T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ROUGH ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Tezi Hazırlayan
Döne ÖZBEK

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ROUGH ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Tezi Hazırlayan
Döne ÖZBEK

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL danışmanlığında **Döne ÖZBEK** tarafından hazırlanan **"Rough Analizin Temel Kavramları"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

06/06/2013

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ONAY :
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulu 14/06/2013 tarih ve 2013/16-04 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14.6.6/2013

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini hep gördüğüm Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyeleri, danışman hocam sayın Doç.Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e, sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a ve sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ'a teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca maddi manevi her konuda beni sonuna kadar destekleyen, her zaman içimde sevgilerini hissettiğim ve borçlarını asla ödeyemeyeceğim sevgili anneme, babama, eşim Ahmet ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ROUGH ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Döne ÖZBEK
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2013
Tez Danışman: Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

ÖZET

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde kaba analizin gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümünde, klâsik anlamda normlu uzaylarda yakınsaklık, süreklilik ve sabit nokta teoremleri hakkında özet bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümünde kaba yakınsaklık ve kaba süreklilik hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümünde kaba sabit nokta teoremleri ve kaba konvekslik hakkında bilgiler sunulmuştur. Beşinci ve son bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık, kaba yakınsaklık, kaba süreklilik, kaba sabit nokta teoremi, γ-konvekslik, ρ-konvekslik, δ- konvekslik .

SOME BASIC IDEAS OF ROUGH ANALYSIS

Döne ÖZBEK
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, June 2013
Thesis Supervisor: Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

ABSTRACT

In the first section of this thesis, progres of rough analysis have discussed. In the second section, convergence, continuity and fixed-point theorems of in normed spaces in the classical sense have about summarized briefly. In the third section, the basic definitions and theorems about rough convergence and rough continuity have given. In the fourth and last section, the information about rough fixed-point theorems and rough convexity have present. In the fifth and last section, conclusions and recommendations have given.

Keywords: Convergence, rough convergence, rough continuity, roughly fixed-point theorems, γ-convexity, ρ-convexity, δ-convexity.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
ℓ_2^n	:	n boyutlu Euclid uzayı
$\parallel x \parallel$	:	x'in normu
$(X, \parallel . \parallel)$	:	normlu X uzayı
$boyX$	:	X uzayının boyutu
(x_i)	:	x_i dizisi
$int(A)$	:	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$LIM^r x_i$	:	(x_i) dizisinin r-limit kümesi
$\bar{B}_r(x_o)$	:	x_o merkezli r yarı çaplı kapalı yuvar
$x_i \to x_o$	:	(x_i) dizisi x_0'a yakınsak
$x_i \xrightarrow{r} x_o$	:	(x_i) dizisi x_0'a r-yakınsak
$dist(A, x)$.		x noktasının A kümesine uzaklığı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kaba(rough) analizin ortaya çıkışı, gerçek dünyada matematiksel kavramlar var mıdır? Sorusunu temel almaktadır. Örneğin gerçek hayatta matematiksel bir nokta yoktur. Çünkü matematiksel nokta boyutsuzdur, ne elle tutulabilir ne de gözlemlenebilir. Kalemi kâğıda dokundurduğumuzda elde ettiğimiz "nokta" boyutludur, matematiksel nokta gibi boyutsuz değildir. Gerçek hayatta matematiksel anlamda bir doğru da yoktur. Kâğıdın üstüne çizdiğimiz "düz" çizgi hem sonludur, hem düz değildir, hem de birden fazla boyutu vardır. Gerçek hayatta "sonsuz" da yoktur. Yaşadığımız evren sonludur. Evrendeki molekül, atom, elektron, foton sayıları sonludur. Kimse sonsuza kadar sayamaz, kimse sonsuzu gösteremez, kimse sonsuza gidemez, kimse sonsuzda olduğunu düşünemez. Düşlerimiz bile sonluda yer alır. Bu kavramları gerçek hayatta kağıt üzerinde veya bilgisayar üzerinde görebiliyoruz. Gerçek hayat ile bir bağlantı kurmamız gerekirse bunu kaba olarak yapabiliriz. Böylece kaba analize ihtiyacımız ortaya çıkmıştır.

Kaba analize ilk olarak Phu'nun "Rough Convergence in Normed Linear Spaces" isimli makalesinde "kaba(rough) yakınsaklık" olarak karşımıza çıkar. Daha sonra yine Phu'nun "kaba süreklilik" ve "kaba konvekslik" kavramlarını tanımlaması izler. Burgin de " Neoclasical Analysis" isimli kitabında kaba yakınsak, kaba süreklilik gibi kavramları reel sayılar üzerinde tanımlar.

Bu çalışmanın amacı, Phu'nun "Some Basic Ideals of Rough Analysis" isimli makalesinde ve Burgin'in "Neoclasical Analysis" isimli kitabında bahsettiği rough analiz içinde yer alan rough yakınsaklık, rough süreklilik, rough sabit nokta, rough konvekslik kavramlarını ele almak ve bunu adi anlamdaki yakınsaklık kavramı ile karşılaştırmaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tezde üzerinde duracağımız konunun anlaşılmasına yardımcı olacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. *X boş olmayan bir kümle ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.*

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\bullet : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümlesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay denir. Her $a, b \in \mathbb{K}$ ve $x, y, z \in X$ için;

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ *olacak şekilde* $\theta \in X$ *vardır.*

L4) $\forall x \in X$ *için* $x + (-x) = \theta$ *olacak şekilde bir* $(-x) \in X$ *vardır.*

L5) $1 \bullet x = x$

L6) $a \bullet (x + y) = a \bullet x + a \bullet y$

L7) $(a + b) \bullet x = a \bullet x + a \bullet y$

L8) $a \bullet (b \bullet x) = (a \bullet b) \bullet x$ [3].

Tanım 2.2. *X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ile tanımlı d fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.*

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x,y) = d(y,x)$

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ [**3**].

Tanım 2.3. *(X,d) bir metrik uzay olsun. r pozitif bir reel sayı ve $x_0 \in X$ ise,*

$B(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ *kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,*

$\bar{B}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ *kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,*

$S(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$ *kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir* [**3**].

Tanım 2.4. *X bir metrik uzay $A \subset X$ ve $x_0 \in A$ olsun.*

1) $B(x_0;r) \subset A$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa x_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

2) x_0 noktası $(B(x_0;r) \backslash x_0) \cap A \neq \emptyset$ sağlıyor ise x_0 noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir.

3) A kümesini noktalarıyla, A'nın yığılma noktalarından oluşan cümleye ise A'nın kapanışı denir.

4) $\forall x \in X$ için $B(x_0;r) \subseteq A$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa A'ya X'in açık kümesi denir.
5) X uzayında tümleyeni açık olan kümeye X'de kapalı cümle denir [**3**].

Tanım 2.5. *(x_n), (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisine X uzayında yakınsaktır denir eğer,*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0) = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa. x_0'a dizinin limiti yada yakınsadığı nokta denir, kısaca

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \textit{veya} \quad x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \quad \textit{şeklinde gösterilir.}$$

Tanım **2**.5*'i*

$$x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \textit{için} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \quad \textit{iken} \quad d(x_n,x_0) < \varepsilon$$

şeklinde de verebiliriz [3].

Tanım 2.6. *(x_n), (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir eğer,*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \textit{için} \quad m,n > n_0 \quad \textit{iken} \quad d(x_m,x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı var ise. X uzayında ki her Cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı nokta da X'in elemanı ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [3].

Tanım 2.7. *(X,d) ve (Y,d') iki metrik uzay, $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için*

$$d(x,x_0) < \delta \quad \textit{iken} \quad d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon \; \textit{ise} \tag{2.1}$$

veya (2.1)'e denk bir ifadeyle

$$f(B(x_0;\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$$

olacak şeklinde bir $\delta > 0$ sayısı var ise. f dönüşümü X uzayının her noktasında sürekli ise f, X üzerinde süreklidir denir [5].

Tanım 2.8. *X bir metrik uzay olsun. Eğer X'deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X uzayı kompaktır denir. X'in bir M alt kümesi, X'in bir alt uzayı olarak ele alındığında kompakt oluyorsa (yani M deki her bir dizi M de yakınsak bir alt diziye sahipse) M'ye kompakt denir* [5].

Lemma 2.1. *Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır* [5].

Tanım 2.9. *X kümesi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay olsun. $\| \,.\, \| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \,.\, \|$ fonksiyonuna X üzerinde norm denir.*

N1) $\| x \| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \| \; (\alpha \in \mathbb{K})$

N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

$(X, \| \,.\, \|)$ ikilisine de X lineer uzay olduğundan lineer normlu uzay denir [3].

Tanım 2.10. (x_n) *normlu bir X uzayında bir dizi olsun.* (x_n)*'ye sınırlı dizi denir eğer,*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \textit{için} \quad \| x_n \| \leq K$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ *sayısı varsa* [3].

Normlu uzayda yuvar tanımları aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.11. $(X, \| \,.\, \|)$ *normlu uzay,* $r > 0$ *ve* $x_0 \in X$ *ise,*

$B(x_0; r) = \{x \in X : \| x - x_0 \| < r\}$ *kümesine X normlu uzayında açık yuvar*,

$\bar{B}(x_0; r) = \{x \in X : \| x - x_0 \| \leq r\}$ *kümesine X normlu uzayında kapalı yuvar*,

$S(x_0; r) = \{x \in X : \| x - x_0 \| = r\}$ *kümesine X normlu uzayında yuvar yüzeyi denir*

[3].

Tanım 2.12. $(X, \| \,.\, \|)$ *normlu uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun.*

$$d(A) = \sup\{\| x - y \| : x, y \in A\} < \infty$$

ise A kümesine X normlu uzayında sınırlı küme denir [3].

Tanım 2.13. (x_n), $(X, \| \,.\, \|)$ *normlu uzayında bir dizi olsun.* (x_n) *dizisi yakınsaktır denir eğer X uzayında,*

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ *var ise. Bu yakınsaklık* $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ *olarak gösterilir ve* x_0*'a* (x_n) *dizisinin limiti adı verilir.*

Tanım 2.13'i

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \textit{için} \quad \exists\, n_0 \in N \quad n > n_0 \Rightarrow \| x_n - x_0 \| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$$

şeklinde de verebiliriz [3].

Tanım 2.14. *(x_n), $(X, \| \, . \, \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisine X uzayında bir Caucyh dizisi denir eğer,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \textit{için} \quad m,n > n_0 \quad \textit{iken} \quad \| x_m - x_n \| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa [3].

Teorem 2.1. *$(X, \| \, . \, \|)$ normlu uzayının sonlu boyutlu her Y alt uzayı tamdır. Ayrıca sonlu boyutlu her normlu uzay tamdır* [3].

Tanım 2.15. *$(X, \| \, . \, \|)$ ve $(X', \| \, . \, \|')$ normlu iki uzay , $f : X \to X'$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir eğer,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \textit{için} \quad \| x - x_0 \| < \delta \quad \textit{iken} \quad \| f(x) - f(x_0) \|' < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa. f dönüşümü X in her noktasında sürekli ise f dönüşümüne X uzayında süreklidir denir [5].

Teorem 2.2. *$(X, \| \, . \, \|)$ normlu bir uzay olsun. X uzayındaki norm fonksiyonu süreklidir* [3].

İspat. *İspat için $| \, \| x \| - \| y \| \, | < \| x - y \|$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Çünkü eşitsizlik sağlandığında $\| x - y \| < \delta = \varepsilon$ alırsak süreklilik için gerekli şartlar sağlanmış olur. Kolayca görüleceği gibi*

$$\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \| \Rightarrow \| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|$$

eşitsizliği sağlanır. Fakat aynı zamanda,

$$-(\| x \| - \| y \|) = \| y \| - \| x \| \leq \| y - x \| = \| x - y \|$$

olduğundan sonuç olarak

$$| \, \| x \| - \| y \| \, | \leq \| x - y \| < \varepsilon$$

elde edilir. □

Teorem 2.3. *X sonlu boyutlu normlu bir uzay ve $M \subset X$ olsun. X'in kompakt olması için gerek ve yeter şart M'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır* [5].

Teorem 2.4. *Normlu* $(X, \| \,.\, \|)$ *uzayında, kapalı* $M = \{x : \| x \| \leq 1\}$ *birim yuvarı kompakt ise* X *sonlu boyutludur* [5].

Reel analizde, reel değerli ve reel değişkenli fonksiyonlarla çalışılır. Fonksiyonel analizde lineer uzaylar özellikle normlu uzaylar söz konusu olduğunda incelenen dönüşüm operatör olarak adlandırılır. Yani lineer uzaylar arasındaki dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.16. L *ve* L' *aynı bir* $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde iki lineer uzay olsun.* $T : L \to L'$ *operatörü*

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad ve \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (\alpha \in \mathbb{K})$$

şartlarını sağlıyorsa T*'ye lineer operatör denir* [3].

Tanım 2.17. X *ve* Y *normlu uzaylar ve* $T : X \to Y$ *lineer operatör olsun. Her* $x \in X$ *için*

$$\| T(x) \|_Y \leq K \| x \|_X$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ *reel sayısı varsa* T*'ye sınırlı lineer operatör denir. Burada* $\| \,.\, \|_Y$*,* Y *uzayındaki norm,* $\| \,.\, \|_X$*,* X *uzayındaki normdur* [3].

Teorem 2.5. *Eğer normlu bir* X *uzayı sonlu boyutlu ise* X *üzerindeki her lineer operatör sınırlıdır* [5].

Operatörler aslında birer dönüşüm olduklarından, süreklilik tanımını bunlarada uygulayabiliriz. Aşağıda lineer operatörler için süreklilik ve sınırlılığın eşdeğer kavramlar olduğunu gösteren Teorem verilecektir.

Teorem 2.6. X *ve* Y *normlu uzaylar ve* $T : X \to Y$ *lineer operatör olsun*

a) T*'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul* T*'nin sınırlı olmasıdır.*

b) T *bir tek noktada sürekli ise her noktada süreklidir* [5].

İspat.

a) $T = 0$ *için ifadenin sağlandığı açıktır.* $T \neq 0$ *olsun. Bu durumda* $\| T \| \neq 0$*'dır.* T*'nin sınırlı olduğunu varsayalım ve herhangi bir* $x_0 \in X$ *noktasını ele alalım. Herhangi bir*

$\varepsilon > 0$ *sayısı verilmiş olsun. Buna göre* T *lineer olduğundan,* $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ *olmak üzere,* $\| x - x_0 \| < \delta$ *olacak şekildeki her* $x \in X$ *için,*

$$\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| \leq \| T \| \| x - x_0 \| < \| T \| \delta = \varepsilon$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $x_0 \in X$*' keyfi olması nedeniyle bu sonuç* T*'nin sürekli olduğunu gösterir.*

Şimdi de T*'nin keyfi bir* $x_0 \in X$ *sürekli olduğunu kabul edelim. Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *verildiğinde* $\| x - x_0 \| \leq \delta$ *koşulunu gerçekleyen her* $x \in X$ *için*

$$\| Tx - Tx_0 \| \leq \varepsilon \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ *sayısı vardır. Şimdi* X*'de herhangi bir* $y \neq 0$ *alalım ve*

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\| y \|} y$$

yazalım. Bu durumda,

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\| y \|} y$$

elde edilir. O halde $\| x - x_0 \| = \delta$ *olup, dolayısıyla* **2**.2*'yi kullanabiliriz.* T*'nin lineer olması nedeniyle,*

$$\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| = \| T(\frac{\delta}{\| y \|} y) \| = \frac{\delta}{\| y \|} \| Ty \|$$

yazabiliriz ve **2**.2 *ifadesi,*

$$\frac{\delta}{\| y \|} \| Ty \| \leq \varepsilon$$

sonucunu gerektirir. Buradan da, $\| Ty \| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \| y \|$ *bulunur. Bu ise* $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$ *olmak üzere* $\| Ty \| \leq c \| y \|$ *şeklinde yazılabilir ve* T*'nin sınırlı olduğunu gösterir.*

b) T*'nin bir noktadaki sürekliliği a)'nın ispatının ikinci kısmı gereğince* T*'nin sınırlılığını gerektirir ve a)'dan görülür ki* T *süreklidir.* □

Tanım 2.18. X *normlu uzay olsun.* X *üzerinde*

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

olarak tanımlanan d *metriğine norm metriği denir* [**3**].

Tanım 2.19. *X normlu bir lineer uzay olsun. X uzayı norm metriğine göre tam ise X'e Banach uzayı denir* [3].

Tanım 2.20. *T dönüşümü X kümesinden X kümesine kendi içine olan bir dönüşüm olsun. X'in,*

$$Tx = x$$

şartını sağlayan x elemanına T dönüşümünün sabit noktası denir [5].

Banach sabit nokta teoremi, belirli dönüşümlerin sabit noktaları için varlık ve teklik teoremi olup, ayrıca sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemi verir. Bu işleme bir iterasyon adı verilir. Tanım gereği, bu yöntemde, verilen bir küme içinde keyfi bir x_0 noktası seçip,

$$x_{n+1} = Tx_n \quad n = 0, 1, 2, ...$$

şeklinde bir bağıntı yardımıyla, indirgemeli olarak bir $(x_0, x_1, x_2, ...)$ gibi bir dizi elde ederiz. Yani x_0'ı keyfi seçip, ardışık olarak $(x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad ...)$ elemanlarını belirleriz.

Tanım 2.21. *$X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümünü ele alalım. Eğer, her $x.y \in X$ için,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde pozitif bir $\alpha < 1$ reel sayısı varsa T dönüşümüne, X üzerinde bir daralma denir [5].

Teorem 2.7. *$X \neq \emptyset$ olmak üzere, bir $X = (X, d)$ metrik uzayını göz önüne alalım. X uzayı tam ve $T : X \to X$ dönüşümü, X üzerinde bir daralma olsun. Bu durumda T mutlaka bir sabit noktaya sahiptir* [5].

Tanım 2.22. *X lineer uzay olsun. $A \subseteq X$ ve keyfi $x, y \in A$ için,*

$$B = \{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks denir [5].

Tanım 2.23. *C kümesi X lineer uzayının alt kümesi olsun. C'nin X uzayında kapanışı kompakt ise C kümesine göreceli(relatively) kompakt küme denir* [6].

BÖLÜM 3

KABA YAKINSAKLIK VE KABA SÜREKLİLİK

Kaba yakınsaklık ve kaba süreklilik ile ilgili bazı temel tanım ve teoremleri verelim.

3.1. Kaba Yakınsaklık

Tanım 3.1. $(X,||.||)$ *normlu lineer uzayında* (x_i) *bir dizi ve* $r>0$ *olsun.* (x_i) *dizisine* x_0*' a r-yakınsak denir. Eğer,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N} : i \geq i_\varepsilon \Rightarrow \| x_i - x_0 \| < \varepsilon + r \quad ise \tag{3.1}$$

[7].

Eğer (x_i) dizisi bir x_0 noktasına kaba yakınsak ise $x_i \xrightarrow{r} x_0 \quad (i \to \infty)$ veya $r - \lim x_i = x_0$ şeklinde gösterilir. r, (x_i) dizisi için yakınsaklık derecesidir. $r = 0$ için klasik anlamda yakınsaklığı elde ederiz. $r > 0$ için (x_i) dizisi (**3**.1) sağlıyorsa $r - limit$ noktası birden fazladır. Bu noktalarının oluşturduğu küme,

$$LIM^r x_i = \{x_0 \in X : x_i \xrightarrow{r} x_0\} \tag{3.2}$$

şeklinde verilir.

Örnek 3.1. $x_i = (-2,-1,0,1,-2,-1,0,1,...,-2,-1,0,1,...)$ *dizisinin klasik anlamda yakınsak olmadığını biliyoruz. Fakat* (x_i) *dizisi r- yakınsaktır.* $r - limit$ *kümesi,*

$$LIM^r x_i = \begin{cases} \emptyset & , \quad r < \frac{3}{2} \quad ise \\ [1-r, r-2] & , \quad r \geq \frac{3}{2} \quad ise \end{cases}$$

şeklinde verilir.

Adi yakınsak dizilerin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açıktır.

1) Yakınsak bir dizinin limiti tektir.

2) Yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı limit noktasına yakınsar.

3) Yakınsak her dizi sınırlıdır.

Yukarıdaki özelliklerin r-yakınsaklık bakımından karşılıkları aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.1.

a) $r-limit$ kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir.

b) (x_i) dizisi sınırlıdır$\Leftrightarrow$ $r \geq 0$ vardır öyleki $LIM^r x_i \neq \emptyset$.

c) (x_i) dizisinin alt dizisi (x_{i_j}) ise $LIM^r x_i \subseteq LIM^r x_{i_j}$ dir[9].

Kaba yakınsaklığın adi yakınsaklıkla karşılaştırılması hakkında bazı teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2. *$r_1 \geq 0$ ve $r_2 > 0$ olsun. X uzayında bir (x_i) dizisi x_0'a $r_1 + r_2$-yakınsaktır $\Leftrightarrow$ X uzayında bir (y_i) dizisi vardır öyleki,*

$$y_i \xrightarrow{r_1} x_0 \quad ve \quad \| x_i - y_i \| \leq r_2, \; i = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

[9].

Teorem 3.3. *$r > 0$ ve (x_i), X uzayında bir dizi olsun.*

a) (x_i) dizisi X uzayında bir dizi ve x_0'a yakınsak ise

$$LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0) = \{z \in X : \| z - x_0 \|\} \leq r.$$

b) (x_i) dizisi X uzayının bir kompakt kümesini içeriyorsa ve $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ ise (x_i) dizisi x_0'a yakınsaktır.

c) X sonlu boyutlu kesin konveks uzay olsun. Eğer $\| y_1 - y_2 \| = 2r$ sağlayan $y_1, y_2 \in LIM^r x_i$ var ise (x_i) dizisi $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$'ye yakınsar [9].

Teorem 3.4. *(x_i) dizisinin yığılma noktalarının kümesi C olsun.*

a) Eğer $C \neq \emptyset$ ise $LIM^r x_i \subseteq \bar{B}_r(c)$.

b) (x_i) dizisi X'in kompakt bir kümesini içeriyorsa

$$LIM^r x_i = \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_0)\}$$

[9].

Teorem 3.5. *$r \geq 0$ ve $\sigma > 0$ olsun.*

(a) $LIM^r x_i + \bar{B}_\sigma(0) \subseteq LIM^{r+\sigma} x_i$.

(b) $\bar{B}_\sigma(y) \subseteq LIM^r x_i$ ise $y \in LIM^{r-\sigma} x_i$ [9].

$LIM^r x_i$'nin r'ye bağımlılığı ile ilgili bazı özellikler ve teoremler aşağıda verilmiştir.

$(X, ||.||)$ normlu lineer uzayında keyfi (x_i) dizisi ele alalım

$$0 \leq r_1 < r_2 \quad \text{için} \quad LIM^{r_1} x_i \subseteq LIM^{r_2} x_i$$

monotonluğunu yazabiliriz.

Teorem 3.6.

a) $r \geq 0$ ve $\sigma > 0$ için $LIM^r x_i \subseteq LIM^r x_i + \bar{B}_\sigma(0) \subseteq LIM^{r+\sigma} x_i$ dır.

b) Eğer X uzayı düzgün konveks ve y noktası $LIM^r x_i$'nin bir iç noktası ise $y \in LIM^{r'} x_i$ olacak şekilde $r' \in [0, r)$ vardır.

c) Eğer (x_i) dizisi X uzayının kompakt bir kümesi tarafından kapsanıyorsa ise $\bar{B}_\sigma(y) \subseteq LIM^r x_i$ iken $y \in LIM^{r-\sigma} x_i$ dir [9].

3.2. Kaba Cauchy Derecesi

Tanım 3.2. *X normlu bir uzay ve (x_i) de X'de bir dizi olsun. (x_i) dizisine ρ-Cauchy dizisi denir, eğer*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_\varepsilon : i, j \geq i_\varepsilon \Rightarrow \| x_i - x_j \| < \varepsilon + \rho \quad ise.$$

$\rho = 0$ için X normlu uzayında bilinen anlamda Cauchy dizisi tanımını elde ederiz [9].

Teorem 3.7. *(x_i) dizisi r-yakınsak olsun, yani $LIM^r x_i \neq \emptyset$ olsun. Her $\rho \geq 2r$ için (x_i) bir ρ-Cauchy dizisidir. Böylece bir Cauchy derecesinin sınırı genel olarak azalan değildir* [9].

İspat. *Keyfi bir $x_0 \in LIM^r x_i$ alalım. Tanım 3.1'den her $\varepsilon > 0$ için $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $i, j \geq i_\varepsilon$ olduğunda $\| x_i - x_0 \| \leq r + \varepsilon/2$ ve $\| x_j - x_0 \| \leq r + \varepsilon/2$ dir. Buradan*

$$\| x_i - x_j \| \leq \| x_i - x_0 \| + \| x_j - x_0 \| \leq 2r + \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece (x_i) dizisi $\rho = 2r$ ile bir ρ-Cauchy dizisidir ve $2r$ sınırı genel olarak azalan değildir. Gerçekten $\| z \| = r$ ($z \in \mathbb{R}$) ve $x_i = (-1)^i z$ olsun. (x_i) dizisi $0 \in LIM^r x_i$'ye r-yakınsaktır ve $\rho = 2r$ minimum Cauchy derecesidir [9]. □

Normlu bir X uzayındaki ρ-Cauchy dizinin yakınsaklık derecesi azalan(genel olarak) değildir. Bu genelleme bizi önemli bir sabit olan "Jung Sabitine" götürür.

Tanım 3.3. *X uzayının sınırlı bir alt kümesi S olsun.*

$$J(X) = \sup \left\{ \frac{2r_X(S)}{d(S)} : S \subset X, 0 < d(S) < \infty \right\}$$

reel sayısına Jung Sabiti denir, burada

$$d(S) = \sup_{x,y \in S} \| x - y \|$$

şeklinde tanımlı olup S kümesinin çapı ve

$$r_X(S) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in S} \| x - y \|$$

şeklinde tanımlı olup S kümesini çevreleyen en küçük yuvarın yarı çapıdır.

Açıkça $1 \leq J(X) \leq 2$ dir. Bu sabit $X = \ell_2^n$ için $J(\ell_2^n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{1/2}$ dir. $X = \ell_p$ için $J(\ell_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ olur.

Teorem 3.8. *(x_i) dizisi X uzayında bir ρ-Cauchy dizisi ve $J(X)$, X uzayının Jung Sabiti olsun. (x_i) dizisi her $r > 2^{-1}J(X)\rho$ için r-yakınsak iken eğer boy$X < \infty$ ise (x_i) dizisi her $r \geq 2^{-1}J(X)\rho$ için r-yakınsaktır* [9].

3.3. Kaba Süreklilik

X ve Y normlu lineer uzaylar ve sırası ile $\| \,.\, \|_X$ ve $\| \,.\, \|_Y$'de X ve Y üzerinde norm, $f : X \to Y$ lineer operatör olsun. f'in sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır(Teorem **2**.6).

Şimdi kaba sürekliliği tanımlayalım ve ilgili örnek ve teoremleri verelim.

Tanım 3.4. *X ve Y normlu lineer iki uzay olsun. $f : X \to Y$ lineer operatörü $x_0 \in X$'te $r_X - r_Y$-süreklidir denir, eğer her $\varepsilon > 0$ için*

$$\| x - x_0 \|_X < \delta + r_X \quad \text{iken} \quad \| f(x) - f(x_0) \|_Y < \varepsilon + r_Y$$

eşitsizliklerini sağlayan $\delta + r_X > 0$, $\varepsilon + r_Y > 0$ sayıları var ise. f dönüşümü X uzayının her noktasında $r_X - r_Y$-sürekli ise f dönüşümü X uzayında süreklidir denir. $r_X - r_Y$-sürekli şeklinde gösterilir. $r_X = r_Y = 0$ ise norm sürekliliğini elde ederiz [**9**].

Örnek 3.2. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun ve $f(x) = x$ şeklinde tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında $0.1 - 0.1$-süreklidir.*

Gerçekten $\forall \varepsilon > 0$ için $\| x - 1 \|_X = |x - 1| < \delta + 0.1$ iken $\| x - 1 \|_Y = |x - 1| < \varepsilon + 0.1$ olacak şekilde ε'a bağlı bir δ sayısı bulmalıyız. $\varepsilon = \delta$ seçersek, $\| x - 1 \|_Y = |x - 1| < \delta + 0.1 = \varepsilon + 0.1$ bulunur. Buradan $f(x)$ fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında $0.1 - 0.1$-süreklidir [**4**].

Örnek 3.3. *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun ve $g(x) = x^3$ şeklinde tanımlansın. $g(x)$ fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında sürekli değildir.*

Gerçekten her $\varepsilon > 0$ için $\| x - 1 \|_X = |x - 1| < \delta + 0.1$ iken $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve $0 < \delta < 1$ olarak alınırsa. $x = \frac{\delta}{2}$ için $\| x - 1 \|_X = |\frac{\delta}{2} - 1| < \delta + 0.1$ eşitsizliği sağlanır. Buradan $\| \frac{\delta^3}{8} - 1 \|_Y = |\frac{\delta^3}{8} - 1|$ elde edilir. $\delta = \frac{1}{2}$ için $|\frac{\delta^3}{8} - 1| = |\frac{1}{64} - 1|$ bulunur. $\frac{63}{64} = 0.98 > \varepsilon + 0.1 = 0.6$ olduğundan ε'a bağlı bir δ sayısı bulamayız. Demek ki $g(x)$ fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında $0.1 - 0.1$-sürekli değildir.

Fakat $g(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasında $0.03 - 0.1$-sürekli olduğu yukarıdakine benzer şekilde gösterilebilir [**4**].

Teorem 3.9. *X ve Y normlu lineer uzay olsunlar. $t_Y \geq r_Y$ ve $q_X \geq p_X$ için $f : X \to Y$ dönüşümü x_0 noktasında $q_X - r_Y$-sürekli ise f dönüşümü $p_X - t_Y$-süreklidir* [4].

Sonuç 3.1. *f dönüşümü x_0 noktasında $q_X - r_Y$-sürekli ve $q > l(r < p)$ ise f dönüşümü $l_X - r_Y$-süreklidir($q_X - p_Y$-süreklidir)* [4].

Aşağıdaki teorem kaba sürekli fonksiyonların toplamı ve skaler ile çarpımı hakkında bilgi verir.

Teorem 3.10. *X ve Y iki normlu lineer uzay olsun.*

$f : X \to Y$ dönüşümü x_0 noktasında $q_X - r_Y$-sürekli

$g : X \to Y$ dönüşümü x_0 noktasında $p_X - h_Y$-sürekli

olsun. Bu durumda

a) $f + g$ dönüşümü x_0 noktasında $u = min\{q_X, p_X\}$ için $u - r_Y + h_Y$-süreklidir.

b) $f - g$ dönüşümü x_0 noktasında $u = min\{q_X, p_X\}$ için $u - r_Y + h_Y$-süreklidir.

c) kf dönüşümü x_0 noktasında $q_X - kr_Y$-süreklidir [4].

Teorem 3.11. *X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. Eğer boy$X < \infty$ ve $r > 0$ iken $f : X \to Y$ her lineer operatör $r_X - 0$-süreklidir, yani*

$$dist(x, \bar{B}_r(0)) \to 0 \quad iken \quad dist(f(x), f(\bar{B}_r(0))) \to 0 \; dir.$$

[9].

BÖLÜM 4

KABA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE KABA KONVEKSLİK

4.1. Kaba Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.1. *(X,d) tam metrik uzay, M kümesi de bu metrik uzay üzerinde kapalı ve boştan farklı bir küme olsun. $T : M \to M$ dönüşümü sabit bir $k \in (0,1)$ için,*

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y), \quad \forall x,y \in M$$

sağlar ise k-daralma olur. T dönüşümünün M kümesi üzerinde sabit bir noktası vardır, $x_0 \in M$ ilk noktasını keyfi olarak seçtiğimiz için, (x_i) dizisine yapılan iterasyon uygulamaları

$$x_{i+1} = Tx_i, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{4.1}$$

x_0 sabit noktasına yakınsar [9].

Teorem 4.2. *M kümesi $\mathbb{R}^n$ üzerinde boştan farklı konveks ve kompakt bir küme, $n \geq 1$ ve $T : M \to M$ dönüşümü sürekli olsun. T sabit bir noktaya sahiptir* [9].

Yukarıda verdiğimiz Teorem **4**.1 ve Teorem **4**.2'nin çok sayıda genellemesi vardır. Örnek olarak Teorem **4**.2'nin normlu lineer uzaylarda Schauder'in genellemesi, lokal konveks topolojik vektör uzaylarında Tychonov'un genellemesi verilebilir. Bu teoremlerin ortak şartı T dönüşümünün sürekli olmasıdır. T dönüşümü sürekli olmasa ne olurdu? Genel olarak T dönüşümünün

$$d(x_0, Tx_0) \leq \gamma$$

şeklinde tanımlı γ-sabit noktalarının olması beklenemez. Minimum(olabilecek en küçük) $\gamma \geq 0$ sayısı T dönüşümünün sahip olduğu sabit noktaları verir.

Araştırmalarımıza önemli bir araç olacak normlu lineer X uzayının öz(self)-Jung sabiti tanımını verelim.

Tanım 4.1. *X normlu uzay olmak üzere,*

$$j_s(X) = \sup\left\{\frac{2r_{convS}(S)}{d(S)} : S \subseteq X, 0 < d(S) < \infty\right\},$$

ifadesine öz-Jung sabiti denir. Burada $d(S)$, S kümesinin çapıdır ve

$$d(S) = \sup_{x,y \in S} \| x - y \|$$

şeklinde verilir. $r_{convS}(S)$ ise S kümesini çevreleyen yuvarın öz-yarıçapıdır ve

$$r_{convS}(S) = \inf_{x \in convS} \sup_{y \in S} \| x - y \|,$$

şeklinde verilir [**9**].

X normlu lineer uzayı için $1 \leq j_s(X) \leq 2$ dir. X iç çarpım uzayı veya $boyX \leq 2$ olduğunda her sınırlı S kümesi için $r_{convS}(S) = r_X(S)$ dir. n-boyutlu Euclid uzayı ℓ_2^n olmak üzere,

$$j_s(\ell_2^n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad j_s(\ell_2) = \sqrt{2} \tag{4.2}$$

dir.

Eğer $boyX = n$ ise

$$j_s(X) \leq \frac{2n}{n+1} \tag{4.3}$$

dir.

Öz-Jung sabiti için farklı bir durum $X = (\mathbb{R}^2, \| \,.\, \|_\infty)$ için $j_s(X) = 1$ dir.

Tanım 4.2. *X sonlu boyutlu normlu uzay olsun. $M \subseteq X$, $k \in (0,1)$ ve $r > 0$ için $T : M \to M$ dönüşümü,*

$$\forall x, y \in M \quad için \quad \| Tx - Ty \| \leq k \| x - y \| + r \tag{4.4}$$

eşitsizliğini sağlar ise r-kaba k-daralma denir [**9**].

Teorem 4.3. *$r \geq 0$ ve $k \in (0,1)$ için $T : M \to M$, r-kaba k-daralma bir dönüşüm ve $x_0 \in M$ için*

$$a = \| x_0 - Tx_0 \| - \frac{r}{1-k} > 0$$

olsun.

a) Eğer $\gamma > r/(1-k)$ ve

$$i \geq \log_k((\gamma - \frac{r}{1-k})a^{-1}) \qquad (\mathbf{4}.5)$$

iken bir (x_i) dizisi $(\mathbf{4}.1)$'den belirlenir ise (x_i), T dönüşümünün bir γ-sabit noktasıdır.

b) Eğer (x_i) dizisinin bir yığılma noktası $x_0 \in M$ ise x_0 noktası $\gamma = r/(1-k)$ ile T dönüşümünün bir γ-sabit noktasıdır.

*c) Her $\gamma > 0$ için T dönüşümünün bütün γ-sabit noktalarını kümesi olan I_γ sınırlıdır, eğer $\gamma \geq r/(1-k)$ iken I_γ kümesi T altında sabit ise yani $TI_\gamma \subset I_\gamma$ ise [**16**].*

İspat.

*a) (**4**.4) ve (**4**.1) sırası ile uygulanarak,*

$$\begin{aligned}
\| Tx_{i-1} - Tx_i \| &\leq k \| Tx_{i-2} - Tx_{i-1} \| + r \\
&\leq k^2 \| Tx_{i-3} - Tx_{i-2} \| + (1+k)r \\
&\vdots \\
&\leq k^i \| x_0 - Tx_0 \| + (1 + k + \ldots + k^{i-1})r \\
&= k^i \| x_0 - Tx_0 \| + \frac{1-k^i}{1-k} r,
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\| x_i - Tx_i \| \leq k^i(\| x_0 - Tx_0 \| - \frac{r}{1-k}) + \frac{r}{1-k} = k^i a + \frac{r}{1-k} \qquad (\mathbf{4}.6)$$

sonucuna ulaşılır.

*Buradan $a > 0$, $\frac{r}{1-k}$ ve $0 < k < 1$ olduğundan, (**4**.5) ve (**4**.6) eşitsizlikleri bize*

$$\| x_i - Tx_i \| \leq \left(\left(\gamma - \frac{r}{1-k} \right) a^{-1} \right) a + \frac{r}{1-k} = \gamma$$

sonucunu verir. Yani (x_i) dizisi, T'nin γ-sabit noktasıdır.

b) Keyfi $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned}\| x_0 - Tx_0 \| &\leq \| x_0 - x_i \| + \| Tx_{i-1} - Tx_0 \| \\ &\leq \| x_0 - x_i \| + k \| x_{i-1} - x_0 \| + r \\ &\leq \| x_0 - x_i \| + k(\| x_{i-1} - Tx_{i-1} \| + \| Tx_{i-1} - x_0 \|) + r \\ &\leq \| x_0 - x_i \| (1+k) + k \| x_{i-1} - Tx_{i-1} \| + r\end{aligned}$$

*eşitsizliğini yazabiliriz. (**4**.6) bize*

$$\limsup_{i\to\infty} \| x_{i-1} - Tx_{i-1} \| \leq \frac{r}{1-k}$$

olduğunu gösterir. x_0 noktası (x_i) dizisinin yığılma noktası olduğundan ele aldığımız (x_i) dizisinin bir alt dizisi x_0 noktasına yakınsar ve

$$\| x_0 - T_{x_0} \| \leq k\frac{r}{1-k} + r = \frac{r}{1-k}$$

elde edilir. Yani x_0 noktası T altında $\gamma = \frac{r}{1-k}$ ile γ-sabit'tir.

c) Her $\gamma > 0$ ve her $x, y \in I_\gamma$ için,

$$\| x - y \| \leq \| x - Tx \| + \| Tx - Ty \| + \| y - Ty \| \leq 2\gamma + k \| x - y \| + r$$

yazabiliriz. Buradan $\| x - y \| \leq \frac{2\gamma + r}{1-k}$ elde edilir. Yani I_γ sınırlıdır.

Eğer $x \in I_\gamma$ ise

$$\| Tx - T^2x \| \leq \| x - Tx \| + r \leq k\gamma + r$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan $0 < k < 1$ ve $\gamma \geq \frac{r}{1-k}$ iken

$$\| Tx - T^2x \| \leq k\gamma + (1-k)\gamma = \gamma$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yani $Tx \in I_\gamma$ dir. Böylece $\gamma = \frac{r}{1-k}$ için $TI_\gamma \subset I_\gamma$ sonucuna ulaşırız. □

Sonuç 4.1. *Eğer M kompakt metrik uzay veya sonlu boyutlu bir metrik uzayın kapalı alt kümesi ise her $T : M \to M$ r-kaba k-daralma dönüşümü $\gamma = \frac{r}{1-k}$ olacak şekilde en az bir γ-sabit noktasına sahiptir* [**16**].

İspat. *M kompakt ise her (x_i) dizisi (**4**.1)'den en az bir yığılma noktasına sahiptir. Böylece Teorem **4**.3(b)'den bu yığılma noktası T dönüşümü altında γ-sabit'tir. Kabul edelim ki M sonlu boyutlu bir metrik uzayın kapalı alt kümesi olsun. Keyfi $x_0 \in M$ alalım. $\gamma_0 = \| x_0 - Tx_0 \|$ için, x_0 noktasının γ_0-sabit olduğu açıktır. Böylece eğer $\gamma_0 \leq \frac{r}{1-k}$ ise x_0 noktası $\gamma = r/(1-k)$ ile T dönüşümü altında γ-sabit'tir. Eğer $\gamma_0 > \frac{r}{1-k}$ ise Teorem **4**.3(c)'yi sağlar her (x_i), $(i \in \mathbb{N})$ γ-sabit'tir. Buradan (x_i), ele aldığımız sonlu boyutlu uzayın I_{γ_0} sınırlı alt kümesini içerir. Böylece (x_i) dizisinin sahip olduğu en az bir yığılma noktası M'ye aittir. Çünkü M kapalıdır. Teorem **4**.3(c)'den sonuca ulaşılır.* □

Örnek 4.1. *$r > 0$, $k \in (0,1)$ ve*

$$M_1 = \left(-\infty, \frac{-r}{2(1-k)}\right), M_2 = \left(\frac{r}{2(1-k)}, \infty\right) \quad ve \quad M = M_1 \cup M_2 \tag{4.7}$$

olsun. Tx dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} \frac{r}{2} - kx & , \quad x \in M_1 \text{ ise} \\ -\frac{r}{2} - kx & , \quad x \in M_2 \text{ ise} \end{cases}, \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlayalım. T dönüşümü r-kaba k-daralma dönüşümdür. Gerçekten,

eğer $\{x,y\} \subset M_1$ veya $\{x,y\} \subset M_2$ ise

$$|Tx - Ty| = |-kx - ky| = k|x-y|$$

elde edilir. Yani T dönüşümü r-kaba k-daralma dönüşümdür.

Eğer $x \in M_1$ ve $y \in M_2$ veya $x \in M_2$ ve $y \in M_1$ ise

$$|Tx - Ty| \leq |\frac{r}{2} - \frac{-r}{2}| + |kx - ky| = r + k|x-y|$$

elde edilir. Yani T dönüşümü r-kaba k-daralma dönüşümdür.

*(**4**.7) ve (**4**.8)'de eğer $x \in M_1$ ise*

$$Tx > \frac{r}{2} - k\frac{-r}{2(1-k)} = \frac{r}{2(1-k)}$$

elde edilir. Yani $Tx \in M_2$ dir.

Eğer $x \in M_2$ ise

$$Tx < \frac{-r}{2} - k\frac{r}{2(1-k)} = \frac{-r}{2(1-k)}$$

elde edilir. Yani $Tx \in M_1$ dir. Buradan T dönüşümü $T : M \subset \mathbb{R} \to M$ dir. Bundan başka her $x \in M$ için

$$|x - Tx| > \inf M_2 - \sup M_1 = \frac{r}{2(1-k)} - \frac{-r}{2(1-k)} = \frac{r}{1-k}$$

yazılabilir. Bunun anlamı $\gamma \leq \frac{r}{1-k}$ ile T, r-kaba k-daralma dönüşümü hiç bir noktada γ-sabit değildir [**16**].

Sonuç 4.2. *Teorem **4**.3'de gösterilen (**4**.1) iterasyonu, $\gamma \geq \frac{r}{1-k}$ için r-kaba k-daralma dönüşümlerinin γ-sabit noktalarını tahmin edebilmek veya belirlemek için kullanılabilir. Fakat genel olarak $\gamma < \frac{r}{1-k}$ ile γ-sabit noktalar belli olsa bile onları bulacak daha iyi bir uygulama yoktur. Bunun ile ilgili bir örnek verelim* [**16**].

Örnek 4.2. *(**4**.8) ile tanımlı T dönüşümünü genişleterek*

$$\tilde{T}x = \begin{cases} \frac{r}{2} - kx & , \quad x \in \tilde{M}_1 \text{ ise} \\ -\frac{r}{2} - kx & , \quad x \in \tilde{M}_2 \text{ ise} \end{cases}, \tag{4.9}$$

$\tilde{M}_1 = (-\infty, 0]$ ve $\tilde{M}_2 = (0, \infty)$ şeklinde $\tilde{T}$ dönüşümünü tanımlayalım. $\tilde{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, r-kaba k-daralma dönüşümdür. $[\frac{r}{2}, \frac{r}{1-k}]$ aralığının tüm değerleri $[\frac{-r}{2(1-k)}, \frac{r}{2(1-k)}]$ intervali üzerinde $|x - \tilde{T}x|$ farkı olarak kabul edilir. Bunun anlamı her $\gamma \geq \frac{r}{2}$ için $\tilde{T}$ dönüşümünün γ-sabit noktalarının kümesi I_γ boştan farklıdır.

$\tilde{M}_1$ ve $\tilde{M}_2$ içeren alt kümelerin $\tilde{M}'_1 = \left(\frac{-r}{2(1-k)}, 0\right)$ ve $\tilde{M}'_2 = \left(0, \frac{r}{2(1-k)}\right)$ şeklinde noktaları ele alalım. Buradan

$$x \in \tilde{M}'_1 \Rightarrow \tilde{T}x \in \tilde{M}'_2 \quad ve \quad x \in \tilde{M}'_2 \Rightarrow \tilde{T}x \in \tilde{M}'_1$$

*olduğunu kolayca görülür. Böylece $\tilde{M}'_1 \subset \tilde{M}_1$, $\tilde{M}'_2 \subset \tilde{M}_2$ yazılabilir ve (**4**.9)'u sağlayan*

$$\tilde{T}x - x = \begin{cases} \frac{r}{2} - (1+k)x & , \quad x \in \tilde{M}'_1 \text{ ise} \\ -\frac{r}{2} - (1+k)x & , \quad x \in \tilde{M}'_2 \text{ ise} \end{cases},$$

ve

$$\tilde{T^2}x - \tilde{T}x = \begin{cases} -r(1+\frac{k}{2}+k(1+k)x & , \quad x \in \tilde{M'}_1 \ ise \\ r(1+\frac{k}{2}+k(1+k)x & , \quad x \in \tilde{M'}_2 \ ise \end{cases},$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan eğer $x \in \tilde{M'}_1$ iken $x > \frac{-r}{2(1-k)}$ ve $1-k^2 > 0$ ise

$$\begin{aligned} |\tilde{T^2}x - \tilde{T}x| - |\tilde{T}x - x| &= (1-k^2)x + \frac{r(1+k)}{2} \\ &> (1-k^2)x + \frac{-r}{2(1-k)} + \frac{r(1+k)}{2} = 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Benzer şekilde $x \in \tilde{M'}_2$ iken $x < \frac{r}{2(1-k)}$ ise

$$\begin{aligned} |\tilde{T^2}x - \tilde{T}x| - |\tilde{T}x - x| &= \frac{r(1+k)}{2} - (1-k^2)x \\ &> \frac{r(1+k)}{2} - (1-k^2)\frac{r}{2(1-k)} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Her durumda $\tilde{M'} = \tilde{M'}_1 \cup \in \tilde{M'}_2$ bileşimi yazılabilir. Buradan

$$|\tilde{T}(\tilde{T}x) - \tilde{T}x| > |\tilde{T}x - x|$$

elde edilir.

Sonuç olarak herhangi bir $x_0 \in \tilde{M'}$ noktasından başlayan $x_{i+1} = \tilde{T}x_i$ tarafından tanımlanan (x_i) dizisi $\tilde{M'}$'nin içinde kalır. Fakat her iterasyondan sonra $|\tilde{T}x_i - x_i|$ farkı büyür. Böylece eğer $\gamma < \frac{r}{1-k}$ ve $|\tilde{T}x_i - x_i| > \gamma$ ise $\gamma \geq \frac{r}{2}$ için I_γ boştan farklı olmasına rağmen (x_i) dizisinin γ-sabit noktalarının kümesi I_γ yaklaşık olarak belirlenemeyebilir. Fakat yapılan hamleler bizi bu kümeden daha da uzaklaştırır [**16**].

Teorem 4.4. *X n-boyutlu normlu uzay M de onun kapalı ve konveks alt kümesi ve T : $M \to M$ dönüşümü r-kaba k-daralma olsun. O zaman*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in M : \| x_0 - Tx_0 \| < \frac{1}{2} j_s(X) r + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer boy$X = 1$ veya X, 2-boyutlu kesin konveks normlu uzay yada X Euclid uzayı ise, o zaman

$$\exists\, x_0 \in M \text{ için } : \| x_0 - Tx_0 \| \leq \frac{1}{2} j_s(X) r$$

eşitsizliği sağlanır [**9**].

$boyX = n$ için Teorem **4**.4 ve (**4**.3)'den

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in M : \| x_0 - Tx_0 \| < \frac{n}{n+1} r + \varepsilon \text{ dir.}$$

Eğer X n-boyutlu Euclid uzayı ℓ_2^n ise (**4**.2) den

$$\exists x_0 \in M : \| x_0 - Tx_0 \| \leq \left(\frac{n}{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} r$$

eşitsizliği yazılabilir.

Tanım 4.3. *$r \geq 0$ X normlu lineer uzay ve $M \subseteq X$ olsun. $T : M \to M$ dönüşümü civar r-sürekli olarak adlandırılır, eğer her $x \in M$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır öyleki $y, z \in M$ için $\| T_y - T_z \| < r + \varepsilon$ iken $\| y - x \| < \delta$ ve $\| z - x \| < \delta$ ise.*

Eğer δ x'e bağlı değil ise T dönüşümü düzgün r-sürekli olarak adlandırılır. r-kaba k-daralma dönüşüm düzgün r-süreklidir. $T : M \to M$ dönüşümünün düzgün r-sürekli olması M kümesinin kapalı olmasını gerektirmez [**9**].

Teorem 4.5. *X bir Banach uzayı M de onun boştan farklı ve konveks alt kümesi ve $T : M \to M$ olsun. $r \geq 0$ için aşağıdaki ifadelerin hepsinin doğru olduğunu kabul edelim.*

i) M kompakt ve T civarında(around) r-sürekli,

ii) M göreceli(relatively) kompakt ve T düzgün r-sürekli,

iii) M kapalı, $T(M)$ göreceli kompakt ve T civarında r-sürekli,

iv) $T(M)$ göreceli kompakt ve T civarında r-sürekli.

O zaman

a) Her $\rho > 0$ için $x_0 \in M$ vardır öyleki

$$\| x_0 - Tx_0 \| < \frac{1}{2} j_s(X) r + \rho,$$

b) Eğer $boyX < \infty$ ve her uygun alt kümesi $X' \subseteq X$ için $j_s(X') < j_s(X)$, $x_0 \in M$ vardır öyleki,

$$\| x_0 - Tx_0 \| \leq \frac{1}{2} j_s(X) r,$$

c) Eğer boy$X = \infty$ ve X'in her sonlu boyutlu X' alt kümesi için $j_s(X') < j_s(X)$, $x_0 \in M$ vardır öyleki,

$$\| x_0 - Tx_0 \| < \frac{1}{2} j_s(X) r,$$

d) $\exists\, x_0 \in M$ vardır öyleki $\| x_0 - Tx_0 \| < r$

eşitsizlikleri geçerlidir [**9**].

4.2. Kaba Konvekslik

Konveks küme ve konveks fonksiyon tanımlarını hatırlayacak olursak, lineer bir uzayda D kümesinin konveks olması için

$$\forall x_0, x_1 \in D \quad \forall \lambda \in (0,1) : x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in D \tag{4.10}$$

sağlaması gerekir.

$f : D \to \mathbb{R}$(D konveks bir küme) fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer her $x_0, x_1 \in D$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(x_\lambda) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1) \tag{4.11}$$

ile Jensen eşitsizliği adı verilen (**4**.11) eşitsizliğini sağlar ise. Kaba konvekslik için çeşitli kavramlar vardır. Bunlardan bazıları Yunan harfleri ile ifade edilen ρ, δ ve γ-kaba konveks, tanımlarda kullanılan bu harfler bir parametre değil isimlendirmedir.

Konveks fonksiyon çeşitleri ve onlarla ilgili bazı örnekleri verelim.

Tanım 4.4. *(ρ-konveks) $f : D \subset X \to \mathbb{R}$($D$ konveks bir küme) fonksiyonu r_ρ kabalık(roughness) derecesi ile ρ-konveks olarak adlandırılır, eğer f fonksiyonu her $x_\lambda \in [x_0, x_1]$ ve $\| x_0 - x_1 \| \geq r_\rho$ sağlayan her $x_0, x_1 \in D$ için (**4**.11) sağlarsa* [**15**].

Tanım 4.5. *(δ-konveks) $f : D \subset X \to \mathbb{R}$($D$ konveks bir küme) fonksiyonu r_δ kabalık derecesi ile δ-konveks olarak adlandırılır, eğer f fonksiyonu $\| x_\lambda - x_0 \| \geq r_\delta/2$ ve $\| x_\lambda - x_1 \| \geq r_\delta/2$ ile her $x_\lambda \in [x_0, x_1]$ ve $\| x_0 - x_1 \| \geq r_\delta$ sağlayan her $x_0, x_1 \in D$ için (**4**.11) sağlarsa* [**15**].

Tanım 4.6. *(γ-konveks) $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\| x_0 - x_1 \| \geq r_\gamma$ şartı ve r_γ kabalık derecesi ile γ-konveks olarak adlandırılır eğer,*

$$f(x'_o) + f(x'_1) \leq f(x_0) + f(x_1) \tag{4.12}$$

eşitsizliğini sağlarsa. Burada $x'_0, x'_1 \in [x_0, x_1]$, $\| x_0 - x'_0 \| = r_\gamma$ ve $\| x_1 - x'_1 \| = r_\gamma$ dir. [**15**].

Tanım 4.7. *(ortanokta(midpoint) δ-konveks) $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu r_δ kabalık derecesi ile ortanokta δ-konveks olarak adlandırılır. Eğer f fonksiyonu $\| x_\lambda - x_0 \| \geq r_\delta$ iken $x_\lambda = \frac{x_0 + x_1}{2}$ için ($\boldsymbol{4}$.11) eşitsizliğini sağlarsa* [**15**].

Tanım 4.8. *(ortanokta γ-konveks) $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu r_γ kabalık derecesi ile ortanokta γ-konveks olarak adlandırılır. Eğer $\| x_0 - x_1 \| \geq r_\gamma$ iken $x_\lambda = \frac{x_0 + x_1}{2}$ için ($\boldsymbol{4}$.11) eşitsizliğini sağlarsa* [**15**].

Tanım 4.9. *(r-periyot) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu r periyodu ile reel doğru üzerinde r-periyodik fonksiyondur. Yani $x, x + r \in D$ olduğunda $f(x) = f(x + r)$ dir* [**15**].

Örnek 4.3. *$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & , \quad x \in [0, 1) \textit{ ise,} \\ 0 & , \quad x \geq 1 \quad \textit{ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $r_\rho \geq 2$ kabalık derecesi için $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ aralığında ρ-konveks'tir. Fakat f fonksiyonu konveks değildir [**15**].

Örnek 4.4. *$f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , \quad x \in [-3, -1] \textit{ ise,} \\ 0 & , \quad x \in (-1, 1) \quad \textit{ise,} \\ -x + 3 & , \quad x \in [1, 3] \quad \textit{ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.f fonksiyonu keyfi $r_\rho > 4$ kabalık derecesi için $[-3, 3]$ aralığında δ-konveks'tir. Fakat f fonksiyonu $r_\rho < 6$ için ρ- konveks değildir [**15**].

Örnek 4.5. *$f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \{1, 2\} \quad \textit{ise,} \\ 0 & , \quad x \in [0, 3] - \{1, 2\} \textit{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $r_\delta = 2$ *kabalık derecesi için* $[0,3]$ *aralığında ortanokta* δ*-konveks'tir. Fakat f fonksiyonu*

$$f(0.6\times 0+0.4\times 2.5)=f(1)=1>0=0.6f(0)+0.4f(2.5)$$

olduğundan $r_\delta = 2$ *kabalık derecesi için* δ*- konveks değildir* [**15**].

Örnek 4.6. *t'nin tam kısmı* $[|t|]$ *şeklinde yani* $[|t|]=\max\{z\in Z : z\leq t\}$ *olsun.* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu* $f(x)=[|x|]$ *şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu* $r_\gamma = 1$ *kabalık derecesi için* $\mathbb{R}$*'de* γ*-konveks'tir* [**15**].

Örnek 4.7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x \text{ rasyonel ise,} \\ -x & , \quad x \text{ irrasyonel ve negatif ise,} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $r_\gamma > 0$ *kabalık derecesi için* $\mathbb{R}$*'de ortanokta* γ*-konveks'tir* [**15**].

Teorem 4.6. *Aşağıda verdiğimiz şema kaba konveks fonksiyonların farklı çeşitleri arasındaki ilişkiyi açıklar.*

$$\begin{array}{ccccccc} konveks & \xrightarrow{\forall r_\rho>0} & \rho-konveks & \xrightarrow{r_\rho\leq r_\delta} & \delta-konveks & \to & ortanokta\ \delta-konveks \\ & & \Big\downarrow r_\rho\leq r_\gamma & & & & \Big\downarrow r_\delta = 2r_\gamma \\ & & \gamma-konveks & & \longrightarrow & & ortanokta\ \gamma-konveks \end{array}$$

[**13**].

Teorem 4.7.

a) $f: D\subset X\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu konveks ise* r_γ *kabalık derecesi ile* γ*-konvekstir.*

b) r_γ *periyodu ile* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu periyodik ise* r_γ *kabalık derecesi ile* γ*-konvekstir.*

c) f_1 *ve* f_2 *fonksiyonları* r_γ *kabalık derecesi ile* γ*-konveks ve* $\lambda_1\geq 0$ *ve* $\lambda_2\geq 0$ *iken* $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ *toplamı da* γ*-konvekstir* [**13**].

İspat.

a) $x_2 - x_1 > r_\gamma$ *ve* f *fonksiyonunun konveks olduğunu kabul edelim.* $\lambda = \frac{r_\gamma}{x_2 - x_1}$ *olsun.* $\lambda \in (0,1)$ *iken*

$$x_1 + r_\gamma = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2,$$

$$x_2 - r_\gamma = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece Jensen eşitsizliğinden,

$$f(x_1 + r_\gamma) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

$$f(x_2 - r_\gamma) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan

$$f(x_1 + r_\gamma) + f(x_2 - r_\gamma) \leq f(x_1) + f(x_2),$$

yazılır. Bununda anlamı f *fonksiyonu* γ*-konveks'tir.*

b) f *fonksiyonunu* $r_\gamma > 0$ *periyodu ile periyodik fonksiyon olduğunu kabul edelim.* $x_1, x_2 \in D \subset \mathbb{R}$ *için* $x_2 - x_1 > r_\gamma$ *olsun.* D *kümesi* $x_1 + r_\gamma$ *ve* $x_2 + r_\gamma$ *noktalarını içerir ve*

$$f(x_1 + r_\gamma) + f(x_2 - r_\gamma) = f(x_1) + f(x_2),$$

eşitliği yazılabilir. Buradan f *fonksiyonu* γ*-konveks'tir.*

c) İspatı Örnek ***4**.8 ile görmek kolaydır.* □

Örnek 4.8. $f(x) = x^2 + k\sin x$ *fonksiyonu* $r = 2\pi$ *kabalık derecesi ile* γ*-konvekstir. Çünkü* x^2 *konveks* $k\sin x$, $r = 2\pi$ *periyodu ile periyodiktir.* $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $x, y \in X$ *için* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *olduğundan* f, $r > 0$ *kabalık derecesi ile* γ*-konvekstir* [**9**].

Örnek 4.9. r *keyfi pozitif bir rasyonel sayı,*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \quad \textit{rasyonel ise} \\ 1 \quad , \quad x \quad \textit{irrasyonel ise} \end{cases} \qquad (\mathbf{4}.13)$$

r *periyodu ile periyodiktir, böylece* r *kabalık derecesi ile* γ*-konvekstir* [**9**].

Teorem 4.8. *$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her pozitif r sabiti için r kabalık derecesi ile γ-konveks iki fonksiyon f_1 ve f_2 vardır öyleki $f = f_1 - f_2$ dir* [9].

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parçalı sabit bir fonksiyon olsun. x'nin tam kısmı $[|x|]$ olmak üzere

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad f(x) = f([|x|]) = g([|x|]) \tag{4.14}$$

sağlansın. Genel olarak g fonksiyonu konveks olmasına rağmen f fonksiyonu konveks değildir. Buna karşılık bu yaklaşım ile konvekslik korunabilir. Bunun ile ilgili bir teorem verelim.

Teorem 4.9. *(4.14) sağlansın. $r_\gamma = 1$ kabalık derecesi ile f fonksiyonu γ-konvekstir $\Leftrightarrow$ $r_\gamma = 1$ kabalık derecesi ile g fonksiyonu γ-konvekstir* [9].

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kaba yakınsak dizi ve kaba süreklilik tanımı yapılmıştır ve ilgili örnekler çözülmüştür. Daha sonra kaba sabit nokta teoremleri ve kaba konvekslikten bahsedilmiştir.

Sonuç olarak kaba analiz, klâsik analiz kavramlarının üzerine inşa edilmiştir. Klâsik analizi kapsar ve daha geniş bir alanda çalışmamıza yardımcı olur.

Kaba analizde tanımlanan yakınsaklık, süreklilik, konvekslik gibi kavramlar ile fuzzy dizilerin uzayları üzerindeki benzer kavramlar karşılaştırılarak yeni teoremler verilebileceği tezimize konulacak temel önerilerdir.

KAYNAKLAR

1. Aytar S., The Rough Limit Set and The Core of a Real Sequence, Numer Funct Anal Optim. 29, 283-290, 2008.

2. Balcı M., Analiz 1, Balcı Yayınları, Ankara, 1999.

3. Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006.

4. Burgin M., Neoclasical Analysis, Nova Science Publishers, New York, 2008.

5. Çakar Ö., Fonksiyonel Analize Giriş 1, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayın no 13, Ankara, 2007.

6. Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, U.S.A, 1978.

7. Phu H. X., Rough Convergence in Normed Linear Spaces, Numer. Funct. Anal. Optim, 22, 201-224, 2001.

8. Phu H. X., Rough Convergence in Infinite Dimensional Normed Space, Numer. Funct. Anal. Optim, 24, 285-301, 2003.

9. Phu H. X, Some Basic Ideal of Rough Analysis, Proceedings of the Sixth Vietnamese Mathematical Conference, 3-31, September 7-10, 2005.

10. Phu H. X., Fixed-Point Property of Roughly Contractive Mappings, Z. Anal. Anw. 22, 517-528, 2003.

11. Phu H. X., γ-Subdifferetial and γ-Convexity of Functions on a Normed Space, J.Optim. Theory Appl. 85,649-676, 1995.

12. Phu H. X., Strictly and Roughly Convexlike Fonction, J. Optim. Teory Appl. 117,139-156, 2003.

13. Phu H. X., Et al., Piecewise Constant Roughly Convex Functions, J. Optim. Teory Appl. 117,415-438, 2003.

14. Phu H. X., Hai N.N., Some Analytical Properties of γ-Convex Functions on the Real Line, J. Optim. Teory Appl. 91,671-694, 1996.

15. Phu H. X., Six Kind of Roughly Convex Fonction, J. Optim. Teory Appl. 92,357-375, 1997.

16. Phu H. X., Truong T. V., Invariant Property of Roughly Contractive Mappings, Vietnam Journal of Math. 28,275-290, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Döne ÖZBEK 1986 yılında Nevşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimi Nevşehir'de tamamladı. 2005 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2007 yılında yatay geçiş ile Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümüne geçiş yaptı. 2009 yılında üniversiteden mezun oldu. 2009 yılında Fırat Üniversitesinde tezsiz yüksek lisans yaptı. 2010 yılında Nevşehir Üniversitesinde yüksek lisansa başladı. Evli olup halen Nevşehir Üniversitesi matematik bölümünde yüksek lisans yapmaktadır.

Adres: Nevşehir Üniversitesi

e-posta: matimatical@hotmail.com

Tel: 05079541530