

**T.C.  
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PANTOGRAPH DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ  
METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**Tezi Hazırlayan  
Adem ÇİL**

**Tezi Yöneten  
Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**OCAK 2013  
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Adem ÇİL** tarafından hazırlanan “**Pantograph denklemlerin homotopi analiz metodu ile çözümü**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

14.02.2013

**JÜRİ:**

Başkan: Doç. Dr. Murat ATIŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ



**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun **11.03.2013** tarih ve **2013./08-03.** sayılı kararı ile onaylanmıştır.

**11. / .03. / .2013**

**Doc. Dr. Sahlan ÖZTÜRK**  
**Enstitü Müdürü**



**TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans ve tez çalışmalarım süresince büyük yardım ve desteğini gördüğüm tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ'a, hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen meslektaş arkadaşlarım Ergün ERDOĞAN ve Musa BAŞBÜK'e, çalışmalarım sırasında gösterdikleri sevgi, fedakarlık ve anlayıştan dolayı eşim Canan ÇİL ve kızım Elif Ayça ile oğlum Oğuz Kağan ÇİL'e en derin duygularla teşekkür ederim.

# PANTOGRAPH DENKLEMLERİNİN HOMOTOPI ANALİZ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Adem ÇİL

Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2013

Tez Danışman: Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı homotopi analiz metodunu kullanarak gecikmeli diferansiyel denklemlerin önemli bir bölümü olan pantograph denklemlerinin çözümlerini elde etmek ve gerçek çözümleri ile karşılaştırmasını yapmaktır.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde Gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanım alanları hakkında bilgi verilerek Pantograph denklemlerinin öneminden bahsedildi. İkinci bölümünde gecikmeli diferansiyel denklemler ve buna bağlı olarak Pantograph denklemlerin elde edilişi anlatıldı. Pantograph denklemlerinin çeşitlerinden bahsedildi.

Üçüncü bölümde Homotopi Analiz Metodu tanıtılarak Pantograph denklemleri ile Multi- Pantograph Denklemlerinin deformasyon denklemlerinin elde edilişi anlatıldı.

Dördüncü bölümde homotopi analiz metodu kullanılarak Pantograph denklemlerinin  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edildi. Çözüm serilerine uygun  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi belirlendi. Homotopi analiz metodu ile diğer yöntemlerin mukayeseleri yapılarak hata grafikleri çizildi.

**Anahtar Kelimeler:** Homotopi Analiz Metodu; Pantograph Denklemler; Gecikmeli Diferansiyel Denklemler.



# THE SOLUTION OF PANTOGRAPH EQUATIONS WITH THE HOMOTOPY ANALYSIS METHOD

Adem ÇİL

Nevşehir University, Institute of Science

Master's Thesis, January 2013

Thesis Advisor: Assistant Professor Aytekin ERYILMAZ

## ABSTRACT

The aim of this study is, using the homotopy analysis method, to get the solution of pantograph equations which are important parts of delay differential equations and to compare them with their real solutions.

In the first part of this study which consists of four sections, the usage of delay differential equations and the importance of Pantograph equations are explained. In the second part, delay differential equations and accordingly, how we get pantograph equations are mentioned. Types of pantograph equations are added afterwards.

In the third part, by introducing the homotopy analysis method, how we get deformation equations of multi-pantograph equations with pantograph equations has been explained.

In the fourth part, using the homotopy analysis method, the serial solutions of pantograph equations depending on the  $\hbar$  convergence control parameter have been obtained.  $\hbar$  convergence control parameter appropriate to the solution series has been determined. Finally, homotopy analysis method and the other methods have been compared and their error graphs have been drawn.

**Key Words :** Homotopy Analysis Method; Pantograph Equations; Delay Differential Equations

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY .....	i
TEŞEKKÜR .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
TABLolar LİSTESİ .....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
PANTOGRAPH DENKLEMLER	
2.1. Pantograph Denklemler .....	3
2.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler .....	4
2.3. Multi-Pantograph Denklemler .....	6
3. BÖLÜM	
HOMOTOPI ANALİZ METOTU	
3.1. Homotopi Analiz Metodu .....	9
3.2. Pantograph Denklemlerinin Deformasyon Denklemleri .....	14
4. BÖLÜM	
UYGULAMALAR	
Örnek 4.1 .....	17
Örnek 4.2 .....	22
Örnek 4.3 .....	26
Örnek 4.4 .....	30

Örnek 4.5. ....	34
Örnek 4.6. ....	40
Örnek 4.7. ....	46
5. BÖLÜM	
TARTIŞMA VE SONUÇLAR .....	52
KAYNAKLAR .....	54
ÖZGEÇMİŞ .....	57

## TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 4.1. (4.1) probleminin uygun $\hbar$ belirleme tablosu . . . . .	19
Tablo 4.2. (4.1) probleminin hata tablosu . . . . .	20
Tablo 4.3. (4.1) problemi için Taylor Metodu, Adomian Metodu ve Homotopi Analiz Metodunun değişik iterasyonlarda fark fonksiyonlarının mukayese tablosu . . . . .	22
Tablo 4.4. (4.12) probleminin uygun $\hbar$ belirleme tablosu. . . . .	24
Tablo 4.5. (4.12) probleminin hata tablosu. . . . .	25
Tablo 4.6. (4.22) probleminin uygun $\hbar$ belirleme tablosu. . . . .	29
Tablo 4.7. (4.22) probleminin hata tablosu. . . . .	29
Tablo 4.8. (4.33) probleminin uygun $\hbar$ belirleme tablosu. . . . .	32
Tablo 4.9. (4.33) probleminin hata tablosu. . . . .	33
Tablo 4.10. (4.33) probleminin Adomian Metodu (ADM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile elde edilen sonuçları ile tam çözümün mukayese tablosu. . . . .	34
Tablo 4.11. (4.42) probleminin uygun $\hbar$ belirleme tablosu. . . . .	37
Tablo 4.12. (4.42) probleminin hata tablosu. . . . .	38
Tablo 4.13. (4.42) problemi için Adomian Metodu(ADM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) fark fonksiyonlarının mukayese tablosu . . . . .	39
Tablo 4.14. (4.52) probleminin uygun $\hbar$ belirleme tablosu. . . . .	43
Tablo 4.15. (4.52) probleminin hata tablosu. . . . .	44

Tablo 4.16. (4.52) problemi için Adomian Metodu (ADM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) fark fonksiyonlarının mukayese tablosu. . . . .	45
Tablo 4.17. (4.62) probleminin uygun $h$ belirleme tablosu. . . . .	49
Tablo 4.18. (4.62) probleminin hata tablosu. . . . .	50
Tablo 4.19. (4.62) problemi için Adomian Metodu (ADM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) fark fonksiyonlarının mukayese tablosu . . . . .	51

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. (4.1) probleminin $\hbar$ eğrisinin grafiği. ....	19
Şekil 4.2. (4.1) probleminin hata fonksiyon grafiği. ....	20
Şekil 4.3. (4.1) probleminin $[0,1]$ aralığı hata fonksiyon grafiği. ....	21
Şekil 4.4. $N = 13$ için (4.1) probleminin $U_{13}(x)$ yakınsamasının $\hbar = -1$ , $\hbar = -0,9$ , $\hbar = -0,8$ , $\hbar = -0,7$ ve $\hbar = -0,5$ için grafiği ile $u(x) = e^x$ eğrisinin grafiği . ....	21
Şekil 4.5. (4.12) probleminin $\hbar$ eğrisinin grafiği. ....	24
Şekil 4.6. (4.12) probleminin $[0,1]$ aralığına hata fonksiyon grafiği. ....	25
Şekil 4.7. $N = 15$ için (4.12) probleminin $U_{15}(x)$ yakınsamasının $\hbar = -1$ , $\hbar = -0,7$ ve $\hbar = -1,5$ için grafiği ile $u(x) = x^2$ eğrisinin grafiği. ....	26
Şekil 4.8. (4.22) probleminin $\hbar$ eğrisinin grafiği. ....	28
Şekil 4.9. (4.22) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. ....	30
Şekil 4.10. (4.33) probleminin $\hbar$ eğrisinin grafiği. ....	32
Şekil 4.11. (4.33) probleminin $[0,1]$ aralığına hata fonksiyon grafiği. ....	33
Şekil 4.12. (4.42) probleminin $\hbar$ eğrisinin grafiği. ....	37
Şekil 4.13. (4.42) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. ....	38

Şekil 4.14. Problem (4.42) nin $[0,1]$ aralığında gerçek çözümü $u(x)$ ile bazı $h$ değerleri için çözüm serilerinin kıyaslama grafikleri. ....	39
Şekil 4.15. (4.52) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. ....	43
Şekil 4.16. (4.52) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. ....	44
Şekil 4.17. Problem (4.52) nin $[0,1]$ aralığında gerçek çözümü $u(x)$ ile bazı $h$ değerleri için çözüm serilerinin kıyaslama grafikleri. ....	45
Şekil 4.18. (4.62) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. ....	49
Şekil 4.19. (4.62) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. ....	50
Şekil 4.20. Problem (4.62) nin $[0,1]$ aralığında gerçek çözümü $u(x)$ ile bazı $h$ değerleri için çözüm serilerinin kıyaslama grafikleri. ....	51

## 1.BÖLÜM

### GİRİŞ

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin (GDD) mühendislik ve fen bilimlerinde geniş uygulama alanları vardır. Gecikmeli diferansiyel denklemler, birçok olayın başarılı bir şekilde modellenmesini sağlamaktadır. Bu denklemlerin matematiksel modellerindeki; bir zamana bağlı işlemlerin değişim oranının söz konusu olması sadece günümüzde değil, geçmişte de dikkat çekmiştir. Günümüzde biyoloji, ekonomi, kontrol ve elektrodinamik gibi farklı alanlarda yapılan çalışmalar göstermiştir ki, gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) çok sayıda farklı bilinmezin açıklanmasında önemli bir yere sahiptir.

Diferansiyel denklemler uzun zaman çeşitli hücre popülasyonlarını modellemek için kullanılmıştır. Birçok modelleme sürecinin başlangıç noktası adi diferansiyel denklemler (ADD) olmuştur. Geribildirim, hücre bölünmesi, zaman gecikmeleri vb. çıkmazları modellemek için gecikmeli diferansiyel denklemler fen bilimlerinde doğal bir araç haline gelmiştir. Çoğu biyolojik sistemlerin doğasında zaman gecikmeleri olması nedeniyle gecikmeli diferansiyel denklemler ile modellendirilirler. Son yıllarda özellikle HIV virüsünün çoğalmasının modellenmesi çalışmalarında gecikmeli diferansiyel denklemler çok büyük bir önem taşımaktadır. Gecikmeli diferansiyel denklemler enfeksiyon hastalıklarının yayılması, popülasyon dinamiğinin modellenmesi gibi bir çok karmaşık olgu için gerçekçi modeller sunmaktadır.

Pantografik denklemler gecikmeli diferansiyel denklemlerin önemli çeşitlerinden biridir ve analitik ve sayısal çözümlerde önemli bir yardımcı olarak görülür.

Bir tür cetvel olan pantograf; elektrik akımını trenler ve tramvaylar için elektrik direklerinden toplayan bir araçtır. Pantograph terimi; kopyalama, yazma, çizme için kullanılan pantografi araçlarına (cetvel gibi) benzerliğinden dolayı türetilmiştir.



Pantografik denklemlerden ilk olarak 1971'de Ockendon ve Taylor'un [1] "The dynamics of a current collectin system for an electric locomotive" çalışmasında bahsedilmiştir. Bu çalışma elektrik lokomotifinin baş kısmının elektrik toplama sistemini dizayn etmiştir. Son yıllarda pantograph denklemlerini konu edinen çok fazla çalışma olmuştur [14-20].

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin önemli bir bölümünü oluşturan pantograph denklemlerinin farklı mertebelerden lineer ve lineer olmayan birçok çeşiti bulunmaktadır. Bu tezde farklı türden pantograph denklemlerin homotopi analiz metodu ile çözümü araştırılmaktadır. Bu yöntem Liao tarafından geliştirilmiştir [2-7]. Metodun Pantograph denklemlere uygulanmasında matematik yazılımlarından Wolfram Mathematica 7.0 kullanılmıştır. Birinci bölümde gecikmeli diferansiyel denklemler ve Pantograph denklemlerin kullanım alanlarından bahsedildi. Çalışmanın İkinci bölümde Pantograph denklemlerinden, üçüncü bölümde homotopi analiz metodu temel tanımlarıyla tanıtıldı, dördüncü bölümde bu metot Pantograph denklemlerine uygulandı, en uygun  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edilerek çözümlerin analizi yapıldı. Bu bölümde hata grafikleri ile mutlak hata tabloları birlik de sunulmuştur. Son bölüm ise bu çalışmadan elde edilen sonuçların değerlendirilmesine ayrıldı.

## 2. BÖLÜM

### PANTOGRAPH DENKLEMLER

#### 2.1. Pantograph Denklemler

Mühendislik, Fizik, Biyoloji ve Ekonomi gibi uygulamalı bilim dallarında eldeki problemi ayrıntılı açıklayan matematiksel modellerin kurulabilmesi oldukça önemlidir. Bir matematiksel modelin ortaya konulmasında bir veya daha çok değişkene bağlı fonksiyonlar ve bunların değişik mertebelerde türevlerini ihtiva eden denklem veya denklem sistemleri bulunur. Elde edilen fonksiyon, bir bağımsız değişken içeriyorsa bu fonksiyonun türevlerini de içeren sisteme adi türevli diferansiyel denklem sistemi adı verilir. Eğer fonksiyon birden çok bağımsız değişken içeriyorsa denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem adı verilir ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerden oluşan bir sisteme de kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi denir. Bir denklemin mertebesi adi türevli bir diferansiyel denklem için, içerdiği en yüksek mertebeli türevin mertebesi, kısmi türevli diferansiyel denklemler için ise, denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesi olarak tanımlanır. Gerçek hayatta birçok problemde gecikmeler istisnai durumlar söz konusudur ve bu tür problemleri modellemek oldukça zordur. Gecikmeli diferansiyel denklemler matematiksel modellemesi zor olan problemlerin çözümü için problemlerin özelliklerini barındıran matematiksel modellemeler yapmamıza olanak sağlar.

Tezimizin bu bölümünde gecikmeli diferansiyel denklemler ile bir türü olan pantograph denklemleri hakkında bilgi verilecektir.

$P_{jk}(x)$  ve  $f(x)$  ler analitik fonksiyonlar,  $\alpha_j, \beta_j, \lambda_j$  ' lar reel veya kompleks sabitler olmak üzere,

$$u^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) u^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) + f(x) \quad (2.1)$$

$$u^{(k)}(0) = \lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilen denkleme lineer fonksiyonel argümanlar içeren genelleştirilmiş pantograph denklem denir.

## 2.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler (GDD)

Gerçek hayatta birçok olay Cauchy problemi olarak bilinen

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), & t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

adi türevli diferansiyel denklemler ile modellendirilebilir. Burada  $y(t)$  bazı fiziksel büyüklükleri ifade etse de konum değişkeni olarak adlandırılır.

Burada (2.3) denkleminin gerçek hayattaki olayları daha tutarlı bir biçimde ifade edebilmesi için denklemin sağ tarafında  $y$  konum değişkeninin geçmiş değerleri üzerindeki  $y'$  türev değerlerine bağlı düzenlemeler yapılmalıdır. Böylece (2.3) denkleminin en genel hali

$$y'(t) = f(t, y_t), \quad t \geq t_0 \quad (2.4)$$

Geriletilmiş fonksiyonel diferansiyel denklemi tarafından verilebilir. Burada  $\theta \in [-r, 0]$  olmak üzere  $y_t = y(t + \theta)$ ,  $[-r, 0]$  den  $\mathbb{R}^d$  ye sürekli fonksiyonların uzayı  $C = C^0([-r, 0], \mathbb{R}^d)$  'da tanımlı bir fonksiyon ve  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times C$  den  $\mathbb{R}^d$  ye verilen bir fonksiyondur.

$y'(t); y'(t)^+$  türevini göstermek üzere (2.3) başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y_t), & t \geq t_0 \\ y_{t_0} = y(t_0 + \theta) = \phi(\theta) \end{cases} \quad (2.5)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $\phi(\theta) \in C$  başlangıç değeri ifade etmektedir. (2.5) ile ifade edilen denklem Voltera diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Burada iki durum

söz konusudur;  $f$ ; kesintisiz  $r \rightarrow +\infty$  için sınırsız olabilen geçmiş değerler kümesi üzerinde hesaplanabilen  $y$  konum değişkenine bağlı ise dağıtılmış gecikmeli diferansiyel denklem ve  $y$  konum değişkeninin sadece sonlu sayıdaki geçmiş değerlerine bağlı ise ayrık gecikmeli diferansiyel denklem adı verilir. (2.5) denklemi daha basit ve anlaşılabilir bir şekilde

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $\tau_i$ 'ler negatif olmayan gecikmeler olup,  $\tau_i$ 'ler sabit ise sabit gecikmeli,  $t$ 'ye bağlı  $\tau_i = \tau_i(t)$  biçiminde fonksiyonlar ise zamana bağlı veya değişken gecikmeli denklemlerdir.  $\tau_i = \tau_i(t, y(t))$  biçiminde ise konuma bağlı gecikmeler olarak adlandırılırlar.

$L, M$  ve  $N$ ;  $d \times d$  kompleks matrisler olmak üzere  $t$  ye göre  $\tau(t) = (1 - q)t$  değişken gecikmeli bir diferansiyel denklem,

$$\begin{cases} y'(t) = Ly(t) + My(qt) + Ny'(qt), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

biçiminde ifade edilir.

(2.7) ile ifade edilen değişken katsayılı bir diferansiyel denklemde  $N = 0$  için denkleme Pantograph denklem,  $N \neq 0$  için genelleştirilmiş Pantograph denklem adı verilmektedir. Özel olarak  $t = 0$  için gecikmenin kalmayacağı ve  $t \rightarrow \infty$  için de gecikmenin sınırsız olacağı açıktır.

(2.7) denklemde,  $t = e^x$  ve  $u(x) = y(e^x)$  değişken dönüşümleri yapılırsa

$$u'(x) = e^x Lu(x) + e^x Mu(x - \tau) + Nu'(x - \tau) \quad (2.8)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi elde edilir. Burada  $\tau = -\log(q)$  olup sabit bir gecikmeyi ifade etmektedir. Bu durumda (2.7) denkleminin  $[0, h]$  aralığında integrallenmesi ile  $u(x) = y(e^x)$  çözüm olmak üzere, (2.8) denkleminin  $[-\infty, \log(h)]$  aralığında integrallenmesi aynı olacaktır. Böylece (2.7) probleminin çözümü

$$\begin{cases} u'(x) = e^x Lu(x) + e^x Mu(x-\tau) + Nu'(x-\tau), & x \geq \log(h) \\ u(x) = y(e^x), & x \leq \log(h) \end{cases} \quad (2.9)$$

haline dönüşmüş olur.

Oransal gecikmeli daha genel denklemler için böyle bir dönüşüm, sabit gecikmeli sonuç denklem, değişken katsayılara sahiptir. Bu tam çözüm veya nümerik çözümler için kararlılık analizlerini çok daha karmaşık bir hale sokabileceğinden çok kullanışlı olmayabilir.

### 2.3. Multi-Pantograph Denklemler

$\lambda, \mu_i$  ve  $u_0 \in C$ ,  $0 < q_1 < q_{l-1} < \dots < q_l \leq 1$  olmak üzere multi pantograph denklemi için bir başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + \sum_{i=1}^l \mu_i u(q_i t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilmektedir. (2.10) başlangıç değer problemi bir çok yazar tarafından sayısal ve analitik olarak çalışılmıştır. Liu ve Li, Runge–Kutta metodu kullanmıştır [8]. Koto [9] çalışmasında genelleştirilmiş pantograph denklemlere RK matrix metodunu uygulamıştır. RK matrisi düzenli olduğu zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılık özellikleri farklı denklemlerden elde edilmiş ve sabit gecikmeli diferansiyel denklemler benzer bir teknikle incelenmiştir. Bu metotla genel pantografik denklemlerden daha çok sabit özelliğe sahip denklemler elde edilmiştir.

Liu [10] çalışmasında pantografik sayısal bazı deney ve soruları incelemiştir. Pantografik eşitliğin sayısal sonucu olarak  $a, b$  ve  $q$  gerçek sabitler ve  $q \in [0,1]$  iken

$$y'(t) = ay(t) + by(qt) \geq 0, \quad y(0) = 1 \quad (2.11)$$

Bu denklemde  $|a| + b \leq 0$  ve  $t \rightarrow \infty$  giderken  $y(t) \rightarrow 0$  a gider ve  $0 < 1 - q \leq 1$  dir. Bu denklem çözümünde yapılan kısaltmalar bizi kolaylıkla yanlış sonuca götürebilir. Bu sonucun gerçek sonuçmuş gibi görülebilme tehlikesi basit ayrıştırma analizleri ile gösterilmiştir.

Tamasan[11] çalışmasında  $y'(t) = f(t, y(t), y(\lambda t))$ ,  $\lambda \in (0,1)$  lineer olmayan pantografik denkleminin türevlenebilirliğini göstermiştir. Burada Picard operatör tekniği ve fiber contraction teoreminden faydalanılmıştır.

Baker ve Bukewwar [12] verilen bir Wiener projesi ,  $0 < q < 1$  ve  $t \in [0, T]$  için pantografik denklemlerin aşağıdaki gibi versiyonlarını düşünmüşlerdir:

$$dX(t) = aX(t) + bX(qt)dt + \sigma_1 + \sigma_2 X(t) + \sigma_3 X(qt)dW(t), X(0) = X_0 \quad (2.12)$$

Bizi sonuca götüren güçlü yaklaşımlar geliştirerek çeşitli sayıda örnekle ispat etmişlerdir.

Li ve Liu [13] pantografik gecikmeli diferansiyel denklemlerin gerçek sonuçlarının yapısıyla ilgili çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca gerçek sonuçların varlığını ve tek olduğunu ispatlamışlardır. Çözümlerin kararlılığı için Dirichlet serisi kullanmışlardır. Bilgisayar yazılımları yardımı ile Pantografik diferansiyel denklemleri sonsuz sayıda alt türevlenebilir denklemlere dönüştürmek için gömme tekniği ile birçok metodu kullanmışlardır.

Guglielmi ve Zennaro [14],  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(qt)$ ,  $y(0) = \bar{y}$  denkleminin çözümü için one-leg  $\Theta$ -metodunu kullanmışlardır. Bu çalışma problemin arka planını gösterir ve sonuçta  $\Theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  olması one-leg  $\Theta$ -metodunun istikrarlılığı için gerekli ve yeterlidir.

Marshall, Van-Brunt ve Wake [15] Pantografik denklemin ikinci sıra versiyonu olan aşağıdaki denklemlerle ilgilenirler.

$$y''(z) - ay'(z) - by(z) + \lambda y(az) = 0 \quad (2.13)$$

Burada  $z \in C$ ,  $\alpha > 1$ ,  $a > 0$  ve  $b > 0$  sabitler ve  $\lambda \neq 0$  parametre iken (2.13) denkleminin sonuçları için doğal bir sınırın varlığı problemi üzerine çalıştılar.

Liu ve Li [16] (2.14) denkleminin sayısal sonuçları ile ilgilenmişler

$$u'(t) = \lambda u(t) + \sum_{i=1}^l \mu_i u(q_i t), \quad 0 < q_l < q_{l-1} < \dots < q_1 < 1 \quad (2.14)$$

$$u(0) = u_0$$

multi pantografik denklemin sonucunun varlığı ve tekliğini ispat etmişlerdir. Dirichlet serilerinin çözüm serileri oluşturulmuş ve analitik çözümün sabitliği için gerekli durumlar sağlanmıştır.  $\theta$  metodunun çeşitli basamaklarda sabit olduğu gösterilmiş ve metodun özelliklerini göstermek için örnekler verilmiştir.

Liu, Yang [17] pantografik denklemler için, analitik çözümlerin sabitliğini sayısal metotlar Razumikhin tekniğini kullanarak araştırmışlardır. Özellikle sabit ve değişen katsayıları olan lineer pantografik denklemler ele alınmıştır. Bu denklemlerin analitik çözümleri için sabit durumlar ve değişmez adımlı  $\theta$  metodunun sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Zhao, Xu, Wang ve Liu [18] Farklı orantılı gecikmeler içeren nötr pantograph denklemler için, RK metodunun tutarlılığı ile ilgilenmişler ve birçok metodun tutarlılığını ispat etmişler bir çok sayısal örnekler vermişlerdir.

Fan , Liu ve Cao [19] Stokastik pantograph denklemlerin varlığı ve tekliği ile ilgili etkin durumları ele almışlardır. Ayrıca lineer olarak artan durumları incelemişler  $\frac{1}{2}$ . derece ile semi-implicit euler metodunun yakınsak olduğu durumu lineer artan şartlar altında ele alınmıştır.

## 3.BÖLÜM

### HOMOTOPI ANALİZ METODU

#### 3.1 Homotopi Analiz Metodu

Gerçek hayattaki bir problemin matematik modellemesi olarak karşımıza çıkan herhangi bir lineer veya lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemin analitik çözümünü elde etmek genelde zordur. Çünkü bu tür denklemlerde istisnalar, gecikmeler olabileceği gibi değişkenlerde çok fazla olabilir. Yarı analitik yaklaşımlar ile elde edilen çözüm serilerinin analitik çözüme göre yakınsaklık bölgesi genelde fiziksel parametrelerden bağımsız ifade edilemez. Bu yarı analitik yaklaşımlar çoğu zaman iyi sonuçlar vermez. Perturbasyon metotları ise daha çok lineer veya kuvvetliliği zayıf lineer olmayan problemler için geçerlidir. Bu noktada çözüm serilerinin analitik çözüme yakınsamasını kontrol altına almak çok önemlidir. Homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol altına almamızı sağlayan Homotopi Analiz Metodu (HAM) 1992'de Shijun Liao tarafından ortaya konmuştur [2-7].

Homotopi Analiz Metodu, Adomian Ayrışım Metodu, Lyapunov Küçük Parametre Metodu,  $\delta$ -Açılım Metodu gibi önceden verilen pertürbatif metotlarını birleştirerek genel bir çözüm yöntemi sunar.

Homotopi Analiz Metodu lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözüm serilerini elde etmek için kullanılan yarı analitik bir yaklaşımdır. Bu metotla cebirsel denklemler, adi diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler vb. denklemlerin çözüm serilerine fiziksel parametrelerden bağımsız olarak ulaşılabilir ve yakınsaklık bölgesi ve hızı kontrol altına alınabilir.



Homotopi Analiz Metodu, Homotopi Perturbasyon Metodunda olduğu gibi topolojinin temel kavramlarından homotopiyi kullanarak ele alınan problemin başlangıç şartı veya sınır şartlarından tam çözüme götüren sürekli ve sıralı bir dönüşüm elde etmemizi sağlar. Bu tür bir sürekli dönüşümü oluşturmak için yardımcı lineer operatör ile çözüm serisinin yakınsaklığını kontrol altına almak için yardımcı parametre kullanır. Bu metod başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi Analiz Metodu yardımıyla zor bir lineer olmayan problem çok daha basit alt problemlere dönüştürülerek her bir alt problemin çözümüyle çözüm serisi oluşturulur.

Bilindiği gibi bu yöntemler, 90'lı yıllarda ortaya çıkan yöntemler olup temelde seri çözümlere dayanırlar. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi, bu yöntemleri farklı dallarda çalışan bilim adamları arasında popüler kılmış ve çözümlerin farklı yorumlarının yapılabilmesini sağlamıştır. HAM lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin de uygulanabilmekte ve başarılı bir sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada çözülen problemlerin bir kısmının literatürde analitik metotlarla çözümleri olmasına rağmen, bu çözümlerin analizinin yapılması mümkün değildir. Burada kullanılan yaklaşımlarla, elde edilen literatürde mevcut ve yeni çözümlerin analizinin yapılması sağlanmıştır. Birçok araştırmacı gecikmeli diferansiyel denklemler ve pantograph denklemlerinin çözümlerine ulaşmak için çeşitli teknikler kullanmışlardır [20-25].

Örneğin aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemi göz önüne alalım;

$$N[f(t)] = 0, t \in \mathfrak{R} \quad (3.1)$$

burada  $N$  lineer olmayan bir operatör olmak üzere (3.1) denklemi bazı başlangıç değerleri ve sınır koşullarına bağlı bir lineer olmayan denklemdir.

$f_0, f'$  'in bir başlangıç yaklaşımı ve  $q \in [0,1]$  homotopi parametresi olmak üzere aşağıdaki homotopiyi kuralım.

$$H[\phi(t; q); f_0(t), H(t), \hbar, q] \equiv (1 - q)L[\phi(t; q) - f_0(t)] - q\hbar H(t)N[\phi(t; q)] \quad (3.2)$$

Burada  $\hbar \neq 0$  yakınsaklık kontrol parametresi,  $H(t)$  yardımcı fonksiyon,  $q \in [0,1]$  olan çözüm için bir başlangıç yaklaşım parametresi,  $f_0(t)$  başlangıç veya sınır şartları,  $L$  lineer operatör ve  $N$  lineer olmayan bir operatördür.

Şimdi bu homotopinin bir tarafını sıfır yapalım,

$$(1 - q)L[\phi(t; q) - f_0(t)] = q\hbar H(t)N[\phi(t; q)] \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) sıfırcı dereceden deformasyon denklemi olarak bilinir. Burada  $q = 0$  alınarak

$$L[\phi(t; 0) - f_0(t)] = 0 \quad (3.4)$$

olur ve  $\phi(t; q)$  başlangıç şartı veya sınır şartı olan  $f_0(t)$  ye eşit olur.

$$\phi(t; 0) = f_0(t) \quad (3.5)$$

$q = 1$  alınarak (3.1) denklemi

$$N[\phi(t; 1)] = 0 \quad (3.6)$$

olur. Bu bize  $\phi(t, 1)$  in (3.1) denkleminin başlangıç veya sınır şartlarını sağlayan  $f(t)$  ye eşit olduğunu gösterir.

$$\phi(t; 1) = f(t) \quad (3.7)$$

(3.5) ve (3.7) gösterir ki  $q, 0$  ile  $1$  arasında değıştikçe  $\phi(t; q)$  nin  $f_0(t)$  den problemin çözümü olan  $f(t)$  ye ulaştığını göstermektedir.

$f(t)$  nin  $m$ . mertebeden Taylor serisine açılımı

$$f_m(t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.8)$$

(3.8)'den

$$\phi(t; q) = \phi(t; 0) + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad q^m = f_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) q^m \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada  $f_m(t)$  'in seri olarak hesaplanması çok önemlidir.  $f_m(t)$  yi seri olarak hesaplamak için (3.3) denkleminde  $q$  ye göre

$$(1-q)L\left(\frac{\partial \phi(t; q)}{\partial q}\right) - L(\phi(t; q) - f_0(t)) = \hbar H(t)N[\phi(t; q)] + q\hbar H(t) \frac{\partial N[\phi(t; q)]}{\partial q} \quad (3.10)$$

yazılabilir [4]. (3.10) denkleminde  $q = 0$  alınır ve (3.5) nin sonucu olarak (3.8) denklemini verir.

$$L[f_1(t)] = \hbar H(t)N[f_0(t)] \quad (3.11)$$

Burada  $m \geq 2$  için aşağıdaki denklemi önerilir [4].

$$(1-q)L\left(\frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m}\right) - mL\left(\frac{\partial^{m-1} \phi(t; q)}{\partial q^{m-1}}\right) = m\hbar H(t) \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} + q\hbar H(t) \frac{\partial^m N[\phi(t; q)]}{\partial q^m} \quad (3.12)$$

Bu denklemin ispatı tümevarım yöntemi ile kolaylıkla gösterilebilir.

(3.12) denkleminde  $q = 0$  alır ve her iki tarafı  $m!$  e bölünürse,

$$(1-q)L \left[ \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right]_{q=0} = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.13)$$

Buradan  $m \geq 2$  için

$$L[f_m(t) - f_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.14)$$

yazılabilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

olarak tanımlanırsa (3.11) ve (3.14)' ün sonucu olarak  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi,

$$L[f_m(t) - \chi_m f_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.16)$$

olur. Bu denklem  $m \geq 1$  için geçerlidir.

(3.16) denkleminde denklemin sağ tarafı  $f(t)$  'ye bağlı olduğu açıktır.  $m$  in artan kuvvetlerine göre  $f_m(t)$  çözümleri elde edilir ki bu  $m$ . mertebeden deformasyon denkleminin çözümüne eşit ve

$$f_m(t) = \chi_m f_{m-1}(t) + L^{-1} \left\{ \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \right\} \quad (3.17)$$

olarak yazılabilir. Burada  $L^{-1}$ ,  $L$  lineer operatörünün ters operatörüdür.

$$f_m(t) = \sum_{k=0}^m f_k(t) \quad (3.18)$$

olur. (1.13) denkleminin çözümü ,

$$f(t) = \phi(t;1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t) \quad (3.19)$$

olur.

### 3.2 Pantograph Denkleminin Deformasyon Denklemi

$$\begin{aligned} u'(t) &= \lambda u(t) + \sum_{i=1}^l \mu_i u(q_i t), \quad 0 < q_l < q_{l-1} < \dots < q_1 < 1 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bu denklemde,  $u(x)$  bağımsız değişken  $x$  in bilinmeyen fonksiyonudur.  $u_0(x)$ ,  $u(x)$  çözümünün başlangıç tahmini olduğunu kabul edilsin.  $\hbar \neq 0$  yakınsama kontrol parametresi, yardımcı görevdeki  $H(x) \neq 0$  ve yardımcı lineer operatör  $L$  homotopi analiz metodunu yakınsama bölgesini çözüm için kontrol etmede ve ayarlama da önemli bir rol oynar. Liao,  $q \in [0,1]$  gömme parametresini sıfıncı mertebeden deformasyon denklemini

$$(1-q)L[\phi(x;q) - u_0(x)] = q\hbar H(x)N[\phi(x;q)] \quad (3.21)$$

oluşturmak için kurmuştur [20]. Burada

$$N[\phi(x;q)] = \phi^{(m)}(x) - \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) \phi^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) + f(x) \quad (3.22)$$

olmak üzere,

(3.21)'de  $q=0$  olduğunda sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi (3.20),  $\phi(x;0) = u_0(x)$  olur ve  $q=1$  olduğunda ise sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi (3.20),  $L[\phi(x;1)] = 0$  olur.  $q$ , 0'dan 1'e arttığında  $\phi(x;q)$  nun çözümü ilk tahmin olan  $u_0(x)$ 'e göre farklılık gösterir ve  $u(x)$  olur. Bu durumda,  $[\phi(x;1)]$  (3.20) lineer

denklemin kesin çözümüdür.  $\phi(x;q)$ 'yu  $q$ 'ya göre Taylor serisine göre açılırsa, yardımcı lineer operatör, ilk tahmin fonksiyonu,  $\hbar$  yardımcı parametresi sonradan belirlenecektir.  $\phi(x;q)$ 'nin kuvvet serisi  $q = 1$ 'e yakınsadığında, aşağıdaki çözüm serisi

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \quad (3.23)$$

elde edilir. Burada  $u_m(x)$  terimleri, yüksek mertebeden deformasyon denklemi ile tespit edilir. Şimdi

$$\vec{u} = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\} \quad (3.24)$$

vektörü tanımlansın ve (3.20) denklemini gömme parametresine göre  $m$  kere türevi alınır ve  $q=0$  alınarak  $m!$  bölünürse  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[u_m(x) - x_m u_{m-1}(x)] = \hbar H(x) R_m(u_{m-1}, x) \quad (3.25)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

ve

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x;q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.27)$$

dir [4]. İlk çözüm ifadesi ve katsayı ergodiklik kuralına uymak için, ilgili ve yardımcı görevler benzersiz şekilde  $H(x) = 1$  olarak belirlenir.

Verilen herhangi bir doğrusal olmayan  $N$  operatörü ve  $L$  operatörü ile kolayca ifade edilebilir. Bu sayede (3.16) yüksek mertebeden lineer deformasyon denklemi ile  $u_1(x), u_2(x), \dots$  elde edilir.  $m$ . mertebeden  $u(x)$  yaklaşımı

$$U(x) = \sum_{m=0}^n u_m(x) \quad (3.28)$$

dir.

Deformasyon denkleminin seri çözümlerinden elde edilen  $u_m(x)$  lerin toplamı olan  $U(x)$  çözüm serisinin (3.28) denkleminin analitik çözümüne yakınsamasını sağlar ancak burada uygun bir  $h$  yakınsaklık kontrol parametresi belirlemek gerekir. Burada  $h$  parametresi  $U'(0)$ ,  $U''(0)$  veya  $U'(1)$ ,  $U''(1)$  türev grafikleri çizilerek grafiklerin yatay eksene paralel olduğu aralıkta seçilir. Bulunan uygun  $h$  yakınsaklık kontrol parametresine bağlı olarak elde edilen çözüm serisinin problemin gerçek çözümüne yakınsaklığı kontrol altına alınmaya çalışılır.

## 4.BÖLÜM

### UYGULAMALAR

Bu bölümde, Pantograph denklemlerinin lineer ve lineer olmayan 7 örneğinin HAM ile çözümlerini inceleyeceğiz.

Örnek 4.1.

$$u'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} u\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} u(x)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad u(0) = 1 \quad (4.1)$$

Pantograph denklemini alalım [25]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = e^x \quad (4.2)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemini yazalım,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.3)$$

denklemini gereklidir. Buradan

$$N[\phi(x; q)] = \phi'(x) - \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \phi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \phi(x) \quad (4.4)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u'(x) - \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} u\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} u(x) = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.6)$$



ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x] \quad (4.7)$$

olarak tanımlanırsa

$$u_m(x) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x) + \hbar \int_0^x \left( du_{m-1}(t) - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} u_{m-1}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} u_{m-1}(t) \right) dt \quad (4.8)$$

bulunur.  $u_0(x) = 1$  seçerek (4.8) denklemiyle Mathematica 7.0 yardımı ile ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = 1$$

$$u_1(x, \hbar) = \hbar - e^{\frac{x}{2}} \hbar - \frac{\hbar x}{2}$$

$$u_2(x, \hbar) = \hbar - e^{\frac{x}{2}} \hbar + \frac{5\hbar^2}{6} - \frac{3}{2} e^{\frac{x}{2}} \hbar^2 + \frac{2}{3} e^{\frac{3x}{4}} \hbar^2 - \frac{\hbar x}{2} - \hbar^2 x + \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \hbar^2 x + \frac{\hbar^2 x^2}{8}$$

$$u_3(x, \hbar) = \hbar - e^{\frac{x}{2}} \hbar + \frac{5\hbar^2}{3} - 3e^{\frac{x}{2}} \hbar^2 + \frac{4}{3} e^{\frac{3x}{4}} \hbar^2 + \frac{53\hbar^3}{84} - \frac{19}{12} e^{\frac{x}{2}} \hbar^3 + \frac{4}{3} e^{\frac{3x}{4}} \hbar^3 - \frac{8}{21} e^{\frac{7x}{8}} \hbar^3$$

$$- \frac{\hbar x}{2} - 2\hbar^2 x + \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \hbar^2 x - \frac{17\hbar^3 x}{12} + \frac{5}{8} e^{\frac{x}{2}} \hbar^3 x - \frac{1}{12} e^{\frac{3x}{4}} \hbar^3 x + \frac{\hbar^2 x^2}{4} + \frac{3\hbar^3 x^2}{8}$$

$$- \frac{1}{32} e^{\frac{x}{2}} \hbar^3 x^2 - \frac{\hbar^3 x^3}{48}$$

⋮

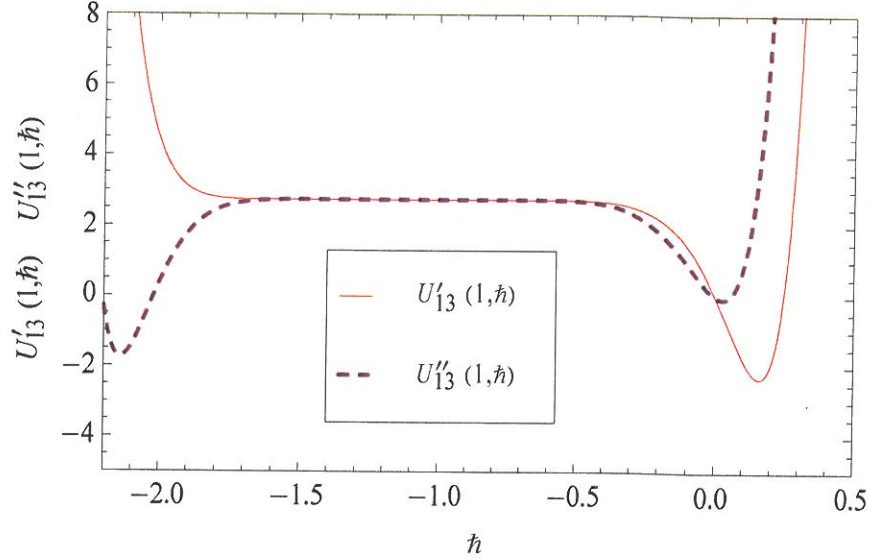
çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı

elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada  $u_{13}(x, \hbar)$ 'a kadar Mathematica 7.0 ile elde edilirse, çözüm serisi

$$u(x) \approx U_{13}(x, \hbar) \quad (4.9)$$

şeklinde (4.2) gerçek çözümüne yakınsar. Ancak burada uygun  $\hbar$  parametresi belirlemek gerekir.  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için,  $U'_{13}(1, \hbar)$  ve  $U''_{13}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek;



Şekil 4. 1. (4.1) probleminin  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.1' deki  $U'_{13}(1, \hbar)$  ile  $U''_{13}(1, \hbar)$  grafiklerinin  $x$  eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.6, -0.2]$  aralığında olması gerektiğini gösterir [4].

Tablo 4.1. (4.1) probleminin uygun  $\hbar$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$1.16373 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.808842$
0.4	$6.22578 \times 10^{-13}$	$\hbar \rightarrow -0.99804$
0.6	$2.91933 \times 10^{-12}$	$\hbar \rightarrow -1.08448$
0.8	$5.93969 \times 10^{-15}$	$\hbar \rightarrow -0.990102$
1	$2.96049 \times 10^{-10}$	$\hbar \rightarrow 0.563967$

seçilebilecek en iyi  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin Tablo 4.1. tablosunda görüldüğü gibi yaklaşık  $\hbar = -0,990$  olduğu görülür.  $\hbar = -0,990$  için

$$U_{13}(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x) \quad (4.10)$$

çözüm serisi (4.10) hesaplanarak yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

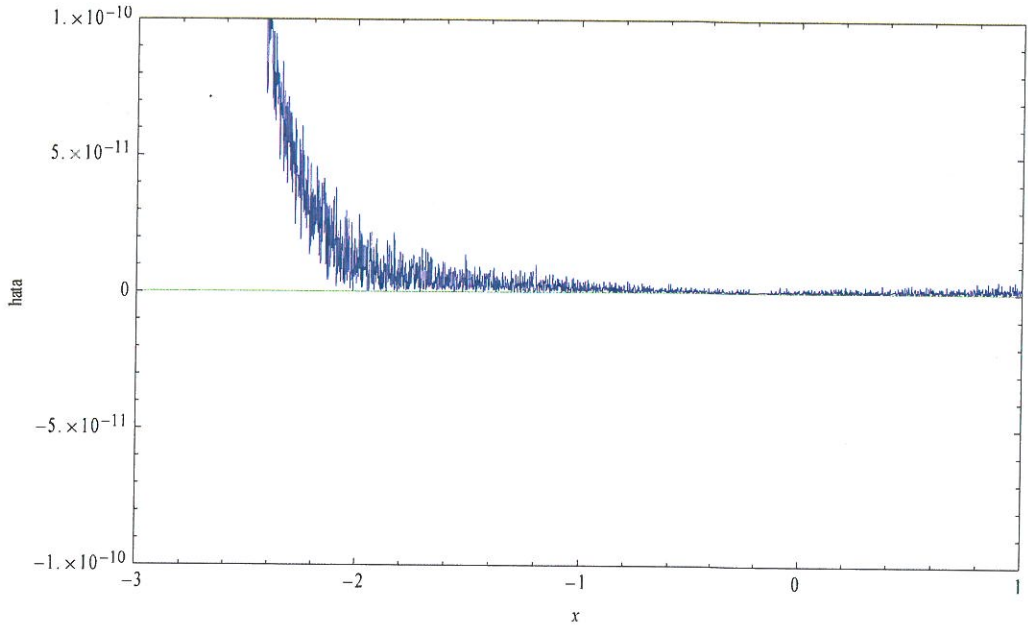
$$|U_{13}(x) - e^x| \quad (4.11)$$

olmak üzere.

Tablo 4.2. (4.1) probleminin hata tablosu

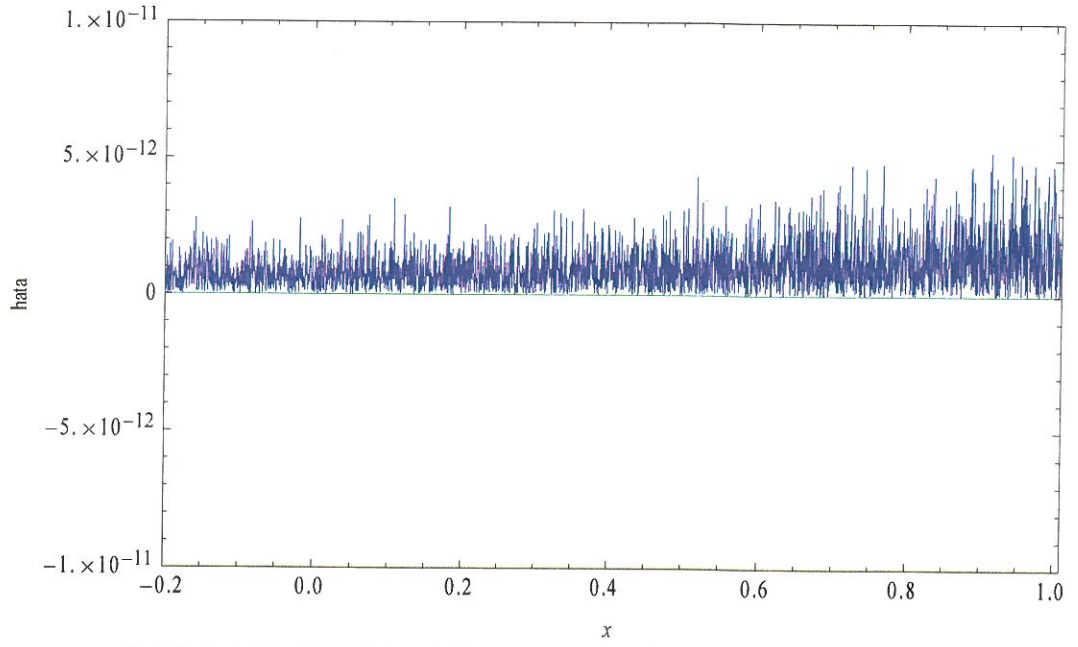
$i$	$x_i$	$u(x) = e^x$	$U_{13}(x)$ $\hbar = -0.990$	$ U_{13}(x) - e^x $
0	0	1.000000000	1.000000000	0
1	0.2	1.221402758	1.221402758	$7.569 \times 10^{-21}$
2	0.4	1.491824698	1.491824698	$3.643 \times 10^{-18}$
3	0.6	1.822118800	1.822118800	$2.259 \times 10^{-16}$
4	0.8	2.225540928	2.225540928	$5.241 \times 10^{-15}$
5	1	2.718281828	2.718281828	$6.731 \times 10^{-14}$

hata tablosu elde edilir. Hata fonksiyonu (fark fonksiyonu) grafiği aşağıdaki gibidir.

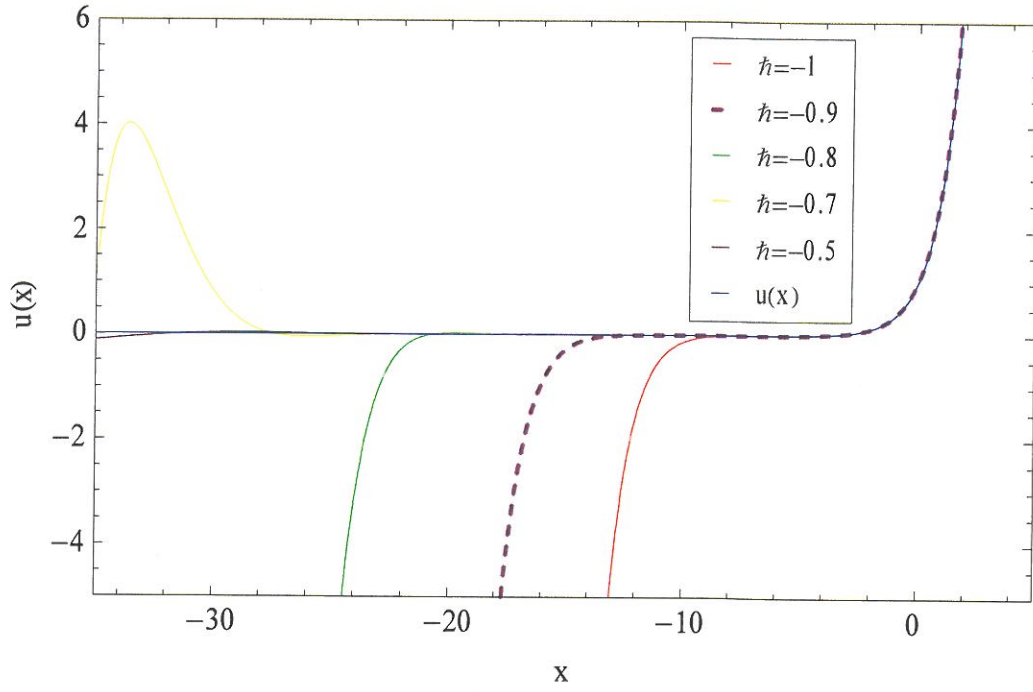


Şekil 4.2. (4.1) probleminin hata fonksiyon grafiği.

Grafik  $[0,1]$  aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınarak  $O_y$  eksenini  $[-1.10^{-11}, 1.10^{-11}]$  aralığı olarak alınırsa aşağıdaki fark grafiği elde edilir.



Şekil 4.3. (4.1) probleminin  $[0,1]$  aralığı hata fonksiyon grafiği.



Şekil 4.4.  $N = 13$  için (4.1) probleminin  $U_{13}(x)$  yakınsamasının  $h = -1$ ,  $h = -0,9$ ,  $h = -0,8$ ,  $h = -0,7$  ve  $h = -0,5$  için grafiği ile  $u(x) = e^x$  eğrisinin grafiği

Tablo 4.3. (4.1) problemi için Taylor Metodu, Adomian Metodu ve Homotopi Analiz Metodunun değişik iterasyonlarda fark fonksiyonlarının mukayese tablosu

$x_i$	<i>Taylor</i> $N = 8$	<i>Metod</i> $N = 15$	<i>Adomian Metod</i> $N = 13$	<i>Homotopi Analiz</i> $N = 8$ $\hbar = -1.03406$	<i>Metodu</i> $N = 13$ $\hbar = -0.990$
0.2	$1.440 \times 10^{-12}$	$2.22 \times 10^{-16}$	0.00	$1.39222 \times 10^{-13}$	$7.569 \times 10^{-21}$
0.4	$7.524 \times 10^{-10}$	$2.22 \times 10^{-16}$	$2.22 \times 10^{-16}$	$1.1493 \times 10^{-12}$	$3.643 \times 10^{-18}$
0.6	$2.953 \times 10^{-8}$	$2.22 \times 10^{-16}$	$2.22 \times 10^{-16}$	$2.31837 \times 10^{-12}$	$2.259 \times 10^{-16}$
0.8	$4.018 \times 10^{-7}$	$1.332 \times 10^{-15}$	$1.33 \times 10^{-15}$	$4.56035 \times 10^{-12}$	$5.241 \times 10^{-15}$
1	$3.059 \times 10^{-6}$	$5.018 \times 10^{-14}$	$4.88 \times 10^{-15}$	$1.36412 \times 10^{-10}$	$6.731 \times 10^{-14}$

Problem (4.1) için Tablo (4.3)'te görüldüğü gibi Homotopi Analiz Metodu  $N = 8$  iterasyon sonucunda Taylor Metodundan daha iyi sonuçlar vermiştir.  $N = 8$  iterasyon ile (4.1) probleminin tam çözümü olan (4.2)'ye Homotopi Analiz Metodu ile Taylor Metodundan daha yakın bir çözüm serisi elde edildiği söylenilebilir. Taylor Metodunda  $N = 15$  iterasyonda elde edilen (4.2) tam çözümüne yakınsamadan daha iyi bir yakınsamayı Homotopi Analiz Metodu  $N = 13$  iterasyon ile verebilmektedir. (4.1) problemine  $N = 13$  iterasyon uygulandığında Homotopi Analiz Metodu ile Adomian Metodunun noktasal farklılıklar göstermekle birlikte yaklaşık sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir.

Örnek 4.2.

$$u''(x) = \frac{3}{4}u(x) + u\left(\frac{x}{2}\right) - x^2 + 2$$

$$0 \leq x \leq 1, u(0) = 0, u'(0) = 0 \quad (4.12)$$

ikinci mertebeden pantograph denklemini ele alalım [25,26]. Bu problemin tam çözümü

$$u(x) = x^2 \quad (4.13)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemini yazalım. (4.3) yardımıyla, başlangıç yaklaşımı  $u_0(x) = 0$  seçerek,

$$N[\phi(x; q)] = \phi''(x) - \frac{3}{4}\phi(x) - \phi\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 - 2 \quad (4.14)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) - \frac{3}{4}u(x) - u\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 - 2 = 0 \quad (4.15)$$

dir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.16)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x], \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.17)$$

olarak tanımlanırsa,

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( \int_0^t \left( ddu_{m-1}(r) - \frac{3}{4}u_{m-1}(r) - u\left(\frac{r}{2}\right) \right) dr dt \right) \right] \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) denklemini kullanarak  $u_0(x, \hbar) = 0$  başlangıç şartı ile Mathematica 7.0 ile  $u_i(x, \hbar)$   $i = 1, 2, \dots$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_0(x, \hbar) = 0$$

$$u_1(x, \hbar) = -\hbar x^2 + \frac{\hbar x^4}{12}$$

$$u_2(x, \hbar) = -\hbar x^2 - \hbar^2 x^2 + \frac{\hbar x^4}{12} + \frac{\hbar^2 x^4}{6} - \frac{13\hbar^2 x^6}{5760}$$

$$u_3(x, \hbar) = -\hbar x^2 - 2\hbar^2 x^2 - \hbar^3 x^2 + \frac{\hbar x^4}{12} + \frac{\hbar^2 x^4}{3} + \frac{\hbar^3 x^4}{4} - \frac{13\hbar^2 x^6}{2880} - \frac{13\hbar^3 x^6}{1920} + \frac{91\hbar^3 x^8}{2949120}$$

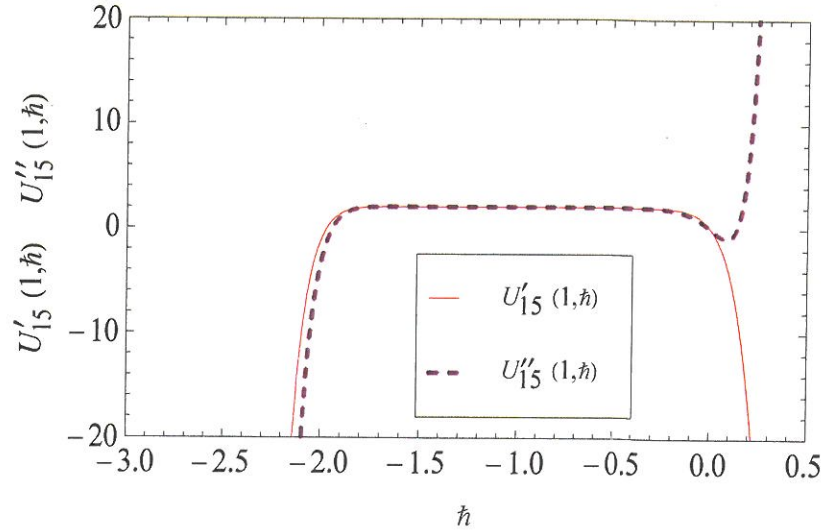
⋮

çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada  $u_{15}(x, \hbar)$  'a kadar Mathematica 7.0 ile elde edilirse, çözüm serimizin

$$u(x) \approx U_{15}(x, \hbar) \quad (4.19)$$

şeklinde (4.13) gerçek çözümüne yakınsadığı görülür. Elde ettiğimiz çözüm serisinin problem (4.12)'nin gerçek çözümüne yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{15}(1, \hbar)$  ve  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.5. (4.12) probleminin  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.5'deki  $U'_{15}(1, \hbar)$  ile  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerinin  $x$  eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.8, -0.2]$  aralığında olması gerektiği görülür. Uygun  $\hbar$  değeri için  $\hbar$  değerleri incelenirse,

Tablo 4.4. (4.12) probleminin uygun  $\hbar$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$9.64159 \times 10^{-15}$	$\hbar \rightarrow -0.984627$
0.4	$3.98293 \times 10^{-15}$	$\hbar \rightarrow -0.985412$
0.6	$9.31755 \times 10^{-14}$	$\hbar \rightarrow -0.987459$
0.8	$2.58404 \times 10^{-14}$	$\hbar \rightarrow -0.999282$
1	$4.25386 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -0.713131$



seçilebilecek en iyi  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin Tablo 4.4.'den yararlanılarak yaklaşık  $\hbar = -1$  olduğu görülür.  $\hbar = -1$  için

$$U_{15}(x) = \sum_{m=0}^{15} u_m(x) \quad (4.20)$$

çözüm serisi (4.20) hesaplanarak yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

$$|U_{15}(x) - x^2| \quad (4.21)$$

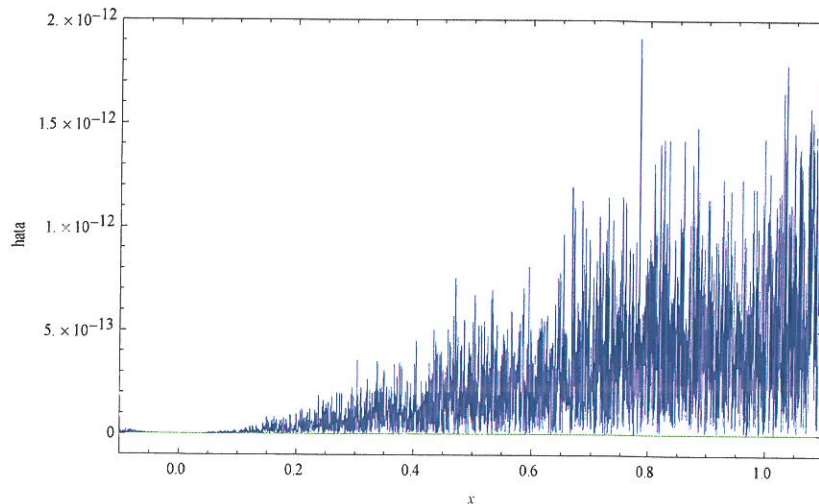
olmak üzere.

Tablo 4.5. (4.12) probleminin hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = x^2$	$U_{15}(x)$ $\hbar = -1$	$ U_{15}(x) - x^2 $
0	0	0.000000000	0.000000000	0
1	0.2	0.040000000	0.040000000	$6.48 \times 10^{-60}$
2	0.4	0.160000000	0.160000000	$2.78 \times 10^{-50}$
3	0.6	0.360000000	0.360000000	$1.20 \times 10^{-44}$
4	0.8	0.640000000	0.640000000	$1.19 \times 10^{-40}$
5	1	1.000000000	1.000000000	$1.51 \times 10^{-37}$

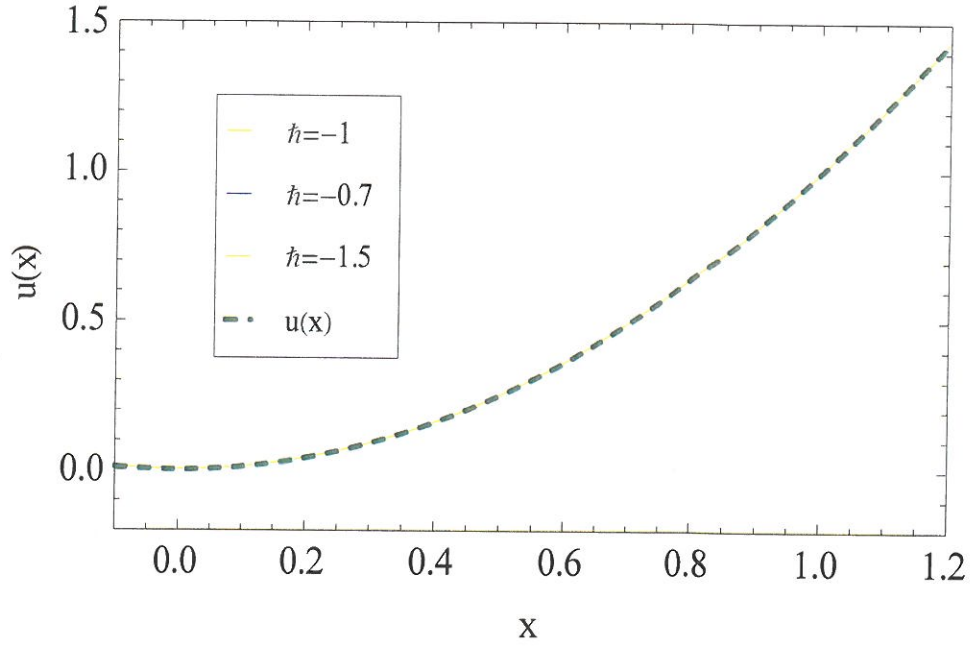
hata tablosu elde edilir.

$[0,1]$  aralığında hata fonksiyonu (fark fonksiyonu grafiği) aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.6. (4.12) probleminin  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği.





Şekil 4.7.  $N = 15$  için (4.12) probleminin  $U_{15}(x)$  yakınsamasının  $h = -1$ ,  $h = -0,7$ ,  $h = -1,5$  için grafiği ile  $u(x) = x^2$  eğrisinin grafiği

Örnek 4.3.

$$\begin{aligned} u'''(x) &= -u(x) - u(x-0.3) + e^{-x+0.3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) &= 1, \quad u'(0) = -1, \quad u''(0) = 1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Üçüncü mertebeden lineer pantograph denklemini ele alalım, bu problemin tam çözümü

$$u(x) = e^{-x} \quad (4.23)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemini yazalım,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.24)$$

Başlangıç yaklaşımı  $u_0(x, \hbar) = ax^2 + bx + c$   $u(0) = 1$ ,  $u'(0) = -1$ ,  $u''(0) = 1$

olduğundan  $u_0(x, \hbar) = \frac{x^2}{2} - x + 1$  seçerek,

$$N[\phi(x; q)] = \phi'''(x) + \phi(x) + \phi(x-0.3) - e^{-x+0.3} \quad (4.25)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u'''(x) + u(x) + u(x-0.3) - e^{-x+0.3} = 0 \quad (4.26)$$

dir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.27)$$

ve türev operatörü

$$\begin{aligned} du_m(x) &= D[u_m(x), x], \\ ddu_m(x) &= D[D[u_m(x), x], x], \\ dddu_m(x) &= D[D[D[u_m(x), x], x], x] \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak tanımlanırsa,

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( \int_0^q \left( \int_0^r (dddu_{m-1}(t) + u_{m-1}(t) + u_{m-1}(t-0.3)) \right) dr \right) dq \right] \quad (4.29)$$

elde edilir.

(4.29) denklemini kullanarak  $u_0(x, \hbar) = \frac{x^2}{2} - x + 1$  başlangıç şartı ile Mathematica 7.0

ile  $u_i(x, \hbar)$   $i=1, 2, \dots$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_0(x, \hbar) &= \frac{x^2}{2} - x + 1 \\ u_1(x, \hbar) &= -1.3498588075760036h + 1.349858807576004hx \\ &\quad - 0.6749294037880013hx^2 + 0.3908333333333333hx^3 \\ &\quad - 0.09583333333333333hx^4 + 0.01666666666666666hx^5 \\ &\quad + 1.3498588075760032hCosh[x] - 1.3498588075760032hSinh[x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, \hbar) = & -1.3498588075760036h + 1.82211880039051h^2 \\
& + 1.349858807576004hx - 1.8221188003905082h^2x \\
& - 0.6749294037880013hx^2 + 0.9110594001952548h^2x^2 \\
& + 0.3908333333333333hx^3 - 0.1386313589609549h^2x^3 \\
& - 0.09583333333333333hx^4 + 0.0383843857260337h^2x^4 \\
& + 0.016666666666666666hx^5 - 0.01263098012626672h^2x^5 \\
& + 0.007597222222222222h^2x^6 - 0.0010317460317460314h^2x^7 \\
& + 0.00009920634920634919h^2x^8 + 1.3498588075760032hCosh[x] \\
& - 1.822118800390509h^2Cosh[x] - 1.3498588075760032hSinh[x] \\
& + 1.822118800390509h^2Sinh[x]
\end{aligned}$$

çözümleri bulunur. Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için

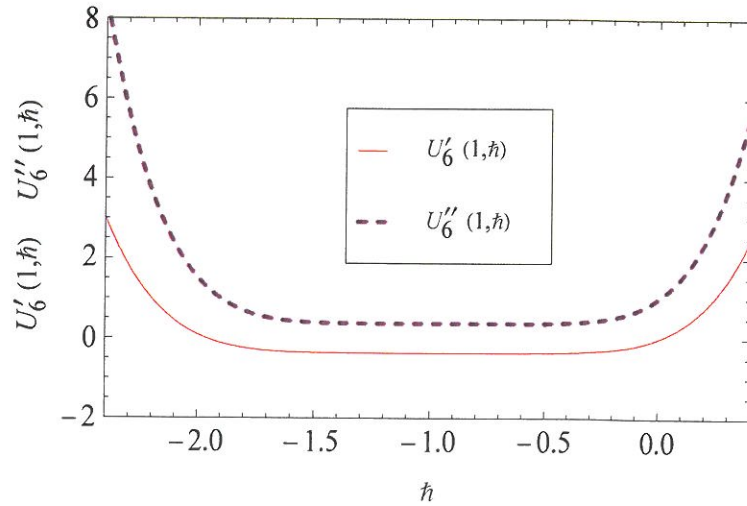
$U_m(x, h) = \sum_{n=0}^m u_n(x, h)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada

$u_6(x, \hbar)$ 'a kadar elde edilirse, yaklaşık çözüm serisi

$$u(x) \approx U_6(x, \hbar) \quad (4.30)$$

şeklinde problem (4.22)'nin (4.23) gerçek çözümüne yakınsadığı görülür.

$\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U_6'(1, \hbar)$  ve  $U_6''(1, \hbar)$  grafiklerini çizilirse,



Şekil 4.8. (4.22) probleminin  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.8'deki  $U'_6(1, \hbar)$  ile  $U''_6(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.7, -0.2]$  aralığında olması gerektiği görülür. Uygun  $\hbar$  değeri için  $\hbar$  değerleri incelenirse,

Tablo 4.6. (4.22) probleminin uygun  $\hbar$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, \hbar)$	$\hbar$
0	$8.88178 \times 10^{-16}$	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$5.22148 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.87641$
0.4	$1.11651 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -0.899403$
0.6	$2.93312 \times 10^{-11}$	$\hbar \rightarrow -1.03049$
0.8	$2.77781 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -0.911107$
1	$4.98869 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.929555$

seçilebilecek en iyi  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi için Tablo 4.6'dan yararlanılır ve yaklaşık  $\hbar = -1.000004242$  alınarak

$$U_6(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x) \quad (4.31)$$

(4.31) çözüm serisi hesaplanırsa. Yaklaşık çözüm hata fonksiyonu;

$$|U_6(x) - e^{-x}| \quad (4.32)$$

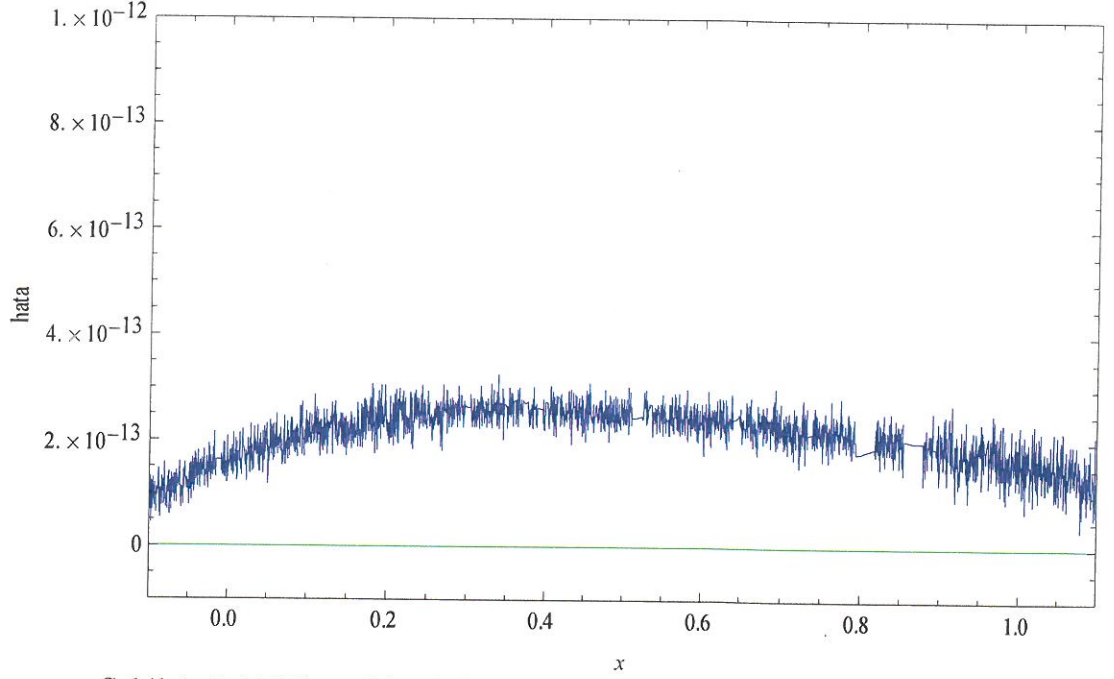
olmak üzere.

Tablo 4.7. (4.22) probleminin hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = e^{-x}$	$U_{10}(x)$ $\hbar = -1.000004242$	$ U_6(x) - e^{-x} $
0	0	1.000000000	1.000000000	$1.7053 \times 10^{-13}$
1	0.2	0.8187307531	0.818731	$2.45914 \times 10^{-13}$
2	0.4	0.6703200460	0.67032	$2.29372 \times 10^{-13}$
3	0.6	0.5488116361	0.548812	$2.58904 \times 10^{-13}$
4	0.8	0.4493289641	0.449329	$1.62981 \times 10^{-13}$
5	1	0.3678794412	0.367879	$8.92619 \times 10^{-14}$

hata tablosu elde edilir.

$[0,1]$  aralığında hata fonksiyonu (fark fonksiyonu grafiği) aşağıdaki gibidir.



Şekil 4. 9. (4.22) probleminin  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği.

Örnek 4.4.

Aşağıdaki lineer olmayan pantograph denklemini ele alalım [25].

$$u'(x) = 1 - 2u^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 0 \quad (4.33)$$

bu problemin tam çözümü

$$u(x) = \text{Sin}(x) \quad (4.34)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemini yazalım

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.35)$$

Başlangıç yaklaşımı olduğundan  $u_0(x, \hbar) = 0$  seçerek,

$$N[\phi(x; q)] = \phi'(x) - 1 + 2\phi^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.36)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u'(x) - 1 + 2u^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad (4.37)$$

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( du_{m-1}(t) - (1 - \chi_m) + 2 \left( \sum_{j=0}^{m-1} u_{m-1-j}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \right) dt \right] \quad (4.38)$$

elde edilir.

(4.38) denklemini kullanarak  $u_0(x, \hbar) = 0$  başlangıç şartı ile Mathematica 7.0 yardımı ile  $u_i(x, \hbar)$   $i=1,2,\dots$  aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = 0$$

$$u_1(x, \hbar) = -\hbar x$$

$$u_2(x, \hbar) = -\hbar x - \hbar^2 x$$

$$u_3(x, \hbar) = -\hbar x - 2\hbar^2 x - \hbar^3 x + \frac{\hbar^3 x^3}{6}$$

$$u_4(x, \hbar) = -\hbar x - 3\hbar^2 x - 3\hbar^3 x - \hbar^4 x + \frac{\hbar^3 x^3}{2} + \frac{\hbar^4 x^3}{2}$$

$$u_5(x, \hbar) = -\hbar x - 4\hbar^2 x - 6\hbar^3 x - 4\hbar^4 x - \hbar^5 x + \hbar^3 x^3 + 2\hbar^4 x^3 + \hbar^5 x^3 - \frac{\hbar^5 x^5}{120}$$

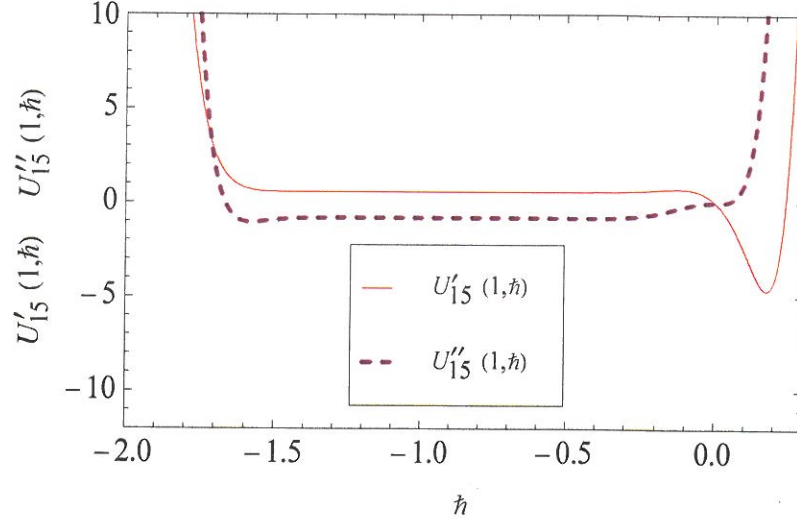
⋮

çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada  $u_{15}(x, \hbar)$ 'a kadar elde edilirse, elde ettiğimiz çözüm serisinin

$$u(x) \approx U_{15}(x, \hbar) \quad (4.39)$$

şeklinde problem (4.33)'ün (4.34) gerçek çözümüne yakınsadığı görülür. Çözüm serisinin gerçek çözüme yakınsaklığını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{15}(1, \hbar)$  ve  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.10. (4.33) probleminin  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.10'daki  $U'_{15}(1, \hbar)$  ile  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.4, -0.4]$  aralığında olması gerektiği görülür. Uygun  $\hbar$  değeri,

Tablo 4.8. (4.33) probleminin uygun  $\hbar$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$2.41474 \times 10^{-15}$	$\hbar \rightarrow -0.999679$
0.4	$3.49216 \times 10^{-11}$	$\hbar \rightarrow -0.349158$
0.6	$2.1454 \times 10^{-10}$	$\hbar \rightarrow -0.249371$
0.8	$8.45636 \times 10^{-6}$	$\hbar \rightarrow 0.584858$
1	$3.32401 \times 10^{-13}$	$\hbar \rightarrow -0.992747$

Tablo 4.8'de görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $\hbar = -0.99984$  olduğu görülür.  $\hbar = -0.99984$  için

$$U_{15}(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x) \quad (4.40)$$

çözüm serisi (4.40) hesaplanır ve yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

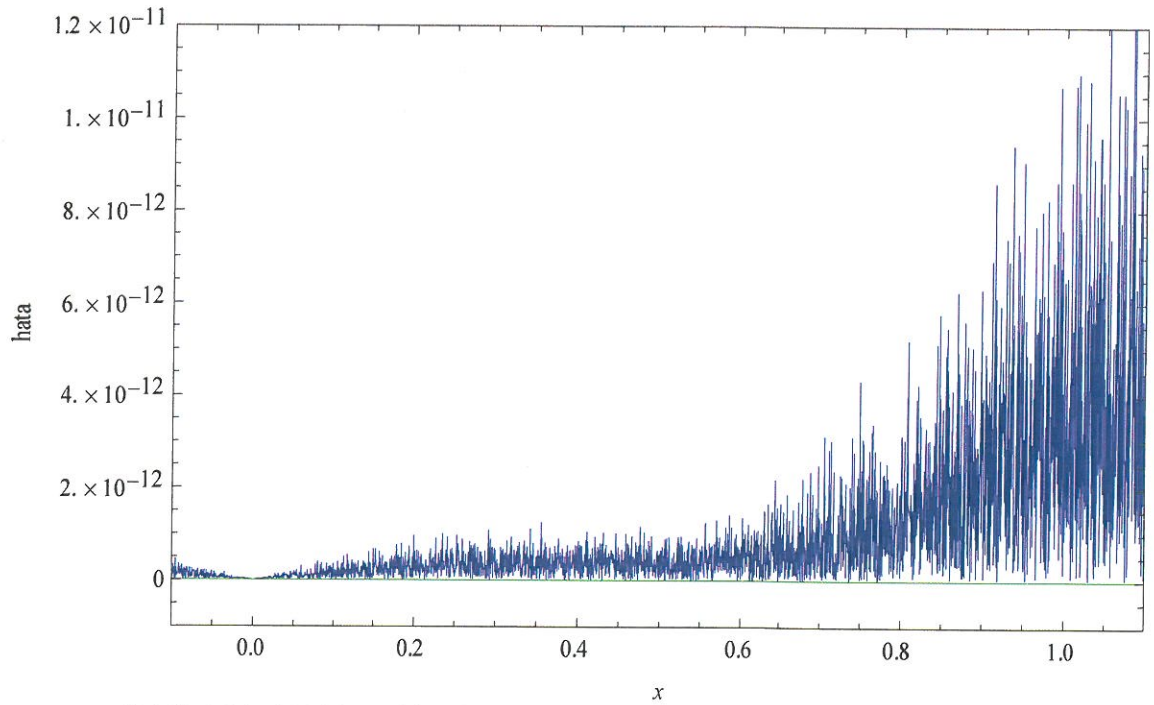
$$|U_{15}(x) - \text{Sin}(x)| \quad (4.41)$$

olmak üzere.

Tablo 4.9. (4.33) probleminin hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = \text{Sin}(x)$	$U_{15}(x)$ $h = -0.99984$	$ U_{15}(x) - \text{Sin}(x) $
0	0	0	0	0
1	0.2	0.1986693308	0.1986693308	$5.61 \times 10^{-26}$
2	0.4	0.3894183423	0.3894183423	$1.48 \times 10^{-21}$
3	0.6	0.5646424734	0.5646424734	$3.86 \times 10^{-19}$
4	0.8	0.7173560909	0.7173560909	$1.30 \times 10^{-18}$
5	1	0.8414709848	0.8414709848	$9.70 \times 10^{-16}$

$[0,1]$  aralığında hata fonksiyonu (fark fonksiyonu grafiği) aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.11. (4.33) probleminin  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği.



Tablo 4.10. (4.33) probleminin Adomian Metodu (ADM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile elde edilen sonuçları ile tam çözümün mukayese tablosu.

$x_i$	ADM	HPM	HAM	Tam Çözüm
			$N = 15$ $\hbar = -0.99984$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.19866933079506122	0.19866933079506122	0.19866933079506122	0.19866933079506122
0.4	0.38941834230865050	0.38941834230865050	0.38941834230865049	0.38941834230865049
0.6	0.56464224733950355	0.56464224733950355	0.56464247339503536	0.56464247339503536
0.8	0.7173560908995227	0.71735609089952280	0.71735609089952276	0.71735609089952276
1.0	0.84147109848078966	0.84147109848078965	0.84147098480789554	0.84147098480789651

Tablo 4.10. incelendiğinde  $N = 15$  iterasyon sonucunda Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile elde edilen sonuçların Adomian Decompozition Metodu (ADM) ve Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ile elde edilen sonuçlara göre (4.33) probleminin tam çözümü olan (4.34)'e daha çok yakınsadığı görülmekte.

Örnek 4.5.

Aşağıdaki elektrodinamik kaynaklı katsayılı pantograph denklemini ele alalım [26].

$$\begin{aligned}
 m &= 3 \\
 \lambda_1(t) &= 1, \quad \lambda_2(t) = -2\text{Cos}\left(\frac{t}{3}\right), \quad \lambda_3(t) = 2\text{Sin}\left(\frac{t}{3}\right) \\
 q_1 &= \frac{1}{3}, \quad q_2 = \frac{1}{6}, \quad q_3 = \frac{1}{6} \\
 f(t) &= \text{Cos}(2t) - \text{Sin}(2t) - \frac{1}{2}\text{Sin}\left(\frac{2t}{3}\right) + \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\frac{2t}{3}\right)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

probleminin başlangıç şartı

$$u(0) = \frac{1}{2} \tag{4.43}$$

olmak üzere bu probleminin tam çözümü,

$$u(t) = \frac{1}{2}(\text{Sin}(2t) + \text{Cos}(2t)) \quad (4.44)$$

dir . Öncelikle deformasyon denklemini yazalım,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.45)$$

Sıfıncı dereceden deformasyon denkleminde (4.45) yararlanarak ve başlangıç şartı (4.43)'den dolayı  $u_0(x, \hbar) = \frac{1}{2}$  seçerek,

$$\begin{aligned} N[\phi(x; q)] &= \phi'(x) - \phi\left(\frac{x}{3}\right) + 2\text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)\phi\left(\frac{x}{6}\right) - 2\text{Sin}\left(\frac{x}{3}\right)\phi\left(\frac{x}{6}\right) \\ &\quad - (1 - \chi_m) \left( \text{Cos}(2t) - \text{Sin}(2t) - \frac{1}{2}\text{Sin}\left(\frac{2t}{3}\right) + \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\frac{2t}{3}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} R_m(u_{m-1}) &= u'(x) - u\left(\frac{x}{3}\right) + 2\text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)u\left(\frac{x}{6}\right) - 2\text{Sin}\left(\frac{x}{3}\right)u\left(\frac{x}{6}\right) \\ &\quad - (1 - \chi_m) \left( \text{Cos}(2t) - \text{Sin}(2t) - \frac{1}{2}\text{Sin}\left(\frac{2t}{3}\right) + \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\frac{2t}{3}\right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

olur .

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( \begin{aligned} &du_{m-1}(t) - u_{m-1}\left(\frac{t}{3}\right) + 2\text{Cos}\left(\frac{t}{3}\right)u_{m-1}\left(\frac{t}{6}\right) - 2\text{Sin}\left(\frac{t}{3}\right)u_{m-1}\left(\frac{t}{6}\right) \\ &- (1 - \chi_m) \left( \text{Cos}(2t) - \text{Sin}(2t) - \frac{1}{2}\text{Sin}\left(\frac{2t}{3}\right) + \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\frac{2t}{3}\right) \right) \end{aligned} \right) dt \right] \quad (4.48)$$

elde edilir.

(4.48) denklemini kullanarak  $u_0(x, \hbar) = 0$  başlangıç şartı ile Mathematica 7.0 yardımı ile  $u_i(x, \hbar)$   $i=1,2,\dots$  'ler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_0(x, \hbar) &= \frac{1}{2} \\
u_1(x, \hbar) &= -\frac{\hbar x}{2} - 6\hbar \text{Sin}\left[\frac{x}{6}\right]^2 + 3\hbar \text{Sin}\left[\frac{x}{3}\right] + \frac{3}{2} \hbar \text{Sin}\left[\frac{x}{3}\right]^2 - \frac{3}{4} \hbar \text{Sin}\left[\frac{2x}{3}\right] \\
&\quad - \hbar \text{Cos}[x] \text{Sin}[x] + \hbar \text{Sin}[x]^2 \\
u_2(x, \hbar) &= -\frac{1099\hbar^2}{40} - \frac{\hbar x}{2} + \frac{5\hbar^2 x}{4} + \frac{\hbar^2 x^2}{12} + 27\hbar^2 \text{Cos}\left[\frac{x}{9}\right] - \frac{81}{8} \hbar^2 \text{Cos}\left[\frac{2x}{9}\right] \\
&\quad + \frac{108}{5} \hbar^2 \text{Cos}\left[\frac{5x}{18}\right] - 9\hbar^2 \text{Cos}\left[\frac{x}{3}\right] - \frac{1}{2} \hbar^2 x \text{Cos}\left[\frac{x}{3}\right] - \frac{3}{2} \hbar^2 \text{Cos}\left[\frac{2x}{3}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \hbar^2 \text{Cos}[2x] - 27\hbar^2 \text{Sin}\left[\frac{x}{9}\right] - 6\hbar \text{Sin}\left[\frac{x}{6}\right]^2 + \frac{27}{8} \hbar^2 \text{Sin}\left[\frac{2x}{9}\right] \\
&\quad + 3\hbar \text{Sin}\left[\frac{x}{3}\right] - 6\hbar^2 \text{Sin}\left[\frac{x}{3}\right] - \frac{1}{2} \hbar^2 x \text{Sin}\left[\frac{x}{3}\right] + \frac{3}{2} \hbar \text{Sin}\left[\frac{x}{3}\right]^2 \\
&\quad + \frac{108}{7} \hbar^2 \text{Sin}\left[\frac{7x}{18}\right] - \frac{27}{8} \hbar^2 \text{Sin}\left[\frac{4x}{9}\right] - \frac{3}{4} \hbar \text{Sin}\left[\frac{2x}{3}\right] \\
&\quad - \frac{3}{2} \hbar^2 \text{Sin}\left[\frac{2x}{3}\right] - \hbar \text{Cos}[x] \text{Sin}[x] + \hbar \text{Sin}[x]^2 - \frac{1}{2} \hbar^2 \text{Sin}[2x]
\end{aligned}$$

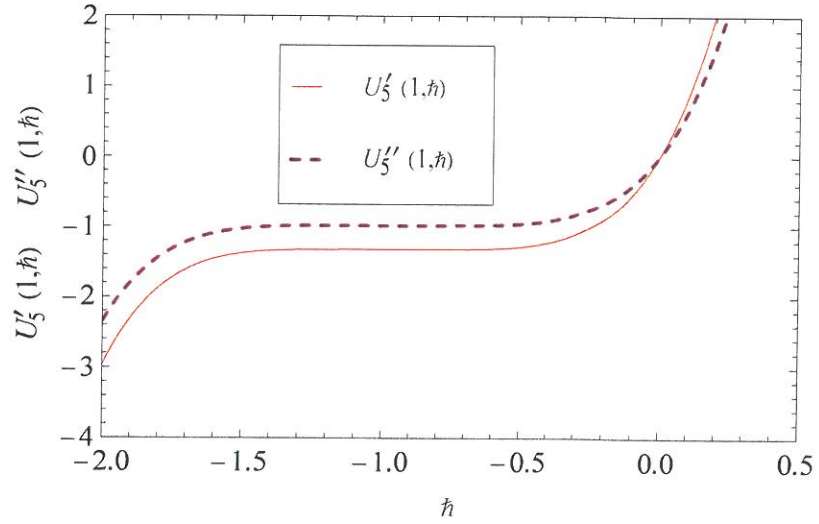
çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada  $u_5(x, \hbar)$  'a kadar elde edilirse, çözüm serimizin

$$u(x) \approx U_5(x, \hbar) \quad (4.49)$$

şeklinde problemimizin (4.42) gerçek çözümüne (4.44) yakınsadığı görülür.

Çözüm serimizin analitik çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$  'ın uygun aralığını bulmak için,  $U_5'(1, \hbar)$  ve  $U_5''(1, \hbar)$  grafiklerini çizerek.



Şekil 4.12. (4.42) probleminin  $h$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.12'deki  $U_5'(1, h)$  ile  $U_5''(1, h)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $h$ 'in  $[-1.5, -0.5]$  aralığında olması gerektiği görülür. Uygun  $h$  değeri

Tablo 4.11. (4.42) probleminin uygun  $h$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, h)$	$h$
0.05	0.0000178097	$h \rightarrow -0.793528$
0.2	$4.10892 \times 10^{-6}$	$h \rightarrow -0.879311$
0.4	$6.27258 \times 10^{-7}$	$h \rightarrow -0.925769$
0.6	$2.3037 \times 10^{-8}$	$h \rightarrow -0.969326$
0.8	$9.99272 \times 10^{-11}$	$h \rightarrow -0.285454$
1	$2.7951 \times 10^{-6}$	$h \rightarrow -0.914367$

Tablo 4.11'den yararlanılarak (4.50) de  $h$  incelemesi yapılırsa çözüm serimizin problem (4.42)'nin (4.44) gerçek çözümüne yakınsamamızı kontrol altına alan  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin en uygun yaklaşık  $h = -1$  olduğu görülür.  $h = -1$  için

$$U_5(x) = \sum_{m=0}^5 u_m(x) \quad (4.50)$$

çözüm serimiz hesaplanır ve problem (4.42) için hata (fark) fonksiyonu

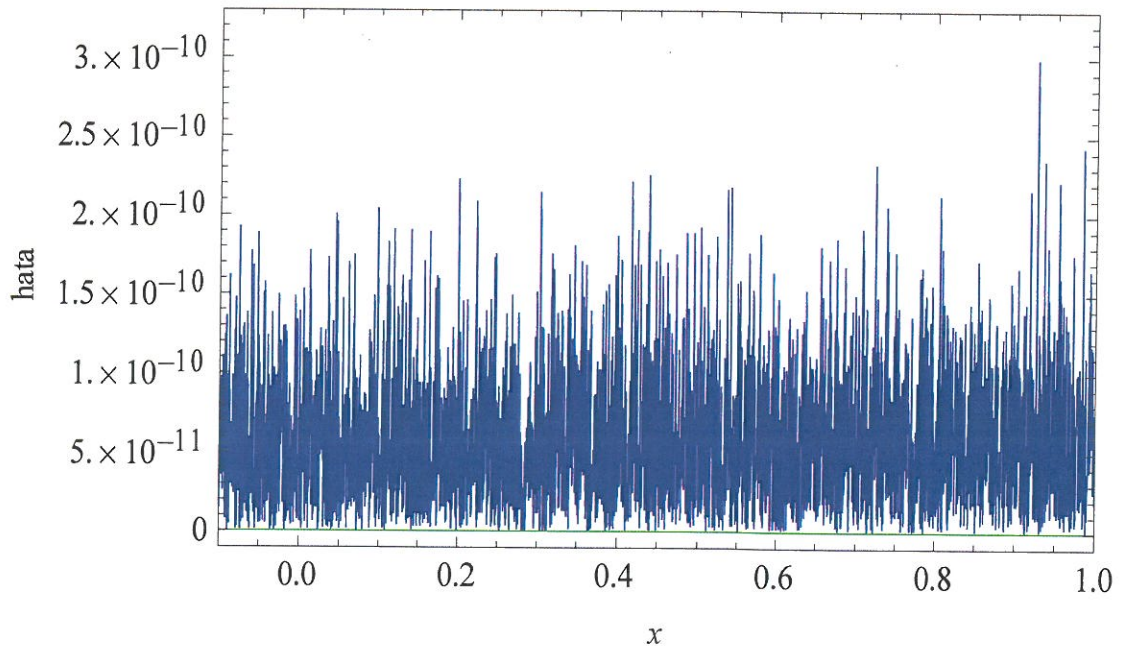
$$|U_5(x) - \frac{1}{2}(\sin(2x) + \cos(2x))| \quad (4.51)$$

dir. (4.42) probleminin hata tablosu aşağıdaki gibidir.

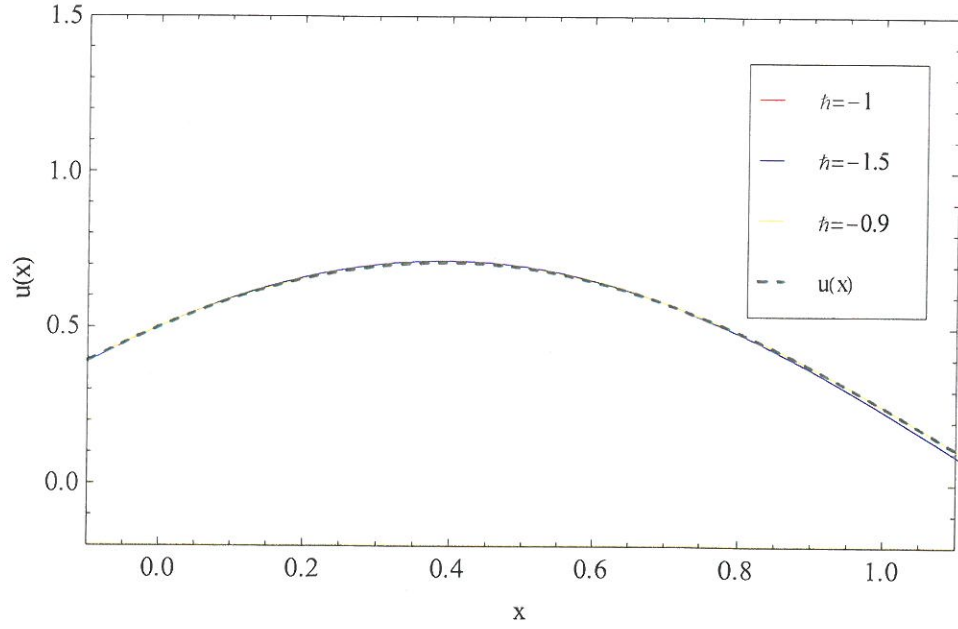
Tablo 4.12. (4.42) probleminin hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = \frac{1}{2}(\sin(2x) + \cos(2x))$	$\frac{U_5(x)}{h = -1}$	$ U_5(x) - \frac{1}{2}(\sin(2x) + \cos(2x)) $
0	0.05	0.5474187910	0.5474187910	$2.652 \times 10^{-23}$
1	0.2	0.6552396682	0.6552396682	$4.358 \times 10^{-19}$
2	0.4	0.7070314001	0.7070314001	$5.600 \times 10^{-17}$
3	0.6	0.6471984202	0.6471984202	$9.607 \times 10^{-16}$
4	0.8	0.4851870404	0.4851870404	$7.227 \times 10^{-15}$
5	1	0.2465752951	0.2465752951	$3.461 \times 10^{-14}$

[0,1] aralığında hata fonksiyonu (fark fonksiyonu grafiği) aşağıdaki gibidir.



Şekil 4. 13. (4.42) probleminin [0,1] aralığında hata fonksiyon grafiği.



Şekil 4. 14. Problem (4.42) nin  $[0,1]$  aralığında gerçek çözümü  $u(x)$  ile bazı  $h$  değerleri için çözüm serilerinin kıyaslama grafikleri.

Tablo 4.13. (4.42) problemi için Adomian Metodu(ADM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) fark fonksiyonlarının mukayese tablosu

$i$	$x_i$	<i>Adomian</i>	<i>Homotopi</i>	<i>Analiz</i>	<i>Metotu</i>
		<i>Metot</i> $N=3$	$\hbar = -1.00032$ $N=3$	$\hbar = -1.00049$ $N=3$	$\hbar = -1$ $N=5$
0	0.05	$6.483\ 702\ 463\ 8 \times 10^{-13}$	$1.51845 \times 10^{-12}$	$5.01432 \times 10^{-12}$	$2.652 \times 10^{-23}$
1	0.20	$7.467\ 804\ 152\ 8 \times 10^{-11}$	$7.0192 \times 10^{-11}$	$1.30631 \times 10^{-10}$	$4.358 \times 10^{-19}$
2	0.40	$2.443\ 229\ 618\ 6 \times 10^{-9}$	$3.931 \times 10^{-11}$	$1.22935 \times 10^{-9}$	$5.600 \times 10^{-17}$
3	0.60	$1.884\ 778\ 555\ 4 \times 10^{-8}$	$7.10917 \times 10^{-9}$	$9.29506 \times 10^{-11}$	$9.607 \times 10^{-16}$
4	0.80	$8.068\ 803\ 936\ 1 \times 10^{-8}$	$4.56737 \times 10^{-8}$	$2.15485 \times 10^{-8}$	$7.227 \times 10^{-15}$
5	1.00	$2.502\ 103\ 200\ 1 \times 10^{-7}$	$1.70298 \times 10^{-7}$	$1.09261 \times 10^{-7}$	$3.461 \times 10^{-14}$

Tablo 4.13’da görüldüğü gibi (4.42) problemi için  $N=3$  iterasyon uygulandığında Homotopi Analiz Metodu (HAM) Adomian Decompozition Metoduna (ADM) göre genelde (4.42) probleminin tam çözümü olan (4.44)’e daha yakın sonuçlar vermektedir.  $N=5$  iterasyon uygulandığında ise (4.44) çözümüne daha çok yaklaştığı görülmektedir.

Örnek 4.6.

Aşağıdaki elektrodinamik kaynaklı ve değişken katsayılı pantograph denklemini ele alalım [26].

$$\begin{aligned}
 m &= 4 \\
 \lambda_1(t) &= 3e^{-(5/6)t}, \quad \lambda_2(t) = -2e^{-(2/3)t}, \quad \lambda_3(t) = e^{-(1/2)t}, \quad \lambda_4(t) = -3e^{-(3/4)t} \\
 q_1 &= \frac{1}{3}, \quad q_2 = \frac{1}{3}, \quad q_3 = \frac{1}{2}, \quad q_4 = \frac{1}{4} \\
 f(t) &= -\frac{1}{144}e^{-t}(197t^2 - 12t - 144)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Başlangıç şartı

$$u(0) = 0, \tag{4.53}$$

olmak üzere bu problemin tam çözümü,

$$u(t) = (t^2 + t)e^{-t}, \tag{4.54}$$

dir . Öncelikle deformasyon denklemini yazalım.

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \tag{4.55}$$

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminde (4.55) yararlanarak ve başlangıç yaklaşımı (4.53) olduğundan  $u_0(x, \hbar) = 0$  seçerek,

$$\begin{aligned}
 N[\phi(x; q)] &= \phi'(x) - 3e^{-(5/6)t} \phi\left(\frac{x}{6}\right) - 2e^{-(2/3)t} \phi\left(\frac{x}{3}\right) - e^{-(1/2)t} \phi\left(\frac{x}{2}\right) + 3e^{-(3/4)t} \phi\left(\frac{x}{4}\right) \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{144}e^{-t}(197t^2 - 12t - 144)\right)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

ve

$$\begin{aligned}
R_m(u_{m-1}) &= u'(x) - 3e^{-(5/6)t} u\left(\frac{x}{6}\right) - 2e^{-(2/3)t} u\left(\frac{x}{3}\right) - e^{-(1/2)t} u\left(\frac{x}{2}\right) + 3e^{-(3/4)t} u\left(\frac{x}{4}\right) \\
&\quad - \left(-\frac{1}{144} e^{-t} (197t^2 - 12t - 144)\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

olur .

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( du_{m-1}(t) - 3e^{-(5/6)t} u_{m-1}\left(\frac{t}{6}\right) - 2e^{-(2/3)t} u_{m-1}\left(\frac{t}{3}\right) - e^{-(1/2)t} u_{m-1}\left(\frac{t}{2}\right) + 3e^{-(3/4)t} u_{m-1}\left(\frac{t}{4}\right) \right) dt \right] - (1 - \chi_m) \left(-\frac{1}{144} e^{-t} (197e^{-t} - 12t - 144)\right) \tag{4.58}$$

elde edilir. (4.58) denklemini kullanarak  $u_0(x, \hbar) = 0$  başlangıç şartı ile Mathematica 7.0 yardımı ile  $u_i(x, \hbar)$   $i=1,2,\dots$  ler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_0(x, \hbar) = 0$$

$$u_1(x, \hbar) = \frac{119\hbar}{72} - \frac{119e^{-x}\hbar}{72} - \frac{191}{72} e^{-x}\hbar x - \frac{197}{144} e^{-x}\hbar x^2$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, \hbar) &= \frac{119\hbar}{72} - \frac{119e^{-x}\hbar}{72} + \frac{126857\hbar^2}{51840} - \frac{104197e^{-x}\hbar^2}{10368} + \frac{119}{20} e^{-5x/6}\hbar^2 \\
&\quad - \frac{119}{18} e^{-3x/4}\hbar^2 + \frac{119}{24} e^{-2x/3}\hbar^2 + \frac{119}{36} e^{-x/2}\hbar^2 - \frac{191}{72} e^{-x}\hbar x \\
&\quad - \frac{63157e^{-x}\hbar^2 x}{10368} - \frac{197}{144} e^{-x}\hbar x^2 - \frac{38809e^{-x}\hbar^2 x^2}{20736}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
u_3(x, \hbar) = & \frac{119h}{72} - \frac{119e^{-x}h}{72} + \frac{126857h^2}{25920} - \frac{104197e^{-x}h^2}{5184} + \frac{119}{10}e^{-5x/6}h^2 \\
& - \frac{119}{9}e^{-3x/4}h^2 + \frac{119}{12}e^{-2x/3}h^2 + \frac{119}{18}e^{-x/2}h^2 + \frac{24006238469h^3}{9443174400} \\
& - \frac{70411073e^{-x}h^3}{1492992} + \frac{459}{25}e^{-35x/36}h^3 - \frac{4522}{115}e^{-23x/24}h^3 + \frac{567}{20}e^{-17x/18}h^3 \\
& + \frac{952}{45}e^{-15x/16}h^3 - \frac{4403}{330}e^{-11x/12}h^3 + \frac{357}{32}e^{-8x/9}h^3 - \frac{170}{9}e^{-7x/8}h^3 \\
& + \frac{412457e^{-5x/6}h^3}{14400} + \frac{155417e^{-3x/4}h^3}{12960} + \frac{212537e^{-2x/3}h^3}{17280} + \frac{212537e^{-x/2}h^3}{25920} \\
& - \frac{191}{72}e^{-x}hx - \frac{63157e^{-x}h^2x}{5184} - \frac{19488209e^{-x}h^3x}{1492992} - \frac{197}{144}e^{-x}hx^2 - \frac{38809e^{-x}h^2x^2}{10368} \\
& - \frac{7645373e^{-x}h^3x^2}{2985984}
\end{aligned}$$

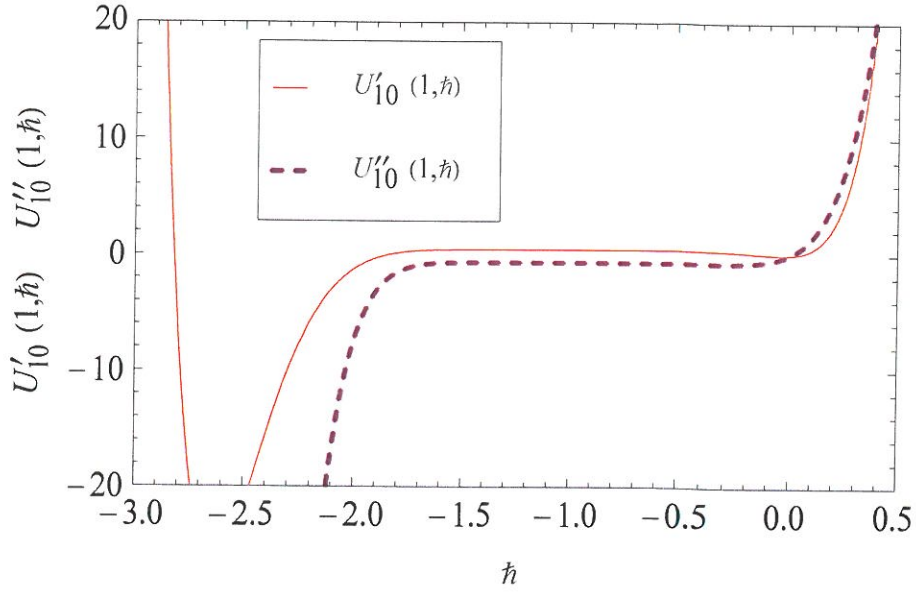
⋮

çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada  $u_{10}(x, \hbar)$ 'a kadar elde edilirse, çözüm serimizin

$$u(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.59)$$

(4.52) problemimizin gerçek çözümüne (4.54) yakınsadığı görülür. Çözüm serimizin problemimizin gerçek çözümüne yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{10}(1, \hbar)$  ve  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerini çizerek.



Şekil 4.15. (4.52) probleminin  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.15'deki  $U'_{10}(1, \hbar)$  ile  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.6, -0.2]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.14. (4.52) probleminin uygun  $\hbar$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$4.05058 \times 10^{-15}$	$\hbar \rightarrow -0.854247$
0.4	$1.67921 \times 10^{-15}$	$\hbar \rightarrow -0.883868$
0.6	$3.3752 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -1.05537$
0.8	$1.09383 \times 10^{-7}$	$\hbar \rightarrow 0.556316$
1	$6.12846 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow 0.392825$

Tablo 4.14'den yararlanılarak (4.60) çözüm serimiz  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresine bağlı olarak incelenirse en iyi  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $\hbar = -1$  olduğu görülür. Burada  $\hbar = -1$  için

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^{10} u_m(x) \quad (4.60)$$

yaklaşık çözüm serisi hesaplanır. Problem(4.52)'nin hata (fark) fonksiyonu

$$|U_{10}(x) - (x^2 + x)e^{-x}| \quad (4.61)$$

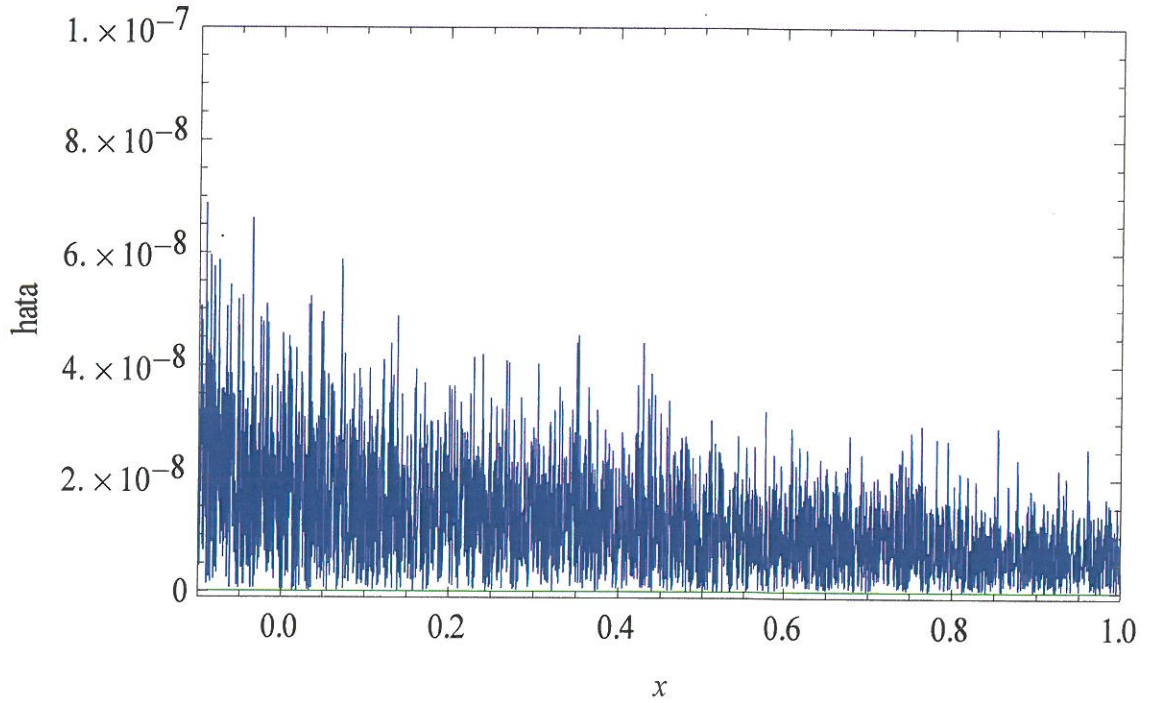
olmak üzere.

Tablo 4.15. (4.52) probleminin hata tablosu

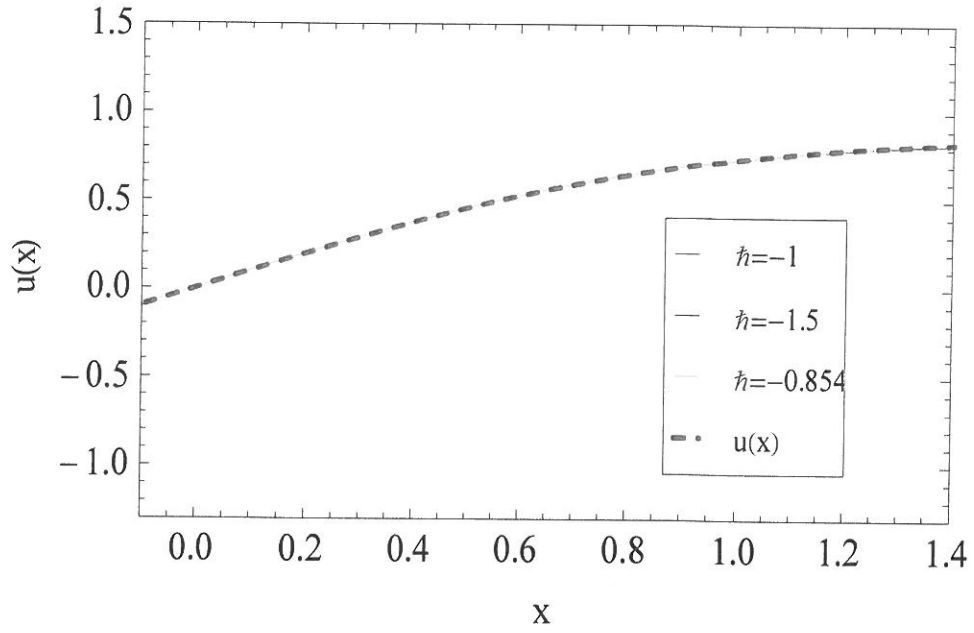
$i$	$x_i$	$u(x) = (x^2 + x)e^{-x}$	$\frac{U_{10}(x)}{h = -1}$	$ U_{10}(x) - (x^2 + x)e^{-x} $
0	0	0	0	0
1	0.2	0.1964953807	0.1964953807	$9.082 \times 10^{-32}$
2	0.4	0.3753792258	0.3753792258	$1.574 \times 10^{-28}$
3	0.6	0.5268591707	0.5268591707	$1.153 \times 10^{-26}$
4	0.8	0.6470337083	0.6470337083	$2.312 \times 10^{-25}$
5	1	0.7357588823	0.7357588823	$2.280 \times 10^{-24}$

hata tablosu elde edilir.

[0,1] aralığında hata fonksiyonu (fark fonksiyonu grafiği) aşağıdaki gibidir.



Şekil 4. 16. (4.52) probleminin [0,1] aralığında hata fonksiyon grafiği.



Şekil 4.17. Problem (4.52) nin  $[0,1]$  aralığında gerçek çözümü  $u(x)$  ile bazı  $h$  değerleri için çözüm serilerinin kıyaslama grafikleri.

Tablo 4.16. (4.52) problemi için Adomian Metodu (ADM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) fark fonksiyonlarının mukayese tablosu

$i$	$x_i$	<i>Adomian</i>	<i>Homotopi</i>	<i>Analiz</i>	<i>Metodu</i>
		<i>Metot</i> $N=3$	$\hbar = -1.01210411$ $N=3$	$\hbar = -1.006201009$ $N=3$	$\hbar = -1.00023$ $N=4$
0	0.05	$1.098\ 155\ 767\ 7 \times 10^{-11}$	$1.71311 \times 10^{-7}$	$4.04307 \times 10^{-9}$	$4.61853 \times 10^{-14}$
1	0.20	$1.013\ 491\ 702\ 5 \times 10^{-8}$	$4.41544 \times 10^{-6}$	$2.32536 \times 10^{-6}$	$7.23829 \times 10^{-9}$
2	0.40	$2.829\ 716\ 160\ 3 \times 10^{-7}$	$3.24347 \times 10^{-5}$	$4.07013 \times 10^{-10}$	$2.41314 \times 10^{-7}$
3	0.60	$1.876\ 191\ 527\ 5 \times 10^{-6}$	$5.43048 \times 10^{-5}$	$6.15244 \times 10^{-5}$	$1.68915 \times 10^{-6}$
4	0.80	$6.908\ 095\ 208\ 8 \times 10^{-6}$	$1.40495 \times 10^{-10}$	$2.64513 \times 10^{-4}$	$6.38519 \times 10^{-6}$
5	1.00	$1.843\ 365\ 433\ 7 \times 10^{-5}$	$2.14033 \times 10^{-4}$	$6.95987 \times 10^{-4}$	$1.7305 \times 10^{-5}$

Tablo 4.16'da görüldüğü gibi (4.52) problemi için  $N=3$  iterasyon uygulandığında Homotopi Analiz Metodu  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin farklı değerleri için Adomian Metodundan daha iyi sonuçlar verdiği durumlar var. Homotopi Analiz Metodu Adomian metoduna göre (4.52) probleminin tam çözümü olan (4.54)'e noktasal olarak daha iyi sonuçlar verdiği durumlar olsa da (4.52) problemi için  $N=3$  iterasyon uygulandığında Adomian metodunun daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

$N = 4$  iterasyon uygulandığında ise Homotopi Analiz Metodu ile bulunan yakınsama çözüm serimiz (4.54) tam çözümüne daha iyi bir yakınsama göstermektedir.

Örnek 4.7.

Aşağıdaki elektrodinamik kaynaklı değişken katsayılı pantograph denklemini ele alalım [26].

$$\begin{aligned}
 m &= 4 \\
 \lambda_1(t) &= 5t, \quad \lambda_2(t) = -4(t+2), \quad \lambda_3(t) = 2, \quad \lambda_4(t) = 3\left(t^2 + \frac{1}{6}t + 2\right) \\
 q_1 &= \frac{1}{5}, \quad q_2 = \frac{1}{4}, \quad q_3 = \frac{1}{7}, \quad q_4 = \frac{1}{6} \\
 f(t) &= \frac{1}{12}t^4 - \frac{193}{360}t^3 - \frac{3749}{588}t^2 - \frac{30}{7}t + 1
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Başlangıç şartı

$$u(0) = 2, \tag{4.63}$$

olmak üzere bu problemin tam çözümü

$$u(t) = -(t+1)(t-2), \tag{4.64}$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemini yazalım.

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \tag{4.65}$$

(4.64)'deki deformasyon denkleminde yararlanarak ve başlangıç yaklaşımı (4.63) olduğundan  $u_0(x, \hbar) = 0$  seçerek,

$$\begin{aligned}
 N[\phi(x; q)] &= \phi'(x) - 5t\phi\left(\frac{x}{5}\right) + (4x+8)\phi\left(\frac{x}{4}\right) - 2\phi\left(\frac{x}{7}\right) - \left(3x^2 + \frac{x}{2} + 6\right)\phi\left(\frac{x}{6}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{x^4}{12} - \frac{193x^3}{360} - \frac{3749x^2}{588} - \frac{30x}{7} + 1\right)
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

ve

$$\begin{aligned}
R_m(u_{m-1}) &= u'(x) - 5tu\left(\frac{x}{5}\right) + (4x+8)u\left(\frac{x}{4}\right) - 2u\left(\frac{x}{7}\right) - \left(3x^2 + \frac{x}{2} + 6\right)u\left(\frac{x}{6}\right) \\
&\quad - \left(\frac{x^4}{12} - \frac{193x^3}{360} - \frac{3749x^2}{588} - \frac{30x}{7} + 1\right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

olur .

$$u_m(x) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \begin{pmatrix} du_{m-1}(t) - 5tu_{m-1}\left(\frac{t}{5}\right) + (4t+8)u_{m-1}\left(\frac{t}{4}\right) - 2u_{m-1}\left(\frac{t}{7}\right) \\ -(3t^2 + \frac{t}{2} + 6)u_{m-1}\left(\frac{t}{6}\right) - (1 - \mathcal{X}_m)\left(\frac{t^4}{12} - \frac{193t^3}{360} \right. \\ \left. - \frac{3749t^2}{588} - \frac{30t}{7} + 1\right) \end{pmatrix} dt \right] \tag{4.68}$$

elde edilir. (4.68) denklemini kullanarak  $u_0(x, \hbar) = 0$  başlangıç şartı ile Mathematica 7.0 yardımıyla  $u_i(x, \hbar)$   $i=1,2,\dots$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_0(x, \hbar) = 2$$

$$u_1(x, \hbar) = -\hbar x + \frac{9\hbar x^2}{14} + \frac{221\hbar x^3}{1764} + \frac{193\hbar x^4}{1440} - \frac{\hbar x^5}{60}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, \hbar) &= -\hbar x - \hbar^2 x + \frac{9\hbar x^2}{14} + \frac{2\hbar^2 x^2}{7} + \frac{221\hbar x^3}{1764} + \frac{74\hbar^2 x^3}{343} + \frac{193\hbar x^4}{1440} \\
&\quad + \frac{233234887\hbar^2 x^4}{871274880} - \frac{\hbar x^5}{60} - \frac{1955434573\hbar^2 x^5}{74680704000} \\
&\quad - \frac{13881906559\hbar^2 x^6}{94097687040000} - \frac{810917\hbar^2 x^7}{16329600000} + \frac{\hbar^2 x^8}{1244160}
\end{aligned}$$

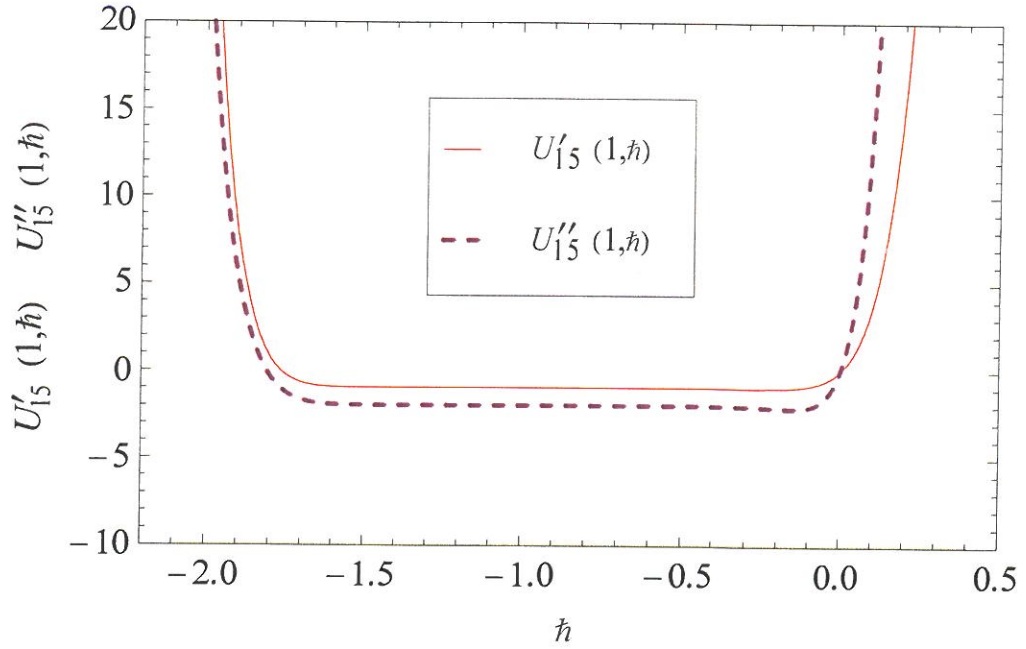
$$\begin{aligned}
u_3(x, \hbar) = & -hx - 2h^2x - h^3x + \frac{9hx^2}{14} + \frac{4h^2x^2}{7} - \frac{h^3x^2}{14} + \frac{221hx^3}{1764} \\
& + \frac{148h^2x^3}{343} + \frac{1117h^3x^3}{4116} + \frac{193hx^4}{1440} + \frac{233234887h^2x^4}{435637440} \\
& + \frac{2440804321h^3x^4}{6098924160} - \frac{hx^5}{60} - \frac{1955434573h^2x^5}{37340352000} \\
& - \frac{1296570004407623h^3x^5}{45185709316608000} - \frac{13881906559h^2x^6}{47048843520000} \\
& - \frac{138265023523865711h^3x^6}{390404528495493120000} - \frac{810917h^2x^7}{8164800000} \\
& - \frac{176687234159261314457761h^3x^7}{1205178779465587261440000000} + \frac{h^2x^8}{622080} \\
& + \frac{1235812089887249272177h^3x^8}{6023384153930465280000000000} \\
& + \frac{2725645021965712999h^3x^9}{338815358658588672000000000000} \\
& + \frac{41742094907h^3x^{10}}{7313988648960000000000} - \frac{h^3x^{11}}{7662273822720} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada  $u_{15}(x, \hbar)$ 'a kadar Mathematica 7.0 yardımı ile elde edilirse, çözüm serimizin problem (4.62)'nin (4.64) gerçek çözümüne (4.69) gibi yakınsadığı görülür

$$u(x) \approx U_{15}(x, \hbar) \quad (4.69)$$

Çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{15}(1, \hbar)$  ve  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.18. (4.62) probleminin  $h$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.18'deki  $U'_{15}(1, h)$  ile  $U''_{15}(1, h)$  grafiklerinin  $x$  eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $h$ 'ın  $[-1.6, -0.1]$  aralığında olması gerektiği görülür. Uygun  $h$  değeri için  $h$  değerleri incelenirse,

Tablo 4.17. (4.62) probleminin uygun  $h$  belirleme tablosu

$x_i$	$U(x, h)$	$h$
0	0	$h \rightarrow 1$
0.2	$3.18634 \times 10^{-14}$	$h \rightarrow -0.981617$
0.4	$2.7478 \times 10^{-13}$	$h \rightarrow -0.980165$
0.6	$1.54099 \times 10^{-13}$	$h \rightarrow -0.9791$
0.8	$3.48166 \times 10^{-13}$	$h \rightarrow -0.978137$
1	$1.86162 \times 10^{-12}$	$h \rightarrow -0.977067$

Tablo 4.17'den yararlanılarak (4.70) üzerinde Mathematica 7.0 programı yardımıyla  $h$  yakınsaklık kontrol parametresi incelenirse en uygun parametrenin  $h = -1$  olduğu görülür.  $h = -1$  için çözüm serisi (4.70) hesaplanır

$$U_{15}(x) = \sum_{m=0}^{15} u_m(x) \quad (4.70)$$



ve (4.62) probleminin hata (fark) fonksiyonu

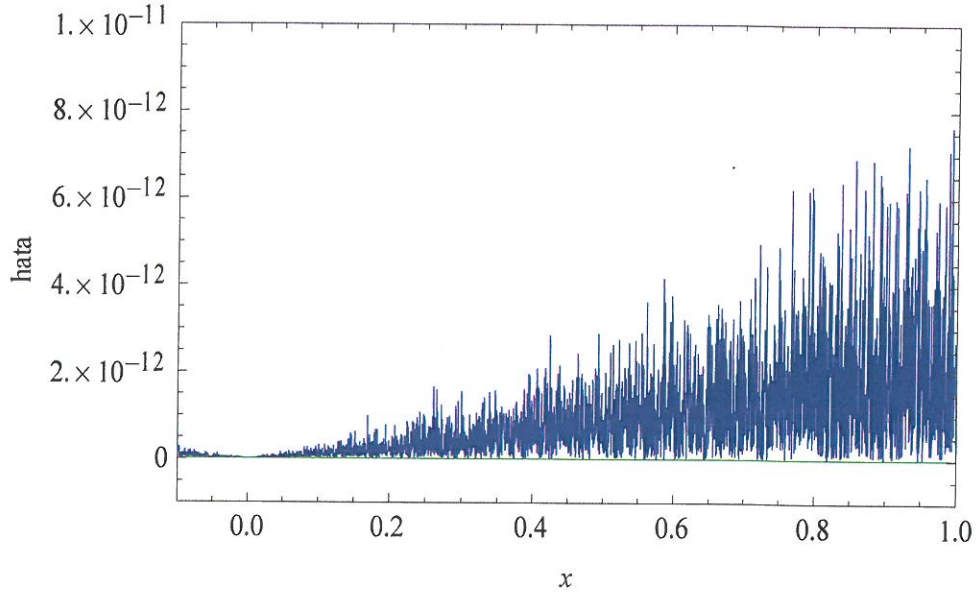
$$|U_{15}(x) + (x+1)(x-2)| \quad (4.71)$$

olmak üzere.

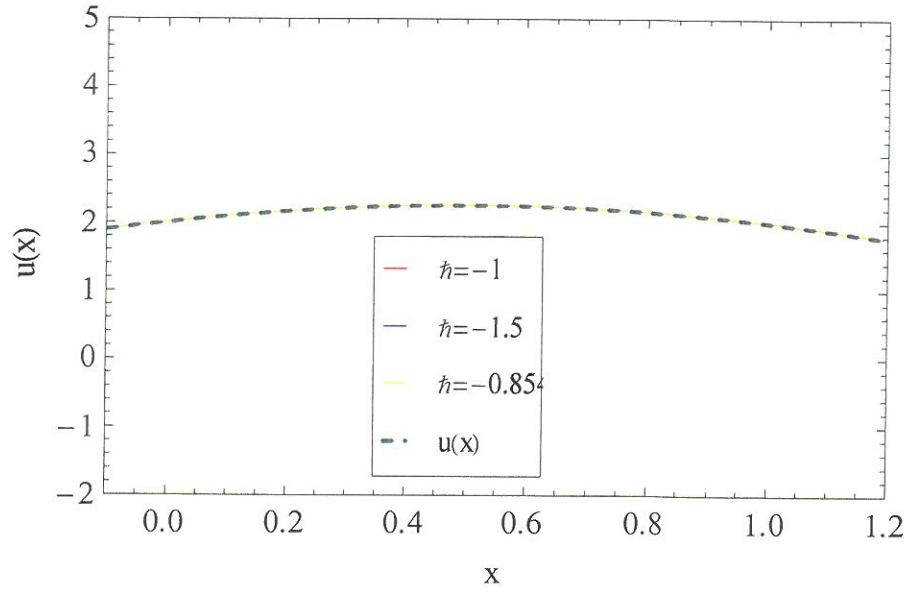
Tablo 4.18. (4.62) probleminin hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = -(x+1)(x-2)$	$\frac{U_{15}(x)}{h = -1}$	$ U_{15}(x) + (x+1)(x-2) $
0	0	2.000000000	2.000000000	0
1	0.2	2.160000000	2.160000000	$6.26 \times 10^{-85}$
2	0.4	2.240000000	2.240000000	$4.56 \times 10^{-80}$
3	0.6	2.240000000	2.240000000	$3.31 \times 10^{-77}$
4	0.8	2.160000000	2.160000000	$3.63 \times 10^{-75}$
5	1	2.000000000	2.000000000	$1.41 \times 10^{-73}$

[0,1] aralığında hata fonksiyonu (fark fonksiyonu grafiği) aşağıdaki gibidir.



Şekil 4. 19. (4.62) probleminin [0,1] aralığında hata fonksiyon grafiği.



Şekil 4. 20. Problem (4.62)' nin  $[0,1]$  aralığında gerçek çözümü  $u(x)$  ile bazı  $\hbar$  değerleri için çözüm serilerinin kıyaslama grafikleri.

Tablo 4.19. (4.62) problemi için Adomian Metodu (ADM) ve Homotopi Analiz Metodu (HAM) fark fonksiyonlarının mukayese tablosu

$i$	$x_i$	<i>Adomian</i>	<i>Homotopi</i>	<i>Analiz</i>	<i>Metodu</i>
		<i>Metot</i> $N = 3$	$\hbar = -0.952489745$ $N = 3$	$\hbar = -1$ $N = 10$	$\hbar = -1$ $N = 15$
0	0.05	4.164 566 263 $6.10^{-12}$	$1.22 \times 10^{-13}$	0	0
1	0.20	4.445 736 424 $8.10^{-9}$	$3.25 \times 10^{-5}$	$4.31 \times 10^{-41}$	$6.26 \times 10^{-85}$
2	0.40	1.495 036 241 $9.10^{-7}$	$8.62 \times 10^{-6}$	$9.68 \times 10^{-38}$	$4.56 \times 10^{-80}$
3	0.60	1.185 822 645 $0.10^{-6}$	$2.88 \times 10^{-4}$	$9.14 \times 10^{-36}$	$3.31 \times 10^{-77}$
4	0.80	5.190 412 576 $2.10^{-6}$	$1.00 \times 10^{-3}$	$2.35 \times 10^{-34}$	$3.63 \times 10^{-75}$
5	1.00	1.636 783 379 $7.10^{-5}$	$2.18 \times 10^{-3}$	$2.97 \times 10^{-33}$	$1.41 \times 10^{-73}$

Tablo 4.19. incelenirse (4.62) problemi için Adomian Metodu ve Homotopi Analiz Metodu için  $N = 3$  iterasyon uygulanırsa Adomian Metodunun (4.64) tam çözümüne daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.  $N = 10$  ve  $N = 15$  gibi yüksek iterasyon sonucunda ise Homotopi Analiz Metodunun (4.62) probleminin tam çözümü olan (4.64)'e çok yakınsadığı gözlemlenmektedir.

## 5.BÖLÜM

### TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada gecikmeli diferansiyel denklemlerin önemli bir bölümünü oluşturan pantograph denklemlerinin Homotopi Analiz Metodu ile çözüm serileri elde edilerek analitik çözüme yakınsamamızı sağlayan en uygun  $h$  yakınsaklık kontrol parametresi belirlenmeye çalışılmış ve buna bağlı yakınsamalar elde edildi.

Homotopi Analiz Metodu ile bulduğumuz çözüm serileri ile gerçek çözümlerin hata tabloları ve grafikleri verilerek yöntemimizin ne kadar uygun, kullanılabilir ve geçerli olduğu gösterildi. Homotopi Analiz Metodu ile bulduğumuz sonuçlar yardımıyla problemlerin gerçek çözümleri için fark değerleri bulundu. Aynı problemin farklı yöntemlerle bulunan fark değerleri ile bulduğumuz fark değerleri mukayese edildi. Adomian Metodu, Taylor Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu ile bulunan yakınsama değerleri ile Homotopi Analiz Metodu ile bulduğumuz yakınsama değerleri tablolara dökülerek verildi. Bu metot başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlamaktadır. Deformasyon denklemlerinin yazılması ve buna bağlı çözüm serilerinin elde edilmesi pratik ve uygulanabilir. Yöntemin diğer bir avantajı çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini fiziksel parametrelerden bağımsız ifade edebilmemizdir.

Homotopi Analiz Metodu ile elde ettiğimiz sonuçlar ile gerçek çözümün fark değerlerini diğer yöntemlerle mukayese etmek için en uygun  $h$  yakınsaklık kontrol parametresini belirlemek iterasyon sayısı arttıkça güçleşmekte. Çünkü iterasyon sayısı arttıkça  $h$  yakınsaklık kontrol parametresindeki çok küçük değişimler fark fonksiyonunda büyük değişiklikler yapabilmektedir.

Sonuç olarak Homotopi Analiz Metoduyla çözülen pantograph denklemlerin çözümlerinin gerçek çözümlere oldukça yaklaşıldığı gözlemlendi.

### KAYNAKLAR

1. Ockendon, J.R., Taylor, A.B. 1971 The dynamics of a current collection system for an electric locomotive *Proc. R. Soc. Lond. A* 322: 447–68.
2. Liao, S.J., "A Kind of Approximate Solution Technique Which Does Not Depend Upon Small Parameters (II): An Application in Fluid Mechanics." *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(5):815-822, 1997.
3. Liao, S.J., "A Simple Approach of Enlarging Convergence Regions of Perturbation Approximations." *Nonlinear Dynamics*, 19: 93-110, 1999.
4. Liao, S.J., *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
5. Liao, S.J., "Homotopy Analysis Method: A New Analytical Technique for Nonlinear Problems." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(2): 95-100, 1997.
6. Liao, S.J., "On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Problems." *Applied Mathematics and Computation*, 147(2):499-513, 2004.
7. Liao, S.J., The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
8. Li, D.S., Liu, M.Z. 2000 Exact solution properties of atmulti-pantograph delay differential equation *J. Harbin Inst. Technol.* 32: 1–3.
9. Koto, T., 1999 Stability of Runge–Kutta methods for the generalized pantograph equation *Numer. Math.* 84: 233–47
10. Liu, Y., 1997 Numerical investigation of the pantographequation *Appl. Numer. Math.* 24: 309–17
11. Tamasan, A., 1998 Differentiability with respect to lag for nonlinear pantograph equations *Pure Math. Appl.* 9: 215–20
12. Baker, C.T.H., Bukwwar, E. 2000 Continuous  $\Theta$ -methods for the stochastic pantograph equation *Electron. Trans. Num. Anal.* 11: 131–51

13. Li, D.S., Liu, M.Z., 2000 Exact solution properties of a multi-pantograph delay differential equation *J. Harbin Inst. Technol.* 32: 1–3
14. Guglielmi, N., Zennaro, M. 2003 Stability of one-leg  $\Theta$ -methods for the variable coefficient pantograph equation on the quasi-geometric mesh *IMA J. Numer. Anal.* 23:421–38
15. Marshall, J.C., van-Brunt, B., Wake, G.C. 2004 A natural boundary for solutions to the second order pantograph equation *J. Math. Anal. Appl.* 299: 314–21
16. Liu, M.Z., Li, D.S., 2004 Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation *Appl. Math. Comput.* 155: 853–71
17. Liu, M.Z., Yang, Z.W., Hu, G.D. 2005 Asymptotical stability of numerical methods with constant stepsize for pantograph equations *BIT Numer. Math.* 45: 743–59
18. Zhao, J.J, Xu, Y., Wang, H.X., Liu, M.Z. 2006 Stability of a class of Runge–Kutta methods for a family of pantograph equations of neutral type *Appl. Math. Comput.* 181: 1170–81
19. Fan, Z., Liu, M.Z., Cao, W. 2007 Existence and uniqueness of the solutions and convergence of semi-implicit Euler methods for stochastic pantograph equations *J. Math. Anal. Appl.* 325: 1142–59
20. Bellen, A., Guglielmi, N., Torelli, L. *Asymptotic stability properties of  $\theta$ -methods for the pantograph equation*, *Appl. Numer. Math.*, 24 (1997), pp. 279–293.
21. Bellen, A., Zennaro, M., *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2003.
22. Iserles, A., *On the generalized pantograph functional-differential equations*, *European J. Appl. Math.*, 4 (1993), pp. 1–38.
23. Iserles, A., *Exact and discretized stability of the pantograph equation*, *Appl. Numer. Math.*, 24 (1997), pp. 295–308.
24. Shakeri, F., Dehghan, M., Solution of the delay differential equations via homotopy perturbation method. *Mathematical and Computer Modelling* 2008; 48:486.
25. Evans, D.J., Raslan, K.R., The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *Int. J. Comput. Math.* 82 (1) (2005) 49–54.
26. Dehghan, M., Shakeri, F., The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Physica Scripta* 2008; 78:065004.

27. Shadia, M., Numerical Solution of Delay Differential and Neutral Differential Equations Using Spline Methods, PhD thesis, Assuit University, 1992.
28. El-Safty, A., Salim, M.S., El-Khatib, M.A. Convergence of the spline function for delay dynamic system, *Int. J. Comput. Math.* 80 (4) (2003) 509–518.
29. Buhmann, M.D., Iserles, A., Stability of the discretized pantograph differential equation, *Math. Comput.* 60 (1993)
30. Jackiewicz, Z., *Asymptotic stability analysis of  $\theta$ -methods for functional differential equations*, *Numer. Math.*, 43 (1984), pp. 389–396.
31. Burrage, K., Butcher, J.C., *Stability criteria for implicit Runge–Kutta methods*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 16 (1979), pp. 46–57.
32. Keskin, Y., Kurnaz, A., Kiris M.E., Approximate solutions of generalized pantograph equations by the differential transform method *Int. J. Nonlinear Sci. and Numerical Simulation*, 8 (2) 2007, 159-164.
33. Wang, Z., Zou, L., Zhang, H., Applying homotopy analysis method for solving differential difference equation. *Phys. Lett., A* 369, 77.84 (2007)
34. Abbasbandy, S., The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Phys. Lett., A*. 360, 109.113 (2006)
35. Abbasbandy, S., Homotopy analysis method for heat radiation equations. *Int. Commun. Heat. Mass. Transf.* 34, 380.387 (2007)
36. Abbasbandy, S., Soliton solutions for the 5th-order KdV equation with the homotopy analysis method. *Nonlinear Dyn.* 51, 83.87 (2008)
37. Awawdeh, F., Adawi, A., and Al-Shara, S. Analytic Solution of Multipantograph Equation, *J. Appl. Math. and Decision Sciences*, doi:10.1155/2008/605064, 2008
38. Bataineh, A.S., Noorani, M.S.M., Hashim, I., Solutions of time-dependent Emden-Fowler type equations by homotopy analysis method, *Phys. Lett., A* 371, 72.82 (2007).

## ÖZGEÇMİŞ

Adem ÇİL 1977 yılında Kahramanmaraş'ın Afşin ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini Afşin'de tamamladı. 2000 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl Mersin Fındıkpınarı İlköğretim Okuluna Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2003 yılında askerliğini yaptı. 2003-2008 yılları arasında Nevşehir'de sırasıyla Göynük İlköğretim Okulu, Özkonak Hacı Halil Türkkan Anadolu Öğretmen Lisesi ve Ürgüp Anadolu Lisesi okullarında görev yaptı. 2011 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2008 yılından beri Nevşehir Anadolu Lisesinde çalışmakta olup evli ve iki çocuk babasıdır.

Tel no: 05052657350

e-posta: ademoguz46@gmail.com