T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN PERTÜRBASYON-İTERASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan
Mehmet ŞENOL

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2011
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN PERTÜRBASYON-İTERASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan
Mehmet ŞENOL

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2011
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ danışmanlığında **Mehmet ŞENOL** tarafından hazırlanan **" Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Pertürbasyon -İterasyon Metodu ile Çözümü"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

24./06./2011

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye: Doç. Dr. Şeref TURHAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 12/07/2011.......tarih ve 2011/27-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

12./07./2011

Doç. Dr. Selçuk KERVAN

Enstitü Müdürü

T.C. NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

TEŞEKKÜR

"Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Pertürbasyon -İterasyon Metodu ile Çözümü" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında bana gösterdikleri maddi ve manevi destek ve yardımlarından dolayı değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Timuçin İhsan DOLAPCİ' ya ve Sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a ayrıca aileme teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN PERTÜRBASYON-İTERASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Mehmet ŞENOL
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2011
Tez Danışman: Yrd.Doç.Dr. Timuçin DOLAPCİ

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın amacı diferansiyel denklem sistemlerini Pertürbasyon-İterasyon Algoritması yardımıyla çözmektir.

Bu amaçla 1. Bölüm konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere (kavramlara) ayrılmış, 2. Bölümde $F(u',u,v,v',\cdots,\varepsilon)=0 \;\; (u=u(t),\; v=v(t),\ldots)$ ve ε -pertürbasyon parametresi olmak üzere denklem tipinin Pertürbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,1) ve PIA(1,2) yardımı ile çözüm teknikleri ve ilgili bilgilere yer verilmiştir.

3. Bölümde ise diferansiyel denklem sistemleri, PIA(1,1) ve PIA(1,2) algoritmaları kullanılmak suretiyle çözülerek örneklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pertürbasyon metotları, pertürbasyon-iterasyon algoritmaları, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri, stiff diferansiyel denklem sistemi.

APPLICATION TO PERTURBATION-ITERATION METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet ŞENOL
Nevsehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, June 2011
Thesis Supervisor: Assos.Prof.Dr. Timuçin DOLAPCİ

ABSTRACT

The purpose of this composed of three parts of study is to solve the systems of differential equations with the help of Perturbation-Iteration Algorithm.

For this purpose, the first chapter is reserved to the basic definitions and theorems (concepts), in the second section the type of equations solved with the help of the PIA (1.1) and PIA (1,2) techniques and some examples are presented where $F(u^{'}, u, \varepsilon) = 0$,

($u = u(t)$) and ε -perturbation parameter.

And the third section is reserved to differential equation systems that are solved by using the PIA (1.1) and PIA (1.2) algorithms.

Keywords: Perturbation methods, perturbation-iteration algorithms, linear and non-linear differential equation systems, stiff differential equation systems.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA VE SİMGELER

ε :	Pertürbasyon parametresi
PIA:	Pertürbasyon-iterasyon Algoritması
u_n :	Verilen u fonksiyonu
$(u_c)_n$:	Bulunacak olan u fonksiyonu
F :	Diferansiyel denklemin genel formu

TABLOLAR LİSTESİ

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE SONUÇLAR

1.1 GİRİŞ

Matematiğin önemli konularından biri olan diferansiyel denklemler günlük hayattaki birçok problemin özellikle değişim gösteren olayların anlaşılması ve çözümü için bir model oluşturur. Bu anlamda, matematik modellerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmak için yüzyıldan uzun zamandır geniş bir şekilde kullanılan yöntem pertürbasyon metotlarıdır. Bu metotların tanımını geniş bir şekilde Nayfeh [1] , Jordan ve Smith [2] tarafından yazılan kitaplarda bulmak mümkündür. Cebirsel denklemler, integral diferansiyel denklemler, fark denklemler bu tekniklerle yaklaşık olarak çözülebilir.

Ancak pertürbasyon metotlarının uygulanmasındaki zorluklar küçük bir parametrenin denklemde gereksinimi veya denklemde küçük bir parametrenin yapay olarak tanımlanmasıdır. Bu nedenle pertürbasyon metotlarının oluşturduğu dezavantajları gidermek için literatürde J.H.He' nin [3] iterasyon-pertürbasyon metodu, R.E Mickens'in iterasyon tekniği [4,5,6], Harmonik Balans metodu [7,8,9], J.H.He' nin Parameter- Expansion metodu [10], Linsteid-Poincare metodu[11,12,13]ve Homotopi Pertürbasyon metodunu [14] bulmak mümkündür.

Ayrıca literatürde yer alan güçlü nonlineer sistemlerin çözümleri için geçerli alternatif bir yöntem ise pertürbasyon-iterasyon (veya iterasyon-pertürbasyon) metotlarıdır. Genellikle denklemler iterasyon prosedürünü uygulamadan önce alternatif bir form içine sokulur. Bazı algoritmalar sadece özel problemler üzerinde çalışmak için geliştirilmiştir standart olmayan, ön dönüşüm ve başlangıç kabulleri gerektirmeyen ve bütün denklem tipleri için geçerli olan bir yaklaşım literatürde yoktur.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, diferansiyel denklem sistemlerinin pertürbasyon-iterasyon algoritması yardımıyla çözümlerini vermektedir.

Bu amaçla 1. Bölüm konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere ayrılmış, 2. Bölümde ise $F(u'(t),u(t),k'(t),k(t),...,\varepsilon)=0$ ve ε-pertürbasyon parametresi olmak üzere denklem tipinin pertürbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,1) yardımı ile çözüm teknikleri ve ilgili örneklere yer verilmiştir 3. bölüm ise, diferansiyel denklem sistemlerinin PIA(1,1) algoritması kullanılarak çözümleri ile ilgili uygulamalara ayrılmıştır.

1.2 BİR FONKSİYONUN TAYLOR SERİ AÇILIMI

1.2.1 Tek Değişkenli Fonksiyonlar için Taylor Serisi

$f(x)$ fonksiyonunun $a \le x \le b$ aralığında (n+1) nci mertebeden türevleri mevcut olsun. Bu durumda $f^{(n+1)}(x)$ fonksiyonunun (n+1) kez integralini alalım.

$$\int_a^x f^{(n+1)}(x)dx = \left[f^{(n)}(x) \right]_a^x = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \tag{1.1}$$

olur. Şimdi ikinci kez tekrar integral alalım.

$$\begin{aligned} \int_a^x \left[\int_a^x f^{(n+1)}(x)dx \right] &= \int_a^x \left[f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \right] dx \\ &= \left[f^{(n-1)}(x) \right]_a^x - (x-a) f^{(n)}(a) \\ &= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - (x-a) f^{(n)}(a) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Üçüncü kez integral alınırsa

$$\int_a^x \int_a^x \int_a^x f^{(n+1)}(x)(dx)^3 = f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a) f^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(n)}(a) \tag{1.3}$$

ve bu integral alma işlemini (n+1) kez devam ettirirsek

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_a^x \ldots \int_a^x}_{n+1} f^{(n+1)}(x)(dx)^{n+1} \\ &= f(x) - f(a) - (x-a) f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \ldots \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

elde edilir. Bu eşitliği düzenlersek

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{'}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{''}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{n}(a) + R_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + R_n \tag{1.5}$$

Taylor serisi elde edilmiş olur. Burada

$$R_n = \int_a^x ... \int_a^x f^{(n+1)}(x)(dx)^{n+1} \tag{1.6}$$

ya da

$$R_n = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \tag{1.7}$$

dir. İntegral de ortalama değer teoremine göre

$$\int_a^x g(x)dx = (x-a)g(\xi), \quad a \le \xi \le x \tag{1.8}$$

olduğu için

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{1.9}$$

biçiminde ifade edebiliriz.[24]

1.2.2 İki Değişkenli Fonksiyonlar için Taylor Serisi

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)]^{(k)}$$
$$= f(a,b) + \frac{1}{1!}[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)] \tag{1.10}$$
$$+\frac{1}{2!}[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)] + f_{yy}(a,b)(y-b)^2] + ...$$

serisine f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki Taylor serisi denir.

Bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, bunun yakınsak ve toplamının $f(x,y)$ olması için gerek ve yeter şart $0<\theta<1$ için

$$K_n = \frac{1}{(n+1)!}([f_x(a+\theta(x-a,b+\theta(y-b)]^{(n+1)}(x-a)^{(n+1)} \\ +[(f_y(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)]^{(n+1)}(y-b)^{(n+1)}) \tag{1.11}$$

kalan terimin sıfıra gitmesidir.[21]

1.3 LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

TANIM: Denklemde bulunan bir bağımlı değişkenler kümesinin bir elemanını ya da onun bir türevini bulunduran her terim, bu değişkene ve türevlerine göre birinci dereceden ise, bu diferansiyel denklem bu bağımlı değişken kümesine göre lineerdir. Bir bağımlı değişkene göre lineer olmayan denkleme, bu bağımlı değişkene göre lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Örneğin;

$$\begin{gathered} \frac{d^4x}{dt^4}+5\frac{d^2x}{dt^2}+3x=\sin t \\ \frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}+3x=v \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \end{gathered} \tag{1.12}$$

denklemleri birer lineer diferansiyel denklem,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy(\frac{dy}{dx})^2=0 \tag{1.13}$$

denklemi ise lineer olmayan diferansiyel denklemdir. [23]

1.4 Başlangıç Değer Problemleri

Bir diferansiyel denklem ve bilinmeyen fonksiyon ve türevleri üzerinde tümü bağımsız değişkenin aynı değerinde verilen koşullar birlikte bir başlangıç-değer problemi oluşturur. Yardımcı koşullar başlangıç koşullarıdır. Eğer yardımcı koşullar bağımsız değişkenin birden fazla değerinde verilirse problem bir sınır-değer problemidir ve koşullara sınır koşulları denir.

Örneğin $y'' + 2y' = e^x$; $y(\pi)=1$, $y'(\pi) = 2$ problemi bir başlangıç değer problemidir, çünkü her iki koşul $x = \pi$ de verilmiştir.

$y'' + 2y' = e^x$; $y(0)=1$, $y(1) = 1$ bir sınır-değer problemidir, çünkü iki yardımcı koşul $x = 0$ ve $x = 1$ farklı değerlerinde verilmiştir. Bir başlangıç-değer veya sınır değer probleminin bir çözümü, hem diferansiyel denklemi çözen hem de verilen yardımcı koşulların tümünü sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonudur.[22]

2. BÖLÜM

2.1. Diferansiyel Denklem Sistemi

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler, her biri bir bağımsız değişken birden çok bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve türevleri içeren birden çok diferansiyel denklemle ifade edilir. Böyle denklemlerin oluşturduğu kümeye, adi diferansiyel denklem sistemi denir. Genel olarak, tek bağımsız değişken t, n bağımlı değişken $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren n adi diferansiyel denklemden oluşan sistem

$$\begin{aligned} &F_1(t, y_1, y_1', ..., y_2, y_2', ..., y_n, y_n', ...) = 0 \\ &F_2(t, y_1, y_1', ..., y_2, y_2', ..., y_n, y_n', ...) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(t, y_1, y_1', ..., y_2, y_2', ..., y_n, y_n', ...) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.1 TANIM (Lineer ve lineer olmayan sistem): n tane bilinmeyen fonksiyon ve n tane denklemden oluşan (2.1) sisteminde, eğer her bir denklem, bağımlı değişkenler ve türevlerine göre lineer ya da 1. dereceden ise, sisteme lineer, aksi takdirde lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi denir. Aynı zamanda bu tip sistemlere standart formdaki sistemler de denir.

Örneğin, birinci mertebeden x ve y bilinmeyen fonksiyonlu standart formdaki lineer sistem

$$\begin{aligned} a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)\frac{dy}{dt}+a_3(t)x+a_4(t)y &= B_1(t) \\ b_1(t)\frac{dx}{dt}+b_2(t)\frac{dy}{dt}+b_3(t)x+b_4(t)y &= B_2(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

İkinci mertebeden x ve y bilinmeyen fonksiyonlu standart formdaki lineer sistem

$$\begin{aligned} a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_3\frac{dx}{dt}+a_4\frac{dy}{dt}+a_5x+a_6y &= B_1(t) \\ b_1\frac{d^2x}{dt^2}+b_2\frac{d^2y}{dt^2}+b_3\frac{dx}{dt}+b_4\frac{dy}{dt}+b_5x+b_6y &= B_2(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Birinci mertebeden x, y ve z bilinmeyenli standart sistem,

$$\begin{aligned} a_1\frac{dx}{dt}+a_2\frac{dy}{dt}+a_3\frac{dz}{dt}+a_4x+a_5y+a_6z &= B_1(t) \\ b_1\frac{dx}{dt}+b_2\frac{dy}{dt}+b_3\frac{dz}{dt}+b_4x+b_5y+b_6z &= B_2(t) \\ c_1\frac{dx}{dt}+c_2\frac{dy}{dt}+c_3\frac{dz}{dt}+c_4x+c_5y+c_6z &= B_3(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

biçiminde yazılır. Buradaki a_i, b_i ve c_i ler sabitse sisteme sabit katsayılı; değişken ise değişken katsayılı denir. [20]

2.2 Pertürbasyon

Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemden yola çıkılarak yaklaşık bir çözüm elde etmek için matematiksel metotlar içerir. Tam olarak çözümlenebilen problemin matematiksel tanımına "küçük" bir terim eklenerek eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilirdir.

Pertürbasyon teorisi, istenilen çözümün, tam çözümü olan problemden sapmanın miktarını belirleyen "küçük" parametre kullanılarak kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesine öncülük eder. Kuvvet serisinin ana terimi, tam çözümü olan problemin çözümü; diğer terimler ise ilk problemden sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar.

ε : küçük parametre,

y : Tam çözüm,

$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...$: Tam çözüme yaklaşan çözüm,

y_0: Tam çözümü olan problemin O(1) mertebe çözümü olmak üzere;

$y_1, y_2,...$: Yüksek mertebeden sistematik prosedürde tekrarlanarak bulunan terimler olarak temsil edilir. Pertürbasyon çözümü, yaklaşık seri çözümünü belli bir noktada kesmekle yapılır. Genellikle çözüm, ilk iki terim $y_0 + \varepsilon y_1$ de kesilebilir. Bu I. dereceden pertürbasyon düzeltmesi ve ilk çözümüdür.

2.3 Pertürbasyon-İterasyon Metodu

Perturbasyon metotları fizik ve mühendislikte ortaya çıkan, lineer olmayan matematiksel modellerle ilgili çalışmalarda kullanılan en yaygın metotlardır. Cebirsel denklemler, integraller, diferansiyel denklemler, fark denklemleri ve integro-diferansiyel denklemleri bu tekniklerle yaklaşık olarak çözülebilir. Bu metotlar için en büyük kısıtlama, zayıf nonlineer sistemler için çözümleri geçerli kılan küçük parametre sınırlamasıdır. Bu kısıtlamayı aşmak için son yıllarda modifiye edilmiş Linstedt-Poincare metodu, doğrusallaştırılmış pertürbasyon metodu, homotopi pertürbasyon metodu ve çok ölçekli Linstedt-Poincare metodu gibi alternatif pertürbatif yaklaşımlar önerilmiştir. [15] da sunulan doğrusallaştırılmış pertürbasyon metodunda lineer olamayan terim yerine yaklaşımdaki hatayı minimize edecek şekilde bir yaklaşık lineer terim alınır.

Literatürdeki güçlü nonlineer sistemleri geçerli kılmak için alternatif girişimlerden biri de iterasyon-pertürbasyon metotlarının kullanılmasıdır. [16] de nonlineer terimler bir önceki iterasyon sonuçlarından elde edilen iteratif çözüm fonksiyonlarının yerine konulmasıyla doğrusallaştırılmıştır. Genellikle iterasyon-perturbasyon metotlarında, denklemler, iterasyon prosedürü uygulamadan önce bir alternatif form içine atılır. Geliştirilen algoritmalardan bazıları sadece spesifik problemler için çalışır. Literatürde standart olmayan ön-dönüşümler ve başlangıç kabulleri gerektirmeyen bütün tipteki denklemler için geçerli bir genel yaklaşım eksiktir.

Özel dönüşümler ve başlangıç kabulleri gerektirmeyen çok farklı türdeki denklemler için uygun yeni pertürbasyon-iterasyon algoritması ilk defa [18] de belirtilen Pakdemirli ve arkadaşları tarafından 2010 yılında Bratu başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulanmıştır. Daha sonra metot birinci mertebe diferansiyel denklemlere yine Pakdemirli ve arkadaşları tarafından uygulanmıştır [19]. Metodun uluslararası literatüre yeni girmesinden ve sadece birinci ve ikinci mertebe lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulanmasından dolayı metodun farklı yapıdaki denklemlere nasıl uygulanacağı daha geliştirilememiştir.

Bu tezde biz metodu diferansiyel denklem sistemlerine başarılı bir şekilde uygulamaktayız. Bu metodu denklem sistemlerine uygulamak için metodun temel yapısında değişiklik yapmadan denklem sistemleri için gerekli algoritmayı tezde vermekteyiz. Metodun daha uygulanması gereken birçok alan vardır. Bunlar; integral denklemleri, integral denklem sistemleri, integro diferansiyel denklem ve denklem sistemleri, fark denklemleri, kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri,…şeklinde sıralanabilir. Adomian ayrıştırma metodu, varyasyonel iterasyon metodu, diferansiyel transform metodu, Taylor-matris metodu, sözde spektral algoritmaları, homotopi-pertürbasyon metodu, Laplace dönüşüm ayrıştırma algoritmaları, Chebyshev polinomları ve homotopi-analiz metodu bu tip lineer olmayan denklemlere etkili bir biçimde uygulanmıştır.

Pertürbasyon- İterasyon Algoritması PIA(1, 1):

Bu bölümde, pertürbasyon açılımında bir düzeltme terimi ve Taylor seri açılımında ise sadece birinci türevler için $n=1$ ve $m=1$ gibi düzeltme terimleri seçilerek bir pertürbasyon-iterasyon algoritması geliştirilmiş ve bu algoritma PIA(1,1) olarak adlandırılmıştır.

$$F(u',k',m',u,k,m,\varepsilon)=0 \tag{2.5}$$

şeklindeki 1. mertebeden diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Burada $u=u(t),\ k=k(t),\ m=m(t)$ ve ε pertürbasyon parametresidir. Pertürbasyon açılımında sadece bir düzeltme terimi alınır.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \varepsilon(u_c)_n \\
k_{n+1} &= k_n + \varepsilon(k_c)_n \\
m_{n+1} &= m_n + \varepsilon(m_c)_n \\
u'_{n+1} &= u'_n + \varepsilon(u'_c)_n \\
k'_{n+1} &= k'_n + \varepsilon(k'_c)_n \\
m'_{n+1} &= m'_n + \varepsilon(m'_c)_n
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

olup bunu (2.5) denkleminde yerine yazıp, sadece birinci türevler için Taylor serisine açarsak;

$$
\begin{aligned}
F(u',k',m',u,k,m,\varepsilon) &\approx \frac{1}{0!}F(u',k',m',u,k,m,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&+\frac{1}{1!}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u',k',m',u,k,m,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \quad \varepsilon = 0
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

elde edilir. Burada

$$
\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}_{(u_c)_n} + \frac{\partial F}{\partial k}\underbrace{\frac{\partial k}{\partial \varepsilon}}_{(k_c)_n} + \frac{\partial F}{\partial m}\underbrace{\frac{\partial m}{\partial \varepsilon}}_{(m_c)_n} + \frac{\partial F}{\partial u'}\underbrace{\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}}_{(u_c')_n} + \frac{\partial F}{\partial k'}\underbrace{\frac{\partial k'}{\partial \varepsilon}}_{(k_c')_n} + \frac{\partial F}{\partial m'}\underbrace{\frac{\partial m'}{\partial \varepsilon}}_{(m_c')_n} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \tag{2.8}
$$

ya da

$$
\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = (u_c)_n \frac{\partial F}{\partial u} + (k_c)_n \frac{\partial F}{\partial k} + (m_c)_n \frac{\partial F}{\partial m} + (u_c')_n \frac{\partial F}{\partial u'} + (k_c')_n \frac{\partial F}{\partial k'} + (m_c')_n \frac{\partial F}{\partial m'} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \tag{2.9}
$$

olur. Denklem (2.9) u denklem (2.7) içine yerleştirirsek, PIA(1,1) için uygulayacağımız diferansiyel denklem

$$
F + \varepsilon\big((u_c)_n F_u + (k_c)_n F_k + (m_c)_n F_m + (u_c')_n F_{u'} + (k_c')_{n'} F_{k'} + (m_c')_n F_{m'} + F_c\big) = 0 \tag{2.10}
$$

biçiminde olur. Burada $(\ )'$ bağımsız değişkene göre türevi ifade eder ve

$$
F_u = \frac{\partial F}{\partial u},\ F_k = \frac{\partial F}{\partial k},\ F_m = \frac{\partial F}{\partial m},\ F_{u'} = \frac{\partial F}{\partial u'},\ F_{k'} = \frac{\partial F}{\partial k'},\ F_{m'} = \frac{\partial F}{\partial m'},\ F_\varepsilon = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \tag{2.11}
$$

dur.

Unutulmamalıdır ki bütün türevler ε=0 da değerlendirilmiştir. Kolayca görülmektedir ki yukarıdaki denklem değişken katsayılı 1. mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. Bir

u_0 başlangıç varsayımı ile başlayarak, ilk $(u_c)_0$ (2.10) dan yararlanarak hesaplanır ve sonra u_1 i hesaplamak için (2.7) de yerine yazılır. Aynı durum denklem sistemindeki diğer $(k_c)_n$ ve $(m_c)_n$ için de uygulanır. İterasyon prosedürü tatminkar bir sonuç elde edilene kadar (2.10) ve (2.7) yi kullanarak tekrar edilir. Bu iterasyon algoritması [17] de açıklanan Varyasyonel İterasyon Algoritması II ile benzer sonuçlar doğurabilir. Önerilen 3 farklı Varyasyonel İterasyon Algoritması için [17] ye bakılabilir.

3. BÖLÜM

UYGULAMALAR

PERTÜRBASYON-İTERASYON ALGORİTMASI PIA(1,1) UYGULAMALARI

ÖRNEK 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1(t), \\
&\frac{dy_2(t)}{dt} = y_1(t) - y_2{}^2(t), \\
&\frac{dy_3(t)}{dt} = y_2{}^2(t),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 0 \tag{3.2}$$

başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemde;

$$y_1(t) = \varepsilon u(t),\ y_2(t) = \varepsilon k(t)\ ve\ y_3(t) = \varepsilon m(t) \tag{3.3}$$

olmak üzere, öncelikle ilk denklemi çözelim. (3.1) denkleminde denklem (3.3) deki eşitlikleri de yerine yazarsak (3.1) denklemi

$$\begin{aligned}
&\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0 \\
&\frac{dk(t)}{dt} - u(t) + \varepsilon k^2(t) = 0 \\
&\frac{dm(t)}{dt} - \varepsilon k^2(t) = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklini alır.

(3.4) denklem sistemindeki birinci denklemi ele alalım. Bu denklem için

$$F = u_n'(t) + u_n(t),\ F_u = 1,\ F_{u'} = 1,\ F_k = 0,\ F_{k'} = 0,\ F_m = 0,\ F_{m'} = 0,\ F_\varepsilon = 0 \qquad (3.5)$$

olup bu değerleri (2.10) denkleminde yerine yazıp $\varepsilon = 1$ için düzenlersek

$$\left(u_c(t)\right)_n + \left(u_c'(t)\right)_n + u_n(t) + u_n'(t) = 0 \ (3.6) \qquad (3.6)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem $n = 0$ için çözüldüğünde,

$$\left(u_c(t)\right)_0 = -1 + \mathrm{e}^{-t} C_1 \qquad (3.7)$$

elde edilir. Bu ifade

$$u_1 \ = \ u_0 \ + \ \varepsilon(u_c)_0 \qquad (3.8)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(t) = 1 + \varepsilon(-\frac{1}{\varepsilon} + \mathrm{e}^{-t} C_1) \qquad (3.9)$$

$u_1(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = 1 \qquad (3.10)$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad (3.11)$$

elde edilir. (3.4) sisteminin ilk denklemi etkileşimli bir denklem olmadığı için $u_2(t)$ yi bulalım. $n = 1$ için:

(3.5) değerlerini, (2.10) denkleminde yerine yazıp $\varepsilon = 1$ için düzenlersek

$$\left(u_c(t)\right)_1 + \left(u_c'(t)\right)_1 + u_1(t) + u_1'(t) = 0 \qquad (3.12)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülünce elde edilen

$$\left(u_c(t)\right)_1 = \mathrm{e}^{-t} C_1 \qquad (3.13)$$

değeri

$$u_2 = \mathrm{u}_1 + \varepsilon(\mathrm{u_c})_1 \tag{3.14}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_2(t) = u_1(t) + \varepsilon(\mathrm{e}^{-t}C_1) \tag{3.15}$$

olup $u_2(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = 0 \tag{3.16}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \tag{3.17}$$

elde edilir. Benzer şekilde n değerini artırırsak

$$u_3(t) = u_4(t) = ... = u_n(t) = \mathrm{e}^{-t} \tag{3.18}$$

bulunur. Şimdi (3.4) denklem sisteminin ikinci denklemini çözelim. Bunun için

$$F = k_n\text{'}(t) - u_n(t),\ F_k = 0,\ F_{k'} = 1,\ F_\varepsilon = k_n(t)^2,\ F_u = -1,\ F_{u'} = 0,\ F_m = 0,\ F_{m'} = 0 \tag{3.19}$$

değerlerini (2.9) denkleminde yerine yazıp denklemi $\varepsilon = 1$ için düzenlersek;

$$(k_c^{'})_n = u_{n+1}(t) - k_n(t)^2 - k_n^{'}(t) \tag{3.20}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem $n = 0$ için çözüldüğünde

$$\left(k_c(t)\right)_0 = -\mathrm{e}^{-t} + C_1 \tag{3.21}$$

olarak bulunur. Bu ifade,

$$k_1 = k_0 + \varepsilon(k_c)_0 \tag{3.22}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$k_1(t) = k_0(t) + \varepsilon(-\mathrm{e}^{-t} + C_1) \tag{3.23}$$

olup $k_1(0)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1=1 \tag{3.24}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $k_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_1(t)=1-\mathrm{e}^{-t} \tag{3.25}$$

elde edilir. $k_2(t)$ yi bulmak için

$n=1$ ve (3.19) değerleri (2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$(k_c')_1=u_2(t)-k_1(t)^2-k_1'(t) \tag{3.26}$$

olur. Bu denklemde u_2 ve k_1 değerleri yerine yazılırsa

$$(-1+\mathrm{e}^{-t})^2+\left(k_c'(t)\right)_1=0 \tag{3.27}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülünce elde edilen

$$\left(k_c(t)\right)_1=\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}-2\mathrm{e}^{-t}-t+C_1 \tag{3.28}$$

değeri $k_2 = k_1 + \varepsilon(k_c)_1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2(t)=k_1(t)+\varepsilon(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}-2\mathrm{e}^{-t}-t+C_1) \tag{3.29}$$

olup $k_2(0)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1=\frac{3}{2} \tag{3.30}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $k_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_2(t)=\frac{1}{2}\left(5+\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-t}-2t\right) \tag{3.31}$$

elde edilir.

$n=2$ değerini (3.20) denkleminde yazarsak, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{1}{4}\left(5+\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-t}-2t\right)^2+\left(k_c{}'(t)\right)_2=\mathrm{e}^{-2t}\left(-1+\mathrm{e}^{t}\right)^2 \tag{3.32}$$

denklemi ve bu denklemin çözümünden de

$$\left(k_c(t)\right)_2=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{4}-4\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-2t}(20-2t)-21t+10t^2-\frac{4t^3}{3}+\mathrm{e}^{-t}(-28+24t)\right)+C_1 \tag{3.33}$$

elde edilir. Bu ifade

$$k_3 \;=\; k_2 \;+\; \varepsilon(k_c)_2 \tag{3.34}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$k_3(t)=k_2(t)+\varepsilon\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{4}-4\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-2t}(20-2t)-21t+10t^2-\frac{4t^3}{3}+\mathrm{e}^{-t}(-28+24t)\right)+C_1\right] \tag{3.35}$$

ve $k_3(0)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1=\frac{47}{16} \tag{3.36}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $k_3(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_3(t)=\frac{87}{16}+\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{16}-\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{11}{2}-\frac{t}{2}\right)-\frac{25t}{4}+\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\mathrm{e}^{-t}(-10+6t) \tag{3.37}$$

olur. Son olarak üçüncü denklemi çözelim.

$$F=m_n{}'(t),\; F_m=0,\; F_{m'}=1,\; F_u=0,\; F_{u'}=0,\; F_k=0,\; F_{k'}=0,\; F_\varepsilon=-k_n(t)^2 \tag{3.38}$$

değerlerini (2.10) denkleminde yerine yazıp ε=1 için düzenlersek

$$\left(m_c{}'(t)\right)_n+m_n{}'(t)=k_{n+1}(t)^2 \tag{3.39}$$

denklemi elde edilir. $n=0$ için;

$$\left(m_c'(t)\right)_0 = \left(-1+\mathrm{e}^{-t}\right)^2 \tag{3.40}$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklem çözüldüğünde

$$\left(m_c(t)\right)_0 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} + t + C_1 \tag{3.41}$$

elde edilir. Bu ifade,

$$m_1 \ = \ m_0 \ + \ \varepsilon(m_c)_0 \tag{3.42}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$m_1(t) = m_0(t) + \varepsilon\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} + t + C_1 \right) \tag{3.43}$$

olup $m_1(0)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = -\frac{3}{2} \tag{3.44}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $m_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$m_1(t) = -\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} + 2\mathrm{e}^{-t} + t \tag{3.45}$$

elde edilir.

$n=1$ için (3.39) denklemi düzenlenirse

$$\left(m_c'(t)\right)_1 + m_1'(t) = k_2(t)^2 \tag{3.46}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülerek elde edilen

$$\left(m_c(t)\right)_1 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t} + 4\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}(28-24t) + 21t - 10t^2 + \frac{4t^3}{3} + \mathrm{e}^{-2t}(-20+2t) \right) + C_1 \tag{3.47}$$

değeri

$$m_2 = m_1 + \varepsilon(m_c)_1 \tag{3.48}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$m_2(t) = m_1(t) + \varepsilon\left(\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t} + 4\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}(28-24t) + 21t - 10t^2 + \frac{4t^3}{3} + \mathrm{e}^{-2t}(-20+2t)\right) + C_1 \tag{3.49}$$

ve $m_2(0) = 0$ olduğundan

$$C_1 = -\frac{47}{16} \tag{3.50}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $m_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$m_2(t) = -\frac{71}{16} - \frac{\mathrm{e}^{-4t}}{16} + \mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}(9-6t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}(-11+t) + \frac{25t}{4} - \frac{5t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \tag{3.51}$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edersek;

$$\begin{aligned} m_3(t) = {} & \frac{1}{29030400}\mathrm{e}^{-8t}(-14175 + \mathrm{e}^{t}(518400 - 2032128\mathrm{e}^{2t}(-34+5t) \\ & +50400\mathrm{e}^{t}(-161+6t) - 44800\mathrm{e}^{4t}(-20233 + 12t(1469 + 6t(-31+2t))) \\ & +9450\mathrm{e}^{3t}(-35655 + 4t(3459 + 2t(-51+4t))) - 151200\mathrm{e}^{5t}(8973 \\ & +2t(-6369 + 8t(369 + t(-33+2t)))) + 2419200\mathrm{e}^{6t}(534 + t(-771 \\ & +4t(189 + 2t(-31+6t)))) + \mathrm{e}^{7t}(-566116027 + 1800t(476847 \\ & +4t(-137025 + 2t(44520 + t(-17577 + 8t(525 - 70t + 4t^2)))))))) \end{aligned} \tag{3.52}$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK 2:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= -\kappa_1 y_1(t) + \kappa_2 y_2(t) y_3(t),\\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= \kappa_3 y_1(t) + \kappa_4 y_2(t) y_3(t) - \kappa_5 {y_2}^2(t),\\ \frac{dy_3(t)}{dt} &= \kappa_6 {y_2}^2(t),\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0 \tag{3.54}$$

başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemde;

$$\kappa_1 = 0.04,\ \kappa_2 = 0.01,\ \kappa_3 = 400,\ \kappa_4 = 100,\ \kappa_5 = 3000,\ \kappa_6 = 30 \tag{3.55}$$

dur.

(3.53) denkleminde

$$y_1(t) = \varepsilon u(t),\ y_2(t) = \varepsilon k(t) \text{ ve } y_3(t) = \varepsilon m(t) \tag{3.56}$$

değerlerini yazıp düzenlersek denklem

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= -\kappa_1 u(t) + \varepsilon\kappa_2 k(t) m(t),\\ \frac{dk(t)}{dt} &= \kappa_3 u(t) + \varepsilon\left(\kappa_4 k(t) m(t) - \kappa_5 k(t)^2\right),\\ \frac{dm(t)}{dt} &= \varepsilon\kappa_6 k(t)^2,\end{aligned} \tag{3.57}$$

halini alır. $n = 0$ için:

$$F = u_n{}'(t) + \kappa_1 u_n(t),\ F_u = \kappa_1,\ F_{u'} = 1,\ F_k = 0,\ F_{k'} = 0,\ F_m = 0,\ F_{m'} = 0,\ F_\varepsilon = -\kappa_2 k_n(t) m_n(t) \tag{3.58}$$

olup bu değerleri (2.10) denkleminde yerine yazıp $\varepsilon = 1$ için düzenlersek;

$$\kappa_1\left(u_c(t)\right)_n + \kappa_1 u_n(t) + \left(u_c{}'(t)\right)_n + u_n{}'(t) = \kappa_2 k_n(t) m_n(t) \tag{3.59}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$\left(u_c(t)\right)_0 = -1 + \mathrm{e}^{-t\kappa_1} C_1 \tag{3.60}$$

bulunur. Bu ifade,

$u_1 \ = \ u_0 \ + \ \varepsilon(u_c)_0$ denkleminde yerine yazılırsa $u_0(t) = 1$ için:

$$u_1(t) = 1 + \varepsilon(-1 + \mathrm{e}^{-t\kappa_1} C_1) \tag{3.61}$$

olup $u_1(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = 1 \tag{3.62}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{-t\kappa_1} \tag{3.63}$$

elde edilir. Şimdi $k_1(t)$ yi bulalım.

$$\begin{gathered} F = k_n{}'(t) - \kappa_3 u_n(t),\ F_k = 0,\ F_{k'} = 1,\ F_\varepsilon = -\kappa_4 k_n(t) m_n(t) + \kappa_5 k_n(t)^2, \\ F_u = -\kappa_3,\ F_{u'} = 0,\ F_m = 0,\ F_{m'} = 0, \end{gathered} \tag{3.64}$$

değerlerini (2.10) denkleminde yerine yazarsak, $\varepsilon = 1$ için

$$\left(k_c{}'(t)\right)_n = -\kappa_5 k_n(t)^2 + \kappa_4 k_n(t) m_n(t) + \kappa_3 u_n(t) - k_n{}'(t) \tag{3.65}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $n = 0$ için bu denklem çözülünce elde edilen

$$\left(k_c(t)\right)_0 = C_1 - \frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\kappa_3}{\kappa_1} \tag{3.66}$$

değeri

$$k_1 \ = \ k_0 \ + \ \varepsilon(k_c)_0 \tag{3.67}$$

denkleminde yerine yazılırsa $k_0(t) = 0$ olduğundan

$$k_1(t) = 0 + \varepsilon\left(C_1 - \frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\kappa_3}{\kappa_1}\right) \tag{3.68}$$

olup $k_0(t)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1=\frac{\kappa_3}{\kappa_1} \tag{3.69}$$

..

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $k_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_1(t)=\frac{\kappa_3}{\kappa_1}-\frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\kappa_3}{\kappa_1} \tag{3.70}$$

elde edilir. $m_1(t)$ ‘yi bulmak için,

$$F=m_n{}'(t),\ F_m=0,\ F_{m'}=1,\ F_\varepsilon=-\kappa_6 k_n(t)^2,\ F_u=0,\ F_{u'}=0,\ F_k=0,\ F_{k'}=0 \tag{3.71}$$

değerlerini (2.10) denkleminde yerine yazarsak, $\varepsilon=1$ için

$$\left(m_c{}'(t)\right)_n+m_n{}'(t)=\kappa_6 k_n(t)^2 \tag{3.72}$$

denklemi ve bu denklemin $n=0$ için çözümünden de

$$\left(m_c(t)\right)_0=C_1+\frac{\left(t+\dfrac{\mathrm{e}^{-2t\kappa_1}(-1+4\mathrm{e}^{t\kappa_1})}{2\kappa_1}\right)\kappa_3^2\kappa_6}{\kappa_1^2} \tag{3.73}$$

elde edilir. Bu ifade

$$m_1\ =\ m_0\ +\ \varepsilon(u_c)_0 \tag{3.74}$$

denkleminde yerine yazılırsa $m_0(t)=0$ olduğundan

$$m_1(t)=0+\varepsilon\left(C_1+\frac{\left(t+\dfrac{\mathrm{e}^{-2t\kappa_1}(-1+4\mathrm{e}^{t\kappa_1})}{2\kappa_1}\right)\kappa_3^2\kappa_6}{\kappa_1^2}\right) \tag{3.75}$$

olup $m_1(0)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = -\frac{3\kappa_3^2\kappa_6}{2\kappa_1^3} \tag{3.76}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $m_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$m_1(t) = -\frac{3\kappa_3^2\kappa_6}{2\kappa_1^3} + \frac{\left(t + \dfrac{\mathrm{e}^{-2t\kappa_1}(-1+4\mathrm{e}^{t\kappa_1})}{2\kappa_1}\right)\kappa_3^2\kappa_6}{\kappa_1^2} \tag{3.77}$$

olarak bulunur. $n = 1$ için (3.59) denklemi

$$\kappa_1\left(u_c(t)\right)_1 + \kappa_1 u_1(t) + \left(u_c^{'}(t)\right)_1 + u_1^{'}(t) = \kappa_2 k_1(t) m_1(t) \tag{3.78}$$

halini alır. Bu denklem çözüldüğünde

$$\left(u_c(t)\right)_1 = \mathrm{e}^{-t\kappa_1}C_1 + \frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\left((7+2\mathrm{e}^{t\kappa_1})t + \dfrac{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t\kappa_1} + 5\mathrm{e}^{-t\kappa_1} - 5\mathrm{e}^{t\kappa_1}}{\kappa_1} - t^2\kappa_1\right)\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6}{2\kappa_1^4} \tag{3.79}$$

elde edilir. Bu ifade

$$\mathrm{u}_2 = \mathrm{u}_1 + \varepsilon(\mathrm{u}_c)_1 \tag{3.80}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_2(t) = \mathrm{e}^{-t\kappa_1} + \varepsilon\left(\mathrm{e}^{-t\kappa_1}C_1 + \frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\left((7+2\mathrm{e}^{t\kappa_1})t + \dfrac{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t\kappa_1} + 5\mathrm{e}^{-t\kappa_1} - 5\mathrm{e}^{t\kappa_1}}{\kappa_1} - t^2\kappa_1\right)\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6}{2\kappa_1^4}\right) \tag{3.81}$$

olup $u_2(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = \frac{\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6}{4\kappa_1^5} \tag{3.82}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_2(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\left(2 + \frac{\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6}{2\kappa_1^5} + \frac{\left((7+2\mathrm{e}^{t\kappa_1})t + \dfrac{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t\kappa_1} + 5\mathrm{e}^{-t\kappa_1} - 5\mathrm{e}^{t\kappa_1}}{\kappa_1} - t^2\kappa_1 \right)\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6}{\kappa_1^4} \right) \tag{3.83}$$

elde edilir. $k_2(t)$ değerini bulmak için (3.65) denkleminde $n = 1$ yazılırsa

$$\left(k_c^{'}(t)\right)_1 = -\kappa_5 k_1(t)^2 + \kappa_4 k_1(t) m_1(t) + \kappa_3 u_1(t) - k_1^{'}(t) \tag{3.84}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülünce elde edilen

$$\begin{aligned}\left(k_c(t)\right)_1 = C_1 + \frac{1}{12\kappa_1^6}\mathrm{e}^{-3t\kappa_1}\kappa_3^2(&-12\mathrm{e}^{3t\kappa_1}t\kappa_1^4\kappa_5 - (-1+15\mathrm{e}^{t\kappa_1} + 33\mathrm{e}^{2t\kappa_1})\kappa_2\kappa_3^2\kappa_6 \\ &+6\mathrm{e}^{2t\kappa_1}t\kappa_1^2\kappa_3((1+\mathrm{e}^{t\kappa_1})t\kappa_2\kappa_3 - (-2+3\mathrm{e}^{t\kappa_1})\kappa_4)\kappa_6 - \kappa_1\kappa_3(30\mathrm{e}^{2t\kappa_1}(1+\mathrm{e}^{t\kappa_1})t\kappa_2\kappa_3 \\ &+(2-15\mathrm{e}^{t\kappa_1} + 30\mathrm{e}^{2t\kappa_1})\kappa_4)\kappa_6 + 6\mathrm{e}^{t\kappa_1}\kappa_1^3((1-4\mathrm{e}^{t\kappa_1})\kappa_5 + \mathrm{e}^{2t\kappa_1}t^2\kappa_3\kappa_4\kappa_6))\end{aligned} \tag{3.85}$$

değeri

$$k_2 = \mathrm{k}_1 + \varepsilon(\mathrm{k}_c)_1 \tag{3.86}$$

denkleminde yerine yazılırsa $k_2(0) = 0$ denkleminden

$$C_1 = \frac{\kappa_3^2(18\kappa_1^3\kappa_5 + 47\kappa_2\kappa_3^2\kappa_6 + 17\kappa_1\kappa_3\kappa_4\kappa_6)}{12\kappa_1^6} \tag{3.87}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $k_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$
\begin{aligned}
k_2(t) = \frac{1}{12\kappa_1^6} & \mathrm{e}^{-3t\kappa_1}\kappa_3(\kappa_3^2(\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4)\kappa_6 \\
& +3\mathrm{e}^{t\kappa_1}\kappa_3(2\kappa_1^3\kappa_5 + 5\kappa_3(-\kappa_2\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4)\kappa_6) \\
& -3\mathrm{e}^{2t\kappa_1}(4\kappa_1^3(\kappa_1^2 + 2\kappa_3\kappa_5) + \kappa_3^2((11 - 2t\kappa_1(-5 + t\kappa_1))\kappa_2\kappa_3 \\
& +2\kappa_1(5 - 2t\kappa_1)\kappa_4)\kappa_6) + \mathrm{e}^{3t\kappa_1}(12\kappa_1^5 + 6\kappa_1^3(3 - 2t\kappa_1)\kappa_3\kappa_5 \\
& +\kappa_3^2((47 + 6t\kappa_1(-5 + t\kappa_1))\kappa_2\kappa_3 + \kappa_1(17 + 6t\kappa_1(-3 + t\kappa_1))\kappa_4)\kappa_6))
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

elde edilir. $m_2(t)$ değerini bulmak için (3.72) denklemi $n = 1$ için düzenlenirse

$$
\left(m_c'(t)\right)_1 + m_1'(t) = \kappa_6 k_1(t)^2 \tag{3.89}
$$

denklemi ve bu denklemin çözümünden de

$$
\left(m_c(t)\right)_1 = C_1 + \frac{1}{3}t^3\kappa_3^2\kappa_6 \tag{3.90}
$$

elde edilir. Bu ifade

$$
m_2 = \mathrm{m}_1 + \varepsilon(\mathrm{u}_\mathrm{c})_1 \tag{3.91}
$$

denkleminde yerine yazılır ve edilen C_1 değeri ile $\varepsilon = 1$ için $m_2(t)$ yeniden düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
m_2(t) = \frac{1}{51840\kappa_1^{13}} & \mathrm{e}^{-6t\kappa_1}\kappa_3^2\kappa_6(-60\kappa_3^4(\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4)^2\kappa_6^2 \\
& +432\mathrm{e}^{t\kappa_1}\kappa_3^3(\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4)\kappa_6(-2\kappa_1^3\kappa_5 + 5\kappa_3(\kappa_2\kappa_3 - \kappa_1\kappa_4)\kappa_6) \\
& -135\mathrm{e}^{2t\kappa_1}\kappa_3^2(24\kappa_1^6\kappa_5^2 + 8\kappa_1^3(-2\kappa_1^2\kappa_2\kappa_3 + 4\kappa_1^3\kappa_4 - 19\kappa_2\kappa_3^2\kappa_5 \\
& +23\kappa_1\kappa_3\kappa_4\kappa_5)\kappa_6 + \kappa_3^2((97 + 4t\kappa_1(-9 + 2t\kappa_1))\kappa_2^2\kappa_3^2 \\
& -2\kappa_1(115 + 4t\kappa_1(-11 + 2t\kappa_1))\kappa_2\kappa_3\kappa_4 + 2\kappa_1^2(111 - 16t\kappa_1)\kappa_4^2)\kappa_6^2) \\
& +160\mathrm{e}^{3t\kappa_1}\kappa_3(108\kappa_1^6\kappa_5(\kappa_1^2 + 2\kappa_3\kappa_5) + 6\kappa_1^3\kappa_3(3\kappa_1^2(-16\kappa_2\kappa_3 + 17\kappa_1\kappa_4) \\
& +\kappa_3((-31 + 3t\kappa_1(14 - 3t\kappa_1))\kappa_2\kappa_3 + 8\kappa_1(17 - 3t\kappa_1)\kappa_4)\kappa_5)\kappa_6 \\
& +\kappa_3^3((-995 + 42t\kappa_1(-13 + 3t\kappa_1))\kappa_2^2\kappa_3^2 + \kappa_1(449 + 42t\kappa_1(19 - 3t\kappa_1))\kappa_2\kappa_3\kappa_4 \\
& +2\kappa_1^2(311 + 3t\kappa_1(-52 + 3t\kappa_1))\kappa_4^2)\kappa_6^2) - 540\mathrm{e}^{4t\kappa_1}(48\kappa_1^6(\kappa_1^4 + 5\kappa_1^2\kappa_3\kappa_5 \\
& +(5 - t\kappa_1)\kappa_3^2\kappa_5^2) + 4\kappa_1^3\kappa_3^2(6\kappa_1^2(-2(-5 + t\kappa_1)(1 + t\kappa_1)\kappa_2\kappa_3 \\
& +\kappa_1(13 - 4t\kappa_1)\kappa_4) + \kappa_3((185 + 6t\kappa_1(17 - 3t\kappa_1))\kappa_2\kappa_3 \\
& +\kappa_1(137 + 6t\kappa_1(-15 + t\kappa_1))\kappa_4)\kappa_5)\kappa_6 + \kappa_3^4((355 + 12t\kappa_1(77 \\
& +t\kappa_1(-3 + t\kappa_1(-8 + t\kappa_1))))\kappa_2^2\kappa_3^2 + 12\kappa_1(77 + 2t\kappa_1(-3 \\
& +2t\kappa_1(-6 + t\kappa_1)))\kappa_2\kappa_3\kappa_4 + 2\kappa_1^2(157 + 6t\kappa_1(-26 + 9t\kappa_1))\kappa_4^2)\kappa_6^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2160\mathrm{e}^{5t\kappa_1}(24\kappa_1^6(\kappa_1^2+2\kappa_3\kappa_5)(2\kappa_1^2+(1-2t\kappa_1)\kappa_3\kappa_5)\\
&+2t\kappa_1(-6+t\kappa_1)))\kappa_2\kappa_3\kappa_4+2\kappa_1^2(157+6t\kappa_1(-26+9t\kappa_1))\kappa_4^2)\kappa_6^2)\\
&+2160\mathrm{e}^{5t\kappa_1}(24\kappa_1^6(\kappa_1^2+2\kappa_3\kappa_5)(2\kappa_1^2+(1-2t\kappa_1)\kappa_3\kappa_5)\\
&+2\kappa_1^3\kappa_3^2(2\kappa_1^2(80\kappa_2\kappa_3+\kappa_1(29+6t\kappa_1(-3+t\kappa_1))\kappa_4)\\
&+\kappa_3((155+6t\kappa_1(-22+t\kappa_1(-3+2t\kappa_1)))\kappa_2\kappa_3+2\kappa_1(43\\
&+12t\kappa_1(-3+2t\kappa_1))\kappa_4)\kappa_5)\kappa_6+\kappa_3^4((433-4t\kappa_1(21\\
&+t\kappa_1(28+3t\kappa_1(-6+t\kappa_1))))\kappa_2^2\kappa_3^2+\kappa_1(349-4t\kappa_1(77\\
&+t\kappa_1(-26+3t\kappa_1(-2+t\kappa_1))))\kappa_2\kappa_3\kappa_4+2\kappa_1^2(21-2t\kappa_1(32\\
&+3t\kappa_1(-5+2t\kappa_1)))\kappa_4^2)\kappa_6^2)+\mathrm{e}^{6t\kappa_1}(1080\kappa_1^6(24\kappa_1^4(-3+2t\kappa_1)\\
&-8\kappa_1^2(17+6t\kappa_1(-3+t\kappa_1))\kappa_3\kappa_5+(-5+4t\kappa_1(27+2t\kappa_1(-9+2t\kappa_1)))\kappa_3^2\kappa_5^2)\\
&-24\kappa_1^3\kappa_3^2(30\kappa_1^2((719-12t\kappa_1(47+t\kappa_1(-15+2t\kappa_1)))\kappa_2\kappa_3\\
&-4\kappa_1(-44+3t\kappa_1(17+t\kappa_1(-9+2t\kappa_1)))\kappa_4)+\kappa_3((10829\\
&+180t\kappa_1(-141+t\kappa_1(92+t\kappa_1(-26+3t\kappa_1))))\kappa_2\kappa_3+\kappa_1(7627\\
&+180t\kappa_1(-3+t\kappa_1)(17+3t\kappa_1(-3+t\kappa_1)))\kappa_4)\kappa_5)\kappa_6\\
&+\kappa_3^4((-573385+72t\kappa_1(11045+2t\kappa_1(-3525+t\kappa_1(1220\\
&+9t\kappa_1(-25+2t\kappa_1)))))\kappa_2^2\kappa_3^2+2\kappa_1(-175765+72t\kappa_1(3995\\
&+2t\kappa_1(-1695+2t\kappa_1(385+9t\kappa_1(-10+t\kappa_1)))))\kappa_2\kappa_3\kappa_4\\
&+2\kappa_1^2(2605+36t\kappa_1(1445+2t\kappa_1(-765+t\kappa_1(440\\
&+9t\kappa_1(-15+2t\kappa_1)))))\kappa_4^2)\kappa_6^2))
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

olarak bulunur.

(3.59) denklemi $n=2$ için düzenlenirse

$$\kappa_1\left(u_c(t)\right)_2+\kappa_1 u_1(t)+\left(u_c{}'(t)\right)_2+u_n{}'(t)=\kappa_2 k_n(t)m_n(t) \tag{3.93}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$
\begin{aligned}
\left(u_c(t)\right)_2=\mathrm{e}^{-t\kappa_1}C_1-\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\kappa_2\kappa_3^3(3t^4/4+\mathrm{e}^{t\kappa_1}(720\kappa_3\kappa_5-720t\kappa_1\kappa_3\kappa_5\\
+t^6\kappa_1^6\kappa_3\kappa_5+18\kappa_1^2(1+20t^2\kappa_3\kappa_5)-6t\kappa_1^3(3+20t^2\kappa_3\kappa_5)\\
+\kappa_1^4(9t^2+30t^4\kappa_3\kappa_5)-3\kappa_1^5(t^3+2t^5\kappa_3\kappa_5))/\kappa_1^6)\kappa_6/9\kappa_1
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

elde edilir. Bu ifade

$$u_3 = u_2 + \varepsilon(u_c)_2 \tag{3.95}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$u_3(0)=1$ denkleminin çözümünden

$$C_1=\frac{2\kappa_2\kappa_3^3(\kappa_1^2+40\kappa_3\kappa_5)\kappa_6}{\kappa_1^7} \tag{3.96}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $u_3(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} u_3(t)=&\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-t\kappa_1}(9+\frac{18\kappa_2\kappa_3^3(\kappa_1^2+40\kappa_3\kappa_5)\kappa_6}{\kappa_1^7}-\kappa_2\kappa_3^3(3t^4/4\\ &+\mathrm{e}^{t\kappa_1}(720\kappa_3\kappa_5-720t\kappa_1\kappa_3\kappa_5+t^6\kappa_1^6\kappa_3\kappa_5+18\kappa_1^2(1+20t^2\kappa_3\kappa_5)\\ &-6t\kappa_1^3(3+20t^2\kappa_3\kappa_5)+\kappa_1^4(9t^2+30t^4\kappa_3\kappa_5)\\ &-3\kappa_1^5(t^3+2t^5\kappa_3\kappa_5))/\kappa_1^6)\kappa_6)/\kappa_1 \end{aligned} \tag{3.97}$$

elde edilir. Benzer şekilde ilerlersek

$$\begin{aligned} k_3(t)=&\frac{\kappa_3}{\kappa_1}-\frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}\kappa_3}{\kappa_1}-\frac{1}{3}t^3\kappa_3^2\kappa_5+(-3\mathrm{e}^{-2t\kappa_1}(-1+4\mathrm{e}^{t\kappa_1})\\ &-6t\kappa_1+2t^3\kappa_1^3)\kappa_3^2\kappa_5/6\kappa_1^3-\frac{1}{63}t^7\kappa_3^4\kappa_5(\kappa_5^2+\kappa_4\kappa_6)\\ &+\mathrm{e}^{-t\kappa_1}(24+24t\kappa_1+12t^2\kappa_1^2+4t^3\kappa_1^3+\mathrm{e}^{t\kappa_1}t^4\kappa_1^4)\kappa_3^3(2\kappa_5^2+\kappa_4\kappa_6)/12\kappa_1^5\\ &-\kappa_3^2(-3\kappa_1^2\kappa_5+8\kappa_3\kappa_5^2+4\kappa_3\kappa_4\kappa_6)/2\kappa_1^5 \end{aligned} \tag{3.98}$$

ve

$$\begin{aligned} m_3(t)=&\frac{1}{3}t^3\kappa_3^2\kappa_6+\frac{1}{6}(-2t^3+\frac{3\mathrm{e}^{-2t\kappa_1}(-1+4\mathrm{e}^{t\kappa_1})}{\kappa_1^3}+\frac{6t}{\kappa_1^2})\kappa_3^2\kappa_6\\ &-\frac{\mathrm{e}^{-t\kappa_1}(24+24t\kappa_1+12t^2\kappa_1^2+4t^3\kappa_1^3+\mathrm{e}^{t\kappa_1}t^4\kappa_1^4)\kappa_3^3\kappa_5\kappa_6}{6\kappa_1^5}\\ &+\frac{1}{63}t^7\kappa_3^4\kappa_5^2\kappa_6+\frac{\kappa_3^2(-3\kappa_1^2+8\kappa_3\kappa_5)\kappa_6}{2\kappa_1^5} \end{aligned} \tag{3.99}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 3:

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -1002x_1(t) + 1000x_2(t)^2 \\
x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_2(t)^2
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

ve

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1 \tag{3.101}$$

başlangıç koşulları ile verilen diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu diferansiyel denklem sisteminin tam çözümü $x_1(t) = e^{-2t}$ ve $x_2(t) = e^{-t}$ dir.

Bu sistemde; $u_0(t) = 1,\ k_0(t) = 1$ olmak üzere

$$x_1(t) = \varepsilon u(t),\ \mathrm{x}_2(t) = \varepsilon k(t) \tag{3.102}$$

alıp, (3.100) denklemi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= -1002u(t) + \varepsilon 1000k(t)^2 \\
k'(t) &= u(t) - k(t) - \varepsilon k(t)^2
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

denklem sistemi elde edilir. Önce bu denklem sisteminin ilk denklemini çözelim.

$$F = u_n'(t) + 1002u_n(t),\ F_u = 1002,\ F_{u'} = 1,\ F_k = 0,\ F_{k'} = 0,\ F_\epsilon = -1000k_n(t)^2 \tag{3.104}$$

olup bu değerleri (2.10) eşitliğinde yerine yazalım. Denklemi $\varepsilon = 1$ için düzenlersek;

$$1002\left(u_c(t)\right)_n + 1002u_n(t) + \left(u_c'(t)\right)_n + u_n'(t) = 1000k_n(t)^2 \tag{3.105}$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklem $n = 0$ için çözüldüğünde

$$\left(u_c(t)\right)_0 = -\frac{1}{501} + \mathrm{e}^{-1002t}C_1 \tag{3.106}$$

elde edilir. Bu değer,

$$u_1(t) = u_0(t) + \varepsilon\left(-\frac{1}{501} + \mathrm{e}^{-1002t}C_1\right) \tag{3.107}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(t)=\left(\frac{500}{501}+\frac{\mathrm{e}^{-1002t}(501-500\varepsilon)}{501\varepsilon}\right)\varepsilon \tag{3.108}$$

ve $\varepsilon=1$ için $u_1(0)=1$ denkleminin çözümünden

$$C_1=\frac{1}{501} \tag{3.109}$$

olarak bulunur. Bu değer için $u_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_1(t)=\frac{500}{501}+\frac{\mathrm{e}^{-1002t}}{501} \tag{3.110}$$

elde edilir.

$$F=k_n'(t)-u_n(t)+k_n(t),\ F_k=1,\ F_{k'}=1,\ F_u=-1,\ F_{u'}=0,\ F_\varepsilon=k_n(t)^2 \tag{3.111}$$

değerlerini (2.10) denkleminde yerine yazalım. Denklemi $\varepsilon=1$ için düzenlersek;

$$\left(k_c(t)\right)_n+k_n(t)+k_n(t)^2-u_{n+1}(t)+\left(k_c^{'}(t)\right)_n+k_n^{'}(t)=0 \tag{3.112}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem $n=0$ için çözüldüğünde

$$\left(k_c(t)\right)_0=\mathrm{e}^{-t}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-1001t}}{501501}-\frac{502\mathrm{e}^{t}}{501}\right)+\mathrm{e}^{-t}C_1 \tag{3.113}$$

elde edilir. Bu ifade,

$$k_1 \ = \ k_0 \ + \ \varepsilon(k_c)_0 \tag{3.114}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$k_1(t)=k_0(t)+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{-t}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-1001t}}{501501}-\frac{502\mathrm{e}^{t}}{501}\right)+\mathrm{e}^{-t}C_1\right) \tag{3.115}$$

olduğundan $k_1(0)=1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = \frac{1003}{1001} \tag{3.116}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $k_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_1(t) = -\frac{1}{501} - \frac{e^{-1002t}}{501501} + \frac{1003e^{-t}}{1001} \tag{3.117}$$

elde edilir. $n = 1$ için (3.105) denklemini yeniden düzenlersek;

$$1002\left(u_c(t)\right)_1 + 1002u_1(t) + \left(u_c{}'(t)\right)_1 + u_1{}'(t) = 1000k_1(t)^2 \tag{3.118}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülünce elde edilen

$$\begin{aligned}\left(u_c(t)\right)_1 = -\frac{1}{251503253001}1000e^{-1002t}\Big(&\frac{e^{-1002t}}{1002} - 1005006e^{-t} - \frac{252509265009e^{1000t}}{1000} \\ &+ 1005006e^{1001t} + \frac{125751125500e^{1002t}}{501} - 2002t\Big) + e^{-1002t}C_1\end{aligned} \tag{3.119}$$

değeri $u_2 = u_1 + \varepsilon(u_c)_1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}u_2(t) = u_1(t) + \varepsilon\Big(&-\frac{1}{251503253001}1000e^{-1002t}\Big(\frac{e^{-1002t}}{1002} - 1005006e^{-t} \\ &- \frac{252509265009e^{1000t}}{1000} + 1005006e^{1001t} + \frac{125751125500e^{1002t}}{501} \\ &- 2002t\Big) + e^{-1002t}C_1\Big)\end{aligned} \tag{3.120}$$

olup $u_2(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = -\frac{1509014509}{251503253001} \tag{3.121}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}u_2(t) = \frac{1}{501}\Big(&\frac{500}{251001} + \frac{1}{251503253001}e^{-2004t}\Big(-500 + 501e^{1001t}\Big(1005006000 \\ &+ 252509265009e^{1001t} - 1005006000e^{1002t} + 1001e^{t}\Big(-\frac{1007012008}{1001} + 2000t\Big)\Big)\Big)\Big)\end{aligned} \tag{3.122}$$

elde edilir. $k_2(t)$ değerini bulmak için (3.112) denkleminde $n=1$ yazılırsa

$$\left(k_c(t)\right)_1+k_1(t)+k_1(t)^2-u_2(t)+\left(k_c{}'(t)\right)_1+k_1{}'(t)=0 \tag{3.123}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde elde edilen

$$\begin{aligned}\left(k_c(t)\right)_1 = (\mathrm{e}^{-t}(&\frac{1001\mathrm{e}^{-2003t}}{2003}-503005503\mathrm{e}^{-1002t}+251502251000\mathrm{e}^{t}\\ &+\mathrm{e}^{-1001t}(\frac{756016270011}{1001}-1002000t)+503508006t))\\ &/126003129753501+\mathrm{e}^{-t}C_1\end{aligned} \tag{3.124}$$

ifadesi

$$k_2 = \mathrm{k}_1 + \varepsilon(\mathrm{k}_\mathrm{c})_1 \tag{3.125}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}k_2(t)=k_1(t)+\varepsilon((\mathrm{e}^{-t}(&\frac{1001\mathrm{e}^{-2003t}}{2003}-503005503\mathrm{e}^{-1002t}+251502251000\mathrm{e}^{t}\\ &+\mathrm{e}^{-1001t}(\frac{756016270011}{1001}-1002000t)+503508006t))\\ &/126003129753501+\mathrm{e}^{-t}C_1)\end{aligned} \tag{3.126}$$

ve $k_2(0)=1$ olduğundan

$$C_1=-\frac{1007522037543025}{504264776776764003} \tag{3.127}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $k_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}k_2(t)=&-\frac{1}{125751501}+\frac{\mathrm{e}^{-2004t}}{252132136759503}-\frac{1003\mathrm{e}^{-1003t}}{251252001}\\ &+\mathrm{e}^{-t}(\frac{504264776770742984}{504264776776764003}+\frac{2006t}{502002501})\\ &-\frac{\mathrm{e}^{-1002t}(-1007012010+2002000t)}{251754756254001}\end{aligned} \tag{3.128}$$

olarak bulunur. $u_3(t)$ değerini bulmak için (3.105) denkleminde $n=2$ yazılırsa

$$1002\left(u_c(t)\right)_2 + 1002u_2(t) + \left(u_c{}'(t)\right)_2 + u_2{}'(t) = 1000k_2(t)^2 \tag{3.129}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde elde edilen $\left(u_c(t)\right)_2$

değeri

$$u_3 \; = \; u_2 \; + \; \varepsilon(u_c)_2 \tag{3.130}$$

denkleminde yerine yazılırsa $u_3(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = \frac{240783257862942197906490731716884587804176 9}{3011276853010317403136390297865698814198750 00} \tag{3.131}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_3(t)$ yeniden düzenlenirse;

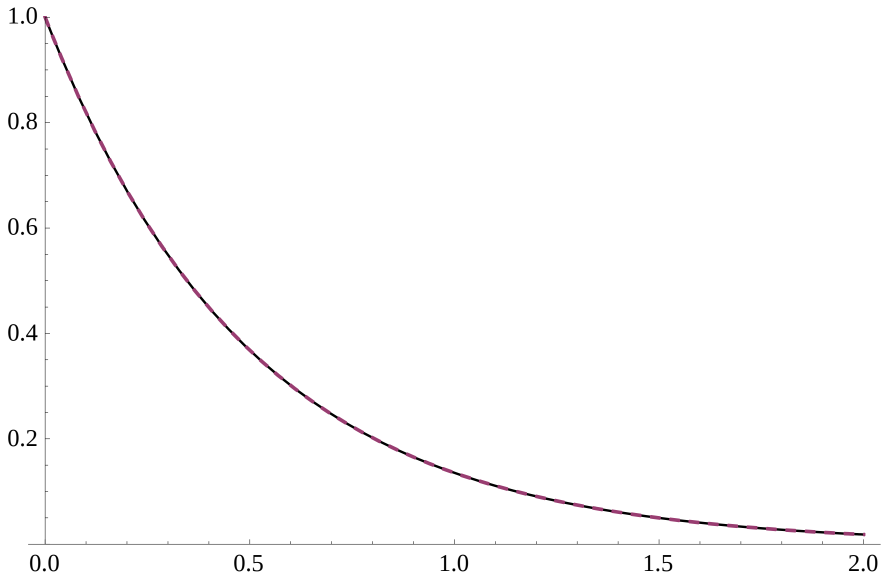
$$\begin{aligned} u_3(t) = (&\frac{125000000}{125751501} - \frac{500\mathrm{e}^{-2004t}}{126003129753501} + \frac{1000\mathrm{e}^{-1004t}}{501501} - \frac{666000\mathrm{e}^{-1003t}}{167334167} \\ &+ \frac{500\mathrm{e}^{-4t}}{499} - \frac{2000\mathrm{e}^{-3t}}{1001} + \frac{1501999501\mathrm{e}^{-2t}}{502002501} - \frac{333000000\mathrm{e}^{-t}}{167334167} \\ &+ \mathrm{e}^{-1002t}(-\frac{1000000t}{251252001} + \frac{13944458138611 - 13916930805611}{13944458138611})) \end{aligned} \tag{3.132}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde ilerlersek,

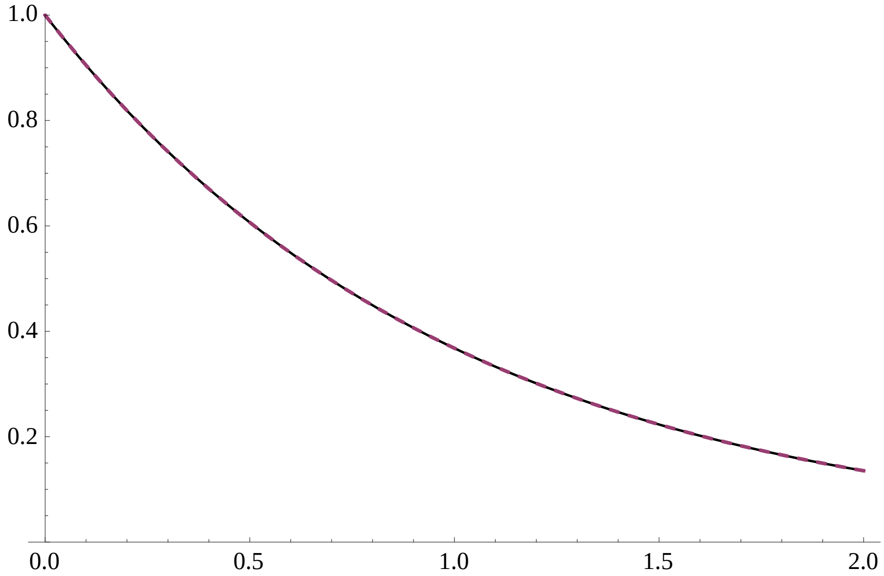
$$\begin{aligned} k_3(t) = (&\mathrm{e}^{-4008t}(18341806824764022415538094497125000 \\ &+\mathrm{e}^{1001t}(-55351604677294567153185538913714092552125000 \\ &+5561966037926769704533598145683622938111553365272500 0\mathrm{e}^{1001t} \\ &-44251889225619934853653974977655072874181887500 0\mathrm{e}^{3007t} \\ &-5545305180906897706125984841061504975850000 0\mathrm{e}^{2003t} \\ &(252132892144380245 + 1007520022509t) \\ &-24368320874033076525585000 00\mathrm{e}^{t} \\ &(-22771222888945511 + 452705955702 00t) \\ &+1111276942347576103745127431685252645 51\mathrm{e}^{3005t} \\ &(2521333948978739784 91 + 10075200225090 00t) \\ &+2747839478987308236747901059375 0\mathrm{e}^{1002t}(-4059349618659071283563 \\ &+8072254450422198036t) - 1163084141767995298 9\mathrm{e}^{2005t} \\ &(1202125728236621941432274274288025166541769 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+76093894344326859000000000t(-251753003+250250t)) \\
&+32875308103330770975000\mathrm{e}^{1003t}(1701976962482333284387998511\!49 \\
&+66967100200000t(-101053756856903+100450650300t))+788301581250\mathrm{e}^{3006t} \\
&(444737239911274086600878183734211830692478116060153\!7853 \\
&+1401288658607073523122435\!60t(504266789797760984+1007520022509t)) \\
&-110133186710260545912413377125000\mathrm{e}^{2004t} \\
&(-253903380414934611605019722939+10030020t(50325523565502475891 \\
&+201504004501800t))))) \\
&/35058707225635440825103118435337\!03 \\
&7672564526390315862648266313750\!00
\end{aligned}
\qquad (3.133)
$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam ettiğimizde bulunan $u_4(t)$ ve $k_4(t)$ değerlerinin $x_1(t)=e^{-2t}$ ve $x_2(t)=e^{-t}$ tam çözümleri ile karşılaştırma tabloları Tablo 2.1, Tablo 2.2 de ve grafikleri aşağıdaki Şekil a.) ve Şekil b.) de verilmiştir.



Şekil a.) $u_4(t)$ *için* —— *PIA*(1.1) *çözümü* / – – – – *Tam çözüm*



Şekil b.) $k_4(t)$ *için* —— *PIA*(1.1) *çözümü* / – – – – *Tam çözüm*

ÖRNEK 4:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -20y_1(t) - 0.25y_2(t) - 19.75y_3(t),$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 20y_1(t) - 20.25y_2(t) + 0.25y_3(t), \qquad (3.134)$$
$$\frac{dy_3(t)}{dt} = 20y_1(t) - 19.75y_2(t) - 0.25y_3(t),$$

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = -1 \qquad (3.135)$$

başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin tam çözümü:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-t}{2}} + e^{-20t}(cos20t + sin20t)\right)$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-t}{2}} - e^{-20t}(cos20t + sin20t)\right) \qquad (3.136)$$
$$y_3(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{-t}{2}} + e^{-20t}(cos20t - sin20t)\right)$$

Bu sistemde;

değerleri ile $\varepsilon = \frac{1}{4}$ alıp bunu (3.134) te yerine yazarsak;

$$\frac{du(t)}{dt} = -20u(t) - \varepsilon k(t) - (20-\varepsilon)m(t),$$
$$\frac{dk(t)}{dt} = 20u(t) - (20+\varepsilon)k(t) + \varepsilon m(t), \qquad (3.137)$$
$$\frac{dm(t)}{dt} = 20u(t) - (20-\varepsilon)k(t) - \varepsilon m(t),$$

denklem sistemi elde edilir. $u_1(t)$ değerini bulmak için

$$F = u_n'(t) + 20u_n(t) + 20m_n(t),\ F_u = 20,\ F_{u'} = 1,\ F_k = 0,$$
$$F_{k'} = 0,\ F_m = 20,\ F_{m'} = 0,\ F_\varepsilon = k_n(t) - m_n(t) \qquad (3.138)$$

değerlerini (2.10) eşitliğinde yerine yazıp denklemi $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için düzenlersek;

$$20\left(u_c(t)\right)_n + k_n(t) + \left(u_c{}'(t)\right)_n + 4\left(20m_n(t) + 20u_n(t) + u_n{}'(t)\right) = m_n(t) \tag{3.139}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem $n = 0$ için çözüldüğünde,

$$\left(u_c(t)\right)_0 = -\frac{1}{20} + \mathrm{e}^{-20t} C_1 \tag{3.140}$$

elde edilir. Bu ifade,

$$u_1 \;=\; u_0 \;+\; \varepsilon(u_c)_0 \tag{3.141}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(t) = 1 + \varepsilon\left(-\frac{1}{20} + \mathrm{e}^{-20t} C_1\right) \tag{3.142}$$

$u_1(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = \frac{1}{20} \tag{3.143}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için $u_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_1(t) = 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{20} + \frac{\mathrm{e}^{-20t}}{20}\right) \tag{3.144}$$

elde edilir. Şimdi $k_1(t)$ yi bulalım.

$$\begin{aligned} &F = k_n{}'(t) - 20u_n(t) + (20)k_n(t),\; F_k = 20,\; F_{k'} = 1,\; F_u = -20, \\ &F_{u'} = 0,\; F_m = 0,\; F_{m'} = 0,\; F_\varepsilon = k_n(t) - m_n(t) \end{aligned} \tag{3.145}$$

değerlerini (2.10) denkleminde yerine yazarsak, $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için

$$20\left(k_c(t)\right)_n + \left(k_c{}'(t)\right)_n = 4\left(-\frac{81}{4}k_n(t) + \frac{m_n(t)}{4} + 20u_{n+1}(t) - k_n{}'(t)\right) \tag{3.146}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem $n=0$ için çözülünce elde edilen

$$\left(k_c(t)\right)_0 = \mathrm{e}^{-20t}\left(\frac{39\mathrm{e}^{20t}}{10}+t\right)+\mathrm{e}^{-20t}C_1 \tag{3.147}$$

değeri

$$k_1 = \mathrm{k}_0 + \varepsilon(\mathrm{k}_\mathrm{c})_0 \tag{3.148}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$k_1(t) = 0+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{-20t}\left(\frac{39\mathrm{e}^{20t}}{10}+t\right)+\mathrm{e}^{-20t}C_1\right) \tag{3.149}$$

ve $k_0(t)=0$ olduğundan $k_1(0)=0$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = -\frac{39}{10} \tag{3.150}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $k_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_1(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{39}{10}+\mathrm{e}^{-20t}\left(-\frac{39}{10}+t\right)\right) \tag{3.151}$$

elde edilir. Şimdi ise $m_1(t)$ yi bulalım. Bunun için

$$\begin{gathered} F = m_n{}'(t)-20u_n(t)+20k_n(t),\ F_m=\varepsilon,\ F_{m'}=1,\ F_u=-20, \\ F_{u'}=0,\ F_k=20,\ F_{k'}=0,\ F_\varepsilon=m_n(t)-k_n(t) \end{gathered} \tag{3.152}$$

değerlerini (2.10) eşitliğinde yerine yazıp denklemi $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$ için düzenlersek;

$$\frac{\left(m_c(t)\right)_n}{4}+\left(m_c'(t)\right)_n = 4\left(-\frac{79}{4}k_n(t)-\frac{m_n(t)}{4}+20u_n(t)-m_n'(t)\right) \tag{3.153}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem $n=0$ için çözüldüğünde elde edilen

$$\left(m_c(t)\right)_0 = \frac{1}{40}\mathrm{e}^{-t/4}\left(476\mathrm{e}^{t/4}+\mathrm{e}^{-79t/4}(-156+40t)\right)+\mathrm{e}^{-t/4}C_1 \tag{3.154}$$

ifadesi, $m_1 = \mathrm{m}_0 + \varepsilon(\mathrm{m}_c)_0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$m_1(t) = -1 + \varepsilon\left(\frac{1}{40}\mathrm{e}^{-t/4}(476\mathrm{e}^{t/4} + \mathrm{e}^{-79t/4}(-156 + 40t)) + \mathrm{e}^{-t/4}C_1\right) \tag{3.155}$$

ve $m_1(0) = -1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = -8 \tag{3.156}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için $m_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$m_1(t) = -1 + \frac{1}{4}\left(\frac{119}{10} - 8\mathrm{e}^{-t/4} + \mathrm{e}^{-20t}\left(-\frac{39}{10} + t\right)\right) \tag{3.157}$$

elde edilir.

$n = 1$ değerini (3.140) denkleminde yerine yazıp, denklemi $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için düzenlersek;

$$20\left(u_c(t)\right)_1 + k_1(t) + \left(u_c'(t)\right)_1 + 4(20m_1(t) + 20u_1(t) + u_1'(t)) = m_1(t) \tag{3.158}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülünce elde edilen

$$\left(u_c(t)\right)_1 = \mathrm{e}^{-20t}\left(8\mathrm{e}^{79t/4} - \frac{59\mathrm{e}^{20t}}{5} + 78t - 10t^2\right) + \mathrm{e}^{-20t}C_1 \tag{3.159}$$

değeri $\mathrm{u}_2 = \mathrm{u}_1 + \varepsilon(\mathrm{u}_c)_1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$u_2(t) = u_1(t) + \varepsilon\left(\mathrm{e}^{-20t}\left(8\mathrm{e}^{79t/4} - \frac{59\mathrm{e}^{20t}}{5} + 78t - 10t^2\right) + \mathrm{e}^{-20t}C_1)\right) \tag{3.160}$$

olup $u_2(0) = 1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = \frac{19}{5} \tag{3.161}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ için $u_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_2(t)=\frac{1}{80}\mathrm{e}^{-20t}\left(77+160\mathrm{e}^{79t/4}-157\mathrm{e}^{20t}+1560t-200t^2\right) \tag{3.162}$$

elde edilir. Yine $n=1$ ve $\varepsilon=\frac{1}{4}$ için (3.146) denklemi düzenlenirse;

$$20\left(k_c(t)\right)_1+\left(k_c'(t)\right)_1=4\left(-\frac{81}{4}k_1(t)+\frac{m_1(t)}{4}+20u_2(t)-k_1'(t)\right) \tag{3.163}$$

denklemi ve bu denklemin çözümünden de

$$\left(k_c(t)\right)_1=\mathrm{e}^{-20t}\left(8\mathrm{e}^{79t/4}-\frac{117\mathrm{e}^{20t}}{10}+76t+780t^2-\frac{200t^3}{3}\right)+\mathrm{e}^{-20t}C_1 \tag{3.164}$$

elde edilir. Bu ifade $k_2=\mathrm{k}_1+\varepsilon(\mathrm{k}_c)_1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2(t)=k_1(t)+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{-20t}\left(8\mathrm{e}^{79t/4}-\frac{117\mathrm{e}^{20t}}{10}+76t+780t^2-\frac{200t^3}{3}\right)+\mathrm{e}^{-20t}C_1\right) \tag{3.165}$$

ve $k_2(0)=0$ olduğundan

$$C_1=\frac{37}{10} \tag{3.166}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=\frac{1}{4}$ için $k_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$k_2(t)=\frac{1}{120}\mathrm{e}^{-20t}(-6+240\mathrm{e}^{79t/4}-234\mathrm{e}^{20t}+2310t+23400t^2-2000t^3) \tag{3.167}$$

olarak bulunur. $m_2(t)$ için $n=1$ değerini (3.153) eşitliğinde yerine yazıp denklemi $\varepsilon=\frac{1}{4}$ için düzenlersek;

$$\frac{\left(m_c(t)\right)_1}{4}+\left(m_c'(t)\right)_1=4\left(-\frac{79}{4}k_2(t)-\frac{m_1(t)}{4}+20u_2(t)-m_1'(t)\right) \tag{3.168}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$\left(m_c(t)\right)_1 = \frac{1}{120}\mathrm{e}^{-t/4}(-2364\mathrm{e}^{t/4} + 240t + \mathrm{e}^{-79t/4}(444 \\ +9120t + 93600t^2 - 8000t^3)) + \mathrm{e}^{-t/4}C_1 \tag{3.169}$$

elde edilir. Bu ifade, $m_2 = \mathrm{m}_1 + \varepsilon(\mathrm{m}_\mathrm{c})_1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$m_2(t) = m_1(t) + \varepsilon(\frac{1}{120}\mathrm{e}^{-t/4}(-2364\mathrm{e}^{t/4} + 240t \\ +\mathrm{e}^{-79t/4}(444 + 9120t + 93600t^2 - 8000t^3)) + \mathrm{e}^{-t/4}C_1 \tag{3.170}$$

olup $m_2(0) = -1$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = 16 \tag{3.171}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için $m_2(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$m_2(t) = \frac{1}{120}\mathrm{e}^{-20t}\left(-6 - 354\mathrm{e}^{20t} + 120\mathrm{e}^{79t/4}\left(2 + \frac{t}{2}\right) + 2310t + 23400t^2 - 2000t^3\right) \tag{3.172}$$

elde edilir.

$n = 2$ değerini (3.140) eşitliğinde yerine yazıp denklemi $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ için düzenlersek;

$$20\left(u_c(t)\right)_2 + k_2(t) + \left(u_c'(t)\right)_2 + 4(20m_2(t) + 20u_2(t) + u_2'(t)) = m_2(t) \tag{3.173}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülerek elde edilen

$$\left(u_c(t)\right)_2 = \mathrm{e}^{-20t}\left(\frac{98\mathrm{e}^{20t}}{5} - 74t - 760t^2 - 5200t^3 + \frac{1000t^4}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{79t/4}(32 + 4t)\right) + \mathrm{e}^{-20t}C_1 \tag{3.174}$$

değeri

$$u_3 = u_2 + \varepsilon(u_\mathrm{c})_2 \tag{3.175}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(t)=u_2(t)+\varepsilon\left(\mathrm{e}^{-20t}\left(\frac{98\mathrm{e}^{20t}}{5}-74t-760t^2-5200t^3+\frac{1000t^4}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{79t/4}(32+4t)\right)+\mathrm{e}^{-20t}C_1\right) \tag{3.176}$$

ve $u_3(0)=1$ olduğundan

$$C_1=-\frac{18}{5} \tag{3.177}$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon=1$ için $u_3(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}u_3(t)=&\frac{1}{240}\mathrm{e}^{-20t}(15+705\mathrm{e}^{20t}+240t-46200t^2\\&-312000t^3+20000t^4-480\mathrm{e}^{79t/4}(-1+\frac{8+t}{4}))\end{aligned} \tag{3.178}$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edersek;

$$\begin{aligned}k_3(t)=&\frac{1}{60}\mathrm{e}^{-20t}(-\frac{111}{2}+\frac{351\mathrm{e}^{20t}}{2}+75t+600t^2-77000t^3\\&-390000t^4+20000t^5-120\mathrm{e}^{79t/4}(-1+\frac{8+t}{4}))\end{aligned} \tag{3.179}$$

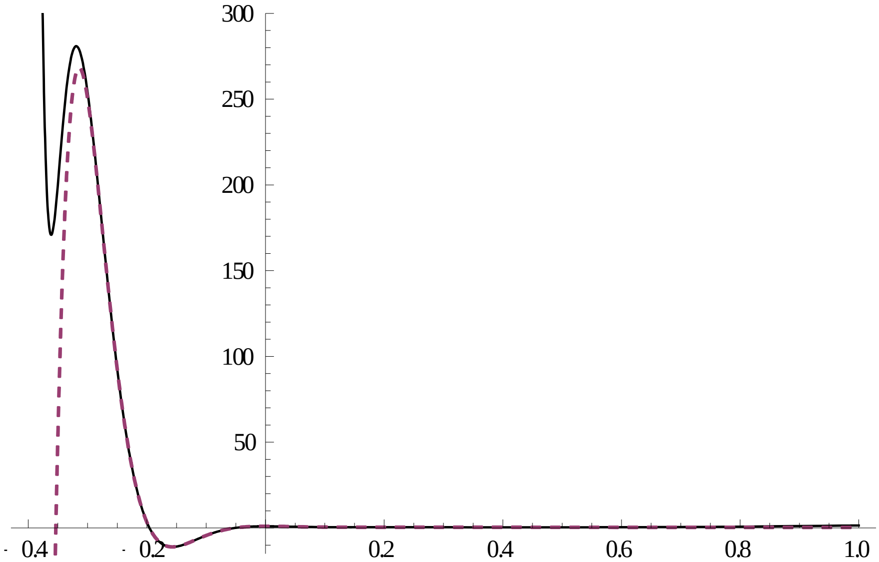
ve

$$\begin{aligned}m_3(t)=&\frac{1}{671846400}\mathrm{e}^{-20t}(-2039683680\mathrm{e}^{20t}+\frac{87687637\mathrm{e}^{40t}}{4}\\&+51200\mathrm{e}^{79t/4}(26896+6642t)+2187(-\frac{56991}{4}+5737290t\\&+54150600t^2-96808000t^3-992400000t^4+50560000t^5))\end{aligned} \tag{3.180}$$

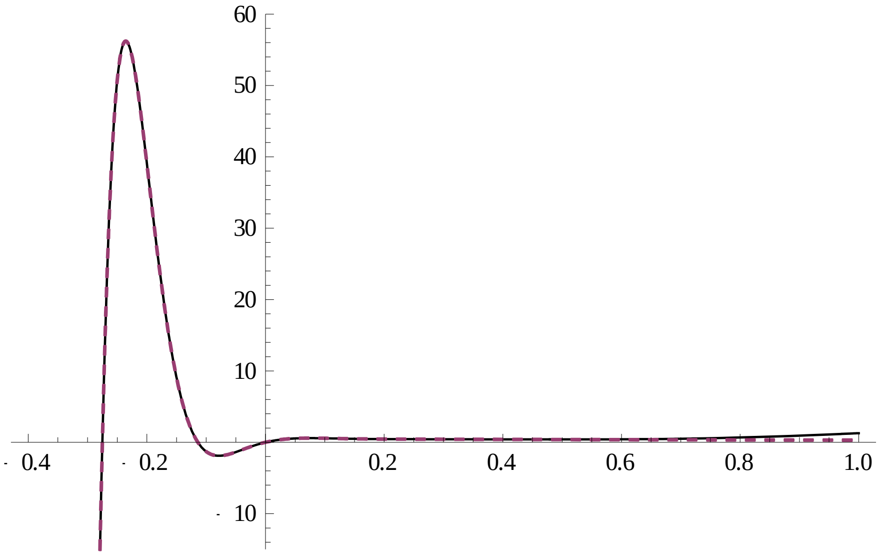
olarak elde edilir. Bu şekilde devam ettiğimizde bulunan $u_9(t)$, $k_9(t)$ ve $m_9(t)$ değerlerinin

$$\begin{aligned}\mathrm{y}_1(\mathrm{t})=&\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-t}{2}}+e^{-20t}(cos20t+sin20t)\right)\\ \mathrm{y}_2(\mathrm{t})=&\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-t}{2}}-e^{-20t}(cos20t+sin20t)\right)\\ \mathrm{y}_3(\mathrm{t})=&-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{-t}{2}}+e^{-20t}(cos20t-sin20t)\right)\end{aligned} \tag{3.181}$$

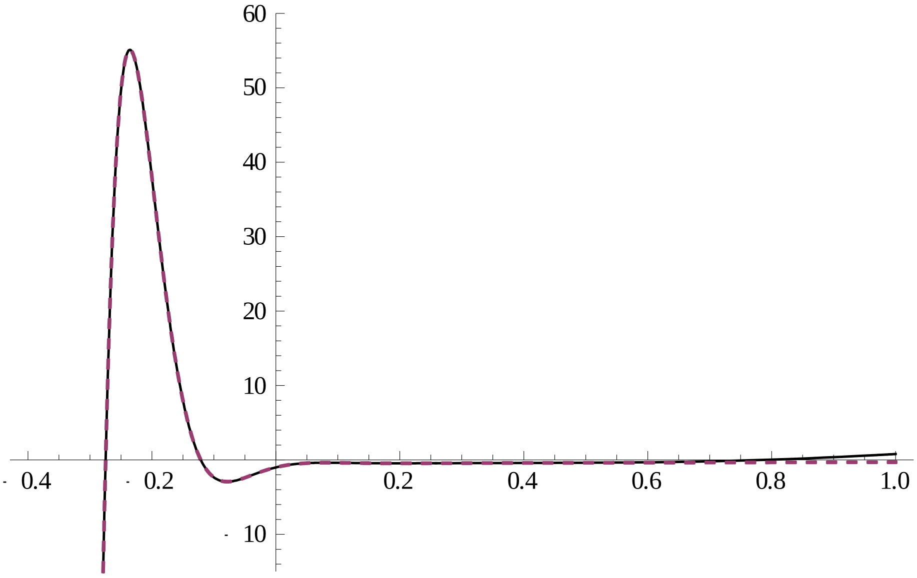
tam çözümleri ile karşılaştırma grafikleri aşağıda Şekil c.), Şekil d.) ve Şekil e.) de verilmiştir. Ayrıca Tablo 3.1, Tablo 3.2 ve Tablo 3.3 de gerekli karşılaştırmalar yapılmıştır.



Şekil c.) $u_9(t)$ *için* $\begin{cases} \text{———————} & PIA(1.1)\ \text{çözümü} \\ \text{- - - - - - - -} & Tam\ \text{çözüm} \end{cases}$



Şekil d.) $k_9(t)$ *için* $\begin{cases} \text{———————} & PIA(1.1)\ \text{çözümü} \\ \text{- - - - - - - -} & Tam\ \text{çözüm} \end{cases}$



Şekil e.) $m_9(t)$ *için* — *PIA*(1.1) *çözümü*; - - - - *Tam çözüm*

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında lineer ve lineer olmayan bazı diferansiyel denklem sistemlerinin Pertürbasyon-İterasyon Algoritması yöntemleri kullanılarak yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Bulunan bu çözümler tam çözüm ve diğer bazı metotlar ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçların hayli örtüştüğü gösterilmiştir. Ayrıca söz konusu metot kullanılarak yüksek mertebeden ve farklı tipteki diferansiyel denklemlerin de yaklaşık çözümlerinin bulunabileceğini düşünüyoruz.

Tablo 1.1 Örnek 1 de verilen $y_1(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ	ADOMİAN' IN AYRIŞIM YÖNTEMİ	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ
x	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$N=5$	$N=4$	$N=7$
0.00	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
0.02	0.9801986733067553	0.9801986733067553	0.9801986733067553	0.980198673306	1.019798673333	0.980198673306
0.04	0.9607894391523232	0.9607894391523232	0.9607894391523232	0.960789439146	1.039189440000	0.960789439152
0.06	0.9417645335842487	0.9417645335842487	0.9417645335842487	0.941764533520	1.058164540000	0.941764533584
0.08	0.9231163463866358	0.9231163463866358	0.9231163463866358	0.923116346026	1.076716373333	0.923116346386
0.10	0.9048374180359595	0.9048374180359595	0.9048374180359595	0.904837416666	1.094837500000	0.904837418035

Tablo 1.2 Örnek 1 de verilen $y_2(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ	ADOMİAN' IN AYRIŞIM YÖNTEMİ	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ
x	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$N=5$	$N=4$	$N=7$
0.00	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.02	0.019801326693244747	0.01979869965589609	0.0197987000737605	0.019798700106	0.019798700000	0.019798700073
0.04	0.03921056084767682	0.03918985573634837	0.03918986883198805	0.039189870080	0.039189866666	0.039189868825
0.06	0.05823546641575128	0.05816661760583264	0.05816671499608006	0.058166725919	0.058166699999	0.058166714891
0.08	0.07688365361336424	0.07672285532319822	0.07672325723862805	0.076723309226	0.076723200000	0.076723256464
0.10	0.09516258196404048	0.09485312243111199	0.09485432359915791	0.094854500000	0.094854166666	0.094854319940

Tablo 1.3 Örnek 1 de verilen $y_3(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ	ADOMİAN’ IN AYRIŞIM YÖNTEMİ	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ
x	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$N=5$	$N=4$	$N=7$
0.00	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.02	0.0000026270373489900058	0.00000262661948280396	0.00000262661953030458	0.000002626613	0.000002626666	0.000002626619
0.04	0.0000207051113285672227	0.000020692015689327548	0.000020692021610481577	0.000020691626	0.000020693333	0.000020692021
0.06	0.00006884880991875342	0.00006875141967199738	0.00006875151795154252	0.000068747039	0.000068759999	0.000068751523
0.08	0.00016079829016590885	0.00016039637473586055	0.00016039709089168158	0.000160372053	0.000160426666	0.000160397148
0.10	0.000309459532928269	0.00030825836488279634	0.0003082616862567552	0.000308166666	0.000308333333	0.000308262023

Tablo 2.1 Örnek 3 de verilen $y_1(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	PIA(1,1)			TAM ÇÖZÜM	n=3 için PIA(1.1) in Mutlak Hataları
t	$n=0$	$n=1$	$n=2$		
1	0.998003992	0.1344105551393	0.1353363579074	0.135335	1.35585×10^{-9}
1.5	0.998003992	0.0490985653046	0.0497876612721	0.049787	6.13306×10^{-10}
2	0.998003992	0.0178520782126	0.0183159293496	0.018316	2.5106×10^{-10}
2.5	0.998003992	0.00644086352741	0.00673808026557	0.006738	9.79936×10^{-11}
3	0.998003992	0.00229369434372	0.0024788107966	0.002479	3.72914×10^{-11}

Tablo 2.2 Örnek 3 de verilen $y_2(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	PIA(1,1)			TAM ÇÖZÜM	n=3 için PIA(1.1) in Mutlak Hataları
t	$n=0$	$n=1$	$n=2$		
1	0.3666184570458948	0.36788090325964407	0.3678794393275696	0.367879	2.51399×10^{-12}
1.5	0.22157996667018895	0.22313148963442472	0.22313015877371103	0.223130	1.67649×10^{-12}
2	0.1336096754188877	0.13533635688131393	0.1353352823089193	0.135335	1.05055×10^{-12}
2.5	0.08025299663112341	0.08208581069904845	0.08208499802694272	0.082085	6.44651×10^{-13}
	0.04789053504590566	0.049787657261860435	0.04978706799333589	0.049787	3.92644×10^{-13}

Tablo 3.1 Örnek 4 de verilen $y_1(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	PIA(1,1).			TAM ÇÖZÜM	DTM ÇÖZÜMÜ	PIA(1.1) in Mutlak Hataları
x	$n=0$	$n=1$	$n=2$		$N=16$	$n=8$
0.000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	2.22045×10^{-16}
0.002	0.999509867989404	0.998721265374999	0.9987213699447446	0.9987213699391844	0.998721369916	1.11022×10^{-16}
0.004	0.9990389543298329	0.9959666334281889	0.9959682544345537	0.9959682540904002	0.995968252667	0
0.006	0.9985865054589644	0.9918530374722888	0.9918609875687172	0.991860983780	0.991860967751	0
0.008	0.9981517973620776	0.9864904822871393	0.9865148242718638	0.986514803703	0.986514714671	1.11022×10^{-16}
0.010	0.9977341344134748	0.9799824087944149	0.9800399844911215	0.980039908675	0.980039572929	2.22045×10^{-16}

Tablo 3.2 Örnek 4 de verilen $y_2(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	PIA(1,1).			TAM ÇÖZÜM	DTM ÇÖZÜMÜ	PIA(1.1) in Mutlak Hataları
x	$n=0$	$n=1$	$n=2$		$N=16$	$n=8$
0.000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0
0.002	0.038710691546060993	0.03870045906536713	0.03870045985946798	0.038700459859	0.038700459859	4.85723×10^{-17}
0.004	0.07588467861941672	0.07580427936247926	0.07580430490020712	0.075804304896	0.075804304896	1.38778×10^{-17}
0.006	0.11158295485584713	0.11131852603257752	0.11131871495657254	0.111318714892	0.111318714892	1.38778×10^{-17}
0.008	0.14586409333587635	0.14525443424645113	0.14525520634402836	0.145255205876	0.145255205876	2.77556×10^{-17}
0.010	0.17878434263166265	0.1776269812810017	0.17762926348813693	0.177629261332	0.177629261332	2.77556×10^{-17}

Tablo 3.3 Örnek 4 de verilen $y_3(x)$ in çözümlerinin karşılaştırılması

	PIA(1,1).			TAM ÇÖZÜM	DTM ÇÖZÜMÜ	PIA(1.1) in Mutlak Hataları
x	$n=0$	$n=1$	$n=2$		$N=16$	$n=8$
0.000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	0
0.002	-0.9602895584122775	-0.9603000408096535	-0.9603000399682006	-0.960300039973	-0.960300039973	1.11022×10^{-16}
0.004	-0.9221163210473332	-0.922197719637854	-0.9221976934103475	-0.922197693770	-0.922197693770	1.11022×10^{-16}
0.006	-0.8854192940195745	-0.8856859705941093	-0.8856857765738516	-0.885685780611	-0.885685780611	1.11022×10^{-16}
0.008	-0.8501399039987897	-0.85075355775888	-0.8507527611728868	-0.850752783467	-0.850752783467	0
0.010	-0.8162219021632574	-0.817385503107011	-0.8173831342783261	-0.817383217859	-0.817383217859	0

KAYNAKLAR

1. Nayfeh, A. H., Perturbation Methods, Wiley-Interscience, New York, 1973.
2. Jordan, D.W., Smith, P., Nonlinear Ordinary Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 1987.
3. He, J. H., Iteration Perturbation Method for Strongly Nonlinear Oscillators, J. Sound Vibr. 7, pp. 631-642, 2001.
4. Mickens, R.E., Iteration Procedure for Determining Approximate Solutions to Non-linear Oscillator Equations, J. Sound Vibr. 116, pp. 185–187, 1987.
5. Mickens, R.E., A Generalized Iteration Procedure for Calculating Approximations to Periodic Solutions of ‘‘Truly Nonlinear Oscillators’’, J. Sound Vibr. 287, pp. 1045–1052, 2005.
6. Mickens, R.E., Iteration Method Solutions for Conservative and Limit-cycle $x^{1/3}$ Force Oscillators, J. Sound Vibr. 292, pp. 964–968, 2006.
7. Mickens, R.E., Generalized Harmonic Balance/numerical Method for Determining Analytical Approximation to the Periodic Solutions of the $x^{4/3}$ Potential, Journal of Sound and Vibration, 250, pp. 951-954, 2002.
8. Hu, H., Xiong, Z.G., Oscillations in an $x^{(2m+1)/(2n+1)}$ Potential, J. Sound Vibr. 259 8, pp. 977-980, 2003.
9. He, J. H., Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems, Dissertation. De-verlag Im Internet GmbH, Berlin, 2006.
10. Wang, S.Q. and He, J.H., NonlinearOoscillator with Discontinuity by Parameter-Expansion Method, Chaos Solitons & Fractals 35, pp. 688-691, 2008.
11. He, J. H., Modified Linstedt–Poincare Methods for Some Non-linear Oscillations. Part I: Expansion of Constant, J. Non-linear Mech. 37, pp. 309–314, 2002.
12. Ramos, J.I., On Linstedt–Poincare´ Techniques For the Quintic Duffing Equation, Appl. Math. Comput., in Press, Doi:10.1016/j.amc.2007.03.050, 2007.
13. Öziş, T., Yıldırım, A., Determination of Periodic Solution of a u1/3 Force by He’s Modified Linstedt–Poincare´ Method, J. Sound Vibr. 301, pp. 415–419, 2007.
14. Mickens, R.E., Oscillations in an 4x 3 potential, Journal of Sound and Vibration 246(2), pp. 375-378, 2001.

15. J.H. He, Linearized Perturbation Technique and it's Applications to Strongly Nonlinear Oscillators, Computers and Mathematics with Applications 45 1 8, 2003.
16. He, J.H., Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear Equations, International Journal of Modern Physics B 20 1141 1199, 2006.
17. He, J.H., Wu, G. C., Austin, F., The Variational Iteration Method Which Should be Followed, Nonlinear Science Letters A 1 1 30, 2010.
18. Aksoy Y., Pakdemirli M., New Perturbation-Iteration Solutions for Bratu-type Equations, Computers & Mathematics with Applications 59: 2802-2808, 2010.
19. Pakdemirli M, Aksoy Y., Boyacı H., A New Perturbation-Iteration Approach for First Order Differential Equations, Mathematical and Computational Applications, Vol. 16, No. 4, pp. 890-899, 2011.
20. Sezer, M., Diferansiyel Denklemler II ve Çözümlü Problemler, İzmir, 1995.
21. Balcı, M., Matematik Analiz Cilt 2, Balcı Yayınları, Ankara, 1997.
22. Bronson, R., Schaum's Outline of Differential Equations, Mc-Graw Hill, New York, 1994.
23. Edwards, C. H., Penney, D.E., Differential Equations and Boundary Value Problems, Pearson Education, New York, 2000.
24. Arfken, G. B., Weber H. J., Mathematical Methods for Physicists, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Ankara'da doğdu. İlkokulu Nevşehir'de, ortaokulu Erzurum'da, liseyi Malatya'da okudu ve 1994 yılında Malatya Lisesi'nden mezun oldu.

1995-1996 yılları arasında, Amerika'da bir üniversitede 1 yıl süreyle İngilizce ve mühendislik eğitimi gördü.

1996 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne başladı ve 2000 yılında mezun oldu.

2000-2001 Öğretim yılında Nevşehir Derinkuyu ilçesi Özlüce Köyü İlköğretim Okulu'nda bir dönem süresince Matematik ve İngilizce öğretmenliği yaptı.

2001 yılı sonunda Amerika'da South Carolina Clemson University' ye yüksek lisans için başvuru yaptı ve bu üniversiteye burslu araştırma görevlisi olarak kabul edildi. Ancak geçirdiği ciddi bir rahatsızlık neticesinde eğitimini yarıda bırakıp yurda geri dönmek zorunda kaldı.

2002 yılında Nevşehir Özel Altınyıldız Koleji' nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı.

2006 yılında vatani görevini İzmir Bornova 57. Topçu Tugayı'nda yerine getirdi.

Evli ve 2 çocuk babası olup halen aynı okulda öğretmenlik görevini devam ettirmektedir.