



MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DOĞRU EKSENLİ KOMPOZİT ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

MEHMET KIRAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya / HATAY

EYLÜL – 2007

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRU EKSENLİ KOMPOZİT ÇUBUKLARIN
DİNAMİK ANALİZİ

MEHMET KIRAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Yrd.Doç.Dr. Faruk Fırat ÇALIM danışmanlığında hazırlanan bu tez 10/09/2007 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.
Faruk Fırat ÇALIM

Başkan

Yrd.Doç.Dr.
Selçuk KAÇIN

Üye

Prof.Dr.
Ertuğrul BALTACIOĞLU

Üye

Bu tez Enstitümüz İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Necat AĞCA
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Mustafa Kemal Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: 06 M 0602

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
ABSTRACT	III
SİMGELER VE KISALTMALAR	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Doğru Eksenli Kompozit Çubuklar.....	5
3.1.1. Hareket Denklemleri	5
3.1.2. Anizotropik Malzemelerin Gerilme-Şekil Değişirme Bağıntısı	6
3.1.3. Ortotropik Malzemeler İçin Elastik Sabitler	7
3.1.4. Ortotropik Tabakalı Çubuklar İçin Elastik Sabitler	12
3.1.5. Kompozit Çubuklar İçin Bünye Denklemleri	14
3.2. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	19
3.2.1. Diferansiyel Denklemlerin TFY İle Çözümü.....	19
3.2.2. Homojen Çözümün Elde Edilmesi.....	21
3.2.3. Özel Çözümün Elde Edilmesi	22
3.2.4. Sınır Şartlarından C_m İntegrasyon Sabitlerinin Elde Edilmesi.....	22
3.2.5. Eleman Dinamik Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi.....	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	27
4.1. Düzlemine Dik Yüklü Ortotropik Kiriş	28
4.2. Düzlemine Dik Yüklü Kompozit Tabakalı Kiriş	31
4.3. Düzlemi İçinde Yüklü Kompozit Tabakalı Kiriş	36
4.4. Düzlemi İçinde Yüklü Tek Eksenli Kompozit Kiriş.....	44
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	50
KAYNAKLAR	52
TEŞEKKÜR.....	54
ÖZGEÇMİŞ	55

ÖZET

DOĞRU EKSENLİ KOMPOZİT ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Kompozit doğru eksenli çubukların zamanla değişen yükler altındaki dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropik kabul edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanarak sayısal olarak çözülmüştür. Sonlu elemanlar ile yapılan analizlerde yüzlerce eleman alınması gerekirken, bu çalışmada önerilen çözüm yöntemi ile bir veya birkaç elemanla istenilen hassasiyette sonuçlara ulaşılmaktadır. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemin çözümlerinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile Laplace uzayında istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir. Elde edilen çözümler, uygun bir sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına dönüştürülmektedir. Serbest titreşim zorlanmış titreşimin özel hali olarak alınmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların literatür ve ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

2007, 55 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kompozit çubuklar, Serbest titreşim, Zorlanmış titreşim, Laplace dönüşümü, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

ABSTRACT

DYNAMIC ANALYSIS OF STRAIGHT COMPOSITE RODS

The dynamic behavior of composite straight rods subjected to time-dependent loads is theoretically investigated in the Laplace domain. The anisotropy of the rod material, effect of the rotary inertia, axial and shear deformations are considered in the formulations. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and anisotropic. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically using the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem accurately. This provides great convenience in the solution of the problems having general boundary conditions as the desired accuracy is obtained by taking only a few elements as opposed to high number of elements (in the order of hundred) needed in Finite Element Analysis. Ordinary Differential Equations with variable coefficients can also be solved exactly in Laplace domain by using the Complementary Functions Method. The solutions obtained are transformed to the time space using an appropriate numerical inverse Laplace transform method. The free vibration is then taken into account as a special case of forced vibration. The results obtained in this study are found to be in a good agreement with those available in the literature and ANSYS.

2007, 55 pages

Key words: Composite rods, Free vibration, Forced vibration, Laplace transform, Complementary function method.

SİMGELER VE KISALTMALAR

t	: Zaman
x_1, x_2, x_3	: Dik koordinat takımı
ϵ_{pjk}	: Permütasyon tansörü
γ^o, ω^o	: Rölatif birim uzama ve rölatif birim dönme
U^o, Ω^o	: Yerdeğiştirme ve dönme vektörü
T^o, M^o	: İç kuvvet ve moment vektörleri
$p^{(ex)}, m^{(ex)}$: Birim boya etkileyen yayılı dış kuvvet ve yayılı dış moment
$p^{(in)}, m^{(in)}$: Birim boya etkileyen kütleli atalet kuvveti ve kütleli atalet momentini
ρ	: Kütleli yoğunluk
A	: Kesit alanı
I_i	: Atalet momenti
E, G, ν	: Elastisite modülü, Kayma modülü ve Poisson oranı
s	: Laplace dönüşüm parametresi
$f(t)$: Zamana bağlı fonksiyon
α_n, α_b	: Kayma düzeltme faktörleri
\mathbf{B}	: Sistemin yayılı dış yükleri
\mathbf{F}	: Diferansiyel matris
\mathbf{Y}	: Durum vektörü
ω	: Açısal frekans
$\bar{\omega}$: Boyutsuz frekans
$\{\bar{d}\}$: Eleman uç deplasmanları vektörü
$\{\bar{p}\}$: Eleman uç kuvvetlerini içeren vektör
$\{\bar{f}\}$: Eleman ankastrelik uç kuvvetleri
$[\bar{k}]$: Eleman dinamik rijitlik matrisi
$[T]$: Transformasyon matrisi
$[K(z)]$: Sistem dinamik rijitlik matrisi
$[D]$: Sistem bilinmeyen düğüm deplasmanları vektörü

$\{\mathbf{P}(\mathbf{z})\}$: Sistem yük vektörü
C_{ij}	: Malzeme rijitlik matrisi
S_{ij}	: Malzeme esneklik matrisi
C'_{ij}	: Dönüştürülmüş rijitlik matrisi
S'_{ij}	: Dönüştürülmüş esneklik matrisi
$[T], [R]$: Dönüşüm matrisleri
Q_{ij}	: İndirgenmiş rijitlik matrisi
$\tilde{\sigma}_i$: Kısaltılmış notasyonda gerilmeler
$\tilde{\xi}_i$: Kısaltılmış notasyonda şekil değiştirmeler
\tilde{Q}_{ij}	: Kısaltılmış notasyonda indirgenmiş rijitlik matrisi
\tilde{Q}'_{ij}	: Dönüştürülmüş ve indirgenmiş rijitlik matrisi
$\tilde{\gamma}_j, \tilde{\omega}_j$: Kısaltılmış notasyonda rölatif birim uzama ve rölatif birim dönme
A, B, F, D	: Çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini içeren matrisler
TFY	: Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Kısaltılmış notasyonda gerilme ve şekil değiştirme tansörü bileşenleri..	7
Çizelge 5.1. Enine izotrop malzeme özellikleri	27
Çizelge 5.2. Düzlemine dik doğal frekanslar (kHz).....	28
Çizelge 5.3. Düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları	32
Çizelge 5.4. Düzlemi içinde boyutsuz serbest titreşim frekansları	37
Çizelge 5.5. Düzlemi içinde serbest titreşim frekansları (Hertz) (Bernoulli kirişi)...	45
Çizelge 5.6. Düzlemi içinde serbest titreşim frekansları (Hertz) (Timoshenko kirişi)	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Çubuk geometrisi	5
Şekil 3.2. Üç boyutlu gerilme hali	6
Şekil 3.3. Ortotropik tabaka için malzeme simetri düzlemi.....	9
Şekil 4.1. Serbest titreşim frekanslarının elde edilmesi	26
Şekil 5.1. İki ucu sabit mesnetli kiriş ve kesiti.....	28
Şekil 5.2. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (L/h=15, L=381 mm)	29
Şekil 5.3. Kirişin orta noktasındaki My momentinin zamanla değişimi (L/h=15, L=381 mm)	29
Şekil 5.4. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (L/h=120, L=762 mm)	30
Şekil 5.5. Kirişin orta noktasındaki My momentinin zamanla değişimi (L/h=120, L=762 mm)	30
Şekil 5.6. (a) Farklı mesnetlenme durumlarına ait kirişler (b) Kiriş kesiti (c) Adım tipi dinamik yük.....	31
Şekil 5.7. Serbest uçtaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (AB).....	33
Şekil 5.8. Ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi (AB).....	33
Şekil 5.9. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (AS).....	34
Şekil 5.10. Ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi (AS).....	34
Şekil 5.11. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (AA)	35
Şekil 5.12. Ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi (AA).....	35
Şekil 5.13. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun Uy deplasmanının zamanla değişimi (h/b=10)	38
Şekil 5.14. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun Mz momentinin zamanla değişimi (h/b=10).....	39
Şekil 5.15. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun Uy deplasmanının zamanla değişimi (h/b=10)	39
Şekil 5.16. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun Mz momentinin zamanla değişimi (h/b=10).....	40
Şekil 5.17. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun Uy deplasmanının zamanla değişimi (h/b=10)	40

Şekil 5.18. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun	
Mz momentinin zamanla değişimi ($h/b=10$).....	41
Şekil 5.19. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun	
Uy deplasmanının zamanla değişimi($h/b=1$)	41
Şekil 5.20. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun	
Mz momentinin zamanla değişimi ($h/b=1$).....	42
Şekil 5.21. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun	
Uy deplasmanının zamanla değişimi ($h/b=1$)	42
Şekil 5.22. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun	
Mz momentinin zamanla değişimi ($h/b=1$).....	43
Şekil 5.23. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun	
Uy deplasmanının zamanla değişimi ($h/b=1$)	43
Şekil 5.24. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun	
Mz momentinin zamanla değişimi ($h/b=1$).....	44
Şekil 5.25. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=1, 10, 20, 30,40$).....	46
Şekil 5.26. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=1$).....	47
Şekil 5.27. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=10$).....	47
Şekil 5.28. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=20$).....	48
Şekil 5.29. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=30$).....	48
Şekil 5.30. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=40$).....	49

1. GİRİŞ

Kompozit malzeme, iki veya daha fazla malzemenin bir araya getirilmesiyle meydana gelen malzemelerdir. Bunun amacı, birbirlerinin zayıf yönünü düzelterek üstün özellikler elde etmektir. Kompozit malzemeler, makro düzeyde birleştirilerek amaçlanan doğrultuda bileşenlerinden daha üstün özelliklerin meydana geldiği malzemelerdir. Kompozit malzemeler mikroskobik açıdan heterojen, makroskobik açıdan homojen bir malzeme gibi davranmaktadır. Örnek olarak beton gösterilebilir.

Kompozit malzeme üretiminde genellikle mekanik dayanım, rijitlik, korozyon direnci, ağırlık, akustik, iletkenlik, ısı iletkenliği, yüksek sıcaklığa dayanıklılık, yorulma dayanımı gibi özelliklerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

Kompozit malzemelerin mekanik özelliği, diğer malzemelerden farklıdır. Uygulamada kullanılan malzemelerin birçoğu homojen ve izotropik özellik göstermektedir. Buna karşın kompozit malzemeler genelde heterojen ve anizotropik yapıya sahiptirler.

Malzemelerin izotropik veya anizotropik olmasına göre mekanik davranışları farklı özellik gösterirler. Uygulamada, anizotropik malzemelerin birçoğu ortotropik özellik göstermektedir. İzotropik malzemeler, yapılarında herhangi bir yöne göre farklılık göstermeyen malzemelerdir. Ortotropik malzemelerde, birbirine dik doğrultulardaki malzeme özellikleri farklılık göstermektedir.

Tabakalı bir kompozit malzeme, çeşitli tabakaların bir araya getirilmesi ile oluşturulmaktadır. Bu tabakalar, farklı malzemelerden oluşacağı gibi, aynı malzemelerden de meydana getirilebilir. Ancak, aynı malzemeye ait tabakaların bir araya getirilmesi halinde, ahşap gibi, yönlere göre farklı özellikler gösteren bir malzeme olmaktadır.

1960'lı yıllardan beri kompozit malzeme ile ilgili çalışmalar devam etmektedir. Modern mühendislik yapılarında yüksek mukavemet, hafif malzeme gibi özelliklerden dolayı kompozit çubukların davranışı ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Kompozit malzemeler kiriş, plak ve kabuk gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Doğru eksenli kompozit çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen zorlanmış titreşim ile ilgili çalışmalara literatürde çok az rastlanmaktadır.

Bu tezde, zamanla değişen yükler altında doğru eksenli kompozit çubukların dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınmıştır. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Laplace uzayında kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, dinamik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak özölmektedir. Laplace uzayında elde edilen özömler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürölmüştür. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler, uygun integrasyon adım aralığı seçilerek tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile Laplace uzayında istenilen hassasiyette kesin olarak özölebilmektedir. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Teh ve Huang (1979), genel ortotropik konsol kirişlerin doğal frekanslarını hesaplayabilmek için sonlu eleman formülasyonu sunmuşlardır. Chen ve Yang (1985), anizotropik tabakalı kirişler için sonlu elemanlar yöntemi kullanarak etkin bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Formülasyonda kayma deformasyonu etkisini dahil etmişlerdir.

Chandrashekhara ve ark. (1990), birinci mertebeye kayma deformasyonu teorisini kullanarak kompozit kirişlerin kesin çözümlerini sunmuşlardır. Chandrashekhara ve Bangera (1992), tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için, yüksek mertebeye kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Formülasyonda, kayma deformasyonu ve dönme ataleti terimleri göz önüne alınmıştır. Hodges ve ark. (1991), karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak kompozit kirişleri idare eden denklemleri çözmüşlerdir. Krishnaswamy ve ark. (1992), tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini idare eden dinamik denklemleri Hamilton prensibini kullanarak geliştirmişlerdir. Enerji formülasyonunda ters kayma etkisi ve dönme ataleti terimleri göz önüne alınmıştır. Singh and Abdelnaser (1992), birinci mertebeye kayma deformasyon teorisi kullanarak elde edilen tabakalı kompozit kirişlerin hareket denklemleri için bir çözüm önermişlerdir. Nabi ve Ganesan (1994), tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için birinci mertebeye teorisi kullanarak genel bir sonlu eleman geliştirmiştir. Abramovich ve Livshits (1994), Timoshenko kiriş teorisi kullanarak simetrik olmayan çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış kompozit kirişlerin serbest titreşimini çalışmışlardır. Dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkisi formülasyonda göz önüne alınmıştır. Khedeir ve Reddy (1994), farklı sınır şartlarına sahip tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini çalışmışlardır. Rao ve Ganesan (1997), sonlu eleman modeli kullanarak değişken kesitli kompozit kirişlerin harmonik davranışını araştırmışlardır.

Yıldırım ve ark. (1999a, 1999b), Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorisi kullanarak düzlemi içinde ve düzlemine dik simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış kirişlerin serbest titreşimini taşıma matrisi yardımıyla incelemişlerdir.

Yıldırım (1999), Timoshenko kiriş teorisi kullanarak ön burulmalı elastik uzaysal çubukların ısı etkisi altındaki titreşim davranışını teorik olarak incelemiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, çubuk eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne almıştır. Yıldırım ve Kırıl (2000), tabakalı kompozit kirişlerin düzlemine dik serbest titreşimlerini çalışmışlardır.

Ramtekkar ve Desai (2002), tabakalı kompozit kirişlerin doğal frekansları için Hamilton enerji yöntemini kullanarak karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir.

Çalım (2003), zamanla değişen yükler altında izotropik-anizotropik ve elastik-viskoelastik malzemedan yapılmış silindirik helisel çubukların dinamik davranışını incelemiştir. Temel ve ark. (2005), kompozit silindirik helisel çubukların dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Formülasyonda; çubuk ekseninin eğriliği, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır.

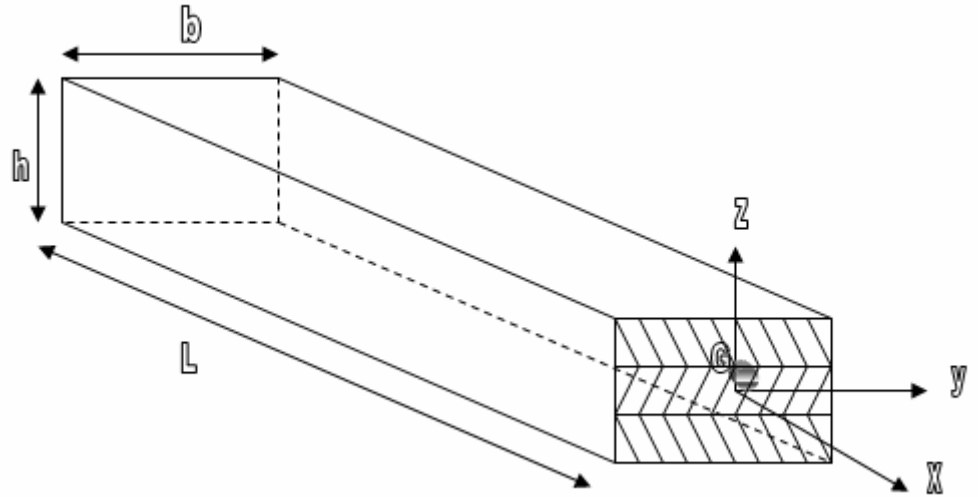
Kompozit doğru eksenli çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen zamanla değişen yükler altında zorlanmış titreşimi ile ilgili çalışmalara literatürde çok az rastlanmaktadır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Doğru Eksenli Kompozit Çubuklar

3.1.1. Hareket Denklemleri

Çubuk ekseninde herhangi bir x noktasında yer değiştirme $U^o(x, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\Omega^o(x, t)$ olarak gösterilsin. $\mathbf{T}(x, t)$ vektörü ile t anında x noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(x, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(x, t)$ ve moment $\mathbf{m}^{ex}(x, t)$ olsun.



Şekil 3.1. Çubuk geometrisi

Çubuk malzemesi lineer elastik ve anizotropiktir. Kompozit uzaysal çubuğu (Şekil 3.1) idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir.

$$\frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial x} = \mathbf{A}'\mathbf{T} + \mathbf{B}'\mathbf{M} + \Omega^o \times \mathbf{i} \quad , \quad \frac{\partial \Omega^o}{\partial x} = \mathbf{F}'\mathbf{T} + \mathbf{D}'\mathbf{M} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial x} + \mathbf{p}^{(ex)} = \mathbf{p}^{(in)} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial x} + \mathbf{i} \times \mathbf{T}^o + \mathbf{m}^{(ex)} = \mathbf{m}^{(in)} \quad (3.2)$$

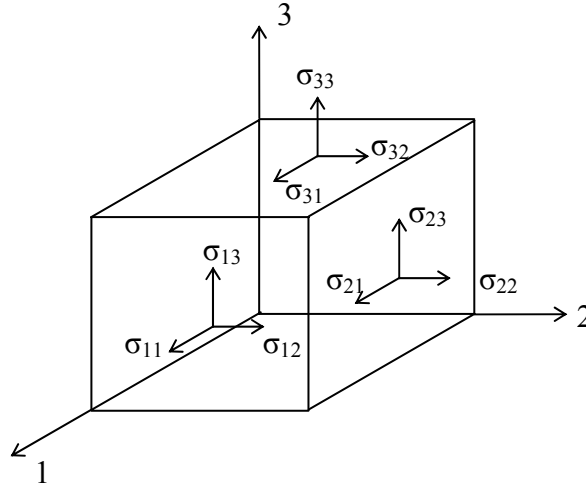
\mathbf{p}^{in} kütlelesel atalet kuvveti ve \mathbf{m}^{in} kütlelesel atalet momenti ifadeleri

$$p_i^{(\text{in})} = -\rho A \frac{\partial^2 U_i^0}{\partial t^2}, \quad m_i^{(\text{in})} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \Omega_i^0}{\partial t^2} \quad (i = x, y, z) \quad (3.3)$$

olmak üzere, burada ρ , kütlelesel yoğunluğu göstermektedir. I_x burulma ve I_y, I_z ise eğilme atalet momentleridir. \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{F} ve \mathbf{D} matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir.

3.1.2. Anizotropik Malzemelerin Gerilme-Şekil Değişirme Bağıntısı

Bir cismin herhangi bir noktasındaki gerilme, küçük bir elemana etkiyen gerilmelerin bir eksen takımına göre bileşenleri ile ifade edilirler. Bir düzleme etkiyen gerilme vektörünün üç bileşeni vardır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Üç boyutlu gerilme hali

Üç düzleme etkiyen gerilmeler dokuz bileşenden oluşan σ_{ij} gerilme tansörünü meydana getiriler. Burada, gerilme tansöründeki i indisi gerilmenin etkidiği düzlemin normalini, j indisi ise gerilmenin doğrultusunu göstermektedir. σ_{ij} gerilme tansöründe $i=j$ normal gerilme, $i \neq j$ ise kayma gerilmesini temsil etmektedir. Benzer şekilde, ϵ_{ij} şekil değişirme tansörü de elde edilir. Gerilme ve şekil değişirme tansörünün dokuz bileşeni

olmakla beraber moment denge koşulundan $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ve $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ simetrik olduğu görülür. Bu nedenle gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinde altı bağımsız sabit bulunmaktadır.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{simetrik} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{simetrik} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Çizelge 3.1. Kısaltılmış notasyonda gerilme ve şekil değiştirme tansörü bileşenleri

Gerilme		Şekil değiştirme	
Tansör notasyon	Kısaltılmış notasyon	Tansör notasyon	Kısaltılmış notasyon
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	ε_4
$\tau_{13} = \sigma_{13}$	σ_5	$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$	ε_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

Kısaltılmış notasyonu kullanarak lineer elastik malzeme için genelleştirilmiş Hooke kanunu kapalı formda

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (3.5)$$

olarak ifade edilir. Burada C_{ij} rijitlik matrisidir. En genel halde lineer, elastik, anizotropik malzeme için 36 eleman, 21 bağımsız sabit bulunmaktadır.

3.1.3. Ortotropik Malzemeler İçin Elastik Sabitler

Hooke kanunu, esneklik matrisi cinsinden de ifade edilebilir. Esneklik matrisi S_{ij} , gerilme-şekil değiştirme bağıntısının tersi olarak tanımlanır. Şekil değiştirme ile gerilme arasındaki ilişki kapalı formda

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (3.6)$$

olarak verilmektedir. Esneklik matrisi, C_{ij} rijitlik matrisinin tersidir.

$$S_{ij} = C_{ij}^{-1} \quad (3.7)$$

Esneklik matrisi S_{ij} diyagonale göre simetrik olduğundan

$$\frac{v_{ij}}{E_{ii}} = \frac{v_{ji}}{E_{jj}} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.8)$$

eşitliği yazılabilir. (3.8) eşitliği yardımı ile şekil değiştirme-gerilme bağıntısı aşağıdaki hali almaktadır.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{v_{12}}{E_{11}} & -\frac{v_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{v_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Esneklik matrisi S_{ij} ile rijitlik matrisi C_{ij} birbirlerinin tersi olmasından dolayı, rijitlik matrisinin bileşenleri esneklik matrisi bileşenleri cinsinden ifade edilmektedir (Jones, 1975).

$$C_{11} = \frac{S_{22} S_{33} - S_{23}^2}{S} \quad C_{12} = \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{S} \quad (3.10a)$$

$$C_{13} = \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{S} \quad C_{22} = \frac{S_{11} S_{33} - S_{13}^2}{S} \quad (3.10b)$$

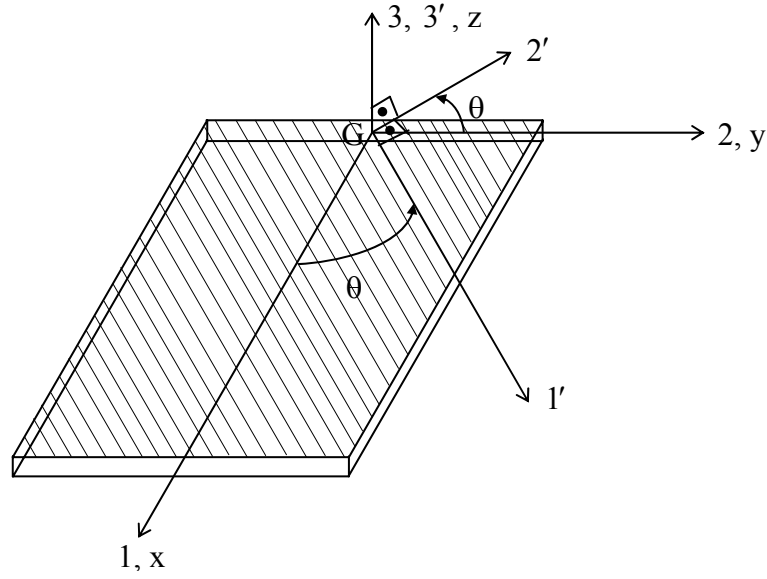
$$C_{23} = \frac{S_{12} S_{13} - S_{11} S_{23}}{S} \quad C_{33} = \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{S} \quad (3.10c)$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (3.10d)$$

Burada

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{13}S_{23} \quad (3.11)$$

bağıntısı ile verilmektedir.



Şekil 3.3. Ortotropik tabaka için malzeme simetri düzlemi

Ortotropik malzemenin asal malzeme eksenleri ile çubuk eksenleri genelde çakışmazlar (Şekil 3.3). Keyfi olarak seçilmiş fiber doğrultusu ile çubuk eksenleri arasındaki açı θ ile gösterilmektedir. 1, 2, 3 koordinatlarında gerilme-şekil değiştirme ve şekil değiştirme-gerilme bağıntıları

$$\sigma_i = C'_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1,2,\dots,6) \quad (3.12a)$$

$$\varepsilon_i = S'_{ij} \sigma_j \quad (i, j=1,2,\dots,6) \quad (3.12b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada C'_{ij} ve S'_{ij} sırasıyla dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisleri olup aşağıdaki verilen bağıntılar yardımı ile hesaplanmaktadır (Jones, 1975).

$$[C'] = [T]^{-1} [C] [R] [T] [R]^{-1} \quad (3.13a)$$

$$[S'] = [R] [T]^{-1} [R]^{-1} [S] [T] \quad (3.13b)$$

Burada $m = \cos \theta$ ve $n = \sin \theta$ olmak üzere dönüşüm matrisleri

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisleri, (3.13a-b) eşitliklerinin çözümünden

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

olarak elde edilmektedir. Dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisinin elemanları hesaplanmış ve aşağıda verilmiştir.

$$C'_{11} = m^4 C_{11} + 2n^2 m^2 C_{12} + n^4 C_{22} + 4n^2 m^2 C_{66} \quad (3.16a)$$

$$C'_{12} = n^2 m^2 C_{11} + (n^4 + m^4) C_{12} + n^2 m^2 C_{22} - 4n^2 m^2 C_{66} \quad (3.16b)$$

$$C'_{13} = m^2 C_{13} + n^2 C_{23} \quad (3.16c)$$

$$C'_{16} = nm^3 C_{11} + nm(n^2 - m^2)C_{12} - n^3 m C_{22} + 2nm(n^2 - m^2)C_{66} \quad (3.16d)$$

$$C'_{22} = n^4 C_{11} + 2n^2 m^2 C_{12} + m^4 C_{22} + 4n^2 m^2 C_{66} \quad (3.16e)$$

$$C'_{23} = n^2 C_{13} + m^2 C_{23} \quad (3.16f)$$

$$C'_{26} = n^3 m C_{11} + nm(m^2 - n^2)C_{12} - nm^3 C_{22} - 2nm(m^2 - n^2)C_{66} \quad (3.16g)$$

$$C'_{33} = C_{33} \quad (3.16h)$$

$$C'_{36} = nm C_{13} - nm C_{23} \quad (3.16i)$$

$$C'_{44} = m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \quad (3.16j)$$

$$C'_{45} = -nm C_{44} + nm C_{55} \quad (3.16k)$$

$$C'_{55} = n^2 C_{44} + m^2 C_{55} \quad (3.16l)$$

$$C'_{66} = n^2 m^2 C_{11} - 2n^2 m^2 C_{12} + n^2 m^2 C_{22} + (m^2 - n^2)^2 C_{66} \quad (3.16m)$$

$$S'_{11} = m^4 S_{11} + 2n^2 m^2 S_{12} + n^4 S_{22} + n^2 m^2 S_{66} \quad (3.17a)$$

$$S'_{12} = n^2 m^2 S_{11} + (n^4 + m^4)S_{12} + n^2 m^2 S_{22} - n^2 m^2 S_{66} \quad (3.17b)$$

$$S'_{13} = m^2 S_{13} + n^2 S_{23} \quad (3.17c)$$

$$S'_{16} = 2nm^3 S_{11} + 2nm(n^2 - m^2)S_{12} - 2n^3 m S_{22} + nm(n^2 - m^2)S_{66} \quad (3.17d)$$

$$S'_{22} = n^4 S_{11} + 2n^2 m^2 S_{12} + m^4 S_{22} + n^2 m^2 S_{66} \quad (3.17e)$$

$$S'_{23} = n^2 S_{13} + m^2 S_{23} \quad (3.17f)$$

$$S'_{26} = 2n^3 m S_{11} + 2nm(m^2 - n^2)S_{12} - 2nm^3 S_{22} + nm(m^2 - n^2)S_{66} \quad (3.17g)$$

$$S'_{33} = S_{33} \quad (3.17h)$$

$$S'_{36} = 2nm S_{13} - 2nm S_{23} \quad (3.17i)$$

$$S'_{44} = m^2 S_{44} + n^2 S_{55} \quad (3.17j)$$

$$S'_{45} = -nm S_{44} + nm S_{55} \quad (3.17k)$$

$$S'_{55} = n^2 S_{44} + m^2 S_{55} \quad (3.17l)$$

$$S'_{66} = 4n^2 m^2 S_{11} - 8n^2 m^2 S_{12} + 4n^2 m^2 S_{22} + (m^2 - n^2)^2 S_{66} \quad (3.17m)$$

3.1.4. Ortotropik Tabakalı Çubuklar İçin Elastik Sabitler

Klasik çubuk teorilerinden benimsenen

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \quad (3.18)$$

kabulü yapılmaktadır. Buna göre şekil değiştirme-gerilme ilişkisi matris notasyonunda

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

veya kapalı formda

$$\varepsilon_\beta = S_{\beta j} \alpha_{jk} \varepsilon_k \quad (j, k=1,5,6 ; \beta=2,3,4) \quad (3.20)$$

ifade aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Yıldırım, 1999). Burada

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = S_{ij}^{-1} \quad (i, j=1,5,6) \quad (3.21)$$

ve

$$d = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{15} & S_{16} \\ S_{15} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{56} & S_{66} \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

olmak üzere α_{ij} matrisinin bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$\alpha_{11} = \frac{S_{55} S_{66} - S_{56}^2}{d} \quad \alpha_{15} = \frac{S_{16} S_{56} - S_{15} S_{66}}{d} \quad (3.23a)$$

$$\alpha_{16} = \frac{S_{15} S_{56} - S_{16} S_{55}}{d} \quad \alpha_{55} = \frac{S_{11} S_{66} - S_{16}^2}{d} \quad (3.23b)$$

$$\alpha_{56} = \frac{S_{15} S_{16} - S_{11} S_{56}}{d} \quad \alpha_{66} = \frac{S_{11} S_{55} - S_{15}^2}{d} \quad (3.23c)$$

Ortotropik tabaka için fiber doğrultularının 0° ve 90° olması halinde $\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{56} = 0$ olmaktadır. Böylece lineer elastik genelleştirilmiş Hooke bağıntısı indirgenmiş olur.

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1,5,6) \quad (3.24)$$

Burada Q_{ij} indirgenmiş rijitlik matrisi olup

$$Q_{ij} = C_{ij} + C_{i\beta} S_{\beta k} \alpha_{kj} \quad (i, j, k=1,5,6 ; \beta=2,3,4) \quad (3.25)$$

şeklinde hesaplanmaktadır (Yıldırım, 1999).

(3.24) ifadesinde tanımlanan indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kısaltılmış notasyon cinsinden

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{Q}_{ij} \tilde{\varepsilon}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.26)$$

elde edilir ve transformasyon uygulanırsa, dönüştürülmüş ve indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{Q}'_{ij} \tilde{\varepsilon}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.27)$$

halini alır. Ortotropik tabakalı çubuk için dönüştürülmüş ve indirgenmiş rijitlik matrisinin sıfırdan farklı elemanları aşağıda verilmektedir.

$$\tilde{Q}'_{11} = C'_{11} + (C'_{12} S'_{12} + C'_{13} S'_{31})\alpha'_{11} + (C'_{12} S'_{26} + C'_{13} S'_{36})\alpha'_{61} \quad (3.28a)$$

$$\tilde{Q}'_{12} = C'_{16} + (C'_{12} S'_{21} + C'_{13} S'_{31})\alpha'_{16} + (C'_{12} S'_{26} + C'_{13} S'_{36})\alpha'_{66} \quad (3.28b)$$

$$\tilde{Q}'_{22} = C'_{66} + (C'_{62} S'_{21} + C'_{63} S'_{31})\alpha'_{16} + (C'_{62} S'_{26} + C'_{63} S'_{36})\alpha'_{66} \quad (3.28c)$$

$$\tilde{Q}'_{33} = C'_{55} \quad (3.28d)$$

Burada

$$\alpha'_{11} = \frac{S'_{66}}{S'_{11}S'_{66} - S'^2_{16}}, \quad \alpha'_{16} = \alpha'_{61} = \frac{-S'_{16}}{S'_{11}S'_{66} - S'^2_{16}}, \quad \alpha'_{66} = \frac{S'_{11}}{S'_{11}S'_{66} - S'^2_{16}} \quad (3.29)$$

3.1.5. Kompozit Çubuklar İçin Bünye Denklemleri

Kuvvet ve momentler, rölatif birim uzama ve dönme cinsinden ifade edilirler.

$$T_i = A_{ij} \tilde{\gamma}_j^0 + B_{ij} \tilde{\omega}_j^0 \quad (i, j=1,2,3) \quad (3.30a)$$

$$M_i = F_{ij} \tilde{\gamma}_j^0 + D_{ij} \tilde{\omega}_j^0 \quad (i, j=1,2,3) \quad (3.30b)$$

yazılabilir. Burada

$$A_{ij} = \int_A \tilde{Q}_{ij} dA \quad B_{ij} = \varepsilon_{mjk} \int_A \tilde{Q}_{im} x_k dA \quad (3.31a)$$

$$F_{ij} = \varepsilon_{ikm} \int_A x_k \tilde{Q}_{mj} dA \quad D_{ij} = \varepsilon_{ihk} \varepsilon_{mjp} \int_A x_h x_p \tilde{Q}_{km} dA \quad (3.31b)$$

olmak üzere **A**, **B**, **F**, **D** matrisleri (3×3) boyutunda olup kesit geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlıdır (Yıldırım, 1999). (3.30) eşitliklerinin tersini alarak bünye denklemleri

$$\tilde{\gamma}_i^0 = A'_{ij} T_j + B'_{ij} M_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.32a)$$

$$\tilde{\omega}_i^0 = F'_{ij} T_j + D'_{ij} M_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.32b)$$

yazılabilir.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{F}^* \quad , \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \quad , \quad \mathbf{F}' = -\mathbf{D}^{*-1} \mathbf{F}^* \quad , \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D}^{*-1} \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1} \quad , \quad \mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{A}^{-1} \quad , \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{F} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.33b)$$

\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{F} ve \mathbf{D} matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup herbir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir (Yıldırım, 1999). Daire kesit için burulma rijitliği

$$\tilde{\mathbf{I}}_x = \tilde{\mathbf{I}}_y + \tilde{\mathbf{I}}_z \quad (3.34)$$

ve dikdörtgen kesit için burulma rijitliği ise

$$\tilde{\mathbf{I}}_x \cong \frac{1}{40} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\rho^{(k)} (\mathbf{A}^4)^{(k)}}{\mathbf{I}_y^{(k)} + \mathbf{I}_z^{(k)}} \right] \quad (3.35)$$

olarak hesaplanmaktadır. y ve z eksenleri asal eksenler olup, kesit bu eksenlere göre geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} = 0 \quad (3.36)$$

olur. Böylece \mathbf{A} ve \mathbf{D} matrislerinin sıfırdan farklı elemanları, indirgenmiş rijitlik matrisi cinsinden

$$\mathbf{A}_{11} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{11}{}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} \quad \mathbf{A}_{12} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{12}{}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{A}_{22} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{22}{}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} \quad \mathbf{A}_{33} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{33}{}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} \quad (3.37b)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{33}{}^{(k)} \mathbf{I}_z^{(k)} + \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{22}{}^{(k)} \mathbf{I}_y^{(k)} \quad \mathbf{D}_{12} = -\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{21}{}^{(k)} \mathbf{I}_y^{(k)} \quad (3.37c)$$

$$\mathbf{D}_{22} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{11}{}^{(k)} \mathbf{I}_y^{(k)} \quad \mathbf{D}_{33} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{Q}}'_{11}{}^{(k)} \mathbf{I}_z^{(k)} \quad (3.37d)$$

ifade edilirler. Dönüştürülmüş \mathbf{A}' ve \mathbf{D}' matrisleri (3.33a) eşitlikleri yardımı ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$A'_{11} = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad A'_{12} = -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad (3.38a)$$

$$A'_{22} = \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad A'_{33} = \frac{1}{A_{33}} \quad (3.38b)$$

$$D'_{11} = \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \quad D'_{12} = -\frac{D_{12}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \quad (3.38c)$$

$$D'_{22} = \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \quad D'_{33} = \frac{1}{D_{33}} \quad (3.38d)$$

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü kabul edilmektedir. Seçilen kesitin geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse, dik koordinat takımında N adet kompozit tabakadan oluşan doğru eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_x}{dx} = A'_{11} \bar{T}_x \quad (3.39a)$$

$$\frac{d\bar{U}_y}{dx} = \Omega_z + \alpha_y A'_{22} \bar{T}_y \quad (3.39b)$$

$$\frac{d\bar{U}_z}{dx} = -\bar{\Omega}_y + \alpha_z A'_{33} \bar{T}_z \quad (3.39c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_x}{dx} = D'_{11} \bar{M}_x \quad (3.39d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_y}{dx} = D'_{22} \bar{M}_y \quad (3.39e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_z}{dx} = D'_{33} \bar{M}_z \quad (3.39f)$$

$$\frac{d\bar{T}_x}{dx} = s^2 \tilde{\mathbf{A}} \bar{U}_x + \bar{\mathbf{B}}_7 \quad (3.39g)$$

$$\frac{d\bar{T}_y}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_y + \bar{B}_8 \quad (3.39h)$$

$$\frac{d\bar{T}_z}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_z + \bar{B}_9 \quad (3.39i)$$

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = s^2 \tilde{I}_x \bar{\Omega}_x + \bar{B}_{10} \quad (3.39j)$$

$$\frac{d\bar{M}_y}{dx} = s^2 \tilde{I}_y \bar{\Omega}_y + \bar{T}_z + \bar{B}_{11} \quad (3.39k)$$

$$\frac{d\bar{M}_z}{dx} = s^2 \tilde{I}_z \bar{\Omega}_z - \bar{T}_y + \bar{B}_{12} \quad (3.39l)$$

Burada

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} A^{(k)} \quad , \quad \tilde{I}_y = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} z^2 dA \quad (3.40a)$$

$$\tilde{I}_z = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} y^2 dA \quad , \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(k)} A^{(k)} \quad (3.40b)$$

$$D_{ij} = \varepsilon_{ihn} \varepsilon_{mjp} \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{nm}^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_p x_h dA \quad (3.40c)$$

olup, s Laplace dönüşüm parametresidir. Zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $t > 0$ için, $L[f(t)] = \bar{F}(s)$ ise,

$$\bar{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Zamana göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri kapalı olarak

$$L[\dot{f}(t)] = s \bar{F}(s) - f(0) \quad (3.42a)$$

$$L[\ddot{f}(t)] = s^2 \bar{F}(s) - s f(0) - \dot{f}(0) \quad (3.42b)$$

şeklinde yapılmaktadır. Zorlanmış titreşim durumu için, zamana bağlı $Y(x, t)$ durum vektörü

$$Y(x, t) = \{U_x^o, U_y^o, U_z^o, \Omega_x^o, \Omega_y^o, \Omega_z^o, T_x^o, T_y^o, T_z^o, M_x^o, M_y^o, M_z^o\}^T \quad (3.43)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.43) vektörünün zamana göre Laplace dönüşümü

$$L[Y(x, t)] = \bar{Y}(x, s) \quad (3.44)$$

olup burada Laplace dönüşüm parametresi s kompleks bir sayıdır. Laplace uzayında elde edilen birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\bar{Y}(x, s)}{dx} = \bar{F}(x, s)\bar{Y}(x, s) + \bar{B}(x, s) \quad (3.45)$$

$\bar{F}(x, s)$ katsayılar matrisinin bazı elemanlarında bulunan ikinci türev ifadelerinin zamana göre Laplace dönüşümleri alınır

$$L\left[\rho A \frac{\partial^2 U_k^o}{\partial t^2}\right] = \rho A \left[s^2 \bar{U}_k^o - s U_k^o(x, 0) - \frac{\partial U_k^o(x, 0)}{\partial t} \right] \quad (k= x, y, z) \quad (3.46a)$$

$$L\left[\rho I_k \frac{\partial^2 \Omega_k^o}{\partial t^2}\right] = \rho I_k \left[s^2 \bar{\Omega}_k^o - s \Omega_k^o(x, 0) - \frac{\partial \Omega_k^o(x, 0)}{\partial t} \right] \quad (k= x, y, z) \quad (3.46b)$$

olur. (3.46a-b) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anında verilen başlangıç şartlarıdır. $\bar{B}(x, s)$ kolon matrisinin elemanları (3.47) denkleminde verilmiştir.

$$\begin{aligned} \bar{B}_i(x, s) &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6) \\ \bar{B}_{\delta+j}(x, s) &= -(\bar{p}_k^{(ex)}) - \rho A \left[s U_k^o(x, 0) + \frac{\partial U_k^o(x, 0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3) \\ \bar{B}_{\theta+j}(x, s) &= -(\bar{m}_k^{(ex)}) - \rho I_k \left[s \Omega_k^o(x, 0) + \frac{\partial \Omega_k^o(x, 0)}{\partial t} \right] \quad (k= x, y, z) \end{aligned} \quad (3.47)$$

(3.46) ifadesinde görülen başlangıç şartları, $\bar{B}(x, s)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Kompozit doğru eksenli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimini analiz etmek için FORTRAN77 dilinde genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanmıştır. Bu programda, sistem dinamik rijitlik matrisleri ve sistem yük vektörleri Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi (TFY) yardımı ile elde edilmektedir. Sistem matrisleri, kanonik formda verilen diferansiyel denklemlerin çözümlerinden elde edilmektedir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için beşinci mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Özel olarak, serbest titreşim frekansları, sistem yük vektörü sıfıra eşitlenip sistem dinamik rijitlik matrisindeki Laplace parametresi “s” yerine “iω” konularak hesaplanmaktadır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin’in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır (Durbin, 1974; Narayanan, 1979; Çalım, 1996; 2003).

Çözülen sayısal uygulamalarda, aksi belirtilmedikçe, kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 5.1’de verilmektedir. Ayrıca, hesaplanan serbest titreşim frekansları aşağıdaki ifade yardımı ile boyutsuzlaştırılmaktadır.

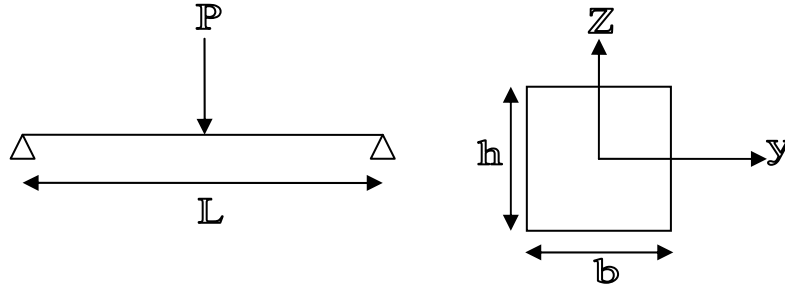
$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}} \quad (5.1)$$

Çizelge 5.1. Enine izotrop malzeme özellikleri

	Carbon-epoxy (AS4/3501-6)
E_1 (N/m ²)	144.8x10 ⁹
$E_2=E_3$ (N/m ²)	9.65x10 ⁹
$G_{12}=G_{13}$ (N/m ²)	4.14x10 ⁹
G_{23} (N/m ²)	3.45x10 ⁹
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.3
ν_{23}	0.399
ρ (kg/m ³)	1389.23

4.1. Düzlemine Dik Yüklü Ortotropik Kiriş

Şekil 5.1’de görülen iki ucu sabit mesnetli ortotropik çubuk problemi göz önüne alınmıştır (0°). Malzeme özellikleri Çizelge 5.1’de verilmektedir. Farklı L/h oranlarını içeren düzlemine dik serbest titreşim frekansları Çizelge 5.2’ de gösterilmektedir.



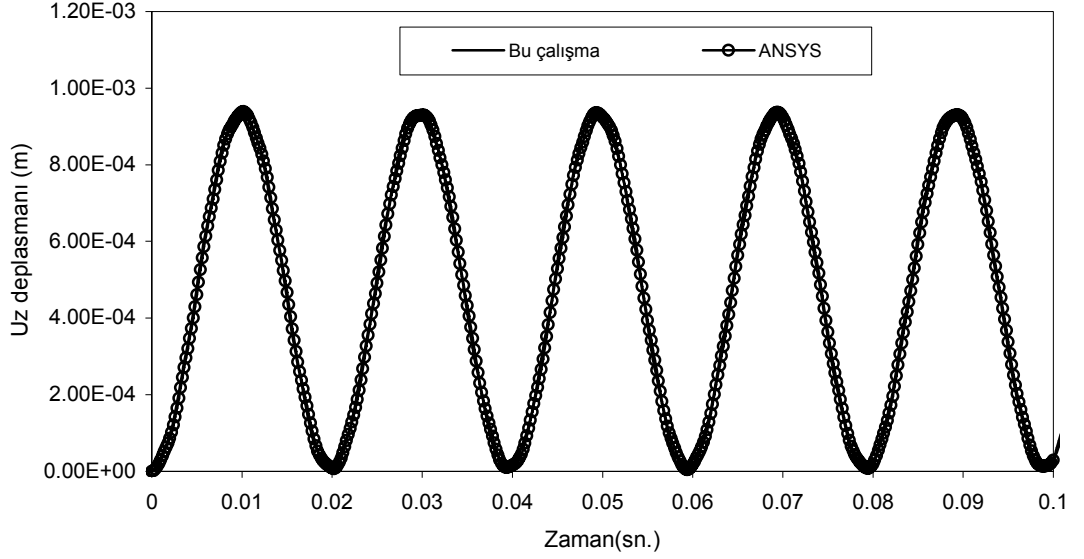
Şekil 5.1. İki ucu sabit mesnetli kiriş ve kesiti

Çizelge 5.2. Düzlemine dik doğal frekanslar (kHz)

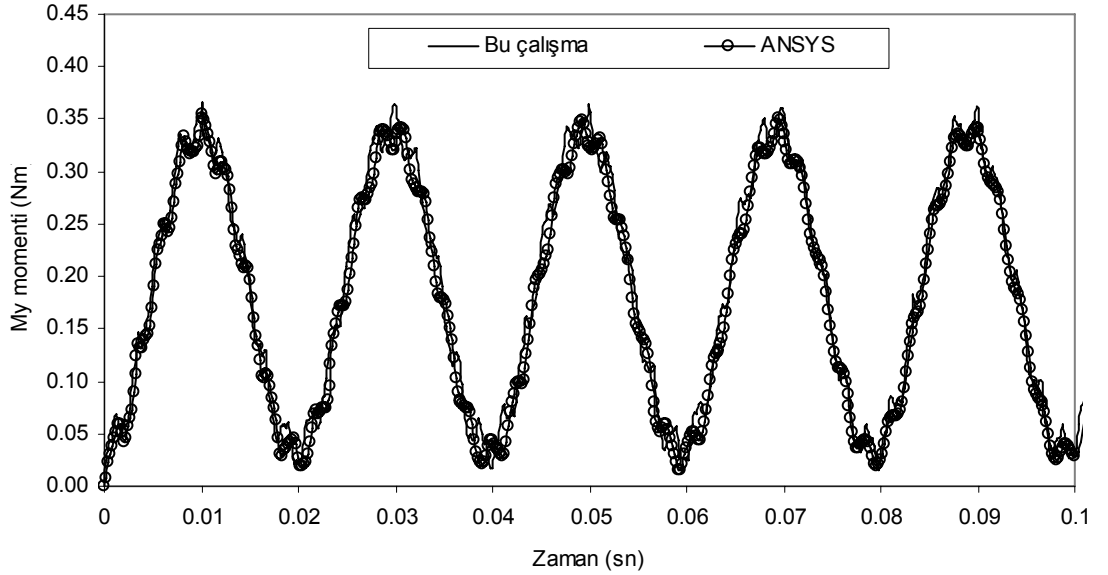
L/h	Mod no	Chandras. ve ark.	Chandras. ve Bangera	Nabi ve Ganesan	Rao ve Ganesan	Yıldırım ve ark. (1999b)	ANSYS	Bu çalışma
15 (L=381 mm)	1	0.051	0.051	0.054	0.051	0.051	0.051	0.051
	2	0.203	0.202	0.213	0.202	0.202	0.202	0.202
	3	0.454	0.453	0.472	0.454	0.451	0.451	0.451
	4	0.804	0.799	0.801	0.804	0.795	0.795	0.795
	5	1.262	1.238	----	1.252	1.229	1.229	1.229
120 (L=762 mm)	1	0.755	0.756	0.789	0.754	0.753	0.754	0.753
	2	2.548	2.554	2.656	2.555	2.544	2.551	2.544
	3	4.716	4.742	4.895	4.753	4.711	4.724	4.711
	4	6.960	7.032	7.165	7.052	6.956	6.971	6.956
	5	9.194	9.355	----	9.383	9.195	9.202	9.191

Çizelge 5.2 incelendiğinde, bu çalışmada sunulan model ile elde edilen düzlemine dik ilk beş serbest titreşim frekansının, ANSYS ve literatürdeki sonuçlarla uyumlu oldukları görülmektedir.

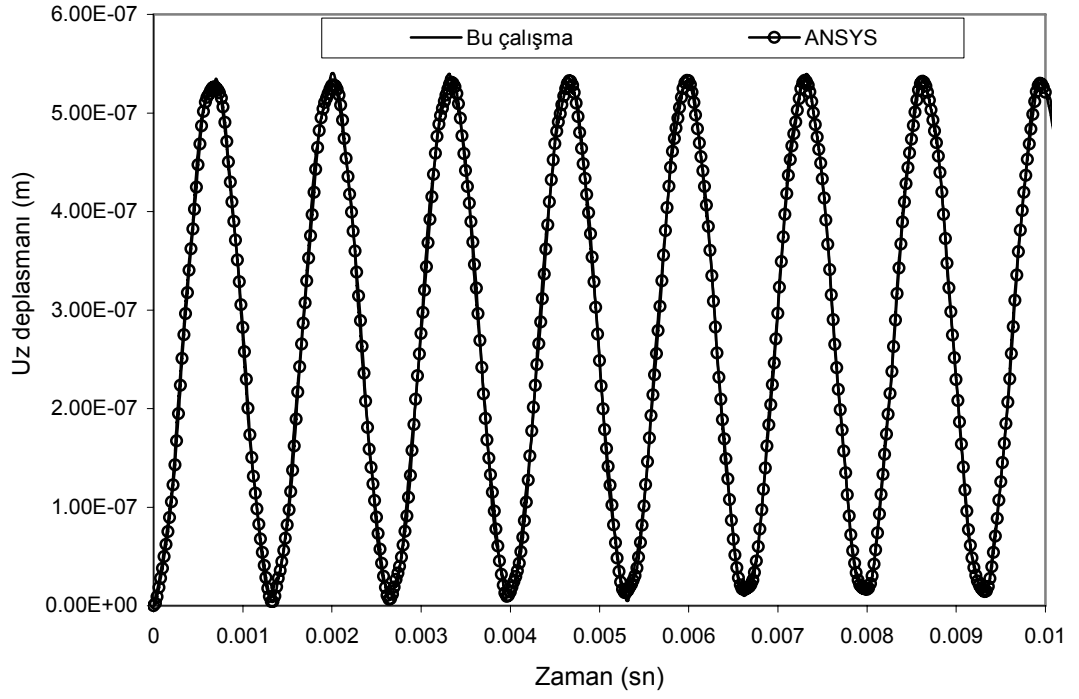
Kirişin orta noktasına z doğrultusunda $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulanmaktadır. Farklı narinlik oranı (L/h) için kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanı (Şekil 5.2 ve 5.4) ve M_y momentinin (Şekil 5.3 ve 5.5) zamanla değişimleri hesaplanmaktadır. Hesaplamalarda, zaman artımı (Δt) 0.0002 sn alınmaktadır.



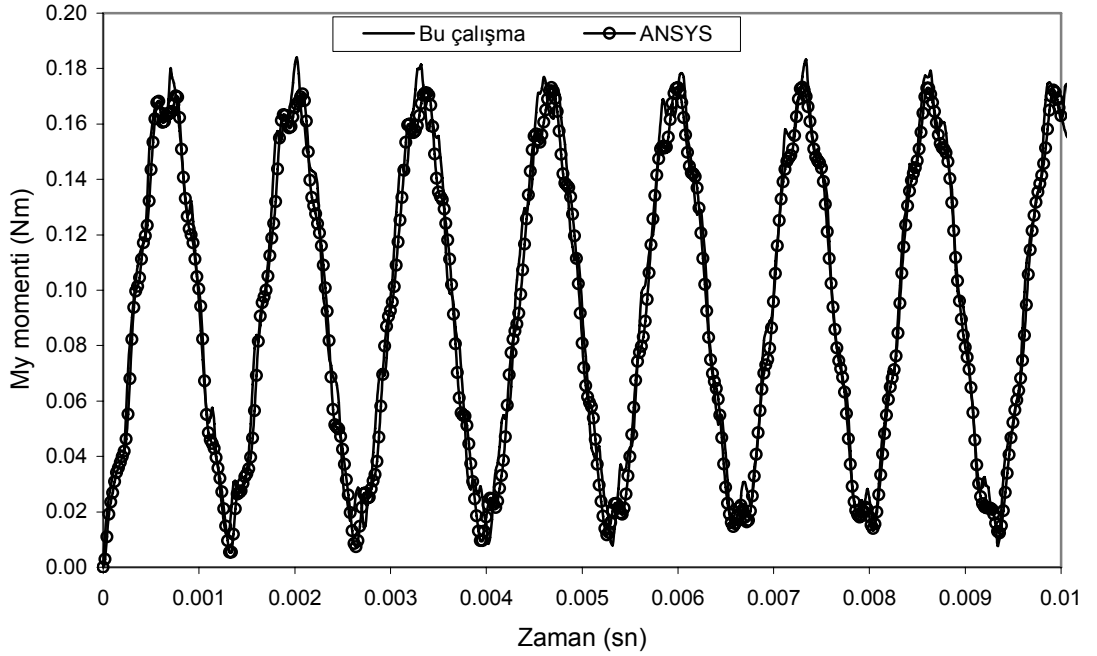
Şekil 5.2. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanının zamanla değişimi ($L/h=15$, $L=381$ mm)



Şekil 5.3. Kirişin orta noktasındaki M_y momentinin zamanla değişimi ($L/h=15$, $L=381$ mm)



Şekil 5.4. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanın zamanla değişimi
($L/h=120$, $L=762$ mm)

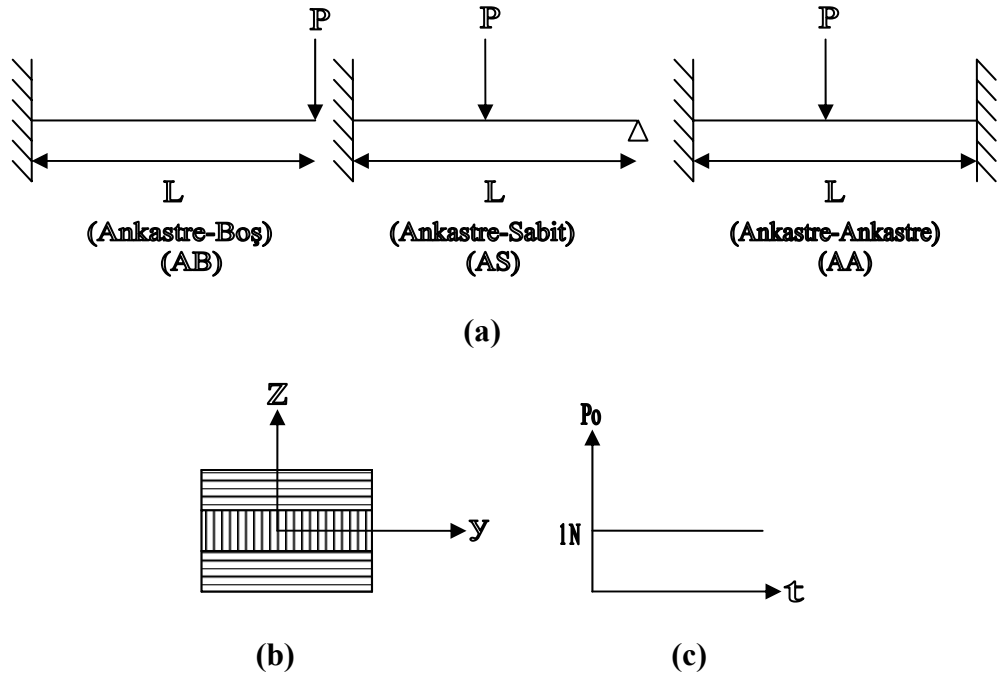


Şekil 5.5. Kirişin orta noktasındaki My momentinin zamanla değişimi
($L/h=120$, $L=762$ mm)

Farklı narinlik oranı (L/h) için kirişin orta noktasındaki deplasman ve momentin zamanla değişimleri ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların uyumlu oldukları görülmüştür.

4.2. Düzlemine Dik Yüklü Kompozit Tabakalı Kiriş

Farklı sınır şartlarına sahip, kesiti üç tabakadan meydana gelen basit açıklıklı kiriş problemi göz önüne alınmıştır ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) (Şekil 5.6. a-b). Çubuk kesiti dikdörtgen olup, $h/b=1$ alınmıştır. Malzeme özellikleri; $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2$, $G_{23} = 0.5 E_2$ ve $\nu_{12} = 0.3$ olarak alınmıştır. Farklı sınır şartlarını içeren kiriş problemine ait düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları Çizelge 5.3’de verilmektedir.



Şekil 5.6. (a) Farklı mesnetlenme durumlarına ait kirişler (b) Kiriş kesiti (c) Adım tipi dinamik yük

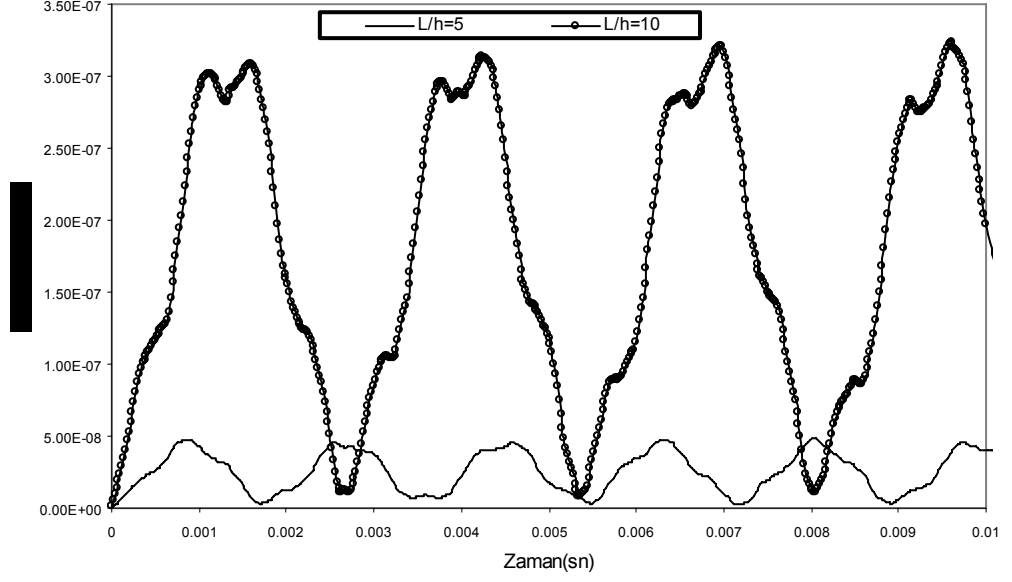
Çizelge 5.3. Düzlemine dik boyutsuz serbest titreşim frekansları

Mesnetlenme Durumu	L/h	Frekans no	Khedeir ve Reddy	Yıldırım ve ark. (1999b)	Bu çalışma
Ankastre Boş (AB)	5	1	4.134	4.133	4.133
		2	---	13.428	13.429
		3	---	25.514	25.514
		4	---	36.428	36.429
	10	1	5.479	5.475	5.476
		2	---	22.205	22.205
		3	---	46.095	46.095
		4	---	68.988	68.988
Ankastre Sabit (AS)	5	1	9.652	9.65	9.651
		2	---	20.718	20.717
		3	---	31.748	31.748
		4	---	42.685	42.684
	10	1	16.335	16.331	16.331
		2	---	37.811	37.811
		3	---	60.324	60.323
		4	---	82.725	82.724
Ankastre Ankastre (AA)	5	1	10.432	10.431	10.431
		2	---	20.755	20.755
		3	---	31.798	31.797
		4	---	42.687	42.687
	10	1	19.051	19.048	19.048
		2	---	38.602	38.601
		3	---	60.740	60.740
		4	---	82.871	82.870

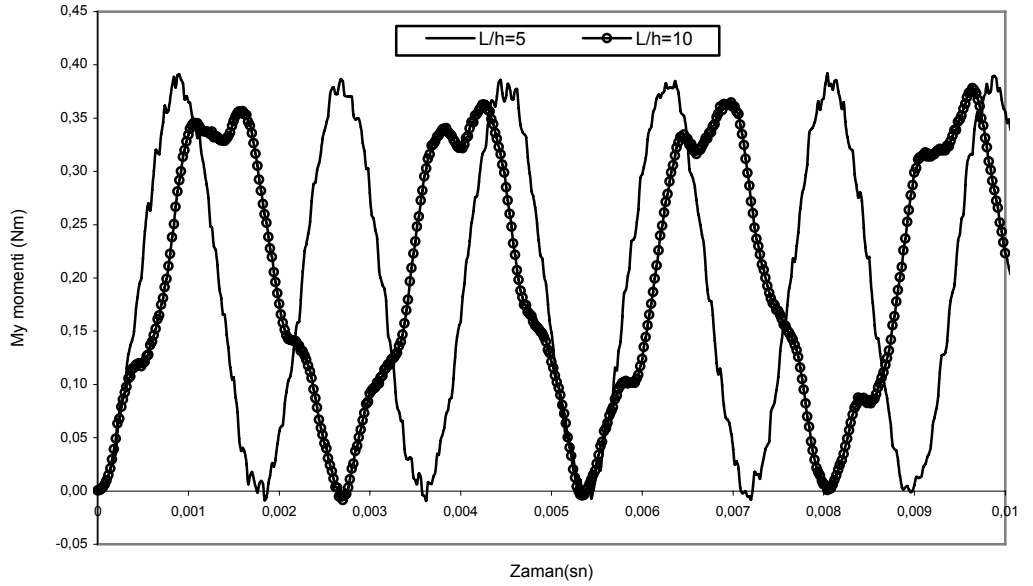
Çizelge 5.3 incelendiğinde, bu çalışmada boyutsuz halde elde edilen düzlemine dik serbest titreşim frekansları ile literatürdeki mevcut sonuçların birbirleriyle uyumlu oldukları görülmektedir. Ayrıca bütün sınır şartlarında, L/h oranı arttıkça serbest titreşim frekansları da artmaktadır.

Farklı sınır şartları ve L/h oranları için kompozit basit açıklıklı kirişin serbest titreşim analizini yaptıktan sonra bu problemin zorlanmış titreşim analizi yapılacaktır. Kompozit kirişe z doğrultusunda $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi yük uygulanmıştır (Şekil 5.6.c). Adım tipi dinamik yükün uygulama noktası, ankastre uç-ankastre uç (AA) ve ankastre uç-sabit uç (AS) durumunda kirişin orta noktasına, ankastre uç-boş uç (AB) durumunda ise kirişin serbest ucuna uygulanmaktadır (Şekil 5.6.a). Bu dinamik yük altında, z doğrultusundaki deplasman (Şekil 5.7, 5.9, 5.11) ile ankastre uçtaki y

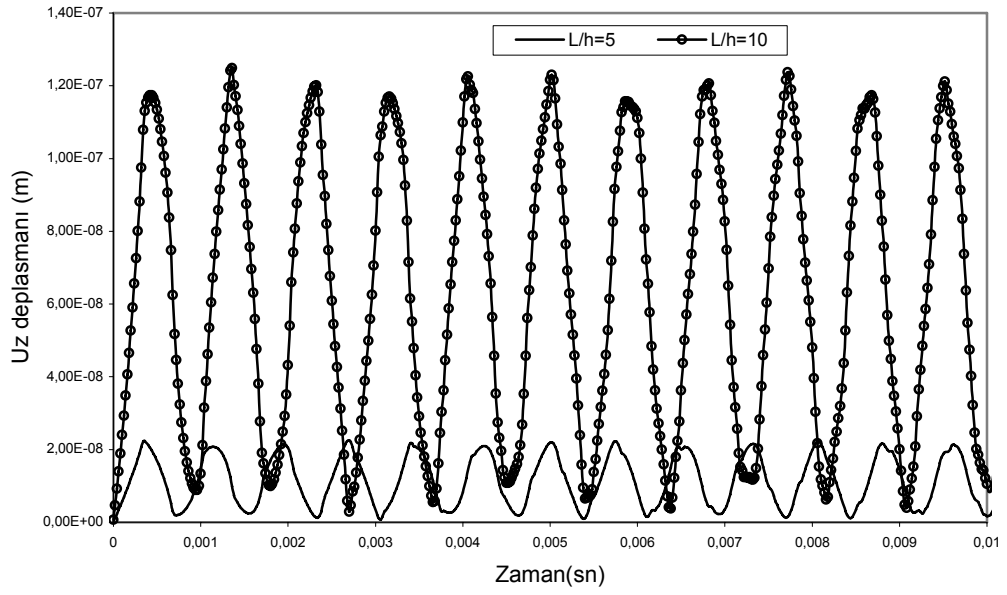
doğrultusundaki eğilme momentinin (Şekil 5.8, 5.10, 5.12) zamanla değişimleri gösterilmektedir.



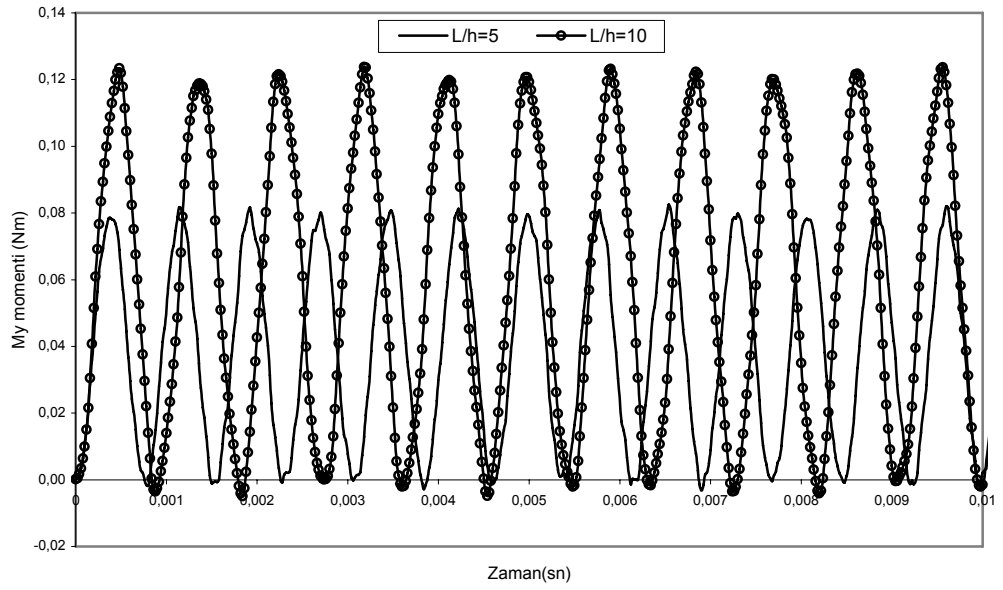
Şekil 5.7. Serbest uçtaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (AB)



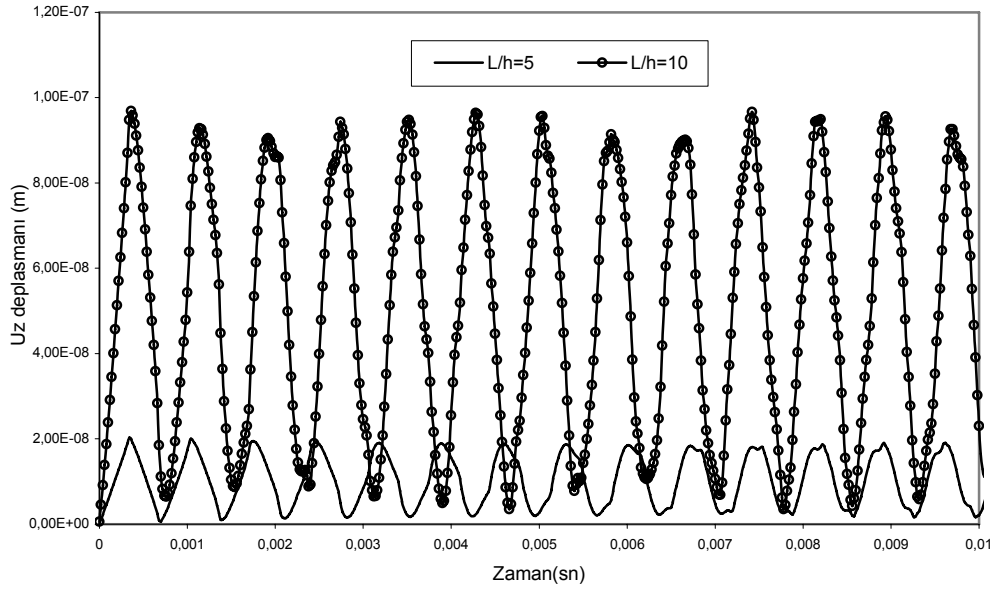
Şekil 5.8. Ankastré uçtaki My momentinin zamanla değişimi (AB)



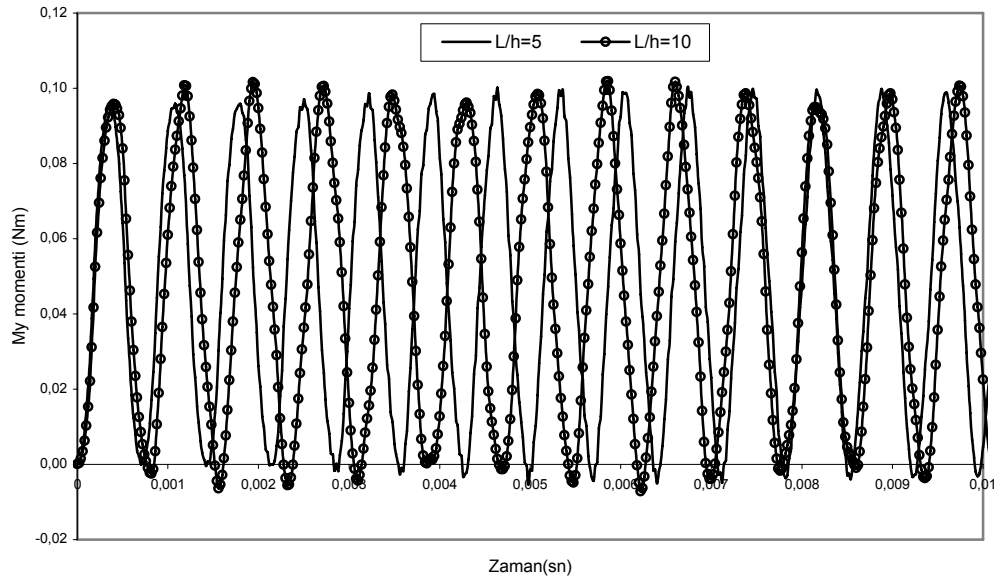
Şekil 5.9. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanının zamanla değişimi (AS)



Şekil 5.10. Ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi (AS)



Şekil 5.11. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanın zamanla değişimi (AA)



Şekil 5.12. Ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi (AA)

Bütün sınır şartlarında, L/h oranı arttıkça Uz deplasman değeri artmaktadır. My eğilme momentinde ise L/h oranı arttıkça titreşim periyodu artmakta, fakat genliği hemen hemen değişmemektedir.

4.3. Düzlemi İçinde Yüklü Kompozit Tabakalı Kiriş

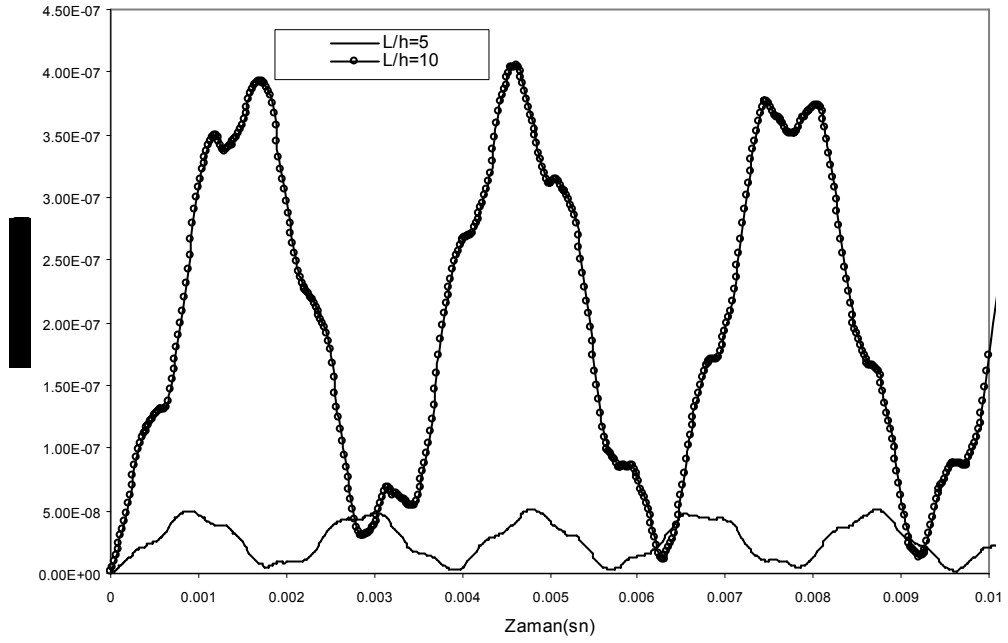
Bir önceki uygulamada ele alınan örnek, düzlemi içinde yüklenmiş ve farklı kesit oranları (h/b) için tekrar incelenecektir (Şekil 5.6). Kirişin geometrik ve malzeme özellikleri bir önceki örnekle aynıdır. Farklı sınır şartlarına sahip, farklı L/h ve h/b oranları için kompozit tabakalı kirişin düzlemi içindeki boyutsuz haldeki serbest titreşim frekansları Çizelge 5.4’de verilmektedir.

Farklı sınır şartlarına sahip, çeşitli h/b ve L/h oranları için boyutsuz halde elde edilen düzlemi içinde serbest titreşim frekansları ile literatürdeki mevcut sonuçların birbirleriyle uyumlu oldukları görülmektedir (Çizelge 5.4). Farklı sınır şartlarına sahip kirişlerde, L/h oranı artıkça ve h/b oranı azaldıkça serbest titreşim frekanslarının arttığı görülmektedir.

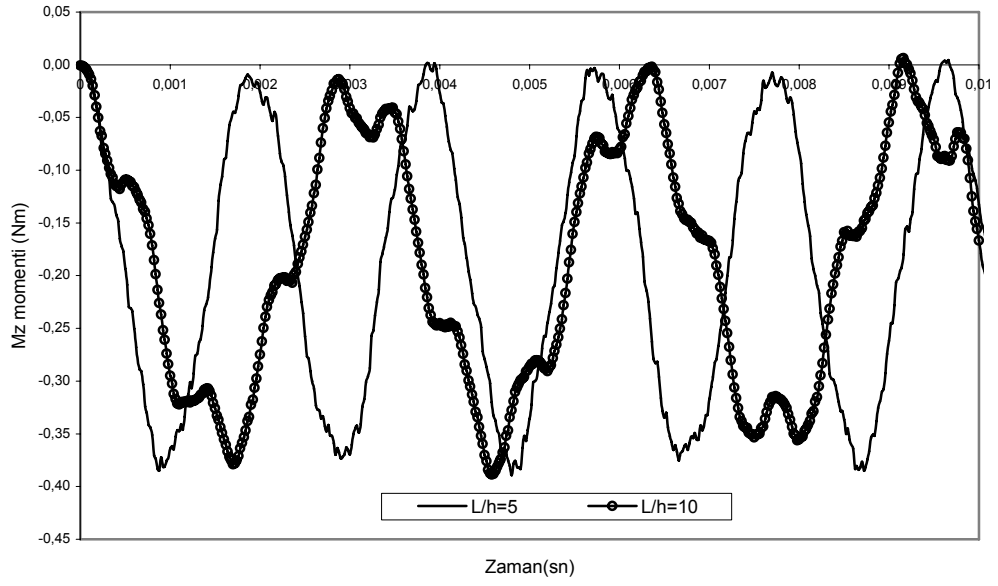
Çizelge 5.4. Düzlemi içinde boyutsuz serbest titreşim frekansları

Mesnetlenme Durumu	h/b	L/h	Frekans no	Yıldırım ve ark.	Bu çalışma	h/b	L/h	Frekans no	Yıldırım ve ark.	Bu çalışma	h/b	L/h	Frekans no	Yıldırım ve ark.	Bu çalışma
Ankastre Serbest	10	5	1	0.52527	0.52516	1	5	1	3.85324	3.85316	0.1	5	1	5.52498	5.52496
			2	3.21119	3.21101			2	13.13	13.1298			2	16.5673	16.5672
			3	8.66226	8.66222			3	25.6687	25.6686			3	27.7252	27.725
			4	16.1507	16.1506			4	36.9845	36.9843			4	38.7042	38.7039
		10	1	0.52684	0.52684		10	1	4.78485	4.78476		10	1	10.8929	10.8827
			2	3.28137	3.28088			2	21.0494	21.049			2	32.6126	32.615
			3	9.09553	9.09492			3	44.9508	44.9503			3	55.2156	55.215
			4	17.5699	17.5694			4	68.7084	68.7076			4	76.8831	76.8828
Ankastre Sabit	10	5	1	2.25776	2.25776	1	5	1	9.57245	9.57229	0.1	5	1	11.0747	11.0746
			2	7.05205	7.05196			2	20.9267	20.9263			2	22.1978	22.1977
			3	14.0125	14.0123			3	32.353	32.3527			3	33.3101	33.31
			4	22.6295	22.6293			4	43.6691	43.6689			4	41.2747	41.4222
		10	1	2.29924	2.29857		10	1	15.4562	15.4555		10	1	21.9663	21.9661
			2	7.37661	7.37623			2	37.012	37.0119			2	44.2982	44.298
			3	15.1778	15.1777			3	60.1735	60.1727			3	66.553	66.5526
			4	25.5016	25.5015			4	83.4215	83.4211			4	85.2599	85.2597
Ankastre Ankastre	10	5	1	3.21513	3.21503	1	5	1	10.5552	10.555	0.1	5	1	11.1013	11.1012
			2	8.45153	8.45141			2	21.0138	21.0137			2	22.198	22.1979
			3	15.6689	15.6687			3	32.4296	32.4295			3	33.3119	33.3118
			4	24.3479	24.3476			4	43.6758	43.6757			4	44.4206	44.4204
		10	1	3.31912	3.31906		10	1	18.5669	18.5663		10	1	22.1676	22.1669
			2	9.03105	9.03037			2	38.2898	38.2891			2	44.299	44.2985
			3	17.4118	17.411			3	60.8458	60.8453			3	66.5656	66.5653
			4	27.2082	27.2078			4	83.7069	83.7063			4	88.7913	88.7911

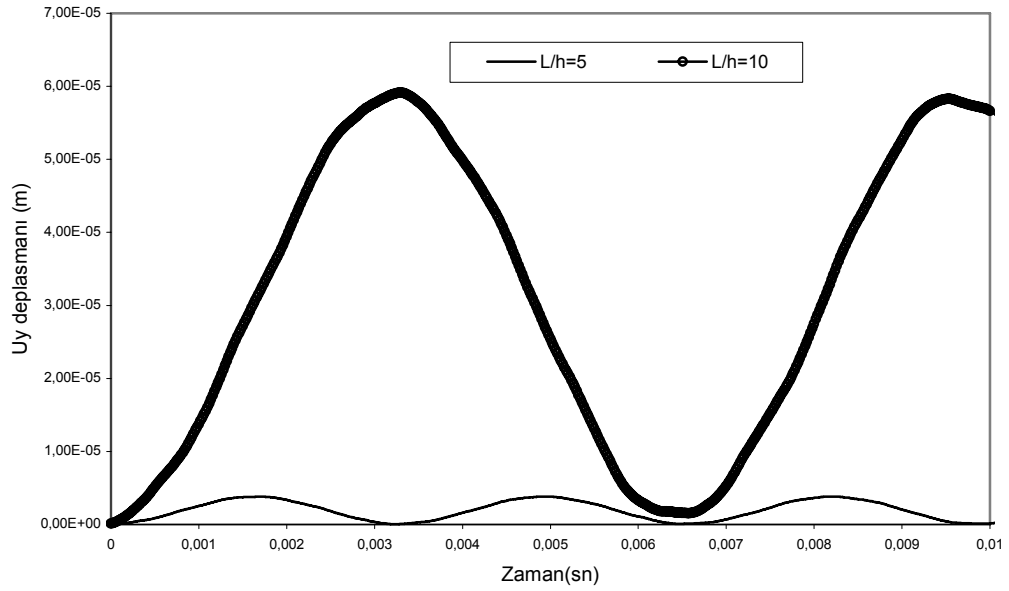
Üç tabakadan meydana gelen kompozit kirişe y doğrultusunda $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulanmıştır (Şekil 5.6.c). Adım tipi dinamik yükün uygulama noktası, ankastre uç-ankastre uç (AA) ve ankastre uç-sabit uç (AS) durumunda kirişin orta noktasına, ankastre uç-boş uç (AB) durumunda ise kirişin serbest ucuna uygulanmaktadır (Şekil 5.6.a). Farklı sınır şartında ve farklı L/h ve h/b oranlarındaki bu dinamik yük altında, y doğrultusundaki deplasman ile ankastre uçtaki z doğrultusundaki eğilme momentinin zamanla değişimleri gösterilmektedir.



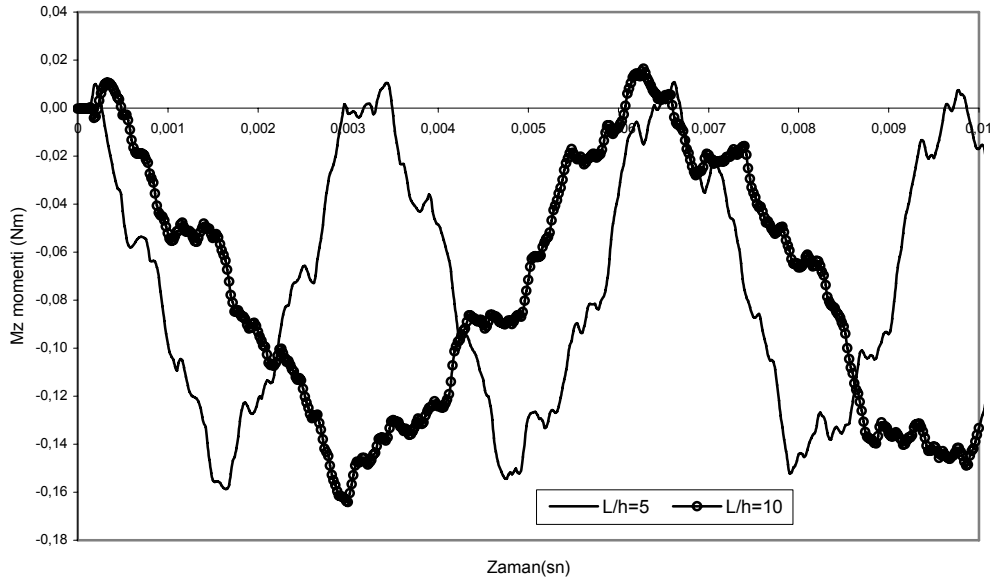
Şekil 5.13. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun Uy deplasmanının zamanla değişimi (h/b=10)



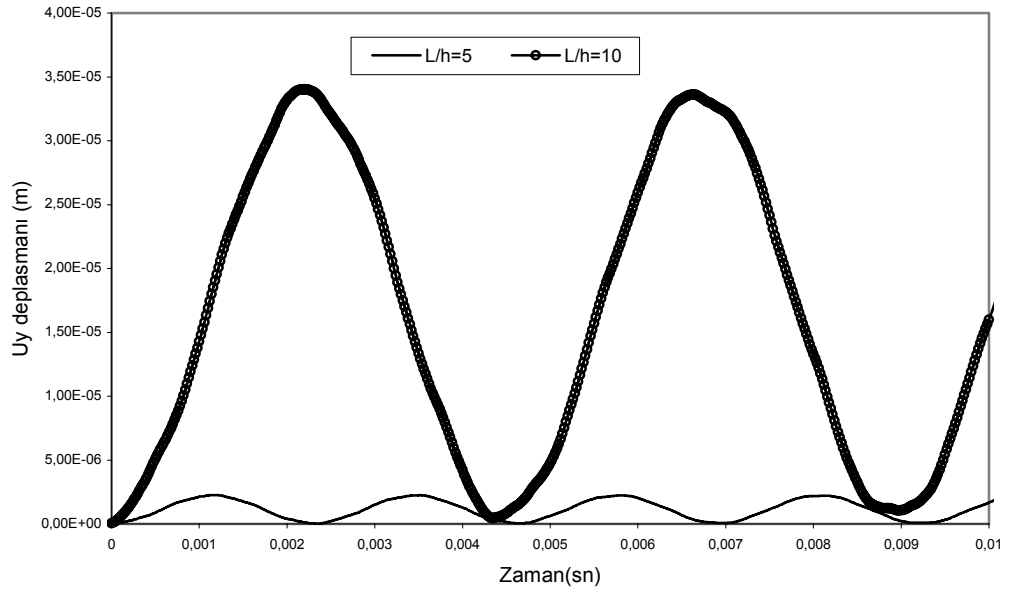
Şekil 5.14. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun M_z momentinin zamanla değişimi ($h/b=10$)



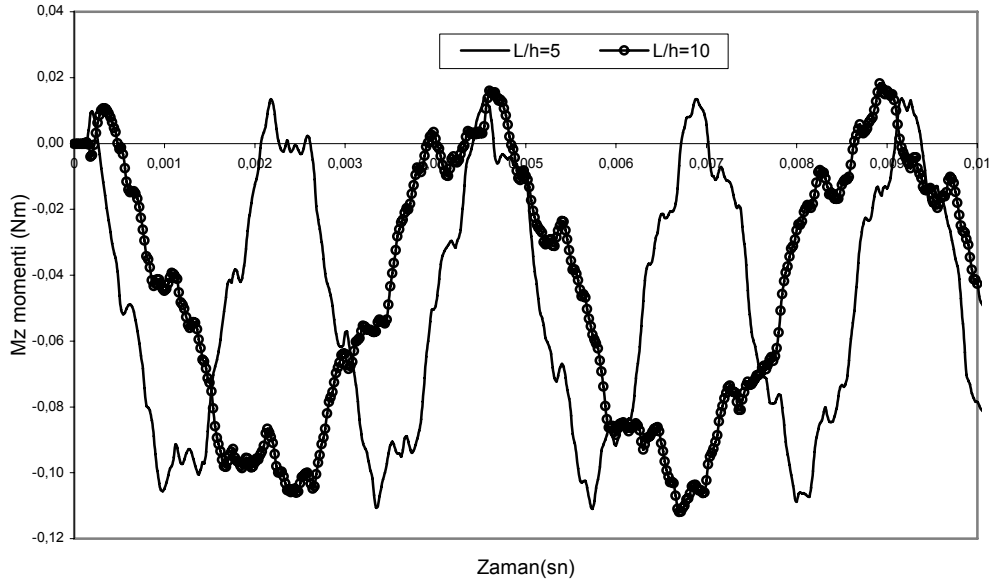
Şekil 5.15. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun U_y deplasmanının zamanla değişimi ($h/b=10$)



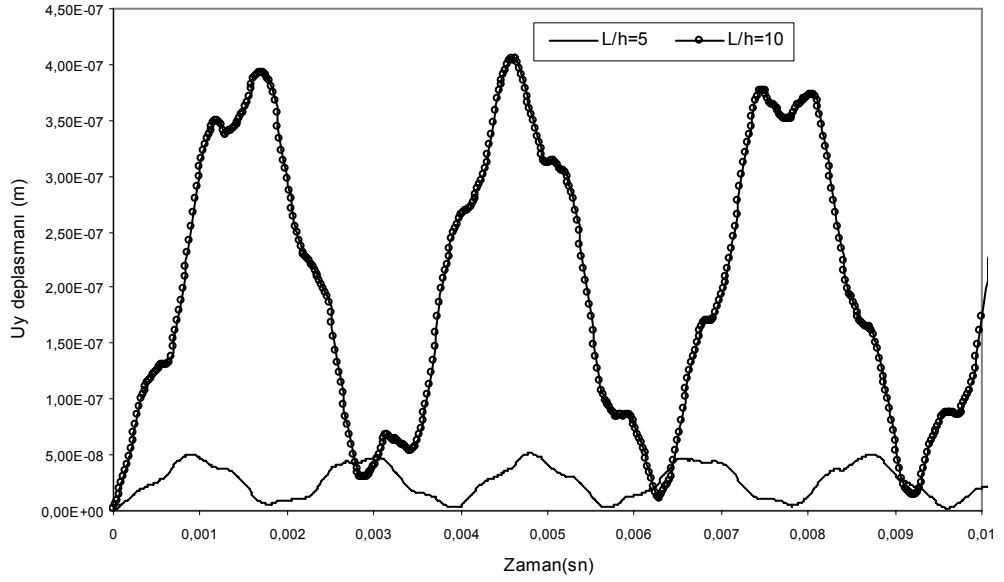
Şekil 5.16. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun M_z momentinin zamanla değişimi ($h/b=10$)



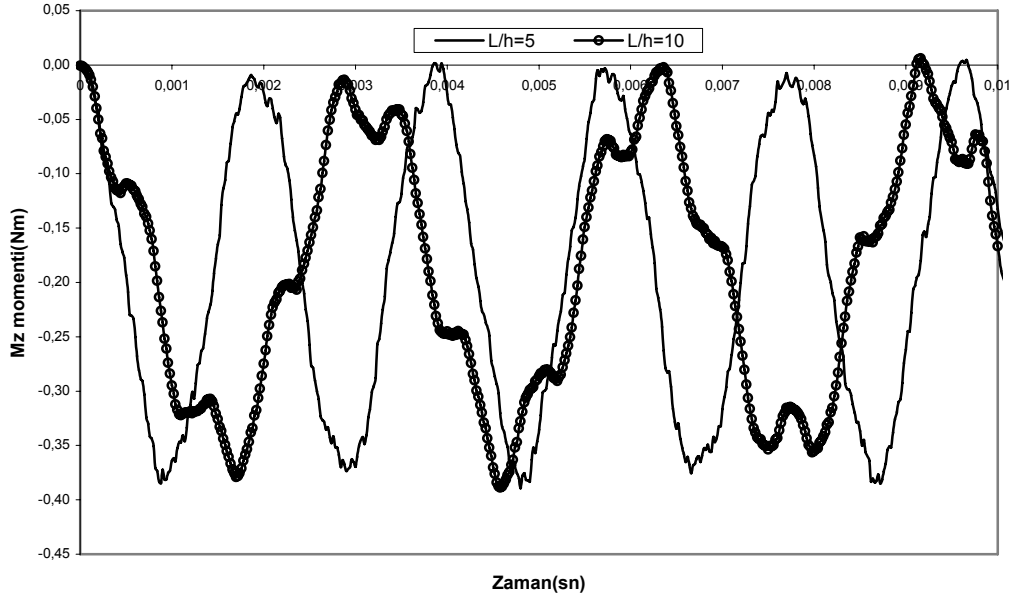
Şekil 5.17. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun U_y deplasmasının zamanla değişimi ($h/b=10$)



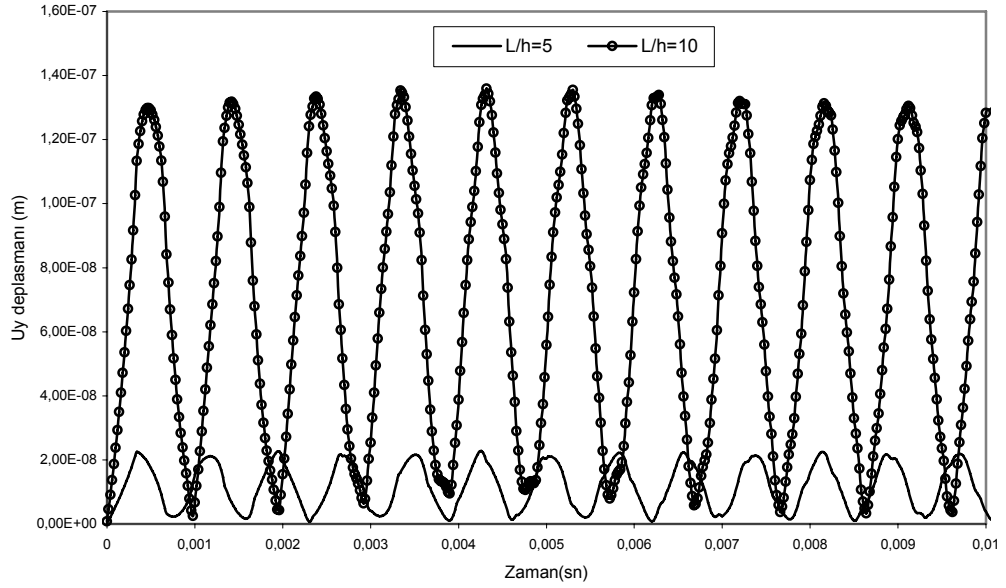
Şekil 5.18. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun Mz momentinin zamanla değişimi ($h/b=10$)



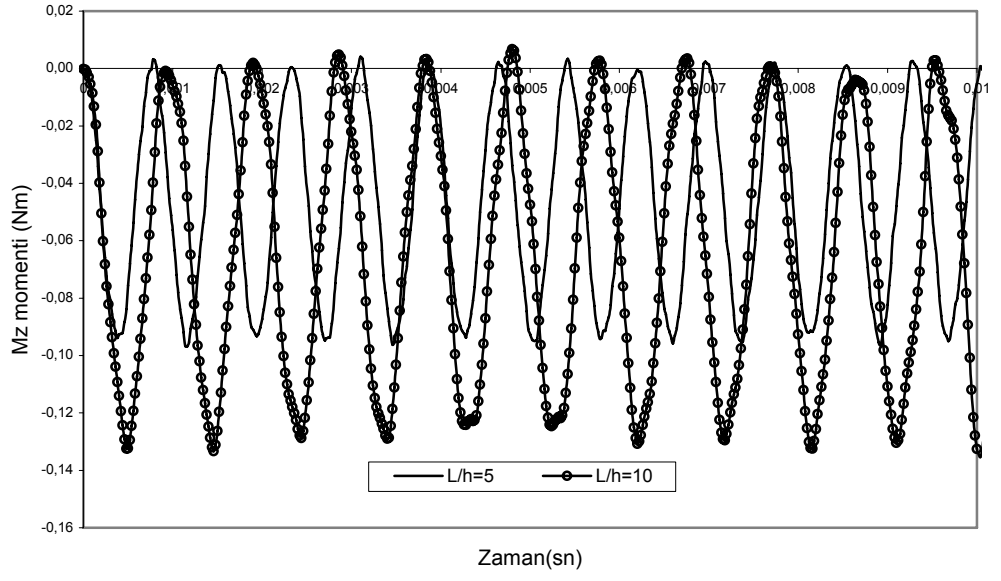
Şekil 5.19. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun Uy deplasmanının zamanla değişim($h/b=1$)



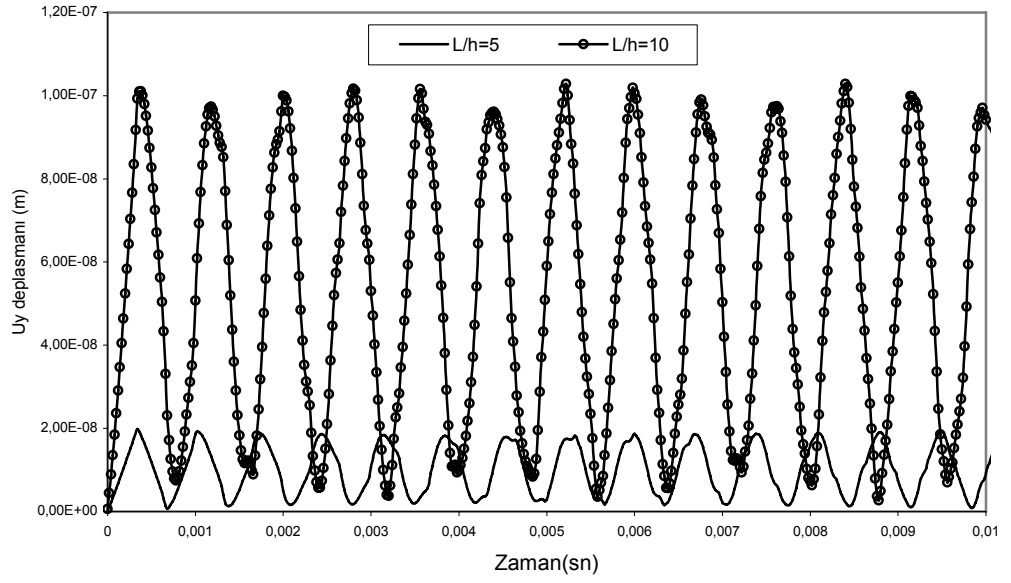
Şekil 5.20. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (AB) olan çubuğun M_z momentinin zamanla değişimi ($h/b=1$)



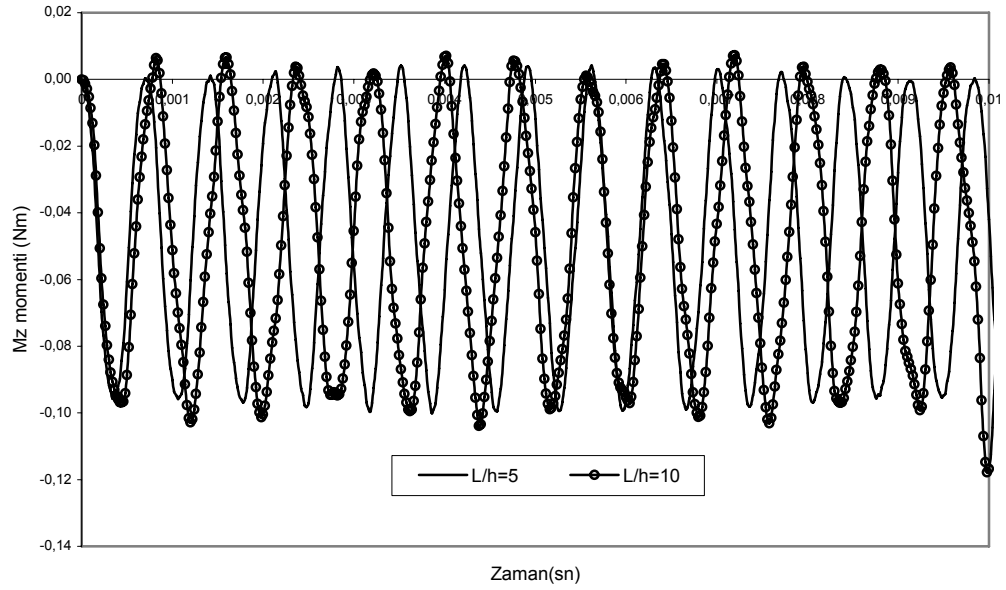
Şekil 5.21. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun U_y deplasmanının zamanla değişimi ($h/b=1$)



Şekil 5.22. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit (AS) olan çubuğun M_z momentinin zamanla değişimi ($h/b=1$)



Şekil 5.23. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun U_y deplasmanının zamanla değişimi ($h/b=1$)



Şekil 5.24. İki ucu ankastre (AA) olan çubuğun M_z momentinin zamanla değişimi ($h/b=1$)

Bütün sınır şartlarında L/h değeri arttıkça, hem deplasman hem genliği hem de titreşim periyodu artmaktadır.

4.4. Düzlemi İçinde Yüklü Tek Eksenli Kompozit Kiriş

İki ucu ankastre, tek eksenli kompozit kiriş problemi göz önüne alınmaktadır (0°). Kiriş kesiti dikdörtgen olup, $L=0.381$ m, $L/h=5$ ve $h/b=1$ olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri, Çizelge 5.1’de tanımlanmaktadır. Kayma deformasyonu etkilerini incelemek amacı ile Bernoulli ve Timoshenko kirişi olarak ayrı ayrı serbest ve zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır. Ayrıca, kompozit çubuklarda E_1/E_2 oranının dinamik davranışa etkisi araştırılmıştır. Farklı E_1/E_2 oranlarında serbest titreşim frekansları, Bernoulli kiriş teorisi kullanarak Çizelge 5.5’de ve Timoshenko kiriş teorisi kullanarak Çizelge 5.6’de verilmektedir. Bu farklı oranlar için E_1 sabit, E_2 değeri değişken olarak kullanılmaktadır.

Çizelge 5.5. Düzlemi içinde serbest titreşim frekansları (Hertz) (Bernoulli kirişi)

	E_1/E_2	Frekanslar			
		1	2	3	4
Bu çalışma	1	5399.16	13398.07	14136.62	25812.88
ANSYS		5399.16	13398.61	14136.61	25812.90
Bu çalışma	10	5399.16	13398.07	14136.62	25812.88
ANSYS		5399.16	13398.61	14136.61	25812.90
Bu çalışma	20	5399.16	13398.07	14136.62	25812.88
ANSYS		5399.16	13398.61	14136.61	25812.90
Bu çalışma	30	5399.16	13398.07	14136.62	25812.88
ANSYS		5399.16	13398.61	14136.61	25812.90
Bu çalışma	40	5399.16	13398.07	14136.62	25812.88
ANSYS		5399.16	13398.61	14136.61	25812.90

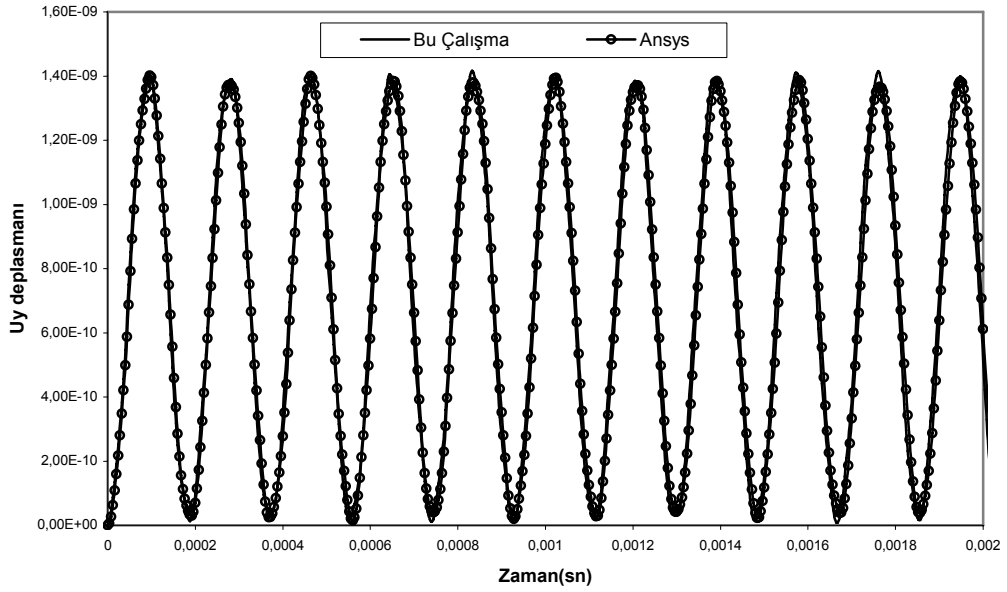
Çizelge 5.6. Düzlemi içinde serbest titreşim frekansları (Hertz) (Timoshenko kirişi)

	E_1/E_2	Frekanslar			
		1	2	3	4
Bu çalışma	1	4719.06	11188.26	13398.07	19019.32
ANSYS		4719.11	11188.90	13398.6	19026.40
Bu çalışma	10	2635.17	5326.42	8396.39	11462.76
ANSYS		2635.25	5327.11	8399.08	11469.60
Bu çalışma	20	1979.53	3948.39	6130.22	8285.25
ANSYS		1979.60	3948.95	6132.32	8287.19
Bu çalışma	30	1651.77	3287.43	5063.29	6814.36
ANSYS		1651.83	3287.91	5065.07	6817.17
Bu çalışma	40	1446.56	2878.29	4411.06	5922.47
ANSYS		1446.61	2878.73	4412.63	5926.27

Çizelge 5.5. ve Çizelge 5.6. incelendiğinde, bu çalışmada önerilen yöntem ile elde edilen sonuçlar ile sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile elde edilen sonuçların uyumlu oldukları görülmektedir. Bernoulli kiriş teorisi kayma deformasyonu etkisini göz önüne almadığından dolayı farklı E_1/E_2 oranlarında serbest titreşim frekansları değişmemektedir (Çizelge 5.5). Ayrıca, narinlik oranı, $L/h=5$ olmasından dolayı Bernoulli kiriş teorisi ile Timoshenko kiriş teorisi arasında belirgin farklar gözlenmektedir. Kayma deformasyon etkisinin göz önüne alındığı durumda

(Timoshenko kiriş teorisi), E_1/E_2 oranı arttığında düzlemi içindeki serbest titreşim frekansları azalmaktadır.

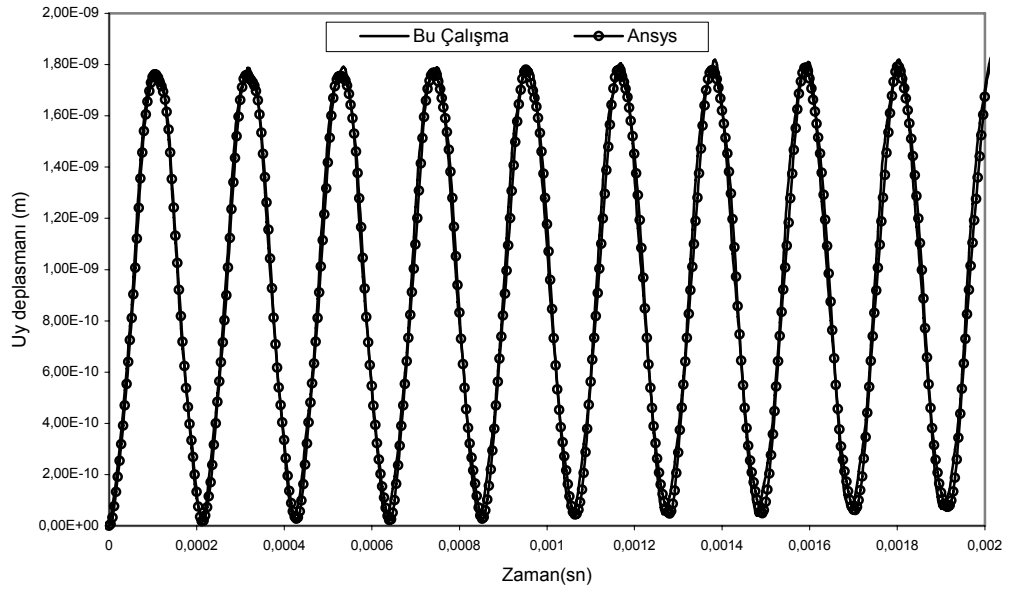
İki ucu ankastre kompozit çubuğun orta noktasına $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulanmaktadır. Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri kullanarak farklı E_1/E_2 oranları için kirişin orta noktasındaki Uy deplasmanının zamanla değişimleri verilmektedir. Bernoulli kiriş teorisi kullanarak $E_1/E_2=1, 10, 20, 30, 40$ olması halinde kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi Şekil 5.25’de verilmektedir.



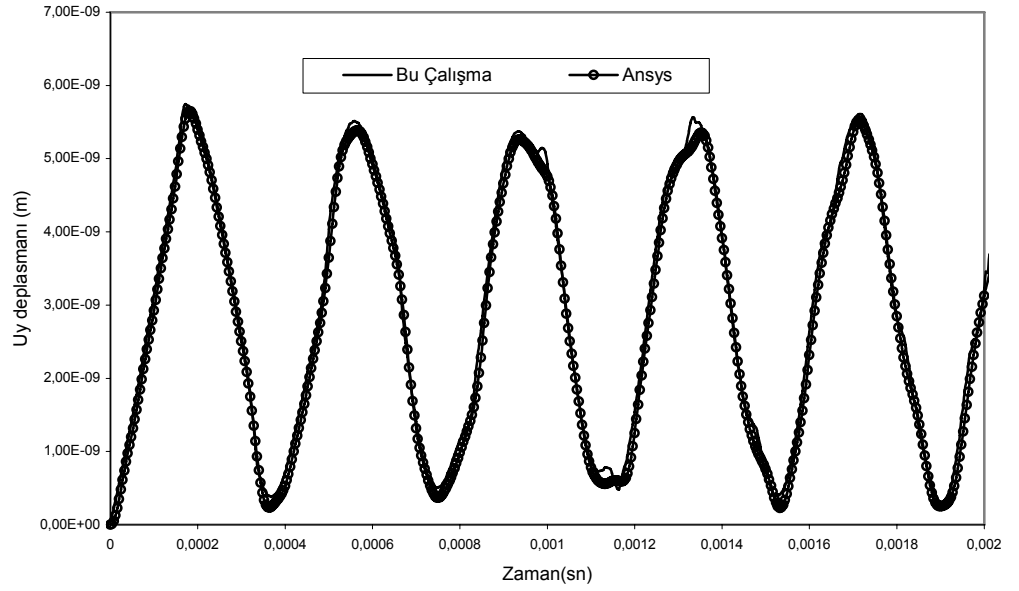
Şekil 5.25. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=1, 10, 20, 30,40$)

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ANSYS sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Bernoulli kiriş teorisi, kayma deformasyonu etkilerini göz önüne almadığından dolayı, E_1/E_2 oranının değişmesine rağmen Uy deplasman değerleri değişmemektedir.

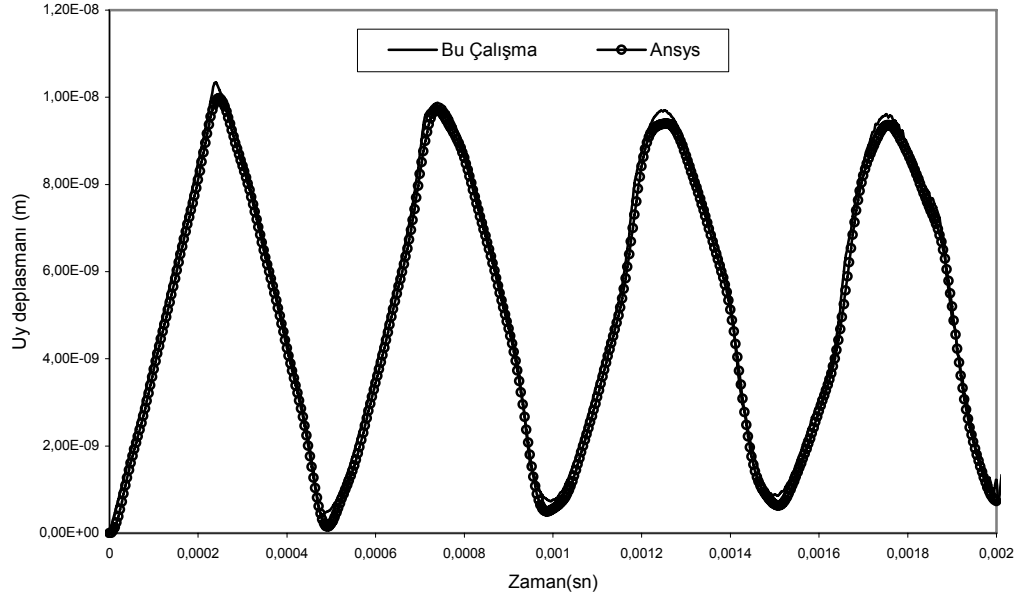
Kayma deformasyonu etkisini incelemek amacı ile problem Timoshenko kiriş teorisi kullanarak da analizi yapılmıştır. Kayma deformasyon etkilerini de göz önüne alarak (Timoshenko kiriş teorisi) $E_1/E_2=1, 10, 20, 30, 40$ olması halinde kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri verilmektedir (Şekil 5.26 – 5.30).



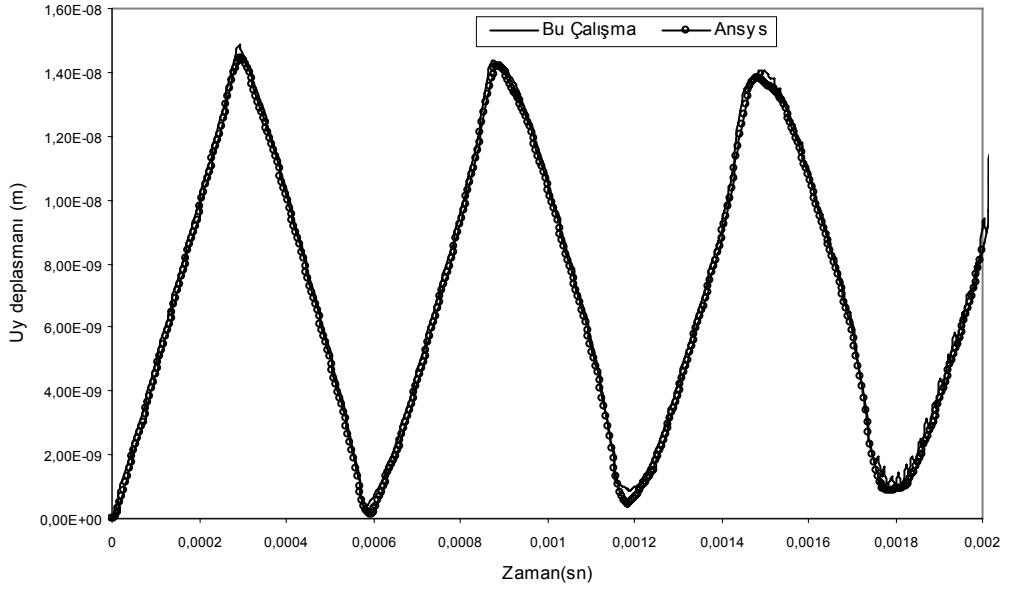
Şekil 5.26. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=1$)



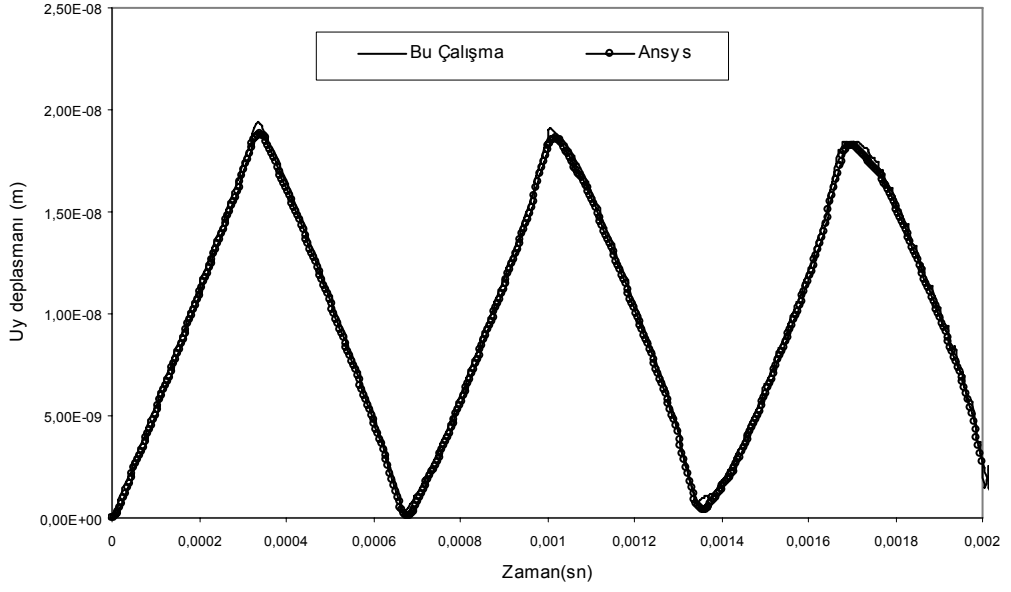
Şekil 5.27. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=10$)



Şekil 5.28. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=20$)



Şekil 5.29. Uy deplasmanının zamanla değişimi ($E_1/E_2=30$)



Şekil 5.30. Uy deplasmanın zamanla değişimi ($E_1/E_2=40$)

Bu yöntem ile elde edilen sonuçları ve ANSYS sonuçlarının uyum içinde oldukları görülmektedir. E_1/E_2 oranı arttıkça, hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyodları artmaktadır (Şekil 5.26 – 5.30). Çünkü, sürekli olarak 2 doğrultusundaki elastisite modülü (E_2) azaltılarak E_1/E_2 oranları değiştirilmektedir. Yükleme doğrultusundaki rijitlik azaldığından dolayı, doğaldır ki, aynı doğrultudaki deplasman değerleri artacaktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, kompozit malzemedeki yapılmış doğru eksenli çubukların dinamik davranışları etkin bir yöntem kullanılarak ele alınmıştır. Kompozit doğru eksenli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimi Laplace uzayında incelenmiştir. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınmıştır. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Laplace uzayında kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacaktır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine (TFY) dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için beşinci mertebeli Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümler, etkin bir sayısal ters Laplace tekniği ile zaman uzayına dönüştürülmüştür. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler, uygun integrasyon adım aralığı seçilerek tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile Laplace uzayında istenildiği kadar kesin olarak çözülebilmektedir.

Zamanla değişen yükler altında doğru eksenli kompozit çubukların dinamik analizini yapmak için FORTRAN77 dilinde genel amaçlı bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile literatürde verilen çeşitli örnekler çözülmüş ve ANSYS programı sonuçları ile kıyaslamalar yapılmıştır. Bulunan sonuçların hem literatür hem de ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman kullanarak ancak yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Zorlanmış titreşim analizleri ANSYS programında Newmark adım adım integrasyon yöntemi ile zaman uzayında yapılmaktadır. Adım adım integrasyon ile çözüm yaparken zaman artırımının seçimi önem arz etmektedir. ANSYS ile çözüm yaparken uygun zaman artımı seçilemediği takdirde hatalı sonuçlar elde edilmektedir.

Bu çalışmada, sunulan modelin serbest titreşim problemi üzerinde geçerliliğini test ettikten sonra, zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Farklı sınır şartlarında ve tabakalanma durumlarında, doğru eksenli kompozit çubuklara adım tipi dinamik tekil

yük uygulanmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ANSYS program sonuçlarının birbirleriyle uyumlu oldukları görülmektedir.

Bütün sınır şartlarında kirişin narinliği arttığında (L/h), düzlemine dik serbest titreşim frekansları da artmaktadır. Farklı sınır şartlarına sahip kirişlerde, L/h oranı arttıkça ve h/b oranı azaldıkça düzlemi içinde serbest titreşim frekanslarının arttığı görülmektedir. Ayrıca, Bernoulli kiriş teorisi ve Timoshenko kiriş teorisi kullanarak da serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılmaktadır. Bernoulli kiriş teorisinde kayma deformasyon etkileri göz önüne alınmadığından dolayı E_1/E_2 oranı değişmesine rağmen serbest titreşim frekansları değişmemektedir. Fakat, kayma deformasyonu etkisini göz önüne alarak (Timoshenko kiriş teorisi) çözüm yapıldığında, E_1/E_2 oranı arttıkça düzlemi içinde serbest titreşim frekansları azalmaktadır.

Farklı sınır şartlarında, L/h değeri arttıkça hem deplasman genliği hem de titreşim periyodu artmaktadır.

Kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmadığından dolayı, (Bernoulli kiriş teorisi) E_1/E_2 oranının değişmesine rağmen deplasman değerleri değişmemektedir. Kayma deformasyon etkilerini de göz önüne alarak (Timoshenko kiriş teorisi) $E_1/E_2=1, 10, 20, 30, 40$ olması halindeki kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri verilmektedir. E_1/E_2 oranı arttıkça, hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyodları artmaktadır. Çünkü, sürekli olarak 2 doğrultusundaki elastisite modülü (E_2) azaltılarak E_1/E_2 oranları değiştirilmektedir. Yükleme doğrultusundaki rijitlik azaldığından dolayı, aynı doğrultudaki deplasman değerleri artacaktır.

KAYNAKLAR

- Abramovich, H., and Livshits, A., 1994. Free Vibrations of Non-Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams. **Journal of Sound and Vibration**, 176(5): 597-612.
- ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, U.S.A.
- Chandrashekhara, K., and Bangera, K. M., 1992. Free Vibration of Composite Beams Using a Refined Shear Flexible Beam Element. **Computer and Structures**, **43(4): 719-727**.
- Chandrashekhara, K., Krisnamurty, K., and Roy, S., 1990. Free Vibration of Composite Beams Including Rotary Inertia and Shear Deformation. **Composite Structures**, 14: 269-279.
- Chapra, S. C., and Canale, R. P., 1998. Numerical Methods for Engineers. Third edition, McGraw-Hill.
- Chen, A. T., and Yang, T. Y., 1985. Static and Dynamic Formulation of a Symmetrically Laminated Beam Finite Element for a Microcomputer. **Journal of Composite Materials**, 19: 459-475.
- Çalım, F. F., 1996. Eğri Eksenli Çubuk Sistemler ve Silindirik Tonoz Yapıların Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Rijitlik Matrisi Yöntemi İle Statik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- Çalım, F. F., 2003. Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- Durbin, F., 1974. Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. **Computer Journal**, 17: 371-376.
- Haktanır, V., 1990. Silindirik Helisel Çubukların Statik, Dinamik ve Burkulma Davranışlarının Taşıma ve Rijitlik Matrisleri Metodu İle İncelenmesi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- Hodges, D. H., Atılgan, A. R., Fulton, M. V., and Rehfield, L. W., 1991. Free Vibration Analysis of Composite Beams. **Journal of the American Helicopter Society**, 36(3): 36-47.
- Jones, R. M., 1975. Mechanics of Composite Materials. Scripta Book Company, Washington D.C., 355s.
- Khedeir, A. A., and Reddy, J. N., 1994. Free Vibration of Cross-Ply Laminated Beams with Arbitrary Boundary Conditions. **International Journal of Engineering Science**, 32(12): 1971-1980
- Krishnaswamy, S., Chandrashekhara, K., and Wu, W. Z. B., 1992. Analytical Solutions to Vibration of Generally Layered Composite Beams. **Journal of Sound and Vibration**, 159(1): 85-99.
- Mengi, Y., 1989-1995. Numerical Methods in Engineering, Ders Notları.

- Nabi, S. M., and Ganesan, N., 1994. A Generalized Element for the Free Vibration Analysis of Composite Beams. **Computers and Structures**, 51(5): 607-610.
- Narayanan, G. V., 1979. Numerical Operational Methods in Structural Dynamics. Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.
- Ramtekkar, G. S., and Desai, Y. M., 2002. Natural Vibrations of Laminated Composite Beams by Using Mixed Finite Element Modelling. **Journal of Sound and Vibration**, 257(4): 635-651.
- Rao, S. R., and Ganesan, N., 1997. Dynamic Response of Non-Uniform Composite Beams. **Journal of Sound and Vibration**, 200(5): 563-577.
- Singh, M. P., and Abdelnaser, A. S., 1992. Random Response of Symmetric Cross-Ply Composite Beams with Arbitrary Boundary Conditions. **AIAA Journal**, 30(4): 1081-1088.
- Teh, K. K., and Huang, C. C., 1979. The Vibrations of Generally Orthotropic Beams, A Finite Element Approach. **Journal of Sound and Vibration**, 62(2): 195-206.
- Teh, K. K., and Huang, C. C., 1980. The Effects of Fibre Orientation on Free Vibrations of Composite Beams. **Journal of Sound and Vibration**, 69(2): 327-337.
- Temel, B., Çalım, F. F., and Tütüncü, N., 2005. Forced Vibration of Composite Cylindrical Helical Rods. **International Journal of Mechanical Sciences**, 47: 998-1022.
- Yıldırım, V., Sancaktar, E., and Kırıl, E., 1999a. Free Vibration Analysis of Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams with the Help of the Transfer Matrix Approach. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 15: 651-660.
- Yıldırım, V., Sancaktar, E., and Kırıl, E., 1999b. Comparison of the In-Plane Natural Frequencies of Symmetric Cross-Ply Laminated Beams Based on the Bernoulli-Euler and Timoshenko Beam Theory. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, 66: 410-417.
- Yıldırım, V., 1999. Governing Equations of Initially Twisted Elastic Space Rods Made of Laminated Composite Materials. **International Journal of Mechanical Sciences**, 37: 1007-1035.
- Yıldırım, V., and Kırıl, E., 2000. Investigation of the Rotary Inertia and Shear Deformation Effects on the Out-of-Plane Bending and Torsional Natural Frequencies of Laminated Beams. **Composite Structures**, 49: 313-320.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında büyük bir titizlik, sabır ve özveriyle bana destek olan, yol gösteren ve iyi bir bilimsel çalışma ortamı sağlayan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Faruk Fırat ÇALIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında değerli görüş, katkı ve bilgilerini esirgemeyen hocalarım sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan Tacettin TÜRKER, Yrd. Doç. Dr. Umur Korkut SEVİM, Yrd. Doç. Dr. Selçuk KAÇIN, Doç. Dr. Ali Osman ATAHAN, Yrd. Doç. Dr. Murat BİKÇE, Yrd. Doç. Dr. Fatih ÜNEŐ ve Yrd. Doç. Dr. Ercan ERDİŐ'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca değerli dostum ve meslektaşım İnŐ. Yük. Müh. Abdullah FINDIK' a teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım sırasında manevi desteğini esirgemeyen hayatımın her aşamasında bana destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İskenderun'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi aynı ilçede tamamladım. 1999 yılında girdiğim Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden 2003 yılında mezun oldum. Şubat 2005 tarihinden itibaren Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladım. 2005 yılında İskenderun Belediyesi'nde göreve başladım. Halen İskenderun Belediyesi İmar Müdürlüğü Yapı Ruhsatı Şefliğinde görev yapmaktayım.