T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OPERATÖRLER VE ÇEKİRDEK PROBLEMİ

Tezi Hazırlayan
Nurhan ŞENOL

Tezi Yöneten
Prof. Dr. İhsan SOLAK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2013
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OPERATÖRLER VE ÇEKİRDEK PROBLEMİ

Tezi Hazırlayan
Nurhan ŞENOL

Tezi Yöneten
Prof. Dr. İhsan SOLAK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2013
NEVŞEHİR

Prof. Dr. İhsan SOLAK danışmanlığında **Nurhan ŞENOL** tarafından hazırlanan **"Lineer Operatörler ve Çekirdek Problemi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

11 / 03 / 2013

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye: Doç. Dr. Necdet BATIR

Üye: Doç. Dr. Tacettin YILDIRIM

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 11.03.2013 tarih ve 2013/08-02 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

11 / 03 / 2013

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Lineer Operatörler ve Çekirdek Problemi" konulu tez çalışmasının belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde ilgi ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

LİNEER OPERATÖRLER VE ÇEKİRDEK PROBLEMİ

Nurhan ŞENOL
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2013
Tez Danışman: Prof. Dr. İhsan SOLAK

ÖZET

Tezin ilk bölümünde genel olarak lineer uzay, lineer operatör ve çekirdek ile ilgili literatür süreci verildi.

İkinci bölümde lineer, normlu ve Hilbert uzaylarında tanımlı lineer operatörlerle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde çekirdek ile ilgili temel tanım ve teoremler detaylı bir şekilde çalışıldı.

Anahtar Kelimeler: Lineer uzay, lineer operatör, fonksiyonel, çekirdek.

LINEAR OPERATORS AND CORE PROBLEM

Nurhan ŞENOL
Nevsehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, January 2013
Thesis Supervisor: Prof. Dr. İhsan SOLAK

ABSTRACT

In the first section of this thesis, the general progress of linear space, linear operatör and core have discussed.

In the second section, the basic definitions and theorems about linear operators of on linear, normed and Hilbert spaces have given.

In the third section, the basic definitions and theorems about core have introduced and studied detailed.

Keywords: Linear space, linear operatör, functional, core.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA ve SİMGELER

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$\|.\|$: Norm fonksiyonu

$\langle A \rangle$: A kümesinin gerdiği uzay

$BoyV$: V uzayının boyutu

$G(T)$: Tanım uzayındaki noktaların T dönüşümü altındaki görüntüler kümesi

$D(T)$: T dönüşümünün değer uzayı

$ÇekT$: T dönüşümünün çekirdeği

$R(T)$: T dönüşümünün görüntü uzayı

$u+v$: U ve V alt uzaylarının toplamı

$u \oplus v$: U ve V alt uzaylarının direkt toplamı

u^s : U alt uzayının sıfırlayıcılarının uzayı

$\langle x, y \rangle$: x ve y vektörlerinin iç çarpımı

$x \perp y$: x vektörü y vektörüne diktir

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE SONUÇLAR

1.1 Giriş

Lineer uzay matematiğin hemen her dalında geçen önemli bir konudur. Teorik ve pratik birçok problemde, elemanları fonksiyonlar, sayı dizileri, iki veya üç boyutlu uzaylardaki vektörler olan kümelerle karşılaşırız. Aynı zamanda bu kümeler bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıdır. İşte karşılaşılan bu gibi problemler lineer uzay kavramının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Lineer uzay fikri cebirsel bir soyutlama ile Kartezyen koordinat sisteminin (Öklid geometrisindeki) bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir, [3-4].

Oldukça kullanışlı olan bu yapıyı daha da zenginleştirebilmek için, bu uzaylar arasında lineer operatörler, üzerinde bir norm veya bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanmıştır [9]. Benzer şekilde metrik lineer uzaylar [1], topolojik vektör uzaylar [12], baz tanımları [2], çekirdek ve sıfırlayıcılar [4-5], lineer operatör yerine sonsuz bir matris almak suretiyle, dizi uzaylarında çekirdek problemleri [13-15], son zamanlarda bu konudaki, önemli çalışmaları oluşturmaktadır. Biz bu çalışmada iki uzay arasındaki dönüşümü lineer operatör veya özel bir hali olan lineer fonksiyonel alarak çekirdek problemini araştırmaya çalıştık.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde 3. Bölümde ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Önce bir küme üzerindeki en önemli yapılardan birisi olan lineer uzay tanımını vereceğiz.

Lineer uzay (diğer adıyla vektör uzayı) matematiğin hemen her dalında hatta fizikte geçen önemli bir matematik yapıdır.

F cismi üzerinde bir lineer uzay, boş olmayan bir L kümesi ile iki işlemden ibarettir.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X \text{ (toplama)}$$

ve

$$\bullet : F \times X \to X \text{ (skalerle çarpma)}$$

dönüşümleri her $a, b \in F$ ve $x, y \in X$ için

$L1)$ $x + y = y + x$

$L2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$

$L3)$ $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

$L4)$ $\forall\ x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $(-x)\in X$ vardır.

$L5)$ $1\cdot x = x$

$L6)$ $a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$

$L7)$ $(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x$

$L8)$ $a\cdot(b\cdot x)=(a\cdot b)\cdot x$

şartları sağlanıyorsa X kümesine F cismi üzerinde lineer uzay denir [9].

Bir lineer uzay genellikle $(L,+,\cdot)$ ile gösterilir. Burada F nin elemanları skaler, L nin elamanları ise vektörlerdir.

Tanım 2.2 (Alt uzay). L, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve M, L nin bir alt kümesi olsun. Her $a\in F$ ve her $x,y\in X$ için

1) $x+y\in M$ ve

2) $a\cdot x\in M$

şartları sağlanıyorsa M ye L nin bir alt uzayı denir [9]. Bu iki şart $\alpha,\beta\in F$ olmak üzere $\alpha x+\beta y\in M$ olmasına denktir.

Tanım 2.3 (Metrik uzay). X boş olmayan bir küme olsun. $d: X\times X\to\mathbb{R}$ ile tanımlı d fonksiyonu her $x,y\in X$ için

$M1)$ $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$M2)$ $d(x,y)=d(y,x)$ (simetri özelliği)

$M3)$ $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d 'ye X 'de bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir [9].

Tanım 2.4. (X,d) metrik uzay, $r>0$ olacak şekilde bir reel sayı ve $x_0\in X$ ise

$$D(x_0,r)=\{x\in X : d(x,x_0)<r\}$$

ile tanımlı $D(x_0,r)$ kümesine x_0 merkezli r-yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{D}(x_0,r)=\{x\in X : d(x,x_0)\le r\}$$

ile tanımlı $\overline{D}(x_0,r)$ kümesine x_0 merkezli r-yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0,r)=\{x\in X : d(x,x_0)=r\}$$

ile tanımlı $S(x_0,r)$ kümesine x_0 merkezli r-yarıçaplı yuvar yüzeyi denir [9].

Tanım 2.5. (X,d) bir metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. X'in bir x_0 noktasını (A'da veya değil) alalım. Eğer x_0'ın her bir komşuluğunda x_0'dan farklı en az bir $y\in A$ noktası varsa, x_0 noktasına A'nın bir yığılma noktası denir. A'nın noktaları ile, A'nın yığılma noktalarından oluşan kümeye A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $\overline{A}$, A'yı kapsayan en küçük kapalı kümedir [7].

Tanım 2.6. X bir metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $x\in X$ için $D(x,r)\subset A$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa A ya X de bir açık küme denir. X'in B alt kümesinin X'deki tümleyeni, yani $B^t = X-B$, X'de açık ise B'ye kapalı küme denir [7].

Tanım 2.7. (x_n), (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n>n_0$ olduğunda

$$d(x_n,x_0)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine X'de yakınsaktır ve x_0'a da dizinin limiti denir. Bu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ veya } \quad x_n\to x_0 \ (n\to\infty)$$

ile gösterilir [7].

Tanım 2.8. (x_n)**,** X metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m,n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine X metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Eğer X deki her Cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsak ise, (X,d) metrik uzayına tamdır denir [8].

Tanım 2.9. N bir lineer uzay ve

$$\|.\| = N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun $x \in N$ deki değeri $\|x\|$ olmak üzere, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de bir norm, $(N, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

$N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad (\alpha \in F)$

$N3)$ $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

[11].

Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir. Aşağıda vereceğimiz tanımda da görüleceği gibi, bu operatörlerden lineer olanlar oldukça önemlidir.

Tanım 2.10. L ve L' aynı skaler F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to L'$ operatörü

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

2) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad (\alpha \in F)$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir [9].

Kolayca görüleceği gibi 1) ve 2) şartları

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y),\quad (\alpha,\beta\in F)$$

şartına denktir.

Şimdi özel lineer operatörler denilen şunları verelim:

1) L ve L' iki lineer uzay θ, L nin θ' de L' nün özdeş elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned}&T:L\to L'\\&T(x)=\theta'\end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned}&T(x+y)=\theta'=\theta'+\theta'=T(x)+T(y)\\&T(\lambda x)=\theta'=\lambda T(x)\end{aligned}$$

olduğundan T bir lineer operatör olup, bu operatöre "sıfır operatörü" denir [10].

2)
$$\begin{aligned}&T:L\to L'\\&T(x)=x\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha x+\beta y=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

olduğundan, T lineer olup bu operatöre "özdeş operatörü " denir [9].

3) L bir lineer uzay ve α herhangi bir sabit skaler olsun.

$$\begin{aligned}&T:L\to L\\&T_\alpha(x)=\alpha x\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$T_\alpha(\lambda x)=\alpha(\lambda x)=(\alpha\lambda)x=\lambda(\alpha x)=\lambda T_\alpha(x)$$

ve

$$T_\alpha(x+y)=\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y=T_\alpha(x)+T_\alpha(y)$$

olduğundan T lineer operatördür. Bu operatöre L de “skaler operatör” denir [9].

Tanım 2.11. L ve L' iki lineer uzay olsun. $T:L\to L'$ lineer dönüşümü bire-bir ve üzerine ise, T ye “lineer izomorfi”, L ve L' ne de izomorf lineer uzaylar denir. Bu durum $L\cong L'$ ile gösterilir [11].

Örneğin $\alpha\neq 0$ olmak üzere T_α skaler operatörü bir lineer izomorfidir. Çünkü

$$T_\alpha(x)=T_\alpha(y) \text{ ise } \alpha x=\alpha y\Rightarrow x=y$$

ve

$$T_\alpha(\alpha^{-1}y)=y$$

olduğundan T_α skaler operatörü bire-bir ve üzerinedir.

Teorem 2.1. L ve L' aynı bir skaler cisim üzerinde iki lineer uzay ve lineer operatör olsun. Bu durumda

1) $T(\theta)=\theta'$

2) $T(-x)=-T(x)$

3) $T(x-y)=T(x)-T(y)$

4) $T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(x_i)$

dir [11].

Teorem 2.2. L ve L' aynı bir skaler cisim üzerinde iki lineer uzay ve $T:L\to L'$ üzerine bir lineer operatör olsun. Bu durumda

1) V , L nin bir alt uzayı ise $T(V)$ de L' nün bir alt uzayıdır. Özellikle $T(L), L'$ nün bir alt uzayıdır

2) $Boy L = n < \infty$ ise $Boy T(L) \leq n$

dir [11].

Teorem 2.3. L ve L' aynı bir skaler cisim üzerinde iki lineer uzay ve $T : L \to L'$ üzerine bir lineer operatör olsun. Bu takdirde

1) T^{-1} ters dönüşümü varsa lineerdir.

2) $Boy L = n < \infty$ ve T^{-1} varsa $Boy L' = Boy L$

dir [9].

Teorem 2.4. L ve L' aynı bir skaler cisim üzerinde iki lineer uzay ve

$$L(L, L') = \{T \mid T : L \to L' \text{ lineer}\}$$

olsun. $T, T_1, T_2 \in L(L, L')$ olmak üzere

$$(T_1 + T_2)(x) = (T_1)(x) + (T_2)(x)$$

ve

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

şeklinde tanımlanırsa $L(L, L')$ lineer uzaydır [8].

2.2. Sürekli ve Sınırlı Lineer Operatörler

Tanım 2.12. N ve N' normlu uzaylar ve $T : N \to N'$ lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\| T(x) \|' \leq K \cdot \| x \|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir [10].

Burada $\| \cdot \|'$ N' deki, $\| \cdot \|$ ise N deki normdur. T nin normunu

$$\| T \| = \sup \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} : x \in N, x \neq \theta \right\}$$

yazar ve K yerine bu şartı sağlayan K ların en küçüğü olan $\|T\|$ koyarsak

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

yazabiliriz [10].

Örneğin N normlu bir uzay ve $N \neq \{\theta\}$ olmak üzere

$$I : N \to N$$
$$I(x) = x$$

şeklinde tanımlanan özdeş operatörü lineer olup,

$$\|I\| = \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq \theta}} \left\{ \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq \theta}} \{1\} = 1$$

ve böylece

$$\frac{\|I(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|I(x)\| \leq \|x\|$$

olduğundan I sınırlıdır [11].

Diğer taraftan $J = [0,1]$ kapalı aralığında tanımlı polinomların kümesi N olsun.

$$\|\cdot\| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\|P\| = \sup\{IP(x)I\}$$

olarak tanımlanırsa $(N, \|\cdot\|)$ normlu uzay olur. P', P nin türevini göstermek üzere

$$T : N \to N$$
$$T(P) = P'$$

şeklinde tanımlanırsa T nin lineer olduğu açıktır. Fakat T sınırlı değildir. Örneğin $P_n(x) = x^n$ polinomunu alalım.

$$\|P_n\| = \sup_{x \in J}\{IP_n(x)I\} = \sup_{x \in J}\{Ix^nI\} = 1$$

ve

$$[T(P_n)](x) = P_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

dir. Böylece n keyfi olduğundan

$$\frac{\| T(P_n) \|}{\| P_n \|} = n \leq K$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı yoktur. O halde T sınırlı değildir [11].

Teorem 2.5. N ve N' normlu uzaylar ve $T: N \to N'$ sınırlı lineer operatör olsun. $\| T \|$, T nin normu olmak üzere

$$\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\}$$

$$= \sup\{ \| \mathrm{T(x)} \| : \| \mathrm{x} \| = 1\}$$

$$= \sup\{ \| \mathrm{T(x)} \| : \| \mathrm{x} \| < 1\}$$

$$= \inf\{\mathrm{K} : \| \mathrm{T(x)} \| \leq \mathrm{K} \cdot \| \mathrm{x} \| \}$$

dir [9].

Tanım 2.13. N ve N' normlu uzaylar , $T: N \to N'$ lineer operatör ve $x_0 \in N$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\| x - x_0 \| < \delta$ için $\| T(x) - T(x_0) \|' < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye $x_0 \in N$ de süreklidir denir [].

T , N nin her noktasında sürekli ise, N de süreklidir.

T nin lineer olması durumunda sınırlılık ve süreklilik kavramları çakışıktır [9].

Teorem 2.6. $(N, \| \cdot \|)$ ve $(N', \| \cdot \|')$ normlu uzaylar ve $T: N \to N'$ lineer operatör olsun. Bu takdirde aşağıdakilerden her biri diğerine denktir.

1) T süreklidir.

2) T , $x_0 \in N$ de süreklidir.

3) T , $\theta \in N$ de süreklidir.

4) $\{\| T(x) \|' : \| x \| \leq 1\}$ reel sayıların sınırlı bir alt kümesidir.

5) T sınırlıdır. Yani her $x \in N$ için $\| T(x) \|' \leq K \cdot \| x \|$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı vardır [9].

Bu teoreme göre bir lineer operatör ya N nin tamamında sürekli veya N nin tamamında süreksizdir.

Teorem 2.7. $(X, \| \cdot \|)$ ve $(Y, \| \cdot \|')$ normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$T^{-1} : T(X) \to X$$

ters dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$

$$\alpha \| x \| \leq \| T(x) \|'$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısının olmasıdır [10].

Teorem 2.8. N ve N' normlu uzaylar

$$C(N, N') = \{T \mid T : N \to N' \text{ sürekli lineer operatör}\}$$

olsun. Bu taktirde

1) $C(N, N')$, $L(N, N')$ nün lineer alt uzayıdır.

2) $C(N, N')$, $\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\}$ normuna göre lineer uzaydır [10].

Teorem 2.9. $T_1, T_2 \in C(N, N)$ olmak üzere $(T_1 \cdot T_2)(x) = T_1(T_2(x))$ olarak tanımlanırsa

1) $T_1 \cdot T_2 \in C(N, N)$

2) $\| T_1 \cdot T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \|$ ve $\| T_1^n \| \leq \| T_1 \|^n$

dir [12].

Tanım 2.14. $F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere L, F üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$f : L \to F$$

operatörüne "fonksiyonel" denir. Eğer f lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir [11].

Dolayısıyla lineer fonksiyonel, değer kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olan özel lineer operatörlerdir.

Lineer uzayın yerine, normlu uzayın alınması durumunda lineer fonksiyoneller, lineer operatörler olarak sınırlı ise, yani

$$\left|f(x)\right| \leq K \cdot \| x \|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa f ye sınırlı lineer fonksiyonel denir [11].

f fonksiyonelinin normunu, operatörlerde olduğu gibi

$$\| f \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\left|f(x)\right|\}$$

şeklinde tanımlarsak

$$\left|f\right| \leq \| f \| \cdot \| x \|$$

olur [11].

2.3. Germe Aksiyomları ve Boyut

V bir lineer uzay ve $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ olsun.

$G1)$ $A \subset V$

$G2)$ Her $v \in V$ vektörü $a_1, a_2, ..., a_p$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$G1)$ ve $G2)$ şartları sağlanıyorsa A kümesi V uzayını gerer (doğurur) denir ve $V = \langle A \rangle$ veya $V = span\{A\}$ ile gösterilir [6].

Tanım 2.15. V, F skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı, $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ V nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği ancak ve ancak $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ olması halinde sağlanıyorsa A kümesi lineer bağımsızdır denir [6] .

Tanım 2.16. V bir lineer uzay ve $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ de V uzayını geren lineer bağımsız bir küme olsun. Bu durumda B kümesine, V uzayının bir bazı (veya tabanı) ve B kümesindeki vektörlerin m sayısına da V uzayının boyutu denir ve $BoyV = m$ ile gösterilir [6].

Şimdi şu teoremi verelim

Teorem 2.10. $T : L \to L'$ lineer operatör ve $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, L nin bir bazı olsun. Bu takdirde $y_i = T(e_i)$ biliniyorsa T bir tek olarak belirlidir [6].

Teorem 2.11. N normlu bir uzay, $x_0 \in N$ ve $x_0 \neq \theta$ olsun. Bu takdirde $f_0(x_0) = \| x_0 \|$ ve $\| f_0 \| = 1$ olacak şekilde bir f_0 sınırlı lineer fonksiyoneli vardır [6].

Teorem 2.12. N normlu bir uzay, M, N nin kapalı bir alt uzayı ve $x_0 \notin M$ olsun. Bu takdirde $f_0(M) = 0$ ve $f_0(x_0) \neq 0$ olacak şekilde bir f_0 sınırlı lineer fonksiyoneli vardır [9].

N ve N' birer normlu uzay olmak üzere

$$N \times N' = \{(x, y) I x \in N, y \in N'\}$$

kümesini alalım. $N \times N'$ uzayındaki cebirsel işlemleri, α bir skaler olmak üzere

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ve

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\| \cdot \| : N \times N' \to \mathbb{R}$$
$$\| (x, y) \|_t = \| x \| + \| y \|'$$

şeklinde tanımlanırsa, $N \times N'$ bir normlu uzaydır.

Şimdi şu tanımı verelim

Tanım 2.17. $T : N \to N'$ bir lineer operatör olsun. T nin

$$G(T) = \{(x, y) : x \in N, y = T(x)\}$$

grafiği, $N \times N'$ normlu uzayında kapalı ise, T ye kapalı lineer operatör denir [10].

Teorem 2.13. N ve N' normlu uzaylar, $T : N \to N'$ bir lineer operatör ve (x_n), N de bir dizi olsun. T nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ ve $T(x_n) \to y$ olması halinde $x \in N$ ve $T(x) = y$ olmasıdır [10].

Tanım 2.18. X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\langle \ , \ \rangle : X \times X \to F$$

fonksiyonu

1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir [10].

Teorem 2.14. X bir iç çarpım uzayı $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ olsun. Bu takdirde

1) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$

2) $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y\rangle$

3) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + \overline{\beta} \langle x, z\rangle$

4) $\langle \theta, y\rangle = \langle x, \theta\rangle = 0$

dır [9].

Tanım 2.19. $(X,\langle\ ,\ \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x,y\in X$ olsun. $\langle x,x\rangle=0$ ise $x-$vektörü $y-$vektörüne diktir denir ve bu $x\perp y$ ile gösterilir.

Eğer $x\perp y$ ise $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}=0$ olduğundan aynı zamanda $y\perp x$ dir.

Eğer $x\perp x$ ise $\langle x,x\rangle=0$ olacağından $x=\theta$ olmak zorundadır. Ayrıca $\langle\theta,x\rangle=\langle y-y,x\rangle=\langle y,x\rangle-\langle y,x\rangle=0$ olduğundan $\theta-$vektörü X in her vektörüne diktir.

X bir iç çarpım uzayı, A ve B, X in iki alt kümesi ve $x\in X$ olsun. x, A nın her elemanına dik ise, yani her $a\in A$ için $x\perp a$ ise, $x-$vektörü A ya diktir denir ve $x\perp A$ ile gösterilir.

Eğer A nın her elemanı B ye dik ise , yani her A ve B kümeleri birbirine diktir denir ve $A\perp B$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.20. X bir iç çarpım uzayı ve A, X in bir alt kümesi olsun. A ya dik olan bütün $x-$vektörlerinin kümesini $A^{\perp}$ ile gösterelim. Yani $A^{\perp}=\{x\in X : x\perp A\}$ kümesine A nın dikeyi denir.

Açık olarak $A\perp A^{\perp}$ dir. $A^{\perp}$ kümesinin dikeyi $A^{\perp\perp}$ ile gösterilir. Yani $(A^{\perp})^{\perp}=A^{\perp\perp}$ dir [9].

Teorem 2.15. $x-$vektörü $y_1,y_2,...,y_n$ vektörlerine dik ise, bu vektörlerin lineer birleşimine, yani $y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n$ vektörüne de diktir [9].

Teorem 2.16. X bir iç çarpım uzayı $x,y\in X$ ve $x\perp y$ olsun. Bu taktirde

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

dir. Daha genel olarak $\{x_1,x_1,...,x_n\}$ kümesi dik ise

$$\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

dir [8] .

Teorem 2.17. Bir iç çarpım uzayında aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

1) $|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \cdot \| y \|$ (Schwarz eşitsizliği)

2) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (Üçgen eşitsizliği) [8].

Teorem 2.18. Bir iç çarpım uzayında

1) $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

2) (x_n) ve (y_n) iç çarpım uzayında iki Cauchy dizisi ise, $\langle x_n, y_n\rangle$ de yakınsak bir Cauchy dizisidir [8].

Tanım 2.21. X bir iç çarpım uzayı ve $\|\cdot\|$**,** iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normu ile tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X e Hilbert uzayı denir [7].

Teorem 2.19. X bir iç çarpım uzayı A ve B, X in herhangi iki alt kümesi olsun. Bu takdirde

1) $A \subseteq A^{\perp\perp}$

2) $A \subseteq B$ ise $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

3) $(A^{\perp\perp})^{\perp} = A^{\perp}$

dir [9].

Tanım 2.22. L bir lineer uzay X ve Y, L nin iki alt uzayı olsun. Bu takdirde

$$L_1 = X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

de L nin bir alt uzayıdır. Bu L_1 alt uzayına X ve Y nin toplamı denir [9].

Tanımdan görüldüğü gibi $z \in L_1$ ise, $z = x + y = x_1 + y_1$ şeklinde olabilir. Eğer $z = x + y$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ ve $y \in Y$ varsa veya denk bir ifade ile $X \cap Y = \{\theta\}$ ise L_1 e X ve Y nin direkt toplamı denir ve

$$L_1 = X \oplus Y$$

ile gösterilir [9].

Teorem 2.20. X bir iç çarpım uzayı, Y ve Z, X in alt uzayları ve $Y \perp Z$ olsun. Bu takdirde $Y + Z$ nin direkt toplamı

$$Y + Z = Y \oplus Z$$

dir [9].

Teorem 2.21. X bir iç çarpım uzayı, Y ve Z, X in tam alt uzayları ve $Y \perp Z$ olsun. Bu takdirde $Y \oplus Z$, X in tam alt uzayıdır [9].

Teorem 2.22. X bir Hilbert uzayı, Y ve Z, H nin kapalı alt uzayları olsun. Eğer $Y \perp Z$ ise $Y \oplus Z$, H nin kapalı bir alt uzayıdır [9].

Tanım 2.23. H bir Hilbert uzayı ve Y, H nin kapalı lineer alt uzayı olsun.

$$Y^{\perp} = \{x \in H : x \perp Y\}$$

kümesine Y nin dik komplemanı denir [8].

Teorem 2.23. H bir Hilbert uzayı ve Y, H nin kapalı alt uzayı olsun. Bu takdirde

1) $H = Y \oplus Y^{\perp}$

2) $Y = Y^{\perp\perp}$

dir [8].

Tanım 2.24. H bir Hilbert uzayı ve Y, H nin kapalı bir alt uzayı olsun. $x \in H$ ise $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ olmak üzere $x = y + z$ bir tek şekilde ifade edilebilir. Bu $y-$vektörüne x in Y üzerindeki dik izdüşümü denir [8].

Teorem 2.24. H bir Hilbert uzayı ve Y , H nin kapalı bir alt uzayı olsun.

$$P : H \to Y$$

dikizdüşüm operatörü ise

1) P lineerdir. Yani $P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2)$ ve $P(\alpha x) = \alpha P(x)$

2) $\langle P(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, P(x_2) \rangle$

3) Her $y \in Y$ için $P(y) = y$ ve $Y = \{x \in H : P(x) = x\}$

4) $P(P(x)) = P(x)$

5) $\langle P(x), x \rangle = \| P(x) \|^2 \leq \| x \|^2$

dir [10].

2.4. İki Değişkenli s-lineer Dönüşümler

Tanım 2.25. u, v, w aynı bir $F(= \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cismi üzerinde üç vektör uzayı olsun. Bu takdirde $\Phi : U \times V \to W$ dönüşümü

1) $\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y)$

2) $\Phi(\alpha x, y) = \alpha \; \Phi(x, y)$

3) $\Phi(x, y_1 + y_2) = \Phi(x, y_1) + \Phi(x, y_2)$

4) $\Phi(x, \alpha y) = \overline{\alpha} \cdot \Phi(x, y)$

şartlarını sağlıyorsa Φ ye s- lineer dönüşüm denir [10}.

Eğer $W = F$ ise Φ ye s- lineer fonksiyonel diyeceğiz. Eğer Φ için 1), 2) ve 3) şartlarının yanında 4) şartı, $\Phi(x, \alpha y) = \alpha \cdot \Phi(x, y)$ şeklinde gerçekleşiyorsa, yani Φ hem birinci hem de ikinci değişkene göre lineer ise, Φ ye 2-lineer veya bilineer denir.

Tanımdaki 1) ve 2) şartının

$$\Phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\ \Phi(x_1, y) + \beta\ \Phi(x_2, y)$$

ye ve 3) ile 4) şartının da

$$\Phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}\ \Phi(x, y_1) + \overline{\beta}\ \Phi(x, y_2)$$

ye denk olduğu açıktır.

Φ, s- lineer veya 2-lineer ise

$$\Phi(x,\theta) = \Phi(x,\theta+\theta) = \Phi(x,\theta) + \Phi(x,\theta) \Rightarrow \Phi(x,\theta) = \theta$$

ve benzer şekilde $\Phi(\theta, x) = \theta$ dır [10].

3. BÖLÜM

3.1. Çekirdek Teoremleri

Tanım 3.1. $T: L \to L'$ lineer operatör olsun. T altında L' nün özdeş elemanına dönüşen elemanların kümesine T nin çekirdeği denir ve $ÇekT$ ile gösterilir. Bu ise

$$ÇekT = \{x \in L : T(x) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')$$

şeklindedir [9].

Örneğin L, $[a,b]$ aralığında tanımlı p polinomlarının reel lineer uzayı olsun. p', p nin türevini göstermek üzere

$$T: L \to L, \quad \mathrm{T(p)=p'}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha p' + \beta q'$$

ve

$$T(\alpha p) = \alpha p'$$

olduğundan T lineerdir ve $ÇekT$ sabit polinomlar kümesidir.

Diğer taraftan

$$T: L \to L'$$
$$T(x) = \theta'$$

olarak tanımlanırsa T nin çekirdeği L dir.

Ayrıca

$$I: L \to L$$
$$I(x) = x$$

dersek $ÇekI = \{\theta\}$ dır.

Şimdi şu teoremi verelim:

Teorem 3.1. L ve L' aynı cisim üzerinde iki lineer uzay ve $T: L \to L'$ lineer operatör olsun. Bu durumda

1) W, L' nün bir alt uzayı ise $T^{-1}(W)$, L nin bir alt uzayıdır.

Özellikle $ÇekT = T^{-1}(\theta')$, L nin bir alt uzayıdır.

2) $T(x_1) = T(x_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in ÇekT$

dir [9].

İspat. 1) α bir skaler ve $x_1, x_2 \in T^{-1}(W)$ olsun. Bu durumda $T(x_1), T(x_2) \in W$ ve $\alpha T(x_1) \in W$ dır. T lineer olduğundan

$$T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2) \in W$$

ve

$$\alpha T(x_1) = T(\alpha x_1) \in W$$

dir. Böylece $x_1 + x_2,\ \alpha x_1 \in T^{-1}(W)$ dir.

2) $T(x_1) = T(x_2) \Leftrightarrow T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2) = \theta' \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in ÇekT$

dir.

Teorem 3.2. L ve L' aynı cisim üzerinde iki lineer uzay ve $T: L \to L'$ üzerine bir lineer operatör olsun. Bu takdirde T nin T^{-1} ters dönüşümünün olması için gerek ve yeter şart $ÇekT = \{\theta\}$ olmasıdır [9].

İspat. Bilindiği gibi $T: L \to L'$ bire-bir ve üzerine bir dönüşüm

$$T^{-1}: L' \to L$$
$$T(x) = y \Leftrightarrow x = T^{-1}(y)$$

şeklinde tanımlanan T^{-1} dönüşümüne, T nin ters dönüşümü denir. Ayrıca T^{-1} in mevcut olması için gerek ve yeter şart T nin bire-bir ve üzerine olmasıdır.

İspat için kabul edelim ki $T^{-1}: L' \to L$ ters dönüşümü bulunsun. Bu durumda T bire-birdir.

O halde $T(x) = T(\theta) = \theta'$ den $x = \theta$ elde edilir. Yani $ÇekT = \theta$ dır.

Tersine $ÇekT = \theta$ olduğunu kabul edip T^{-1} in mevcut olduğunu gösterelim. Hipotezden dolayı T üzerinedir. T nin bire-bir olduğunu göstermek için varsayalım ki $T(x) = T(y)$ olsun. Buradan

$$T(x) - T(y) = \theta' \Rightarrow T(x - y) = \theta' \Rightarrow x - y = \theta \Rightarrow x = y$$

bulunur. O halde T bire-bir ve dolayısıyla T^{-1} mevcuttur.

Teorem 3.3. N ve N' normlu uzaylar ve $T : N \to N'$ sınırlı (sürekli) bir lineer operatör olsun. Bu durumda $ÇekT$, N nin kapalı bir alt uzayıdır [9].

İspat. Teorem 3.1. gereğince $ÇekT$, N nin bir alt uzayıdır. $ÇekT$ nin kapalı olduğunu göstermek için $ÇekT = \overline{ÇekT}$ olduğunu göstereceğiz.

Kapanış tanımından dolayı $ÇekT \subseteq \overline{ÇekT}$ dır. Şimdi $x \in \overline{ÇekT}$ olsun. Bu durumda $x_n \to x$ olacak şekilde $ÇekT$ de (x_n) dizisi vardır. T sürekli olduğundan $T(x_n) \to T(x)$ yani

$$T(x) = \lim T(x_n) = \lim \theta' = \theta'$$

dür. O halde $x \in ÇekT$ ve dolayısıyla $\overline{ÇekT} \subseteq ÇekT$ dir. Sonuç olarak $ÇekT = \overline{ÇekT}$ olarak bulunur.

$ÇekT$ kapanışa eşit olduğundan kapalıdır.

Teorem 3.4. H bir Hilbert uzayı ve Y, H nin kapalı bir alt uzayı olsun. $P : H \to Y$ dik izdüşüm operatörü ise

$$ÇekP = Y^{\perp}$$

dir [9].

İspat. Eğer $z \in Y^{\perp}$ ise, z nin Y ye göre tek olan dik bileşenlere ayrışımı

$$z = \theta + z,\ z \in Y,\ \theta \in Y^{\perp}$$

ve dolayısıyla $P(z) = \theta$ dır. O halde $Y^{\perp} \subseteq ÇekP$ dir. Aynı şekilde $ÇekP \subseteq Y^{\perp}$ olduğu gösterilebileceğinden $Y^{\perp} = ÇekP$ dir.

Şimdi şu teoremi verelim.

Teorem 3.5. U ile V sonlu boyutlu iki vektör uzayı ve $T : U \to V$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda

$$BoyU = BoyD(T) + BoyÇekT$$

dir. (Burada $D(T) \subset V$ olup, T nin değer kümesidir) [10].

İspat. *ÇekT* uzayının bir bazı $B_1 = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ olsun. B_1 bazının u uzayının bir $B = \{s_1, s_2, ..., s_k, u_1, u_2, ..., u_n\}$ bazına genişletildiğini kabul edelim. Bu durumda $B_2 = \{Tu_1, Tu_2, ..., Tu_n\}$ kümesinin $D(T)$ değer uzayının bir bazı olduğunu göstermeliyiz. $v \in D(T)$ olsun. Bu durumda $Tu = v$ eşitliğini sağlayan en az bir $u \in U$ noktası mevcuttur. Böylece, u vektörü B bazındaki vektörlerin bir lineer birleşimi ile ifade edilebileceğinden

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j s_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$$

yazabiliriz. $j \in \{1, 2, ..., k\}$ için $s_j \in ÇekT$ olduğunu gözönünde tutarak T lineer operatörünü uygularsak

$$v = Tu = T\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j s_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j Ts_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j Tu_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j Tu_j$$

bulunur. Bu ise B_2 kümesinin $D(T)$ değer uzayını gerdiğini gösterir.

Şimdi de B_2 kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Tu_j = 0$$

vektörel denkleminin sıfır olmayan bazı α_j skalerleri için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$T(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j) = 0$$

olur ki, bu

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \in ÇekT$$

olduğunu gösterir. Halbuki B_1 kümesi *ÇekT* uzayının bir bazı olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j s_j$$

vektörel eşitliğini gerçekleyen $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ skalerleri mevcuttur. Şu halde

$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j - \sum_{j=1}^{k}\beta_j s_j = 0$ vektörel eşitliğini sağlanır. B_1 kümesi U uzayının bir bazı olduğundan

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$$

bulunur. O halde B_2 kümesi, $D(T)$ değer uzayını geren lineer bağımsız bir küme olduğundan $BoyD(T) = n$ olur. Böylece

$$BoyD(T) = n = n + k - k = BoyU - BoyÇekT$$

olduğu kolayca görülür ki, bu da

$$BoyU = BoyD(T) + BoyÇekT$$

demektir.

3.2. Sıfırlayıcılar

Bir V vektör uzayında tanımlanan bütün lineer fonksiyonellerin kümesinin de bir vektör uzayı yapısına getirilmesi oldukça yararlıdır.

Bu yolla elde edilen vektör uzayına V uzayının "cebirsel dual uzayı" denir ve V^* ile gösterilir. Vektör uzayının cebirsel işlemleri, bu uzayda şöyle tanımlanır: f_1 ve f_2 fonksiyonellerinin $f_1 + f_2$ toplamı ve $x \in V$ deki değeri

$$f(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olan bir fonksiyoneldir.

Bir f fonksiyonelinin bir α skaleri ile $\alpha \cdot f$ çarpımı $x \in V$ olmak üzere

$$g(x) = (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

olan bir g fonksiyonelidir [5].

Tanım 3.2. U bir V vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda U daki bütün noktaları sıfıra dönüştüren V uzayı üzerindeki bir lineer fonksiyonel, U kümesinin bir "sıfırlayıcısı" olarak adlandırılır. V^* uzayındaki böyle bütün fonksiyonellerin kümesi U kümesinin sıfırlayıcısı olarak bilinir ve U^s ile gösterilir [5].

Şimdi şu teoremi verelim.

Teorem 3.6. V uzayının bir U alt kümesinin U^s sıfırlayıcısı, V^* uzayının kapalı bir alt uzayıdır [5].

İspat. $\theta \in U^s$ olduğu açıktır. Şimdi $f_1, f_2 \in U^s$ fonksiyonellerini ve bir α skalerini alalım. Bu durumda herhangi bir $u \in U$ için

$$(\alpha f_1 + f_2)(u) = (\alpha f_1)(u) + f_2(u) = \alpha f_1(u) + f_2(u) = 0$$

olacağından $\alpha f_1 + f_2 \in U^s$ bulunur. Bu da $U^s \subset V^*$ olduğunu gösterir.

Şimdi de U^s alt uzayının kapalı olduğunu gösterelim. $f \in \overline{U^s}$ alındığında U^s sıfırlayıcısında $f_n \to f$ olan bir (f_n) dizisi bulunur. Herhangi bir $u \in U$ noktasında $f_n(u) = 0$ ve $f(u) = 0$ olacağından $f \in U^s$ ve dolayısıyla U^s kapalıdır.

Teorem 3.7. Bir küme ile bu kümenin gerdiği uzayın sıfırlayıcıları aynıdır [5].

İspat. U bir V uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda herhangi bir $u \in \langle\ U\ \rangle$ için

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r \ldots(1)$$

eşitliğini sağlayan $u_1, u_2, ..., u_r$ noktaları U kümesinde mevcuttur. Böylece (1) eşitliğine $f \in U^s$ fonksiyoneli uygulandığı zaman

$$\begin{aligned} f(u) &= \alpha_1 f_1(u_1) + \alpha_2 f_2(u_2) + ... + \alpha_r f_r(u_r) \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + ... + \alpha_r \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde $f \in \langle\ U\ \rangle^s$ olur. Böylece $U^s = \langle\ U\ \rangle^s$ bulunur.

Teorem 3.8. U ve $W,$ herhangi boyutlu bir V uzayının iki alt uzayı ise, o zaman $U + W$ toplam uzayının sıfırlayıcısı U^s ve W^s uzaylarının kesişim uzayıdır [5].

İspat. Herhangi $f \in (U+W)^s$ alalım. Bu durumda f, U ve W alt uzaylarını sıfırladığından $f \in U^s$ ve $f \in W^s$. Şu halde $f \in U^s \cap W^s$ olur. Bu ise

$$(U+W)^s \subset U^s \cap W^s \ldots(2)$$

kapsamasının geçerli olması demektir.

Tersine $f \in U^s \cap W^s$ aldığımızda f, hem U ve hem de W alt uzaylarını sıfırlar. Bir $v \in U + W$ vektörü $u \in U$ ve $w \in W$ olmak üzere $v = u + w$ gösterimine sahiptir.

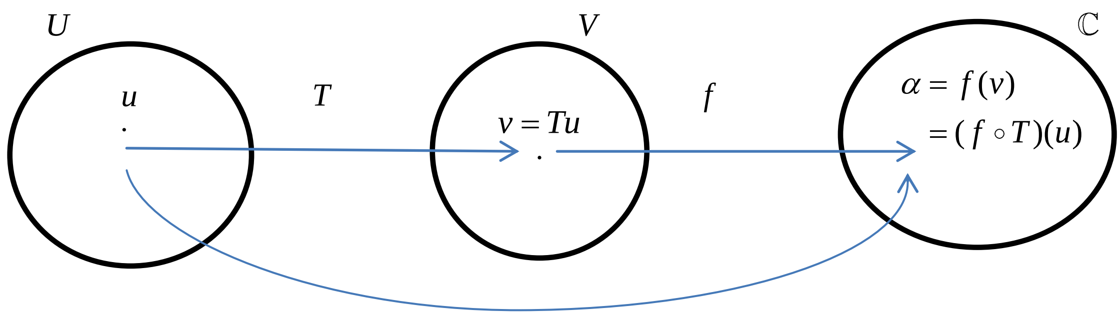
Böylece $f(v) = f(u+w) = f(u) + f(w) = 0$ bulunduğundan f fonksiyoneli $U+W$ toplam uzayını sıfırlar. Demek ki $f \in (U+W)^s$ ve dolayısıyla

$$U^s \cap W^s \subset (U+W)^s \ldots (3)$$

bulunur.

3.3. Bir Lineer Operatörün Transpozu

Bir $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki bir U vektör uzayından, bir V vektör uzayına bir T lineer dönüşümünü ele alalım. T operatörü ile, V^* dual uzayından U^* dual uzayına bir T' lineer operatörünü aşağıdaki gibi gösterelim.



$$T'(f) = f \circ T$$

T', V uzayı üzerindeki her f lineer fonksiyonelini, U uzayı üzerindeki $T'(f)$ lineer fonksiyoneline karşılık getirecek şekilde V^* dual uzayından $\mathbb{C}$ dual uzayına bir dönüşümdür. Her bir $u \in U$ noktasındaki $[T'(f)](u)$ değeri $f \in V^*$ fonksiyoneli için

$$[T'(f)](u) = f(Tu)$$

olarak tanımlanmaktadır. Böylece tanımlanan

$$\begin{aligned} T' : V^* &\to U^* \\ f &\to T'(f) = f \circ T \end{aligned}$$

dönüşümü, T lineer operatörünün transpozu olarak adlandırılır [5].

Herhangi $f_1, f_2 \in V^*$ fonksiyonelleri ve herhangi $\alpha \in \mathbb{C}$ skalerleri için

$$\begin{aligned} T'(\alpha f_1 + f_2) &= (\alpha f_1 + f_2) \circ T \\ &= \alpha(f_1 \circ T) + f_2 \circ T \\ &= \alpha T'(f_1) + T'(f_2) \end{aligned}$$

olduğundan transpoz dönüşümü lineerdir.

S ve T; bir U vektör uzayından bir V vektör uzayına lineer operatörler ve α da herhangi bir skaler olmak üzere

$$I' = I,\ (T')',\ (\alpha T)' = \alpha T' \text{ ve } (S+T)' = S' + T'$$

olduğu benzer şekilde gösterilir. Burada I, U uzayı üzerindeki ve I' de U^* dual uzayı üzerindeki özdeşlik operatörünü göstermektedir.

Şimdi şu teoremi verelim.

Teorem 3.9. T bir lineer operatör ve T' de bu operatörün transpozu olsun. Bu durumda $\c{C}ekT'$ uzayı, $G(T)$ görüntüler kümesinin sıfırlayıcısıdır [5].

İspat. U ve V, bir $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki iki vektör uzayı olmak üzere

$$T : U \to V$$

lineer operatörünü ve

$$T' : V^* \to U^*$$

transpozunu göz önüne alalım. $f \in S(T')$ olsun. Bu durumda $T'(f) = f \circ T = 0$ ve $G(T)$ aldığımızda bazı $v \in V$ noktaları için $v = Tu$ olur. Bu nedenle

$$f(v) = f(Tu) = (f \circ T)(u) = 0(u) = 0$$

bulunur. Böylece, her $v \in G(T)$ için $f(v) = 0$ bulunduğundan $f \in \{G(T)\}^s$ olduğu, yani $S(T') \subset \{G(T)\}^s$ kapsamasının geçerli olduğu anlaşılır.

Şimdi $g \in \{G(T)\}^s$ alalım. Yani $g[G(T)] = \{0\}$ olsun. Bu durumda her $u \in U$ vektörü için

$$[T'(g)](u) = (g \circ T)(u) = g(Tu) = 0 = 0(u)$$

bulunur. Her $u \in U$ için $[T'(g)](u) = 0(u)$ elde edildiğinden $T'(g) = 0$ olur. Şu halde $g \in S(T')$ ve dolayısıyla $\{G(T)\}^s \subset S(T')$ kapsaması geçerlidir.

Bu iki kapsama birleştirilirse $S(T') = \{G(T)\}^s$ bulunur.

4. BÖLÜM
SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer uzaylarda tanımlı operatörler ile ilgili bir takım sonuçlar verilmiştir. Benzeri sonuçların metrik uzaylarda tanımlı dönüşümler için de verilebileceği konusunun tartışılmaya değer bir çalışma olabileceği düşünülebilir.

KAYNAKLAR

1. Rolewicz, S., MetricLinearSpaces (Reidel), 1984.
2. Singer, I., Bases in BanachSpaces (Springer-Verlag), 1970.
3. Hacısalihoğlu, H.H., Lineer Cebir (F.Ü. Fen Fak. Yayınları), 1982.
4. Kumersan, S., Linear Algebra (PrenticeHall of India), 2008.
5. Hadley, G., Linear Algebra (Narosa Publishing House), 1987.
6. Noble, B., Daniel, J.W., Applied Linear Algebra (PrenticeHall), 1988.
7. Wilansky, A., Functional Analysis (Blaisdell Publishing Company), 1986.
8. Maddov, I.J., Elements of Functional Analysis (Cambridge UniversityPress), 1988.
9. Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz (Gazi Kitabevi) , 2008.
10. Orlicz, W., Linear Functional Analysis (World Scientific), 1991.
11. Choudhany, B., Nanda, S., Functional Analysis with Applications (John Wiley), 1999.
12. Wilansky, A., Modern Methods in Topolojical Vector Spaces (McGraw-Hill International BookCompany), 1991.
13. Kayaduman, K., Convergence Domain of Matrices and Some Core Teorems (Far East Journal of Mathematical Sciences) Vol.15(2), 2004.
14. Kayaduman, K., Furkan, H., Infinite Matricesand $\sigma^{(A)}-$core, Demonstratio Mathematica Vol. XXIX, No:3, 2006.
15. Kayaduman, K., Çakan, C., The Cesaro Core of Double Sequences, Abstract and Applied Analysis, Article ID 950364, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Erzincan'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya'da tamamladım. 1996 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım ve 2000 yılında buradan bölüm birincisi olarak mezun oldum. Aynı yılın Ekim ayında Elazığ ili Kovancılar ilçesi İsmetpaşa İlköğretim Okulu'nda stajyer Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. Çalıştığım okulda Milli Eğitim Müdürlüğü'nce açılan stajyerlik kurslarını başarıyla tamamlamam sebebiyle 24 Kasım 2001 tarihinde stajyerliğim kaldırıldı. 2001 yılı sonunda eşimin Amerika'da bir yüksek lisans programına katılmasından dolayı görevimden ayrıldım. 2002 yılında Nevşehir Özel Altınyıldız Koleji'nde, 2003 yılında Konya Kadınhanı Söğütözü İlköğretim Okulu'nda 2004-2009 yılları arasında Nevşehir Sulusaray Yatılı İlköğretim Bölge Okulu'nda matematik öğretmeni olarak görev yaptım. Halen Nevşehir Anadolu Ticaret Meslek Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Evliyim. İki çocuk sahibiyim.