T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK DENKLEMLERİN ZAMAN SKALASINDA SALINIMI

ASİYE ACAR

Ağustos 2010

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK DENKLEMLERİN ZAMAN SKALASINDA SALINIMI

ASİYE ACAR

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Ağustos 2010

ÖZET

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK DENKLEMLERİN ZAMAN SKALASINDA SALINIMI

ACAR, Asiye
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Ağustos 2010, 49 sayfa

Bu tezde

$$\left(r(t)\left(\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+f\left(t,y(t-\delta)\right)=0$$

ikinci mertebeden lineer olmayan denklemin zaman skalasında salınım yapması için yeterli şartları veren teoremler incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Salınım, İkinci mertebeden nötral lineer olmayan dinamik denklemler, Zaman skalası

SUMMARY

OSCILLATION OF SECOND-ORDER NONLINEAR DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALE

ACAR, Asiye

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Associate Professor Dr. Tuncay CANDAN

August 2010, 49 pages

In this thesis, it is investigated some theorems which gives sufficient conditions for oscillations of second order nonlinear equation of the form

$$\left(r(t)\left(\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+f\left(t,y(t-\delta)\right)=0.$$

on a time scale $\mathbb{T}$.

Keywords: Oscillation, Second-order neutral nonlinear dynamic equations, Time scales

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca araştırmalarımın her aşamasında ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren Sayın Doç. Dr. Tuncay Candan'a, çalışmalarıma katkıda bulunan tüm arkadaşlarıma ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Asiye Acar

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu tezde, son yıllarda ortaya çıkan zaman skalası kavramı, zaman skalasına uyarlanan bazı konuların teorem ve ispatları, bu teoremlerin bazı özel örneklere uygulanışı verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde zaman skalasının tanımı, reel ve tamsayılar kümelerindeki karşılıkları konuları üzerinde duruldu. Zaman skalası üzerinde türevin, integralin tanımı ve özellikleri, bazı problemlere uygulaması örneklerle desteklendi.

Tezin üçüncü bölümünde S.H. Saker [1] zaman skalası üzerinde ikinci mertebeden lineer olmayan nötral gecikmeli dinamik denklemlerin salınımı adlı makalesi ve Ravi P. Agarwal ve ark. larının [2] ikinci mertebeden lineer olmayan nötral gecikmeli dinamik denklemler için salınım kriterleri adlı makalesi incelenmiştir. Bu konuyla ilgili teoremler ve ispatları, bu teoremlerin bazı örneklere uygulanışı verilmiştir. Bu bölümde kullanılan ispat teknikleri Riccati dönüşümü ve Philos-Type tekniğidir.

BÖLÜM II

ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Zaman Skalası

Zaman skalası reel sayıların keyfi boş olmayan kapalı bir alt kümesidir. Öyleyse

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$

yani reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar, negatif olmayan tam sayılar, $[0,1] \cup [2,3]$ $[0,1] \cup \mathbb{N}$ ve Cantor kümesi zaman skalasına birer örnektir. Fakat

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$$

yani, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar ve $(0,1)$ açık aralığı zaman skalası değildir. Zaman skalasının genelde kullanılan sembol $\mathbb{T}$ ile gösterilir.
Zaman skalası teorisi Stefan Hilger $[3]$ tarafından fark ve sürekli analizlerin birleştirilmesi amacıyla kuruldu. T de tanımlı f fonksiyonu için delta türevini f^{Δ} ile gösterilir. Burada

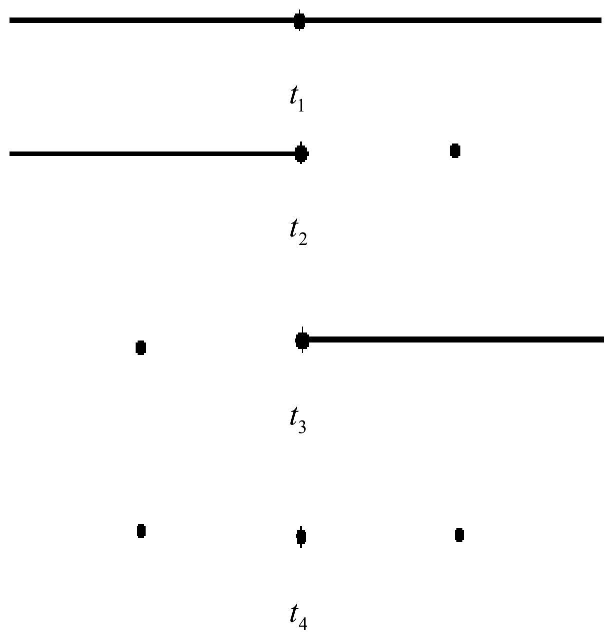
(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $f^{\Delta} = f'$ bilinen türevdir.
(ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $f^{\Delta} = \Delta$ ileri fark operatörüdür.

Tanım 2.1.1 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ şeklinde,
geri sıçrama operatörünün tanımı ise $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ olmak üzere
$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanımda $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ (yani eğer $\mathbb{T}$ nin maksimumu t ise $\sigma(t) = t$) ve $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$ (yani eğer $\mathbb{T}$ nin minimumu t ise $\rho(t) = t$) burada $\varnothing$ boş kümedir. Eğer $\sigma(t) > t$ ise sağda saçılımlı, eğer $\rho(t) < t$ ise solda saçılımlı olarak adlandırılır. Nokta hem sağda saçılımlı ve solda saçılımlı ise bu nokta izole nokta olarak adlandırılır.

Çizelge 2.1 Noktaların sınıflandırılması

t sağda saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağda yoğun	$t = \sigma(t)$
t solda saçılımlı	$\rho(t) < t$
t solda yoğun	$\rho(t) = t$
t izole edilmiş	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



t_1 sağda yoğun ve solda yoğun

t_2 sağdan saçılımlı ve solda yoğun

t_3 soldan saçılımlı ve sağda yoğun

t_4 soldan saçılımlı ve sağdan saçılımlı

(t_1 yoğundur ve t_4 izole noktadır)

Şekil 2.1 Noktaların sınıflandırılması

Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağda yoğundur, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise solda yoğun denir. Nokta aynı zamanda sağda yoğun ve solda yoğun ise yoğun olarak adlandırılır.

Sonuç olarak, $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ graininess fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

şeklinde tanımlanır.

Dikkat edilecek olursa $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ $\mathbb{T}$ de dir, çünkü $\mathbb{T}$, R nin kapalı bir alt kümesidir. $\mathbb{T}$ zaman skalasından yararlanarak bir $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi: eğer $\mathbb{T}$ solda saçılımlı bir maksimum m ye sahipse, $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{m\}$, aksi takdirde; $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ şeklinde oluşturulur.

Özetle,

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash [\rho(\sup\mathbb{T}), \sup\mathbb{T}], & \text{eğer } \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \quad \text{eğer } \sup\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

Sonuç olarak, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise, $f^{\sigma} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $t \in \mathbb{T}$ için $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ şeklindedir $[4,5]$.

Örnek 2.1.1

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t,\infty) = t$$

ve benzer şekilde $\rho(t) = t$ olur. Buradan her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Graininess fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \equiv 0$ eşitliğine dönüşür.

(ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise herhangi bir $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1$$

ve benzer şekilde $\rho(t) = t-1$. Buradan her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır. Graininess fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \equiv 1$ bulunur $[4,5]$.

Yukarıdaki her iki durum için graininess fonksiyon sabit bir fonksiyondur. Zaman skalasında graininess fonksiyonunun merkezi bir rol oynadığı aşağıda görülecektir. Genel durumlarda, çoğu formül $\mu(t)$ yi içeren terimleri kapsamaktadır. Bu terim $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumunda $\mu(t) \equiv 1$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ durumunda $\mu(t) \equiv 0$ dır. Birçok durumda bu gerçek sürekli ve ayrık durumlar arasındaki farkın oluşmasına sebeptir. Riccati eşitliği zaman skalasında

$$z^{\Delta} + q(t) + \frac{z^2}{\rho(t) + \mu(t) z} = 0.$$

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise bilinen Riccati diferensiyel denklemi olan

$$z' + q(t) + \frac{1}{\rho(t)} z^2 = 0,$$

elde edilir. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise Riccati fark denklemi olan

$$\Delta z + q(t) + \frac{z^2}{\rho(t) + z} = 0$$

bulunur.

2.2. Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.2.1 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ için t nin bir U komşuluğu (bazı $\delta>0$ için $U=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$) vardır öyle ki her $s\in U$ için

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

oluyorsa $f^{\Delta}(t)$ ye f nin t deki delta (Hilger) türevi denir.

Bununla birlikte her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcutsa f ye $\mathbb{T}^{\kappa}$ da diferensiyellenebilir denir. $f^{\Delta}:\mathbb{T}^{\kappa}\to\mathbb{R}$ ye f nin $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde delta türevi denir $[4,5]$.

Örnek 2.2.1

(i) $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ye fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(t)=\alpha$ olarak tanımlansın $f^{\Delta}(t)\equiv 0$. Herhangi $\varepsilon>0$ ve her $s\in\mathbb{T}$ için

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-0.\left[\sigma(t)-s\right]\right|=\left|\alpha-\alpha\right|=0\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|.$$

(ii) $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f(t)=t$ olsun. Bu durumda $f^{\Delta}(t)\equiv 1$. Herhangi $\varepsilon>0$ ve her $s\in\mathbb{T}$ için

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-1\cdot\left[\sigma(t)-s\right]\right|=\left|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)\right|=0\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|\ [4,5].$$

Teorem 2.2.1 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun.

(i) Eğer f, t de diferensiyellenebilir ise f, t de süreklidir.

(ii) Eğer f, t de sürekli ve t sağda saçılımlı ise f, t de

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

şeklinde diferensiyellenebilirdir.

(iii) Eğer t sağda yoğun ise f, t de diferensiyellenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limiti mevcut ve sonlu bir sayıdır.

Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

(iv) Eğer f, t de diferensiyellenebilir ise

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

yazılabilir $[4,5]$.

Örnek 2.2.2 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ durumları göz önüne alınacaktır.

(i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ durumunda, Teorem 2.2.1 den $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t\in\mathbb{R}$ de delta diferensiyellenebilir ancak ve ancak $f'(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ olmasıdır. Yani f, t de diferensiyellenebilirdir. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t).$$

(ii) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ durumunda, Teorem 2.2.1 den $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t\in\mathbb{Z}$ için delta diferensiyellenebilir ve

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

elde edilir. Burada Δ, bilinen ileri fark operatörüdür $[4,5]$.

Teorem 2.2.2 $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ de diferensiyellenebilir olsunlar. Bu durumda

(i) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t).$$

(ii) Herhangi α sabiti için, $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilirdir ve

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).$$

(iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ ise $\frac{1}{f}$, t de diferensiyellenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

Eğer $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise $\frac{f}{g}$, t de diferensiyellenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}\quad [4,5].$$

Örnek 2.2.3 t^2 nin türevi $t+\sigma(t)$ ve $\frac{1}{t}$ nin türevi $-\frac{1}{t\sigma(t)}$ $[4,5]$.

Örnek 2.2.4 $h>0$ ve $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}=\{hk:k\in\mathbb{Z}\}$ olsun.

$t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}=\inf\{t+nh:n\in\mathbb{N}\}=t+h$ ve benzer şekilde $\rho(t)=t-h$. Buradan her $t\in\mathbb{T}$ noktaları izole noktalardır ve her $t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)=\sigma(t)-t=t+h-t\equiv h$. Bu örnekte μ sabittir.

Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t\in\mathbb{T}$ için

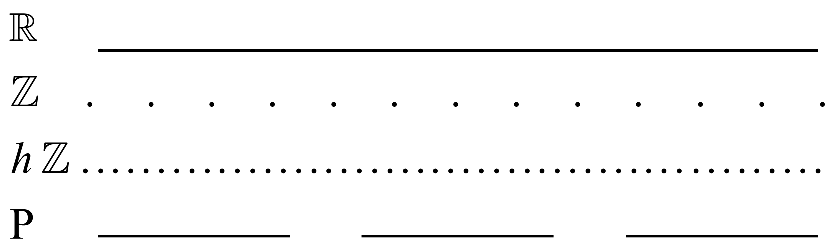
$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

ve

$$\begin{aligned}
f^{\Delta\Delta}(t)&=\frac{f^{\Delta}(\sigma(t))-f^{\Delta}(t)}{\mu(t)}\\
&=\frac{f^{\Delta}(t+h)-f^{\Delta}(t)}{h}\\
&=\frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h}-\frac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h}\\
&=\frac{f(t+2h)-f(t+h)-f(t+h)+f(t)}{h^2}\\
&=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}
\end{aligned}$$

$f^{\Delta^n}(t)$ yi bu şekilde hesaplamak çok uğraştırıcı olacağından her $n\in\mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(t)=t+nh$ ve $\rho^n(t)=t-nh$ yaklaşımları kullanılır.

Δ_h Operatörü $\Delta_h=\frac{1}{h}(\sigma-I)$ ile tanımlanır. Burada I özdeşlik operatörüdür $[4,5]$.



Şekil 2.2 Bazı zaman skalaları

2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun düzenli olması için sağdan limitinin $\mathbb{T}$ deki her sağda yoğun noktalarda ve soldan limitinin $\mathbb{T}$ deki her solda yoğun noktalarda sonlu olması gerekir $[4,5]$.

Tanım 2.3.2 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir F fonksiyonu f nin ilkel türevi olarak adlandırılır. Bir düzenli f fonksiyonunun belirsiz integrali

$$\int f(t)\Delta t = F(t)+C,$$

biçimindedir. Burada C keyfi bir sabit ve F, f nin ilkel türevidir.
Cauchy integrali her $r,\ s\in\mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s)-F(r)$$

şeklinde tanımlanır.
$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ nin anti türevi $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$F^{\Delta}(t)=f(t)$$

koşulunu sağlar $[4,5]$.

Örnek 2.3.1 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise belirsiz integral $\int \alpha^t \Delta t,\ \alpha \neq 1$ sabiti için

$$\left(\frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right) = \frac{\alpha^{t+1}-\alpha^t}{\alpha-1} = \alpha^t$$

olduğundan keyfi bir C sabiti için

$$\int \alpha^t \Delta t = \frac{\alpha^t}{\alpha-1} + C \ [4,5].$$

Teorem 2.3.1 (İlkel türevlerinin varlığı) f düzenli olsun. Diferensiyellenebilen D bölgesinde diferensiyellenebilen bir F fonksiyonu her $t \in D$ için
$F^{\Delta}(t) = f(t)$ [4,5].

Teorem 2.3.2 (İlkel türevlerinin varlığı) Her rd–sürekli fonksiyonların anti türevi (ilkel) vardır. Özellikle eğer $t_0 \in \mathbb{T}$ ise f nin anti türevi $t \in \mathbb{T}$ için

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta_{\tau} \ [4,5].$$

Çizelge 2.2 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ durumları

Zaman skalası $\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
Geri sıçrama operatörü $\rho(t)$	t	$t-1$
İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$	t	$t+1$
Graininess $\mu(t)$	0	1
Türev $f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\Delta f(t)$
İntegral $\int_a^b f(t)\Delta t$	$\int_a^b f(t)dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t) \quad (a<b)$
rd-sürekli f	Sürekli f	Herhangi f

Teorem 2.3.3 Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ise,

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t) f(t) \ [4,5].$$

Teorem 2.3.4 Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise

(i) $\int_{a}^{b} \big(f(t) + g(t)\big)\Delta t = \int_{a}^{b} f(t)\Delta t + \int_{a}^{b} g(t)\Delta t$

(ii) $\int_{a}^{b} (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_{a}^{b} f(t)\Delta t$

(iii) $\int_{a}^{b} f(t)\Delta t = -\int_{b}^{a} f(t)\Delta t$

(iv) $\int_{a}^{b} f(t)\Delta t = \int_{a}^{c} f(t)\Delta t + \int_{c}^{b} f(t)\Delta t$

(v) $\int_{a}^{b} f\big(\sigma(t)\big) g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_{a}^{b} f^{\Delta}(t) g(t)\Delta t$

(vi) $\int_{a}^{b} f(t) g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_{a}^{b} f^{\Delta}(t) g\big(\sigma(t)\big)\Delta t$

(vii) $\int_{a}^{a} f(t)\Delta t = 0$

(viii) Eğer $\left|f(t)\right| \le g(t)$ $[a,b)$ aralığında

$$\left|\int_{a}^{b} f(t)\Delta t\right| \le \int_{a}^{b} g(t)\Delta t$$

(ix) Eğer $a \le t < b$ için $f(t) \ge 0$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t \ge 0$ olur $[4,5]$.

Teorem 2.3.5 $a,b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a,b]$ sadece izole noktalardan meydana geliyorsa

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t) & a > b. \end{cases}$$

(iii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ve $h > 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & a > b. \end{cases}$$

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b, \end{cases}$$

$[4,5]$.

Teorem 2.3.6 (Zincir Kuralı) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ delta diferensiyellenebilir olsun. O halde $fog:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ delta diferensiyellenebilirdir ve delta türevi

$$(fog)^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1 f'\big(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t)\big)dh\right\}g^{\Delta}(t)$$

şeklindedir $[4,5]$.

İspat: Öncelikle, matematiğin integral hesabının temel teoremi gereğince

$$f\big(g(\sigma(t))\big)-f\big(g(s)\big)=\int_{g(s)}^{g(\sigma(t))} f'(\tau)\,d\tau$$

$$=\big[g(\sigma(t))-g(s)\big]\int_0^1 f'\big(hg(\sigma(t))+(1-h)g(s)\big)dh$$

bulunur.

$t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ ve $\varepsilon>0$ verilsin. g, t de diferensiyellenebilir olduğundan, t nin bir U_1 komşuluğu vardır öyle ki

$$\varepsilon^{*}=\frac{\varepsilon}{1+2\int_0^1\left|f'\big(hg(\sigma(t))+(1-h)g(t)\big)\right|dh}$$

olmak üzere her $s\in U_1$ için

$$\left|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\le\varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|.$$

Ayrıca f', $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir ve bu nedenle $\mathbb{R}$ nin kapalı kümeleri üzerinde de düzgün süreklidir. (Teorem 2.2.1 (i) den g diferensiyellenebilirse süreklidir) Buradan t nin bir U_2 komşuluğu vardır öyle ki her $s\in U_2$ için

$$\left|f'\left(hg\left(\sigma(t)\right)+(1-h)g(s)\right)-f'\left(hg\left(\sigma(t)\right)+(1-h)g(t)\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2\left(\varepsilon^*+\left|g^\Delta(t)\right|\right)}$$

elde edilir. Bu da bize her $0\leq h\leq 1$ için

$$\begin{aligned}\left|hg\left(\sigma(t)\right)+(1-h)g(s)-\left(hg\left(\sigma(t)\right)+(1-h)g(t)\right)\right|&=(1-h)\left|g(s)-g(t)\right|\\&\leq\left|g(s)-g(t)\right|\end{aligned}$$

olduğunu gösterir.

$U=U_1\cap U_2$ ve $s\in U$ olsun. İşlemlerde kolaylık sağlaması için

$\alpha=hg\left(\sigma(t)\right)+(1-h)g(s)$ ve $\beta=hg\left(\sigma(t)\right)+(1-h)g(t)$

olarak alınsın. Buradan

$$\begin{aligned}&\left|(fog)\left(\sigma(t)\right)-(fog)(s)\left(\sigma(t)-s\right)g^\Delta(t)\int_0^1 f'(\beta)dh\right|\\&=\left|\left[g\left(\sigma(t)\right)-g(s)\right]\int_0^1 f'(\alpha)dh-\left(\sigma(t)-s\right)g^\Delta(t)\int_0^1 f'(\beta)dh\right|\\&=\left|\left[g\left(\sigma(t)\right)-g(s)-\left(\sigma(t)-s\right)g^\Delta(t)\right]\int_0^1 f'(\alpha)dh+\left(\sigma(t)-s\right)g^\Delta(t)\int_0^1\left(f'(\alpha)-f'(\beta)\right)dh\right|\\&\leq\left|g\left(\sigma(t)\right)-g(s)-\left(\sigma(t)-s\right)g^\Delta(t)\right|\int_0^1\left|f'(\alpha)\right|dh+\left|\sigma(t)-s\right|\left|g^\Delta(t)\right|\int_0^1\left|f'(\alpha)-f'(\beta)\right|dh\\&\leq\varepsilon^*\left|\sigma(t)-s\right|\int_0^1\left|f'(\alpha)\right|dh+\left|\sigma(t)-s\right|\left|g^\Delta(t)\right|\int_0^1\left|f'(\alpha)-f'(\beta)\right|dh\\&\leq\varepsilon^*\left|\sigma(t)-s\right|\int_0^1\left|f'(\beta)\right|dh+\left[\varepsilon^*+\left|g^\Delta(t)\right|\right]\left|\sigma(t)-s\right|\int_0^1\left|f'(\alpha)-f'(\beta)\right|dh\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|\\&=\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle fog, t de diferensiyellenebilirdir ve türevi de yukarıda belirtildiği gibidir.

BÖLÜM III

3.1 Giriş

Bu bölümde S.H. Saker $[1]$ ve Ravi P. Agarwal ve ark. larının $[2]$ zaman skalasında ikinci mertebeden lineer olmayan salınım yapan nötral gecikmeli dinamik denklemler üzerine yapmış olduğu çalışmalar incelenmiştir.

Son dönemlerde çok ilgi çeken zaman skalası ilk kez 1988 yılında Stefan Hilger tarafından tanıtılmıştır $[3]$. Temel amacı sürekli ve ayrık analizlerin birleştirilmesidir. Dinamik denklem olarak adlandırılan bu teorinin amacı sadece diferensiyel ve fark denklemlerini birleştirmek değil aynı zamanda klasik problemleri q-fark denklemlerine genişletmektir. Bir zaman skalası $\mathbb{T}$, reel sayıların kapalı, keyfi bir alt kümesi olsun ve zaman skalası $\mathbb{R}$'ye eşit olduğunda diferensiyel denklemler $\mathbb{N}$'ye eşit olduğunda fark denklemlerini verir.

Stefan Hilger zaman skalası üzerinde türev ve integrallerin tanımını yaptıktan sonra, birçok yazar yeni teorinin üzerinde birçok çalışma yapmıştır.

Son zamanlarda zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin farklı modellerinin salınım yapan veya salınım yapmayan çözümleriyle ilgili birçok araştırma yapılmıştır.

Bu bölümde $\mathbb{T}$ zaman skalasında ikinci mertebeden lineer olmayan nötral

$$\left(r(t)\left(\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+f\left(t,y(t-\delta)\right)=0 \tag{3.1}$$

denkleminin salınım özellikleri incelenmiştir. Burada $\gamma \geq 1$ tek pozitif tamsayı, τ ve δ pozitif sabit, $\tau(t):=t-\tau<t$ ve $\delta(t):=t-\delta<t$ fonksiyonları her $t\in\mathbb{T}$ için $\tau(t):\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ ve $\delta(t):\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ şartlarını sağlar. $r(t)$ ve $p(t)$ ise $\mathbb{T}$ deki reel değerli rd-sürekli pozitif fonksiyonlardır ve

(H_1) $r(t) > 0,\ \int_{t_0}^{\infty} \left(1/r(t)\right)^{1/\gamma} \Delta t = \infty$ ve $0 \le p(t) < 1,$

(H_2) $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyondur öyle ki her $u \neq 0$ için $uf(t,u) > 0$ ve $\mathbb{T}$ zaman skala'sında $\left|f(t,u)\right| \ge q(t)\left|u^{\gamma}\right|$ olacak şekilde $q(t)$ fonksiyonu vardır.

(3.1) denkleminin çözümü aşikar olmayan reel $y(t)$ çözümüdür öyle ki $t_y \ge t_0$ için $y(t) + p(t)y(t-\tau) \in C_{rd}^1\left[t_y,\infty\right),\ r(t)\left(\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)^{\Delta}\right)^{\gamma} \in C_{rd}^1\left[t_y,\infty\right)$ ve (3.1) denklemini $t \ge t_y$ için sağlar.

Burada (3.1) denkleminin $\left[t_y,\infty\right)$ aralığında mevcut ve $t_1 \ge t_y$ için $\sup\left\{\left|y(t) : t > t_1\right|\right\} > 0$ şartını sağlayan çözümleri üzerinde durulacaktır. (3.1) denkleminin $y(t)$ çözümü eğer ergeç pozitif ya da ergeç negatif olmadığı sürece salınım yapar. Diğer durumlarda salınım yapmaz denir. Eğer (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınım yapıyorsa (3.1) denklemine salınım yapıyor denir.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t,\ \mu(t) = 0,\ f^{\Delta}(t) = f'(t)$ olup (3.1) denklemi $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(r(t)\left(\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)'\right)^{\gamma}\right)' + f\left(t, y(t-\delta)\right) = 0 \tag{3.2}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan nötral gecikmeli diferensiyel denkleme dönüşür.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise $\sigma(t) = t+1,\ \mu(t) = 1,\ y^{\Delta}(t) = \Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ olup (3.1) denklemi $t \in \mathbb{T}$ için

$$\Delta\left(r(t)\left(\Delta\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)\right)^{\gamma}\right) + f\left(t, y(t-\delta)\right) = 0 \tag{3.3}$$

ikinci mertebeden nötral gecikmeli fark denklemine dönüşür.

Eğer $\mathbb{T}=h\mathbb{Z},\ h>0$ ise, $\sigma(t)=t+h,\ \mu(t)=h$, $y^{\Delta}(t)=\Delta_h y(t)=\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$ olup (3.1) denklemi $t\in\mathbb{T}$ için

$$\Delta_h\left(r(t)\left(\Delta_h\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)\right)^{\gamma}\right)+f\left(t,y(t-\delta)\right)=0$$

ikinci mertebeden nötral gecikmeli fark denklemine dönüşür.

Eğer $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}=\left\{t:t=q^{k},k\in\mathbb{N},q>1\right\}$ ise, $\sigma(t)=qt,\ \mu(t)=(q-1)t$,

$y^{\Delta}(t)=\Delta_q y(t)=\dfrac{y(qt)-y(t)}{(q-1)t}$ olup (3.1) denklemi $t\in\mathbb{T}$ için

$$\Delta_q\left(r(t)\left(\Delta_q\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)\right)^{\gamma}\right)+f\left(t,y(t-\delta)\right)=0$$

ikinci mertebeden q-nötral gecikmeli fark denklemine dönüşür.

Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{N}^2=\left\{t^2:t\in\mathbb{N}\right\}$ ise, $\sigma(t)=\left(\sqrt{t}+1\right)^2,\ \mu(t)=1+2\sqrt{t}$,

$y^{\Delta}(t)=\Delta y_N(t)=\dfrac{y\left(\left(\sqrt{t}+1\right)^2\right)-y(t)}{1+2\sqrt{t}}$ olup (3.1) denklemi $t\in\mathbb{T}$ için

$$\Delta_N\left(r(t)\left(\Delta_N\left(y(t)+p(t)y(t-\tau)\right)\right)^{\gamma}\right)+f\left(t,y(t-\delta)\right)=0$$

ikinci mertebeden nötral gecikmeli fark denklemine dönüşür.

Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{T}_n=\left\{t_n:n\in\mathbb{N}_0\right\}$ burada $\left\{t_n\right\}$ harmonik sayılar kümesi ve

$t_0=0,\ t_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k},\ n\in\mathbb{N}_0$ buradan $\sigma(t_n)=t_{n+1},\ \mu(t_n)=\dfrac{1}{n+1}$,

$y^{\Delta}(t_n)=\Delta_{t_n}y(t_n)=(n+1)\Delta y(t_n)$ olup (3.1) denklemi $t_n\in\mathbb{T}$ için

$$\Delta_{t_n}\left(r(t_n)\left(\Delta_{t_n}\left(y(t_n)+p(t_n)y(t_n-\tau)\right)\right)^{\gamma}\right)+f\left(t_n,y(t_n-\delta)\right)=0$$

ikinci mertebeden nötral gecikmeli fark denklemine dönüşür.

(3.2) ve (3.3) ikinci mertebeden nötral gecikmeli diferensiyel ve fark denklemleri için bir çok salınım kriteri geliştirilmiştir.

(3.2) denklemi için özel bir durum olan

$$\left[y(t)+p(t)y(t-\tau)\right]''+q(t)y(t-\delta)=0,\ t\geq t_0 \tag{3.4}$$

ikinci mertebeden lineer nötral gecikmeli denklemi Grammatikopoulos ve ark. ları $[6]$ tarafından çalışılmıştır ve

$$q(t)>0,\ \ 0\leq p(t)<1 \text{ ve } \int_{t_0}^{\infty}q(s)\left[1-p(s-\delta)\right]ds=\infty \tag{3.5}$$

olduğunda (3.4) denkleminin bütün çözümlerinin salınım yaptığı ispatlanmıştır.

$\beta>0$ ve $0\leq p(t)<1$

$$\left[y(t)+p(t)y(t-\tau)\right]''+\frac{\beta}{t^2}y(t-\delta)=0,\ t\geq t_0$$

ikinci mertebeden nötral gecikmeli denkleme (3.5) koşulu uygulanamaz.

Graef ve ark. ları $[7]$

$$\left[y(t)+p(t)y(t-\tau)\right]''+q(t)f\left(y(t-\delta)\right)=0,\ t\geq t_0 \tag{3.6}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan nötral gecikmeli diferensiyel denklemi incelemiş ve (3.5) ile verilen koşul

$$q(t) > 0,\ 0 \le p(t) < 1 \text{ ve } \int_{t_0}^{\infty} q(s) f\left(\left(1 - p(s-\delta)c\right)\right) ds = \infty,\ c > 0 \tag{3.7}$$

koşuluna genişletmişlerdir ve (3.7) koşulu altında (3.6) denkleminin bütün çözümlerinin salınım yaptığı ispatlanmıştır.

Daha sonra Kubiaczyk ve Saker $[8]$, Grammatikopoulos ve meslektaşları$[6]$ ve Graef ve ark. larının $[7]$ yaptıkları çalışmaları genelleştirmişlerdir ve

$q(t) > 0,\ 0 \le p(t) < 1$ ve $\mathrm{f}(u) > Ku$ ve burada $\alpha(t)$ pozitif fonksiyonu vardır öyle ki

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \left(K\alpha(s) q(s) \left(1 - p(s-\delta)\right) - \frac{\alpha'(s)}{4\alpha(s)} \right) ds = \infty$$

olduğunda (3.6) denkleminin bütün çözümlerinin salınım yaptığını ispatlamışlardır.

Diğer taraftan, Saker $[9]$ da (3.3) denklemi ele alınmış ve $\gamma \ge 1$ pozitif tek tamsayıların oranı, $0 \le p(t) < 1,\ \left|f(n,u)\right| \ge q_n \left|u^{\gamma}\right|,$

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \infty$$

ve $\alpha(t)$ pozitif dizisi vardır öyle ki,

$Q(t) = q(t)\left(1 - p(t-\delta)\right)^{\gamma}$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{s=t_0}^{t-1}\left[\alpha(s)Q(s)-\frac{r(s-\delta)\left(\Delta\alpha(s)\right)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\alpha^{\gamma}(s)}\right]=\infty$$

olduğunda (3.3) denkleminin bütün çözümlerinin salınım yaptığı ispatlanmıştır.

Daha sonra Sun ve Saker $[10]$ eğer $\gamma>0$ pozitif tek tamsayıların oranı,

$$0\le p(t)<1,\ \left|f(n,u)\right|\ge q_n\left|u^{\gamma}\right|,\ \sum_{t=t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\infty$$

ve $\alpha(t)$ ve $\phi(t)$ dizileri vardır öyle ki

$$Q(t)=q(t)\left(1-p(t-\delta)\right)^{\gamma},\ A(s)=\frac{\phi(s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+}{\alpha^{\sigma}}+\left(\phi^{\Delta}(s)\right)_+ \text{ ve}$$

$\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_+=\max\left\{\alpha^{\Delta}(t),0\right\}$ ve $\left(\phi^{\Delta}(t)\right)_+=\max\left\{\phi^{\Delta}(t)0\right\}$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{s=t_0}^{t-1}\left[\alpha(s)\phi(s)Q(s)-\frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1}A^{\gamma+1}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\alpha^{\gamma}(s)\phi^{\gamma}(s)}\right]=\infty$$

olduğunda (3.3) denkleminin bütün çözümlerinin salınım yaptığını ispatlamışlardır.

3.2 Temel Sonuçlar

Burada Ravi P.Agarwal ve ark. larının $[2]$ ikinci mertebeden lineer olmayan (3.1) nötral gecikmeli dinamik denklemi için bulduğu bazı salınım kriterleri ve sonuçları verilecektir.

Bu bölümde (3.1) denklemi için bir takım salınım kriterleri ortaya koyulacaktır. Çözümlerin asimptotik davranışları ile ilgilenildiği için tetkik edilen $\mathbb{T}$ zaman skalasının üstten sınırlı olmadığı, bir başka ifadeyle $[t_0,\infty)$ aralığında olduğu kabul edilecektir.

Lemma 3.2.1 $p(t)>0,\ \ \delta(t)<t$ ve $\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$ olsun. Eğer;

$\limsup\limits_{t\to\infty}\ \sup\limits_{\lambda>0,-\lambda p\in\Re^+} \lambda e_{-\lambda p}(t,\delta(t))<1$ ise, bu durumda $z^{\Delta}(t)+p(t)z(\delta(t))\le 0$

denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[2]$.

Teorem 3.2.1 (H_1) ve (H_2) şartları sağlansın. $r^{\Delta}(t)\ge 0$ ve $\gamma>0$ pozitif tek sayıların bir bölümü olsun.

$A(t)=\dfrac{q(t)(1-p(t-\delta))^{\gamma}}{r(t-\delta)}\left(\dfrac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma}$ olmak üzere

eğer

$$z^{\Delta}(t)+A(t)z(t-\delta)\le 0 \tag{3.8}$$

eşitsizliğinin pozitif çözümü olmaması durumunda (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[2]$.

İspat: (3.1) denkleminin salınım yapmayan bir y çözümü olsun. Genelliği kaybetmediğimiz sürece her $t\ge t_0$ için $N=\max\{\tau,\delta\}$ iken $y(t-N)>0$ olarak kabul edilecektir.

$$x(t)=y(t)+p(t)y(t-\tau) \tag{3.9}$$

olsun. Denklem (3.1) ve (H_2) den her $t\ge t_0$ için

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+q(t)y^{\gamma}(t-\delta)\leq 0 \tag{3.10}$$

ve $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ fonksiyonu ergeç azalan bir fonksiyondur.

Önce $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ ergeç negatif olmayan olduğunu göstermeliyiz. $q(t)$ pozitif fonksiyon olduğundan, $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ azalan fonksiyonu ergeç pozitif ya da ergeç negatiftir. $t_1 \geq t_0$ olan bir tamsayı olsun. Bu durumda $r(t_1)\left(x^{\Delta}(t_1)\right)^{\gamma}=c<0$ dır. O halde $t \geq t_1$ için (3.10) denkleminden $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}<r(t_1)\left(x^{\Delta}(t_1)\right)^{\gamma}=c$ ve buradan da

$$x^{\Delta}(t)\leq c^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) in her iki tarafının t_1 den t ye integral alınırsa (H_1) den dolayı

$$x(t)\leq x(t_1)+c^{\frac{1}{\gamma}}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{1}{r(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta s\to-\infty \quad t\to\infty$$

bulunur. Bu durum her $t \geq t_0$ için $x(t)>0$ oluşuna ters düştüğü için $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ ergeç negatif değildir. Bundan dolayı bazı $t_1 \geq t_0$ için

$$x(t)>0,\ x^{\Delta}(t)\geq 0,\ \left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}<0,\ t\geq t_1. \tag{3.12}$$

$t \geq t_1+\tau$ için (3.9) kullanılarak

$$\begin{aligned} y(t)&=x(t)-p(t)y(t-\tau)=x(t)-p\left(t\left[x(t-\tau)-p(t-\tau)y(t-2\tau)\right]\right)\\ &\geq x(t)-p(t)x(t-\tau)\geq\left(1-p(t)\right)x(t)\end{aligned}$$

ve $t \geq t_2 \geq t_1 + \tau + \delta$ için

$y(t-\tau) \geq (1 - p(t-\tau))x(t-\tau)$ eşitsizliği elde edilir.

(3.10) denklemi ve son eşitsizlikten $t \geq t_2$ için

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} + q(t)(1 - p(t-\delta))^{\gamma} x^{\gamma}(t-\delta) \leq 0 \tag{3.13}$$

elde edilir.

$r^{\Delta}(t) \geq 0$ ve (3.12) denkleminden $t \geq t_2$ için $x^{\Delta\Delta}(t) \leq 0$ ve buradan da $x^{\Delta}(t)$ nin pozitif ve artmayan olduğu kolayca görülebilir. Bunları kullanarak ve $t_3 \geq 2t_2$ yi sabitleyerek $t \in [t_3, \infty)$ için

$$x(t) = x(t_2) + \int_{t_2}^{t} x^{\Delta}(s)\Delta s \geq \int_{t_2}^{t} x^{\Delta}(t)\Delta s \geq (t - t_2)x^{\Delta}(t) \geq \frac{t}{2}x^{\Delta}(t)$$

elde edilir ve $t \geq t_3 + \delta$ için

$$x(t-\delta) \geq \frac{t-\delta}{2}x^{\Delta}(t-\delta)$$

elde edilir. Son eşitsizlik (3.13) denkleminde yerine yazılırsa $t \geq t_3 + \delta$ için

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} + q(t)(1 - p(t-\delta))^{\gamma}\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma}\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right)^{\gamma} \leq 0$$

bulunur.

$z(t) = r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ alınırsa $z(t)$ pozitif ve (3.8) sağlandığından bu hipotezle çelişir. Dolayısı ile (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar.

Teorem 3.2.2 $(H_1)-(H_2)$ nin sağlandığını kabul edelim. $r^{\Delta}(t)\geq 0$ olsun.

Eğer $\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\delta}^{t}\frac{q(s)(1-p(s-\delta))^{\gamma}}{r(s-\delta)}\left(\frac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma}\Delta s>1$ (3.14)

ise (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[2]$.

İspat: x in (3.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olduğunu varsayalım. Teorem 3.2.1 de olduğu gibi devam edilirse (3.8) denklemine varılır. (3.8) denklemi yeteri kadar büyük t ler için $t-\delta$ dan t ye kadar integre edilirse

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \int_{t-\delta}^{t} z^{\Delta}(s)\Delta s+\int_{t-\delta}^{t} A(s)z(s-\delta)\Delta s\\
&=z(t)-z(t-\delta)+\int_{t-\delta}^{t} A(s)z(s-\delta)\Delta s\\
&=z(t)-z(t-\delta)+z(t-\delta)\int_{t-\delta}^{t} A(s)\Delta s\\
&=z(t)+z(t-\delta)\left(\int_{t-\delta}^{t} A(s)\Delta s-1\right)>0
\end{aligned}
$$

olur. Bu da (3.14) ile çelişir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3 $(H_1)-(H_2)$ şartları sağlansın. $\gamma\geq 1$ pozitif tek sayıların bir bölümü ve $\sigma(t)\neq t$ olsun. Varsayalım ki $r^{\Delta}(t)\geq 0$ ve $\alpha(t)$ rd- sürekli Δ-diferensiyellenebilir bir fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_{+}=\max\left\{0,\alpha^{\Delta}(s)\right\}$ ve $Q(t)=q(t)(1-p(t-\delta))^{\gamma}$

olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)Q(s)-\frac{\left(\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+\right)^2 r(s-\delta)}{4\gamma\left(\frac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\alpha(s)}\right]\Delta s=\infty \tag{3.15}$$

olduğunda (3.1) denkleminin bütün çözümleri $[t_0,\infty)$ aralığında salınım yapar $[2]$.

İspat: Kabul edelim ki (3.1) denkleminin salınım yapmayan bir y çözümü olsun. Genelliği bozmadan bütün $t\geq t_0$ için $y(t-N)>0$ burada $N=\max\{\tau,\delta\}$ olarak kabul edilebilir. Teorem 3.2.1 in ispatından (3.12) ve (3.13) denklemlerini elde edeceğiz. $t\geq t_2$ için

$$w(t)=\alpha(t)\frac{r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t-\delta)} \tag{3.16}$$

fonksiyonu tanımlayalım. $w(t)>0$ olduğu açıktır, çarpım ve bölüm türevinden

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}(t)&=r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\left(\alpha(t)\right)\left[\frac{\alpha(t)}{x^{\gamma}(t-\delta)}\right]^{\Delta}+\frac{\alpha(t)}{x^{\gamma}(t-\delta)}\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\\
&=\frac{\alpha(t)}{x^{\gamma}(t-\delta)}\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\\
&+\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}\left[\frac{x^{\gamma}(t-\delta)\alpha^{\Delta}(t)-\alpha(t)\left(x^{\gamma}(t-\delta)\right)^{\Delta}}{x^{\gamma}(t-\delta)x^{\gamma}(\sigma(t)-\delta)}\right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

denklemi elde edilir. Şimdi (3.13) ve (3.17) den

$$w^{\Delta}(t)\leq-\alpha(t)Q(t)+\frac{\alpha^{\Delta}(t)}{\alpha^{\sigma}}w^{\sigma}-\frac{\alpha(t)\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}\left(x^{\gamma}(t-\delta)\right)^{\Delta}}{x^{\gamma}(t-\delta)x^{\gamma}(\sigma(t)-\delta)} \tag{3.18}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bölüm türevinden

$$\frac{x^{\gamma}(\sigma(t))-x^{\gamma}(t)}{\mu(t)}=\left(x^{\gamma}(t)\right)^{\Delta}.$$

$x \geq y > 0$ ve $\beta \geq 1$ için, $x^{\beta}-y^{\beta} \geq \beta y^{\beta-1}(x-y)^{\beta}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left(x^{\gamma}(t-\delta)\right)^{\Delta} &= \frac{x^{\gamma}(\sigma(t-\delta))-x^{\gamma}(t-\delta)}{\mu(t-\delta)} \\
&\geq \frac{\gamma x^{\gamma-1}(t-\delta)}{\mu(t-\delta)}\left(x(\sigma(t-\delta))-x(t-\delta)\right) \qquad (3.19) \\
&= \gamma x^{\gamma-1}(t-\delta)\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.18) ve (3.19) den

$$w^{\Delta}(t) \leq -\alpha(t)Q(t)+\frac{\alpha^{\Delta}(t)}{\alpha^{\sigma}}w^{\sigma}-\frac{\alpha(t)\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}\gamma x^{\gamma-1}(t-\delta)\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right)}{x^{\gamma}(t-\delta)x^{\gamma}(\sigma(t)-\delta)} \qquad (3.20)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 in ispatında olduğu gibi $r^{\Delta}(t) \geq 0$ ve (3.12) kullanılarak $t_3 \geq 2t_2$ vardır ve $t \in [t_3,\infty)$ için

$$x(t) \geq \frac{t}{2}x^{\Delta}(t),$$

ve buradan

$$\gamma x^{\gamma-1}(t) \geq \gamma\left(\frac{t}{2}\right)^{\gamma-1}\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma-1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.12) den ve $\left(r(t)\left(x^{\gamma}(t)\right)^{\Delta}\right)^{\Delta} < 0$ olduğundan

$$r\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma} > \left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma} \tag{3.21}$$

bulunur.

(3.21) ve (3.12) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\gamma x^{\gamma-1}(t-\delta)\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right) \geq \gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right)^{\gamma} \\
&\geq \gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\frac{r(\sigma(t)-\delta)}{r(t-\delta)}\left(x^{\Delta}(\sigma(t)-\delta)\right)^{\gamma} \\
&\geq \gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\frac{\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}}{r(t-\delta)}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

(3.20) eşitsizliğinde (3.22) yerine yazılır ve (3.16) denklemi kullanılırsa

$$w^{\Delta}(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\alpha^{\Delta}(t)}{\alpha^{\sigma}}w^{\sigma} - \frac{\gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\alpha(t)}{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{2} r(t-\delta)}\left(w^{\sigma}\right)^{2}$$

eşitsizliği elde edilir. $u - mu^{2} \leq \dfrac{1}{4m}$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}(t) &\leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}}\left[w^{\sigma} - \frac{\gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\alpha(t)}{\left(\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}\right)\left(\alpha^{\sigma}\right)r(t-\delta)}\left(w^{\sigma}\right)^{2}\right] \\
&\leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}\right)^{2} r(t-\delta)}{4\gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\alpha(t)} = -\left[\alpha(t)Q(t) - \frac{\left(\alpha^{\Delta}(t)r(t-\delta)\right)}{4\gamma\left(\frac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}\alpha(t)}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$w^{\Delta}(t) \le -\left[\alpha(t)Q(t) - \frac{\left(\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}\right)^{2} r(t-\delta)}{4\gamma\left(\dfrac{t-\delta}{2}\right)^{\gamma-1} \alpha(t)} \right]$$

eşitsizliğinin her iki tarafı t_3 den t ye kadar integre edilirse

$$-w(t_3) < w(t) - w(t_3) \le -\int_{t_3}^{t} \left[\alpha(s)Q(s) - \frac{\left(\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_{+}\right)^{2} r(s-\delta)}{4\gamma\left(\dfrac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma-1} \alpha(s)} \right] \Delta s$$

ve buradan bütün büyük t ler için

$$\int_{t_3}^{t} \left[\alpha(s)Q(s) - \frac{\left(\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_{+}\right)^{2} r(s-\delta)}{4\gamma\left(\dfrac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma-1} \alpha(s)} \right] \Delta s < w(t_3)$$

bulunur bu da (3.15) ile çelişir.

Teorem 3.2.4 (H_1) ve (H_2) nin sağlandığını kabul edelim. $\alpha(t)$ de Teorem 3.2.3 de tanımlandığı gibi olsun. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\alpha(s)Q(s) - \frac{r(s-\delta)\left(\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_{+}\right)^{2}}{2^{3-\gamma}\left(\mu(s-\delta)\right)^{\gamma-1} \alpha(s)} \right] \Delta s = \infty$$

İse (3.1) denkleminin tüm çözümleri $[t_0, \infty)$ aralığında salınım yapar $[2]$.

İspat: Teorem 3.2.1. de olduğu gibi y nin (3.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olduğunu varsayalım. y, (3.1) in $t \geq t_0$ için $y(t-N) > 0$ olacak şekilde nihai pozitif bir çözümü olsun. Teorem 3.2.1'in ispatındaki yolu izleyerek (3.12) ve (3.13) ün gerçekleştiğini görürüz.

$w(t)$ fonksiyonunu (3.16) ile tekrar ifade edilsin. Bu durumda $w(t) > 0$ olur ve (3.18) sağlanır. Ayrıca $y \geq 1$ için

$$x^\gamma - y^\gamma \geq 2^{1-\gamma}(x-y)^\gamma$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left(x^y(t)\right)^\Delta &= \frac{x^\gamma(\sigma(t)) - x^\gamma(t)}{\mu(t)} \geq 2^{1-\gamma}\frac{1}{\mu(t)}\left(x(\sigma(t)) - x(t)\right)^\gamma \\ &= 2^{1-\gamma}\left(\mu(t)\right)^{\gamma-1}\left(\frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)}\right)^\gamma = 2^{1-\gamma}\left(\mu(t)\right)^{\gamma-1}\left(x^\Delta(t)\right)^\gamma\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Bunun dışında (3.12), (3.18) ve (3.23) den

$$w^\Delta(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^\Delta(t)\right)_+}{\alpha^\sigma}w^\sigma - \frac{2^{1-\gamma}\left(\mu(t-\delta)\right)^{\gamma-1}\alpha(t)\left(\left(r\left(x^\Delta\right)^\gamma\right)^\sigma\right)^2}{x^{2\gamma}\left(\sigma(t)-\delta\right)r(t-\delta)} \tag{3.24}$$

elde edilir. Simdi de (3.16) yi kullanarak

$$w^\Delta(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^\Delta(t)\right)_+}{\alpha^\sigma}w^\sigma - \frac{2^{1-\gamma}\left(\mu(t-\delta)\right)^{\gamma-1}\alpha(t)}{\left(\alpha^\sigma\right)^2 r(t-\delta)}\left(w^\sigma\right)^2$$

elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.2.3 teki ile aynıdır.

Teorem 3.2.5 (H_1) ve (H_2) nin sağlandığını kabul edelim. $\alpha(t)$ ise Teorem 3.2.3 teki gibi ifade edilsin. Bu durumda m pozitif tek sayısı için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^m}\int_{t_0}^{t}(t-s)^m\left[\alpha(s)Q(s)-\frac{r(s-\delta)\left(\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+\right)^2}{2^{3-\gamma}\left(\mu(s-\delta)\right)^{\gamma-1}\alpha(s)}\right]\Delta s=\infty$$

sağlandığında (3.1) in tüm çözümleri $[t_0,\infty)$ aralığında salınım yapar $[2]$.

3.3 Örnekler

Örnek 3.3.1 İkinci mertebeden nötral lineer olmayan gecikmeli dinamik denklemin $t\in\mathbb{T}$ için

$$\left(\left(\left(y(t)+\frac{t+\delta-1}{t+\delta}y(t-\tau)\right)^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+t^{\alpha}y^{\gamma}(t-\delta)=0 \qquad (3.25)$$

şeklinde ele alınsın. Burada zaman skalası $\mathbb{T}=[1,\infty)$ (burada bütün noktalar sağda saçılımlı), $\gamma\geq 1$ pozitif tek tamsayıların bir bölümüdür. α ve γ sabitler, τ ve δ negatif olmayan sabitlerdir. (3.25) de $r(t)\equiv 1,\ p(t)\equiv(t+\delta-1)/(t+\delta),\ q(t)=t^{\alpha}$ dir. (H_1) ve (H_2) hipotezlerinin sağladığı kolayca görülür.

Dolayısıyla Teorem 3.2.3'de $t\geq t_0$ için $\alpha(t)=t$ olduğunda eğer $\gamma>1$ ve $\alpha-\gamma\geq -2$ olması şartıyla

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[sQ(s)-\frac{r(s-\delta)}{4\gamma\left(\frac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma-1}s}\right]\Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[sQ(s) - \frac{r(s-\delta)}{4\gamma\left(\frac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma-1} s^{\gamma}} \right] \Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \left[s^{1+\alpha-\gamma} - \frac{1}{2^{3-\gamma}(s-\delta)^{\gamma-1} s} \right] \Delta s$$

$$\geq \limsup_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \left[s^{1+\alpha-\gamma} - \frac{1}{2^{3-\gamma} s^{\gamma}} \right] \Delta s = \infty$$

bulunur. Teorem 3.2.3'ün sağlandığını gösterir. Böylece (3.25) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[2]$.

Örnek 3.3.2 Dinamik denklemini $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left((t+\delta)^{\gamma-1} \left(\left(y(t) + \frac{t+\delta-1}{t+\delta} y(t-\tau) \right)^{\Delta} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta} + \beta t^{\gamma-2} y(t-\delta) = 0 \tag{3.26}$$

şeklinde ele alınsın. Burada zaman skalası $\mathbb{T} = [1,\infty)$ (burada bütün noktalar sağda saçılımlı), $\beta > 0$ ve $\gamma \geq 1$ pozitif tek sayıların bölümü olup τ ve δ negatif olmayan sabitlerdir. (3.26) de $r(t) \equiv (t+\delta)^{\gamma-1}$, $p(t) \equiv (t+\delta-1)/(t+\delta)$, $q(t) = \beta t^{\gamma-2}$ dır. (3.26) denkleminin (H_1) ve (H_2) hipotezlerinin sağladığı kolayca görülür.

Dolayısıyla Teorem 3.2.3'de $t \geq t_0$ için $\alpha(t) = t$ olduğunda eğer $\beta > 1/(2^{3-\gamma}\gamma)$ olması şartıyla

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[sQ(s) - \frac{r(s-\delta)}{4\gamma\left(\frac{s-\delta}{2}\right)^{\gamma-1} s} \right] \Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[sQ(s) - \frac{r(s-\delta)}{2^{3-\gamma}\gamma(s-\delta)^{\gamma-1} s} \right] \Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left[\frac{\beta}{s} - \frac{s^{\gamma-1}}{2^{3-\gamma}\gamma(s-\delta)^{\gamma-1} s} \right] \Delta s$$

$$\geq \limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left[\frac{\beta}{s} - \frac{1}{2^{3-\gamma}\gamma s} \right] \Delta s = \infty$$

bulunur. Teorem 3.2.3'ün sağlandığını gösterir. Böylece (3.26) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[2]$.

Örnek 3.3.3 Dinamik denklemi $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(y(t) + \frac{t+\delta-1}{t+\delta} y(t-\tau) \right)^{\Delta\Delta} + \beta t^{-2} y(t-\delta) = 0 \qquad (3.27)$$

şeklinde alınsın. Burada zaman skalası $\mathbb{T} = [1,\infty)$ (burada bütün noktalar sağda saçılımlı), $\beta > 0$ ve $\gamma = 1$ olup τ ve δ negatif olmayan sabitlerdir. (3.27) de $r(t) \equiv 1$, $p(t) \equiv (t+\delta-1)/(t+\delta)$, $q(t) = \beta t^{\gamma-2}$ dır. (3.27) denkleminin (H_1) ve (H_2) hipotezlerinin sağladığı kolayca görülür.

Dolayısıyla Teorem 3.2.3 de $\beta > 1/4$ olması şartıyla

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^t \left[sQ(s) - \frac{r(s-\delta)}{2^{3-\gamma}\left(\mu(s-\delta)\right)^{\gamma-1} s} \right] \Delta s$$

$$\limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left[sQ(s) - \frac{r(s-\delta)}{2^{3-\gamma}\left(\mu(s-\delta)\right)^{\gamma-1} s} \right] \Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left[\frac{\beta}{s} - \frac{1}{4s} \right] \Delta s = \infty$$

elde edilir. Teorem 3.2.3'ün sağlandığını gösterir. Böylece (3.27) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[2]$.

3.4 Temel Sonuçlar

Bu bölümde S.H. Saker'in$[1]$ ikinci mertebeden lineer olmayan (3.1) nötral gecikmeli dinamik denklemler için Riccati dönüşümünü kullanarak bulduğu bazı sonuçlar verilecektir.

Lemma 3.4.1 $f(u) = Bu - Au^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$ **,** burada $A > 0$ ve B sabit γ ise pozitif tamsayıdır.

$u^* = \left(\dfrac{B\gamma}{A(\gamma+1)}\right)^{\gamma}$ için f in $\mathbb{R}$ deki maksimum değeri elde edilir ve

$\max\limits_{u \in \mathbb{R}} f = f\left(u^*\right) = \dfrac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} \dfrac{B^{\gamma+1}}{A^{\gamma}}$ dır $[1]$.

Teorem 3.4.1 (H_1) ve (H_2) nin sağlandığını kabul edelim.

$\alpha(t)$ ve $\phi(t)$ pozitif rd – sürekli Δ-diferensiyellenebilir fonksiyonlar

$$Q(s) = q(s)\left(1 - p(s-\delta)\right)^{\gamma}$$

$$C(s) = \frac{\phi(s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+}{\alpha^{\delta}} + \left(\phi^{\Delta}(s)\right)_+ ,$$

$$\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_+ = \max\left\{\alpha^{\Delta}(t), 0\right\},$$

$$\left(\phi^{\Delta}(t)\right)_+ = \max\left\{\phi^{\Delta}(t), 0\right\}$$

olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)\phi(s)Q(s)-\frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1}C^{\gamma+1}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\alpha^{\gamma}(s)\phi^{\gamma}(s)}\right]\Delta s=\infty \qquad (3.28)$$

olduğunda (3.1) denkleminin $[t_0,\infty)$ aralığındaki tüm çözümleri salınım yapar $[1]$.

İspat: Tersine $y(t)$, (3.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü ve $t_1 \ge t_0$ öyle ki bütün $t \ge t_1$ için $y(t) \ne 0$. Genelliği bozmadan $y(t)$ nihai pozitif olsun. Bununla birlikte $t \ge t_1$ ve $N = \max\{\tau,\delta\}$ için $y(t-N) \ge 0$ olur.

$$x(t) := y(t) + p(t)y(t-\tau)$$

olsun.

Bütün $t \ge t_1$ için (3.1) ve (H_2) den

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} + q(t)y^{\gamma}(t-\delta) \le 0,\ t \ge t_1 \qquad (3.29)$$

olur ve bunun sonucu olarak $q(t) > 0$ olduğunda $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}$ ergeç azalan bir fonksiyon olur. Özellikle $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ fonksiyonunun ergeç negatif olmayan olduğu gösterilmelidir.

$q(t)$ pozitif bir fonksiyon olduğundan $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ azalan fonksiyonu ya ergeç pozitif ya da ergeç negatiftir. $t_2 \ge t_1$ tamsayısının var olsun öyle ki

$r(t_1)\left(x^{\Delta}(t_1)\right)^{\gamma} = c < 0.$ (3.29) den $t \ge t_2$ için $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma} < r(t_1)\left(x^{\Delta}(t_1)\right)^{\gamma} = c$ buradan

$$x^{\Delta}(t) \le c^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1}{r(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

(H_1) i kullanarak $t \to \infty$ iken

$$x(t) \le x(t_2) + c^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_2}^{t} \left(\frac{1}{r(s)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s \to -\infty$$

bulunur.

Bu da bütün $t \ge t_1$ için $x(t) > 0$ ifadesi ile çelişir. Burada $r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}$ nihai negatif olmayandır. Dolayısıyla bazı t_1 değerleri için $t \ge t_1$ olduğunda

$$x(t) > 0,\ x^{\Delta}(t) \ge 0,\ \left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma} \right)^{\Delta} < 0 \tag{3.30}$$

olduğu görülür.

Bu sonuçlar gösterir ki

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) - p(t)y(t-\tau) = x(t) - p(t)\left[x(t-\tau) - p(t-\tau)y(t-2\tau)\right] \\ &\ge \mathrm{x}(t) - p(t)x(t-\tau) \ge (1-p(t))x(t). \end{aligned}$$

$t \ge t_2 = t_1 + \delta$ alındığında $y(t-\delta) \ge (1-p(t-\delta))x(t-\delta)$ bulunur.

(3.29) den ve son eşitsizlikten bütün $t \ge t_2$ için

$$\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma} \right)^{\Delta} + q(t)(1-p(t-\delta))^{\gamma} x^{\gamma}(t-\delta) \le 0 \tag{3.31}$$

elde edilir.

Riccati yöntemi kullanılarak bütün $t \geq t_2$ için $w(t)$ fonksiyonu

$$w(t) = \alpha(t)\frac{r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t-\delta)} \tag{3.32}$$

şeklinde tanımlanır. $w(t) > 0$ olduğu açıktır. Çarpım ve bölüm türevinden

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &= \left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}\left[\frac{\alpha(t)}{x^{\gamma}(t-\delta)}\right]^{\Delta} + \frac{\alpha(t)}{x^{\gamma}(t-\delta)}\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} \\ &= \frac{\alpha(t)}{x^{\gamma}(t-\delta)}\left(r(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta} + \left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}\left[\frac{x^{\gamma}(t-\delta)\alpha^{\Delta}(t) - \alpha(t)\left(x^{\gamma}(t-\delta)\right)^{\Delta}}{x^{\gamma}(t-\delta)x^{\gamma}(\sigma(t)-\Delta)}\right] \end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir.

(3.31) ve (3.33) den

$$w^{\Delta}(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}}w^{\sigma} - \frac{\alpha(t)\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\delta}\left(x^{\gamma}(t-\delta)\right)^{\Delta}}{x^{\gamma}(t-\delta)x^{\gamma}(\sigma(t)-\delta)} \tag{3.34}$$

bulunur. (3.30) ve Keller'ın zincir kuralından

$$\begin{aligned} \left(x^{\gamma}(t)\right)^{\Delta} &= \gamma\int_0^1\left[hx^{\sigma} + (1-h)x\right]^{\gamma-1} dhx^{\Delta}(t) \\ &\geq \gamma\int_0^1\left[hx + (1-h)x\right]^{\gamma-1} dhx^{\Delta}(t) = \gamma\left(x(t)\right)^{\gamma-1}x^{\Delta}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yeterince büyük $t \geq t_2$ için

$$\left(x^{\gamma}(t-\delta)\right)^{\Delta} \geq \gamma x^{\gamma-1}(t-\delta)\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right). \tag{3.35}$$

(3.30) den $t \geq t_2$ için

$$r(t-\delta)\left(x^{\Delta}(t-\delta)\right)^{\gamma} \geq r(\sigma(t)-\delta)\left(x^{\Delta}(\sigma(t)-\delta)\right)^{\gamma} \geq \left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\sigma}. \tag{3.36}$$

(3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri (3.34) de yerine yazılırsa

$$w^{\Delta}(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}} w^{\sigma} - \frac{\gamma\alpha(t)\left(r^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma+1}\right)^{\sigma}}{r^{\frac{1}{\gamma}}(t-\delta)x(t-\delta)x^{\gamma}(\sigma(t)-\delta)}.$$

$x^{\Delta}(t) \geq 0$ olduğundan $x(\sigma(t)-\delta) \geq x(t-\delta)$ olur ve

$$w^{\Delta}(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}} w^{\sigma} - \frac{\gamma\alpha(t)\left(r^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma+1}\right)^{\sigma}}{r^{\frac{1}{\gamma}}(t-\delta)x^{\gamma+1}(\sigma(t)-\delta)} \tag{3.37}$$

olduğunu gösterir. (3.32) ve (3.37) den

$$w^{\Delta}(t) \leq -\alpha(t)Q(t) + \frac{\left(\alpha^{\Delta}(t)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}} w^{\sigma} - \frac{\gamma\alpha(t)}{r^{\frac{1}{\gamma}}(t-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left(w^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \tag{3.38}$$

olduğu görülür.

(3.38) denkleminin her iki tarafını $\phi(s)$ ile çarpılıp t_2 den t ye kadar integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^{t}\phi(s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \leq &-\int_{t_2}^{t}\phi(s)w^{\Delta}(s)\Delta s + \int_{t_2}^{t}\phi(s)\frac{\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)}{\alpha^{\sigma}}w^{\sigma}(s)\Delta s \\ &-\int_{t_2}^{t}\frac{\gamma\phi(s)\alpha(s)}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}\left(w^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s\end{aligned} \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$-\int_{t_2}^{t} \phi(s) w^{\Delta}(s) \Delta s = -\phi(s) w(s)\Big|_{t_2}^{t} + \int_{t_2}^{t} \left(\phi(s)\right)^{\Delta} w^{\sigma} \Delta s$$

olduğundan bu eşitlik (3.39) da yerine yazılırsa

$$\int_{t_2}^{t} \phi(s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \le w(t_2)\phi(t_2) + \int_{t_2}^{t} \left[\frac{\phi(s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+}{\alpha^{\sigma}} + \left(\phi^{\Delta}(s)\right)_+ \right] w^{\sigma}(s)\Delta s$$
$$-\int_{t_1}^{t} \frac{\gamma\phi(s)\alpha(s)}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} \left(w^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \Delta s \tag{3.40}$$

elde edilir.

$$B = \left[\frac{\phi(s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+}{\alpha^{\sigma}} + \left(\phi^{\Delta}(s)\right)_+ \right] \text{ ve } A = \frac{\gamma\phi(s)\alpha(s)}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} \text{ ve } u = w^{\sigma}$$

alınır ve (3.40) denkleminde Lemma 3.4.1 uygulanırsa

$$\int_{t_2}^{t} \phi(s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \le w(t_2)\phi(t_2) + \int_{t_1}^{t} \frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1} C^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\alpha(s)\right)^{\gamma}\phi^{\gamma}(s)} \Delta s$$

bulunur.

Buradan

$$\int_{t_2}^{t} \left[\phi(s)\alpha(s)Q(s) - \frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1} C^{\gamma+1}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\alpha(s)\right)^{\gamma}\phi^{\gamma}(s)} \right] \le w(t_2)\phi(t_2)$$

bulunur ve bu da (3.28) ile çelişir. Dolayısıyla (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınım yapar.

$D_0 \equiv \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t > s \geq t_0\}$ ve $D \equiv \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t \geq s \geq t_0\}$ olmak üzere

Eğer;

(i) D_0 üzerinde $H(t,t) = 0,\ t \geq t_0,\ H(t,s) > 0$

(ii) H, ikinci değişken ile ilgili, D_0 üzerinde sürekli Δ-özel türevi $H^{\Delta s}(t,s)$'ye sahipse (eğer H, t ve s de rd-sürekli fonksiyon ise H rd-sürekli fonksiyondur).

(i) ve (ii) şartları sağlanıyorsa $H \in C_{rd}(D,R)$ fonksiyonuna $\Re$ ye aittir denir.

Teorem 3.4.2 (H_1) ve (H_2) nin sağlandığını kabul edelim. $\alpha(t)$ Teorem 3.3.1 deki gibi tanımlansın. h, $H : D \to R$ rd-sürekli fonksiyon öyle ki H fonksiyonu $\Re$ ye ait olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\alpha(s)Q(s) - \frac{(\alpha^\sigma)^{\gamma+1} r(s-\delta) C^{\gamma+1}(t,s)}{\alpha^\gamma(s)(\gamma+1)^{\gamma+1} H^\gamma(t,s)} \right] \Delta s = \infty,$$

burada

$$C(t,s) = \frac{H(t,s)\left(\alpha^\Delta(s)\right)_+}{\sigma^\sigma} + H^{\Delta s}(t,s) \tag{3.41}$$

olduğunda (3.1) in her bir çözümü $[t_0,\infty)$ üzerinde salınım yapar $[1]$.

İspat: Aksini kabul edelim. $y(t)$, (3.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun ve $t_1 \geq t_0$ olsun öyle ki bütün $t \geq t_1$ için $y(t) \neq 0$ olsun. Genelliği bozmadan, yeterince büyük $t \geq t_1$ ler için $N = \max\{\tau, \delta\}$ olduğu yerlerde $y(t-N) > 0$. Teorem 3.4.1'in ispatında olduğu gibi $t_2 \geq t_1$ vardır öyle ki $t \geq t_2$ için (3.38) denklemi sağlanır. (3.38) denkleminden

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^{t} H(t,s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \leq & -\int_{t_2}^{t} H(t,s)w^{\Delta}(s)\Delta s + \int_{t_2}^{t} \frac{H(t,s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}} w^{\sigma}\Delta s \\ & -\int_{t_2}^{t} \frac{\gamma\alpha(t)H(t,s)}{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\lambda} r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)}\left(w^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s\end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitsizliği elde edilir.

Kısmi integrasyon kullanılarak, $H(t,t) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^{t} H(t,s)w^{\Delta}(s)\Delta s &= H(t,s)w(s)\Big|_{t_2}^{t} - \int_{t_2}^{t} H^{\Delta s}(t,s)w^{\sigma}\Delta s \\ &= -H(t,t_2)w(t_2) - \int_{t_2}^{t} H^{\Delta s}(t,s)w^{\sigma}\Delta s\end{aligned} \tag{3.43}$$

eşitliği bulunur.

(3.42) denkleminde (3.43) eşitliği yazılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^{t} H(t,s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \leq & \, H(t,t_2)w(t_2) + \int_{t_2}^{t} H^{\Delta s}(t,s)w^{\sigma}\Delta s + \int_{t_2}^{t} \frac{H(t,s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_{+}}{\alpha^{\sigma}} w^{\sigma}\Delta s \\ & -\int_{t_2}^{t} \frac{\gamma\alpha(t)H(t,s)}{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)}\left(w^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bundan dolayı

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \le H(t,t_2)w(t_2)+\int_{t_2}^{t}\left[\frac{H(t,s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+}{\alpha^{\sigma}}+H^{\Delta s}(t,s)\right]w^{\sigma}\Delta s$$
$$-\int_{t_2}^{t}\frac{\gamma\alpha(t)H(t,s)}{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma} r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)}\left(w^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s \tag{3.44}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$A=\frac{\gamma\alpha(t)H(t,s)}{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} r^{\frac{1}{\gamma}}(s-\delta)} \quad \text{ve} \quad B=\frac{H(t,s)\left(\alpha^{\Delta}(s)\right)_+}{\alpha^{\sigma}}+H^{\Delta s}(t,s) \quad \text{ve} \quad u=w^{\sigma}$$

alınırsa, (3.44) eşitsizliğinde Lemma 3.4.1 kullanılarak

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)\alpha(s)Q(s)\Delta s \le H(t,t_2)w(t_2)+\int_{t_2}^{t}\frac{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1} r(s-\delta)\left[C(t,s)\right]^{\gamma+1}}{\alpha^{\gamma}(s)(\gamma+1)^{\gamma+1}H\left((t,s)\right)^{\gamma}}\Delta s$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonra bütün $t \ge t_2$ için

$$\int_{t_2}^{t}\left[H(t,s)\alpha(s)Q(s)-\frac{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1} r(s-\delta)\left[C(t,s)\right]^{\gamma+1}}{\alpha^{\gamma}(s)(\gamma+1)^{\gamma+1}H\left((t,s)\right)^{\gamma}}\right]\Delta s < H(t,t_2)w(t_2)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da, büyük t ler için

$$\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[H(t,s)\alpha(s)Q(s)-\frac{\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1} r(s-\delta)\left[C(t,s)\right]^{\gamma+1}}{\alpha^{\gamma}(s)(\gamma+1)^{\gamma+1}H^{\gamma}(t,s)}\right]\Delta s < w(t_2)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (3.41) ile çelişir. O halde (3.1) denkleminin her bir çözümü salınım yapar.

3.5 Örnekler

Bu bölümde bulunan sonuçlar için bazı örnekler verilecektir. Salınım için şartların oluşması için aşağıdaki sonuçlar kullanılacaktır.

Eğer $0 \leq \nu \leq 1$ ise $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta s}{s^{\nu}} = \infty$

ve eğer $\nu > 1$ ise $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta s}{s^{\nu}} < \infty$.

Örnek 3.5.1 İkinci mertebeden nötral gecikmeli dinamik denklemi $\mathbb{T}$ zaman skalası olmak üzere

$$\left[y(t) + \frac{1}{t+\delta} y(t-\tau) \right]^{\Delta\Delta} + \frac{\lambda}{t^2} y(t-\delta) = 0, \; t \in \mathbb{T} \tag{3.45}$$

şeklinde ele alalım. α, τ ve δ negatif olmayan sabit öyle ki $t-\tau$ ve $t-\delta \in \mathbb{T}$ ve $\lambda > 0$ bir sabittir. (3.45) denkleminde

$$\gamma = 1, \; r(t) = 1, f(t,u) = q(t)u, \; \mathrm{q}(t) = \frac{\lambda}{t^2}, \; p(t) = \frac{1}{t+\delta} \text{ ve } p(t-\delta) = \frac{1}{t}.$$

(H_1) ve (H_2) şartlarının sağlandığı kolayca görülür. Teorem 3.4.1'i uygulamak için (3.28) şartını yerine getirmek yeterlidir. $\phi = 1$ ve $\alpha(s) = s$ seçimleriyle $\lambda > \frac{1}{4}$ olması şartıyla;

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)\phi(s)Q(s)-\frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1}C^{\gamma+1}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\alpha^{\gamma}(s)\phi^{\gamma}(s)}\right]\Delta s$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\lambda}{s}\left(1-\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{4s}\right]\Delta s$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{4\lambda-1}{4s}-\frac{\lambda}{s^2}\right)\Delta s=\infty$$

bulunur. Teorem 3.4.1'in sağlandığını gösterir. Buradan (3.45) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[1]$.

Örnek 3.5.2 İkinci mertebeden nötral lineer olmayan gecikmeli dinamik denklemi $\mathbb{T}$ zaman skalası olmak üzere

$$\left(\left(\left(y(t)+\frac{t+\delta-1}{t+\delta}y(t-\tau)\right)^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}+t^{\alpha}y^{\gamma}(t-\delta)=0,\ t\in\mathbb{T} \tag{3.46}$$

şeklinde ele alalım. $\gamma>1$ bir pozitif tek tamsayı, τ ve δ negatif olmayan sabitlerdir öyle ki $t-\tau$ ve $t-\delta\in\mathbb{T}$. (3.46) denkleminde $r(t)\equiv 1$, $p(t)\equiv\dfrac{t+\delta-1}{t+\delta}$ ve $q(t)=t^{\alpha}$ olsun.

Burada (H_1) ve (H_2) şartlarının sağlandığı kolayca görülür. Teorem 3.4.1'i uygulamak için (3.28) şartını yerine getirmek yeterlidir. $\phi=1$ ve $\alpha(s)=s$ seçimiyle $\alpha-\gamma\geq -2$ olmak şartıyla;

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)\phi(s)Q(s)-\frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1}C^{\gamma+1}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\alpha^{\gamma}(s)\phi^{\gamma}(s)}\right]\Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left[s^{1+\alpha-\gamma} - \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1} s^{\gamma}} \right] \Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^t \left[s^{1+\alpha-\gamma} - \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1} s^{\gamma}} \right] \Delta s = \infty$$

bulunur. Teorem 3.4.1'in sağlandığını gösterir. Buradan (3.46) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[1]$.

Örnek 3.5.3 İkinci mertebeden lineer olmayan nötral gecikmeli dinamik denklemi $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left((t+\delta)^{\gamma-1} \left(\left(y(t) + \frac{t+\delta-1}{t+\delta} y(t-\tau) \right)^{\Delta} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta} + \beta t^{\gamma-2} y^{\gamma}(t-\delta) = 0 \qquad (3.47)$$

şeklinde ele alalım. $\beta > 0$ ve $\gamma \geq 1$ bir pozitif tek tamsayı, τ ve δ negatif olmayan sabitlerdir öyle ki $t-\tau$ ve $t-\delta \in \mathbb{T}$. (3.47) denkleminde $r(t) \equiv (t+\delta)^{\gamma-1}$, $p(t) \equiv \dfrac{t+\delta-1}{t+\delta}$ ve $q(t) = \beta t^{\gamma-2}$. Burada (H_1) ve (H_2) şartlarının sağlandığı kolayca görülür. Teorem 3.4.1'i uygulamak için (3.28) şartını yerine getirmek yeterlidir. $\phi = 1$ ve $\alpha(s) = s$ seçimiyle $\beta > \dfrac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}$ olmak şartıyla;

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^t \left[\alpha(s)\phi(s)Q(s) - \frac{r(s-\delta)\left(\alpha^{\sigma}\right)^{\gamma+1} C^{\gamma+1}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1} \alpha^{\gamma}(s)\phi^{\gamma}(s)} \right] \Delta s$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\beta}{s} - \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1} s} \right] \Delta s = \infty$$

bulunur. Teorem 3.4.1 in sağlandığını gösterir. Buradan (3.47) denkleminin bütün çözümleri salınım yapar $[1]$.

BÖLÜM IV

SONUÇ

Bu çalışmada (3.1) denkleminin çözümlerinin salınım yapması için yeterli şartlar içeren teoremler verilmiştir. Teoremlerin ispatında Riccati dönüşümü ve Philos-Type tekniği kullanılmıştır. Sonuç olarak diferensiyel ve fark denklemlerinin salınım yapması için verilen teoremlerin ispatında kullanılan Riccati dönüşümü ve Philos-Type tekniği zaman skalasında da çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Saker, S.H., Oscillation of second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales, J. Comput. Appl. Math. 187, 123-141, 2006.

[2] Agarwal, R.P., Donal O'Regan, S.H. Saker, Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay dynamic equations J. Math. Anal. Appl. 300, 203-217, 2004.

[3] Hilger, S., Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus, Result Math. 18, 18-56,1990. M. Bohner, A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhauser, Boston, 2001.

[4] Bohner, M., Peterson, A., Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhauser, Boston, 2001.

[5] Bohner, M., Peterson, A., Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhauser, Boston, 2003.

[6] Grammatikopoulos, M.K., Ladas, G., Meimaridou, A., Oscillation of second-order neutral delay differential equations, Radovi Mat. 1, 267-274, 1985.

[7] Graef, J.R., Grammatikopoulos, M.K., Spikes, P.W., Asymptotic properties of solution of nonlinear neutral delay differential equations of the second-order, Radovi Mat. 4, 133-149, 1988.

[8] Kubiaczyk, I., Saker, S.H., Oscillation theorems of second order nonlinear neutral delay differential equations, Disc. Math. Diff. Incl. Cont. Optim. 22, 185-212, 2002.

[9] Saker, S.H., New oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay difference equations, Appl. Math. Comp. 142, 99-111, 2003.

[10] Sun, Y.G., Saker, S.H., Oscillation for second-order nonlinear neutral delay difference equations, Appl. Math. Comp. 163, 909-918, 2005.