T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OSTROWSKİ-GRÜSS TİPİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ve GENELLEMELERİ

Tezi Hazırlayan
Hatice KARAKAYA

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Mayıs 2014
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OSTROWSKİ-GRÜSS TİPİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ve GENELLEMELERİ

Tezi Hazırlayan
Hatice KARAKAYA

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mayıs 2014
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında **Hatice KARAKAYA** tarafından hazırlanan "**Ostrowski-Grüss Tipi İntegral Eşitsizlikleri ve Genellemeleri**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

07/05/2014

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL imza

Üye : Doç. Dr. Necdet BATIR imza

Üye : Doç. Dr. Harun Reşit YAZAR imza

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun...16.05.2014....tarih ve..2014/19-01.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/05/2014

....

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hatice KARAKAYA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezim de büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Doç. Dr. Necdet BATIR'a,

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren değerli AİLEME,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Birimi'ne teşekkür ederim.

OSTROWSKİ-GRÜSS TİPİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE GENELLEMELERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hatice KARAKAYA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2014

ÖZET

Eşitsizlikler matematiğin en önemli konuları arasında yer almaktadır. Matematiksel eşitsizliklerin amacı değerini tam olarak bilmediğimiz bazı matematiksel ifadelerin ya da fonksiyonları daha iyi bildiğimiz bazı fonksiyonlarla alttan ve üstten sınırlamak veya doğrudan doğruya bu ifadeleri ya da fonksiyonları sayısal olarak sınırlar belirlemektir. Bu da bize bu fonksiyonların istediğimiz noktalardaki yaklaşık değerlerini bulmamızı sağlar.

Matematiksel eşitsizlerin kullanıldığı bir başka alan ise Fonksiyonel Analizdir. Fonksiyonel Analizde bazı lineer uzaylar üzerine norm inşa ederken bazı klasik eşitsizlikler kullanılır. Bu tezimizde klasik eşitsizlikler arasında kabul edilen Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikleri ele aldık. Bu eşitsizliklerle ilgili yapılan bazı çalışmalardan önemli gördüklerimizi seçerek bir araya getirdik.

Tezimizi şu şekilde hazırladık. Birinci bölümde Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikleri ve bunların geliştirilmişleri ve genellemelerini ele aldık. İkinci bölümde ise bu eşitsizlikler hakkında yapılan bir çok çalışmayı sistematik olarak bir araya getirdik. Üçüncü bölümde ise bu eşitsizliklerin bazı uygulamalarını ele aldık.

Anahtar kelimeler: Ostrowski eşitsizlikleri, Grüss eşitsizlikleri, nümerik integrasyon.
Tez Danışman: Doç. Dr. Necdet BATIR
Sayfa Adeti: 53

OSTROWSKI-GRÜSS TYPE INTEGRATION INEQUALITIES and GENERALIZATION
(M. Sc. Thesis)

Hatice KARAKAYA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNİVERSİTY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES

May 2014

ABSTRACT

Mathematical inequalities take an important place among mathematical concepts. The purpose for studying mathematical inequalities is to bound some quantity we don't know much by an other quanty we know well or to bound them numerically. This enables us to find the values of these quantities approximately. Mathematical inequalities have important applications in functional analysis. For example when building norms on some lineer spaces, we use some classical inequalities.

In this thesis we studied Ostrowski-Grüss type inequalities. There is a rich literature on this issue but we studied only one of them that we think that they are important.

We arranged our thesis as follows: Firstly we present a background of the issue. In the second section we gave some Ostrowski-Grüss type inequalities in an order from old to new ones. In the last section we equipped Ostrowski-Grüss type inequalities given in section with some applications. Applications involue some mean inequalities and numerical integrations.

Keywords: Ostrowski inequalities, Grüss inequalities, numerical integration.
Thesis Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Necdet BATIR
Page Number: 53

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

GİRİŞ

1938 yılında Ostrowski [1] şu eşitsizliği ispatlamıştır. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, I° I nın içi, $a, b \in I^\circ$ $(a < b)$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ I° da türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Yine $\forall t \in [a, b]$ için $|f'(t)| \leq M$ olsun. O zaman $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M \tag{1.1}$$

dır.

Grüss [2] 1935 te iki fonksiyonun çarpımının integrali ile bu fonksiyonların integrallerinin çarpımının farkının mutlak değerinin alt ve üst sınırlarını veren şu eşitsizliği vermiştir. f ve g $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ve $\forall x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ve $n \leq g(x) \leq N$ olsun. O zaman

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n) \tag{1.2}$$

dır.

Bu eşitsizlikler yayımlandıktan sonra (1.1) tipindeki eşitsizliklere Ostrowski tipi eşitsizlikler; (1.2) tipindeki eşitsizliklere de Grüss tipi eşitsizlikler denilmiştir. Her iki eşitsizliğin karışımından oluşan ve Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikler denilen ilk eşitsizlik 1997 yılında Dragomir ve Wang [3] tarafından şu şekilde verilmiştir: $f' \in L_1[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ ve $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma$ olsun. O zaman

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma - \gamma) \tag{1.3}$$

dır.

Daha sonra 2000 yılında Matic ve arkadaşları [4] Drogomir ve Wang'un eşitsizliğini şu şekilde geliştirmiştir.

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma). \tag{1.4}$$

2001 yılında Cheng [5] Matic ve arkadaşlarının (1.4) verilen eşitsizliklerindeki $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ sabitini $\frac{1}{8}$ e düşürerek şu eşitsizliği ispatlamıştır.

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma-\gamma) \tag{1.5}$$

Üstelik Cheng buradaki $\frac{1}{8}$ sabitini en iyi ihtimal olduğunu yani daha geliştirilemeyeceğini göstermiştir. 2004 yılında Ujevic [6] daha genel şartlar altında genelleştirilmiş şu keskin eşitsizliği ispatlamıştır:
$f' \in L_2(a,b)$ ve

$$\sigma(f')=\int_a^b (f'(t))^2dt-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f'(t)dt\right)^2$$

olsun. O zaman

$$\left|(b-a)f(x)-[f(b)-f(a)]\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{2\sqrt{3}}\sqrt{\sigma(f')}. \tag{1.6}$$

Daha sonraları (1.1)-(1.6) da verilen eşitsizliklere benzer veya geliştirilmişleri olan bir çok eşitsizlik yayınlanmıştır. Grüss ve Ostrowski tipi eşitsizliklerin bir çok uygulama alanları vardır. Örneğin nümerik integrasyon [3,11] da ve matematiksel ortalamalar teorisinde [3] uygulamaları mevcuttur. Yani bu eşitsizliklerin zaman ölçeklerinde (time scale) $[7-10]$ ve operatörler teorisinde $[10-12]$ değişik versiyonları elde edilmiştir. Bu tezin amacı bu eşitsizlikleri ve daha sonra yapılan benzer eşitsizliklerin önemli olduğunu düşündüğümüz eşitsizlikleri bir ar aya getirerek sistematik bir şekilde okuyucunun hizmetine sunmaktır. Bu konuda oldukça fazla çalışma yapıldığından makaleleri seçerken öncelikle bu konularla ilgili klasikleşmiş olanlarına ağırlık verdik. Dikkat ettiğimiz diğer bir nokta da yalın ve uygulama şansının olmalarıdır.

Tezimiz üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Ostrowski, Grüss ve Ostrowski-Grüss tipi integral eşitsizlikleri ile ilgili kısa bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde ise Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikler ispatları ile verildi. Üçüncü ve son bölümde ise bu eşitsizliklerin nümerik integrasyon ve ortalamalarla ilgili bazı uygulamalarına yer verdik.

2.BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

2.1.Ostrowski-Grüss Tipi İntegral Eşitsizlikleri

Tezimize tezin konusunun kaynağını teşkil eden Ostrowski ve Grüss eşitsizlikleri ile başlamak istiyoruz.

Teorem 2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, I° I nın içi ve $a < b$ olmak üzere $a, b \in I^\circ$ olsun. Yine $f: I \to \mathbb{R}$ I° üzerinde türevlenebilen ve $\forall x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ $(M > 0)$ şeklinde bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right](b-a)M \tag{2.1}$$

dır [1] de Teorem 2.1.

Teorem 2.2. [2] $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon ve $\forall x \in [a,b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ve $n \leq g(x) \leq N$ olsun. O zaman

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n) \tag{2.2}$$

dır.

Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikler Ostrowski ve Grüss eşitsizliklerinin karışımından meydana gelmiştir. Bu şekildeki ilk eşitsizlik Dragomir ve Wang tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.3. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b \in I^\circ$ ve f' $[a,b]$ aralığında integrallenebilsin $\forall x \in [a,b]$ için $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma$ olsun.

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \tfrac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \tag{2.3}$$

dır.

İspat. Kısmi integrasyon uygulayarak

$$p(x,t):=\begin{cases} t-a, & t\in[a,x) \\ t-b, & t\in(x,b] \end{cases}$$

olmak üzere $\forall x\in[a,b]$ için

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f^{'}(t)dt \tag{2.4}$$

olduğunu görürüz. Her $x\in[a,b]$ ve $t\in[a,b]$ için

$$x-b\leq\ p(x,t)\leq x-a$$

olduğunu kolayca gösterebiliriz. Teorem 2.2 yi p ve $f^{'}$ ne uygularsak

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f^{'}(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\,\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{'}(t)dt\right|$$

$$\leq \tfrac{1}{4}(x-a-x+b)(\Gamma-\gamma)$$

$$=\tfrac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \tag{2.5}$$

elde ederiz. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt+\int_x^b (t-b)dt\right]$$

$$=x-\tfrac{a+b}{2} \tag{2.6}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{'}(t)dt = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{2.7}$$

olduğunu görürüz. Böylece (2.4), (2.6), (2.7) de bulduğumuz değerleri (2.5) de yerine yazarsak göstermek istediğimiz (2.3) eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 2.4. Teorem 2.3 de varsayımların tümü sağlansın. Ayrıca eğer $\forall x \in [a,b]$ için $|f^{'}(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)M \tag{2.8}$$

dir. Üstelik (2.3) eşitsizliğinde sırayla $x = \frac{a+b}{2}$ ve $x = b$ alırsak şu sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.5. Teorem2.3 deki varsayımlar altında

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma - \gamma) \tag{2.9}$$

ve

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma - \gamma) \tag{2.10}$$

dır.

Eğer f $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir ve konveks ise Hermite-Hadamard eşitsizliğine göre

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.11}$$

dir. Hermite-Hadamard eşitsizliğini (2.9) ve (2.10) a uygularsak şu sonucu elde ederiz.

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{4}(b-a)(f^{'}(b) - f^{'}(a)) \tag{2.12}$$

ve

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{4}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big). \qquad (2.13)$$

Teorem 2.6. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde iki kez türevlenebilsin. Ayrıca $\forall x \in (a,b)$ için $\varphi \leq f''(x) \leq \phi$ olsun. O zaman $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) + \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(\phi - \varphi)\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]^2 \qquad (2.14)$$

dır [11] de Teorem 2.1.

İspat. Önce aşağıdaki eşitsizliği ispatlayalım.

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(x) - (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \int_a^b K(x,t)f''(t)dt \qquad (2.15)$$

Burada $K:[a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$$K(x,t) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{(t-a)^2}{2} & t \in [a,x], \\ \dfrac{(t-b)^2}{2} & t \in (x,b], \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. K nın tanımından

$$\int_a^b K(x,t)f''(t)dt = \int_a^x \frac{(t-a)^2}{2} f''(t)dt + \int_x^b \frac{(t-b)^2}{2} f''(t)dt$$

olduğu hemen görülür. Kısmi integrasyonla

$$\int_a^b K(x,t)f''(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}[(x-a)^2 - (b-x)^2]f'(x) - (x-a)f(x)$$

$$+ \int_a^x f(t)dt + (xb)f(x) + \int_x^b f(t)dt \tag{2.16}$$

$$= (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) - (b-a)f(x) + \int_a^b f(t)dt.$$

Bu da (2.15) in ispatını bitirir.Dikkat edilirse K çekirdeği her $t \in [a,b]$ için

$$0 \le K(x,t) \le \begin{cases} \frac{(b-x)^2}{2} & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right), \\ \frac{(x-a)^2}{2} & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \end{cases} \tag{2.17}$$

eşitsizliğini sağlar. Grüss integral eşitsizliğinde $f(x)$ yerine $K(x,.)$ ve $g(x)$ yerine $f''(.)$ alırsak

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)f''(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)dt.\frac{1}{b-a}\int_a^b f''(t)dt\right|$$

$$\le \frac{1}{4}(\phi - \varphi).\begin{cases} \frac{(b-x)^2}{2} & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right), \\ \frac{(x-a)^2}{2} & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \end{cases} \tag{2.18}$$

elde ederiz. Şimdi,

$$\int_a^b K(x,t)dt = \int_a^x \frac{(t-a)^2}{2}dt + \int_x^b \frac{(b-t)^2}{2}dt = \frac{1}{6}[(x-a)^3 + (b-x)^3].$$

Basit bir hesaplama ile

$$(x-a)^3 + (b-x)^3 = (b-a)[(x-a)^2 + (b-x)^2 - (x-a)(b-x)]$$

$$= (b-a)[(b-a)^2 - 3(x-a)(b-x)]$$

$$= (b-a)\big[(b-a)^2 + 3[x^2 - (a+b)x + ab]\big]$$

$$= (b-a)\left[(b-a)^2 + 3\left[(x - \frac{a+b}{2})^2 - (\frac{b-a}{2})^2\right]\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{4} + 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olduğunu görürüz. Sonuç olarak

$$\int_a^b K(x,t)dt = (b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \tag{2.19}$$

dır. (2.18) den

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)f^{''}(t)dt - \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f^{'}(b)-f^{'}(a)}{b-a}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\phi-\varphi).\begin{cases}\frac{(b-x)^2}{2} & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right), \\ \frac{(x-a)^2}{2} & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right],\end{cases} \tag{2.20}$$

elde ederiz. (2.20) de (2.16) yı kullanırsak

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f(x) + \left(x+\frac{a+b}{2}\right)f^{'}(x) - \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f^{'}(b)-f^{'}(a)}{b-a}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\phi-\varphi).\begin{cases}\frac{(b-x)^2}{2} & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right), \\ \frac{(x-a)^2}{2} & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right],\end{cases}$$

olur. Basit bir gözlem ile

$$max\left\{\frac{(b-x)^2}{2},\frac{(x-a)^2}{2}\right\} = \begin{cases}\frac{(b-x)^2}{2} & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right), \\ \frac{(x-a)^2}{2} & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$max\left\{\frac{(b-x)^2}{2},\frac{(x-a)^2}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(b-x)^2+(x-a)^2}{2} + \frac{1}{2}\left|(b-x)^2-(x-a)^2\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{4} + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + (b-a)\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]^2$$

olup (2.14) ün ispatı biter.

Sonuç 2.7. f Teorem 2.6 daki gibi olsun. O zaman aşağıdaki perturbe (perturbed) edilmiş orta nokta eşitsizliği sağlanır.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{32}(\phi - \varphi)(b-a)^2. \tag{2.21}$$

[11] de Sonuç 2.2.

Teorem 2.6 da $x = \frac{a+b}{2}$ alırsak şu eşitsizliği elde ederiz.

Sonuç 2.8. f Teorem 2.6 daki gibi olsun. O zaman aşağıdaki perturbe edilmiş yamuk eşitsizliği sağlanır.

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(\phi - \varphi)(b-a)^2 \tag{2.22}$$

[11] de Sonuç 2.3.

İspat. (2.14) eşitsizliğinde $x = a$ ve $x = b$ alırsak sıra ile

$$\left| f(a) + \frac{b-a}{2}f'(a) + \frac{1}{6}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(\phi - \varphi)(b-a)^2$$

ve

$$\left|f(b)+\frac{b-a}{2}f'(b)+\frac{1}{6}(b-a)(f'(b)-f'(a))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(\phi-\varphi)(b-a)^2$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikleri taraf tarafa toplayıp üçgen eşitsizliğini uyguladıktan sonra her iki tarafı 2 ye bölersek

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{(b-a)}{4}\left(f'(b)-f'(a)\right)+\frac{1}{6}(b-a)\left(f'(b)-f'(a)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{8}(\phi-\varphi)(b-a)^2$$

olur.

Teorem 2.9. $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık, $a,b\in I^{\circ}(a<b)$ ve $f:I\to\mathbb{R}$ I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Yine $\forall x\in[a,b]$ için $\gamma_1\leq f'(x)\leq\Gamma_1$ olsun. Burada $\gamma_1,\Gamma_1\in\mathbb{R}$ dır. O zaman $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1-\gamma_1) \tag{2.23}$$

dır. Buradaki $\frac{1}{8}$ sabiti en iyi değerdir [5] de Teorem 1.5.

İspat.

$$G_1(x,t)=\begin{cases}(t-a)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right), & a\leq t\leq x,\\ (t-b)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right), & x\leq t\leq b\end{cases} \tag{2.24}$$

olmak üzere

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt. \tag{2.25}$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Simetriden dolayı $a\leq x\leq\frac{1}{2}(a+b)$ alabiliriz.

Bu durumda

$$t^* = x + \frac{1}{2}(b-a) \qquad (2.26)$$

olmak üzere

$$G_1(x,t) \geq 0, \quad t \in [a,x) \cup (t^*, b)$$

$$G_1(x,t) \leq 0, \quad t \in (x, t^*]\ .$$

Hipotezden dolayı

$$G_1(x,t)f'(t)dt = (\int_a^x + \int_{t^*}^b) G_1(x,t)f'(t)dt + \int_x^{t^*} G_1(x,t)f'(t)dt \qquad (2.27)$$

$$\leq \Gamma_1(\int_a^x + \int_{t^*}^b) G_1(x,t)dt + \gamma_1 \int_x^{t^*} G_1(x,t)dt$$

ve basit bir hesap ile

$$(\int_a^x + \int_{t^*}^b) G_1(x,t)dt = \frac{1}{8}(b-a)^2, \qquad \int_x^{t^*} G_1(x,t)dt = -\frac{1}{8}(b-a)^2 \qquad (2.28)$$

olduğunu görürüz. Böylece

$$\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt \leq \frac{1}{8}(b-a)^2(\Gamma_1 - \gamma_1) \qquad (2.29)$$

ve benzer şekilde

$$-\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt \leq \frac{1}{8}(b-a)^2(\Gamma_1 - \gamma_1) \qquad (2.30)$$

elde edilir. (2.29) ve (2.30) beraber göz önüne alındığında (2.23) ispatlanmış olur. Şimdi $\frac{1}{8}$ sabitinin en iyi değer olduğunu gösterelim.

t^* (2.26) daki gibi olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} \Gamma_1(a-b) & a \leq t \leq x \\ \Gamma_1(x-a) + \gamma_1(t-x) & x \leq t \leq t^* \\ \Gamma_1(x-a) + \gamma_1(t^*-x) + \Gamma_1(t-t^*) & t^* \leq t \leq b \end{cases}$$

tanımlayalım. Bu durumda (2.23) eşitsizliği sağlanır. Bu da eşitsizlikteki $1/_8$ sabitinin en iyi ihtimal olduğunu yani $1/_8$ den daha küçük bir sayının kullanılmayacağını gösterir.

Teorem 2.10. Teorem 2.9 daki hipotezler sağlanmış olsun. O zaman $\forall x \in [a,b]$ için

$$G(a,b,x) = \begin{cases} \frac{1}{3(b-a)}\left(\left|(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(b-x)\right| \right. \\ \left. +\left(\frac{1}{12}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}\right), & a \le x \le \frac{1}{3}(2a+b), \\ \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}, & \frac{1}{3}(2a+b) \le x \le \frac{1}{3}(a+2b). \end{cases} \quad (2.31)$$

olmak üzere

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)+\left(\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)+f'(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\le (\Gamma_2-\gamma_2)G(a,b,x) \quad (2.32)$$

dır [5] de Teorem 1.6.

İspata geçmeden önce (2.32) de verilen eşitsizlikten

$$F(a,b,x) = \frac{b-a}{12\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}(b-a)^2+15\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{1/2}$$

olmak üzere

$$G(a,b,x) \le \frac{2\sqrt{15}}{9}F(a,b,,x) \quad (2.33)$$

sonucu elde edilir ki bu [4] de Teorem 1.4 verilen eşitsizlikten daha iyi bir sonuçtur.

Kısmi integrasyon uygulayarak

$$G_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-a)^2-\left(\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right), & a \le t \le x \\ \frac{1}{2}(t-b)^2-\left(\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right), & x \le t \le b \end{cases} \quad (2.34)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f(x) + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x) - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f''(t)G_2(x,t)dt \tag{2.35}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kolayca görebiliriz.

$a \le x \le \frac{a+b}{2}$ olduğunu kabul edelim. İlk önce $a \le x \le \frac{(2a+b)}{3}$ durumunu göz önüne alalım. (2.34) den dolayı

$$G_2(x,t) \ge 0, \quad t \in [a,x) \cup (t^{**}, b)$$

$$G_2(x,t) \le 0, \quad t \in [x, t^{**}). \tag{2.36}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$t^{**} = b - \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.37}$$

dır. Hipotezden dolayı her $x \in [a,b]$ için $\gamma_2 \le f''(x) \le \Gamma_2$ olduğundan

$$\int_a^b G_2(x,t)f''(t)dt \le \gamma_2\left(\int_a^x + \int_{t^{**}}^b\right) G_2(x,t)dt + \Gamma_2 \int_x^{t^{**}} G_2(x,t)dt \tag{2.38}$$

$$-\int_a^b G_2(x,t)f''(t)dt \le \Gamma_2\left(\int_a^x + \int_{t^{**}}^b\right) - G_2(x,t)dt + \gamma_2 \int_x^{t^{**}} -G_2(x,t)dt \tag{2.39}$$

dır. Basit bir hesaplama ile

$$\int_a^b G_2(x,t)dt = \frac{1}{3}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(b-x) \tag{2.40}$$

ve

$$\int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2} \tag{2.41}$$

olduğunu görebiliriz.

$$\int_a^b G_2(x,t)dt = 0 \tag{2.42}$$

olduğundan

$$\int_x^{t^{**}} G_2(x,t)dt = -(\int_a^x + \int_{t^{**}}^b) G_2(x,t)dt \tag{2.43}$$

dır. (2.38), (2.43) ve (2.35) bağıntıları göz önüne alındığında her $a \le x \le \frac{2a+b}{3}$ için (2.32) yi ispatlamış olduk.

$\frac{1}{3}(2a+b) \le x \le \frac{1}{2}(a+b)$ ise

$$t_1{}^{**} = a + \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{1/2} \tag{2.44}$$

ve $t_2{}^{**} = t^{**}(t^{**}\ 2.37\ deki\ gibi)$ olmak üzere

$$G_2(x,t) \le 0, \quad t \in [a, t_1{}^{**}) \cup [t_2{}^{**}, b],$$

$$G_2(x,t) \ge 0, \quad t \in [t_1{}^{**}, t_2{}^{**}.] \tag{2.45}$$

dır. (2.38)-(2.43) bağıntılarındaki mantığı kullanarak

$$\int_a^{t_1{}^{**}} G_2(x,t) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2} \tag{2.46}$$

$$\int_{t_2{}^{**}}^b G_2(x,t)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2} \tag{2.47}$$

elde ederiz. Bunlardan da (2.32) nin ispatı elde edilmiş olur. Böylece Teorem 2.10 nin ispatını bitirmiş olduk.

Teorem 2.11. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Yine $a, b \subseteq I^\circ$ $(a < b)$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $\gamma_1 \le f'(x) \le \Gamma_1$ olsun.

$$\left|\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{8(b-a)}(x-a)^2+(x-b)^2(\Gamma_1-\gamma_1) \tag{2.48}$$

dır [5] de Toerem 3.1.

İspat.

$$G_3(x,t)=\begin{cases}(t-a)-\frac{1}{2}(x-a), & a\leq t\leq x,\\ (t-b)-\frac{1}{2}(x-b), & x\leq t\leq b.\end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)}$$
$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b G_3(x,t)f^{'}(t)dt \tag{2.49}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Teorem 2.11 deki aynı mantığı uygulayarak ispatını yapmış oluruz.

Eğer (2.48) de $x=a$ veya $x=b$ alırsak

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right|\leq\frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1-\gamma_1)$$

yamuk eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 2.12. $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ I° üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Yine $a,b\in I^{\circ}$ $(a<b)$ olsun. Eğer $\forall x\in[a,b]$ için $\gamma_2\leq f^{''}(x)\leq\Gamma_2$ ise

$$\left|f(x)-\frac{2}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f^{'}(x)+\frac{(x-b)^2f^{'}(b)-(x-a)^2f^{'}(a)}{6(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$\leq \frac{1}{18\sqrt{3}(b-a)}((x-a)^3+(b-x)^3)(\Gamma_2-\gamma_2)$

dır [5] de Teorem 3.2.

İspat.

$$G_4(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-a)^2-\frac{1}{6}(x-a)^2, & a\leq t\leq x,\\ \frac{1}{2}(t-b)^2-\frac{1}{6}(x-b)^2, & x\leq t\leq b\end{cases}$$

olmak üzere kolayca

$$f(x)-\frac{2}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f^{'}(x)+\frac{(x-b)^2f^{'}(b)-(x-a)^2f^{'}(a)}{6(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b G_4(x,t)f^{''}(t)dt$$

olduğunu görürüz. Önceki teoremdeki mantık yürütülerek ispat yapılır.

Teorem 2.13. $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık ve $f\colon I\to\mathbb{R}$ I° üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Yine $a,b\in I^{\circ}$ $(a<b)$ olsun. $\gamma,\Gamma\in\mathbb{R}$ sabitleri varsa $\gamma\leq f^{''}(\mathrm{t})\leq\Gamma,\quad \forall t\in[a,b]$ ve $f^{''}\in L_2[a,b]$ ise

$$\left|f(x)-xf^{'}(x)-\frac{a^2f^{'}(a)-b^2f^{'}(b)}{2(b-a)}-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{3}(s-\gamma) \tag{2.50}$$

$$\left|f(x)-xf^{'}(x)-\frac{a^2f^{'}(a)-b^2f^{'}(b)}{2(b-a)}-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)\frac{f^{'}(b)-f^{'}(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{3}(\Gamma-s) \tag{2.51}$$

Burada $s=\frac{f^{'}(b)-f^{'}(a)}{b-a}$ dır [12] de Teorem 2.1.

İspat. $K(x,t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}(t-2a), & t\in[a,x],\\ \dfrac{t}{2}(t-2b), & t\in(x,b].\end{cases}$$

Kısmi integrasyon kullanarak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)f''(t)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x \frac{t}{2}(t-2a)f''(t)dt+\int_x^b \frac{t}{2}(t-2b)f''(t)dt\right]$$
$$=xf'(x)-f(x)+\frac{a^2f'(a)-b^2f'(b)}{2(b-a)}+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \qquad (2.52)$$

elde ederiz. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)dt=\frac{x^2}{2}-\frac{a^2+ab+b^2}{3} \qquad (2.53)$$

ve

$$\int_a^b f''(t)dt=f'(b)-f'(a) \qquad (2.54)$$

olduğunu görürüz. (2.52), (2.53) ve (2.54) bağıntılarını kullanarak

$$xf'(x)-f(x)+\frac{a^2f'(a)-b^2f'(b)}{2(b-a)}-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)\,f''(t)dt-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f''(t)dt\int_a^b K(x,t)dt$$

olur.

$$R_n(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)f''(t)dt-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f''(t)dt\int_a^b K(x,t)dt$$

diyelim.

$$\int_a^b \left[K(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,s)ds\right] dt = 0$$

olduğundan basit bir hesaplama ile $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f''(t) - c)\left[K(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,s)ds\right] dt \qquad (2.55)$$

olur. Burada $c = \gamma$ alırsak

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f''(t) - \gamma)\left[K(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,s)ds\right] dt$$

ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \max_{t\in[a,b]} \left|K(x,t) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)\right| \int_a^b |f''(t) - \gamma| dt, \quad (2.56)$$

$$\max_{t\in[a,b]} \left|K(x,t) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)\right| = \frac{(b-a)^2}{3}$$

ve

$$\int_a^b |f''(t) - \gamma| dt = f'(b) - f'(a) - \gamma(b-a)$$

$$= (s-\gamma)(b-a)$$

olur. Böylece (2.56) eşitsizliğini

$$|R_n(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{3}(s-\gamma) \qquad (2.57)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu da (2.50) nin ispatını verir.

İkinci olarak (2.55) te $c = \Gamma$ alırsak benzer bir mantıkla

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \max_{t\in[a,b]} \left| K(x,t) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3} \right) \right| \int_a^b |f''(t) - \Gamma| dt \qquad (2.58)$$

ve

$$\int_a^b |f''(t) - \Gamma| dt = \Gamma(b-a) - f'(b) + f'(a)$$

$$= (\Gamma - s)(b-a) \qquad (2.59)$$

dır. (2.58) ve (2.59) dan (2.51) elde edilir.

Teorem 2.14. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ I° de sürekli iki kere türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $f'' \in L_2[a,b]$ ve a, b ve $a, b \in I^\circ$, $(a < b)$ dır.

$$\left| f(x) - xf'(x) - \frac{a^2 f'(a) - b^2 f'(b)}{2(b-a)} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3} \right) \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{3} \left(s - f''\left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \qquad (2.60)$$

dır. Burada

$$s = \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$$

dır.

İspat. $R_n(x)$ (2.55) te verildiği gibi olsun. Eğer $c = f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$ alırsak

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \max_{t\in[a,b]} \left| K(x,t) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3} \right) \right| \int_a^b \left| f''(t) - f''\left(\frac{a+b}{2} \right) \right| dt.$$

Basit bir hesaplama ile sonucu elde ederiz.

Teorem 2.15. $f: [a,b] \to (-\infty, \infty)$ $[a,b]$ üzerinde türevi f' mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca hemen hemen $\forall x \in [a,b]$ için $\gamma \leq f''(\mathrm{x}) \leq \Gamma$ şeklinde $\gamma, \Gamma \in (-\infty, \infty)$ reel sayılarının olduğunu kabul edelim o zaman,

$$C := \frac{1}{b-a}\int_a^b (x+x^2)dx = \frac{1}{2}(b+a)+\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2),$$

ve

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4C}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4C}}{2}$$

olmak üzere,

$$\left|[f'(b)+f'(a)]\left[\frac{1}{6}(b+a)+\frac{1}{4}\right]+\frac{bf'(b)+af'(a)}{6}+\frac{f(a)(1+2a)-f(b)(1+2b)}{2(b-a)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{\Gamma-\gamma}{2(\mathrm{b}-\mathrm{a})}\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}\mathrm{C}\right)\sqrt{1+4\mathrm{C}}, & \dfrac{-3}{2}-2\mathrm{b}\leq \mathrm{a}\leq \dfrac{-3}{4}-\dfrac{\mathrm{b}}{2}, \\ -\dfrac{\Gamma-\gamma}{2(b-a)}\displaystyle\int_a^{x_2}(x^2+x-C)dx, & \dfrac{-3}{4}-\dfrac{b}{2}\leq a\leq b, \\ -\dfrac{\Gamma-\gamma}{2(b-a)}\displaystyle\int_{x_1}^{b}(x^2+x-C)dx, & a\leq \dfrac{-3}{2}-2b\,, \end{cases}$$

dır [13] de Teorem 2.1.

İspat. Kolayca

$$[f'(b)+f'(a)]\left[\frac{1}{6}(b+a)+\frac{1}{4}\right]+\frac{bf'(b)+af'(a)}{6}+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$+\frac{f(a)(1+2a)-f(b)(1+2b)}{2(b-a)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b (x+x^2)f''(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (x+x^2)dx\int_a^b f''(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left\{(x+x^2)-\frac{1}{b-a}\int_a^b (x+x^2)dx\right\}f''(x)dx. \qquad (2.61)$$

olduğunu görürüz.

$$A = \left\{ x \in [a,b] : x + x^2 \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\};$$

$$A^c = \left\{ x \in [a,b] : x + x^2 < \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$\int_a^b \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} f''(x) dx$$

$$\leq \Gamma \int_A \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx + \gamma \int_{A^c} \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx$$

ve

$$\int_a^b \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} f''(x) dx$$

$$\geq \gamma \int_A \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx + \Gamma \int_{A^c} \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx$$

olduğu görülür.

$$\int_A \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx$$

$$= - \int_{A^c} \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx,$$

olduğundan

$$\frac{1}{b-a} \left| \int_a^b \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} f''(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\Gamma - \gamma}{b-a} \int_A \left\{ (x + x^2) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (x + x^2) dx \right\} dx$$

$$= -\frac{\Gamma - \gamma}{b-a}\int_{A^c}\left\{(x+x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (x+x^2)dx\right\}dx \tag{2.62}$$

elde edilir.

$$C := \frac{1}{b-a}\int_a^b (x+x^2)dx = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

dersek (2.62) nin ışığında

$$\int_{A^c}(x^2+x-C)dx \tag{2.63}$$

integralini gözönüne almak kafidir.

$x \in [a,b]$ için $1+4C<0$ olamayacağı kolayca görülebilir. Bu nedenle sadece $1+4C \geq 0$ durumunu gözönüne alacağız. $x^2+x-C=0$ denkleminin kökleri

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4C}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4C}}{2}$$

dır.

1. Durum: $-\frac{3}{2} - 2b \leq a \leq -\frac{3}{4} - \frac{b}{2}$ olsun.

Bu durumda $b \geq -\frac{1}{2}$ olur. Önce

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \tag{2.64}$$

olduğunu gösterelim.

$$-\frac{3}{2} - 2b \leq a \leq -\frac{3}{2} - \frac{b}{2},$$

olduğundan

$$b \geq -\frac{1}{2}, \qquad (b+2a)(b-a) \leq -\frac{3}{2}(b-a), \qquad (a+2b)(a-b) \leq \frac{3}{2}(b-a),$$

olur ki bu da

$$\sqrt{1+4C} \leq -2a-1, \qquad \sqrt{1+4C} \leq 2b+1$$

sonucunu verir. Böylece (2.64) ü göstermiş olduk. Buna göre

$$\int_{A^c} (x^2+x-C)dx = \int_{x_1}^{x_2} (x^2+x-C)dx = -\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}C\right)\sqrt{1+4C}$$

olur.

2. Durum: $-\frac{3}{4}-\frac{b}{2} \leq a \leq b$.

1. durumda olduğu gibi yaparak

$$x_1 \leq a \leq x_2 \leq b$$

olduğunu görürüz. O halde

$$\int_{A^c} (x^2+x-C)dx = \int_{a}^{x_2} (x^2+x-C)dx$$

$$= -\frac{1}{6}[x_2(4C+1)+2a^3+3a^2-2aC+C]$$

elde edilir.

3. Durum: $a \leq -\frac{3}{2}-2b$.

1. durumdaki gibi işlem yaparak

$$a \leq x_1 \leq b \leq x_2$$

olur. Böylece

$$\int_{A^c} (x^2+x-C)dx = \int_{x_1}^{b} (x^2+x-C)dx$$

$$= \frac{1}{6}[x_1(4C+1)+2b^3+3b^2-6bC-C].$$

(2.61), (2.62) ve yukarıda yaptığımız hesaplamalardan istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.16. $f:[a,b]\to(-\infty,\infty)$ $[a,b]$ üzerinde f' mutlak sürekli olsun. Ayrıca hemen hemen $\forall x\in[a,b]$ için $\gamma\le f''(\mathrm{x})\le\Gamma$ şeklinde $\gamma,\Gamma\in(-\infty,\infty)$ reel sayılarının olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\left|f(t)+\frac{[f'(b)-f'(a)](t-a)(b-t)}{2(b-a)}+\frac{(b+a)\big(f'(b)+f'(a)\big)}{2}+\frac{(t+a)f(a)-(b+t)f(b)}{b-a}\right|$$
$$\le\frac{\Gamma-\gamma}{b-a}G(t,a,b) \tag{2.65}$$

dır. Burada $t+a>0$ için

$$G(t,a,b)=\frac{(t+a)}{2}\left(t^2-{C_1}^2\right)-(at+C)(t-C_1)+\frac{(b+t)}{2}\left(b^2-{C_2}^2\right)-(bt+C)(b-C_2);$$

$t+a<0,\ t+b<0$ için

$$G(t,a,b)=\frac{(t+a)}{2}\left({C_3}^2-a^2\right)-(at+C)(C_3-a)+\frac{(b+t)}{2}\left({C_4}^2-t^2\right)-(bt+C)(C_4-4);$$

$t+a<0,\ \ t+b>0$ için

$$G(t,a,b)=\frac{(t+a)}{2}\left({C_3}^2-a^2\right)-(at+C)(C_3-a)+\frac{(b+t)}{2}\left(b^2-{C_2}^2\right)-(bt-C)(b-C_2);$$

$t+a=0,\ t\neq b$ için

$$G(t,a,b)=\frac{(b+t)}{2}\left(b^2-{C_2}^2\right)-(bt-C)(b-C_2);$$

$t+b=0,\ \ t\neq a$ için

$$G(t,a,b)=\frac{(t+a)}{2}\left({C_3}^2-a^2\right)-(at+C)(C_3-a);$$

$t+a=0,\ t=b$ veya $t+b=0,\ t=a$ için

$$G(t,a,b)=0,$$

dır. Burada

$$C := \frac{1}{2}[t^2 - (b+a)t + (b^2 + ab + a^2)]$$

$$C_1 = \left(\frac{at + C}{t + a} \vee a\right) \wedge t, \quad C_2 = \left(\frac{bt + C}{t + b} \vee t\right) \wedge b$$

$$C_3 = a \vee \left(\frac{at + C}{t + a} \wedge t\right), \quad C_4 = t \vee \left(\frac{bt + C}{t + b} \wedge b\right).$$

şeklinde tanımlanmıştır [13] de Teorem 2.2.

İspat.

$$K(t,x) = \begin{cases} (t-x)(x-a), & a \leq x \leq t; \\ (x-t)(b-x), & t \leq x \leq b \end{cases} \tag{2.66}$$

olsun. O zaman

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx = \frac{1}{2}[t^2 - (b+a)t + (b^2 + ab + a^2)], \tag{2.67}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2) f''(x)dx$$

$$= f(t) + \frac{f'(b)b^2 - f'(a)a^2}{b-a} + \frac{(t+a)f(a) - (b+t)f(b)}{b-a} \tag{2.68}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle (2.67) ve (2.68) den

$$f(t) + \frac{[f'(b) - f'(a)](t-a)(b-t)}{2(b-a)} + \frac{(b+a)\big(f'(b) + f'(a)\big)}{2} + \frac{(t+a)f(a) - (b+t)f(b)}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[(K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right] f''(x)dx \tag{2.69}$$

elde ederiz.

$$B = \left\{x \in [a,b], \qquad (K(t,x) + x^2) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right\};$$

$$B^C = \left\{x \in [a,b], \qquad (K(t,x) + x^2) < \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right\}$$

diyelim. Teorem 2.15 teki gibi işlem yaparak sadece

$$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b \left[(K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right] f''(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\Gamma - \gamma}{b-a}\int_B \left[\left((K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right)\right] dx \qquad (2.70)$$

olduğunu göstermek kafidir. İspatı beş ayrı durum için ayrı ayrı yapacağız.

1. Durum: $t + a > 0$. Bu durumda $b + t > 0$, a$\leq x \leq t$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \geq \frac{at + C}{t + a}$$

ve $t \leq x \leq b$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \geq \frac{bt + C}{t + b}.$$

Bundan dolayı

$$C_1 = \left(\frac{at + C}{t + a} \vee a\right) \wedge t, \quad C_2 = \left(\frac{bt + C}{t + b} \vee t\right) \wedge b$$

olmak üzere

$$\int_B \left[\left((K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right)\right] dx$$

$$= \frac{(t+a)}{2}\left(t^2 - {C_1}^2\right) - (at + C)(t - C_1) + \frac{(b+t)}{2}\left(b^2 - {C_2}^2\right) - (bt + C)(b - C_2).$$

2. Durum: $t + a < 0$, $t + b < 0$ olsun. Eğer $a \leq x \leq t$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \leq \frac{at + C}{t + a}$$

ve $t \leq x \leq b$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \leq \frac{bt + C}{t + b},$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$C_3 = a \vee \left(\frac{at + C}{t + a} \wedge t\right), \quad C_4 = t \vee \left(\frac{bt + C}{t + b} \wedge b\right)$$

olmak üzere

$$\int_B \left[\left((K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b - a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right)\right] dx$$

$$= \frac{(t + a)}{2}\left({C_3}^2 - a^2\right) - (at + C)(C_3 - a) + \frac{(b + t)}{2}\left({C_4}^2 - t^2\right) - (bt + C)(C_4 - t)$$

elde edilir.

3. Durum: $t + a < 0,\ t + b > 0$ olsun. Eğer $a \leq x \leq t$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \leq \frac{at + C}{t + a}$$

ve $t \leq x \leq b$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \leq \frac{bt + C}{t + b}$$

olur. Bundan dolayı

$$\int_B \left[\left((K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b - a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right)\right] dx$$

$$= \frac{(t + a)}{2}\left({C_3}^2 - a^2\right) - (at + C)(C_3 - a) + \frac{(b + t)}{2}\left(b^2 - {C_2}^2\right) - (bt + C)(b - C_2)$$

sonucu elde edilir.

4. Durum: $t + a = 0$ olsun. Buradan $a \leq 0$ ve $t = -a \geq 0$ dır. Bu yüzden bunu

$$at + C = \frac{1}{2}[t^2 - (b-a)t + (b^2 + ab + a^2)] \geq 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

olduğu kolayca görülür. Eğer $a \leq x \leq t$ ise

$$\{x: K(t,x) + x^2 \geq C\} = \emptyset, \qquad t \neq b,$$

$$\{x: K(t,x) + x^2 = C\} = [a,t], \quad t = b$$

ve eğer $t \leq x \leq b$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \leq \frac{bt+C}{t+b} \qquad t \neq b$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\int_B \left[\left((K(t,x) + x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x) + x^2)dx\right)\right]dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(b+t)}{2}\left(b^2 - {C_2}^2\right) - (bt + C)(b - C_2), & t \neq b \\ 0, & t = b. \end{cases}$$

5. Durum: $t + b = 0$. Bu durumda $b \geq 0$ ve $t = -b \leq 0$ olur. Ayrıca

$$bt + C = \frac{1}{2}[t^2 - (a-b)t + (b^2 + ab + a^2)] \geq 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Eğer $a \leq x \leq t$ ise

$$K(t,x) + x^2 \geq C \Leftrightarrow x \leq \frac{at+C}{t+a} \qquad t \neq a,$$

ve $t \leq x \leq b$ ise

$$\{x: K(t,x) + x^2 \geq C\} = \emptyset, \qquad t \neq a,$$

$$\{x: K(t,x) + x^2 = C\} = [a,t], \quad t = a.$$

Bu nedenle

$$\int_B \left[\left((K(t,x)+x^2) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (K(t,x)+x^2)dx\right)\right] dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(t+a)}{2}\left({C_3}^2 - a^2\right) - (at+C)(C_3-a), & t \neq a; \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

dır.

Teorem 2.17. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f^{'} \in L_1(a,b)$ olsun. O zaman $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{m(a,b)}\int_a^b f(t)w(t)dt - \big(x - \sigma(a,b)\big)f^{'}(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\phi - \theta)\left(\frac{1}{2}m(a,b) + \frac{1}{2}\left|\int_a^b sgn(t-x)w(t)dt\right|\right) \tag{2.71}$$

eşitsizliği sağlanır [14] de Teorem 5.

Burada $w: (a,b) \to [0,\infty)$ ağırlık fonksiyonu (a,b) üzerinde integrallenebilen ve negatif olmayan ve $\int_a^b w(t)\,dt < \infty$ şeklinde bir fonksiyon,

$m(a,b) = \int_a^b w(t)dt,$ $M(a,b) = \int_a^b tw(t)dt$ ve $\sigma(a,b) = \frac{M(a,b)}{m(a,b)}$ dır.

İspat: Aşağıdaki ağırlıklı integral eşitsizliği her $x \in [a,b]$ için [16] da ispatlandı.

$$f(x) = \frac{1}{m(a,b)}\int_a^b P(x,t)f^{'}(t)dt + \frac{1}{m(a,b)}\int_a^b f(t)w(t)dt. \tag{2.72}$$

Burada $P(.,.)$ Peano çekirdeği (Peano kernel) $P(.,.): [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$$P(x,t) = \begin{cases} \int_a^t w(u)du, & t \in [a,x], \\ \int_b^t w(u)du, & t \in (x,b]. \end{cases} \qquad t \in [a,b]. \tag{2.73}$$

şeklinde verilmiştir. Basit bir gözlem ile $P(.,.):[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}^2$ dönüşümünün

$$0\le P(x,t)\le\begin{cases}\int_x^b w(u)du, & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right),\\ \int_a^x w(u)du, & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right].\end{cases}\tag{2.74}$$

eşitsizliğini sağladığını görürüz.

$f(x)=\frac{P(x,t)}{w(x)}$ ve $g(x)=f'(x)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Ağırlıklı Grüss eşitsizliğini $\frac{P(x,t)}{w(x)}$ ve $f'(x)$ e uygularsak

$$\left|\frac{1}{m(a,b)}\int_a^b P(x,t)f'(t)dt-\frac{1}{m(a,b)}\int_a^b P(x,t)dt\frac{1}{m(a,b)}\int_a^b w(x)f'(t)dt\right|$$

$$\le\frac{1}{4}(\phi-\theta)\begin{cases}\int_x^b w(u)du, & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right),\\ \int_a^x w(u)du, & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right].\end{cases}\tag{2.75}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi (2.73) ten, $\int_a^b P(x,t)dt=m(a,b)\big(x-\sigma(a,b)\big)$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece (2.75) eşitliği

$$\left|\frac{1}{m(a,b)}\int_a^b P(x,t)f'(t)dt-\big(x-\sigma(a,b)\big)f'(x)\right|$$

$$\le\frac{1}{4}(\phi-\theta)\begin{cases}\int_x^b w(u)du, & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right),\\ \int_a^x w(u)du, & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right].\end{cases}\tag{2.76}$$

biçimini alır. (2.72) yi (2.76) da kullanırsak

$$\left|f(x)-\frac{1}{m(a,b)}\int_a^b f(t)w(t)dt-\big(x-\sigma(a,b)\big)f'(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\phi - \theta)\begin{cases} \int_x^b w(u)du, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right), \\ \int_a^x w(u)du, & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases} \tag{2.77}$$

olur.

$$max\left(\int_x^b w(u)du, \int_a^x w(u)du\right) = \left\{\begin{matrix} \int_x^b w(u)du, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ \int_a^x w(u)du, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m(a,b) + \frac{1}{2}\left|\int_a^b sgn(t-x)w(t)dt\right| \tag{2.78}$$

olduğundan (2.78) i (2.77) de kullanırsak (2.71) i elde ederiz.

Sonuç 2.18. Teorem 2.17 nin varsayımları altında $x = \frac{a+b}{2}$ seçersek

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{m(a,b)}\int_a^b f(t)w(t)dt - \left(\frac{a+b}{2} - \sigma(a,b)\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\phi - \theta)\left(\frac{1}{2}m(a,b) + \frac{1}{2}\left|\int_a^b sgn\left(t - \frac{a+b}{2}\right)w(t)dt\right|\right). \tag{2.79}$$

perturbe olmuş orta nokta eşitsizliğini elde ederiz.

(2.71) eşitliğinde $w(t)$ ağırlık fonksiyonunu değişik şekillerde seçerek bir çok eşitsizlik elde edilebilir.

Eğer (2.71) de $w(t) = 1$ alırsak $\sigma(a,b) = \frac{a+b}{2}$ olur. Bu durumda

$$\left|f(x) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\phi - \theta)\left(\frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b sgn(t-x)dt\right).$$

Eğer (2.71) de $w(t) = \ln 1/t$ ve $a = 0,\ b = 1$ alırsak basit bir hesapla

$$\sigma(0,1)=\frac{\int_0^1 t\ln\left(\frac{1}{t}\right)dt}{\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)dt}=\frac{1}{4},$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitsizlikleri buluruz.

$$\left|f(x)-\int_0^1 f(t)\ln\left(\frac{1}{t}\right)dt-\left(x-\frac{1}{4}\right)f'(x)\right|$$

$$\leq\frac{1}{4}(\phi-\theta)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 sgn(t-x)\ln\left(\frac{1}{t}\right)dt\right|\right).$$

Eğer $w(t)=1/\sqrt{t}, a=0,\ b=1$ alırsak

$$\sigma(0,1)=\frac{\int_0^1 t\frac{1}{\sqrt{t}}dt}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt}=\frac{1}{3}$$

buluruz. (2.71) eşitsizliğinde bu değeri yerine yazarsak

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\frac{1}{\sqrt{t}}dt-\left(x-\frac{1}{3}\right)f'(x)\right|\leq\frac{1}{4}(\phi-\theta)\left(1+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 sgn(t-x)\frac{1}{\sqrt{t}}dt\right|\right)$$

elde ederiz.

Eğer (2.71) eşitsizliğinde $w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\quad a=-1,\ b=1$ alıp

$$\sigma(-1,1)=\frac{\int_{-1}^1 t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{m(a,b)}\int_{-1}^1 f(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-xf'(x)\right|\leq\frac{1}{4}(\phi-\theta)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left|\int_{-1}^1 sgn(t-x)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\right|\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.19. $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a\le x_1\le x_2\le b$ için

$$\ell(x_2-x_1)\le u(x_2)-u(x_1)\le L(x_2-x_1)$$

şeklinde ℓ ve L $(\ell<L)$ reel sayıları varsa u fonksiyonu (ℓ,L)- Lipschitziandır denir.

Teorem 2.20. $h,u:[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde (ℓ,L)-Lipschitzian olsun. $h\,de$ $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilsin. O zaman

$$\left|\int_a^b h(x)du(x)-\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\int_a^b h(x)dx\right|\le\frac{L-\ell}{2}\int_a^b\left|h(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dt\right|dx$$

dır [17] de Teorem 1.

Teorem 2.21. $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde (ℓ,L)-Lipschitzian olsun. Her $x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b u(t)dt-(b-a)\left[(1-\theta)u(x)+\theta\frac{u(a)+u(b)}{2}\right]+(1-\theta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[u(b)-u(a)]\right|$$

$$\le\frac{L-\ell}{2}I(\theta,x)\tag{2.80}$$

dır. Burada

$$I(\theta,x)=\begin{cases}\left[\frac{a+b}{2}-(1-\theta)a-\theta x\right]^2, & a\le x\le\frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)},\\ \left[\frac{1}{4}+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right][(x-a)^2+(b-x)^2], & \frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)}<x<\frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)},\\ \left[\theta x+(1-\theta)b-\frac{a+b}{2}\right]^2, & \frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)}\le x\le b.\end{cases}\tag{2.81}$$

$0\le\theta\le\frac{1}{2}$ için ve

$$I(\theta,x)=\begin{cases}\left[\frac{a+b}{2}-\theta a-(1-\theta)x\right]^2, & a\le x\le \frac{a+(2\theta-1)\mathrm{b}}{2\theta},\\ \left[\frac{1}{4}+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right][(x-a)^2+(b-x)^2], & \frac{a+(2\theta-1)b}{2\theta}<x<\frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta},\\ \left[(1-\theta)x+\theta b-\frac{a+b}{2}\right]^2, & \frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta}\le x\le b.\end{cases}$$

(2.82)

$\frac{1}{2}<\theta\le 1$ için [15] de Teorem 2.1.

İspat. Kısmi integral alarak

$$K(x,t)=\begin{cases}t-\left[a+\theta\frac{b-a}{2}\right], & t\in[a,x],\\ t-\left[b-\theta\frac{b-a}{2}\right], & t\in(x,b.]\end{cases} \tag{2.83}$$

olmak üzere

$$\int_a^b K(x,t)du(t)=(1-\theta)(b-a)u(x)+\theta(b-a)\frac{u(a)+u(b)}{2}-\int_a^b u(t)dt \tag{2.84}$$

olduğu kolayca görülebilir. Üstelik

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)dt=(1-\theta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.85}$$

dır.

Teorem 2.20 de verilen eşitsizliği kullanırsak

$$\left|\int_a^b K(x,t)du(t)-\frac{u(a)+u(b)}{b-a}\int_a^b K(x,t)dt\right|$$

$$\le\frac{L-\ell}{2}\int_a^b\left|K(x,t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,s)ds\right|dt$$

elde edilir. Bu durumda belli bir $x\in[a,b]$ için (2.83), (2.84) ve (2.85) eşitsizliklerinden

$$\left|\int_a^b u(t)dt-(b-a)\left[(1-\theta)u(x)+\theta\frac{u(a)+u(b)}{2}\right]+(1-\theta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[u(b)-u(a)]\right|$$

$$\leq\frac{L-\ell}{2}I(\theta,x) \tag{2.86}$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}I(\theta,x)=&\int_a^x\left|t-\left[a+\theta\frac{b-a}{2}\right]-(1-\theta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\\&+\int_x^b\left|t-\left[b-\theta\frac{b-a}{2}\right]-(1-\theta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\end{aligned}$$

$$=\int_a^x\left|t-\left[(1-\theta)x+\theta b-\frac{b-a}{2}\right]\right|dt+\int_x^b\left|t-\left[\theta a+(1-\theta)x+\frac{b-a}{2}\right]\right|dt$$

dır. Son iki integral aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Kısaca

$$p_1(t):=t-\left[(1-\theta)x+\theta b-\frac{b-a}{2}\right],\quad t\in[a,x],$$

$$p_2(t):=t-\left[\theta a+(1-\theta)x+\frac{b-a}{2}\right],\ \ t\in[x,b]$$

ve

$$t_1=(1-\theta)x+\theta b-\frac{b-a}{2},\quad t_2=\theta a+(1-\theta)x+\frac{b-a}{2}$$

diyelim. $p_1(t)$ ve $p_2(t)$ sırasıyla $[a,x]$ ve $[x,b]$ üzerinde artandır. Ayrıca

$$p_1(a)=(1-\theta)(b-x)-\frac{b-a}{2},\quad p_1(x)=\frac{b-a}{2}-\theta(b-x);$$

$$p_2(x)=\theta(x-a)-\frac{b-a}{2},\ \ p_2(b)=\frac{b-a}{2}-(1-\theta)(x-a).$$

dır. $0\leq\theta\leq\frac{1}{2}$ için, şuanki $p_1(x)>0$ ve $p_2(x)<0$ olduğu hemen görülür.

Yine

$x \in \left[a, \frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)}\right]$ için $p_1(a) \geq 0,$

$x \in \left(\frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)}, b\right]$ için $p_1(a) < 0,$

$x \in \left[a, \frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)}, b\right]$ için $p_2(b) \leq 0$

ve

$x \in \left[a, \frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)}\right)$ için $p_2(b) > 0$

olduğu hemen görülür. Dikkat edilirse

$$\frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)} \leq \frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)}$$

dır. Üç durumu göz önüne alacağız.

$x \in \left[a, \frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)}\right]$, $t \in [a, x]$ için $p_1(t) \geq 0$, $p_2(b) > 0$ ve $t_2 \in (x, b)$ $p_2(t_2) = 0$ şeklinde ise

$$I(\theta, x) = \int_a^x (t - t_1)dt + \int_x^{t_2} (t_2 - t)dt + \int_{t_2}^b (t - t_2)dt$$

$$= \frac{(1-2\theta)(x-a)(x-a)}{2} + \theta(\theta - 1)(x-a)^2 + \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{4} \tag{2.87}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(b - x) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(x - a)\right]^2$$

$$= \left[\frac{a+b}{2} - (1-\theta)a - \theta x\right]^2$$

dır.

$x \in \left(\frac{a+(1-2\theta)b}{2(1-\theta)}, \frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)}\right)$, $p_1(a) < 0$, $p_2(b) > 0$ ve $t_1 \in (a, x)$, $t_2 \in (x, b)$ $p_1(t_1) = 0$, $p_2(t_2) = 0$ şeklinde verildiyse

$$I(\theta,x)=\int_a^{t_1}(t_1-t)dt+\int_{t_1}^{x}(t-t_1)dt+\int_x^{t_2}(t_2-t)dt+\int_{t_2}^{b}(t-t_2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^2\right][(x-a)^2+(b-x)^2]. \tag{2.88}$$

$x\in\left[\frac{(1-2\theta)a+b}{2(1-\theta)},b\right]$, $p_1(a)<0$, $t\in[x,b]$ için $p_2(t)\le 0$ ve $t_1\in(a,x)$ $p_1(t_1)=0$

şeklinde ise

$$I(\theta,x)=\int_a^{t_1}(t_1-t)dt+\int_{t_1}^{x}(t-t_1)dt+\int_x^{b}(t_2-t)dt$$

$$=\frac{(1-2\theta)(x-a)(x-a)}{2}+\theta(\theta-1)(b-x)^2+\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{4}$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x-a)+\left(\frac{1}{2}-\theta\right)(b-x)\right]^2$$

$$=\left[\theta x+(1-\theta)b-\frac{a+b}{2}\right]^2 \tag{2.89}$$

dır.

$\frac{1}{2}<\theta\le 1$ ise $p_1(a)<0$ ve $p_2(b)>0$ olduğu hemen görülür. Ayrıca

$x\in\left[a,\frac{a+(2\theta-1)b}{2\theta}\right]$ ise $p_1(x)\le 0$,

$x\in\left[\frac{a+(2\theta-1)b}{2\theta},b\right]$ ise $p_1(x)>0$,

$x\in\left[\frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta},b\right]$ ise $p_2(x)\ge 0$

ve son olarak

$x\in\left[a,\frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta}\right)$ ise $p_2(x)<0$

olduğunu görmek hiçte zor değildir.

Açıkça

$a + \frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta} < \frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta}$ dır.

Yine üç durumu göz önüne alacağız.

$x \in \left[a, \frac{a+(2\theta-1)b}{2\theta}\right]$, $t \in [a,x]$ için $p_1(x) \le 0$, $p_2(x) < 0$ ve $t_2 \in (x,b)$ $p_2(t_2) = 0$ şeklinde ise

$$I(\theta,x) = \int_a^x (t_1 - t)dt + \int_x^{t_2} (t_2 - t)dt + \int_{t_2}^b (t - t_2 dt)$$

$$= \frac{(2\theta-1)(x-a)(b-x)}{2} + \theta(\theta-1)(x-a)^2 + \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(b-x) + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)(x-a)\right]^2$$

$$= \left[\frac{a+b}{2} - \theta a - (1-\theta)x\right]^2 \tag{2.90}$$

dır.

$x \in \left(\frac{a+(2\theta-1)b}{2\theta}, \frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta}\right)$, $p_1(x) > 0$ ve $t_1 \in (a,x)$ ve $t_2 \in (x,b)$ sırayla $p_1(t) = 0$ ve $p_2(t_2) = 0$ şeklinde ise

$$I(\theta,x) = \int_a^{t_1} (t_1 - t)dt + \int_{t_1}^x (t - t_1)dt + \int_x^{t_2} (t_2 - t)dt + \int_{t_2}^b (t - t_2)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2\right][(x-a)^2 + (b-x)^2].$$

$x \in \left[\frac{(2\theta-1)a+b}{2\theta}, b\right]$, $p_1(x) > 0$, $t \in [x,b]$ için $p_2(t) \ge 0$ ve $t_1 \in (a,x)$ $p_1(t) =0$ şeklinde ise

$$I(\theta,x)=\int_a^{t_1}(t_1-t)dt+\int_{t_1}^{x}(t-t_1)dt+\int_x^b(t-t_2)dt$$

$$=\frac{(2\theta-1)(x-a)(b-x)}{2}+\theta(\theta-1)(b-x)^2+\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{4}$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x-a)+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)(b-x)\right]^2$$

$$=\left[(1-\theta)x+\theta b-\tfrac{a+b}{2}\right]^2 \tag{2.91}$$

dır. Sonuç olarak (2.80) nin ispatı (2.85)-(2.91) bağıntılarından elde edilir. (2.80) eşitsizliğinde θ için özel değerler seçerek birçok eşitsizlik türetebiliriz.

(2.80) de $\theta=0$ alırsak $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b u(t)dt-(b-a)u(x)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[u(b)-u(a)]\right|\leq\frac{(L-\ell)(b-a)^2}{8} \tag{2.92}$$

Ostrowski-Grüss tipi eşitsizliğini elde ederiz. Özel olarak burada $x=\frac{a+b}{2}$ alırsak

$$\left|\int_a^b u(t)dt-(b-a)u\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{(L-\ell)(b-a)^2}{8}$$

orta nokta eşitsizliğini elde ederiz.

Yine $\theta=1$ alırsak

$$\left|\int_a^b u(t)dt-\frac{b-a}{2}[u(a)+u(b)]\right|\leq\frac{(L-\ell)(b-a)^2}{8}$$

bir keskin yamuk eşitsizliğini elde ederiz.

(2.80) de $\theta=\frac{1}{2}$ alırsak $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b u(t)dt-\frac{1}{2}[(b-a)u(x)+(x-a)u(a)+(b-x)u(b)]\right|$$

$$\leq \frac{L-\ell}{8}[(x-a)^2+(b-x)^2] \tag{2.93}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.80) de $x=\frac{a+b}{2}$ alırsak $\theta \in [0,1]$ için

$$\left|\int_a^b u(t)dt-(b-a)\left[(1-\theta)u\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{u(a)+u(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq \frac{(L-\ell)(b-a)^2}{4}\left[\frac{1}{4}+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right] \tag{2.94}$$

elde edilir.

(2.93) te $x=\frac{a+b}{2}$ alırsak veya (2.94) te $\theta=\frac{1}{2}$ alırsak (2.80) eşitsizliğinde alınan her iki değer içinde denktir.

$$\left|\int_a^b u(t)dt-\frac{b-a}{4}\left[u(a)+2u\left(\frac{a+b}{2}\right)+u(b)\right]\right| \leq \frac{(L-\ell)(b-a)^2}{16} \tag{2.95}$$

bir keskin ortalamalı orta nokta yamuk eşitsizliği olur.

(2.80) de $\theta=\frac{1}{3}$ alırsak $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^b u(t)dt-\frac{b-a}{4}[u(a)+4u(x)+u(b)]+\frac{2}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[u(b)-u(a)]\right|$$

$$\leq \frac{\mathrm{L}-\ell}{2} I\left(\frac{1}{3},\mathrm{x}\right) \tag{2.96}$$

dır. Burada

$$I\left(\frac{1}{3},x\right)=\begin{cases}\frac{1}{36}[(x-a)+3(b-x)]^2, & a \leq x \leq \frac{3\mathrm{a}+\mathrm{b}}{4},\\ \frac{5}{18}[(x-a)^2+(b-x)^2], & \frac{3a+b}{4}<x<\frac{a+3b}{4},\\ \frac{1}{36}[3(x-a)+(b-a)]^2, & \frac{3a+b}{4} \leq x \leq b\end{cases} \tag{2.97}$$

dır.

(2.96) ve (2.97) de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse Simpson tipi

$$\left|\int_a^b u(t)dt - \frac{b-a}{6}\left[u(a) + 4u\left(\frac{a+b}{2}\right) + u(b)\right]\right| \leq \frac{5(L-\ell)(b-a)^2}{72} \quad (2.98)$$

elde edilir.

3. BÖLÜM

OSTROWSKİ-GRÜSS TİPİ EŞİTSİZLİKLERİN BAZI UYGULAMALARI

3.1. Matematiksel Ortalamalar İle İlgili Uygulamalar

a ve b pozitif iki reel sayı olsun. O zaman

1) *a ve b* nin aritmetik ortalaması:

$$A = A(a,b) \coloneqq \frac{(a+b)}{2}, \qquad a,b \geq 0$$

2) *a ve b* nin geometrik ortalaması:

$$G = G(a,b) \coloneqq \sqrt{ab}, \qquad a,b \geq 0$$

3) *a* ve *b* nin harmonik ortalaması:

$$H = H(a,b) \coloneqq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \qquad a,b > 0$$

4) *a* ve *b* nin logaritmik ortalaması:

$$L = L(a,b) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \\ a, & a = b \end{cases} \qquad a,b > 0$$

5) *a* ve *b* nin identirik (identric) ortalaması:

$$I = I(a,b) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}, & a \neq b, \\ a, & a = b. \end{cases} \qquad a,b > 0$$

6) *a* ve *b* nin p-logaritmik ortalaması:

$$L_p = L_p(a,b) \coloneqq \begin{cases} \left[\dfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{1/p}, & a \neq b, \\ a, & a = b. \end{cases} \qquad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}; \quad a,b > 0,$$

şeklinde tanımlanır.

Bu ortalamalar arasında

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

bağıntısının olduğu biliniyor. Yine $L_0 = I$ ve $L_{-1} = L$ olmak üzere $p \in \mathbb{R}$ için $p \to L_p$ fonksiyonunun monoton arttığı biliniyor. 2. bölümde ispatladığımız Ostrowski-Grüss tipi eşitsizliklerde f fonksiyonu, a ve b için bazı özel değerler seçerek ortalamalarla ilgili aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz.

1. (2.3) eşitsizliğinde $f(x) = x^p\,(p > 1)$ alırsak $\forall x \in [a,b] \subset (0,\infty)$ ve $p > 1$

$$\left|x^p - {L_p}^p - pL_{p-1}^{p-1}(x - A)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(p-1)L_{p-2}^{p-2} \tag{3.1}$$

elde edilir. Burada sırayla $x = A$ ve $x = I$ alırsak

$$\left|A^p - L_p^p\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(p-1)L_{p-2}^{p-2}$$

ve

$$\left|L^p - L_p^p - pL_{p-1}^{p-1}(I - A)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(p-1)L_{p-2}^{p-2}$$

elde ederiz.

2. (2.3) eşitsizliğinde $f(x) = \frac{1}{x}$ alırsak $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{L} - \frac{x - A}{G^2}\right| \leq \frac{A(b-a)^2}{2G^4}, \tag{3.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada x yerine sırasıyla A ve L alırsak,

$$0 \leq A - L \leq \frac{A^2L(b-a)^2}{2G^4}$$

ve

$$0 \leq A - L \leq \frac{A(b-a)^2}{2G^4}$$

elde ederiz.

3. (2.3) eşitsizliğinde $f(x) = -\ln x$ alırsak $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| \ln \left[\frac{I\left(b/a\right)^{\left(x-A/b-a\right)}}{x} \right] \right| \leq \ln \left(\frac{b}{a}\right)^{(b-a)/4} \tag{3.3}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada sırayla $x = A$ ve $x = I$ alırsak şu eşitsizlikler elde edilir.

$$1 \leq \frac{A}{I} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{(b-a)/4}$$

ve

$$0 \leq A - I \leq \frac{1}{4}(b-a)^2.$$

Benzer şekilde yukarıdaki (3.1), (3.2) ve (3.3) eşitsizlerinde sırayla $x = L,\ x = G$ ve $x = H$ alırsak ortalamalarla ilgili birçok yeni eşitsizlik elde edebiliriz.

3.2. Nümerik İntegrasyona Uygulamaları

Teorem 3.1. Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_\infty[a,b]$ ise $[a,b]$ nin $I_h: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ şeklinde partisyonu (partition) ve $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] (i = 0,1, \dots, n-1)$ olmak üzere ara nokta vektörü için

$$\left| \int_a^b f(x)dx - A_G(f, I_h, \xi) \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma) \sum_{i=0}^{n-1} {h_i}^2 \tag{3.4}$$

dır. Burada $h_i = x_{i+1} + x_i$, $\gamma = \underset{x \in [a,b]}{\inf} f'(x)$, $\Gamma = \underset{x \in [a,b]}{\sup} f'(x)$ ve

$$A_G(f,I_h,\xi) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_i - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)$$

dır.

İspat. (2.3) eşitsizliğinde $x = \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ alırsak $\forall i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$\left|h_i f(\xi_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right| \le \frac{(\Gamma-\gamma){h_i}^2}{4}$$

veya

$$-\frac{(\Gamma-\gamma){h_i}^2}{4} \le h_i f(\xi_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$\le \frac{(\Gamma-\gamma){h_i}^2}{4}$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerin her bir tarafını $i = 1$ den $i = n-1$ e kadar toplarsak istenilen sonuç elde edilir. (3.4) eşitsizliğinde $\xi_i = \frac{(a+b)}{2}$ alırsak

$$A_M(f,I_h) := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i$$

olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)dx - A_M(f,I_h)\right| \le \frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)\sum_{i=0}^{n-1} {h_i}^2,$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.4) eşitsizliğinde $\xi_i = x_{i+1}$ alırsak

$$A_T(f,I_h) := \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]h_i$$

olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)dx - A_T(f, I_h)\right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)\sum_{i=0}^{n-1} {h_i}^2$$

elde edilir.

Teorem 3.2. Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde iki kez türevlenebilen ve ikinci türevi $\forall x \in (a, b)$ için

$$\varphi \leq f''(x) \leq \phi$$

şeklinde bir fonksiyon olsun. Yine $I_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $[a, b]$ aralığının bir partisyonu olsun. Ayrıca her $i = (0,1, \dots, n-1)$ için $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ve $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ olsun. O zaman

$A(f, f', I_n, \xi) := \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) f'(\xi_i) h_i + \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{{h_i}^2}{24} +\right.$

12ξi−xi+xi+122f′xi+1−f′xi.

Ayrıca $R(f, f', I_{n,}\xi)$ kalanı her ξ ara nokta seçimi için

$$\left|R(f, f', I_{n,}\xi)\right| \leq \frac{1}{8}(\phi - \varphi)\sum_{i=0}^{n-1} h_i \left[\frac{1}{2}h_i + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right]^2 \leq \frac{1}{8}(\phi - \varphi)\sum_{i=0}^{n-1} {h_i}^3$$

ile sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.6 da aralığın $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,2, \dots, n-1)$ olduğunu kabul edelim.

$$\left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right| \leq \frac{h_i}{2}$$

olduğundan ξ_i nin her türlü seçimi için

$$\left|h_i f(\xi_i) - \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) f'(\xi_i) h_i + \left[\frac{h_i^2}{24} + \frac{1}{2}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2\right]\left(f'(x_{i+1}) - f'(x_i)\right) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(\phi-\varphi)h_i\left[\frac{1}{2}h_i+\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]^2 \leq \frac{1}{8}(\phi-\varphi){h_i}^3$$

dır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $i = 0$ dan $i = n-1$ kadar toplar ve genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğini kullanırsak (3.4) elde edilir.

3.3. Örnekler

Örnek 3.3. Teorem 3.1 den yararlanarak $f(x) = \frac{1}{1+\ln x}$, $a = 1$, $b = 2$ ve $x_0 = a = 1$, $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{8}{5}$, $x_4 = \frac{9}{5}$, $x_5 = b = 2$ ve $\xi_i = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ alırsak

$\xi_0 = \frac{11}{10}$, $\xi_1 = \frac{13}{10}, \xi_2 = \frac{15}{10}, \xi_3 = \frac{17}{10}, \xi_4 = \frac{19}{10}$ elde edilir. Böylece

$$A_G(f, I_h, \xi) = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{1+\ln \xi_i}(x_i + x_{i+1})$$

$$= \frac{1}{1+\ln \xi_0}\frac{11}{5} + \frac{1}{1+\ln \xi_1}\frac{13}{5} + \frac{1}{1+\ln \xi_2}\frac{15}{5} + \frac{1}{1+\ln \xi_3}\frac{17}{5} + \frac{1}{1+\ln \xi_4}\frac{19}{5}$$

$$= 11.9724$$

$$\gamma = -\inf_{x\in[1,2]} \frac{1}{x(1+\ln x)^2} = -1$$

$$\Gamma = -\sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{x(1+\ln x)^2} \cong -0{,}17441$$

elde edilir. Bu değerleri (3.4) te yazarsak

$$\left|\int_1^2 \frac{dx}{1+\ln x} - 11.9724\right| \leq 9.6181235$$

$$2.3542765 \leq \int_1^2 \frac{dx}{1+\ln x} \leq 21.5905235$$

elde edilir.

Örnek 3.4. $\int_1^3 x^x e^x dx$ in yaklaşık değerini aynı metodla bulunuz.

$$f(x) = x^x e^x, \qquad a = 2 \quad b = 3$$

$$a = 2 = x_0 < x_1 = \frac{9}{4} < x_2 = \frac{10}{4} < x_3 = \frac{11}{4} < x_4 = \frac{12}{4} = 3 = b$$

$\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ alırsak

$$\xi_0 = \frac{17}{12}, \ \ \xi_1 = \frac{19}{12}, \ \ \xi_2 = \frac{21}{12}, \ \ \xi_3 = \frac{23}{12}$$

$$A_G(f, I_h, \xi) = \sum_{i=0}^{3} f(\xi_i) h_i - \sum_{i=0}^{3} \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)$$

değerleri yazarsak

$$\cong 289.7699125$$

buluruz.

$$\gamma = \inf_{x\in[2,3]} (2 + \ln x) x^x e^x \cong 79.59$$

$$\Gamma = \sup_{x\in[2,3]} (2 + \ln x) x^x e^x \cong 1680.02$$

$$\left| \int_2^3 x^x e^x dx - 289.7699125 \right| \leq 40510.88$$

$$-40221.11538 \leq \int_2^3 x^x e^x dx \leq 40800.65338$$

elde edilir.

4. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikler Ostrowski ve Grüss eşitsizliklerinin karışımından meydana gelmiştir. Bu şekildeki ilk eşitsizlik Dragomir ve Wang tarafından yapılmıştır. Daha sonra 2000 yılında Matic ve arkadaşları , 2001 yılında Cheng, 2004 yılında ise Ujevic daha genel şartlar altında genelleştirilmiş eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Grüss ve Ostrowski tipi eşitsizliklerin birçok uygulama alanları vardır. Örneğin nümerik integrasyon da ve matematiksel ortalamalar teorisinde uygulamaları mevcuttur. Yani bu eşitsizliklerin zaman ölçeklerinde (time scale) ve operatörler teorisinde değişik versiyonları elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Ostrowski, A ., ‘‘Über Die Absolutabweichung Einer Differentiierbaren Funktion Von İhren İntegralmittelwert’’, *Comment. Math. Helv.*, 10(1), 226-227, 1938.
2. Grüss, G., ‘‘Über Das Maksimum Des Absoluten Betrages Von $\Big[1/(b-$ $aabfxgxdx-1/b-a2abfxdxabgxdx,$ Mathematische Zeitschriftt’’, 39(1), 215-226, 1935.
3. Dragomir, S.S., Wang, S., ‘‘An Inequality Of Ostrowski-Grüss’ Type and Its Applications To The Estimation of Error Bounds For Some Special Means and For Some Numerical Quadrature Rules’’, *Comput. Math. Appl.*, 33(11), 15-20, 1997.
4. Matic, M., Pecaric, J., Ujevic, N., ‘‘Improvement and Further Generalization Of Inequalities Of Ostrowski-Grüss Type’’, Comput. *Math. Appl.*, 39(1), 161-175, 2000.
5. Cheng, X. L., ‘‘Improvement Of Some Ostrowski-Grüss Type Inequalities’’, *Comput. Math. Appl.*, 42(1-2), 109-114, 2001.
6. Ujevic, N., ‘‘Sharp Inequalities Of Simpson Type and Ostrowski Type’’, *Comput. Math. Appl.*, 48(1-2), 145-151, 2004.
7. Hilger, S., ‘‘Analysis On Measure Chains-a Unified Approach To Continuous Discrete Calculus’’, *Results Math.*, 18(1), 18-56, 1990.
8. Liu, W., Ngö Q. A., ‘‘An Ostrowski-Grüss Type Inequality On Time Scales’’, *Comput. Math. Appl.*, 58(1), 1207-1210, 2009.
9. Özkan, U. M., Yıldırım, H., ‘‘Grüss Type Inequality For Double Integrals On Time Scales’’, *Comput. Math.*, 57(3), 436-444, 2009.
10. Hussain, S., Latif, M. A., Alomari, M., ‘‘Generalized Douple-Integral Ostrowski Type Inequalities On Time Scales’’, *Appl. Math. Letters*, 24(1), 1461-1467, 2011.
11. Cerone, P., Dragomir, S. S., Roumeliotis, J., ‘‘An Inequality Of Ostrowski-Grüss Type For Twice Differentiable Mappings and Applications In Numerical Integration’’ *Kyungpook Mathematical Journal*, 1(2), 331-341, 1999.

12. Özdemir, M. E., Akdemir, A. O., Set, E., ‘‘On The Ostrowski-Grüss Type Inequality For Twice Differentiable Functions’’, *Hacettepe J. Math. Stat.,* 41(5), 651-655, 2012.
13. Miao, Y., Han, F., Mu, J., ‘‘A New Ostrowski-Grüss Type Inequality’’, *Kragujevac journal Of Math.*, 37(2), 307-317, 2013.
14. Hussain, S., Qayyum A., ‘‘A Generalized Ostrowski-Grüss Type Inequality For Bounded Differentiable Mappings and Its Applications’’, *Journal Of Inequalities and Applications,* 1(1), 1, 2013.
15. Liu, Z., ‘‘A New Sharp Ostrowski-Grüss Type Inequality’’, *Jordon Journal Of Maths. and Stat. (JJMS)* 6(3), 211-224, 2013.
16. Qayyum, A., ‘‘A Weighted Ostrowski-Grüss Type Inequality For Twice Differentiable Mapping and Applications’’, *Int. J. Math. Comput. Sci. (Print).* 1(8), 63-71, 2008.
17. Liu, Z., ‘‘Refinement Of An Inequality Of Grüss Type For Riemann-Stieltjes Integral’’, *Soochow J. Of Math.* 30(4), 483-489,2004.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice Karakaya 1989 yılında Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2008 yılında kazandığı Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı.