) \quad (4.19)$$

olur. Tüm $w \in \mathbb{R}^{2N_1}$ ler için

$$y_z(0, w) = 0 \quad (4.20)$$

ifadesi kullanılır.

Bunu kullanarak ve (3.4), (3.8) ve $R(q)$ ile boylamsal dinamikler için,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_2 \\ M \dot{x}_2 &= -\bar{d}(q, t)q_2 + m(q, t)q_1q_3 + n_x(q)y_z(z, w) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ifade elde edilir. Burada

$$\bar{d}(q, t) = \frac{2(gM - M \ddot{r}(w(t)))q_0(t)}{1 - \text{sat}_c(2q_1^2(t) + 2q_2^2(t))} \quad (4.22)$$

ve

$$m(q,t) = \frac{2(gM - M \ddot{r}(w(t)))}{1 - sat_c(2q_1^2 + 2q_2^2)} \quad (4.23)$$

$$n_x(q) = \frac{2q_1q_3 + 2q_0q_2}{1 - sat_c(2q_1^2 + 2q_2^2)}$$

şeklinde olur.

Benzer şekilde yanal dinamikler de aşağıdaki formül

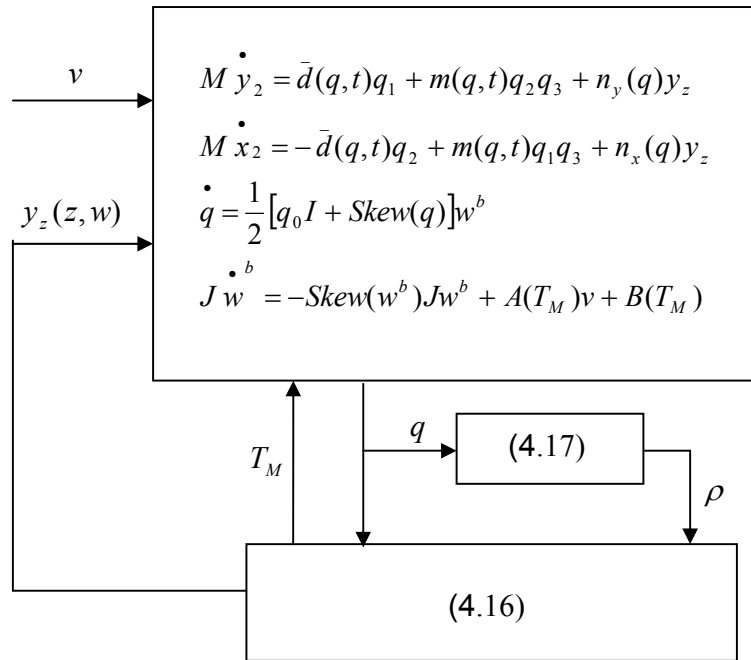
$$\dot{y} = y_2 \quad (4.24)$$

$$M \dot{y}_2 = -\bar{d}(q,t)q_1 + m(q,t)q_2q_3 + n_y(q)y_z(z,w)$$

ifadesine koyulabilir ki burada

$$n_y(q) = \frac{2q_2q_3 - 2q_0q_1}{1 - sat_c(2q_1^2 + 2q_2^2)} \quad (4.25)$$

şeklinde [4, 5].



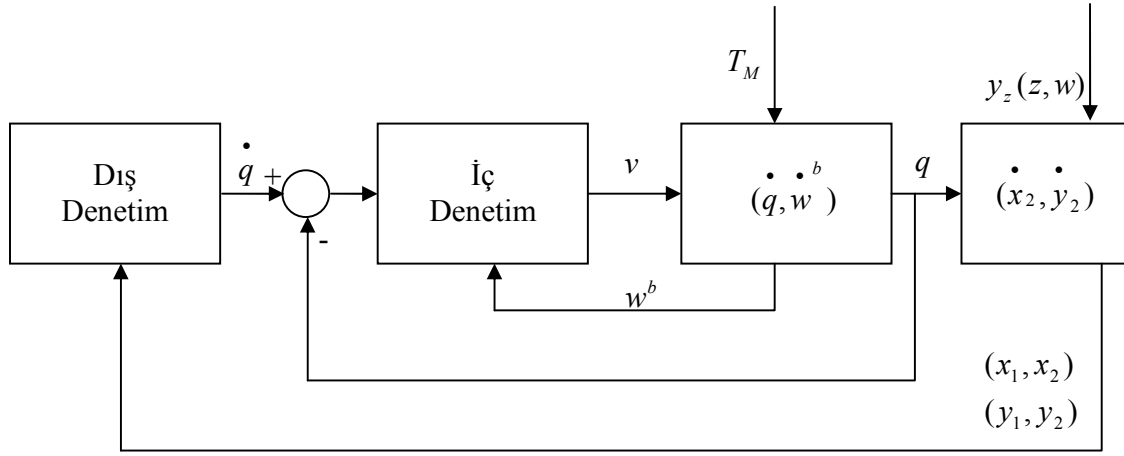
Şekil 4.3. Genel sistem dinamikleri.

$x - y$ dinamikleri, Şekil 4.3' deki gibi yönelim ve dikey dinamikler ile bağlantılı bir sistem gibi gösterilir. Bu şekilde dikey dinamiklerden $y_z(z, w)$ dışyapılı girişleri ve (q, q_0) yönelim değişkenleri ile denetlenen (x_1, x_2, y_1, y_2) durumları ile yanal - boylamsal dinamikler fark edilebilir. O zaman (q, w) durumları ile yönelim dinamikleri $v \in \mathbb{R}^3$ denetim girişi ile yönlendirilir.

4.4. Kararlılaştırıcının Yapısı

Genel sistemi kararlılaştıracak olan v denetim girişine dair tercih aşağıdaki değerlendirmelerle açıklanabilir. Buradaki fikir $x - y$ alt sisteminde y_z dışyapılı girişi ve q "sanal denetimi" ile birlikte bir sistem olarak bakmaktır. Bu, v denetim girişi ile q yönelim değişkeninin yeterli ölçüde küçük tutulması halinde, sonuçurlu olarak kaybolan bir işarettir. Bunun ışığında v denetim kuralı bir taraftan q' yu sonlu zamanda yeterli ölçüde küçük değerleri varsaymak için kullanılacak ve diğer taraftan da $x-y$ alt sistemini y_z girişi anlamında *girişten duruma sabit* kılmak için tasarlanacaktır. Bu görev yönelim dinamikleri için yüksek kazançlı bir denetim ile $x-y$ dinamikleri için iç içe bir doyma denetleyicisinin birleştirilmesi ile elde edilen kısmen doymuş bir denetim kuralı kullanılarak gerçekleştirilecektir.

Özellikle aynı zamanda denetlenen sistemde, (q, w) yönelim dinamiklerini hızlı ve yanal - boylamsal (x, y) dinamiklerini de yavaş dinamikler olarak düşünme fikri kullanılacaktır [5, 9]. Bu fikir (q, w) dinamikleri ile ilgili iç döngü, yanal ve boylamsal (x_2, y_2) dinamikleriyle ilgili olan dış döngü için bir servo döngüsü olarak hareket ettiği Şekil 4.4' de gösterilen ardışık denetim yapısını benimseyerek uygulanacaktır. Daha hızlı iç döngünün parametrelerini ayarlamanın amacı helikopterin ilk geçiş sırasında hiçbir zaman ters dönmemesini sağlamaktır.



Şekil 4.4. Kararlaştırıcıyı karakterize eden iç-dış döngü.

Bu anlamda ilk olarak $B(T_M)$ ' nin nominal kısmını, örneğin \bar{v} ' nin tanımlanacak ek bir denetim girişi olduğu

$$v = A_0(T_M)^{-1} \left[\bar{v} - B_0(T_M) \right] \quad (4.26)$$

gibi (3.9) – (3.10)' dan almak için olan bir ilk denetim kuralını gösterir. Bu τ_b için

$$\tau^b(\bar{v}) = L(T_M)\bar{v} + \Delta(T_M) \quad (4.27)$$

denklemini verir. Burada

$$L(T_M) = I + A_\Delta(T_M)A_0^{-1}(T_M)$$

$$\Delta(T_M) = B_\Delta(T_M) - A_\Delta(T_M)A_0^{-1}(T_M)B_0(T_M)$$

şeklinde olur. Denetim kuralı o zaman

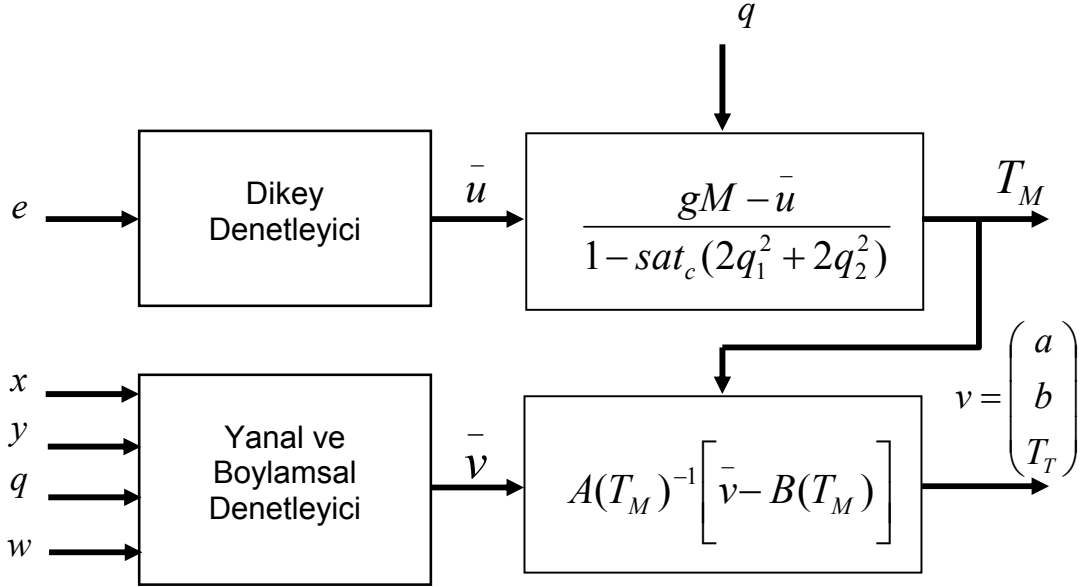
$$\bar{v} = K_p(\eta_1 - K_D w^b) \quad (4.28)$$

$$\eta_1 = q^* - q \quad (4.29)$$

olarak seçilir. Bu *bir orantı türev tipi denetleyici* olarak seçilir.

$K_p > 0$ ve $K_D > 0$ tasarım parametreleridir ve q^* seçilecek bir ek denetim girişidir. Bu açıdan bakarak Şekil 4.3' ün iç/dış döngüsü, η_1 iç döngü için izleme hatasını ve yönelim değişkeni q için de q^* dayanak işaretini ifade eden yanal - boylamsal dinamikler için sanal bir denetim girişi olarak yorumlanacaktır.

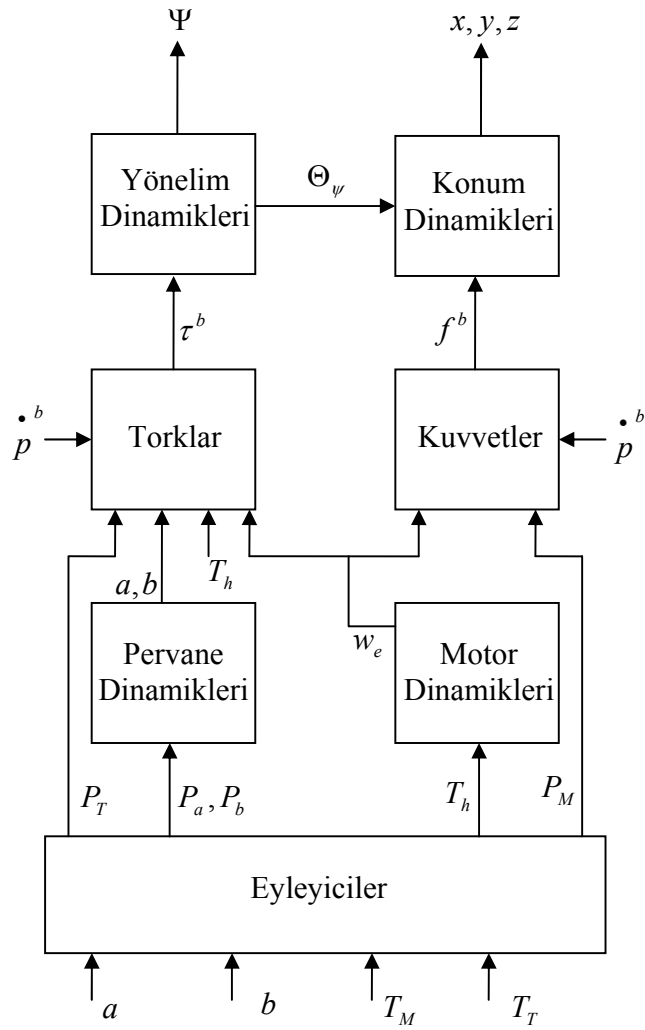
Elde edilen dikey hata denetleyicisi, yanal-boylamsal hata denetleyicisi ve denetlenen helikopter denetim girdileri (a , b , T_M , T_T) Şekil 4.5' de verilmiştir.



Şekil 4.5. Denetleyici Genel Görünümü

4.5. Benzetim Sonuçları

Özet olarak önceki bölümlerde tasarlanan denetleyici, T_M ana rotor itişini sağlayan dikey düzenleyici ve $v = \text{col}(a, b, T_T)$ giriş vektörünü sağlayan bir yönelim-yatay kararlaştırıcıdan oluşur. Bunlara ek olarak T_h vektörü ile pilotun helikoptere ne kadar güç uyguladığı simgelenir. Burada T_h değeri yeteri kadar küçük alınmıştır. Denetleyicide kullanılan helikopterin modeli Şekil 4.6' da gösterilmektedir.



Şekil 4.6. Helikopter modeli

Belirsiz model parametrelerine ve verilere (frekanslar, genlikler ve evreler) dair düzenli başlangıç koşulları kümeleri verilmesi halinde ve iniş güvertesinin dikey hareketlerini karakterize ederek istenen denetim amacına ulaşmak için tasarım parametrelerini ayarlamak mümkündür.

Bir helikopterin özel bir modeli ile ilgili olan benzetim sonuçları aşağıda incelenmektedir. Helikopter parametrelerinin nominal değerleri Çizelge 4.1' de verilmiştir [5]. Çizelge 4.1' de verilen parametrelerin kullanıldığı modelin matematiksel ifadeleri,

$$J \dot{w}^b = -Skew(w^b)Jw^b + \tau^b$$

$$\tau^b = \begin{bmatrix} \tau_{f1} \\ \tau_{f2} \\ \tau_{f3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_M \\ M_M + M_T \\ N_M \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. Bu ifadelerde verilen $\tau_{f1}, \tau_{f2}, \tau_{f3}$ ve R_M, M_M, N_M, M_T değişkenleri,

$$\tau_{f1} = T_M \sin b \cdot h_M - T_M \cos a \cos b \cdot y_M - T_T h_T$$

$$\tau_{f2} = T_M \sin a \cdot h_M - T_M \cos a \cos b \cdot l_M$$

$$\tau_{f3} = -T_M \sin b \cdot l_M + T_T l_T$$

ve

$$R_M = c_b^M b - (c_M^Q T_M^{1.5} + D_M^Q) \sin a$$

$$M_M = c_a^M a + (c_M^Q T_M^{1.5} + D_M^Q) \sin b$$

$$N_M = -(c_M^Q T_M^{1.5} + D_M^Q) \cos a \cos b$$

$$M_T = -c_T^Q T_T^{1.5} + D_T^Q$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Parametrik belirsizlikleri nominal değerlerin en fazla %20' si olarak varsayılır ve böylece $\Delta(T_M)$ ifadesi sıfır değildir. Güvertenin salınım hareketinin $q = (1, 1.5)$ parametreleri ve $w(0) = (3, 1, 2, 3)$ başlangıç koşulları ile tam olarak kararlı bir 4 boyutlu dışsistem ile üretildiği varsayılmaktadır. Önceki bölümlerde verilen tasarım prosedürlerini takip ederek, benzetimler doğrusal olmayan (3.5)-(3.6) eyleyici modeli ile gerçekleştirilirken, denetleyici (3.8) ve (3.9) denklemleri tarafından verilen eyleyicilerin basitleştirilmiş modelinin temelinde tasarlanmıştır. Modellenmemiş eyleyici bağlantıları ve parametrik belirsizliklerin varlığının $R(q) = I$ sabit yapılandırmasından farklı bir şekilde yönelim dinamikleri için bir sabit durum manifoldu üretme etkisine sahip oldukları vurgulanmalıdır. Aslında (3.5)'

den açık bir şekilde görülüyor ki zamanda değişen bir $R(q(t))$ dikey sabit durum hatasını dengelemek için gereklidir.

Dikey $h(t)$ eğilimi

$$h(t) = \begin{cases} 5 & , \quad t \in [0, 250) \\ 5te^{-0.05(t-250)} & , \quad t \geq 250 \end{cases}$$

olarak seçilmiştir.

Çizelge 4.1. Fiziksel sistemin nominal parametreleri

$$\begin{array}{lll} J_x = 0.142413 & J_y = 0.271256 & J_z = 0.271492 \\ l_M = -0.015 & y_M = 0 & h_M = 0.2943 \\ l_T = 0.8715 & h_T = 0.1154 & M = 4.9 \\ c_a^M = 0.004452 & D_M^Q = 0.6304 & c_M^Q = 25.23 \\ c_b^M = 0.005066 & D_T^Q = 0.008488 & c_T^Q = 25.23 \end{array}$$

Uyarlama yasası $t = 120s'$ de açık konuma getirilmiştir. Tasarlanan benzetimde, sırasıyla $q(0) = (0.98, 0.138, 0.138, 0)$ ve $(x(0), y(0), z(0)) = (10, 10, 10)$ metreleri ile verilen başlangıç yönelimi ve konumu ile araç başlangıçta hareketsiz olarak ifade edilmiştir. Şekil 4.7 $z(t) \rightarrow z^{ref}(t) + h(t)$ dikey hatasını göstermektedir. Başlangıçtaki zaman çerçevesinde dikey konum dışsisteminkiler ile iç modelin doğal frekansları arasındaki başlangıçtaki yanlış eşleşmeye bağlı olarak büyük bir sabit durum hatası vermektedir. Uyarlamayı açık konuma getirdikten sonra $h(t)$ dikey hatası hızlı bir şekilde, $t = 250s$ zamanından sonra sıfıra düşmektedir. Araç yönelimi, model belirsizliklerinin ve aynı zamanda sistemin altı serbestlik derecesini denetlemek için sadece dört girişe sahip olmasının bir sonucu olarak, $R = I'$ ya yaklaşmaz. Beklenildiği üzere yönelim dinamikleri hızlı bir şekilde sabit duruma (yaklaşık olarak $40s'$ de) yaklaşırken yanal ve boylamsal konum daha yavaş bir zaman ölçeğinde, şekil 4.8' de verildiği gibi, sıfıra getirilmiştir. Zaman ölçeğinin daha hızlı ve yavaş dinamiklere ayrımı yüksek kazançlı ve düşük genlikli denetleyicilerin bir kombinasyonunu temel alan denetim kurallarının ortak bir

özelliğidir. Sonuç olarak Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 sırasıyla T_M , T_T ve a, b şeklindeki dört denetim değişkenini göstermektedir.

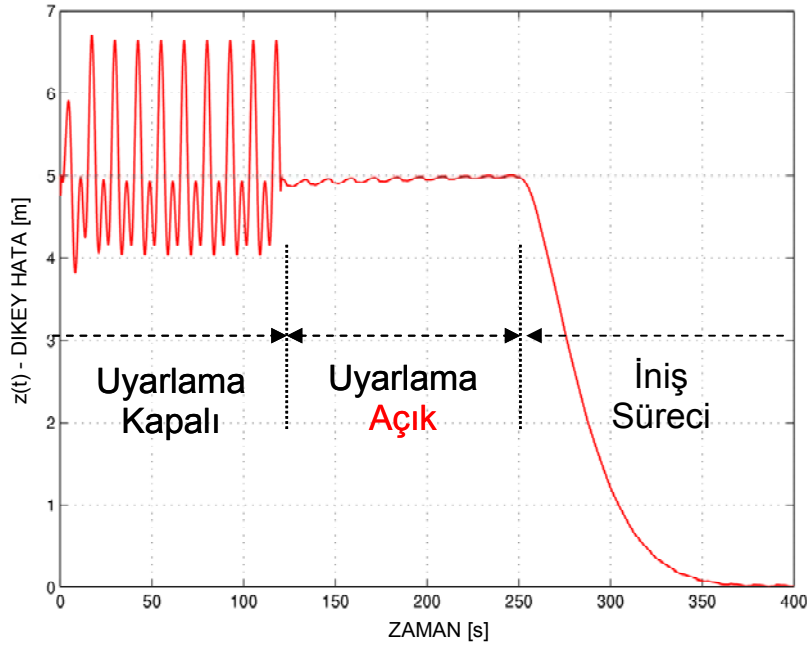
Şekil 4.7 – 4.10’ da yer alan sonuçlar, buraya kadar anlatılan probleme (bir helikopterin salınmakta olan gemi güvertisine olan inişi) dair benzetimleri yansıtmaktadır. Bunun yanında tasarlanan denetleyici, belirli olan bir yörünge üzerinde de denenmiştir. Bunun için takip edilmesi gereken dayanak yörünge,

$$r(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 16t - 2t^2, & t < 4 \\ 32, & 4 \leq t < 8 \\ 32 - \frac{8}{3}(t - 8), & t \geq 8 \end{array} \right\}$$

dir.

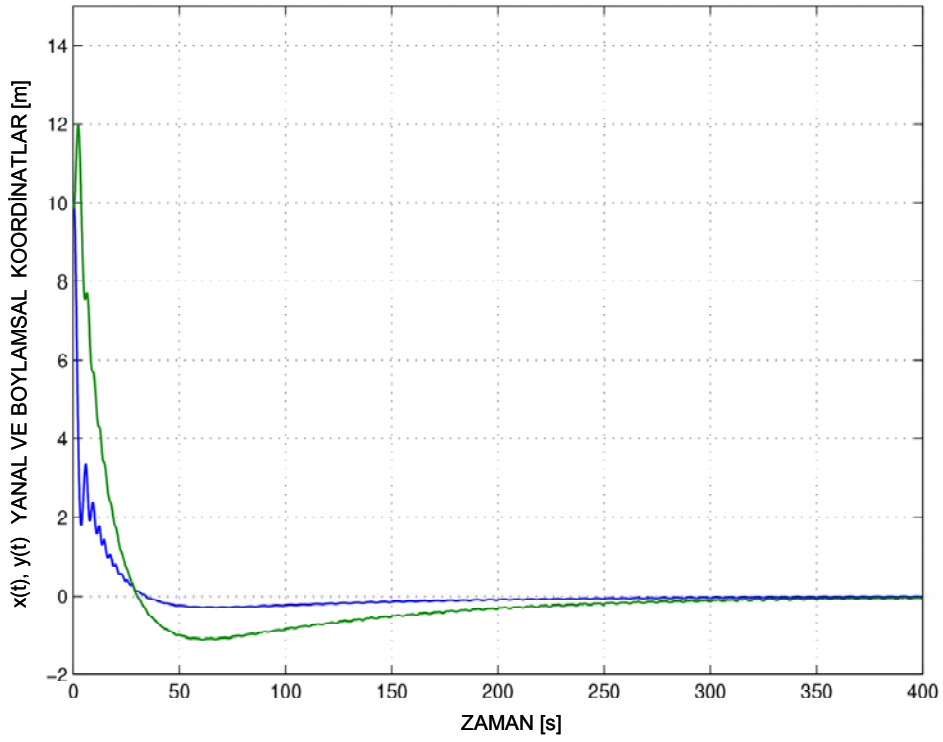
Şekil 4.11’ de izlenmesi gereken dayanak yörünge verilmiştir. Şekil 4.12’ de dayanak yörünge ve helikopterin takip ettiği yol birlikte verilmiştir. Şekil 4.13’ de X-Y-Z eksenlerindeki izlenen yörüngelerin iki boyutlu uzaydaki görünüşleri verilmiştir. Şekil 4.14’ de X-Y-Z eksenlerindeki izlenen ve dayanak yörüngeler birlikte verilmiştir ve Şekil 4.15’ de her üç yörüngede oluşan hata verilmiştir. Son olarak, Şekil 4.16’ da a ve b [rad] eğim açıları verilmiştir.

Şekil 4.7 $z(t) \rightarrow z^{\text{ref}}(t) + h(t)$ dikey hatasını göstermektedir. Tasarlanan denetleyicinin ve uyarlamanın istenen şekilde çalıştığını göstermek için; uyarlamanın kapalı ve açık olduğu durumlar ve helikopterin inişi gerçekleştirildiği zaman aralığı detaylı olarak gösterilmiştir. Uyarlama $t = 120\text{s}$ zamanında açılmaktadır. Bu zamana kadar helikopter, güvertenin dikey salınımını izlemediği, havada sabit durduğu için $z(t)$ büyük bir sabit durum hatası vermektedir. Uyarlamayı açık konuma getirdikten sonra, helikopter küçük bir hata ile güvertenin hareketini izleyebilmektedir. $t = 250\text{s}$ zamanından sonra ise helikopterin inişine izin verilmekte ve dikey hata hızlı bir şekilde sıfıra düşmektedir.



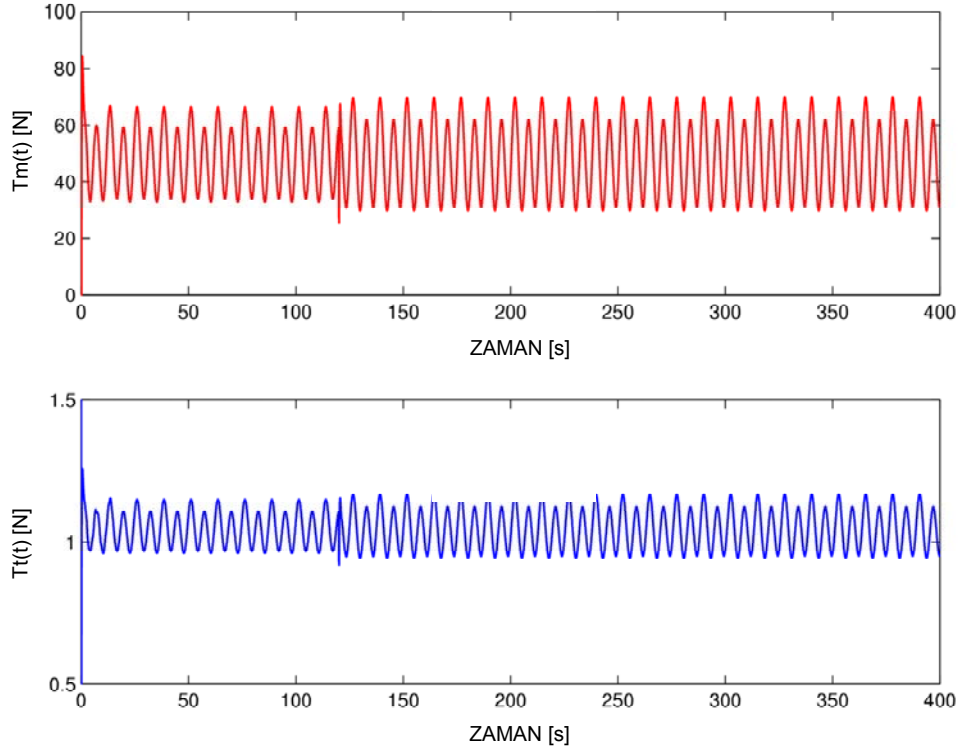
Şekil 4.7. $z(t) \rightarrow z^{\text{ref}}(t) + h(t)$ [m] Dikey Hata.

Şekil 4.8 ile helikopterin yanal ve boylamsal koordinatlardaki konumu verilmektedir. Helikopterin dikey inişi için kullanılan uyarlama açılmadan önce, x ve y konumları hızlı bir şekilde istenilen durumdaki senkronizasyonu sağlamaktadır. İstenilen hedef koordinatlara yumuşak ve hızlı bir şekilde yakınsamaktadır.



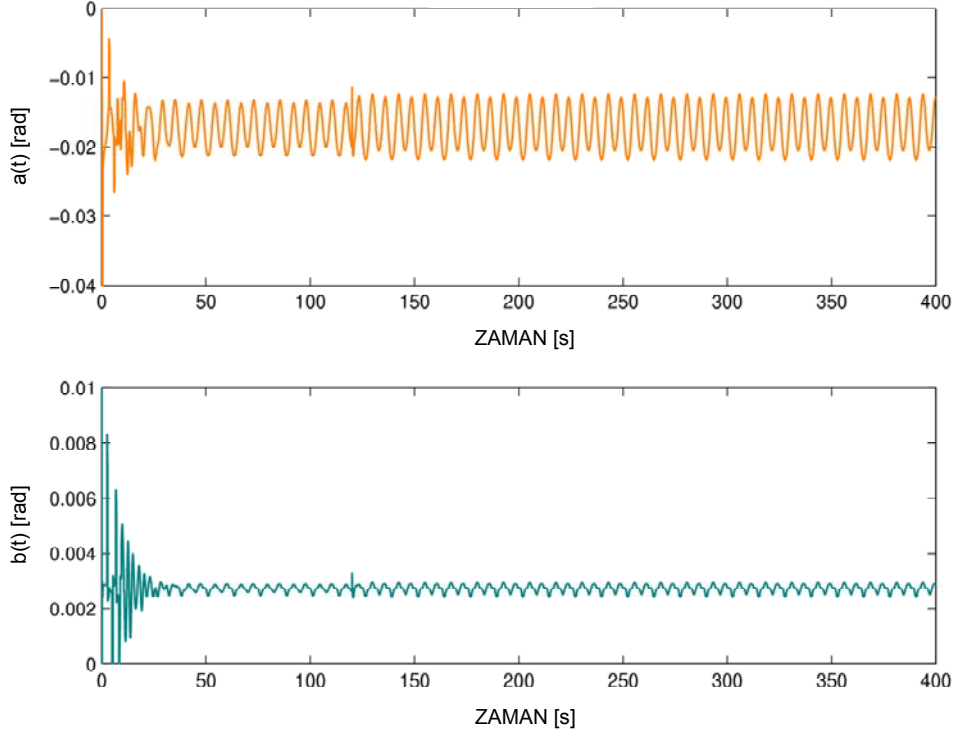
Şekil 4.8. $x(t)$, $y(t)$ [m] Yanal ve Boylamsal Koordinatlar. (Yeşil: $y(t)$, Mavi: $x(t)$)

Şekil 4.9, uyarılamanın açık ve kapalı olduğu durumlardaki ana ve kuyruk motorlarının ürettiği kuvveti göstermektedir. $t = 120s$ zamanına kadar olan sürede üretilen kuvvet, bu zamandan sonra üretilen kuvvetten daha küçüktür. Bu, helikopteri havada sabit tutabilmek için harcanan gücün, helikopteri güverte ile senkron bir şekilde indirmek için harcanan güçten daha az olduğunu göstermektedir. $t = 250 s'$ den sonra ise, helikopterin inişini gerçekleştirirken harcadığı kuvvette çok fazla bir değişim olmamaktadır.



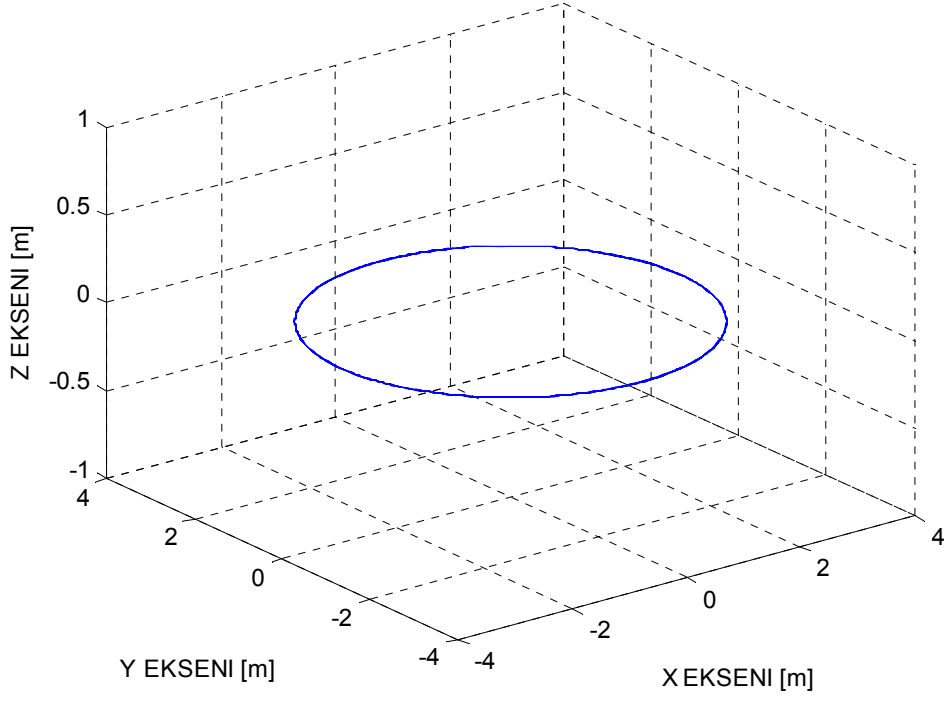
Şekil 4.9. $T_M(t)$, $T_T(t)$ [N] Ana ve Kuyruk Rotoru İtişleri.

Şekil 4.10 ile helikopterin a ve b açlarındaki değişim görülmektedir. Bu değişimin $t = 120s$ zamanından sonra daha fazla olduğu görülmektedir. Bununla birlikte salınımların genliğinin oldukça düşük olması ise önemli bir avantajdır.



Şekil 4.10. $a(t)$ ve $b(t)$ [rad] Eğim Açıları.

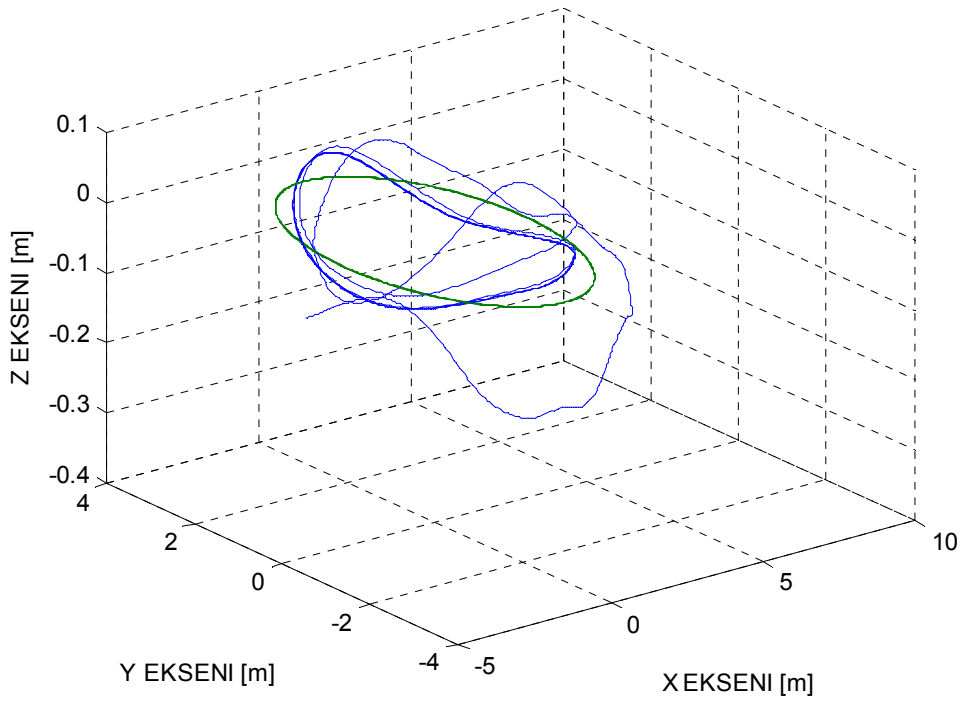
Şekil 4.11' de helikopterin izlemesi istenilen dayanak yörünge çizilmiştir. Bu dayanak yörünge x – y düzlemi üzerindedir.



Şekil 4.11. X-Y-Z [m] Dayanak Yörünge

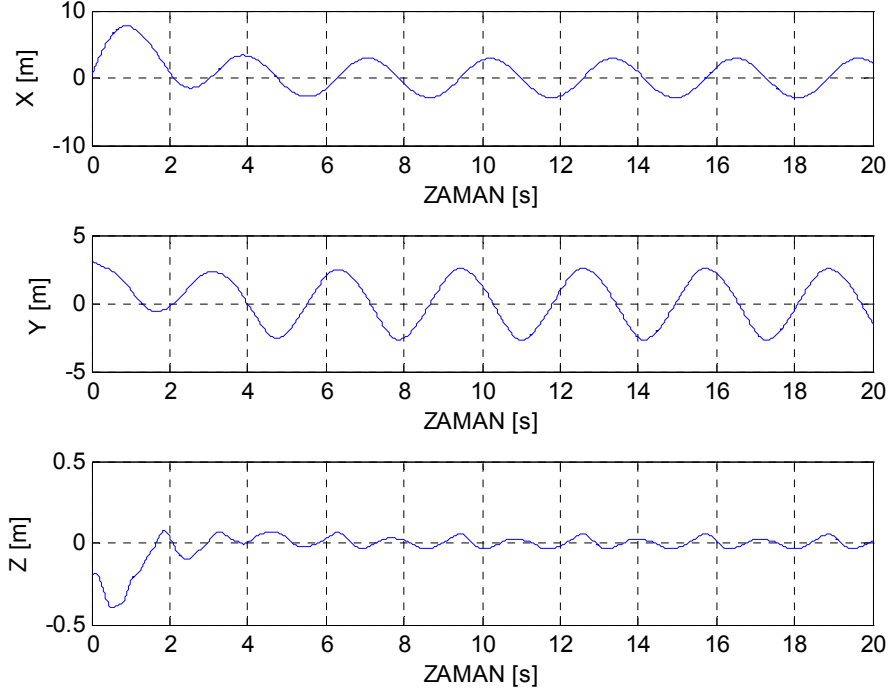
Şekil 4.12 ile helikopterin verilen dayanak yörüngeyi izlediği yol çizilmiştir. Burada görüldüğü üzere, dayanak yörünge büyük bir hata ile izlenebilmiştir.

(3.2) – (3.6) arasında verilen denklemlerde aerodinamik güçlerin momentleri hesaplamalara katılmıştır. Fakat aerodinamik kuvvetlerin $x - y$ düzlemindeki kuvvet bileşenleri sıfır alınmıştır. Bundan dolayı, helikopterin verilen bir $x - y$ dayanak yörüngesini izleyebilmesi, aşağıda görüldüğü gibi sorunlu olmaktadır.



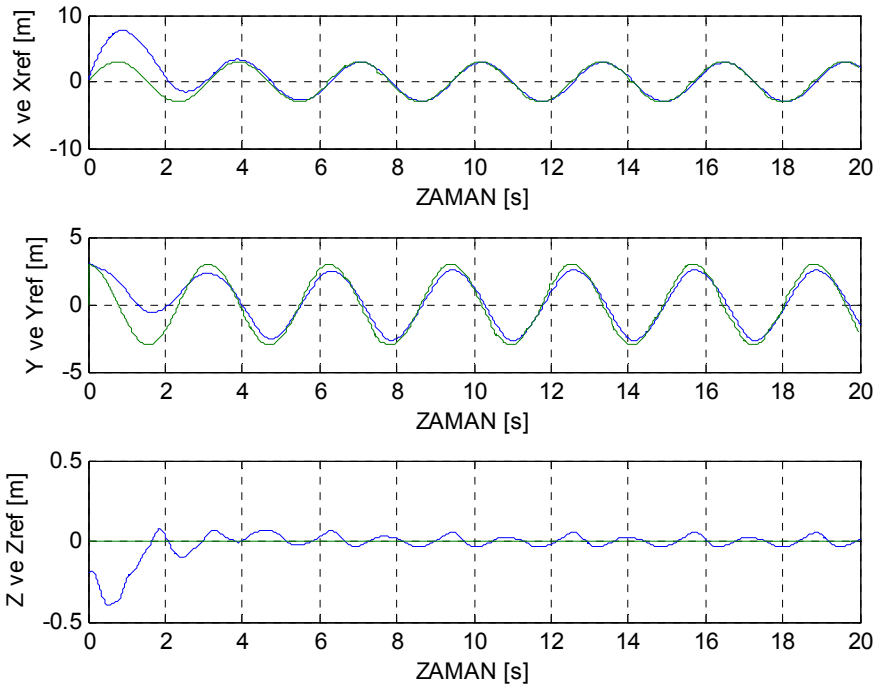
Şekil 4.12. X-Y-Z [m] Dayanak Yörünge'nin İzlenmesi. (Yeşil: Dayanak Yörünge, Mavi: İzlenen Yörünge)

Şekil 4.13, helikopterin izlediği yolu, her üç eksen için ayrı ayrı göstermektedir. Dikey eksendeki sıfıra yakınsama oldukça hızlı ve önemli bir sonuçtur.



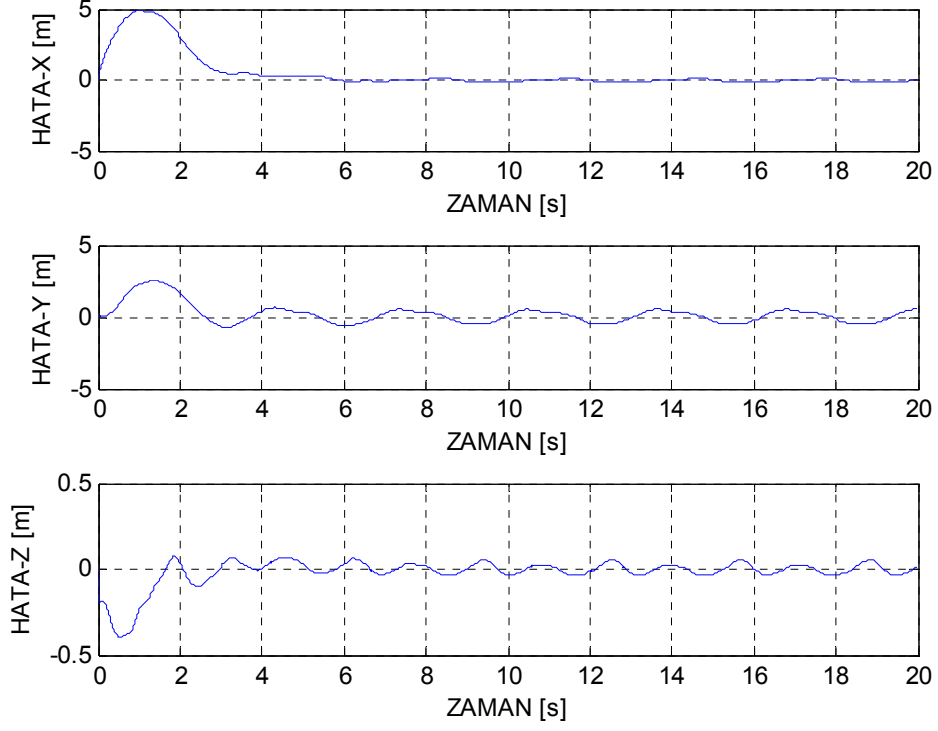
Şekil 4.13. X-Y-Z [m] İzlenen Yörüngeler.

Şekil 4.14 ile helikopterin izlediği yolun ve dayanak yörüngesinin, her üç eksendeki çizimi verilmektedir. x ve y eksenindeki hataların büyük olduğu, özellikle y eksenindeki hatanın 1m civarında olduğu görülmektedir. z eksenindeki hatanın ise 0.1 m' den az olduğu, yani tasarlanan denetleyicinin z -dikey eksen için başarılı olarak çalıştığını göstermektedir. Yine burda x ve y ekseninde aerodinamik kuvvet bileşenlerinin sıfır alınması etkili olmuştur.



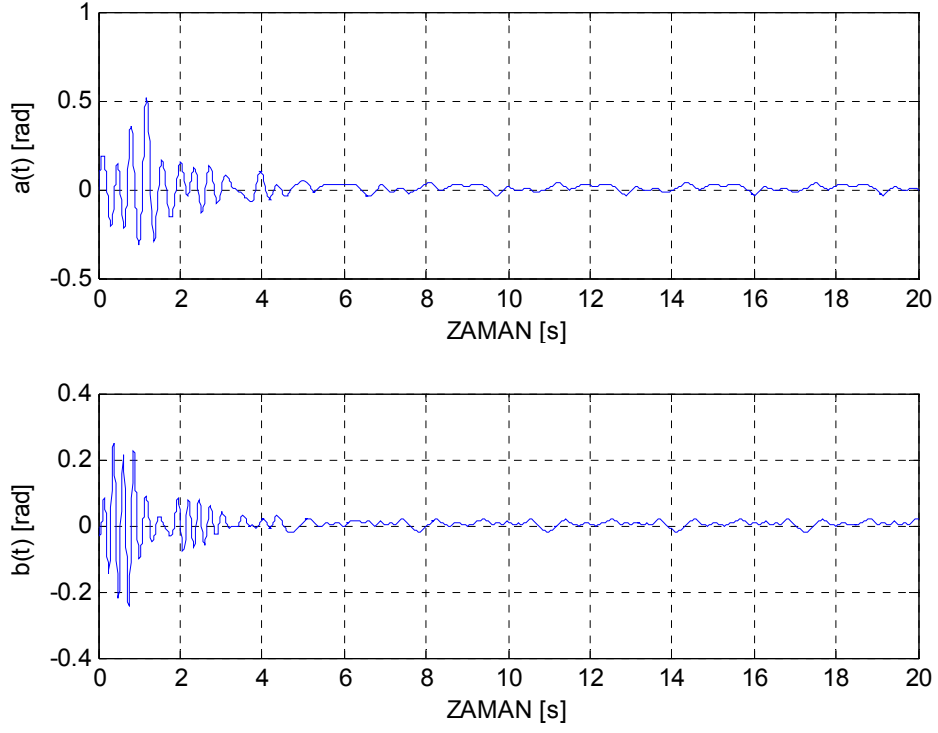
Şekil 4.14. X-Y-Z [m] İzlenilen ve Dayanak Yörüngeler. (Mavi: İzlenilen Yörüngeler, Yeşil: Dayanak Yörüngeler)

Şekil 4.15 ile helikopterin izlediği yörüngelerdeki hataları görülmektedir.



Şekil 4.15. X-Y-Z [m] İzlenen Yörüngelerdeki Hatalar

Şekil 4.16' da helikopterin verilen dayanak yörüngeyi izleyebilmesi için a ve b açılarındaki değişimi çizilmiştir. Genliklerin düşük olduğu gözlenmektedir.



Şekil 4.16. a ve b [rad] Eğim Açıları

5. SONUÇ

Helikopterin salınımlı dikey yörüngeyi izlemesi, iç model denetleyicisi ve bu denetleyiciyle paralel çalışan kararlılaştırıcı yardımıyla başarıyla sağlanmıştır. İç model denetleyici tasarımında dinamik durum geribeslemesi kullanılmıştır. Bu özellik denetleyici yapısına esneklik kazandırmıştır. Ayrıca iç model uyarlamalı yapıda olup, böylelikle bilinmeyen genlik, frekans ve evreye sahip sinüzoidal bozanetkenler reddedilmiştir.

Doğrusal olmayan açık döngü sistem modeli, dinamik denklemlerde yanal aerodinamik kuvvet bileşenlerinin sıfır alınması dışında yaygın olarak kullanılan bir modeldir. Bu bileşenlerin sıfır alınması ise denetim amacıyla uyumludur. Çünkü helikopter dalgalı bir denizdeki gemiye iniş yapacaktır. Bu nedenle izlemesi gereken yörünge de, tıpkı reddetmesi gereken yörünge gibi bilinmeyendir.

Doğrusal olmayan Uyarlanabilir İç Model denetleyici yapısı bu bilinmeyen yörüngelerin, gerek izlenmesinde gerek reddedilmesinde başarılı olmuştur. Bu sonuçlar benzetimlerle kanıtlanmıştır. Bütün hatalar hızla sifira yakınsaması önemli bir avantajdır. Yörüngeler yatay düzlemde ise hatanın arttığı gözlenmiştir. Bunun nedeni amaç ile uyumlu, yukarıda söz edilen modeldeki sadeleştirme değildir. Uyarlama açılır açılmaz, hızla denetleyici etkisini göstermektedir. Buna karşın en önemli avantajlarından birisi denetim genliğinin uyarlama açıldığında artmayıp, genel olarak düşük değerlerde kalmasıdır.

Doğrusal olmayan yapının korunması ya da doğrusallaştırma yapılmaması, önerilen denetleyici tasarımının gerçek dünyada başarılı olması için önemlidir. Ayrıca bu savı destekleyen ikinci önemli denetleyici özelliği ise dayanıklı yapıda olmasıdır. Büyük parametre değişikliklerine (Örneğin, kütleinin %10 değişmesi) ve bilinmeyen bozanetkenlere karşın, hataların yakınsama durumunun ve denetim genliğinin değişmemesi dayanıklılığı benzetimlerle kanıtlamıştır.

KAYNAKLAR LİSTESİ

- [1] Isidori A., Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, NewYork, 3rd Edition, 1995

- [2] Isidori A., Nonlinear Control Systems II, Springer-Verlag, NewYork, 1999

- [3] Isidori A., Marconi L. and Serrani A., Robust Nonlinear Motion Control of a Helicopter, IEEE Transaction on Automatic Control, 2003

- [4] Isidori A., Marconi L. and Serrani A., Autonomous Landing on an Oscillating Platform: An Internal-model Based Approach, Automatica, 2002

- [5] Isidori A., Marconi L. And Serrani A., Robust Autonomous Guidance: An Internal Model Approach, Springer-Verlag, London, 2003

- [6] Khalil H. K., Nonlinear Systems, Prentice Hall, New Jersey, 2nd Edition, 1996

- [7] Butt, N. R., U-Model Based Adaptive Internal Model Control for Tracking of Nonlinear Dynamic Plants, MS Thesis, King Fahd Univercity, Dhahran, 2005

- [8] Byrnes C. I., Isidori A., Marconi L., Praly L., Nonlinear Output Regulation Without Immersion, 44th IEEE Conference on Decision and Control, Spain, 2005

- [9] Bejar M., Isidori A., Marconi L., Naldi R., Robust / Vertical / Lateral / Longitudinal Control of helicopter with Constant Yaw-Attitude, 44th IEEE Conference on Decision and Control, Spain, 2005

- [10] McGregor N. K., Byrnes C. I., Isidori A., Results on Nonlinear Output Regulation for MIMO Systems, Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, 2006
- [11] McGregor N. K., Byrnes C. I., Isidori A., Results on Global Robust Output Regulation, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control Manchester Grand Hyatt Hotel San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006
- [12] Lozano R., Castillo P., Dzul A., Global Stabilization of the PVTOL: Real-time application to a mini-aircraft, Compiègne, France, 2005
- [13] Lorenzo M., Roberto N., Robust Full Degree-of-Freedom Tracking Control of a Helicopter, Thesis, CASY - Center for Research on Complex Automated Systems "G. Evangelisti", Department of Electronics, Computer and System Sciences (DEIS), University of Bologna, Italy, 2007
- [14] Oh S. R., Pathak K., Agrawal S. K., Pota H. R. and Garratt M., Approaches for a Tether-Guided Landing of an Autonomous Helicopter, IEEE Transactions on Robotics, 2006

EKLER LİSTESİ

Ek 1 Rotasyon Matrisi.....	111
Ek 2 Quaternions.....	116
Sözlük.....	121

Ek 1. Rotasyon Matrisi

E^3 üç boyutlu Öklid uzayındaki bir katı cismin yönelimi cisme sabitlenen bir koordinat çerçevesi ve bir eylemsiz dayanak sistemi arasındaki bağıl yönlendirme yoluyla ifade edilir. Bir F koordinat çerçevesi ile

$$F = \left\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$$

şeklinde, O ortak orijiniyle E^3 'te $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ karşılıklı dikgen birim vektörlerinin olduğu bir sağ el kümesi ifade edilir. $F_a = \left\{ O_a, \vec{i}_a, \vec{j}_a, \vec{k}_a \right\}$ ve $F_b = \left\{ O_b, \vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b \right\}$ koordinat

ekseni takımları arasındaki bağıl konum vektörü ve $\vec{P} = O_b - O_a$ 'nin E^3 'teki iki vektör arasındaki içsel çarpımı ifade ettiği

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} \vec{i}_b \cdot \vec{i}_a & \vec{j}_b \cdot \vec{i}_a & \vec{k}_b \cdot \vec{i}_a \\ \vec{i}_b \cdot \vec{j}_a & \vec{j}_b \cdot \vec{j}_a & \vec{k}_b \cdot \vec{j}_a \\ \vec{i}_b \cdot \vec{k}_a & \vec{j}_b \cdot \vec{k}_a & \vec{k}_b \cdot \vec{k}_a \end{pmatrix}$$

rotasyon matrisi aracılığıyla F_b 'nin F_a ile ilgili yönlendirmesi ile tanımlanır. R_{ab} rotasyon matrisinin $SO(3) \subset \mathfrak{R}^{3 \times 3}$

$$SO(3) = \left\{ R \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} : RR^T = I, \det R = 1 \right\}$$

şeklindeki özel dikgen grubunun bir elemanı olduğu kolay bir şekilde gösterilebilir. Rotasyon matrisi iki koordinat eksen takımının birim vektörleri arasındaki ilişkiyi

$$(\vec{i}_b \ \vec{j}_b \ \vec{k}_b) = (\vec{i}_a \ \vec{j}_a \ \vec{k}_a) R_{ab}$$

şeklinde tanımlar.

Bir $\vec{v} \in E^3$ genel vektörü hem F_a hem de F_b 'de

$$\vec{v} = v_1^a \vec{i}_a + v_2^a \vec{j}_a + v_3^a \vec{k}_a \quad \text{ve} \quad \vec{v} = v_1^b \vec{i}_b + v_2^b \vec{j}_b + v_3^b \vec{k}_b$$

şeklinde çözümlenirse R_{ab} rotasyon matrisi koordinat vektörleri arasında karşılık gelen rotasyonu tanımlar ve burada

$$v^a = \begin{pmatrix} v_1^a \\ v_2^a \\ v_3^a \end{pmatrix}, \quad v^b = \begin{pmatrix} v_1^b \\ v_2^b \\ v_3^b \end{pmatrix}$$

dır. Bu da

$$v^a = R_{ab}v^b$$

şeklindedir.

$SO(3)$ ' ün grup yapısı çoklu koordinat eksen takımları arasındaki ardışık rotasyonların rotasyon matrislerinin çarpılması yoluyla hesaplanmasına olanak sağlar. Örneğin, bir F_c çerçevesi R_{bc} ile ifade edilecek şekilde F_b ile ilgili bir yönlendirmesi olması ve F_b ' nin F_a ile ilgili olarak bir R_{ab} yönlendirmesine sahip olması durumunda o zaman F_a ile ilgili bağlı F_c yönlendirmesi basit bir şekilde $R_{ac} = R_{ab}R_{bc}$ olarak ifade edilir.

Katı cisim rotasyonlarına dair klasik Euler Teoremine göre F_a ile ilgili F_b yönlendirmesi, iki koordinat çerçevesinin ortak orijine sahip olduğunu varsayarak F_a ' yı F_b ' ye denk getiren sabit bir eksen hakkında bir rotasyon ile ifade edilebilir.

Söz konusu ifade aşağıdaki şekilde elde edilebilir. Herhangi bir $v \in \mathfrak{R}^3$ vektörünün verilmesi durumunda,

$$Skew(v) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

negatif simetrik matrisi ifade etmektedir ve herhangi bir $\theta \in [0, 2\pi)$ ve $\|\lambda\| = 1$ ile herhangi bir $\lambda \in \mathfrak{R}^3$ için

$$e^{Skew(\lambda)\theta} = I + Skew(\lambda)\theta + \frac{1}{2}[Skew(\lambda)]^2\theta^2 + \dots + \frac{1}{k}[Skew(\lambda)]^k\theta^k + \dots \quad (\text{Ek 1.1})$$

3 x 3 matrisi değerlendirmeye alınır.

Bu şekilde tanımlanan matrisin rotasyon matrisi gibi $SO(3)$ ' ün bir elemanı olduğunu kontrol etmek kolaydır. Bunun tersine aynı zamanda herhangi bir

$R \in SO(3)$ rotasyon matrisinin verilmesi halinde $\theta \in [0, 2\pi)$ reel sayısının ve birim büyüklüğünün bir $\lambda \in \mathfrak{R}^3$ vektörünün olduğunu,

$$R = e^{Skew(\lambda)\theta}$$

şeklinde göstermek de mümkündür. Bu durumun kanıtı (Ek 1.2) matrisini

$$e^{Skew(\lambda)\theta} = I + \sin(\theta)Skew(\lambda) + (1 - \cos(\theta))[Skew(\lambda)]^2 \quad (\text{Ek 1.2})$$

kapalı ifadesi ile ifade eden ve *Rodrigues' in formülü* olarak bilinen bu formülün kolay bir sonucudur.

Bu şekilde $SO(3)$ ' teki herhangi bir rotasyon matrisi bir θ açısı ve birim büyüklüğünün bir λ vektöründen oluşan bir çift ile tanımlanabilir. Rotasyonları ifade etmeye dair bu yöntem genelde açı-eksen parametreleştirme olarak bilinir. Örneğin, $R = I$ ' nın λ ' dan bağımsız olduğu şekilde, $\theta \neq 0$ iken aynı R değerinin (θ, λ) ve $(2\pi - \theta, -\lambda)$ şeklindeki iki ayrı çift için elde edildiği durumda $\theta = 0$ olup olmadığı kolay bir şekilde kontrol edilir.

F_b çerçevesinin F_a ile ilgili olan yönlendirmesi zamanla değişirse, F_b ' nin F_a ile ilgili yönlendirmesini ifade eden, R_{ab} matrisinin girişleri zaman işlevleri haline gelir.

$R_{ab}^T(t) \dot{R}_{ab}(t)$ ve $\dot{R}_{ab}(t)R_{ab}^T(t)$ 3 x 3 matrislerinin negatif simetrik matrisler olup olmadığını kontrol etmek kolaydır. Böylece,

$$\begin{aligned} R_{ab}^T(t) \dot{R}_{ab}(t) &= Skew(w_{ab}^b(t)) \\ \dot{R}_{ab}(t)R_{ab}^T(t) &= Skew(w_{ab}^a(t)) \end{aligned}$$

ifadeyi sağlayacak şekilde zamandan bağımsız $w_{ab}^b(t)$ ve $w_{ab}^a(t)$ vektörleri ortaya çıkar. Örneğin $R_{ab}(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ab} &= R_{ab}Skew(w_{ab}^b) \\ \dot{R}_{ab} &= Skew(w_{ab}^a)R_{ab} \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.3})$$

türevsel denklemlerden bir tanesinin bir çözümüdür. w_{ab}^a ve w_{ab}^b girişleri F_b ' nin F_a ile ilgili açısal hız vektörünün sırasıyla F_a ve F_b ' de çözülen koordinatlarıdır.

Bunun tersine, herhangi bir R rotasyon matrisinin verilmesi durumunda $R_{ab}(0) = R$ durumunu karşılayan (Ek 1.3)'lerden herhangi bir $R_{ab}(t)$ çözümünün herhangi bir $t \in \mathfrak{R}$ için rotasyon matrisi olduğu gösterilebilir. Açısal hız vektörünün sabit olduğu özel durumda (Ek 1.3) çözümü basit bir kapalı ifade ile verilebilir. Herhangi bir $w \in \mathfrak{R}^3$ vektörü alınır,

$$\lambda_w = \frac{w}{\|w\|}$$

şeklinde bir ayarlama yapılır ve

$$R(t) = e^{Skew(\lambda_w)\|w\|t}$$

matrisi değerlendirmeye alınırsa;

(Ek 1.2) formülünü kullanarak

$$\dot{R}(t) = \|w\|[\cos(\|w\|t)Skew(\lambda_w) + \sin(\|w\|t)[Skew(\lambda_w)]^2]$$

şeklinde olduğu görülür ki bu da

$$Skew(v) = -[Skew(v)]^3$$

özelliğini kullanarak

$$\dot{R}(t) = Skew(w)R(t) = R(t)[Skew(w)] \quad (\text{Ek 1.4})$$

ifadesini sağlar.

$w_{ab}^a = R_{ab} w_{ab}^b$ olduğu bilinerek ve bir rotasyon matrisinin norm içerisinde doğrusal rotasyonu tanımladığı

$$\|w_{ab}\| = \|w_{ab}^a\| = \|w_{ab}^b\|$$

ve

$$\lambda^a = \frac{w_{ab}^a}{\|w_{ab}\|} \quad \lambda^b = \frac{w_{ab}^b}{\|w_{ab}\|}$$

şeklinde bir ayarlama yapılırsa; o zaman (Ek 1.4) bağıntısı gösterir ki; F_a ile ilgili F_b açısal hızının sabit olması halinde (Ek 1.3) denklemlerinin (tek) çözümünün

$$\begin{aligned}
R_{ab}(t) &= e^{Skew(w_{ab}^a)t} R_{ab}(0) \\
&= [I + \sin(\|w_{ab}\|t)Skew(\lambda^a) + (1 - \cos(\|w_{ab}\|t))[Skew(\lambda^a)]^2] R_{ab}(0)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
R_{ab}(t) &= R_{ab}(0)e^{Skew(w_{ab}^b)t} \\
&= R_{ab}(0)[I + \sin(\|w_{ab}\|t)Skew(\lambda^b) + (1 - \cos(\|w_{ab}\|t))[Skew(\lambda^b)]^2]
\end{aligned}$$

ifadesinin verilebileceğini gösterir.

Ek 2. Quaternions

Rotasyon matrisini koordinat eksen takımları arasındaki bağlantılı yönlendirmesini ifade etmek için kullanmak gereksizdir. Çünkü $SO(3)$, $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$ ün 3 boyutlu bir alt-manifoldudur. Diğer taraftan, (Euler açıları veya Rodrigues parametreleri gibi reel sayıların bir üçlüsü ile $SO(3)$ ' ün noktalarını parametreleştiren) rotasyonlar gurubunun herhangi bir minimal parametreleştirilmesi yanında yukarıda tanımlanan açı-eksen parametreleştirilmesi de aykırılıklar içerir ve bazen yönlendirilmeye de elverişsizdir. Rotasyonları parametreleştirmenin, bir yolu da *birim quaternions* sunulmuştur. Bir birim quaternion,

$$\sum_{i=0}^3 q_i^2 = 1$$

birim norm kısıtını karşılayan reel sayıların bir quaternionudur. (q_0, q_1, q_2, q_3). Bu şekildeki tüm quaternionlar kümesi aslında, birim yarıçapının küresinin \mathfrak{R}^4 te orijinde merkezlendiği

$$S_4 = \{x \in \mathfrak{R}^4 : \|x\| = 1\}$$

ifadesi ile tanımlanabilir. Rotasyonları ifade etmek bağlamında bir birim quaternion genelde q_0 ' in skaler bölüm olarak adlandırıldığı

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$$

ifadesi ile yazılırken

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

vektörü bölümü olarak adlandırılır.

Herhangi bir q birim quaternionu için

$$R(q) = \begin{pmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{Ek 2.1})$$

şeklindeki 3 x 3 matrisinin $R^T(q)R(q) = I$ ve $\det(R(q)) = 1$ ifadelerini karşıladığını kontrol etmek kolaydır. Yani $R(q)$ rotasyon matrisi gibi $SO(3)$ ' ün bir elemanıdır. Bunun tersine herhangi bir $R \in SO(3)$ rotasyon matrisinin verilmesi durumunda

$$R = R(q) \quad (\text{Ek 2.2})$$

ifadesini sağlayacak bir q birim quaternionu mevcut olur. Bunun ispatı için R ,

$$R(q) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. R ' nin izi $\text{tr}(R)$, $-1 \leq \text{tr}(R) \leq 3$ aralığındadır ve

$$\det(\lambda I - R) = \lambda^3 - \text{tr}(R)\lambda^2 + \text{tr}(R)\lambda - 1$$

şeklinde karakteristik denklemi vardır. Buradan q_0 ,

$$\begin{aligned} r_{11} + r_{22} + r_{33} &= 3 - 4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = -1 + 4q_0^2 \\ q_0^2 &= \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}{4} = \frac{\text{tr}(R) + 1}{4} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Diğer quaternion'ları bulmak için, eğer $\text{tr}(R) \neq -1$ ve $|q_0| \leq 1$ ise

$$\begin{aligned} r_{21} + r_{12} &= 4q_0q_3 \\ r_{13} + r_{31} &= 4q_0q_2 \\ r_{32} + r_{23} &= 4q_0q_1 \end{aligned}$$

denklemleri kullanılır.

Eğer $\text{tr}(R) = -1$ ise,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve q vektörleri,

$$q = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve bu $R(q) = R(-q)$ olduğunu gösterir.

Açı/eksen çiftlerini kullanarak gerçekleştirilen parametreleştirmeler ve quaternion kullananlar arasında basit bir bağıntı vardır. Aslında, herhangi bir $\theta \in [0, \pi)$ açısı ve

$$q(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \lambda \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

birim quaternionu birim büyüklüğünün herhangi bir $\lambda \in \mathfrak{R}^3$ vektörünü ilişkilendiren eşleme değerlendirmeye alınır; o zaman basit bir hesaplama $e^{Skew(\lambda)\theta}$ eşlemesinin, $R(q)$ eşlemesinin ve $q(\theta, \lambda)$ eşlemesinin

$$e^{Skew(\lambda)\theta} = R(q(\theta, \lambda))$$

ifadesini karşıladığını gösterir.

Diğer taraftan, $R(q)$ eşlemesinin, $q(\theta, \lambda)$ eşlemesi ile quaternion parametreleştirmesini karakterize eden oluşumu açı/eksen parametreleştirmesini tanımlayan bir üstel eşlemeyi sağlar. Üstel eşlemenin aykırılıkları $q(\theta, \lambda)$ eşlemesinin aykırılıklarında yansıtılır. Örneğin, λ değeri ile ilişkisi olmaksızın $q(0, \lambda)$ her zaman için aynı değerdedir.

Rotasyon matrislerinin quaternion ifadelerinin en ilişkili özelliklerinden bir tanesi

$$\dot{R} = RSkew(w), \quad R(0) = \bar{R} \in SO(3) \quad (\text{Ek 2.3})$$

türevsel denkleminin çözümünü birim quaternion kümesinde tanımlanan ilişkili bir türevsel denkleminin çözümü şeklinde ifade etme olanağıdır. Bu ifadeyi elde etmek için *quaternion yayılma kuralı* olarak bilinen

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q * \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{Ek 2.4})$$

türevsel denklemi değerlendirmeye alınır.

\mathbb{R}^4 teki orijinde merkezlenen ve birim yarıçapının küresi olan S^4 ün bu denklem için değişimsiz bir küme olduğunu kontrol etmek kolay bir şekilde gerçekleştirilebilir. Aslında

$$\varphi(q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1 = 0$$

denklemleri ile tanımlanan S^4 kümesi herhangi bir noktasında

$$T_q S_4 = \ker \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) = \ker (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)$$

şeklindeki bir tanjant uzayına sahip olacaktır ve (Ek 2.4)' ün sağ el tarafındaki vektör alanı

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 w_1 - q_2 w_2 - q_3 w_3 \\ q_0 w_1 - q_3 w_2 + q_2 w_3 \\ q_3 w_1 + q_0 w_2 - q_1 w_3 \\ -q_2 w_1 + q_1 w_2 + q_0 w_3 \end{pmatrix}$$

ve aslında S^4 ' ün herhangi bir noktasında $T_q S_4$ ' ün bir elemanı olacaktır. Bu şekilde $q(0)$ ' in bir birim quaternion olması durumunda (Ek 2.4)' ün $q(t)$ çözümü tüm $t \in \mathfrak{R}$ ' ler için bir birim quaternionudur.

(Ek 2.3) türevsel denkleminin verildiği ve q' nun

$$R(q) = \bar{R}$$

ifadesini karıştıran iki quaternion seçeneğinden herhangi biri olduğu varsayılır.

$q(t)$ ' nin (Ek 2.4)' ün $q(0) = q$ ifadesini karşılayan çözümü olarak alınırsa; o zaman

$$R(t) = R(q(t))$$

rotasyon matrisinin

$$\frac{dR(t)}{dt} = R(t) \text{Skew}(w) \quad (\text{Ek 2.5})$$

ifadesini, $R(t)$ ' nin (Ek 2.3)' ün tek çözümü olduğu gibi karşıladığını gösterecektir.

(Ek 2.4) denkleminin

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = 2q^t * \dot{q}$$

ters bağıntısı ile ifade edilmektedir.

Quaternion dağılım kuralının diğer bir kısa ifadesi

$$\dot{q} = \frac{1}{2} E(q)w \quad (\text{Ek 2.6})$$

ile ve $E(q)$ ' nun

$$E(q) = \begin{pmatrix} -q^T \\ q_0 I + Skew(q) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlandığı

$$w = 2E^T(q)\dot{q}$$

tersiyle verilir.

Not olarak, $E^T(q)E(q) = I$ ve $\|E(q)\| = 1$ şeklindedir. (Ek 2.6) quaternion yayılım kuralı alternatif bir şekilde

$$\dot{q} = \frac{1}{2}D(w)q \quad (\text{Ek 2.7})$$

bağıntısı ile de ifade edilir

Burada

$$D(w) = \begin{pmatrix} 0 & -w^T \\ w & -Skew(w) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Açısal hız sabit ise (Ek 2.7) denklemini doğrusal bir özerk sistemin denklemidir. Bu durumda $D(w)$ matrisi sanal eksen üzerinde tekrarlanan basit özdeğerlere sahiptir ve $D(w)$ ' nin minimal polinom derecesi

$$p_D(s) = s^2 + \|w\|^2$$

şeklindedir.

SÖZLÜK

Actuator	:Eyleyici
Adaptive Control	:Uyarlamalı Denetim
Affine	:İlgin
Altitude	:Yükseklik
Amplitude	:Genlik
Angular Velocity	:Açısal Hız
Asymptotic Tracking	:Sonuçurlu İzleme
Attitude	:Duruş
Helicopter Rigid Body	:Helikopter Gövdesi
Bounded	:Sınırlı
Compact	:Tıkız
Composite	:Bileşik
Control	:Denetim
Degree of Freedom	:Serbestlik Derecesi
Detectable	:Sezilebilir
Diagonal	:Köşegen
Disturbance	:Boznetken
Error	:Hata
Exosystem	:Dışsistem
External	:Dışsal
Function	:İşlev
Feedback	:Geribesleme
Global	:Küresel
Inertial Coordinate	:Eylemsizlik Koordinatları
Input	:Giriş
Internal	:İç
Inversion	:Evirme
Lateral	:Yanal
Lemma	:Ön Kuram

Longitudinal	:Boylamsal
Manipulation	:Çıkarım
Mapping	:Eşleme
Nested	:İççe
Notation	:Biçim
Output	:Çıkış
Phase	:Evre
Plant	:Fiziksel Sistem
Polynomial	:Çokterimli
Roll Angle	:Yuvarlanma Açısı
Pitch Angle	:Yunuslama Açısı
Probable	:Olası
Procedure	:Adım
Real	:Gerçek
Recursive	:Özyineli
Reference	:Dayanak
Robustness	:Dayanıklılık
Rotation	:Rotasyon
Smooth	:Düzgün
Stabilization	:Kararlılık
Steady State	:Kalıcı Durum
Tail	:Kuyruk
Tilt	:Eğim
Translational Velocity	:Dönme Hızı
Unique	:Tek
Variation	:Değişim
Wrench	:Burkulma
Yaw Angle	:Yanca Açısı