T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\Gamma_0(m)$ NİN $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

ŞÜKRÜ TİRYAKİ

Ağustos 2011

Ş. TİRYAKİ, 2011
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\Gamma_0(m)$ NİN $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

ŞÜKRÜ TİRYAKİ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Serkan KADER

Ağustos 2011

Şükrü TİRYAKİ tarafından **Yrd. Doç. Dr. Serkan KADER** danışmanlığında hazırlanan "$\Gamma_0(m)$ **nin** PSL$(2,\mathbb{R})$ **deki Normalliyenin Alt Yörüngesel Grafları**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ** **Karadeniz Teknik Üniversitesi**

Üye : **Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KAPLAN** **Niğde Üniversitesi**

Üye : **Yrd. Doç. Dr. Serkan KADER** **Niğde Üniversitesi**

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ..../..../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..../..../20.... tarih ve .... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Nurettin ACIR

MÜDÜR

ÖZET

$\Gamma_0(m)$ NİN PSL$(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

TİRYAKİ, Şükrü
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KADER

Ağustos 2011, 49 sayfa

Bu çalışmada $\Gamma_0(m)$ nin PSL$(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni $\mathcal{N}or(m)$ nin yapısı incelendi. N karesiz bir pozitif tamsayı olduğu durumda $\mathcal{N}or(m)$ nin alt yörüngesel graflarında kendisiyle eşleşmiş kenar şartları belirlendi ve devre şartları ile ilgili ortaya çıkan kongrüans denklemlerinin çözüm kümelerine dair sonuçlar da elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Normalliyen, Grup hareketi, Alt yörüngesel graflar, Kendisiyle eşleşmiş kenar.

SUMMARY

SUBORBITAL GRAPHS FOR THE NORMALIZER OF $\Gamma_0(m)$ IN $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

TİRYAKİ, Şükrü
Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assistant Professor Dr. Serkan KADER

August 2011, 49 pages

In this thesis, the structure of normalizer of $\Gamma_0(m)$ in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ is examined. Self-paired edge conditions on suborbital graphs for $\mathcal{N}or(m)$ are determined when m is a square-free positive integer. Also some results are obtained on solution sets of congruence equations connected with circuit conditions.

Keywords: Normallizer, Group action, Suborbital graphs, Self-paired edge.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd.Doç.Dr. Serkan KADER' e, Niğde Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerine ve hayatım boyunca her türlü desteği ve sabrı gösteren kıymetli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi (Riemann Küresi)
$\varphi(a)$	: Euler fonksiyonu
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(m)$	: Γ nın $m \mid c$ olan bir alt grubu
$\mathcal{N}or(m)$	: $\Gamma_0(m)$ nin PSL(2,$\mathbb{R}$) deki normalliyeni
PSL(2,$\mathbb{R}$)	: Gerçel katsayılı, lineer, kesir dönüşümlerinin grubu
$\hat{\mathbb{R}}$	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathcal{U}$	: $\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
$A \leq B$	: A grubu B grubunun alt grubudur
$\lvert A : B \rvert$	: B alt grubunun A daki indeksi
$a \mid b$	: a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	: a sayısı b sayısını bölmez
$a \parallel b$	: a sayısı b sayısının bir tam bölenidir
$a \equiv b (\bmod n)$	: n sayısı $(a-b)$ sayısını böler
(a,b)	: a ile b sayısının en büyük ortak böleni
$\mathring{F}$	: F kümesinin içi
Gx	: x noktasının G -yörüngesi
G_x	: x noktasının G deki sabitleyeni
$\mu(E)$	: E kümesinin hiperbolik alanı
$\ell(C)$	: Parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu

BÖLÜM I

GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarına doğru ayrık gruplar teorisine temel teşkil edebilecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından göz önüne getirilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve İnvaryant teorinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz, gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir. Eliptik eğrilerin aritmetiği, tam kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle Γ Modüler grubunun modüler grubunun kongrüans alt grupları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda sayılar teorisinde de Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları Pierre de Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoreminin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

$\Gamma_0(m)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni üzerine ilk çalışma F.C. Klein ve R. Fricke tarafından yapılmış, 1951'de B. Schoeneberg ve 1964'te J. Lehner ile M. Newman tarafından $\Gamma_0(m)$ nin Weierstrass noktalarını bulma probleminin normalliyene bağlı olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra 1970'te A.O.L. Atkin ile J. Lehner çalışmalarında normalliyenin önemi vurgulamış ancak normalliyenin elemanlarının net bir şekilde karakterize edilmesi J. H. Conway ve S. P. Norton tarafından verilmiştir.

1973 yılında Bernd Fischer ve Bob Griess'in, bağımsız olarak, mertebesi

$$2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$$

olan yeni bir basit M grubu için deliller üretmesi ve 1982 de Robert L. Griess'in varlığını ispatlamasının ardından bu yeni basit grubun özellikle $\Gamma_0(m)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni ile ilgili olması normalliyeni tekrar ön plana getirmiştir.

J. H. Conway ve S. P. Norton 1979 da bu basit M grubunu *Monster* olarak adlandırdıkları çalışmalarında normalliyenin elemanlarına son şeklini vermişlerdir. Daha sonra A.P. Ogg $|M|$ yi bölen p asalları için $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyenin belirlediği fonksiyon cisminin sıfır cinsine sahip olduğunu gösterdi. A. Pizer bu asalların, 2- ağırlıklı modüler formlarla quaternion cebir teta-serisini ilişkilendiren Hecke konjektürünü sağlayan yegane asallar olduğunu gösterdi.

1970 yılında Heinz Helling m karesiz olduğunda normalliyen gruplarının maksimal ayrık gruplar olduğunu ve Γ modüler grubu ile orantılı olan her ayrık Δ grubunun bu gruplardan birine eşlenik olduğunu gösterdi. Ayrıca Δ ile belirlenen fonksiyon cisminin cinsi sıfır ise normalliyen ile belirli fonksiyon cisminin cinsi de sıfırdır ve eşlenik yapan her eleman p, q ve r ortak çarpanı olamayan tam sayılar olmak üzere

$$z \to \frac{pz+q}{r}$$

biçimindedir.

Normalliyen, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu ve sonlu üretilmiş olduğundan topolojik ve geometrik özelliklerini veren bir simgeye sahiptir. Bu simge problemi bir bakıma bir ayrık grubun kimliğidir. Simgedeki parametreler; grubun cinsi, üretici eliptik elemanların mertebeleri ve parabolik sınıf sayısıdır. Simge problemi ayrık gruplar üzerine çalışan bilim adamlarının daha fazla çaba sarf etmelerini gerektirmektedir. 1981 de m nin karesiz olması durumunda simge problemini C. Maclachlan çözmüştür. Fakat m nin keyfi olması durumu hala açıktır. Şayet her m sayısı için simge bulunabilirse bunun M basit grubu ile nasıl bir bağlantısı olduğu da ayrı bir durumdur. Ancak 1992 yılında M. Akbaş ve D. Singerman normalliyenin parabolik sınıf sayısı verdiler ve 3, 4 ve 6 mertebeli eliptik üretici elemanlar tam olarak belirlediler. Dolayısı ile geriye 2 mertebeli üretici elemanların sayısını ve g cinsini bulmak kalmıştır.

Bu çalışmada $\Gamma_0(m)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyenin alt yörüngesel grafları araştırılmıştır. Bölüm II de temel kavramlar verilmiştir. Bölüm III te ise normalliyenin alt yörüngesel graflarındaki ikili devre şartları incelenmiştir ve m nin özel bir durumu için kenar şartları verilmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Topolojik Gruplar

Tanım 2.1. $(G,\cdot)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

i) $\begin{aligned} M : G\times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longrightarrow g\cdot h \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} m : G &\longrightarrow G \\ g &\longrightarrow g^{-1} \end{aligned}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir *topolojik grup* denir.

Tanım 2.2. G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \wedge : G\times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\longrightarrow \wedge(g,x) =: g\wedge x \end{aligned}$$

sürekli bir dönüşüm ve

(i) $g\wedge(h\wedge x) = gh\wedge x$, $g,h\in G,\ x\in X$

(ii) $e\wedge x = x$, $e\in G,\ x\in X$

şartları sağlanıyorsa $[G,X,\wedge]$ üçlüsüne veya $[G,X]$ ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* adı verilir. Bu durumda G ye X *üzerinde hareket eder* veya G ye X üzerinde bir *hareket grubu* denir.

Önerme 2.3. $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x,y\in X$ olsun. Bu takdirde

$$x\approx y :\Leftrightarrow \exists g\in G:\ gx = y$$

şeklinde tanımlanan $\approx$ bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.4. "$\approx$" bağıntısının denklik sınıflarına *hareketin yörüngeleri* denir. Ayrıca $x\in X$ noktasını içeren yörüngeye *x-in yörüngesi* denir ve bu $Gx := \{gx \mid g\in G\}$ kümesidir.

Tanım 2.5. G, X üzerinde hareket etsin ve $x,y \in X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak biçimde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde *transitif olarak hareket ediyor* denir.

Bu tanıma göre hareket transitif ise $\forall x \in X$ için $Gx = X$ elde edilir. Yani bir tek yörünge vardır. Yörünge grubun transitif olarak hareket ettiği kümedir.

Önerme 2.6. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. $\begin{array}{l} p: X \longrightarrow X/G \\ \quad x \longmapsto Gx \end{array}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$"U \subset X/G \text{ açıktır} :\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ açıktır}"$$

tanımı ile verilen açık kümelerin topolojisi ile X/G ye bir *yörünge uzayı* diyeceğiz. p dönüşümü açıkça süreklidir ve *projeksiyon* olarak adlandırılır.

Tanım 2.7. G bir grup ve $H<G$ olsun. H alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır. Bu sayıya H alt grubunun G içerisindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun. $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ kümesine x noktasının *sabitleyeni* denir.

Tanım 2.9. G bir grup olsun. $C := \{g \in G \mid \forall x \in G \text{ için } gx = xg\}$ kümesine G nin *merkezi* denir.

Tanım 2.10. G bir grup olsun. $G = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $a \in G$ varsa G ye *bir devirli grup* denir.

Tanım 2.11. G bir grup ve $H < G$ olsun. $\mathcal{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ kümesine H nın G deki *normalliyeni* denir. Normalliyen, H yı normal alt grup olarak içeren en büyük kümedir.

Tanım 2.12. $N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $p^2 \mid N$ olacak şekilde bir p asal sayısı yoksa N ye *karesiz* denir.

Tanım 2.13. Bir T dönüşümünün *periyodu* (veya *mertebesi*) $T^m = I$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır. Böyle bir m yoksa T ye *sonsuz periyotludur* denir.

Tanım 2.14. $N \in \mathbb{Z}$ için $1 \le a \le N$ ve $(a, N) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\varphi(N)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona *Euler fonksiyonu* denir.

$m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_s^{r_s}$ ise bu takdirde

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

dir.

2.2 Öklid Olmayan Kristalize Gruplar

1) $\mathcal{G}$ ile $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlemin

$$\text{(A)} \quad \left\{ z \to \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

$$\text{(B)} \quad \left\{ z \to \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1 \right\}$$

biçimindeki dönüşümlerin grubunu gösterelim. $\mathcal{G}$ nin her bir elemanı $\mathcal{U} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ üst yarı düzlemin kendi üzerine bir konform veya ters konform homeomorfizmasıdır.

(A) biçimindeki dönüşümlerin grubunu $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ile göstereceğiz. Bu grup $\mathcal{G}$ de 2 indeksli bir alt gruptur. $\mathcal{U}$ nun her konform homeomorfizmi $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dedir [13].

$\mathcal{G}$ üzerinde bir topolojik yapı aşağıdaki biçimde oluşturulabilir:

$\tau = \{ (a, b, c, d) : ad - bc = \pm 1 \} \subset \mathbb{R}^4$ alt kümesini alalım. Bu alt küme üzerinde $\mathbb{R}^4$ deki adi topolojinin kondurduğu alt uzay topolojisini göz önüne alalım. Bu τ alt uzayında (a, b, c, d) ile $(-a, -b, -c, -d)$ noktalarını özdeşleştirirsek $\mathcal{G}$, özdeşlik topolojisi ile bir topolojik grup yapısına sahip olur. $\mathcal{G}$ topolojik grubu $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ve $\mathcal{G} \setminus \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ olmak üzere iki bileşene sahiptir.

Katsayıları reel ve determinantı 1 olan 2×2 tipindeki matrislerin grubunu

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1\right\}$$

ile gösterelim. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ nin kendi merkezi $\{\pm \mathrm{I}\}$ ile bölümünden

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$$

grubu elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

elemanları özdeş olarak aynı kabul edilir ve aynı elemanla temsil edilir.

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ grubu $\mathcal{U}=\{\mathrm{z}\in\mathbb{C} : \mathrm{Im(z)}>0\}$ üst-yarı düzlemi üzerinde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z\to\frac{az+b}{cz+d}$$

ile hareket eder.

$\mathcal{U}$ üst yarı düzlemi, Öklid olmayan (hiperbolik) düzlemin bir modeline aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir:

Bir yay elemanının *ds* hiperbolik uzunluğu

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

ile tanımlanır. Böylece parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir *C* eğrisinin hiperbolik uzunluğu

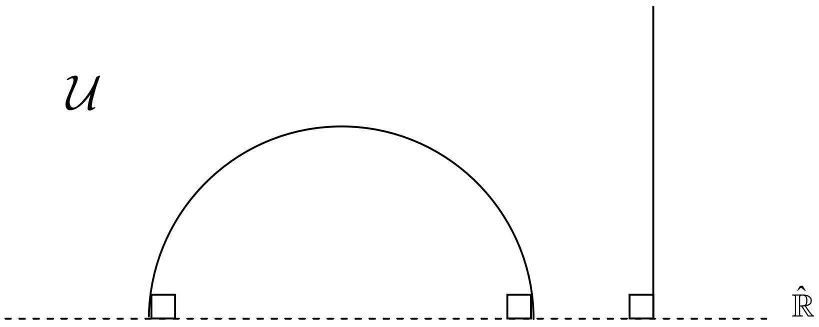
$$\ell(C):=\int_C ds=\int_C\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

ve ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı

$$\mu(E):=\iint_E\frac{dxdy}{y^2}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki metriğin geodezikleri, reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrulardır. Bunlar *hiperbolik doğrular* olarak adlandırılır.

$\mathcal{U}$ üst yarı düzlemde iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Bu metrikle tanımlanan topoloji, bilinen Öklid topolojisine eş değerdir. Yani bir topolojideki açık küme, diğer topolojide de açıktır. Hiperbolik uzaklık ve alan $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin dönüşümleri altında invaryant kalır [13].



Şekil 1.1 Hiperbolik doğrular

2) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin elemanlarının klasik sınıflandırılması sabit nokta kümelerine göre yapılır. Buna göre $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklindeki keyfi bir eleman iz (*trace*)'ine göre

$|\mathrm{a}+\mathrm{d}|=2$ ise *parabolik*

$|\mathrm{a}+\mathrm{d}|>2$ ise *hiperbolik*

$|\mathrm{a}+\mathrm{d}|<2$ ise *eliptik*

biçiminde sınıflandırılır.

Buna göre bir parabolik eleman $\mathcal{U}$ nun sınırı üzerindeki bir sabit noktayla, bir hiperbolik eleman $\mathcal{U}$ nun sınırı üzerindeki iki sabit noktayla ve bir eliptik eleman $\mathcal{U}$ daki bir sabit noktayla hareket eder.

Tanım 2.15. T_1 ve T_2 , $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ grubunun herhangi iki elemanı olsun. $T_1=TT_2T^{-1}$ olacak şekilde bir $T\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ elemanı varsa T_1 ve T_2 birbirinin *eşleniğidir* denir.

Önerme 2.16. T_1 ve T_2 birbirinin eşleniği iseler aynı tiptendirler.

Tanım 2.17. Λ, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$nin bir alt grubu olmak üzere I-birim matrisinin U$\cap\Lambda$={I} şartını sağlayan bir U-komşuluğu varsa Λya $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin bir *ayrık alt grubu* veya *Fuchsian grup* adı verilir.

Her sonlu üretilmiş Fuchsian grubu da aşağıdaki gibi bir gösterime sahiptir:

$$\begin{array}{lll} \text{Üreticiler : } & a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g & \text{(hiperbolik)} \\ & x_1, \ldots x_r & \text{(eliptik)} \\ & p_1, \ldots, p_s & \text{(parabolik)} \end{array}$$

$$\text{Bağıntılar : } x_1^{m_1} = \ldots = x_r^{m_r} = \prod_{i=1}^{g} \mathrm{a}_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{s} p_k = 1$$

Simge : (g ; $m_1,\ldots, m_r$; s).

Burada g-grubun cinsini, m_i- üretici eliptik elemanların mertebelerini ve s-parabolik sınıf sayısını temsil etmektedir. Simge, üzerinde çalışılan grubun invaryantlarını ortaya koyması bakımından son derece önemlidir [5].

Tanım 2.18. Λ bir Fuchsian grubu olsun. Bu takdirde

(i) $\bigcup_{T\in\Lambda} T(F) = \mathcal{U}$ (ii) $\forall T \in \Lambda \setminus \{I\}$ için $\overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \varnothing$.

şartlarını sağlayan F kapalı kümesine Λ için bir *temel bölge* adı verilir.

Tanım 2.19. X bir bağlantılı, Hausdorff topolojik uzayı olsun. Bir $A \subset X$ ve $B \subset \mathbb{C}$ açık alt kümeler olmak üzere $\varphi : A \to B$ homoemorfizmasına X üzerinde bir *kompleks kart* ve (A,φ) çiftine X in bir *koordinat komşuluğu* denir.

Tanım 2.20. Eğer $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(A_1 \cap A_2) \to \varphi_1(A_1 \cap A_2)$ fonksiyonu holomorf ise (A_1,φ_1) ve (A_2,φ_2) *koordinat komşulukları uyumludur* denir.

Tanım 2.21. Koordinat komşuluklarının bir $(A_i,\varphi_i)_{i\in I}$ ailesini alalım.

(1) $X = \cup(A_i)$

(2) $\forall(i,j)\in I\times I$ için (A_i,φ_i) ile (A_i,φ_j) uyumludur,

koşullarının sağlanması halinde $(A_i,\varphi_i)_{i\in I}$ ailesine bir *örtüm* adı verilir. İki örtümün birleşimlerinin de bir örtüm meydana getirmesi halinde bu *örtümler eşdeğerdir* denir.

Bu örtümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanır ve denklik sınıfına da bir *kompleks yapı* adı verilir.

Tanım 2.22. (Riemann Yüzeyi**).** Bir bağlantılı Hausdorff topolojik uzayına bir kompleks yapıyla birlikte bir *Riemann yüzeyi* adı verilir.

Her noktasının bir komşuluğu $\mathbb{R}^2$ nin bir açık alt kümesine homeomorf olan bir bağlantılı Hausdorff uzayına bir *yüzey* adı verilir. Eliptik eleman içermeyen keyfi bir Λ-Fuchsian grubu da PSL($2,\mathbb{R}$) nin bir alt grubu olarak $\mathcal{U}$ üzerinde hareket eder ve bölüm topolojisi ile meydana gelen bölüm uzayı bir yüzeydir. Diğer taraftan $\mathcal{U}$ daki kompleks yapı $\mathcal{U}/\Lambda$-yüzeyine transfer edildiğinde bir Riemann yüzeyi elde edilir. Eğer Λ eliptik eleman içeriyorsa sonuç yine bir Riemann yüzeyidir, ancak bu durumda $\mathcal{U}\to\mathcal{U}/\Lambda$ izdüşümü dallanmıştır. Ancak oluşan yüzey kompakt değildir, bunu sağlamak için $\mathcal{U}$ yerine $\mathcal{U}\cup\{\infty\}$ alınır [13].

Teorem 2.23. Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform eşdeğerdir [13]:

(i) $\mathbb{C}_\infty$-Riemann Küresi
(ii) $\mathbb{C}$-Kompleks Düzlem
(iii) $\mathcal{U}$-Üst Yarı Düzlem.

Bu Riemann yüzeylerinin otomorfizm grupları aşağıdaki gibidir;

Teorem 2.24. [13]**.**

(i) $Aut(\mathbb{C}_\infty)=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

(ii) $Aut(\mathbb{C})=\{z\to az+b : a,b\in\mathbb{C}, a\neq 0\}$

(iii) $\mathrm{Aut}(\mathcal{U})=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Teorem 2.25. $\mathcal{U}/\Lambda$ kompakt ise Λ parabolik eleman içermez [13].

2.3 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki Parabolik ve Eliptik Altgruplar

Teorem 2.26. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin bir parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanının $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki merkezleyeni, aynı sabit nokta kümeli tüm parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanlardan meydana gelir [7].

Teorem 2.27. Her Abel, Fuchsian grup devirlidir [13].

Tanım 2.28. Λ bir Fuchsian grup olsun. Λ nın birim elemandan ve parabolik (eliptik) elemanlardan oluşan devirli bir maksimal alt grubuna Λ nın bir *parabolik* (*eliptik*) *alt grubu* denir.

Tanım 2.29. Bir Λ Fuchsian grubunun parabolik (eliptik) alt gruplarının eşlenik sınıflarının sayısına Λ Fuchsian grubunun *parabolik* (*eliptik*) *sınıf sayısı* denir.

Tanım 2.30. Λ bir Fuchsian grup olsun. Bir $r \in \hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ noktası keyfi verildiğinde $\gamma(r) = r$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Lambda$ parabolik elemanı bulunabiliyorsa, bu noktaya Λ Fuchsian grubunun bir *parabolik noktası* veya *cusp*'ı denir. γ nın parabolik noktalarının kümesine γ nın *cusp kümesi* denir.

Benzer şekilde $z \in \mathcal{U}$ noktası keyfi verildiğinde $\sigma(z) = z$ olacak şekilde bir $\sigma \in \Lambda$ eliptik elemanı bulunabiliyorsa bu noktaya , Λ nın bir *eliptik noktası* adı verilir.

2.4 Modüler Grup

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin üzerinde en çok çalışılan alt grubu olan Modüler grup,

$$\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \big/ \{\pm I\} = \{z \to Tz : T \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\}$$

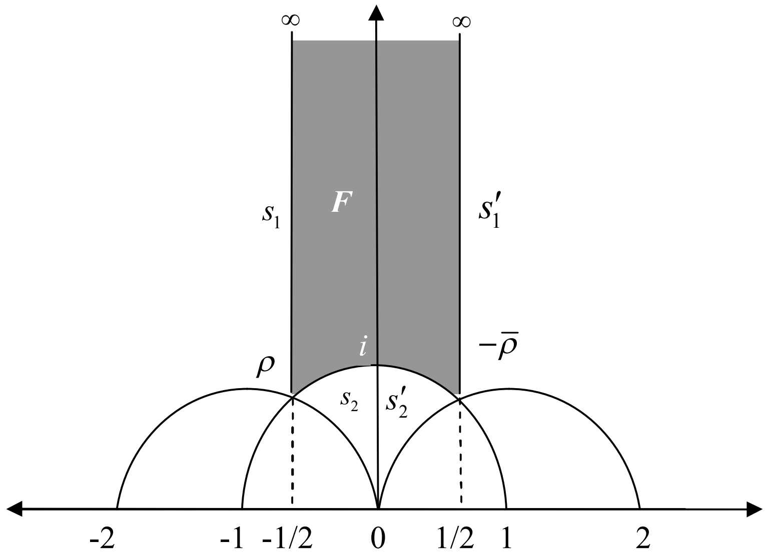
ile tanımlanır. Şimdi $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$nin

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Z} = \mathrm{XY} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elemanlarını göz önüne alalım. X, 2-mertebeli bir eliptik eleman, Y 3-mertebeli bir eliptik eleman ve Z bir parabolik elemandır. Γ, X ile Z ve X ile Y =XZ tarafından üretilir.

$$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1\,, |\,x\,|\leq\frac{1}{2}\,,\; y>0\right\}$$

kümesi Γ-modüler grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 1.2 Γ nın F temel bölgesi

Şimdi de Γ nın cusp kümesi $\hat{\mathbb{Q}}:=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ üzerindeki hareketini inceleyelim. $\hat{\mathbb{Q}}$ nın elemanları $(x,y)=1$ olmak üzere $\frac{x}{y}$ olarak yazılabilir. Burada $\infty=\frac{1}{0}=-\frac{1}{0}$ dır. $\frac{x}{y}=\frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek türlü değildir. $T\in\Gamma$ ise

$$T\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ax+by}{cx+dy} \quad \text{ve} \quad T\left(\frac{-x}{-y}\right)=\frac{-ax-by}{-cx-dy}=\frac{ax+by}{cx+dy}=T\left(\frac{x}{y}\right)$$

olduğundan Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır.

Eğer $(x,\, y)=1$ ve $ad-bc=1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formdadır.

Aksini varsayalım; $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın. Buna göre $n|ax+by$ ve $n|cx+dy$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}$ elemanı vardır. Bu durumda $k,\ell\in\mathbb{Z}$ için $ax + by = kn$ …(1) ve $cx + dy = \ell n$ … (2) dir.

(1) eşitliğinin her iki tarafı d ile (2) de $-b$ ile çarpıldığında

$$(ad-bc)x = (kd-b\ell)n \qquad \text{(I)}$$

ve benzer şekilde (1) eşitliği $-c$ ve (2) eşitliği a ile çarpıldığında

$$(ad-bc)y = (a\ell-ck)n \qquad \text{(II)}$$

elde edilir. (I) ve (II) den $n|x,y$ çelişkisi elde edilir.

Modüler grubu üçgen grupların bir üyesi olarak ele almakta mümkündür. Bir üçgen grup $(\ell,\ m,n)$ ile gösterilir, burada $\ell,\ m,n\in\mathbb{Z}$ veya ∞ dur, ve

$$\{x,y,z : x^{\ell} = y^{m} = z^{n} = xyz = 1\}$$

bağıntısına sahiptir. Geometrik bir yorum için, bir X uzayında $\frac{\pi}{\ell},\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}$ açılı bir T-üçgeni göz önüne alınmalıdır, burada X küre, Euclid düzlemi ya da hiperbolik düzlemdir. Bu durumda T nin kenarlarında X in yansımaları tarafından üretilen grup 2-indeksli bir alt gruba sahiptir ve $(\ell,\ m,n)$ ye izomorf konform dönüşümlerden meydana gelir. X uzayı ℓ,m,n tamsayıları tarafından belirlenir;

$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1 \text{ ise Küre}$$

$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \text{ ise Euclid Düzlemi}$$

$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1 \text{ ise Hiperbolik Düzlem}$$

Γ yı bir üçgen grup olarak ele alırsak, $\Gamma\cong(2,3,\infty)$ izomorfizması elde edilir.

Teorem 2.31. Γ **,** $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat. $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\hat{\mathbb{Q}}$; $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ ve $(a,b)=(c,d)=1$ olsun. Bu durumda $a\beta - b\alpha=1$ ve $c\delta - d\gamma=1$ olacak şekilde $\alpha,\beta,\delta,\gamma\in\mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Burada $\xi(z)=\dfrac{az+\alpha}{bz+\beta}$ ve $\eta(z)=\dfrac{cz+\gamma}{dz+\delta}$ şeklinde tanımlanırsa $\xi(\infty)=\frac{a}{b}$ ve $\eta(\infty)=\frac{c}{d}$ olacak şekilde bir $\varphi:=\eta\xi^{-1}\in\Gamma$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla Γ, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

Teorem 2.32. Γ nın ∞ noktasının sabitleyeni Γ_∞ sonsuz devirli bir gruptur.

İspat. $T\in\Gamma$ ve $T(\infty)=\infty$ olsun. $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ise $T(\infty)=\infty$ olduğundan $c=0$ ve $ad=1$ dir. Buradan $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=a^2z+m=z+m$ $(m=b$ veya $m=-b)$ bulunur. Dolayısıyla $U(z)=z+1$ olmak üzere $\Gamma_\infty=\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ dur.

Not. Burada *T* dönüşümü kolaylık olması için *T* ye karşılık gelen matris alınacaktır.

2.5 Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 2.33. m pozitif tamsayı olmak üzere Γ nın *temel kongrüans alt grubu*

$$\Gamma(m):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\mid a\equiv d\equiv 1 \bmod m\ ,b\equiv c\equiv 0 \bmod m\right\}$$

ile tanımlanır. Γ nın $\Gamma(m)$-temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt kümesine *kongrüans alt grubu* denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları;

$$\Gamma_1(m):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\mid a\equiv d\equiv 1 \bmod m,\ c\equiv 0 \bmod m\right\}$$

$$\Gamma_0(m):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\ \mid c\equiv 0\ \bmod m\right\};\ \Gamma^0(m):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\mid b\equiv 0 \bmod m\right\}$$

gruplarıdır.

Ayrıca $\Gamma(m) \lhd \Gamma$ nın normal bir alt grubudur, dolayısıyla $\Gamma(m)$, $\Gamma_0(m)$ ve $\Gamma_1(m)$ nin de normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(m) \lhd \Gamma_0(m)$ dir. Buna göre indeksler $m > 2$ için

$$\mu_0(m) := \left|\Gamma : \Gamma_0(m)\right| = m\prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right), \quad \left|\Gamma : \Gamma_1(m)\right| = \frac{m^2}{2}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\frac{\mu(m)}{2} := \left|\Gamma : \Gamma(m)\right| = \frac{m^3}{2}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

dir.

$m = 2$ durumunda $\left|\Gamma : \Gamma_0(2)\right| = 3$, $\left|\Gamma : \Gamma_1(2)\right| = 3$, $\left|\Gamma : \Gamma(2)\right| = 6$ biçimindedir. $m > 2$ için

$$\left|\Gamma_0(m) : \Gamma_1(m)\right| = \frac{\left|\Gamma : \Gamma_1(m)\right|}{\left|\Gamma : \Gamma_0(m)\right|} = \frac{m}{2}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(m)}{2} \;;$$

$$\left|\Gamma_1(m) : \Gamma(m)\right| = \frac{\left|\Gamma : \Gamma(m)\right|}{\left|\Gamma : \Gamma_1(m)\right|} = m$$

dir. $\Gamma_0(m)$, $\Gamma_1(m)$ ve $\Gamma(m)$'nin cusp kümesi de $\hat{\mathbb{Q}}$ dır [24].

Teorem 2.34. $\Gamma_0(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat. Aksini varsayalım ve $0, \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cm & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir $\begin{pmatrix} a & b \\ cm & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m)$ elemanı vardır.

Bu eşitlikten $b = 1$ ve $d = 0$ elde edilir. Determinant göz önüne alındığında bunun $c = -1$ ve $m = 1$ olmasıyla, diğer bir ifadeyle ancak $\begin{pmatrix} a & b \\ cm & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olması durumunda mümkün olduğu görülür.

2.6 Temel Bölgenin Cinsi

Bir kompakt, yönlendirilebilir X- Riemann yüzeyini göz önüne alalım. X de reellerin kapalı birim aralığının bir homeomorf resmine X üzerinde bir *basit yay* (*simple arc*) adı verilir. Bir yayın bitim noktası ile bir sonrakinin başlangıç noktasının birleşimiyle oluşan yayların sonlu bir dizisine X üzerinde bir *eğri* (*curve*) denir.

Bir eğrinin başlangıç noktası ile bitim noktası çakışıyorsa bu eğriye bir *kapalı eğri* adı verilir. Öklid düzlemindeki bir kapalı dairenin X deki bir homeomorf resmine X üzerinde bir *poligon* adı verilir.

Şimdi $\Im$, X üzerinde sonlu sayıdaki noktada kesişen sonlu sayıda eğrinin meydana getirdiği bir sistem olsun. Ayrıca $\Im$ nın bütünleyenlerinin bağlantılı bileşenlerinin kapanışları poligonlar olsun ve kesişimleri de ya tek bir nokta ya tek bir kenar ya da boş küme olsun. Eğrilerin böyle bir sistemine X in bir *poligonal ayrışması* denir.

Bir poligonal ayrışmada meydana gelen köşe, kenar ve yüz'ün anlamı açıktır. Bunların sayısını sırasıyla v,e ve f ile göstereceğiz.

Teorem 2.35. X in her poligonal ayrışmasında $v-e+f$ sayısı invaryant kalır [24].

Tanım 2.36. $g := 1-\dfrac{v-e+f}{2}$, kesişimleri boş olan ve X i ayrıştırmayan kapalı eğrilerin maksimal sayısıdır. Bu önemli topolojik invaryanta X in *cinsi* (*genus*) denir.

Teorem 2.37. $\Gamma_0(m)$ kongrüans alt grubunun temel bölgesinin cinsi

$$g = 1+\frac{\mu_0(m)}{12}-\frac{\varepsilon_\rho}{3}-\frac{\varepsilon_i}{4}-\frac{\sigma_\infty}{2}$$

dir. Burada

$$\varepsilon_\rho = \begin{cases} 0 & , \ 9|m \\ \prod\limits_{p|m}\left(1+\left(\dfrac{-3}{p}\right)\right) & , \ 9\nmid m \end{cases} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & , \ 4|m \\ \prod\limits_{p|m}\left(1+\left(\dfrac{-1}{p}\right)\right) & , \ 4\nmid m \end{cases}$$

dir ve $\sigma_\infty = \sum\limits_{t|m}\varphi\left(\left(t, {}^{m}\!/_{t}\right)\right)$ biçimindedir . φ -Euler fonksiyonu olmak üzere,

$$\left(\frac{-1}{p}\right):=\begin{cases}0 & , \quad p=2\\ 1 & , \quad p\equiv 1 \bmod 4\\ -1 & , \quad p\equiv 3 \bmod 4\end{cases} \quad , \quad \left(\frac{-3}{p}\right):=\begin{cases}0 & , \quad p=3\\ 1 & , \quad p\equiv 1 \bmod 3\\ -1 & , \quad p\equiv 2 \bmod 3\end{cases}$$

dir [24].

$m\leq 25$ için elde edilen sonuçları verelim;

g=0 m=1, …, 10, 12, 13, 16, 18, 25 için;

g=1 m=11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24 için;

g=2 m=22, 23 için.

2.7 Bazı Kongrüans Alt Gruplarının Normalliyenleri

Teorem 2.38. $\Gamma(m)$'nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni Γ dır.

İspat. $\aleph$, $\Gamma(m)$'nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni olsun.

$$\Gamma(m)\lhd\Gamma < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

olduğundan, $\Gamma\leq\aleph$. Ancak $\aleph$, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ de döngüsel-olmayan bir Fuchsian grubunun normalliyenidir, dolayısıyla o da Fuchsian'dır. Fuchsian gruplarının sonlu indekse sahip tüm alt gruplarının bir sınıflandırmasını bulabiliriz, buradan Γ nın herhangi bir Fuchsian grubunun sonlu indeksli bir alt grubuna karşılık gelmediği görülür. Diğer taraftan Γ yı sonsuz-indeksli bir alt grup olarak içeren hiçbir G-Fuchsian grubu yoktur, aksi halde G nin herhangi bir temel bölgesinin alanı 0 olurdu. Sonuç olarak $\Gamma\leq\aleph$ olamaz, $\Gamma=\aleph$ elde edilir.

Teorem 2.39. $\Gamma_1(m)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ deki normalliyeni $\begin{cases}\Gamma_0(m), & m\neq 4\\ \Gamma_0(2), & m=4\end{cases}$ dir.

İspat. $\Gamma_1(m)$nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ deki normalliyeni $\aleph$ olsun. $\Gamma_1(m)\lhd\Gamma_0(m)$ olduğundan $\Gamma_0(m)\subset\aleph$. Tersini gösterelim.

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\aleph \quad ve \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\Gamma_1(m)$$

alalım. Buradan,

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}A^{-1}\in\Gamma_1(m)$$

ve daha açık yazıldığında,

$$\begin{pmatrix}ad-ac-bc & *\\ cd-c^2-cd & -bc+ac+ad\end{pmatrix}\in\Gamma_1(m)$$

böylece,

$$\begin{pmatrix}1-ac & *\\ -c^2 & 1+ac\end{pmatrix}\in\Gamma_1(N)$$

buna göre,

$$-c^2\equiv 0(\operatorname{mod} m) \text{ ve } 1-ac\equiv 1+ac\equiv 1(\operatorname{mod} m) \text{ ya da}$$

$$-c^2\equiv 0(\operatorname{mod} m) \text{ ve } 1-ac\equiv 1+ac\equiv -1(\operatorname{mod} m)$$

Birinci durumda $-c^2\equiv 0(\operatorname{mod} m)$ ve $ac\equiv 0(\operatorname{mod} m)$ kongrüanslarından $m\,|\,c^2$ ve $m\,|\,ac$. Eğer $(a,m)=1$ olduğunu gösterirsek, $m\,|\,ac$ olduğundan $m\,|\,c$, dolayısıyla aradığımız neticeyi $A\in\Gamma_0(m)$ ‘yi elde etmiş oluruz. Şüphesiz $(a,m)\neq 1$ ise $\exists\, p\in\mathbb{P}$ öyle ki $p\,|\,a$ ve $p\,|\,m$. $m\,|\,c^2$ olduğundan $p\,|\,c^2$ ve p-asal olduğundan $p\,|\,c$ olur. Ancak $p\,|\,a$ ve $p\,|\,c$ olması çelişkidir, çünkü $(a, c)=1$ dir.

İkinci durumda $1-ac\equiv -1(\operatorname{mod} m)$ ve $1+ac\equiv -1(\operatorname{mod} m)$ denklemlerinden $2\equiv -2(\operatorname{mod} m)$ elde edilir. Böylece $m\,|\,4$ yani $m=1$, 2, veya 4 olur. Bu durumlarda $\Gamma_1(m)=\Gamma_0(m)$, dolayısıyla normalliyenlerin sırasıyla $\Gamma_0(1)$, $\Gamma_0(2)$ ve $\Gamma_0(4)$ e karşılık geldiği görülür.

Teorem 2.40. $\Gamma_0(m)$’nin PSL $(2,\mathbb{R})$ deki *normalliyeni*

$$\mathcal{N}or(m):=\left\{\begin{pmatrix}ae & b/h\\ cm/h & de\end{pmatrix} : ade^2-bcm/h^2=e>0\right\}$$

dir. Buradaki bütün harfler tamsayı, $e\,\|\,m/h^2$ ve h, $h^2\,|\,m$ şartını sağlayan 24’ün en büyük bölenidir. ($r\,\|\,s$ yani "r, s’nin bir tam bölenidir $:\Leftrightarrow\left(r, s/r\right)=1$ dir).

Öncelikle $\Gamma_0(m)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ deki $\mathcal{N}or_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})}(m)$-normalliyeninin nasıl elde edildiğini göstereceğiz.

Lemma 2.41. $m=\sigma^2 q\geq 1$ ve q-karesiz olsun. Bu durumda σ nın $\mathcal{N}or_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})}(m)=\Gamma_0\left(m/\Delta_1\right)$ eşitliğini sağlayan bir Δ_1 böleni mevcuttur.

Lemma 2. 42. Her $A=\begin{pmatrix} a & b \\ cm & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0\left(m\right)$ ve σ için $\varepsilon\,|\left(d\text{-}a\right)$ koşulunu sağlayan bir ε-böleni mevcut olsun. Bu durumda $\varepsilon\,|\,\Delta_1$ dir.

Newman yaptığı ispatlarla Δ_1=h olduğunu gösterdi ve ayrıca yukarıdaki lemmaları kullanarak Teorem 2.43 ün ispatını da yapmıştır.

Teorem 2.43. $m=2^{\alpha}3^{\beta}m_0\geq 1$, $\left(m_0,6\right)=1$ ve $u=\min\left(3,\left[\dfrac{\alpha}{2}\right]\right), v=\min\left(1,\left[\dfrac{\beta}{2}\right]\right)$ ve ayrıca [x] , $\leq$ x olan en büyük tam sayı olmak üzere $\mathcal{N}or_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})}(m)=\Gamma_0\left(\dfrac{m}{2^u 3^v}\right)$ dir [18].

Şimdi Teorem 2.40 ın ispatını verelim.

Teorem 2.40 ın ispatı: M-normalliyenin keyfi bir elemanı olsun ve matris gösterimi olarak da $M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ alalım. Bu takdirde

$$M\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix}1-\alpha\gamma & \alpha^2\\ -\gamma^2 & 1+\alpha\gamma\end{pmatrix}\in\Gamma_0\left(m\right) \qquad (1)$$

$$M\begin{pmatrix}1 & 1\\ m & 1\end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix}1+m\beta\delta & -m\beta^2\\ m\delta^2 & 1-m\beta\delta\end{pmatrix}\in\Gamma_0\left(m\right) \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) den $\alpha=\sqrt{u}t_1$, $\beta=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\dfrac{\ell_1}{k}$, $\xi=\sqrt{g}t_2$, $\gamma=\sqrt{s}\ell_2$ dir. Burada $u, t_1, a, b, \ell_1, k, g, t_2, s, \ell_2$ hepsi birer tam sayı; $\left(a,b\right)=\left(a,k\right)=\left(b,\ell_1\right)=1$ ve u, s, g, a, b karesizdir. (2) de $m\beta^2$ bir tam sayıdır. Bu yüzden

$$bk \mid m \tag{3}$$

elde edilir. $\alpha\gamma$ bir tam sayı olduğundan u=s ve $\beta\xi$ bir rasyonel sayı olduğundan $\sqrt{g\frac{a}{b}}$ bir rasyonel sayıdır, bu ise g=ab eşitliğini verir, çünkü g, a, b karesizdir. Bu yüzden

$$M=\begin{pmatrix} \sqrt{u}t_1 & \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\ell_1}{k} \\ \sqrt{u}\ell_2 & \sqrt{ab}t_2 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \sqrt{uab}t_1t_2-\sqrt{u\frac{a}{b}}\frac{\ell_1}{k}\ell_2=1 \tag{4}$$

olur. Buradan

$$k\sqrt{ab}t_1t_2-\sqrt{u\frac{a}{b}}\ell_1\ell_2=k \;\Rightarrow\; k^2uat_1^2t_2^2+u\frac{a}{b}\ell_1^2\ell_2^2-2k\ell_1\ell_2t_1t_2ua=k^2$$

bulunur. Bu $u\frac{a}{b}\ell_1^2\ell_2^2$ nin bir tam sayı olması gerektiğini söyler ancak $(a,b)=(a,k)=1$ olduğundan $a=1$ olmak zorundadır.

(4) kullanıldığında

$$\sqrt{ub}t_1t_2-\sqrt{\frac{u}{b}}\frac{\ell_1}{k}\ell_2=1$$

elde ederiz. Böylece

$$b\sqrt{u}t_1t_2-\sqrt{u}\frac{\ell_1}{k}\ell_2=\sqrt{b} \;\Rightarrow\; \sqrt{u}\left(bt_1t_2-\frac{\ell_1}{k}\ell_2\right)=\sqrt{b}$$

dolayısıyla $\sqrt{\frac{u}{b}}=\dfrac{1}{bt_1t_2-\frac{\ell_1\ell_2}{k}}$ bir rasyonel sayıdır. u ve b karesiz olduğundan u=b eşitliği elde edilir. Buna göre

$$M=\begin{pmatrix} \sqrt{u}t_1 & \frac{\ell_1}{k\sqrt{u}} \\ \sqrt{u}\ell_2 & \sqrt{u}t_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

u=b olduğundan (3) den $m \equiv 0\left(\text{mod } uk^2\right)$ dir. Öyleyse q karesiz olmak üzere $m = \sigma^2 q$ dur. $\sigma^2 q \equiv 0\left(\text{mod } uk^2\right)$ ve σ^2, m yi bölen en büyük karesiz olduğundan $k^2 \mid \sigma^2$, buradan $k \mid \sigma$ dır.

$u\ell_2{}^2$, $\sigma^2 q$ ile bölünebilir olduğundan $\sigma^2 \mid \ell_2{}^2$ dolayısıyla $\sigma \mid \ell_2$ dir. Buna göre z bir tam sayı olmak üzere $\ell_2 = \sigma z$ dir. Şimdi $k \mid \sigma$ olduğundan

$$\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 q \equiv 0\left(\text{mod } u\right)$$

$$\det M = ut_1t_2 - \frac{\ell_1\ell_2}{k} = ut_1t_2 - \ell_1\frac{\sigma}{k}z = 1$$

bulunur. Bu yüzden $\left(u, \frac{\sigma}{k}\right) = 1$, buradan $\left(u, \frac{\sigma^2}{k^2}\right) = 1$ dir. Böylece $u| \, q$ dur. Dolayısıyla

$$M = \sqrt{u}\begin{pmatrix} t_1 & \frac{\ell_1}{ku} \\ \ell_2 & t_2 \end{pmatrix}$$

dir. Yukarıdan $\ell_2{}^2 = \sigma^2 \frac{q}{u} q_1$ dir. Bu yüzden q_1, s bir tam sayı olmak üzere $\frac{q}{u}s^2$ biçiminde olmak zorunda, buradan $\ell_2 = \sigma qs / u$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$M = \sqrt{u}\begin{pmatrix} t_1 & \frac{\ell_1}{ku} \\ s\sigma q/u & t_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Şimdi $t = \ell_1\sigma / k$ olsun. Bu durumda

$$M = \sqrt{u}\begin{pmatrix} t_1 & \frac{t}{u\sigma} \\ s\sigma q/u & t_2 \end{pmatrix}$$

olur. M nin asıl biçimini elde etmek amacıyla $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ cm & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0\left(m\right)$ için $MAM^{-1} \in \Gamma_0\left(m\right)$ bağıntısını kullanalım. Matris çarpımı gerçekleştirildiğinde $\forall A \in \Gamma_0\left(m\right)$ için

$$\left(a-d\right)t_1t \equiv \left(a-d\right)st_2 \equiv 0\left(\text{mod}\,\sigma\right)$$

elde edilir.

Şimdi $\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ cm & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(m)$ için $\varepsilon_1=\varepsilon_1(N)=\text{EBOB}(a-d)$ tanımlayalım. Daha sonra $\varepsilon_2=(\varepsilon_1,\sigma)$ yazalım. Buradan $t_1t=st_2\equiv 0(\bmod\sigma/\varepsilon_2)$ olduğu görülür. Lemma 2.41 ve Lemma 2.42 kullanıldığında $\varepsilon_2\,|\,h$ (esasında $h=\varepsilon_2$) ve her $A=\begin{pmatrix} a & b \\ cm & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(m)$ için $a-d\equiv 0(\bmod h)$ sonucu çıkar. Bu yüzden

$$t_1t=st_2\equiv 0(\bmod\sigma/h)$$

denkliğini elde ederiz. $t_1t\equiv 0(\bmod\sigma/h)$ olması $\Delta\,|\,\sigma/h$ olmak üzere $t_1=r\Delta$ olduğunu gösterir, böylece $t=x\sigma/h\Delta$ dır. Benzer şekilde $st_2\equiv 0(\bmod\sigma/h)$ ve $(t_1,s)=1$ olduğundan $s=y\sigma/h\Delta$ ve $t_2=v\Delta$, $\Delta\,|\,\sigma/h$ elde ederiz. Bu yüzden

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} r\Delta & \dfrac{x}{u\sigma\Delta} \\ \dfrac{ym}{hu\Delta} & u\Delta \end{pmatrix} \tag{6}$$

elde edilir, (6) Lehner ve Newman tarafından [18] de verilen biçimdir.

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} r\Delta\sqrt{u} & \dfrac{x}{h\Delta\sqrt{u}} \\ \dfrac{vm}{h} & v\Delta\sqrt{u} \end{pmatrix},\ \det M=1$$

$$M=\begin{pmatrix} ru\Delta^2 & \dfrac{x}{h} \\ \dfrac{vm}{h} & vu\Delta^2 \end{pmatrix},\ \det M=u\Delta^2$$

$\det M=rvu^2\Delta^4-xym/h^2=u\Delta^2$ dir. $u|\,q$ ve $\Delta\,|\,\sigma/h$ olduğundan $u\Delta^2\,|\,\sigma^2q/h^2=\dfrac{m}{h^2}$ dir. Diğer yandan $\det M=u\Delta^2$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $u\Delta^2\,\|\,\dfrac{m}{h^2}$ dir. Dolayısıyla M

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cm/h & de \end{pmatrix},\ \det=e>0\ ,\ e\,\|\,\frac{m}{h^2}$$

biçimindedir. Lemma 2.42 kullanıldığında, tersine olarak bu biçimdeki elemanların $\Gamma_0(m)$ nin PSL(2,ℝ) deki normalliyenine ait olacağı görülebilir.

2.8 İmprimitif Hareket

Tanım 2.44. (i) $X \neq \varnothing$ bir küme olsun. $\xi : X \to X$ bire-bir, örten ise ξ'ye X' in bir *permütasyonu* denir. X in tüm *permütasyonlarının kümesi* S^X ile gösterilir.

(ii) $\xi_1, \xi_2 \in S^X$ ise $\xi_1 o \xi_2 \in S^X$ olduğu açıktır. S^X grubuna X üzerinde *simetrik grup* denir. S^X in alt gruplarına da X üzerinde *permütasyon grupları* denir.

Tanım 2.45. G, X üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde G, X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise $g{:}G \to G$ bire-bir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda $gx := g(x)$ olarak alınırsa $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ve $1x = x$ olduğu açıktır. Bu harekete G nin X üzerindeki *doğal hareketi* denir ve "(G,X) *permütasyon grubu*" ifadesi kullanılır.

Tanım 2.46. (G,X) bir transitif permütasyon grubu ve "$\approx$", X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $x,y \in X$ için $x \approx y$ olduğunda $\forall g \in G$ için $g(x) \approx g(y)$ ise "$\approx$" bağıntısına bir *G-invaryant denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.47. Bir G-invaryant denklik bağıntısının denklik sınıflarına *denklik bağıntısının blokları* denir.

Bu tanıma göre;

i) *Özdeşlik bağıntısı*: $x \approx y \Leftrightarrow x = y$

ii) *Evrensel bağıntı*: $\forall x,y \in X$ için $x \approx y$

bağıntılarının G-invaryant denklik bağıntıları olduğu açıktır. Bu bağıntılara *aşikâr* (*trivial*) *bağıntılar* adı verilir.

Tanım 2.48. X üzerinde yukarıdaki aşikâr bağıntıların dışında bir G-invaryant denklik bağıntısı yoksa (G,X)'e *primitif*, aksi halde *imprimitif* denir [7].

Lemma 2.49. (G,X) bir transitif permütasyon grubu, $H \leq G$ ve bir $\alpha \in X$ için $G_\alpha \leq H$ olsun. Bu takdirde $g \in G$, $h \in H$ için

$$g(\alpha) \approx gh(\alpha))$$

bir G-invaryant denklik bağıntısıdır. Ayrıca

$"\approx"$özdeşlik bağıntısıdır $\Leftrightarrow H = G_\alpha$, $"\approx"$ evrensel bağıntıdır $\Leftrightarrow H$=G
dir [7].

Lemma 2.50. (G,X) bir transitif permütasyon grubu olsun. (G,X) hareketi primitiftir $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için G_x, X in maksimal bir alt grubudur [7].

Teorem 2.51. (G,X) bir transitif permütasyon grubu olsun. $G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ ise

$$g(\alpha) \approx h(\alpha) \ \Leftrightarrow g^{-1}h \in H$$

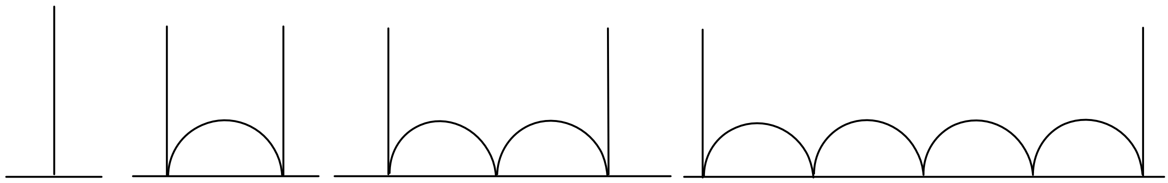
iyi tanımlı bir G-invaryant denklik bağıntısıdır. Denklik sınıflarının sayısı da $|G:H|$ indeksidir [7].

2.9 Graf Teori

Tanım 2.52. $X \neq \varnothing$ bir küme, $\Delta \subset X \times X$ bir bağıntı olsun. G=(X,Δ) ikilisine bir *graf* (graph) denir. X in elemanlarına *grafın köşeleri* ve Δ'nın elemanlarına *grafın kenarları* adı verilir.
(a,b)$\in\Delta$ ise bu durum $a \rightarrow b$ ile gösterilir. Eğer (a,b)$\in\Delta$ veya (b,a)$\in\Delta$ ise a ile b *bir kenar ile bağlanmıştır* denir. Bu durumda a ve b ye *komşu köşeler* denir.

Tanım 2.53. G=(X,Δ) bir graf ve $A \subset X$ olsun. $G' = (A, \Delta \cap A \times A)$ grafına *köşe kümesi A olan G nin bir alt grafı* adı verilir.

Tanım 2.54. $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ bir G-grafının köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ için a_{i-1} ve a_i bir kenar ile bağlanmışlarsa a'dan b'ye *n-uzunluğunda bir yol vardır* denir. Eğer a=b ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ köşelerinin tümü farklı ise bu yola *n-kenarlı bir devre* denir. Ayrıca a_i, a_{i+1} ikilileri için $a_i \rightarrow a_{i+1}$ ise bu devreye *yönlenmiş bir devre* (*circuit*) denir. Üç kenarlı bir devreye bir *üçgen*, dörtkenarlı bir devreye bir *dörtgen* ve altı kenarlı bir devreye bir *altıgen* denir.



İkigen Hiper. Üçgen Hiper. Dörtgen Hiperbolik Altıgen

Şekil 1.3 Devreler

Tanım 2.55. $G=(X,\Delta)$ bir graf olsun. X üzerinde bir $\approx$-bağıntısını şöyle tanımlayalım:

$$''a \approx b :\Leftrightarrow a=b \text{ veya } a\text{'dan } b\text{'ye bir yol vardır }''.$$

Açık olarak, $\approx$ bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.56. (i) X in kendisi bu $\approx$-bağıntısı altında denklik sınıfı ise G-grafına *bağlantılıdır* denir.

(ii) Eğer X_1, $\approx$-bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise $(X_1, \Delta \cap X_1 \times X_1)$ bağlantılı bir graftır ve bu grafa G-grafının *bağlantılı bileşeni* denir.

İki grafın köşeleri arasında 1-1 ve örten bir dönüşüm mevcut ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere gönderiyorsa bu iki grafa *izomorf graflar* denir [28].

2.10 Alt Yörüngesel Graflar

Tanım 2.57. (G,X) bir transitif permütasyon grubu olsun. G nin $X\times X$ üzerindeki hareketini $g\in G$ olmak üzere

$$g:(\alpha,\beta)\to(\,g(\alpha),\ g(\beta)\,)\ ,\ (\alpha,\beta)\in X\times X$$

ile tanımlayalım. Bu hareketin yörüngelerine G nin *alt yörüngeleri* denir. (α,β) yı içeren alt yörüngeyi $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta)$ ile gösterelim.

$\boldsymbol{O}(\alpha,\beta)$ dan bir $G(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafını aşağıdaki gibi elde edelim:

$G(\alpha,\beta)$ nın köşeleri X in elemanlarıdır. Yukarıda da verildiği gibi, x, $y\in X$ noktaları için $(x, y)\in\boldsymbol{O}(\alpha,\beta)$ ise x den y ye yönlenmiş bir kenar vardır ve bu durum $x\to y$ olarak gösterilir. Bu kenarı $\mathcal{U}$-üst yarı düzleminde bir hiperbolik geodezik olarak çizebiliriz.

Açık olarak $\boldsymbol{O}(\beta,\alpha)$ da alt yörüngedir. $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta) = \boldsymbol{O}(\beta,\alpha)$ veya $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta) \neq \boldsymbol{O}(\beta,\alpha)$ dır.

(i) $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta) = \boldsymbol{O}(\beta,\alpha)$ ise $G(\alpha,\beta) = G(\beta,\alpha)$ dır ve bu graf karşılıklı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Yani, $G(\alpha,\beta)$ grafında $x\rightarrow y$ ise yine $G(\alpha,\beta)$ grafında $y\rightarrow x$ dir. Bu durumda $G(\alpha,\beta)$ grafına *kendisiyle eşleşmiş graf* denir.

(ii) $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta) \neq \boldsymbol{O}(\beta,\alpha)$ ise $G(\beta,\alpha)$, $G(\alpha,\beta)$ nın oklarının ters yönlendirilmişlerinden ibarettir. Yani, $G(\alpha,\beta)$ grafında $x\rightarrow y$ ise $G(\beta,\alpha)$ grafında $y\rightarrow x$ dir. Bu durumda ise $G(\alpha,\beta)$ ve $G(\beta,\alpha)$ graflarına *birbirleriyle eşleşmiş graflar* denir.

$\boldsymbol{O}(\alpha,\alpha)=\{(x,x): x\in X\}$, $X\times X$ in köşegenidir. $\boldsymbol{O}(\alpha,\alpha)$ ya uygun $G(\alpha,\alpha)$ alt yörüngesel grafına *aşikâr alt yörüngesel graf* denir. Bu graf her bir köşesi $\alpha\in X$ olan bir sıçramadan ibarettir.

G, X üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden blokları transitif olarak permüte eder, dolayısıyla alt grafların hepsi izomorftur.

Yukarıda özetlenen fikirler ilk defa Sims tarafından ortaya konmuş [26], daha sonra Biggs ve White sonlu gruplar için uygulamaları üzerinde durmuşlar [7], ardında da Tsuzuku bu düşünceleri bir kitapta toparlamıştır [28].

Önerme 2.58. G', (G,X) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde

- **(i)** G, G'-nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.
- **(ii)** G, G'-nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.
- **(iii)** Eğer G' kendisiyle eşleşmiş ise bu takdirde G, G'-nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.
- **(iv)** Eğer G' kendisiyle eşleşmiş değil ise bu takdirde G, G'-nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder [14].

$m\geq 1$ ve $m\in\mathbb{N}$ olsun. Bütün $\frac{x}{y}, |y|\leq m$ rasyonel sayılarından oluşan kesin monoton artan diziye m. mertebeden Farey dizisi denir ve bu dizi F_m ile gösterilir, örneğin

$$F_4 \text{ için: } \ldots,-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{4}{3},\ldots$$

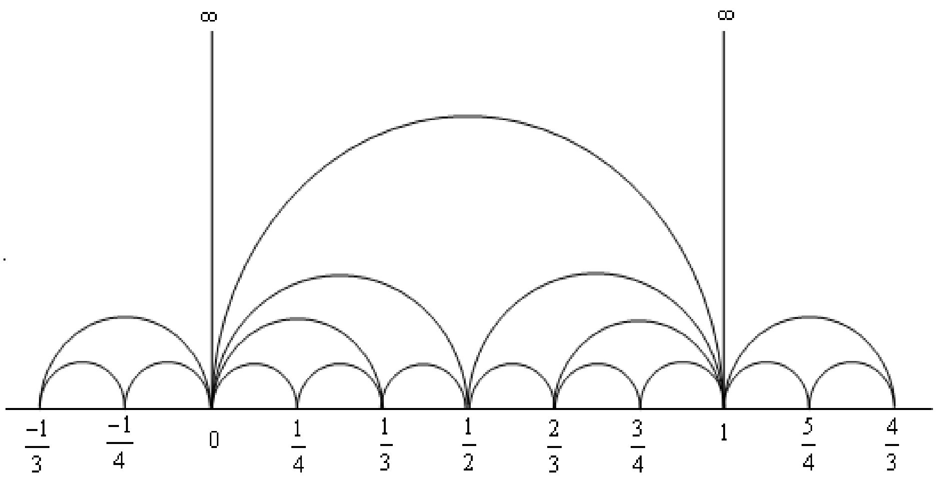
Açık olarak $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ ve $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ 'dur. Farey grafı ile Farey dizileri arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki önermeyi verelim.

Teorem 2.59. [13] $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir;

(i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F' de komşu köşelerdir.

(ii) $ry - sx = \pm 1$

(iii) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ bir m doğal sayısı için F_m'nin ardışık terimleridir.



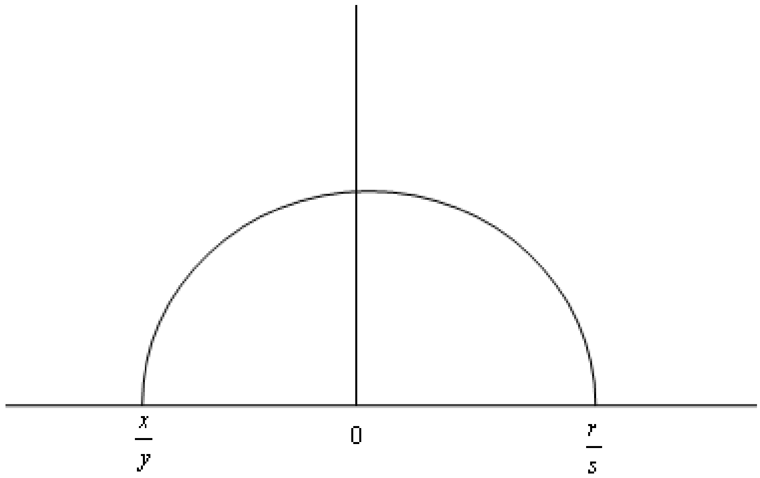
Şekil 1.4 Farey grafı

F nin komşu iki köşesini üst-yarı düzlemde bulunan ve bu iki köşeden geçen merkezi reel eksende ve reel eksene dik yarı-çemberlerle bağlayalım. Bu durumda F nin kenarlarıyla ilgili aşağıdaki önemli sonucu verebiliriz.

Teorem 2.60. F -nın kenarları $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ üst-yarı düzleminde kesişmezler.

İspat. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F$ kenarını alalım. Burada $ry - sx = \pm 1$ dir. Kabul edelim ki 0 ile ∞-u birleştiren Re(z) = 0 doğrusu $\frac{r}{s}$ yi $\frac{x}{y}$ ye birleştiren doğruyu üst yarı düzlemde kessin.

Bu takdirde $\frac{x}{y} < 0 < \frac{r}{s}$ alabiliriz.



Şekil 1.5 $\mathcal{U}$ da kesişen doğrular

Buna göre $ry - sx = 1$ olur. $x < 0$ ve $r, s, y > 0$ olduğundan $1 = ry - sx \geq 2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiden F -nın kenarlarının $\mathcal{U}$- da kesişmedikleri bulunur.

BÖLÜM III

$\Gamma_0(m)$ NİN $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİNİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

m pozitif bir tamsayı ve $\Gamma_0(m)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni $\mathcal{N}or(m)$ normalliyenin elemanları

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cm/h & de \end{pmatrix}$$

şeklinde idi. Burada $e \| \frac{m}{h^2}$, yani $\left(e, \frac{m}{h^2 e}\right) = 1$ ve h, $h^2 \mid m$ olan 24-ün en büyük böleni ve matrisin determinantı $e > 0$ dır. Böylece

$$\mathcal{N}or(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/h\sqrt{q} \\ cm/h\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix} : adq - bcm/qh^2 = 1 \, , q \| m/h^2 \, ; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir [17].

3.1 $\mathcal{N}or(m)$-nin $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

m bir doğal sayı ve

$$\Gamma_0^+(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix} : adq - bcm/q = 1, q \| m, 1 \le q \, ; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

olsun. $\Gamma_0^+(m)$, $\Gamma_0(m)$- nin normalliyeninin bir alt grubudur. Ayrıca $\Gamma_0^+(m)$-nin her elemanı $\Gamma_0(m)$-nin Atkin-Lehner involusyonudur. $q \|$ m olmak üzere $\Gamma_0(m)$-nin Atkin-Lehner involusyonu

$$w_q = \begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix}, \, adq - bcm/q = 1$$

şeklindedir. Eğer $h=1$ ise $\Gamma_0^+(m)$, $\mathcal{N}or(m)$-ye eşittir.

$K=\dfrac{m}{h^2}$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{N}or(m)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{h} & 0 \\ 0 & \sqrt{h} \end{pmatrix}\Gamma_0^+(K)\begin{pmatrix} \sqrt{h} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{h} \end{pmatrix}$$

dir [17].

Teorem 3.1. $\Gamma_0^+(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ üzerinde transitif olması için gerek ve yeter şart $m-$nin karesiz pozitif bir tamsayı olmasıdır [17].

İspat . $\Gamma_0^+(m)$ nin, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğini kabul edelim. Ayrıca $m-$karesiz bir pozitif tamsayı olmasın. Bu takdirde $m=\ell^2 s$ olacak şekilde bir $\ell>1$ sayısı vardır. $\Gamma_0^+(m)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden bir

$$T=\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix}\in\Gamma_0^+(m),\ \ q\parallel m\,,adq-bcm/q=1$$

vardır öyle ki $T(\infty)=\dfrac{1}{\ell s}$ dir. Buna göre

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{a\sqrt{q}}{cm/\sqrt{q}}=\frac{a}{cm/q}=\frac{1}{\ell s}$$

olur. $(a\,,cm/q)=1$ olduğundan

$$a=\pm 1 \text{ ve } cm/q=\pm\ell s$$

elde edilir. $m=\ell^2 s$, $c\ell^2 s=\pm\ell sq$ den $(q,c)=1$ olmak üzere $q=\pm\ell c$ olur. Buradan

$$1=(q,c)=(\pm\ell c,c)=|c|(\pm\ell,1)=|c|$$

bulunur. Böylece

$$c=\pm 1 \text{ ve } q=\pm\ell c=\ell$$

olur. $q\parallel m$ olduğundan $(q\,,m/q)=1$ dir. Bu takdirde

$$\ell=(\ell\,,\ell s)=(\ell\,,m/\ell)=(q,m/q)=1$$

bulunur ki bu $\ell > 1$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $m-$karesiz bir pozitif tamsayı olduğu görülür.

Şimdi $m-$karesiz pozitif bir tamsayı olsun ve $\frac{t}{s} \in \hat{\mathbb{Q}}, (k,s)=1$ ve $q_1 = (s,m)$ olsun. Bu takdirde $s = s^* q_1$ olacak şekilde bir $s^* \in \mathbb{Z}$ vardır.

$m-$karesiz olduğundan $(s, m/q_1) = 1$ dir. Böylece $(s, t\, m/q_1) = 1$ elde edilir. Buradan $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{m}{q_1} ty - sx = 1$$

dir. $q_2 = \frac{m}{q_1}$ ve

$$T = \begin{pmatrix} t\sqrt{q_2} & x/\sqrt{q_2} \\ s\sqrt{q_2} & y\sqrt{q_2} \end{pmatrix}$$

alınırsa $T \in \Gamma_0^+(m)$ ve $T(\infty) = \frac{t}{s}$ bulunur ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.2. $K = \frac{m}{h^2}$ olmak üzere $\mathcal{N}or(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket etmesi için gerek ve yeter şart $\Gamma_0^+(K)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket etmesidir [17].

İspat . $\mathcal{N}or(m) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{h} & 0 \\ 0 & \sqrt{h} \end{pmatrix} \Gamma_0^+(K) \begin{pmatrix} \sqrt{h} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{h} \end{pmatrix}$ olduğundan ispat açıktır.

Teorem 3.3. $m-$nin asal çarpanlarına ayrılışı $m = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_r^{\alpha_r}$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}or(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket etmesi için gerek ve yeter şart $\alpha_1 \le 7,\ \alpha_2 \le 3,\ \alpha_i \le 1,\ i = 3,4,5,...,r$ olmasıdır [17].

İspat. "$\Rightarrow$" $K = \frac{m}{h^2}$ olsun ve $\mathcal{N}or(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğini kabul edelim. Bu takdirde Teorem 3.2. den $\Gamma_0^+(K)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitiftir. Böylece

Teorem 3.1. den $K-$ karesiz bir pozitif tamsayıdır. Buna göre $k_i, \alpha_i \in \{0,1\}$ için $K = 2^{k_1}3^{k_2}p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$ yazabiliriz. h, $h^2 \mid m$ olan 24-ün en büyük ortak böleni olduğundan $0 \le t_1 \le 3$ ve $0 \le t_2 \le 1$ şartlarını sağlayan $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ için $h = 2^{t_1}3^{t_2}$ olur. Böylece

$$m = K \cdot h^2 = 2^{k_1+2t_1}3^{k_2+2t_2}p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r} = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$$

dir. $\alpha_1 = k_1 + 2t_1$ ve $\alpha_2 = k_2 + 2t_2$ seçilirse

$$m = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\alpha_1 = k_1 + 2t_1 \le 1 + 2.3 = 7$$

$$\alpha_2 = k_2 + 2t_2 \le 1 + 2.1 = 3$$

bulunur.

"$\Leftarrow$" $\alpha_1 \le 7, \alpha_2 \le 3$ ve $i = 3,4,...,r$ için $\alpha_i \le 1$ ve $m = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}....p_r^{\alpha_r}$ olsun. α_1 ve α_2 2 ile bölünürse

$$\alpha_1 = 2t_1 + r_1 \qquad 0 \le r_1 \le 1$$
$$\alpha_2 = 2t_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 \le 1$$

elde edilir. $\alpha_1 \le 7, \alpha_2 \le 3$ olduğundan $0 \le t_1 \le 3$ ve $0 \le t_2 \le 1$ olur. Buna göre

$$m = 2^{2t_1}3^{2t_2}2^{r_1}3^{r_2}p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r} = \left(2^{t_1}3^{t_2}\right)^2 2^{r_1}3^{r_2}p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$$

dir.

Şimdi $0 \le t_1 \le 3$ ve $0 \le t_2 \le 1$ için $h = 2^{t_1}3^{t_2}$ olsun. Bu takdirde h, $h^2 \mid m$ şartını sağlayan 24-ün en büyük bölenidir.

$$K = \frac{m}{h^2} = 2^{r_1}3^{r_2}p_3^{\alpha_3}....p_r^{\alpha_r}$$

olsun. Buna göre K pozitif karesiz bir tamsayıdır. Böylece Teorem 3.1. den $\Gamma_0^+(K)$ $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder. Teorem 3.2. den $\mathcal{N}or(m)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında m karesiz alınacaktır. Bu durumda $\Gamma_0^+(m) = \mathcal{N}or(m)$ olur.

Şimdi $(m,n)=1$ ve

$$\Gamma_0^*(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{N}or(m) : c \equiv 0 (\operatorname{mod} n) \right\}$$

olsun. Bu takdirde $\Gamma_0^*(n)$, $\mathcal{N}or(m)$ nin bir alt grubudur ve

$$\Gamma_0(mn) \subset \Gamma_0^*(n) \subset \mathcal{N}or(m)$$

dir.

$G = \mathcal{N}or(m)$ ve $X = \hat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $\infty -$un sabitleyeni $G_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ dir.

Buna göre $G_\infty \subset \Gamma_0^*(n) \subset \mathcal{N}or(m)$ olur.

Teorem 2.50 ye göre $\mathcal{N}or(m)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder. Böylece $\approx$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde $\Gamma_0^*(n)$ ile indirgenmiş $\mathcal{N}or(m)$-*invaryant* denklik bağıntısıdır.

$\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $T(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $S(\infty) = \frac{x}{y}$ olacak şekilde $T, S \in \mathcal{N}or(m)$ vardır. Burada $q_1 \mid m$ ve $q_2 \mid m$ olmak üzere

$$T = \begin{pmatrix} r\sqrt{q_1} & * \\ s\sqrt{q_1} & * \end{pmatrix} \text{ ve } \mathrm{S} = \begin{pmatrix} x\sqrt{q_2} & * \\ y\sqrt{q_2} & * \end{pmatrix}$$

alalım.

$$T^{-1}S = \begin{pmatrix} * & * \\ -s\sqrt{q_1} & r\sqrt{q_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\sqrt{q_2} & * \\ y\sqrt{q_2} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ (ry - sx)\sqrt{q_1 q_2} & * \end{pmatrix}$$

dir. Teorem 2.51 e göre $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow T(\infty) \approx S(\infty) \Leftrightarrow T^{-1}S \in \Gamma_0^*(n)$den

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \;\Leftrightarrow\; ry - sx \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$$

elde edilir [16].

Teorem 3.4. $(m,n)=1$ olsun. Bu takdirde $\Gamma_0^*(n)$ nin $\mathcal{N}or(m)$deki indeksi

$$\left|\Gamma:\Gamma_0(n)\right|=n\prod_{p/n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

dir [16].

3.2 $\mathcal{N}or(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

(*G*,*X*) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde *G*, $X\times X$ üzerinde $g\in G$ ve $\alpha,\beta\in X$ olmak üzere

$$g(\alpha,\beta)=(g(\alpha),g(\beta))$$

ile hareket eder.

Bu hareketin yörüngelerine *G* nin *alt yörüngeleri* denir. (α,β) yı ihtiva eden yörünge $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta)$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{O}(\alpha,\beta)$-dan $G(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafı şöyle elde edilir ; $G(\alpha,\beta)$ nın köşeleri X-in elemanları ve $(\gamma,\delta)\in\boldsymbol{O}(\alpha,\beta)$ ise γ-dan δ-ya bir kenar vardır ve bu $\gamma\to\delta$ ile gösterilir. Kısaca $\gamma\to\delta$ nın $G(\alpha,\beta)$ da bir kenar olması için gerek ve yeter şart bir $T\in G$ vardır öyle ki $T(\alpha)=\gamma$ ve $T(\beta)=\delta$ dır.

Bu kısımda $\mathcal{N}or(m)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki alt yörüngesel graflarını inceleyeceğiz. $\mathcal{N}or(m)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden aşikar olmayan her alt yörüngesel graf $\frac{u}{n}\in\mathbb{Q}$ olmak üzere $\left(\infty,\frac{u}{n}\right)$ yi içerir. Ayrıca $\boldsymbol{O}\left(\infty,\frac{u}{n}\right)=\boldsymbol{O}\left(\infty,\frac{v}{n}\right)$ olması için gerek ve yeter şart $u\equiv v(\operatorname{mod} n)$ olmasıdır. Bundan dolayı $(u,n)=1$ olmak üzere $u\leq n$ alınabilir.

Burada alt yörüngeyi $\boldsymbol{O}_{u,n}$ ve karşılık gelen alt yörüngesel grafı $G_{u,n}$ ile göstereceğiz.

$G_{u,n}$ de bir yönlendirilmiş devre, $m\geq 3$ ve $v_1,v_2,...,v_m$ farklı köşeleri için

$$v_1\to v_2\to...\to v_m\to v_1$$

şeklindedir. $m=2$ ise $v_1\to v_2\to v_1$ -e *kendisi ile eşleşmiş kenar* denir.

Teorem 3.5. $(m,n)=1$ olsun. Bu takdirde $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}$ nin $G_{u,n}$ de bir kenar olması için gerek ve yeter şart $q\mid m$ olmak üzere

$$\frac{m}{q}\mid s,\ q\mid y,\ ry-sx=\mp n \ \text{ ve } x\equiv\mp qur\left(\operatorname{mod} n\right),\ y\equiv\mp qus\left(\operatorname{mod} n\right)$$

olmasıdır [16].

İspat. Kabul edelim ki $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}, G_{u,n}$ de bir kenardır. Bu takdirde $\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)\in \boldsymbol{O}_{u,n}$ dir ve bir $\mathcal{N}or\left(m\right)$ vardır öyle ki $T\left(\infty\right)=\frac{r}{s}$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right)=\frac{x}{y}$ dir. $q\mid m$ olmak üzere

$$T\left(z\right)=\frac{a\sqrt{q}z+b/\sqrt{q}}{\left(cm/\sqrt{q}\right)z+d\sqrt{q}},\quad adq-bcm/q=1$$

alalım. Bu takdirde

$$a/\left(cm/q\right)=r/s \ \text{ ve } \left(auq+bn\right)/\left(cmu+dqn\right)=x/y$$

dir. $\left(a,cm/q\right)=1$ olduğundan $i\in\{0,1\}$ vardır öyle ki $a=\left(-1\right)^{i}r, cm/q=\left(-1\right)^{i}s$ dir. Diğer yandan, $\left(m,n\right)=1$ olduğundan $\left(q,auq+bn\right)=1$ olur. Ayrıca

$$d\left(auq+bn\right)-b\left(ucm/q+dn\right)=u$$

ve

$$aq\left(ucm/q+dn\right)-cm/q\left(auq+bn\right)=n$$

olduğundan $\left(auq+bn,cmu+dqn\right)=1$ dir. Böylece $j\in\{0,1\}$ için

$$\left(-1\right)^{j}x=auq+bn,\left(-1\right)^{j}y=cmu+dqn$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cm/q & dq\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & uq \\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(-1\right)^{i}r & \left(-1\right)^{j}x \\ \left(-1\right)^{i}s & \left(-1\right)^{j}y\end{pmatrix} \qquad (1)$$

matrisini elde edilir.

(1) de determinant alındığında $n=\left(-1\right)^{i+j}\left(ry-sx\right)$ olur. Ayrıca

$$x\equiv\left(-1\right)^{i+j}qur\left(\operatorname{mod} n\right) \ \text{ ve } \ y\equiv\left(-1\right)^{i+j}qus\left(\operatorname{mod} n\right)$$

dir. Yani

$$ry - sx = \mp n \text{ ve } x \equiv \mp qur \pmod{n},\ y \equiv \mp qus \pmod{n}$$

dir. Sonuç olarak $cm/q = (-1)^i s$ ve $(-1)^j y = q(ucm/q + dn)$ olduğundan $\frac{m}{q} \mid s \ ve \ q \mid y$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $q \mid m$ için $\varepsilon = \mp 1$ olmak üzere

$$q \mid y,\ \frac{m}{q} \mid s,\ \ \varepsilon(ry - sx) = n,\ \ x \equiv \varepsilon qur \pmod{n} \text{ ve } y \equiv \varepsilon qus \pmod{n}$$

olsun. Bu takdirde k ve b tamsayıları için

$$\varepsilon x = qur + bn, \quad \varepsilon y = qus + kn$$

dir. $m \mid sq$ olduğundan bazı c tamsayıları için $sq = cm$ dir. .Diğer yandan $q|y$ ve $(q,n) = 1$ olduğundan , $q \mid k$ olur. Bu da gösterir ki $d \in \mathbb{Z}$ için $\varepsilon y = qus + qdn$ dir. Böylece

$$\begin{pmatrix} r & b \\ s & dq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & uq \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \varepsilon x \\ s & \varepsilon y \end{pmatrix} \tag{2}$$

elde edilir. (2) de determinant alındığında

$$(rdq - sb)n = \varepsilon(ry - sx) = n$$

olur. Böylece $rdq - sb = 1$ dir. $s = cm/q$ olduğundan , $rdq - bcm/q = 1$ elde edilir. Eğer

$$T(z) = \frac{r\sqrt{q}z + b/\sqrt{q}}{(cm/q)z + d\sqrt{q}}$$

alınırsa

$$T(\infty) = \frac{r}{s} \quad \text{ve} \quad T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{rqu + bn}{mcu + dqn} = \frac{x}{y}$$

olur. Buradan $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n}$ olduğunu görülür. Bu nedenle $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$, $G_{u,n}$ nin bir kenarıdır.

Teorem 3.6. $(m,n)>1$ olsun. Bu takdirde $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}$ nin $G_{u,n}$ de bir kenar olması için gerek ve yeter şart $q_1=(q,n)$ $ve\, q\,|\,m$ için

$$ry-sx=\pm\frac{n}{q_1},\quad \frac{q}{q_1}\,|\,y,\quad m\,|sq$$

ve

$$x\equiv\pm\frac{q}{q_1}ru\left(\operatorname{mod}\frac{n}{q_1}\right),\qquad y\equiv\pm\frac{q}{q_1}su\left(\operatorname{mod} n\frac{q}{q_1}\right)$$

olmasıdır [16].

3.3 Kendisiyle Eşleşmiş Kenarlar

Bu kısımda kendisiyle eşleşmiş kenarlar için bazı sonuçları verilecektir.

Teorem 3.7.

(i) Eğer $(m,n)=1$ ise, $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş bir kenar içerir $\Leftrightarrow$ $u^2\equiv-1(\operatorname{mod} n)$

(ii) Eğer $(m,n)>1$ ise, $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş bir kenar içerir $\Leftrightarrow$ $qu^2\equiv-1(\operatorname{mod} n)$

dir.

İspat. (i) Transitif hareketten dolayı, herhangi kendi eşleşmiş kenar $\infty\rightarrow\frac{x}{y}\rightarrow\infty$ olarak alınabilir. Bu takdirde Teorem 3.5 deki $ry-sx=\pm n$ şartından $y=\pm n$ olduğu görülür. Bu durumda $(m,n)=1$ olmak üzere $q\,|\,n$ ve $q\,|\,m$ olur ki bu $q=1$ olması demektir. Burada Teorem 3.5 ten devrenin $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{u}{n}\rightarrow\frac{1}{0}$ şeklinde olduğu görülür.. İkinci kenardan, $q=1$ için $x\equiv\pm qur(\operatorname{mod} n)$ şartından

$$u^2\equiv-1(\operatorname{mod} n)$$

elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki $G_{u,n}$ kendisi ile eşleşmiş bir kenar içersin. Yani bir $T \in \mathcal{N}or(m)$ vardır öyle ki T, $\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ çiftini $\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ çiftine götürür. Bu nedenle $i = 0,1$ için

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^i u}{(-1)^i n},$$

den

$$a = (-1)^i u$$
$$cm/q = (-1)^i n$$

ve $j = 1,0$ için

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \frac{(-1)^j}{0}$$

den

$$auq + bn = (-1)^j$$
$$cmu/q - dunq = 0$$

elde edilir. Buradan

$$qu^2 \equiv -1 (\operatorname{mod} n)$$

elde edilir.

Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 da artı ve eksi işareti sırasıyla

$$r/s > x/y \text{ ve } r/s < x/y$$

e karşılık gelir.

Tersine olarak, kabul edelim ki $qu^2 \equiv -1 (\operatorname{mod} n)$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.6 dan $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{1}{0}$ nin $G_{u,n}$ de kendisi ile eşleşmiş bir kenar olduğu görülür. Çünkü ikinci kenardan

$$ry - sx = \mp \frac{n}{q_1} \text{ için } q_1 = 1 \text{ ve } 1 \equiv -qu^2 (\operatorname{mod} n)$$

olduğu görülür ki bu da ispatı bitirir.

Sonuç 3.8. $(m,n)=1$ olsun ve $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş bir kenar içersin. Eğer $uv\equiv -1 \pmod n$ ise, bu takdirde $G_{u,n}$ ve $G_{v,n}$ eşleşmiş alt yörüngesel graflardır.

İspat. Kabul edelim ki $uv\equiv -1 \pmod n$ ve $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}$, $G_{u,n}$ de bir kenar olsun. Bu takdirde Teorem 3.5 ten, $m\mid s,\ ry-sx=\pm n,\ x\equiv \pm ur \pmod n),\ y\equiv \pm us \pmod n)$ olur. $uv\equiv -1 \pmod n$ olduğundan $r\equiv \mp vx(modn)$ ve $s\equiv \mp vy \pmod n$ dir. Bu takdirde $\frac{x}{y}\to\frac{r}{s}$, $G_{v,n}$ de bir kenardır.Böylece $G_{u,n}$ ve $G_{v,n}$ eşleşmiş alt yörüngesel graflardır.

Sonuç 3.9. $\Gamma_0^*(n)$ in 2. mertebeden bir eliptik elemana sahip olması için gerek ve yeter şart $(m,n)>1$ için $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş bir kenar içermesidir.

İspat. $\begin{pmatrix} a\sqrt{q} & b/\sqrt{q} \\ cm/\sqrt{q} & d\sqrt{q} \end{pmatrix}\in\Gamma_0^*(n)$ 2. mertebeden bir eliptik eleman olsun. Bu takdirde $(a+d)\sqrt{q}=0$ olduğundan $d=-a$ olur. Determinanttan,

$$adq\equiv 1 \pmod n$$

dir ve buradan

$$-a^2q\equiv 1 \pmod n$$

olur. $(a,n)=1$ olduğundan $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş bir kenar içerir.

Şimdi $G_{u,n}$ grafının kendisiyle eşleşmiş bir kenar içerdiğini kabul edelim. Teorem 3.6 dan $\frac{1}{0}\to\frac{u}{n}\to\frac{1}{0}$ kendisiyle eşleşmiş bir kenardır. Buradan

$$\begin{pmatrix} u\sqrt{q} & (qu^2+1)/n\sqrt{q} \\ -nq/\sqrt{q} & -u\sqrt{q} \end{pmatrix}$$

$\Gamma_0^*(n)$ nin 2. mertebeden bir eliptik elemanıdır.

Sonuç 3.10. $\Gamma_0(mn)$ in 2. mertebeden bir eliptik eliptik elemana sahip olması için gerek ve yeter şart $(m,n)=1$ için $G_{u,n}$ nin kendisiyle eşleşmiş bir kenar içermesidir.

İspat. $(m,n)=1$ için $q=1$ dir. Bu durumda $\Gamma_0^*(n)$ nin her elemanı $\begin{pmatrix} a & b \\ cnm & d \end{pmatrix}$ şeklinde olur ve ispat benzer şekilde yapılır.

3.4 $\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ nin Maksimal Küme Üzerindeki Hareketi

Burada $m=2^2 3p^2$ alınırsa, $h=2$ olduğundan ve $\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cm/h & de \end{pmatrix}$, $e \,\|\, m/h^2$ göz önüne alınırsa $\det = e = 1, 3, p^2, 3p^2$ olabilir. Yani; normalliyenin elemanları

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & d \end{pmatrix},\ \det=1 \quad ve \quad \begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & 3d \end{pmatrix},\ \det=3$$

$$\begin{pmatrix} ap^2 & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & dp^2 \end{pmatrix},\ \det=p^2 \quad ve \quad \begin{pmatrix} 3ap^2 & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & 3dp^2 \end{pmatrix},\ \det=3p^2$$

olabilir. Ayrıca m nin seçiminden ötürü Teorem 3.3 e göre $\mathcal{N}or(m)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif değildir. Bundan dolayı $\mathcal{N}or(m)$ nin transitif olarak hareket ettiği bir maksimal alt küme bulunmalıdır.

Tanım 3.11. $d \mid m$ olsun. $\frac{a}{d}$ nin $\Gamma_0(m)$ ile hareketiyle oluşan yörünge

$$\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} := \left\{ \frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}} : (m,y)=d,\ a \equiv x\frac{y}{d} \bmod\left(d, \frac{m}{d}\right) \right\}$$

kümesidir.

Teorem 3.12. $\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri

$$\hat{\mathbb{Q}}\left(2^2 3p^2\right) := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2^2 3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2^2 p^2\end{pmatrix}$$
$$\cup \begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2^2 3p^2\end{pmatrix}$$

dir.

İspat. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ yörüngesinin $\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ ile hareketini inceleyelim.

$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & d \end{pmatrix}$, $ad - 3bcp^2 = 1$, elemanını göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2\left(2\cdot 3p^2 c + d\right) \end{pmatrix}$$

olur. Buna göre

$\left(\mathbf{1}^*\right)$ a çift, d tek, b tek ve c tek ise $\dfrac{2a+b}{2\left(2\cdot 3p^2 c + d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\left(\mathbf{2}^*\right)$ a çift, d çift, b tek ve c tek ise $d = 2d_0$ için $\dfrac{2a+b}{2^2\left(3p^2 c + d_0\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}$

$\left(\mathbf{3}^*\right)$ a tek, d tek, b çift ise $b = 2b_0$ için $\dfrac{a+b_0}{2\cdot 3p^2 c + d} \in \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

bulunur.

$\begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & 3d \end{pmatrix}$, $3ad - bcp^2 = 1$, elemanı göz önüne alındığında;

$$\begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2 c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+b \\ 2\cdot 3\left(2p^2 c + d\right) \end{pmatrix}$$

rasyonel sayısı elde edilir. Bu durumda

$\left(\mathbf{4}^*\right)$ a tek, d tek, b çift olsun.

$b = 2k_0$ ve $3 \mid k_0$, yani $k_0 = 3k_0^*$ ise $\dfrac{a+k_0^*}{2p^2 c + d} \in \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$b = 2k_0$ ve $3 \nmid k_0$ $\dfrac{3a+k_0}{3\left(2p^2 c + d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$(\mathbf{5}^*)$ a tek, d tek, b tek ve c çift için

$3 \mid b$, yani $b = 3\ell_0$ ise $\dfrac{2a+\ell_0}{2\left(2p^2c+d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$3 \nmid b$ ise $\dfrac{6a+b}{2\cdot 3\left(2p^2c+d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix}$

$(\mathbf{6}^*)$ d çift, b tek ve c tek ise $d = 2d_0$ için

$3 \mid b$, yani $b = 3\ell_0$ ise $\dfrac{2a+\ell_0}{2^2\left(p^2c+d_0\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}$

$3 \nmid b$ ise $\dfrac{6a+b}{2^2\cdot 3\left(p^2c+d_0\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2^2\cdot 3\end{pmatrix}$

bulunur. Böylece

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2^2 3\end{pmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi $\begin{pmatrix}ap^2 & b/2\\ 2\cdot 3p^2c & dp^2\end{pmatrix}$, $adp^2 - 3bc = 1$, elemanını göz önüne alalım.

$$\begin{pmatrix}ap^2 & b/2\\ 2\cdot 3p^2c & dp^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2ap^2+b\\ 2p^2\left(2\cdot 3c+d\right)\end{pmatrix}$$

rasyonel sayısını inceleyelim.

$(\mathbf{7}^*)$ a çift, d çift, b tek ve c tek ise $d = 2d_0$ için $\dfrac{2ap^2+b}{2^2p^2\left(3c+d_0\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}$

$(\mathbf{8}^*)$ a çift, d tek, b tek ve c çift için $\dfrac{2ap^2+b}{2p^2\left(2\cdot 3c+d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}$

$(\mathbf{9}^*)$ d tek, b çift ise $b = 2b_0$ için $\dfrac{ap^2+b_0}{p^2\left(2\cdot 3c+d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$

bulunur.

$\begin{pmatrix} 3ap^2 & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3dp^2 \end{pmatrix}$, $3adp^2 - bc = 1$, elemanını göz önüne alarak.

$$\begin{pmatrix} 3ap^2 & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3dp^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6ap^2+b \\ 2\cdot 3p^2(2c+d) \end{pmatrix}$$

rasyonel sayısını inceleyelim.

$(\mathbf{10}^*)$ a tek, d tek, b çift olsun.

$b = 2k_0$ ve $3 \mid k_0$, yani $k_0 = 3k_0^*$ ise $\dfrac{ap^2 + k_0^*}{p^2(2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}$

$b = 2k_0$ ve $3 \nmid k_0$ $\dfrac{3a + k_0}{3p^2(2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 3p^2 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{11}^*)$ a çift, d tek, b tek ve c tek için

$3 \mid b$, yani $b = 3b_0$ ise $\dfrac{2ap^2 + b_0}{2p^2(2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix}$

$3 \nmid b$ ise $\dfrac{6ap^2 + b}{2\cdot 3p^2(2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot 3p^2 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{12}^*)$ a çift, d çift , b tek ve c tek olsun. $d = 2d_0$ için

$3 \mid b$, yani $b = 3b_0$ ise $\dfrac{2ap^2 + b_0}{2^2p^2(c+d_0)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2p^2 \end{pmatrix}$

$3 \nmid b$ ise $\dfrac{6ap^2 + b}{2^2\cdot 3p^2(c+d_0)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2\cdot 3p^2 \end{pmatrix}$

bulunur. Sonuç olarak $\mathcal{N}or(2^2 3p^2)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri

$$\hat{\mathbb{Q}}(2^2 3p^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2p^2 \end{pmatrix}$$
$$\cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot 3p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 3p^2 \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi imprimitif hareketi inceleyelim.

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix},\ \det T_1 = 1 \quad \text{ve} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix},\ \det T_2 = 3$$

elemanlarını göz önüne alalım ve $N_0 := \langle \Gamma_0(m), T_1, T_2 \rangle$ tanımlayalım. Bu durumda $\left|\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right) : N_0\right| = 2$ dir. Ayrıca

$$G_\infty = \mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)_\infty,\ H = N_o,\ G = \mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$$

seçilirse

$$\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)_\infty < N_o < \mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$$

olur. $\approx$ ile N_0 tarafından $\hat{\mathbb{Q}}\left(2^2 3p^2\right)$ üzerine indirilen $\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$- invaryant denklik bağıntısını gösterelim. İmprimitif hareketin sonucunda

$$[\infty] = \begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 3p^2 \end{pmatrix}$$

ve

$$[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 3 \end{pmatrix}$$

blokları elde edilir.

Köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan alt yörüngesel graf F_{u,p^2} ile gösterilir.

Teorem 3.13. $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in [\infty]$ olsun. Bu takdirde $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin F_{u,p^2} de bir kenar olması için gerek ve yeter şart

(i) $2\cdot 3p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 2ur \left(\operatorname{mod} p^2\right)$, $y \equiv \pm 2us \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm p^2$

(ii) $2p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 6ur \left(\operatorname{mod} p^2\right)$, $y \equiv \pm 6us \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm 3p^2$

(iii) $3p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 2^2 ur \left(\operatorname{mod} p^2\right)$, $y \equiv \pm 2^2 us \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm p^2$

(iv) $p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 2^2 \cdot 3ur \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ $y \equiv \pm 2^2 \cdot 3us \left(\operatorname{mod} p\right)$ ve $ry - sx = \pm 3p^2$

olmasıdır.

İspat. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,p^2}$ olduğundan $T = \begin{pmatrix} ae & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & de \end{pmatrix} \in \mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ elemanı vardır öyle ki $T(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{x}{y}$ dir. $e=3$ veya $e=1$ dir.

(i) $e=1$ ve a tek olsun. Bu durumda

$$T(\infty) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{r}{s} \Rightarrow r = a \ , \ s = 2\cdot 3p^2c$$

ve

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{au + \frac{bp^2}{2}}{2\cdot 3p^2cu + dp^2} = \frac{2au + bp^2}{2\left(\underbrace{2\cdot 3p^2c}_{s}u + dp^2\right)} = \frac{x}{y}$$

şeklindedir. Buradan

$$x \equiv \pm 2ur\left(\operatorname{mod} p^2\right) \quad \text{ve} \quad y \equiv \pm 2us\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \pm x \\ s & \pm y \end{pmatrix}$$

eşitliğinde determinant alınırsa $ry - sx = \pm p^2$ olduğu açıktır.

Tersine $2\cdot 3p^2 \parallel s$, $x \equiv \pm 2ur\left(\operatorname{mod} p^2\right)$, $y \equiv \pm 2us\left(\operatorname{mod} p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $k, \ell \in \mathbb{Z}$ sayıları için

$$x = 2ur + kp^2 \quad \text{ve} \quad y = 2us + \ell p^2$$

dir. $ry - sx = p^2$ den

$$r(2us + \ell p^2) - s(2ur + kp^2) = p^2 \ \Rightarrow \ r\ell - sk = 1$$

olur. Buradan

$$T_o := \begin{pmatrix} r & k_0/2 \\ 2s & \ell \end{pmatrix}, \ k_0 := 2k$$

alınırsa $\det T_o = 1$ ve $2\cdot 3p^2 \,\|\, s$ olduğundan $T_o \in \mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ bulunur ve $T(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{x}{y}$ dir. Bu ise $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,p^2}$ olduğunu gösterir.

(ii) $e = 3$ ve a tek olsun. Bu durumda

$$T(\infty) = \begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{a}{2p^2c} = \frac{r}{s} \Rightarrow r = a \ , \ s = 2p^2c$$

ve

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{3au + \frac{bp^2}{2}}{2\cdot 3p^2cu + 3dp^2} = \frac{6au + bp^2}{6\left(\underbrace{2p^2c}_{s}u + dp^2\right)} = \frac{x}{y}$$

olur. Buradan

$$x \equiv \pm 6ur\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \quad \text{ve} \quad y \equiv \pm 6us\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$$

bulunur.

$$\begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \pm x \\ s & \pm y \end{pmatrix}$$

eşitliğinde determinant alınırsa $ry - sx = \pm 3p^2$ olduğu açıktır.

Yeter şart benzer şekilde gösterilir.

(iii) $e = 1$ ve a çift olsun. Bu durumda

$$T(\infty) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{2a_0}{2\cdot 3p^2c} = \frac{a_0}{3p^2c} = \frac{r}{s} \Rightarrow r = a_0 \ , \ s = 3p^2c$$

ve

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{au + \frac{bp^2}{2}}{2\cdot 3p^2cu + dp^2} = \frac{2au + bp^2}{2\left(2\cdot\underbrace{3p^2c}_{s}u + dp^2\right)} = \frac{2^2a_0u + bp^2}{2^2su + 2dp^2} = \frac{x}{y}$$

şeklindedir. Buradan

$$x \equiv \pm 2^2 ur \left(\bmod p^2\right) \quad \text{ve} \quad y \equiv \pm 2^2 us \left(\bmod p^2\right)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \pm x \\ s & \pm y \end{pmatrix}$$

eşitliğinde determinant alınırsa $ry - sx = \pm p^2$ olduğu bulunur.

(iv) $e = 3$ ve a çift olsun. Bu durumda

$$T(\infty) = \begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{2a_0}{2p^2c} = \frac{a_0}{p^2c} = \frac{r}{s} \Rightarrow r = a_0 \ , \ s = p^2c$$

ve

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3au + \frac{bp^2}{2}}{2\cdot 3p^2cu + 3dp^2} = \frac{2\cdot 3au + bp^2}{2\cdot 3\left(2\underbrace{p^2c}_{s}u + dp^2\right)} = \frac{2^2\cdot 3a_0u + bp^2}{2^2\cdot 3su + 6dp^2} = \frac{x}{y}$$

olur. Buradan

$$x \equiv \pm 2^2\cdot 3ur \left(\bmod p^2\right) \quad \text{ve} \quad y \equiv \pm 2^2\cdot 3us \left(\bmod p^2\right)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \pm x \\ s & \pm y \end{pmatrix}$$

eşitliğinde determinant alınırsa $ry - sx = \pm 3p^2$ bulunur.

BÖLÜM IV

SONUÇ VE ÖNERİLER

Normalliyenin grafları hakkında şimdiye kadar yapılan çalışmaları özetleyen bir literatür özeti verilmiştir.

m karesiz olduğunda normalliyenin graflarındaki kendisiyle eşleşmiş kenarlar(ikigen) ile ilgili gerek ve yeter şartlar bulunmuştur.

Devre şartları ile ilgili ortaya çıkan kongrüans denklemlerinin çözüm kümelerine dair sonuçlar da elde edilmiştir.

$m=2^2 3p^2$ alınarak $\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri bulunmuştur. Ayrıca $\mathcal{N}or\left(2^2 3p^2\right)$ nin bir alt yörüngesel grafındaki kenar şartları belirlenmiştir.

Normalliyenin transitif ve imprimitif hareketiyle altyörüngesel graflarının elde edilmesi diğer ayrık ve transformasyon grupları için de yapılabilir(literatürde modüler grup, bazı kongrüans alt grupları ve bazı Hecke grupları için yapıldığı görülmektedir).

Grafların temel bölgeler ile ilişkisi araştırılabilir. Graflar ile regüler map ilişkisi modüler grup ve bazı Hecke grupları için incelenmiştir. Benzer ilişki normalliyen için de araştırılabilir.

Graflardaki çizgeler için Hiperbolik Geometri kullanılmıştır. Grafların geometrik ve trigonometrik özellikleri incelenebilir

KAYNAKLAR

1. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. thesis, University of Southampton,1989.

2. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33, 647-652, 2001.

3. Akbaş, M. and Başkan, T., Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr. J. Of Math., Tübitak, 20, 379-387, 1996.

4. Akbaş, M. and Singerman, D., The Signature of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 165, 77–86, 1992.

5. Beardon, A. F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, New York, 1983.

6. Beşenk, M., Simge Devirleri ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.

7. Biggs, N. L. and White, A. T., Permutation groups and combinatorial structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Pres, Cambridge,1979.

8. Conway, J. H. and Norton, S. P., Montrous Moonshine, Bull.London Math. Soc., 11, 308-339, 1979.

9. Griess, R. L., The Friendly Giant, Invent. Math. 69, 1–102, 1982.

10. Güler, B.Ö., $\Gamma_0(N)$ Kongrüans Alt Grubunun $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ deki Normalliyeninin Alt yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.

11. Guler, B.O., Besenk, M., Deger, A.H. and Kader, S., Elliptic Elements and Circuıts in Suborbital Graphs, Hacettepe Journal Of Mathematics And Statistics,Vol. 40, No. 2, 203-210, 2011.

12. Helling, H., On the commensurability class of rational modular group, London Math. Soc., 2, 67-72, 1970.

13. Jones, G. A. and Singerman, D., Complex Functions : An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

14. Jones , G. A., Singerman, D. and Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160, 316–318,1991.

15. Kader, S., Guler, B.O. and Deger, A.H., Suborbital Graphs for a Special Subgroup of The Normalizer of $\Gamma_0(m)$, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. 34, No. A4, 305-312, 2010.

16. Keskin, R., Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(m)$, Europan Juornal of Combinatorics, Vol. 27, No. 2, 193-206, 2006.

17. Keskin, R. and Demirturk, B., On Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Electronic Juornal of Combinatorics, Vol. 16, No. 1, R116., 2009.

18. Lehner, J. and Newman, M., Weierstrass points of $\Gamma_0(N)$, Annals of Mathematics Vol. 79, No.2, March, 360–368, 1964.

19. Maclachlan, C., Groups of Units of Zero Ternary Quadratic Forms, Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 88, 141-157, 1981.

20. Newman, M., The Normalizer of Certain Modular Subgroups, Can. J. Math, 8, 29-31, 1956.

21. Ogg, A. P., Automorphismes des Courbes Modulaires, Seminaire Delange-Pisot, Poitou, 7, 1974.

22. Ogg, A. P., Modular functions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 37, 1980.

23. Pizer, A., A Note on a Conjecture of Hecke, Pasific J. Math. Vol. 79, 2, 541–548, 1978.

24. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

25. Shimura, G., Inroduction to The Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Princeton Univ. Press, 1971.

26. Sims, C. C., Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Z., 95, 76-86, 1967.

27. Singerman, D., Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups, Bull. London Math. Soc. 2, 319–323, 1970.

28. Tsuzuku, T., Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Pres, Cambridge,1982.