



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK UZAYDA SİMPEKSLERİN HACİM HESABI

EBRU ARKALI

Ağustos 2010

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK UZAYDA SİMPEKSLERİN HACİM HESABI

EBRU ARKALI

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Ağustos 2010

Doç.Dr. Atakan Tuğkan YAKUT danışmanlığında **Ebru Arkalı** tarafından hazırlanan “**Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Hacim Hesabi**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Atakan Tuğkan YAKUT(Niğde Üniversitesi)

Üye : Yrd.Doç.Dr. Dağistan ŞİMŞEK(Selçuk Üniversitesi)

Üye : Yrd. Doç.Dr. Durmuş DAĞHAN(Niğde Üniversitesi)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../200..

Doç. Dr. Nurettin ACIR
MÜDÜR

ÖZET

HİPERBOLİK UZAYDA SİMPEKSLERİN HACMI

ARKALI, Ebru
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Atakan Tuğkan Yakut

Ağustos 2010, 40 sayfa

Bu çalışmada Hiperbolik uzayda keyfi hiperbolik dörtyüzlünün bilinen bazı hacim formülleri ve ideal polihedranın hacmi verildi. Ayrıca hiperbolik dörtyüzlü ve küresel dörtyüzlü için schlafli diferansiyel formülü tanımlandı.

Anahtar sözcükler: Hiperbolik uzay, Polihedra, Dörtyüzlü, Schlafli diferansiyel formülü.

SUMMARY

VOLUME OF THE SIMPLEX IN HYPERBOLIC SPACE

ARKALI, Ebru

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc Professor Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

August 2010, 40 pages

In this work, volumes formula for arbitrary hyperbolic tetrahedra and ideal polyhedra in Hyperbolic space. In addition to define schlaflı diferantial formula for hyperbolic tetrahedra and spherical tetrahedra.

Keywords: , Hyperbolic space, Polyhedra, Tetrahedra, Schlaflı diferantial formula

ÖNSÖZ

Bu çalışma, değerli danışmanım Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT un katkılarıyla gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın geometri alanında çalışmalar yapanlara ve üniversitede bu konularda yapılan çalışmalara katkıda bulunmasını dilerim.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında baŐta emeği geöen Danışman Hocam Sayın Atakan Tuğkan Yakut'a, Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine, ve öğrenim hayatım boyunca bana ilgi ve desteklerini esirgemeyen çok değerli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
ÖNSÖZ	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
KISALTMA VE SİMGELER	x
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Lorentz-Minkowski Uzayı.....	3
2.2 Hiperbolik Uzay.....	5
BÖLÜM III. HİPERBOLİK UZAYDA SİMPEKSLERİN HACİM HESABI	9
3.1 Lobachevsky Fonksiyonu.....	10
3.2 Gram Matris.....	11
3.3 Hiperbolik Polihedranın Bilinen Bazı Hacim Formülleri.....	12
3.3.1 Orteşemaların hacmi.....	12
3.3.2 Dihedral açısı.....	13
3.3.3 İdeal dörtyüzlü ve ideal polihedranın Hacmi.....	15
3.3.4.Keyfi Hiperbolik Dörtyüzlü için Hacim Formülü.....	17
BÖLÜM IV. HİPERBOLİK DÖRTYÜZLÜ İÇİN SCHLAFLİ DİFERENSİYEL FORMÜLÜ	34
4.1. Hiperbolik Dörtyüzlünün Ayrıt Matrisi.....	35
4.2. Küresel Dörtyüzlünün Ayrıt Matrisi.....	37
BÖLÜM V. SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	40

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Coxeter dörtyüzlülerin hacimleri.....	33
-------------	---------------------------------------	----

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Hiperbolik uzayda jeodezikler.....	8
Şekil 3.1	Ortoşema.....	12
Şekil 3.2	İki Yüz Arasındaki Dihedral Açısı.....	13
Şekil 3.3	Dört yüzünün 6 Ortoşemaya Bölünmesi	16
Şekil 3.4	Ayrıtları Sonsuzda Olan Keyfi Dört yüzü.....	18
Şekil 3.5	H_1 İdeal polihedron.....	18
Şekil 3.6	H_2 İdeal polihedronu.....	19
Şekil 3.7	H_3 İdeal polihedronu.....	19
Şekil 3.8	H_4 İdeal polihedronu.....	20
Şekil 3.9	H_i İdeal polihedronunun Üç İdeal Dört yüzüye Bölünmesi.....	21
Şekil 3.10	İdeal polihedron 1.....	22
Şekil 3.11	İdeal polihedron 2.....	23
Şekil 3.12	H_1 in Dihedral Açılıarı.....	23
Şekil 3.13	H_2 nin Dihedral Açılıarı.....	24
Şekil 3.14	$(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ Polihedrasının Numaralanmış Yüzleri.....	26
Şekil 3.15	$(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ Polihedrasının Numaralanmış Yüzleri.....	26
Şekil 3.16	İdeal polihedron ve bir dört yüzü.....	27
Şekil 4.1	Hiperbolik Dört yüzü.....	34

KISALTMA VE SİMGELER

KISALTMA/SİMGE

R^n	n-boyutlu reel uzay
R_1^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
\wedge	Lobachevsky fonksiyonu
T	İdeal dörtyüzlü
OT	Ortoşema
E_1^3	Minkowski uzayı
$g(x, y)$	Öklidyen metrik
H^3	3- boyutlu hiperbolik uzay
$d_H(x, y)$	Hiperbolik metrik
G	Gram matris
H	Hacim
H_i^*	H_i nin hacmi
P	Konveks polihedron
N	Düzlem in normalı
$\ \cdot\ $	Lorentz normu
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$	Lorentz iççarpımı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Non-Öklidyen Geometriden söz edildiği zaman hemen akla Öklid' in beş temel postüladından beşincisi gelir. Çünkü Öklidyen olmayan Geometrilerin çıkışı bu beş temel postülattan beşincisine dayanmaktadır. Öklid' in beş temel postüladı aşağıdaki şekildedir.

- İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
- Bir doğru sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
- Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.
- Bütün dik açılar eşittir.
- Farklı iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğru ile aynı tarafta eş açılar oluşturursa iki doğru veya bunların uzantıları birbirini kesmez, veya uzantıları birbirini keserse kestiği tarafta oluşan açılar toplamı 180° den küçüktür.

Beşinci postüladın yerine paralellik postüladı(fair play) da kullanılmaktadır.

Paralellik postülata: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmayan bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel bir tek doğru geçer.

19. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış ve beşinci postülata değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlardır. Carl Friedrich Gauss(1777-1855), Lobachevski(1793-1856), Farkas(Wolfgang)(1775-1856), Janos Bolyai(1802-1860). Lobatshevski Öklidyen geometrinin Trigonometrik formüllerine dayanarak bir Non-Öklidyen trigonometri geliştirmiştir. Hiperbolik Non-Öklidyen geometrinin analitik çalışmasına esas gereksinim Euler, Gaspard Monge ve Gauss'un eğrisel yüzeyler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda ortaya çıkmıştır. Bernhard Riemann(1826-1866), bu yüzeylerin oldukça geniş bir genellemesini yapmıştır. Yapılar arasındaki bağıntılar Eugenio Beltrami tarafından 1868' de vurgulanmıştır. Sonuçta aşağıdaki postülata ulaşılmıştır.

Bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan birden çok doğru bulunabilir.

Bundan sonra;

Sabit eğrilikli üç farklı geometrinin varlığı kabul edilmiştir. Bunların üçü de Öklidin ilk dört postülatını aynen kullanırlar. Bu Öklidyen olmayan geometrilere birincisi beşinci postülatı “bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez” şeklinde alan Eliptik geometridir. Beltrami 1868 de ; bu gün adına Eliptik geometri dediğimiz Küresel Geometrinin Öklid Geometrisi ile uyuştüğunu göstermiştir İkincisi de “Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir” şeklindeki paralellik versiyonunu kullanan Hiperbolik geometridir. Hiperbolik geometri de benzer üçgenler kongrüenttir, bir üçgende açılarının toplamı 180° değildir gibi.

Diğer taraftan sabit eğrilikli Tam Semi Riemann manifoldlar da çok yüzlülerin hacim hesaplamaları oldukça ilginçtir. Bu doğrultuda bazı çalışmalar J.M. Schlenker tarafından yapılmıştır. J.M. Schlenker sabit eğriliği 1 olan tam Lorentz manifoldu olarak S_1^n de Sitter küresini göz önüne almıştır [1,2]. S_1^n de Sitter küresi ile H^n Hiperbolik uzayı R_1^{n+1} Minkowski uzayının alt manifoldları olarak göz önüne alındığında, bunlar arasında bir dualitenin varlığı söz konusudur. Bu ise S_1^n de Sitter küresindeki her bir v noktası, H^n Hiperbolik uzayının bir hiperdüzleminin birim normalisi olarak düşünülür [3]. Böylece S_1^n de Sitter küresindeki bir çok yüzlünün hacmi için Schlafli formülü, H^n deki hiperdüzlemlerin S_1^n ile arakesitinin oluşturduğu çokyüzlünün hacminin duali olur. $n=3$ için böyle bir formül Santalo tarafından verilmiştir[4]. Böyle bir dualite söz konusu olduğunda S_1^n de çokyüzlülerden bahsedilmektedir. Fakat S_1^n de alınan noktaların bir simplex olup olmadığı konusunda her hangi bir yorum yapılmamaktadır.

Bu çalışmada, Hiperbolik uzayda simplexlerin hacim hesabı ile ilgili formüller araştırılmıştır.

Bölüm II de, R_1^{n+1} Lorentz-Minkowski uzayında ve Hiperbolik uzayda temel tanımlar, Bölüm III ve Bölüm IV de ise Hiperbolik uzayda simplexlerin hacim hesabı ile ilgili formüller verilmiştir. Bölüm V de ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lorentz-Minkowski Uzayı

$x, y \in R^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad (2.1)$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte R^n uzayına Lorentz uzayı denir ve R_1^n ile gösterilir[5]. R_1^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu;

$$\|x\| = |\langle x, x \rangle_L|^{1/2}$$

ile, x ve y vektörünün Lorentz uzunluğu;

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır[5].

2.1.1. Tanım : R_1^n Lorentz uzayında, $\|x\| = 0$ olacak şekildeki bütün x lerin kümesine, yani;

$$\{ x \in R_1^n \mid x_n^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine ışık-konisi (light-koni) denir. $\|x\| = 0$ ise x vektörüne ışık benzeri(light-like veya null) vektör denir [5,6].

2.1.2. Tanım : $x \in R_1^n$ için, $\|x\| > 0$ ise x vektörüne uzay benzeri(space-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı; R_1^n nin uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir[5-7].

2.1.3. Tanım : $x \in R_1^n$ için, $\|x\| < 0$ oluyorsa x vektörüne (time-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi; R_1^n nin zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer, $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ise x vektörüne pozitif(negatif) zaman benzeri denir[5-7].

2.1.4. Tanım : $x, y \in R_1^n$ için, $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x, y vektörlerine Lorentz ortogonal dir denir[5].

2.1.5. Teorem : x, y vektörleri, R_1^n de sıfırdan farklı Lorentz ortogonal iki vektör olsun. Eğer x vektörü zaman benzeri(time-like) ise, y vektörü uzay benzeri(space-like)dir.

İspat: [5] sayfa 60-61 den görülebilir.

2.1.6. Önerme : R_1^n nin bir V alt vektör uzayının;

1. Zaman benzeri olması için gerek ve yeter şart V nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır,
2. Uzay benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır,
3. Işık benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektör için $\|x\| = 0$ olmasıdır[5,6].

İspat: [5] den görülebilir.

2.1.7. Tanım : x ve y, R_1^n de pozitif(negatif) zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\|\|y\|\cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. x ve y arasındaki Lorentz zaman benzeri (time-like)açı, $\eta(x, y)$ olarak tanımlanır[5,7].

2.2. Hiperbolik Uzay

$x, y \in R^{n+1}$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1}$$

olmak üzere; $H_0^n = \{x \in R_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$ kümesine de n -boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir. H_0^n uzayının iki bağlantılı bileşeni $H_{0,+}^n$ ve $H_{0,-}^n$ olmak üzere, bu bileşenlerin her biri n -boyutlu hiperbolik uzayın bir modeli olarak alınabilir. $H_+^n = H^n \subset R_1^{n+1}$ olarak alınacaktır.

2.2.1. Tanım : $x, y \in H^n \subset R_1^{n+1}$ ve x ile y arasındaki Lorentzian zaman benzeri açı $\eta(x, y)$ olsun. x ve y arasındaki hiperbolik uzunluk;

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır. $\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$ olduğundan;

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

olur[5,6].

2.2.2. Teorem : d_H hiperbolik uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir.

İspat: [5] den görülebilir.

2.2.3. Tanım : d_H metriği ile birlikte H^n uzayı hiperbolik n -uzay olarak adlandırılır[5].

2.2.4. Tanım : H^n nin bir doğrusu R_1^{n+1} in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri R^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir

zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece, $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$, x, y den geçen içeren H^n nin bir doğrusudur. Buna göre, H^n nin jeodezikleri onun doğrularıdır[5].

2.2.5. Tanım : S_1^n nin bir m -düzlemi R_1^{n+1} in $(m+1)$ boyutlu zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri alt vektör uzayları ile S_1^n nin arakesitidir[5].

S_1^n nin bir 1-düzlemi, onun uzay benzeri, ışık benzeri veya zaman benzeri doğruları, hiperbolik $(n-1)$ -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır.

2.2.6. Tanım : X in bir alt kümesi C olsun. Her $x, y \in C$ ayrık çifti için x ve y yi içeren doğru parçası C de kalıyorsa ($X=S^n$ için $y \neq -x$), C kümesine konveks küme denir[5].

2.2.7. Tanım : X in bir H hiperdüzlemi, X uzayını iki yarı-uzaya böler. Bu yarı-uzayların sınırı hiperdüzlemdir[6].

2.2.8. Tanım : Eğer x_0, x_1, \dots, x_n noktaları $n^?$ den daha küçük boyutlu bir düzlemde kapsamıyorsa bu nokta kümesine genel durumludur denir[6].

2.2.9. Tanım : X de bir konveks polihedron, boştan farklı sonlu sayıda H_i kapalı yarı-uzaylarının arakesitinden oluşur ve;

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_i$$

şeklinde ifade edilir[6].

2.2.10. Tanım : X de n -boyutlu bir konveks polihedron P olsun. $k=1, \dots, n+1$ için P nin bir k -yüzü(face), P nin $(k+1)$ yüzünün bir kenarı olarak tanımlanır[5].

2.2.11. Tanım : X de n -boyutlu bir konveks polihedron P olsun. P nin 0-yüzüne, P nin tepesi(vertex) denir[5].

2.2.12. Tanım : X in her bir A alt kümesi için, A yı içeren X in bütün konveks alt kümelerinin arakesatine A nın konvekslik bölgesi denir[5].

2.2.13. Tanım : X de n -boyutlu bir polihedron P olsun. Eğer P nin sonlu sayıda tepe noktası varsa ve P , bu tepelerin konvekslik bölgesi ise ($P \in S^n$ için antipodal noktaları içermezse) P ye çok tepeli (politop)denir[5].

2.2.14. Tanım : X de $(n+1)$ tepe noktalı, n -boyutlu bir politopa bir n -simpleks denir. 2-boyutlu simplekse üçgen, 3-boyutlu simplekse dörtyüzlü(tetrahedron) denir[5].

2.2.15. Tanım : Ω , X de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tepeli bir n -simpleks ve Ω n -simpleksinin v_i tepesinin karşısındaki yüzde Ω_i olsun. $\Omega_i \cap \Omega_j$ üzerindeki açığa dihedral açı denir ve θ_{ij} ile gösterilir($\theta_{ii} = \pi$)[8,9].

2.2.16. Tanım : Ω , $H^n(S^n)$ de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tepeli bir n -simpleks olsun. Ω 'nın tepeleri arasındaki hiperbolik uzaklık(küresel uzaklık) $\phi_{ij} = \arccos h(-\langle v_i, v_j \rangle_L)$ ($\phi_{ij} = \arccos(\langle v_i, v_j \rangle)$) şeklindedir. Ω hiperbolik n -simpleksinin (küresel n -simpleksinin) her hangi iki v_i, v_j tepesi arasındaki uzaklığa Ω nın bir ayrıt uzunluğu denir[8,9].

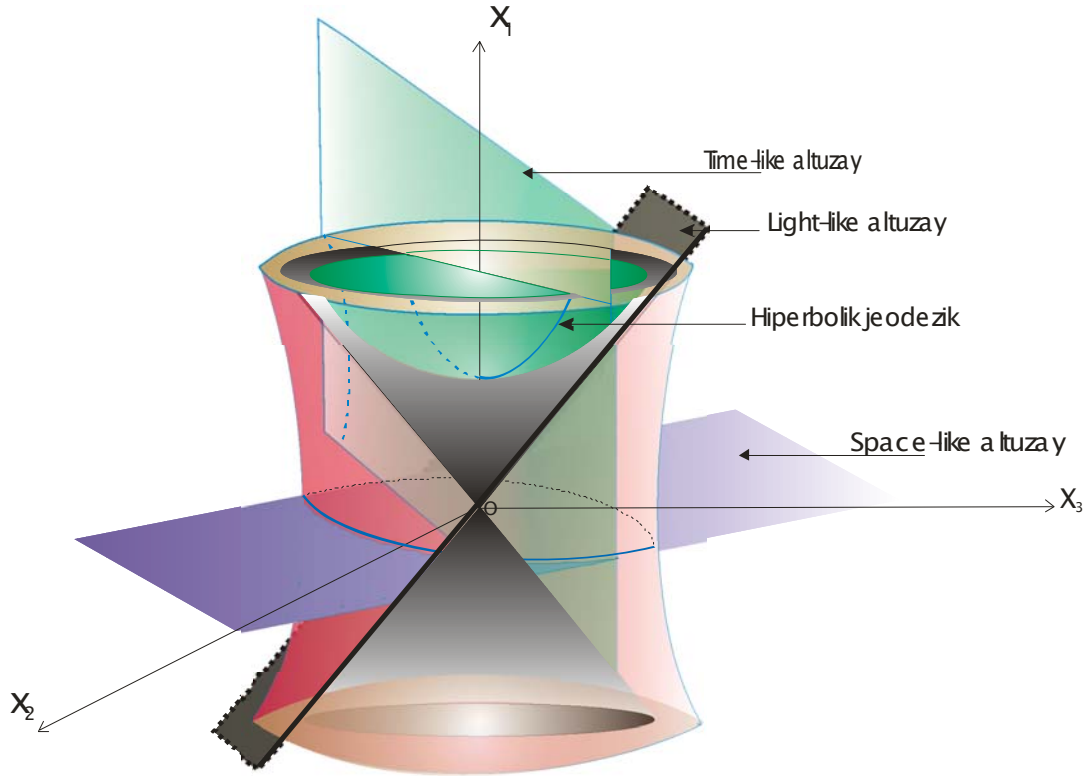
2.2.17. Tanım : Ω , v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tepeli hiperbolik veya küresel n -simpleks olsun. $G = [-\cos \theta_{ij}]$ simetrik matrisine Ω nın Gram matrisi denir[8,9].

2.2.18. Tanım : Ω , v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tepeli hiperbolik(küresel) n -simpleks olsun. $M = [\langle v_i, v_j \rangle] = [-\cosh \phi_{ij}]$ ($M = [\langle v_i, v_j \rangle] = [\cos \phi_{ij}]$) simetrik matrisine Ω hiperbolik(küresel) n -simpleksinin ayrıt matrisi denir[8,9].

2.2.18. Teorem : Ω , X de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tepeli bir n -simpleks ($n \geq 1$) ve Ω_i, Ω_j ($n-1$)-boyutlu yüzleri olsun. $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$, Ω nın 2-eş boyutlu yüzü, bu yüzdeki dihedral açılar θ_{ij} ($0 \leq i < j \leq n+1$) olmak üzere;

$$KdV(\Omega) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n+1} Vol_{n-2}(\Omega_{ij}) d\theta_{ij} \quad (Vol_0(\Omega_{ij}) := 1)$$

Burada K uzayın eğriliği ve $V = Vol_n$ hacim fonksiyonudur[5].



Şekil 2.1. Hiperbolik uzayda jeodezikler

BÖLÜM III

3. HİPERBOLİK UZAYDA SİMPEKSLERİN HACİM HESABI

Öklidyen, hiperbolik ya da küresel uzayda polihedralar çok önemli geometrik objedir ve konveks polihedranın hacminin hesabı çok eski fakat oldukça zor bir geometrik problemdir. Hiperbolik manifold teoride ki son gelişmelerden dolayı, bu işlem matematik dünyasında geniş bir yer almaya başlamıştır. Bilindiği üzere her hiperbolik manifold, hiperbolik uzayda bir konveks polihedranın sonsuz yüzeylerinden ibarettir. Hacim hesaplamasının temelini dihedral açılar oluşturur özellikle hiperbolik izometri alt grupları bu teori için oldukça kullanışlıdır.

Bir polihedron simplekslere tekrar tekrar bölünebilir, ilk adımda bir simpleksin hacmini göz önüne alalım. Bu çalışmada amaç üç boyutlu hiperbolik simpleksin hacim formülünü bulmaktır. Küresel simpleksin hacim formülü yalnızca farklı formlarda bir hiperbolik sabittir ve bu çalışmada sadece hiperbolik hacimle ilgilenilmiştir.

Öklidyen olmayan uzayda dörtyüzlünün hacmi dihedral açılarla kolaylıkla ifade edilemez. 19. yüzyılın ilk çeyreğinde Lobachevski, özel bir fonksiyon olan Lobachevski fonksiyonunu dihedral açılar üzerinde kullanarak hiperbolik 3- ortoşemanın hacim formülü ifade etti. Herhangi bir dörtyüzlü, ortoşemaların cebirsel toplamı olarak gösterilebilir, bu formül herhangi bir dörtyüzlünün hacmi için yeterlidir. Bundan dolayı yeni dihedral açılar kullanılmıştır öyle ki; dörtyüzlü ortoşemalara ayrılmıştır.

İdeal dörtyüzlü için Milnor'un ifade ettiği hacim formülü, herhangi bir tepenin dihedral açılarının Lobachevski fonksiyonu altında ki değerlerinin toplamı şeklinde çok kolay bir yolla ifade edilebilmesidir. Genel olarak en az bir tepesi sonsuzda olan düzgün dörtyüzlünün hacim formülü. Vinberg'den dolayı vardır. O, n-piramidin sonsuz tepe de bir hacim formülü bulmuştur [10]. Bundan dolayı kompakt polihedranın bilinen kapalı hacim formüllerinin örnekleri çok yoktur (bak [11] ve [12]). Özellikle [11] de Kellerhals , ortoşemaların hacim formülüne benzer olarak 1-tepeden kesik yada 2-tepeden kesik ortoşemaların hacim formülünü göstermiştir. O ayrıca Lambert küpünün hacim formülünü de bulmuştur.

İdeal bir polihedronun şeklini inceleyecek olursak yüzler simpleksi verir ve dikkat edecek olursak polihedranın uygun kombinasyonu simpleksin hacmini verir. Elbette ki ideal polihedronun hacmi, Milnor formülü kullanılarak hesaplanabilir. Bu taktirde 3-ortaşema için Lobachevski formülü çıkarılır ve genel formülden dörtyüzlünün özel tipleri için bilinmeyen basit iki formül elde edilir. Meyerhoff [13] sadece nümerik değerlerde bütün Coxeter dörtyüzlülerin hacmini belirlemek için ortoşemalara ayırarak kullanmıştır. Çizelge 3.1 de Lobachevski fonksiyonuna dayanan bütün Coxeter dörtyüzlülerinin hacimlerinin basit bir gösterimini verilmiştir.

3.1. Lobachevski Fonksiyonu

H^3 3- Boyutlu hiperbolik uzayda polihedranın hacmi, dihedral açılarının Lobachevski fonksiyonu ile ifade edilir. Bu tanımda Lobachevski fonksiyonu \wedge ile gösterilmiştir ve formülü;

$$\wedge(x) = -\int_0^x \log|2 \sin t| dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

\wedge fonksiyonu tek ve periyodu π olan periyodik bir fonksiyondur. $\frac{n\pi}{2}$ de sıfırdır ve

$n\pi + \frac{\pi}{6}$ da maksimum değerini, $n\pi - \frac{\pi}{6}$ minimum değerini alır.

Her bir n doğal sayısı için, $\wedge(x)$ fonksiyonel eşitlik:

$$\wedge(nx) = n \sum_{k=0}^{n-1} \wedge\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) \quad (3.1)$$

$n = 2$ için,

$$\wedge(2x) = 2 \wedge(x) + 2 \wedge\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.2)$$

şeklindedir.

3.2. Gram Matris

H^3 hiperboloid modelinde H^3 Lorentz $R^{1,3}$ ün içine gömülmüştür. Burada $R^{1,3}$ gösterimi R^4 reel vektör uzayıdır ve bilinear form gösterimi:

Her $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in R^4$ için

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklindedir, Buradan H^3 şu şekilde ifade edilebilir

$$H^3 = \{x \in R^{1,3} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

$P \subset H^3$ bir konveks polihedron ve sonlu yüzeyleri F_i , $i \in I$ olsun. Konveks polihedronun her bir yüzüne ait birim normal vektörler $e_i \in R^{1,3}$ ler olup, P nin birim normal dış vektörüdür. Böylece

$$F_i \subset e_i^\perp := \{x \in R^{1,3} \mid \langle x, e_i \rangle = 0\}$$

yazılabilir.

Gram matris $G(P) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$ $i \in I$ simetrik matristir ve rankı 4 dür. Şekil (1.3)

Genel olarak, n-boyutlu non-öklidyen polihedronun gram matrisinin rankı n+1 dir.

n- boyutlu non Euclidean polihedronun gram matrisinin rankı n dir.

$\langle e_i, e_j \rangle$ geometrik tanımı:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} -\cos \angle(e_i^\perp, e_j^\perp), & e_i^\perp, e_j^\perp \text{ eğer kesişirse,} \\ -1 & e_i^\perp, e_j^\perp \text{ paralel ise,} \\ -\cosh d(e_i^\perp, e_j^\perp), & e_i^\perp, e_j^\perp \text{ ultra paralel ise} \end{cases} \quad (3.3)$$

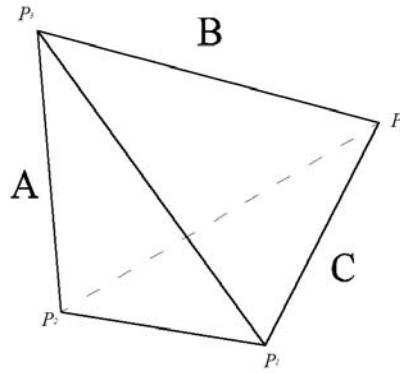
şeklindedir.

Burada $\angle(e_i^\perp, e_j^\perp)$, e_i^\perp ve e_j^\perp arasındaki açıyı, $d(e_i^\perp, e_j^\perp)$ de e_i^\perp ve e_j^\perp arasındaki uzaklığı gösterir.

3.3. Hiperbolik Polihedranın Bilinen Bazı Hacim Formülleri

3.3.1. Ortoşemaların hacmi

Öklidyen , hiperbolik ve küresel uzayda, ortoşemalar polihedral geometrinin en temel objeleridir. Bundan dolayı keyfî bir polihedron, ortoşemaların cebirsel toplamı olarak gösterilebilir.



Şekil 3.1 Ortoşema

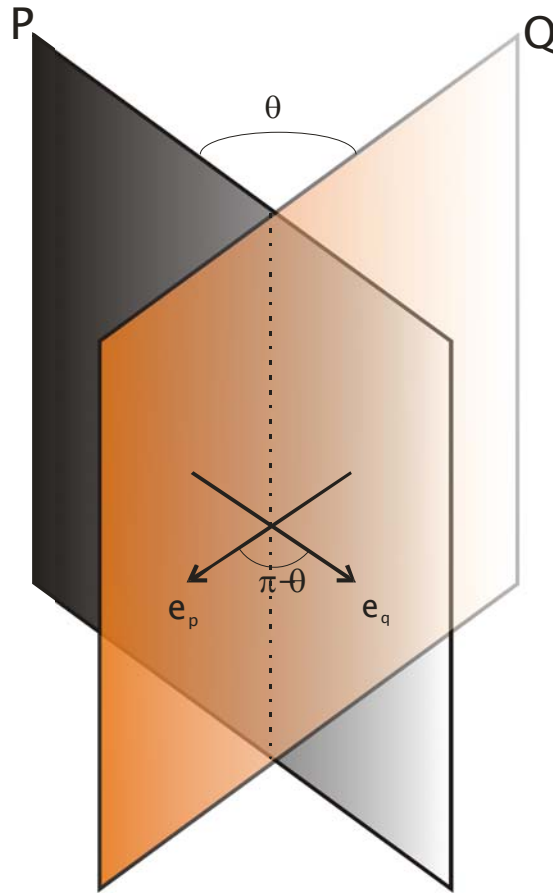
Genel olarak tepeleri p_0, \dots, p_n olan bir n-ortoşema sınırlı bir n-simpleksdir. Öyle ki $\text{span}(p_0, \dots, p_i) \perp \text{span}(p_i, \dots, p_n)$, $i=1, \dots, n-1$.

3-boyutlu durumda ortoşema $p_0p_1p_2p_3$ olarak alındığında, p_0p_1 ayrıtı $p_1p_2p_3$ düzlemine diktir ve $p_0p_1p_2$ düzlemi de p_2p_3 ayrıtına diktir. Ortoşemalar da altı dihedral açı vardır ve bunların üç tanesi dik açılardır. Diğerleri A, B, C olarak verilmiştir. $OT(A, B, C)$ ortoşema A, B, C dihedral açıları ve A, B, C dihedral açılarına karşılık gelen uzunluklar a, b, c olsun. $OT(A, B, C)$ nin gram matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Gram}(OT(A, B, C)) = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & 0 & 0 \\ -\cos A & 1 & -\cos B & 0 \\ 0 & -\cos B & 1 & -\cos C \\ 0 & 0 & -\cos C & 1 \end{pmatrix},$$

ve determinantı $\Delta = \sin^2 A \sin^2 C - \cos^2 B$ dir.

3.3.2. Dihedral açı: P ile Q , R^{n+1} de iki hiper düzlem olmak üzere sırasıyla P ve Q nun dış birim normalleri e_p ve e_q olmak üzere e_p ile e_q arasında ki açı θ ise P ile Q hiperdüzlemleri arasında ki açı $\pi - \theta$ dir. Bu ise bu iki hiperdüzlem arasında ki dihedral açı olarak tanımlanır.



Şekil 3.2 İki Yüz Arasındaki Dihedral Açı

H^3 de ortoşemaların dihedral açıları $A, B, C \in (0, \pi)$ olup bu durum; Δ nın negatif değerli olması için gerek ve yeterdir. A, B, C için :

$$A + B \geq \frac{\pi}{2}, \quad C + B \geq \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$

şartları mevcuttur.

Diğer bir önemli özellik ise:

$$\tan A \tanh a = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \tanh b = \tan C \tanh c = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cos A \cos C} \quad (3.5)$$

şeklinde olmasıdır.

Genellikle belirli bir δ açısı için eşitlik:

$$\tan \delta := \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cos A \cos C}, \quad \text{ve } \delta \leq \min\{A, C, \pi/2 - B\} \text{ dir.}$$

Not: Ortoşemaların hacmi Lobachevski ' ye dayalı bir hacim formülü ile hesaplanabilir;

$$H(OT(A, B, C)) = \frac{1}{4} \left[\wedge(A + \delta) - \wedge(A - \delta) + \wedge(C + \delta) - \wedge(C - \delta) \right. \\ \left. - 2 \wedge\left(-\frac{\pi}{2} - B + \delta\right) + \wedge\left(\frac{\pi}{2} - B - \delta\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right]$$

(3.6)

yazılabilir ve

$$0 \leq \delta = \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cos A \cos C} < \frac{\pi}{2}$$

şeklindedir.

3.3.3. İdeal dörtyüzlü ve ideal polihedranın hacmi

Bütün tepeleri sonsuzda olan dörtyüzlü T olsun. Bu durumda bu tepeler ideal tepeler ve bu dörtyüzlü ideal dörtyüzlü olarak adlandırılır.

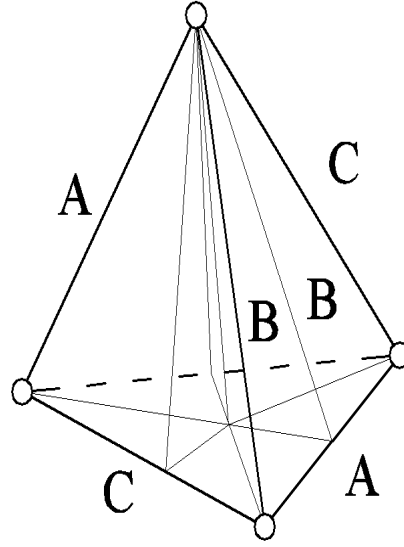
$T(A, B, C, A', B', C')$ bir dörtyüzlü, A, B, C ve A', B', C' dihedral açılar olsun. Burada A ve A' karşılıklı ayrıtların dihedral açılarıdır. Benzer şekilde B, B' ve C, C' gibi. Herhangi bir tepesi sonsuzda olan bir dörtyüzlünün dihedral açılarının toplamı, tepenin merkezinden yeteri kadar küçük bir horoküre ile kestiğimiz zaman bir Öklid üçgen elde edilir ki bundan dolayı π ye eşit olur. Böylece $T(A, B, C, A', B', C')$ ideal dörtyüzlüsü için dört eşitlik yazılabilir. Bunlar $A = A', B = B', C = C'$ ve $A + B + C = \pi$ dir.

$OT(A, B, C)$ ideal dörtyüzlüsünün hacmini altı ortoşema vasıtasıyla hesaplanır. Herhangi bir tepeden düzleme bir dik indirilir ve buradan karşılıklı yüzlere doğrular çizilir.(Şekil 3.2). Burada altı ortoşemanın her iki dihedral açısını alınarak: $(A, \pi/2 - A, A)$, $(B, \pi/2 - B, B)$ ya da $(C, \pi/2 - C, C)$, (3.6) denkleminde altı ortoşemanın hacmini kolaylıkla bulunabilir.

Bu yüzden;

$$\begin{aligned} H(IT(A, B, C)) &= 2hOT(A, \pi/2 - A, A) + 2hOT(B, \pi/2 - B, B) + 2hOT(C, \pi/2 - C, C) \\ &= \wedge(A) + \wedge(B) + \wedge(C) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bu formül ilk olarak Milnor tarafından bulunmuştur [14].



Şekil 3.3 Dörtüzlünün 6 Ortoşemaya Bölünmesi

Buradaki en önemli sonuç ideal polihedranın yada başka bir deyişle ideal konveks hiperbolik polihedranın; dihedral açılarının determinantının tek olmasıdır. Milnor formülüne göre çeşitli ideal polihedraların hacim formülleri hesaplanabilir. Öyle ki ideal küp, ideal piramid, ideal düzgün prizma ideal düzgün zıt prizma gibi... Buna rağmen ideal oktahedron, ideal dodekahedron yada ideal ikosahedron , bu polihedranın hacim formülünden bilinemeyebilir. İdeal oktahedra ve diğerlerinin hacim formülleri için ilk iddia yazılabilir.

Bir ideal tepesi olan dörtüzlünün hacmi $IT(A, B, C, A', B', C,)$, $n = 3$ için n – piramidin hacmi hesaplanabilir.(bak. [15] ya da [10]). Dörtüzlünün hacim formülünde ideal tepe istenildiği gibi değiştirilebilir ve bir yada bir çok simetrik formül tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
 & H(IT(A, B, C, A', B', C,)) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\wedge \left(\frac{A - B - C + \pi}{2} \right) + \wedge \left(\frac{-A + B - C + \pi}{2} \right) + \wedge \left(\frac{-A - B + C + \pi}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\wedge\left(\frac{A+B+C+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2}\right) \\
& +\wedge\left(\frac{-A+B'-C'+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{-A-B'+C'+\pi}{2}\right) \\
& -\wedge\left(\frac{A+B'+C'+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{A'-B-C+\pi}{2}\right) \\
& +\wedge\left(\frac{-A'+B-C'+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{A'-B'+C+\pi}{2}\right) \\
& -\wedge\left(\frac{A'+B+C'+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{A'-B'-C+\pi}{2}\right) \\
& +\wedge\left(\frac{-A'+B'-C+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{-A'-B'+C+\pi}{2}\right) \\
& -\wedge\left(\frac{A'+B'+C+\pi}{2}\right)+\wedge\left(\frac{A'+A'+B+B'}{2}\right) \\
& +\wedge\left(\frac{A'+A'+C+C'}{2}\right)+\wedge\left(\frac{B+B'+C+C'}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

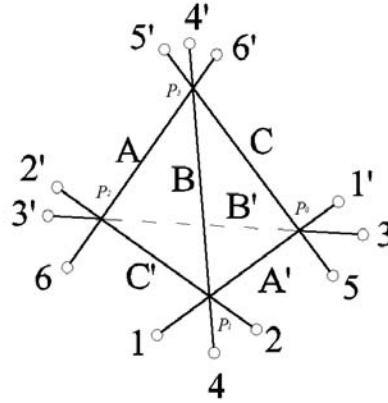
yazılır.

3.3.4. Keyfi hiperbolik dörtyüzlü için hacim formülü

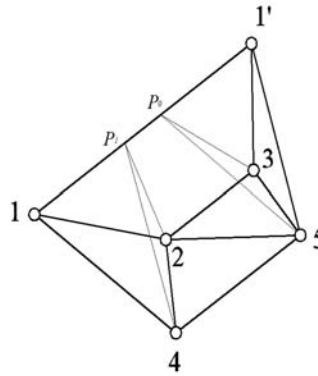
Her bir ayrıtı sonsuzda olan keyfi kompakt dörtyüzlünün T için hacim formülü oluşturabilir. İdeal polihedralar H_1, H_2, H_3 ve H_4 olsun.

6 ayrıtı sonsuza uzanan, p_0 ve p_1 yaklaşık olarak tam tepede, T dörtyüzlüsünün dışındadır ve $1, 1', 2, 3, 4$ ve 5 ideal noktalar. Bundan dolayı düzlemleri $(1, 2, 3, 1')$ $(1, 4, 5, 1')$ $(1, 2, 4)$ $(1', 3, 5)$ $(2, 3, 5)$ ve $(2, 4, 5)$ şeklinde alınabilir. Bu H_1 , ideal polihedronu olarak kabul edilir. H_1 ideal polihedronu, bir ideal hexahedron ve ideal bir prizmadan ibarettir. Eğer, düzlemler $(2, 3, 5)$ ve $(2, 4, 5)$ ve tek bir düzlem $(2, 3, 5, 4)$ birbirine uyarsa; $(2, 5)$ kenar ayrıtının dihedral açısı π 'den daha küçüktür, bundan dolayı, H_1 hexahedronu konveks bir polihedron olur. H_2, H_3 ve H_4 ideal polihedronların yapıları da benzerdir.

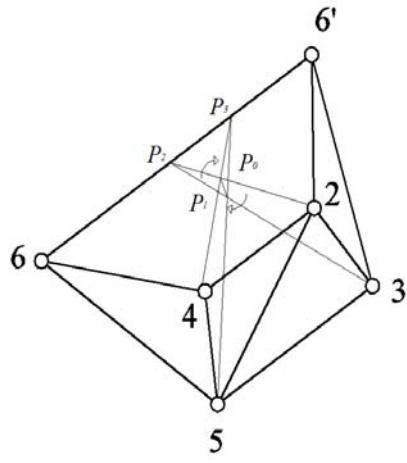
H_1, H_2, H_3 ve H_4 ideal polihedronların her bir cebirsel olarak daha küçük parçalara bölünebilirler. H_1 ideal polihedronu $(p_1, 1, 2, 4)$ ve $(p_0, 1', 3, 5)$ şeklinde iki dörtyüzlü ve bir $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ şeklinde pozitif polihedronuna ayrışabilir ve H_2 'de $(p_3, 4, 5, 6)$ ve $(p_2, 2, 3, 6')$ şeklinde iki dörtyüzlü ile $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ şeklinde pozitif bir polihedron ile $(p_0, p_1, p_2 p_3)$ şeklinde negatif bir dörtyüzlü olarak ayrışır. Benzer olarak H^3 , $(p_2, 2', 3', 6)$ ve $(p_3, 4', 5', 6')$ şeklinde iki dörtyüzlü ile, $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ şeklinde bir pozitif polihedron; H_4 ideal polihedronu ise; $(p_0, 1, 3', 5')$ ve $(p_1, 1', 2', 4')$ şeklinde iki pozitif bir dörtyüzlü ile $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ şeklinde bir pozitif polihedron ve de $(p_0, p_1, p_2 p_3)$ şeklinde negatif bir dörtyüzlü olarak ayrışır (şekil 3.7 ve şekil 3.8).



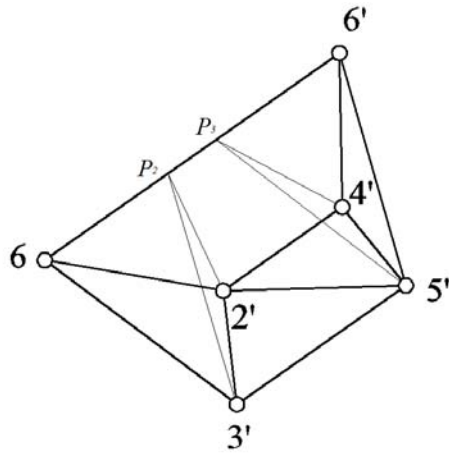
Şekil 3.4 Ayrıtları Sonsuzda Olan Keyfi Dörtyüzlü



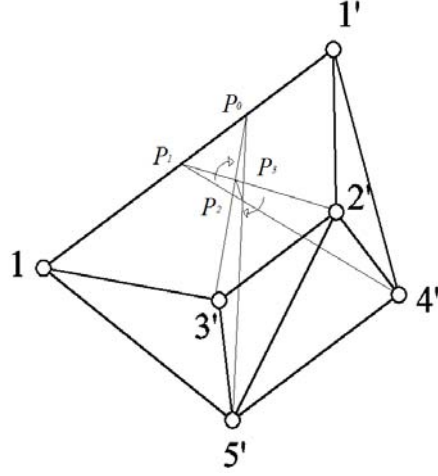
Şekil 3.5 H_1 İdeal polihedronu



Şekil 3.6 H_2 İdeal polihedronu



Şekil 3.7 H_3 İdeal polihedronu



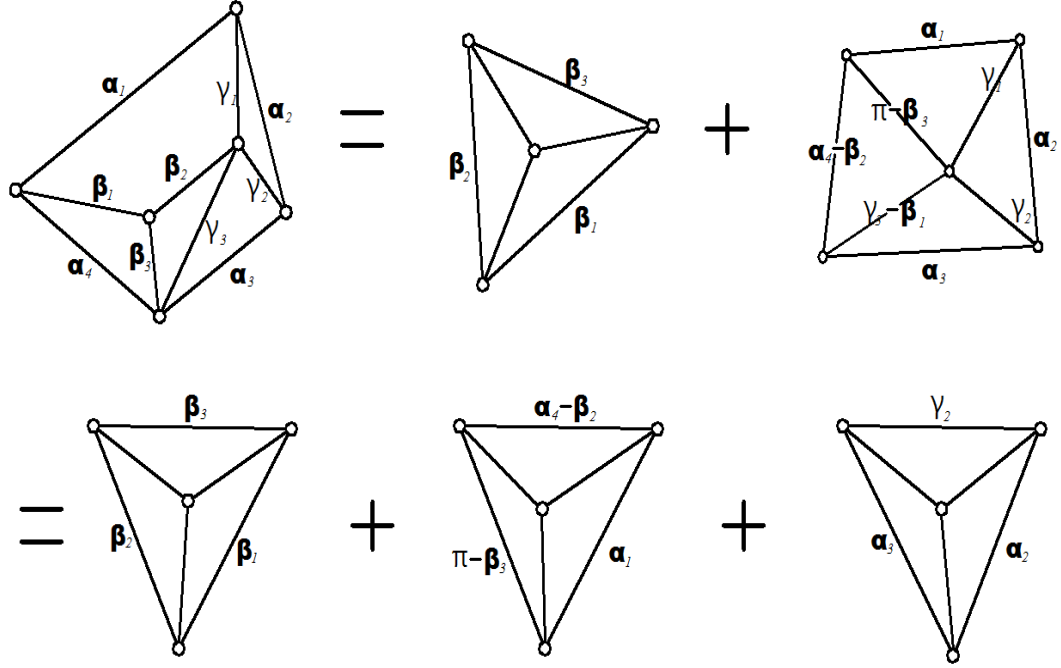
Şekil 3.8 H_4 İdeal polihedronu

Burada şu ilişkilendirmeyi yapılabilir: H_i^* , $i=1 \dots n$ için H_i nin hacmini göstermek üzere;

$$\begin{aligned}
& H_1^* - H_2^* + H_3^* - H_4^* \\
&= [H(p_1, 1, 2, 4) + H(p_0, 1', 3, 5) + H(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)] \\
&\quad - [H(p_3, 4, 5, 6) + H(p_2, 2, 3, 6') + H(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3) - H(p_0, p_1, p_2, p_3)] \\
&\quad + [H(p_2, 2', 3', 6) + H(p_3, 4', 5', 6') + H(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')] \\
&\quad - [H(p_0, 1, 3', 5') + H(p_1, 1', 2', 4') + H(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4') - H(p_0, p_1, p_2, p_3)] \\
&= [H(p_1, 1, 2, 4) - H(p_1, 1', 2', 4')] + [H(p_0, 1', 3, 5) - H(p_0, 1, 3', 5')] \\
&\quad + [H(p_2, 2', 3', 6) - H(p_2, 2, 3, 6')] + [H(p_3, 4', 5', 6') - H(p_3, 4, 5, 6)] \\
&\quad + 2H(p_0, p_1, p_2, p_3) \\
&= 2H(T)
\end{aligned}$$

Burada $(p_1, 1, 2, 4)$ ve $(p_1, 1', 2', 4')$ dörtyüzlüleri p_1 noktasına göre simetriktir ve böylece bu ikisi izometrik ve aynı hacimlidir. Benzer şekilde T de herhangi bir tepeden diğer noktalara göre simetriktir. Bir önceki eşitlikten dolayı

H_i combinatorial ideal polihedronu üç ideal dörtyüzlüye bölünebilir(şekil 3.9). H_i nin hacim formülü oluşturulurken dihedral açılarla gösterilse bile H_i konveks değildir.



Şekil 3.9 H_i İdeal polihedronunun Üç İdeal Dörtyüzlüye Bölünmesi

H_i ideal polihedronunun hacmi, Milnor formülüne göre:

$$\begin{aligned}
 H_i^* &= [\wedge(\beta_1) + \wedge(\beta_2) + \wedge(\beta_3)] + [\wedge(\alpha_1) + \wedge(\pi - \beta_3) + \wedge(\alpha_4 - \beta_2)] \\
 &\quad + [\wedge(\alpha_2) + \wedge(\alpha_3) + \wedge(\gamma_2)] \\
 &= \wedge(\beta_1) \wedge(\beta_2) + \wedge(\alpha_1) + \wedge(\alpha_4 - \beta_2) + \wedge(\alpha_2) + \wedge(\alpha_3) + \wedge(\gamma_2)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklindedir.

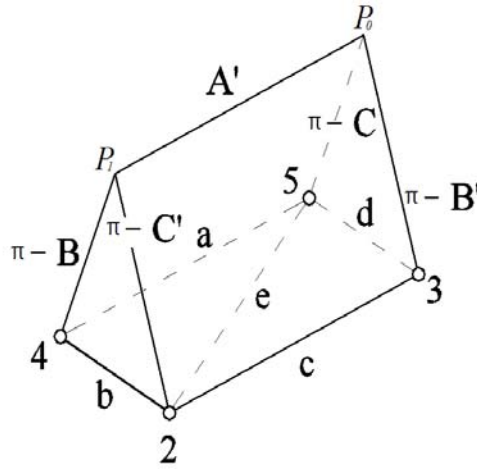
H_i ideal polihedronu dört yüzlülere bölündüğü zaman oluşan dihedral açılar orijinal T dört yüzlüsünün dihedral açılarından yararlanılarak bulunur ve açı şartları ideal tepeler etrafındadır. Bundan dolayı $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ ve $(p_0, p_1, 2', 3', 4', 5')$ polihedronun dihedral açıları orijinal T dörtyüzlüsünün dihedral açılarını kesin olarak tamamlamaz.

Bu yüzden bu polihedronun kesin olmayan açılarını a, b, c, d ve a', b', c', d' ile gösterilir (şekil 3.10 ve şekil 3.11). İdeal tepelere göre açılarının durumlarından dolayı şu eşitlikleri yazabilir:

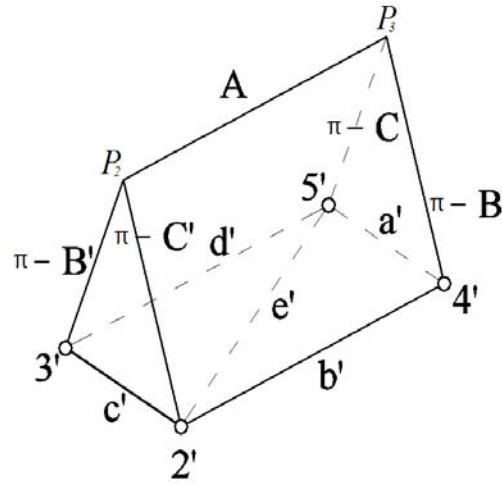
$$\begin{aligned} a+b &= B, & c+d &= B', & b+c+e &= C' & a+d+e &= C, \\ a'+b' &= B, & c'+d' &= B', & b'+c'+e' &= C' & a'+d'+e' &= C. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.10) deki eşitlikler kolaylıkla değiştirilebilir:

$$\begin{aligned} a+b &= B, & b+c &= (B+B'-C+C')/2, & e &= (C+C'-B-B'+2\pi)/2, \\ c+d &= B', & a+d &= (B+B'+C-C')/2, \\ a'+b' &= B, & b'+c' &= (B+B'-C+C')/2, & e' &= (C+C'-B-B'+2\pi)/2, & c'+d' &= B', \\ a'+d' &= (B+B'+C-C')/2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

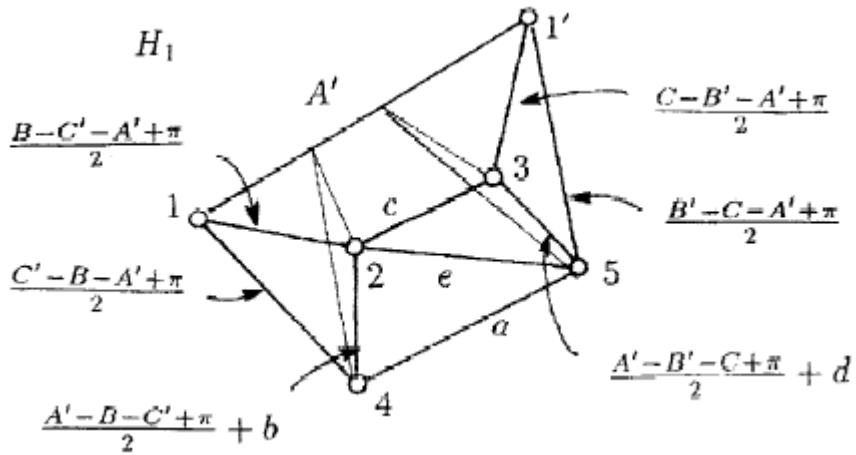


Şekil 3.10 İdeal polihedron 1

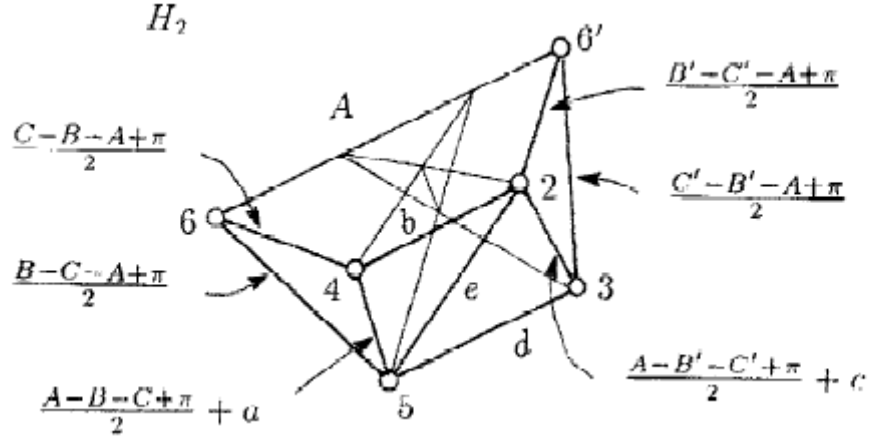


Şekil 3.11 İdeal polihedron 2

Bilinmektedir ki $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ ve $(p_0, p_1, 2', 3', 5', 4')$ her bir polihedronun bir bilinmeyen değişkeni vardır. Bilinmeyen değişkeni belirlemek için dihedral açılar hakkında daha çok bilgi gerekir. Bu da gram matristen faydalanılarak bulunur. İdeal tepe şartlarından ve (3.9) denkleminde H_1 ve H_2 için hacim formülü belirlenebilir. H_1 ve H_2 için dihedral açılar şekil 3.12 ve şekil 3.13 de görüldüğü gibidir.



Şekil 3.12 H_1 in Dihedral Açılıarı



Şekil 3.13 H_2 nin Dihedral Açılı

$$H_1^* = \wedge(A') + \wedge\left(\frac{C'-B-A'+\pi}{2}\right) + \wedge(a) + \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2} - c\right) \\ + \wedge\left(\frac{C-B'-A'+\pi}{2}\right) + \wedge(c) + \wedge\left(\frac{A'-B'-C'+\pi}{2} + b\right)$$

$$H_2^* = \wedge(A) + \wedge\left(\frac{C'-B'-A+\pi}{2}\right) + \wedge(d) + \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - b\right) \\ + \wedge(b) + \wedge\left(\frac{C-B-A+\pi}{2}\right) + \wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2} + c\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$H_1^* - H_2^* = \wedge(A') + \wedge(A) + \wedge\left(\frac{C'-B-A'+\pi}{2}\right) - \wedge\left(\frac{C'-B'-A+\pi}{2}\right) \\ + \wedge\left(\frac{C-B'-A'+\pi}{2}\right) - \wedge\left(\frac{C-B-A+\pi}{2}\right) \\ + \wedge(a) - \wedge(b) + \wedge(c) - \wedge(d) \\ + \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2} - c\right) + \wedge\left(\frac{A'-B-C'+\pi}{2} + b\right)$$

$$-\wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2}-b\right)-\wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2}+c\right)$$

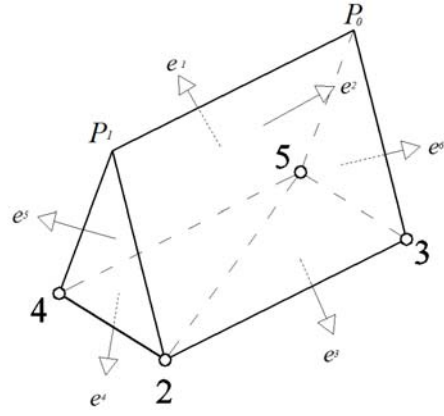
yazılabilir. Benzer şekilde:

$$\begin{aligned} H_3^* - H_4^* &= \wedge(A) - \wedge(A') + \wedge\left(\frac{C-B-A+\pi}{2}\right) - \wedge\left(\frac{C-B'-A'+\pi}{2}\right) \\ &+ \wedge\left(\frac{C'-B'-A+\pi}{2}\right) - \wedge\left(\frac{C'-B-A'+\pi}{2}\right) \\ &- \wedge(a') + \wedge(b') - \wedge(c') + \wedge(d') \\ &+ \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2}-b'\right) + \wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2}+c'\right) \\ &- \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2}-c'\right) - \wedge\left(\frac{A'-B-C'+\pi}{2}+b'\right) \end{aligned}$$

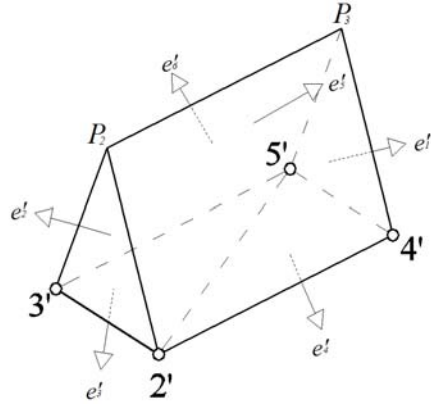
yazılabilir. Sonuç olarak:

$$\begin{aligned} 2H(T) &= H_1^* - H_2^* + H_3^* - H_4^* \\ &= \wedge(a) - \wedge(b) + \wedge(c) - \wedge(d) + \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2}-c\right) \\ &+ \wedge\left(\frac{A'-B-C'+\pi}{2}\right) - \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2}-b\right) \\ &- \wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2}+c\right) - \wedge(a') + \wedge(b') - \wedge(c') + \wedge(d') \\ &+ \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2}-b'\right) + \wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2}+c'\right) \\ &- \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2}-c'\right) - \wedge\left(\frac{A'-B-C'+\pi}{2}+b'\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

C ve C' 'nin açıları toplamı, B ve B' nün açıları toplamından daha büyüktür. Bu yüzden $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ ve $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ polihedrası konveks polihedra olur. $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ ve $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ ün numaralanmış yüzleri şekil 3.14 ve şekil 3.15 de gösterilmiştir.

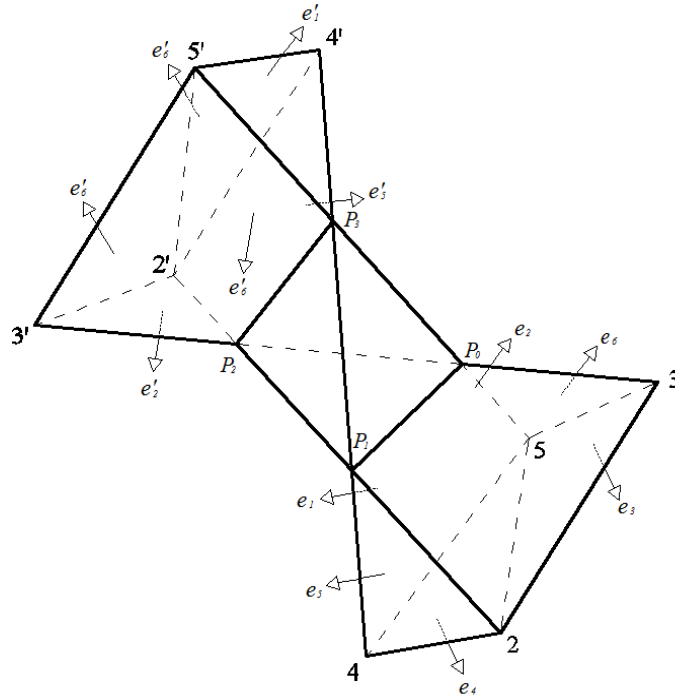


Şekil 3.14 $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ Polihedrasının Numaralanmış Yüzleri



Şekil 3.15 $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ Polihedrasının Numaralanmış Yüzleri

Polihedronun sıra numarası önemli değildir. Bununla birlikte bir polihedronun sıra numarası otomatik olarak bir diğerinden verilen numaralarla belirlenir ve birim normal vektör doğrultuları önceki polihedron doğrultularına zıt yöndedir (Bak şekil 3.16).



Şekil 3.16 İki İdeal polihedron ve bir dörtyüzlü

$(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ polihedronun dihedral açıları arasında ki bir bilinmeyen değişken için gram matris tanımını $(\langle e_i, e_j \rangle)$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & \cos(a+b) & -\cos a & \cos B & \cos C \\ -\cos A' & 1 & -\cos c & \cos(c+e) & \cos C' & \cos B' \\ \cos(a+b) & -\cos c & 1 & -\cos e & \cos(b+e) & -\cos d \\ -\cos a & \cos(c+e) & -\cos e & 1 & -\cos b & \cos(d+e) \\ \cos B & \cos C' & \cos(b+e) & -\cos b & 1 & -\cos A \\ \cos C & \cos B' & -\cos d & \cos(d+e) & -\cos A & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Burada G matrisinin $(1,3), (2,4), (3,5)$ ve $(4,6)$ elemanları hesaplanırken 2 ve 5 merkezli iki ideal tepe küçük horokürelerle kesilerek Öklidyen dörtgenler kullanılır.

$(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ Gram matrisi oluşturulurken ise (3.13) numaralı matristerde a, b, c ve d yerlerine sırasıyla a', b', c' ve d' yerleştirilmesi ile elde edilir. Bu nedenle $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ ve $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ dihedral açılarının iki bilinmeyen değişkenine uygun benzer iki kök vardır.

Gram matrisin rankı dikkat ettiğimizde üç satır ve üç sütunda (yada uygun olan herhangi bir seçimde) determinanı alındığı zaman sıfır çıkar ki bu taktirde dörtyüzlünün hacim formülü bulunabilir.

Açıları sınırlandığı zaman yine C ve C' açılarının toplamı B ve B' açılarının toplamından daha büyüktür. Bundan dolayı açılarn durumuna ihtiyaç yoktur. $(p_0, p_1, 2, 4, 5, 3)$ ve $(p_3, p_2, 2', 3', 5', 4')$ konveks olmamalarına rağmen iki polihedronun Gram matrisinde bu durumda aynı gösterime sahiptir ve Gram matrisin rank şartı her bir polihedron için sağlanır. Böylece yukarıdaki formül keyfi bir dörtyüzlü için uyarlanabilir.

Teorem 3.1. $T(A, B, C, A', B', C')$ dörtyüzlüsünün hacim formülünü şu şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned}
2H(T) = & \wedge(a) - \wedge(b) + \wedge(c) - \wedge(d) - \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - b\right) \\
& + \wedge\left(\frac{A'-B-C'+\pi}{2} + b\right) + \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2} - c\right) \\
& - \wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2} + c\right) \\
& - \wedge(a') + \wedge(b') - \wedge(c') + \wedge(d') + \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - b'\right) \\
& - \wedge\left(\frac{A'-B-C'+\pi}{2} + b'\right) - \wedge\left(\frac{B'-C-A'+\pi}{2} - c'\right) \\
& + \wedge\left(\frac{A-B'-C'+\pi}{2} + c'\right)
\end{aligned}$$

burada a, b, c, d, a', b', c' ve d' değerleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
a + b = B, & \quad c + d = B', & \quad b + c + e = C', & \quad a + d + e = C, \\
a' + b' + = B, & \quad c' + d' = B', & \quad b' + c' + d' = C' & \quad a' + d' + e' = C,
\end{aligned}$$

ve

Gram matrislerin determinanı alınırsa;

$$G_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A' & -\cos a & \cos B & \cos C \\ -\cos A' & 1 & \cos(c+e) & \cos C' & \cos B' \\ -\cos a & \cos(c+d) & 1 & -\cos b' & \cos(d+e) \\ \cos B & \cos C' & -\cos b & 1 & -\cos A \\ \cos C & \cos B' & \cos(d+e) & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ve

$$G_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A' & -\cos a' & \cos B & \cos C \\ -\cos A' & 1 & \cos(c'+e') & \cos C' & \cos B' \\ -\cos a' & \cos(c'+d') & 1 & -\cos b' & \cos(d'+e') \\ \cos B & \cos C' & -\cos b' & 1 & -\cos A \\ \cos C & \cos B' & \cos(d'+e') & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Verilen örnekler özel dörtyüzlü teoreminin uygulamalarıdır. (Şekil 3.16)

Örnek 3. 1. $T(A, B, C, A, B', C)$ dörtyüzlüsünün hacmi nedir?

(3.12) ve (3.13) numaralı hacim formülünü kullanılırsa:

$$\begin{aligned} 2H(T(A, B, C, A, B', C)) &= \wedge(a) - \wedge(b) + \wedge(c) - \wedge(d) \\ &\quad - \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - b\right) + \wedge\left(\frac{A-B-C+\pi}{2} + b\right) \\ &\quad + \wedge\left(\frac{B'-C-A+\pi}{2} + c\right) - \wedge\left(\frac{A-B'-C+\pi}{2} + c\right) \\ &\quad - \wedge(a') + \wedge(b') - \wedge(c') + \wedge(d') \\ &\quad + \wedge\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - b'\right) - \wedge\left(\frac{A-B-C+\pi}{2} + b'\right) \\ &\quad - \wedge\left(\frac{B'-C-A+\pi}{2} - c'\right) + \wedge\left(\frac{A-B'-C+\pi}{2} + c'\right), \end{aligned}$$

burada $a+b=B$, $c+d=B'$ ve $b+c=(B+B')/2=a+d$. a ve a' bilinmeyen değişkenleri: G matrisinin G_1 ve G_2 co-faktörleri esas alınarak hesaplanır. $G_1=0$ eşitliği uzun işlemlerden sonra;

$$M (\cos B + 2 \cos B' + 2 \cos A \cos C) (\cos B \cos 2a + \sin B \sin 2a) \\ = M (1 + \cos B \cos B' - \cos^2 A - \cos^2 C),$$

elde edilir. Burada

$$M = 1 + \cos^2 A - \cos^2 B + 2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 C + 2 \cos^2 B \cos^2 C \\ + 2 \cos A \sin B \sin C + 2 \cos B \sin B \cos C \sin C.$$

Bu yüzden ;

$$\cos(2a - B) = \frac{1 + \cos B \cos B' - \cos^2 A - \cos^2 C}{\cos B + \cos B' + 2 \cos A \cos C} = \cos w,$$

$$\cos(2a' - B) = \frac{1 + \cos B \cos B' - \cos^2 A - \cos^2 C}{\cos B + \cos B' + 2 \cos A \cos C} = \cos w,$$

$a = (B + w)/2$ ya da $(B - w)/2$ yazabiliriz. a ve a' açıları benzer değerli ise $T(A, B, C, A, B', C)$ hacim değeri sıfır olur. Bu yüzden biz $a = (B + w)/2$, $a' = (B - w)/2$ ya da $a = (B - w)/2$, $a' = (B + w)/2$ olarak alırız. $a = (B + w)/2$ olarak seçelim. Buradan da

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{B + w}{2}, \frac{B - w}{2}, \frac{B' + C' + -C + w}{2}, \frac{B' + C - C' - w}{2} \right) \\ = \left(\frac{B + w}{2}, \frac{B - w}{2}, \frac{B' + w}{2}, \frac{B' - w}{2} \right)$$

ve

$$(a', b', c', d') = \left(\frac{B + w}{2}, \frac{B - w}{2}, \frac{B' + C' + -C + w}{2}, \frac{B' + C - C' - w}{2} \right) \\ = \left(\frac{B + w}{2}, \frac{B - w}{2}, \frac{B' + w}{2}, \frac{B' - w}{2} \right).$$

şeklindedir. O halde:

$$\begin{aligned}
H(T(A, B, C, A, B', C)) = & \wedge\left(\frac{B+w}{2}\right) - \wedge\left(\frac{B-w}{2}\right) + \wedge\left(\frac{B'+w}{2}\right) - \wedge\left(\frac{B'-w}{2}\right) \\
& - \wedge\left(\frac{A+C+\pi+w}{2}\right) + \wedge\left(\frac{A+C+\pi-w}{2}\right) \\
& - \wedge\left(\frac{A-C+\pi+w}{2}\right) + \wedge\left(\frac{A-C+\pi-w}{2}\right).
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$w = \arccos\left(\frac{1 + \cos B \cos B' - \cos^2 A - \cos^2 C}{\cos B + \cos B' + 2 \cos A \cos C}\right)$$

şeklindedir.

a nın farklı seçimlerinde benzer formüller elde edilir. Dört yüzünün hacim fonksiyonunun çözümü ve dihedral açıların uygun seçimi, düzenli dört yüzü ya da ideal dört yüzüde, bu örnek seçimin doğruluğunu gösterir.

Örnek 3.2. Örnek 1.den $OT(A, B, C)$ hacmi bulunabilir. $T(B, 2AB, B, 2C, B)$ bir dört yüzü olmak üzere dört tane $OT(A, B, C)$ ortoşemaya bölünebilir. Formül (3.6) dan

$$\begin{aligned}
4H(OT(A, B, C)) &= H(T(B, 2AB, B, 2C, B)) \\
&= \wedge\left(A + \frac{w}{2}\right) - \wedge\left(A - \frac{w}{2}\right) + \wedge\left(C + \frac{w}{2}\right) - \wedge\left(C - \frac{w}{2}\right) \\
&\quad - \wedge\left(\frac{\pi}{2} + B + \frac{w}{2}\right) + \wedge\left(\frac{\pi}{2} + B + \frac{w}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{w}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{w}{2}\right) \\
&= \wedge(A + \delta) - \wedge(A - \delta) + \wedge(C + \delta) - \wedge(C - \delta) \\
&\quad - \wedge\left(\frac{\pi}{2} - B + \delta\right) + \wedge\left(\frac{\pi}{2} - B - \delta\right) + 2 \wedge\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)
\end{aligned}$$

burada,

$$\delta = \frac{w}{2} = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1 + \cos B \cos B' - \cos^2 A - \cos^2 C}{\cos B + \cos B' + 2 \cos A \cos C}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sqrt{\cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 C}}{\cos A \cos C}\right) \text{ dir.}$$

Formül (3.6)de Schlafli diferansiyel formülü.
























Not: Ortoşemaların bir diğer hacim formülü ise Lobachevski formülünden yazılabilir(3.6). $OT(A, B, C)$ ortoşeması $T(\pi/2, B, C, \pi/2, \pi/2, A)$ dörtyüzlüsü ile benzerdir. Bu yüzden teoremden çıkarılan formül:

$$\begin{aligned} H(OT(A, B, C)) &= \frac{1}{4} [\wedge(A+w) - \wedge(A-w) + \wedge(C+w) - \wedge(C-w) - 2\wedge(w) \\ &\quad + 2\wedge\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B+C-A-w}{2}\right) - 2\wedge\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{B+C-A+w}{2}\right) \\ &\quad + 2\wedge\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B+A-C-w}{2}\right) - 2\wedge\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{B+A-C+w}{2}\right)], \end{aligned}$$

olup, burada

$$w = \arcsin\left(\frac{\sin A \sin C}{\cos B}\right) \text{ şeklindedir.}$$

Burada Coxeter dörtyüzlülerin hacimleri verilmiştir. Dihedral açıları $\pi/n_i, n_i \in \mathbb{Z}$ dir. Bütün Coxeter dörtyüzlülerin hacmi [13] da (Ayrıca bütün n-simplekslerin hacmide [16] de gösterilmiştir.) dört ortoşemaya bölünerek hesaplanmıştır. Formül (3.14) , örnek 3.1. ve formül (3.8) da bütün Coxeter dörtyüzlülerin hacminin diğer çözüm yolu verilmiştir[17].

	$V = \frac{1}{8} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		$V = \frac{5}{2} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$
	$V = \frac{1}{2} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		$V = \frac{2}{3} \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right).$
	$V = \frac{1}{6} \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right).$		$V = 2 \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right).$
	$V = \frac{5}{16} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		$V = \frac{5}{8} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$
	$V = \frac{3}{4} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		$V = \frac{1}{3} \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right).$
	$V = \frac{1}{2} \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right).$		$V = 1 \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right).$
	$V = \frac{1}{4} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		$V = \frac{5}{8} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$
	$V = \frac{3}{2} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		$V = 3 \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$
	$V = \frac{5}{4} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right).$		
	$V = \frac{1}{2} \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \wedge \left(\frac{\pi}{30}\right) + \frac{1}{4} \wedge \left(\frac{11\pi}{30}\right).$		
	$V = 1 \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \wedge \left(\frac{\pi}{12}\right).$		
	$V = 1 \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 \wedge \left(\frac{\pi}{24}\right) + 1 \wedge \left(\frac{5\pi}{24}\right).$		
	$V = 1 \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 \wedge \left(\frac{\pi}{60}\right) + 1 \wedge \left(\frac{11\pi}{60}\right).$		
	$V = 1 \wedge \left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \wedge \left(\frac{\pi}{24}\right) + 1 \wedge \left(\frac{7\pi}{24}\right).$		
	$V = 1 \wedge \left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \wedge \left(\frac{\pi}{30}\right) + \frac{1}{2} \wedge \left(\frac{11\pi}{30}\right).$		

Çizelge 3.1 Coxeter dörtyüzlülerin hacimleri

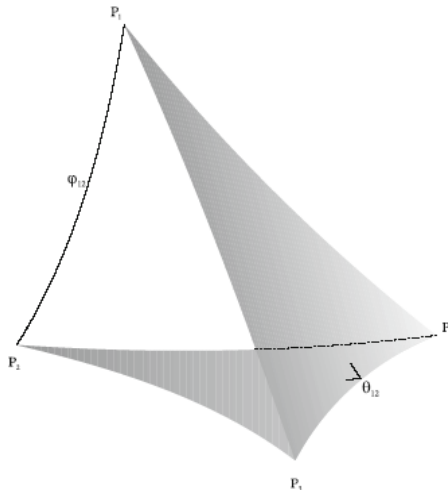
BÖLÜM IV

4. HİPERBOLİK DÖRTYÜZLÜ İÇİN SCHLAFLİ DİFERENSİYEL FORMÜLÜ

$\Omega \in H^n$ ($n \geq 2$) P_1, \dots, P_{n+1} tepeli, Ω_i, Ω_j 'nin e_i normalli düzlem içinde kalan yüzü olmak üzere $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$ ($n-2$)-yüzü, Ω_{ij} yüzündeki dihedral açısı θ_{ij} , $1 \leq i < j \leq n+1$ olan bir hiperbolik simpleks olsun. H^n deki alınan simpleksler kümesi üzerindeki hacim formülünün diferensiyeli;

$$dVol(\Omega) = \frac{-1}{n-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n+1} Vol_{n-2}(\Omega_{ij}) d\theta_{ij} \quad Vol_0(\Omega_{ij}) = 1 \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada Ω_{ij} , Ω 'nin 2-eş boyutlu yüzünü, $Vol_{n-2}(\Omega_{ij})$ Ω_{ij} 'lerin hacmini, θ_{ij} de Ω_{ij} 'ler üzerindeki dihedral açıları göstermektedir[5].



Şekil 4.1. Hiperbolik Dörtüzlü

Schlaflı diferensiyel formülünü 3-boyutlu hiperbolik uzayda bir hiperbolik dörtüzlü için yazılacak olursa;

$$dVol(\Omega) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \Psi_{ij} d\theta_{ij}$$

olur. Burada Ψ_{ij} , Ω 'nin ayrıt uzunluklarıdır[9].

4.1. Hiperbolik Dörtüzlünün Ayrıt Matrisi

Ω , P_1, \dots, P_4 tepeli bir hiperbolik dörtüzlü olsun. Bu durumda;

$$M = \left[-\cosh \Psi_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,4} = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh \Psi_{12} & -\cosh \Psi_{13} & -\cosh \Psi_{14} \\ -\cosh \Psi_{12} & -1 & -\cosh \Psi_{23} & -\cosh \Psi_{24} \\ -\cosh \Psi_{13} & -\cosh \Psi_{23} & -1 & -\cosh \Psi_{34} \\ -\cosh \Psi_{14} & -\cosh \Psi_{24} & -\cosh \Psi_{34} & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi Ω dörtüzlüsünün ayrıt matrisidir. Burada $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$, ($i \neq j$) dir. M 'nin 3×3 tipinde alt matrisleri i -yinci satır ve j -yinci sütunun atılmasından elde edilir. M 'nin alt matrislerinin ko-faktörleri ise $M_{ij, st}$ şeklinde gösterilmektedir ($s, t = 1, \dots, 4$) [9].

4.1.1. Teorem: ($i \neq j$) ve $i, j = 1, \dots, n+1$ olmak üzere $\frac{n(n+1)}{2}$ tane

$\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$ şeklindeki pozitif reel sayının Ω^n 'nin ayrıt uzunluğu olması için gerek ve yeter şart $M = \left[-\cosh \Psi_{ij} \right]$ matrisinin aşağıdaki şartları sağlamasıdır.

- i) $\det M < 0$
- ii) M^{-1} 'in tüm asli alt matrisleri pozitif tanımlıdır.
- iii) $M_{ij} > 0$ [8].

4.1.2. Teorem: Ω bir hiperbolik dörtyüzlü olsun. Bu durumda;

i) $-\det M > 0$

ii) $M_{ii} < 0, i = 1, \dots, 4$

iii) $\frac{\sinh \Psi_{ij}}{\sin \theta_{kl}} = \frac{\sqrt{M_{kk} M_{ll}}}{\sqrt{-\det M}}, i, j, k, l = 1, \dots, 4, i < j, k < l$

kartları sağlanır[9].

4.1.3. Teorem: Ω bir hiperbolik dörtyüzlü olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sinh \Psi_{12} \sinh \Psi_{34}}{\sin \theta_{12} \sin \theta_{34}} = \frac{\sinh \Psi_{13} \sinh \Psi_{24}}{\sin \theta_{13} \sin \theta_{24}} = \frac{\sinh \Psi_{14} \sinh \Psi_{23}}{\sin \theta_{14} \sin \theta_{23}} = \frac{\sqrt{S}}{-\det M} \quad (4.2)$$

şartları sağlanır. Burada $S = M_{11} M_{22} M_{33} M_{44}$ olarak alınır[9].

4.1.4. Teorem: Ω bir hiperbolik dörtyüzlü olmak üzere; Ω 'nın ayrıt uzunluklarına bağlı hacim formülü

$$dVol(\Omega) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 A_{ij} d\Psi_{ij} \quad (4.3)$$

dir. Burada

$$A_{ij} = \sum_{\substack{i,j,s,t=1 \\ i < j, s < t \\ (i,j)=(s,t)}}^4 \frac{\sinh \Psi_{ij}}{\sqrt{-|M|}} \left(\frac{\Psi_{ij} M_{ij,ij}}{\sinh \Psi_{st}} + \frac{\Psi_{is} (M_{is} M_{is,js} + M_{ss} M_{is,ij})}{M_{ss} \sinh \Psi_{jt}} + \frac{\Psi_{it} (M_{it} M_{it,jt} - M_{tt} M_{it,ij})}{M_{tt} \sinh \Psi_{js}} \right) + \left(\frac{\Psi_{js} (M_{js} M_{is,js} + M_{ss} M_{ij,js})}{M_{ss} \sinh \Psi_{it}} + \frac{\Psi_{jt} (M_{jt} M_{it,jt} - M_{tt} M_{ij,jt})}{M_{tt} \sinh \Psi_{is}} \right) + \left(\frac{\Psi_{st} [M_{st} (M_{tt} M_{is,js} + M_{ss} M_{it,jt}) + M_{ss} M_{tt} (M_{it,js} + M_{is,jt})]}{\sinh \Psi_{ij} M_{ss} M_{tt}} \right) \quad (4.4)$$

dir[9].

4.2. Küresel Dörtüzlünün Ayrıt Matrisi

Ω , P_1, \dots, P_4 tepeli bir küresel dörtüzlü olsun. O halde;

$$M = [\cos \Psi_{ij}]_{i,j=1,\dots,4} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \Psi_{12} & \cos \Psi_{13} & \cos \Psi_{14} \\ \cos \Psi_{12} & 1 & \cos \Psi_{23} & \cos \Psi_{24} \\ \cos \Psi_{13} & \cos \Psi_{23} & 1 & \cos \Psi_{34} \\ \cos \Psi_{14} & \cos \Psi_{24} & \cos \Psi_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi Ω 'nın ayrıt matrisidir ve burada $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$, ($i \neq j$) dir. M 'nin 3×3 tipinde alt matrisleri i -yinci satır ve j -yinci sütunun silinmesinden elde edilir. M 'nin alt matrislerinin kofaktörleri ise $M_{ij, st}$ şeklinde gösterilmektedir ($s, t = 1, \dots, 4$) [9].

4.2.1. Teorem : ($i \neq j$) ve $i, j = 1, \dots, n+1$ olmak üzere $\frac{n(n+1)}{2}$ tane $\Psi_{ij} = \Psi_{ji} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

şeklindeki pozitif reel sayının Ω^n 'nin ayrıt uzunluğu olması için gerek ve yeter şart $M = [\cos \Psi_{ij}]$ ayrıt matrisinin simetrik pozitif tanımlı ve köşegen elemanlarının 1 olmasıdır [8].

4.2.2. Teorem: Ω bir küresel dörtüzlü olsun. Buradan;

i) $\det M > 0$

ii) $M_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, 4$

iii) $\frac{\sinh \Psi_{ij}}{\sin \theta_{kl}} = \frac{\sqrt{M_{kk} M_{ll}}}{\sqrt{\det M}}$, $i, j, k, l = 1, \dots, 4$, $i < j$, $k < l$ [9].

4.2.3. Teorem: Ω bir küresel dörtyüzlü olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sinh \Psi_{12} \sinh \Psi_{34}}{\sin \theta_{12} \sin \theta_{34}} = \frac{\sinh \Psi_{13} \sinh \Psi_{24}}{\sin \theta_{13} \sin \theta_{24}} = \frac{\sinh \Psi_{14} \sinh \Psi_{23}}{\sin \theta_{14} \sin \theta_{23}} = \frac{\sqrt{P}}{\det M} \quad (4.5)$$

kuralı geçerlidir. Burada $P = M_{11}M_{22}M_{33}M_{44}$ [9].

4.2.4. Teorem: Ω bir küresel dörtyüzlü olsun. Ω 'nın ayrıt uzunluklarına bağlı hacim formülü

$$dVol(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 A_{ij} d\Psi_{ij} \quad (4.6)$$

dir. Burada

$$A_{ij} = \sum_{\substack{i,j,s,t=1 \\ i < j, s < t \\ (i,j)=(s,t)}}^4 \frac{\sin \Psi_{ij}}{\sqrt{|M|}} \left(\frac{\Psi_{ij} M_{ij,ij}}{\sin \Psi_{st}} + \frac{\Psi_{is} (M_{is} M_{is,js} + M_{ss} M_{is,ij})}{M_{ss} \sin \Psi_{jt}} + \frac{\Psi_{it} (M_{it} M_{it,jt} - M_{tt} M_{it,ij})}{M_{tt} \sin \Psi_{js}} \right) + \left(\frac{\Psi_{js} (M_{js} M_{is,js} + M_{ss} M_{ij,js})}{M_{ss} \sin \Psi_{it}} + \frac{\Psi_{jt} (M_{jt} M_{it,jt} - M_{tt} M_{ij,jt})}{M_{tt} \sin \Psi_{is}} \right) + \left(\frac{\Psi_{st} [M_{st} (M_{tt} M_{is,js} + M_{ss} M_{it,jt}) + M_{ss} M_{tt} (M_{it,js} + M_{is,jt})]}{\sin \Psi_{ij} M_{ss} M_{tt}} \right) \quad (4.7)$$

şeklindedir.

BÖLÜM IV

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada hiperbolik dörtyüzlü için hacim hesaplamaları Lobachevski fonksiyonu ve Schlafli diferansiyel formülüne dayanılarak verilmiştir. Daha ileri ki aşamalarda Hiperbolik dörtyüzlülerin hacim formülleri tepe açılarına bağlı olarak da yapılabilir. Bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Schlenker, J.M., Polyedres dans les espaces de Sitter-hyperboliques, preprint,1996.
- [2] Schlenker, J.M., Metriques sur les polyedres hyperboliquesconvexes, Journal of Differential Geometry, 48, 323-405,1998.
- [3] Hodgson, C.D. and Rivin, I. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, Invent. Math., 111, 77-111, 1993.
- [4] Santalo, L., Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and its applications,Vol 1, Addison-Wesley, 1976.
- [5] Ratcliffe, J.G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag , Berlin, 1994.
- [6] Vinberg, E.B., Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 29, Springer-Verlag, 4-79, 1993.
- [7] O'neil, B., Semi-Riemannian Geometry , Academic Press. London, 1983.
- [8] Karlığa, B., “Edge matrix of hyperbolic simplices”, Geom. Dedicata, 109: 1-6 2004.
- [9] Yakut, A.T., Savas, M., Kader, S., “On the Schlafli differential formula based on edge lengths of tetrahedron in H^n and S^n ”, Geom. Dedicata, 138: 99-115 , 2009.

- [10] Vinberg, E. B., The volume of Polyhedra on a sphere and in Lobachevski space, Amer. Math. Soc. Trans.(2), 148,15-27, 1991,
- [11] Kellerhals, R., On the volume of hyperbolic polyhedra, Math. Ann., 285, 541-569, 1989.
- [12] Kellerhals, R.,The dilogarithm and volumes of hyperbolic polytopes,in:Structural Properties of Polylogarithms, L. Lewin, ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 37, AMS, Providence, RI, 301-336, 1991.
- [13] Meyerhoff, R., A lower bound for the volume of hyperbolic 3- orbifolds, Duke Math. J.,57 ,185-203, 1988.
- [14] Milnor,J., Hyperbolic geometry : the first 150 years, Bull,Amer, Math. Soc., 6,9-24, 1982.
- [15] Alekseevskij, D. V., Vinberg, E.B., Solodovnikov, A, S., Geometry of space of constant curvature, in: Encyclopedia of Mathematical Science, Geometry II. Springer-verlag, Berlin, 1993

- [16] Johnson, N.W.,Kellerhals,R., Ratcliffe, J.G., Tschantz, S. T., The size of a hyperbolic Coxeter simplex (preprint), 1999.
- [17] Cho,Y.,Kim, H., On The Volume Formula For Hyperbolic Tetrahedra Department of Mathmatics, Seoul National University,347-366 , 1999.