MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİLEŞENLERİ REEL ARALIKLAR OLAN MATRİSLERİN KARAKTERİSTİKLERİ

Cennet BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY
Eylül–2010

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLEŞENLERİ REEL ARALIKLAR OLAN MATRİSLERİN KARAKTERİSTİKLERİ

CENNET BOLAT
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK danışmanlığında hazırlanan bu tez 03/09/2010 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK	Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN	Yrd. Doç. Dr. H. Ali ÇETİNKARA
Başkan	Üye	Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Necat AĞCA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

BİLEŞENLERİ REEL ARALIKLAR OLAN MATRİSLERİN KARAKTERİSTİKLERİ

Bu çalışmada; literatürde yer alan “reel ve kompleks interval sayı”, “reel ve kompleks interval vektör” ve “reel ve kompleks interval matris” kavramlarının genişlemeleri sırasıyla “kuaterniyon interval sayı”, “kuaterniyon interval vektör” ve “kuaterniyon interval matris” kavramları tanımlanmaktadır. Kuaterniyon intervallerin matris temsilleri sunulmakta ve sunulan temsili matrislerin determinantları, normları, özdeğerleri, izleri ve tersleri hesaplanmaktadır. Ayrıca kuaterniyon intervallerin toplamları, çarpımları, doğrusal bileşimleri ve diğer bazı cebirsel hesaplamaları temsili matris ile hesaplanmaktadır. $\mathbf{R}([A])$, $[A]$ intervalinin temsili matrisi olmak üzere, $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sisteminden $[x]=\mathbf{R}([A])[x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix}$ reel sistemi tanımlanmakta ve bu sistem dikkate alınarak, kuaterniyon interval sistemin çözümünün varlığı kontrol edilmekte ve sistemin çözüm vektörüne ulaşılmaktadır. Dahası $[x]^{k+1}=[A][x]^k+[b],\ k=0,1,...$ kuaterniyon interval iteratif sistemin yakınsaklığını sağlayan $[A]$’nın yakınsaklığı ile $\mathbf{R}([A])$’nın yakınsaklığı arasında bağlar kuran kriterler verilmekte ve böylece $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sisteminin çözümü için bir metod olarak kullanılabilecek $[x]^{k+1}=[A][x]^k+[b],\ k=0,1,...$ iteratif denklemin yakınsaklığının incelenmesi $\mathbf{R}([A])$ reel matrisi kullanılarak yapılmaktadır.

2010, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Reel İnterval; Kompleks İnterval; Kuaterniyon İnterval; Matrisler; Lineer Denklem Sistemleri.

ABSTRACT

THE CHARACTERİSTİCS OF MATRİCES WİTH REAL İNTERVAL COMPONENTS

In this study; the “quaternion interval number”, “quaternion interval vector” and “quaternion interval matrix” concepts, which these, respectively, are extensions of the “real and complex interval numbers”, “real and complex interval vectors” and “real and complex interval matrices” concepts existing in literature, have been defined. The matrix representations of the quaternion intervals have been introduced and given the determinants, norms, eigenvalues, traces and inverses of the presented representation matrices. Also, the sums, products and linear combinations and the other some algebraic calculations of the quaternion intervals have been computed via the matrix representations. The real system $[x]=\mathbf{R}([A])[x]+\begin{pmatrix} -[b_{re}] \\ [b_{im}] \end{pmatrix}$ has been defined from the quaternion interval system $[x]=[A][x]+[b]$ and considering this system, the existence of the solution of the quaternion interval system has been controlled and reached to the solution vector of the system. Moreover, the criterions establishing the connections between the convergent of $[A]$ which provides the convergent of the quaternion interval iterative system $[x]^{k+1}=[A][x]^{k}+[b],\ k=0,1,...$ and the convergent of $\mathbf{R}([A])$ have been given, and thus, investigating of the convergent of the iterative equation $[x]^{k+1}=[A][x]^{k}+[b],\ k=0,1,...,$ which this equation is used as a method for the solution of the quaternion interval system $[x]=[A][x]+[b]$, has been done using the real matrix $\mathbf{R}([A])$.

2010, 75 pages

Key Words: Real interval; Complex interval; Quaternion interval; Matrices; Linear Equation Systems.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\det A$	A matrisinin determinantı
$\lVert A \rVert$	A matrisinin normu
$iz(A)$	A matrisinin izi
A^{-1}	A matrisinin tersi
$\rho(A)$	A matrisinin spektral yarıçapı
$\lambda(A)$	A matrisinin özdeğeri
$\lvert A \rvert$	A matrisinin mutlak değeri
$\mathbf{R}(A)$	A matrisinin temsili matrisi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$	n -boyutlu kompleks vektörler kümesi
$\mathbb{C}^{m\times n}$	$m\times n$ tipinde kompleks matrisler kümesi
$I(\mathbb{C})$	Kompleks interval sayılar kümesi
$I(\mathbb{C}^n)$	n -boyutlu kompleks interval vektörler kümesi
$I(\mathbb{C}^{m\times n})$	$m\times n$ tipinde kompleks interval matrisler kümesi
$\mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$	Kuaterniyon interval sayılar kümesi
$\mathbf{H}[I(\mathbb{R}^n)]$	n -boyutlu kuaterniyon interval vektörler kümesi
$\mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{m\times n})]$	$m\times n$ tipinde kuaterniyon interval matrisler kümesi
$\mathbf{H}(\mathbb{C})$	Kompleks kuaterniyon sayılar kümesi
$\mathbf{H}(\mathbb{C}^n)$	n -boyutlu kompleks kuaterniyon vektörler kümesi
$\mathbf{H}(\mathbb{C}^{m\times n})$	$m\times n$ tipinde kompleks kuaterniyon matrisler kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$I(\mathbb{R})$	Reel interval sayılar kümesi
$I(\mathbb{R}^n)$	n -boyutlu reel interval vektörler kümesi
$I(\mathbb{R}^{m\times n})$	$m\times n$ tipinde reel interval matrisler kümesi
$\mathbf{H}(\mathbb{R})$	Reel kuaterniyon sayılar kümesi
$\mathbf{H}(\mathbb{R}^n)$	n -boyutlu reel kuaterniyon vektörler kümesi
$\mathbf{H}(\mathbb{R}^{m\times n})$	$m\times n$ tipinde reel kuaterniyon matrisler kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

1.1. "İnterval" Kavramı

Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar olarak tanımlanabilir. Bu hataların bir kısmı kullanıcıların kendisinden, bir kısmı bilgisayarda kullanılan yazılımlardan ve bir kısmı da bilgisayarların doğal olarak sayıları belirli bir uzunlukta depolayabilme, yuvarlatma ve kesmelerinden kaynaklanır.

Bu durum dikkate alındığında, bilimsel problemlerin çözümleri çoğu durumda tam çözüme yakın çözümler olarak elde edilmektedir veya bir başka ifade ile tam çözümlerin yerine hatalı çözümler elde edilmektedir.

Genel olarak, bir problemin matematiksel modellemesi olan $y = f(x)$, bağımsız-bağımlı değişken sistemindeki, x değişkenindeki olası hatalar (δ : x için soldan hata miktarı ve ε : x için sağdan hata miktarı) dikkate alınarak, x değişkenini probleme dahil etmenin en bariz yolu, değişkeni $[x-\delta, x+\varepsilon]$ şeklinde ifade etmek olacaktır. Bu düşünce ilk olarak, Moore tarafından "*interval*" kavramı olarak literatüre girmiştir (Moore, 1959; 1960; 1966; Moore ve Yang, 1959; Moore ve ark., 1960). Böylece, sayısal verilerle çözülmesi gereken bir matematiksel problemde, verilerde ve işlem sürecinde oluşabilecek tüm hatalara bir üst ve alt sınır sağlama düşüncesi birçok bilimsel çalışmada yerini alarak, matematik, mühendislik, bilgisayar bilimi gibi birçok alanda sayısız uygulamaları olan bir fikir haline geldi.

İntervaller ve interval aritmetiğini bilimin çoğu alanında kullanıldığını görmek mümkündür:

- Mühendislik bilimlerinde,
    - kalite kontrol alanı,
    - bilgisayar mikro devrelerindeki eksikliklerin giderilmesi,
    - imalat hatalarındaki esneklik payının belirlenmesi,
    - robotların bilgisayarlar aracılığı ile dizayn edilmesi ,

  - uçak motorlarının kontrolü,
  - elektrik güç tesislerinin kontrolü,
  - trafiğin kontrol edilmesi,
- Sosyal bilimlerde,
  - insanların öğrenme süreçleri grafiklerinin oluşturulması,
  - proje yönetimi,
  - hizmet sistemlerinin oluşturulması,
- Fizik biliminde,
  - lazer ışınlarının kontrolü,
  - parçacıkların hız ayarlarının belirlenmesi,
  - radyoastronomide görüntü işleme,
  - akışkanlar mekaniği,
- Kimya biliminde,
  - spektral analiz,
- Bilgisayar biliminde,
  - iletişim ağları ve özellikle de bilgisayar ağları,
  - yapay zeka,
- Ekonomi biliminde,
  - planlama ve banka işlemleri,

(Jaulin ve ark., 2001; Moore ve ark., 2009; Snyder, 1992; Balaji ve Seader, 1995; Fefferman ve Seco, 1996).

1.2. "Kuaterniyon" Kavramı

Kuaterniyonlar, kompleks sayılar cisminin değişimli olmayan bir genişlemesidir ve 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton (1844; 1866; 1899) tarafından kompleks sayıları üç boyutlu uzaya taşımak amacıyla tanımlanmıştır

Kuaterniyonlar bir skaler ile bir imajiner bileşenlere sahip bir vektörden oluşan özgün bir yapı olarak düşünülebilir (Silva ve Martins, 2002). Dolayısıyla skaler ve vektörlere ilişkin özelliklerin nerede ise tamamı kuaterniyonlar için de sağlanır. Bu nedenle kuaterniyonlar fiziksel niceliklerin temsilinde önemli derecede rol oynamaktadırlar. Özgün yapıları ve işlevselliği nedeniyle dönme ve öteleme hareketinin temsilinde oldukça kullanılışlıdırlar. Özellikle dönme hareketi ile ilişkili olan açısal yerdeğiştirme, açısal hız, açısal ivme ve momentum niceliklerinin türetilmesi konusunda Chou (1992) tarafından yapılan çalışma dikkat çekicidir.

Kuaterniyonlar teorisi zaman içerisinde kendisini yenileyerek çeşitlenmiştir. Diğer bir deyişle yeni kuaterniyon türleri tanımlanmıştır. Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanan kuaterniyonların baz elemanları imajiner, bileşenleri ise reel sayılar olduğu için bu ilk tür, "*reel kuaterniyonlar*" şeklinde adlandırılmış; ardından bileşenleri kompleks sayı olan kuaterniyonlara "*kompleks kuaterniyonlar*" veya "*bikuaterniyonlar*", bileşenleri dual sayılar olan kuaterniyon çeşidine de "*dual kuaterniyonlar*" adı verilmiştir.

1.3. Kapsam ve Önem

Bu çalışmada; literatürde yer alan "reel ve kompleks interval sayı", "reel ve kompleks interval vektör" ve "reel ve kompleks interval matris" kavramlarının genişlemeleri olan "kuaterniyon interval sayı", "kuaterniyon interval vektör" ve "kuaterniyon interval matris" kavramları tanımlanmaktadır. Kuaterniyon intervallerin matris temsilleri sunulmakta ve sunulan temsili matrislerin determinantları, normları, özdeğerleri, izleri ve tersleri hesaplanmaktadır. Ayrıca kuaterniyon intervallerin toplamı, çarpımı, doğrusal bileşimleri ve diğer bazı cebirsel hesaplamaları temsili matris ile hesaplanmaktadır. $\mathbf{R}([A])$, $[A]$ intervalinin temsili matrisi olmak üzere, $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sisteminden $[x]=\mathbf{R}([A])[x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix}$ reel sistemi tanımlanmakta ve bu sistem dikkate alınarak, kuaterniyon interval sistemin çözümünün varlığı kontrol edilmekte ve sistemin çözüm vektörüne ulaşılmaktadır. Dahası

$[x]^{k+1}=[A][x]^k+[b], k=0,1,...$ kuaterniyon interval iteratif sistemin yakınsaklığını sağlayan $[A]$'nın yakınsaklığı ile $\mathbf{R}([A])$'nın yakınsaklığı arasında bağlar kuran kriterler verilmekte ve böylece $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sisteminin çözümü için bir metod olarak kullanılabilecek $[x]^{k+1}=[A][x]^k+[b], k=0,1,...$ iteratif denklemin yakınsaklığının incelenmesi $\mathbf{R}([A])$ reel matrisi üzerinden yapılmaktadır.

Matematiksel modellemelerin çoğu $Ax=b$ formunda denklem sistemleridir. Bu tezde; $[A][x]=[b]$ kuaterniyon interval sistemin reel interval sisteme indirgenmesi ve indirgenen reel interval sistem üzerinden kuaterniyon interval sistemin çözümünün varlığının kontrolü ve de çözümün elde edilmesi çalışması büyük önem teşkil etmektedir.

Çalışmayı önemli kılan bir diğer neden ise; $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sisteminin çözümüne

$$[x]^{k+1}=[A][x]^k+[b], k=0,1,...$$

iteratif sistemden ulaşmanın tercih edilebileceği düşüncesinin göz önüne alınması ve de iteratif sistemin yakınsaklığını belirleyen $[A]$ kuaterniyon interval matrisinin yakınsaklığı için kriterler sunulmasıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Sayısal hesaplamalarda intervallerin kullanılmasındaki temel amaç; bilimsel problemin çözümünün elde edilmesi sırasında ortaya çıkan ve gittikçe artan tüm hatalar için bir üst sınır ve bir alt sınır sağlamak ve sonrasında problemi sonuç aralığına göre değerlendirmektir. Problemin çözümünü içeren en uygun aralığı bulma problemi birçok çalışmaya konu olmuştur (Hansen E., 1997; Hansen ve Walster, 2004).

1959 da interval aritmetik kavramının, hassas hesaplamaya gerek duyulan bilimsel çalışmalar üzerine yapacağı etkilerine değinilmiş ve interval aritmetiğin bilgisayar ile hesaplamalar üzerine nasıl uygulanabileceği hakkında bir rapor sunulmuştur (Moore, 1959). Ayrıca 1959'da, rasyonel fonksiyonların ve onların integrallerinin görüntüsünün interval hesaplamalarla sınırlanabileceği bilgisine varılmıştır. Moore ve ark. (1960) ilk defa "interval değerli fonksiyonlar", "interval kasılmalar", "interval sayılar için metrik topoloji", "interval integraller" kavramlarından bahsederek, interval aritmetiğin çalışma alanı teorik ve uygulamalı interval aritmetik olarak değerlendirilmeye başlanmıştır (Moore ve ark., 1960). Fiziksel problemlerin matematiksel modellemesi olarak bilinen diferensiyel denklemlerin çözümlerinde gerek duyulan rasyonel fonksiyonlar ve onların integrallerinin görüntüleri intervallerle ifade edilebilmektedir (Moore ve ark., 1960). İnterval analizi, fonksiyonların Taylor açılımlarındaki kalan terimi sınırlama problemlerinde de uygulanmıştır (Reiter, 1965). Hansen (1997) çalışmasında, $f(x)$ fonksiyonunun aralık genişlemesi olan $F(X)$ 'in uç noktalarının keskiliğini incelenmiş ve $f(x)$ 'in monotonluğu ile $F(X)$ 'in uç noktalarının keskiliği arasındaki ilişkiye değinmiştir. İnterval sayılar üzerinde, hesaplamalarda daha keskin sonuçlar veren yeni aritmetik işlemler tanımlanmış, bu işlemlerden yararlanılarak interval matrislerin bazı aritmetik özellikleri verilmiş ve interval lineer denklem sistemlerinin çözümleri incelenmiştir (Ganesan, 2007; Neumaier, 1990).

1960'ı takip eden süreçte, kompleks intervalller, interval matrisler, interval vektörler, interval denklem sistemleri vb. terimler de literatüre girmiştir.

Rohn (1993) bir interval matrisin tersinin, interval matristen elde edilen tüm reel matrislerin terslerini içeren en dar interval matris olarak tanımlamış, bu matris için hesaplamalar üzerine teorik ve pratik sonuçlar elde etmiştir.

n bilinmeyen ve n denklemli reel interval denklem sistemlerinin çözümleri sınırlandırmak için teori ve metotlar geliştirilmiştir(Rohn, 1989).

$[x]=[A][x]+[b]$ formundaki interval lineer denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı için gerekli ve yeterli kriterler verilmiştir. Ayrıca $[A]$ kompleks intervalinin kuvvetlerinin yakınsaklığı ve $[A]$'nın temsili matrisinin indirgenemezliği incelenmiştir (Arndt ve Mayer, 2004; 2005; Arndt, 2007).

Kuaterniyonlar yerdeğiştirme, hız, kuvvet vb. gibi klasik mekaniğe ilişkin günlük hayatımızda çok sık kullandığımız fiziksel niceliklerin temsilinde kullanılmıştır (Özdaş ve Özdaş, 1989; Özdaş, 1995). Robotik sistemlerin temsiline ilişkin çalışmalarda kuaterniyonlar adeta yeniden keşfedilmiştir (Funda ve Richard, 1990; Tanışlı, 1995).

Kuaterniyonların kendisine rahatlıkla yer bulduğu uygulama alanlarından birisi de kuantum mekaniğinin incelenmesidir. Kompleks bileşenleri içermeleri nedeniyle kuantum mekaniğinde çok kullanılan dalga fonksiyonları ve operatörlerini temsil etmede kullanılmaktadır (Gough, 1984; Finkelstein ve ark., 1959). Schrödinger ve Dirac denklemlerinin ifade edilmesinde kuaterniyonların kullanımı dikkat çekicidir (Adler, 1994).

Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin 2 bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Ward (1997) 3- ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında dönme matrislerini, reel kuaterniyonları kullanarak vermiştir. Ayrıca, kuaterniyonların matris formlarını ifade etmiştir.

Kula (2003) split kuaterniyonları incelemiş ve Hamilton operatörlerini ve özelliklerini vermiştir. Ayrıca Minkowski-3 uzayında vida hareketini tanımlamıştır.

Grob ve ark. (2001) çalışmalarında bir kuaterniyonun 4-boyutlu vektör temsilini ve matris vektör çarpımını kullanarak temel matris adını verdiği temsili matrisini elde etmişler ve bu temel matrisin özdeğer ve özvektörlerini incelemişlerdir. Ayrıca bir kuaterniyonun kuvveti ve kuaterniyon denklemleri içinde incelemelerde bulunmuşlardır.

Zhang (1997)'ın çalışması, kuaterniyonlar ve kuatreniyon matrislerinin detaylı bir şekilde incelendiği önemli bir çalışmadır. Bu çalışmada matris cebrini kullanarak, kuaterniyonlar için bilinen sonuçların farklı ispatlarını vermiş ve kompleks matrislerin kuaterniyon matrisler ile olan benzerliğine değinmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde; “reel ve kompleks interval sayı”, “reel ve kompleks interval vektör ” ve “reel ve kompleks interval matris” kavramları ile “reel kuaterniyon” kavramı tanımlanıp kuaterniyon ve interval kavramlarının birleştirilmesiyle “*kuaterniyon interval sayı”, “kuaterniyon interval vektör” ve “kuaterniyon interval matris”* olarak isimlendirilen yeni kavramlar verilmekte ve çalışmanın özgün sonuçları sunulmaktadır.

3.1. MATERYAL

3.1.1. Sayısal Hatalar

Sayısal analizin amacı, sayısal problemleri basit aritmetik işlemler kullanarak çözmek, verilen verilerden sayısal sonuçlar elde etme metodları geliştirmek ve değerlendirmektir.

Doğaldır ki, problem girdilerinin çoğu zaman kesin veriler olmaması (verilerin deneysel girdiler olması) ve hesaplayıcıların kapasitelerinin sınırlı olmasından kaynaklanan gittikçe artan hatalar, problemin sonuca göre değerlendirilmesi esnasında yanıltan yorumlara yol açar.

Bu sebepten, sayısal analiz çoğu zaman, analitik olarak çözümleri çok zor veya imkansız olan matematik problemlerini *belirli hata aralıklarında* çözümleme ve çözümü mevcut kriterlere göre değerlendirme sürecini takip etmektedir.

Problem çözüm sürecinin sağlıklı bir şekilde takip edilmesi ve sonucun doğru bir şekilde yorumlanması açısından hata türlerinin ve de değerlendirilme ölçütlerinin iyi kavranması gerekmektedir.

Genel olarak hatalar üç sınıfta incelenebilir:

- ✓ Veri hataları

- Girdi bilgilerinden kaynaklanan hatalar
- Bilgisayarda kullanılan yazılımlardan kaynaklanan hatalar

✓ Yuvarlama hataları

✓ Kesme hataları

3.1.1.1. Veri Hataları

Ölçümlerden elde edilen verilerden ve ondalıklı sayıların basamak sayılarındaki sınırlamadan kaynaklanan hatalardır.

Bir deneyde ölçülen veya gözlemlenen değer belli bir hassasiyete sahiptir. Yani gözlemlenen değer noktadan sonra dört basamak ise beşinci basamak için birşey söylenemez. Bu şekilde gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algoritmada kullanılacağı düşünülürse her bir işlemden sonra sonucun daha az doğru olduğu kanısına varabiliriz.

Ya da ondalık haneleri sonsuza uzanan, π=3.141592653589793... ve √2=1.1414128... gibi sayılar, bilgisayar hesaplamalarında hesaplayıcının kapasitesi sonlu hale getirilerek ifade edilir. Yani, hesaplamalarda hiçbir zaman sayıların tam değerleri kullanılmayacaktır. Bu tür hatalar, birer veri hatasıdır.

3.1.1.2. Kesme Hataları

Problemlerin matematiksel modellemeleri esnasında karşılaşılan fonksiyonların Taylor seri açılımları ile birer polinom olarak ifade edilmeleri ve problemin çözüm sürecinde fonksiyonların seri temsillerinin kullanılması uygulamalı matematikte sık başvurulan bir yoldur.

Taylor açılımına göre bir f fonksiyonu ve onun ilk $n+1$ aralığındaki türevleri x_{i+1} ve x_i aralığında sürekli ise, x_{i+1} deki fonksiyonun değeri, $h = x_{i+1} - x_i$ olarak alındığında,

$$f\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_i\right)+f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^n\left(x_i\right)}{n!}h^n+R_n$$

formülü ile bulunur.

Taylor serisinde n inci terime kadar alınan toplamda R_n kesme hatasını verir. Yani,

$$R_n=\frac{f^{n+1}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}h^{n+1},\ x_i\leq\xi\leq x_{i+1}$$

dir. Bu durumda R_n ’nin değeri tam olarak bulunamasa da adım uzunluğunun h^{n+1} ile doğru orantılı olduğu görülmektedir. Bu ise kesme hatasını azaltmanın adım uzunluğunu küçültmekle mümkün olacağını gösterir.

Temsili serinin sonsuz terimli olması sebebi ile de bir noktadan kesilmesi gerektiği açıktır. Sonsuz terimli bir serinin bir yerden kesilerek kalan terimlerin hesaplanması ile oluşan hatalardır.

Örnek 3.1.1. e^x için Maclaurin serisi

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

şeklinde verilir. Bu seri sonsuz tane terime sahiptir. Bu seriyi kullanarak e^x ’i hesaplamak için sadece terimlerinin sonlu sayısını kullananbiliriz. Örneğin ilk üç terimi kullanarak

$$e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2!}$$

şeklinde bir yaklaşım elde ederiz. Böyle bir yaklaşım için kesme hatası,

$$\begin{aligned}KesmeHatası&=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\\&=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\end{aligned}$$

olur.

3.1.1.3. Yuvarlama Hataları

Bilgisayarlar fiziksel yapılarından dolayı sayıların sadce bir kısmını belleklerinde saklayabilirler. Tam ve kesirli sayılar belleklerde kelime yapısında tutulurlar. Tam sayılar bir kelimeye yerleşirken kesirli sayılar en az iki kelimeye yerleşirler. Kelime yapısı 1 byte (16 bit) olan bilgisayarlarda en küçük sayı -32767, en büyük sayı ise +32768 dir. Bu sayılardan daha küçük yada daha büyük olanlar kesirli sayı olarak mb^e formatında bulunurlar. Burada m mantis, b taban ve e üsttür. Mantis $0 \le m \le 1$ aralığındadır. Mantis kısmında rasyonalize halinde saklanan sayılar özellikle iterasyonla yapılan işlemlerde yuvarlatma hatalarına sebep olurlar. Bu hataları azaltmak için programlamalarda mantis kısmının hassasiyetini iki kat artıran çift duyarlıklı değişkenler kullanılır.

Ayrıca kesirli sayıların işlemlerinde atma ve yuvarlatma kullanılır. Duyarlılığı fazla olan günümüz bilgisayarlarında atma yöntemi tercih edilmektedir; zira yuvarlatma için harcanan zaman çok fazla olmaktadır.

Örnek 3.1.2. 6.7894856 gibi bir sayının 7 hanesi kullanılacaksa yuvarlatmada 6.789486 olurken atmada 6.789485 olur.

3.1.2. Reel ve Kompleks İntervaller

Bu bölümde; “reel ve kompleks interval” kavramlarının tanımları verilecek, bu kavramlar için tanımlanan aritmetik işlemlere değinilecek ayrıca reel ve kompleks intervallerin vektör ve matris temsilleri sunulacaktır.

3.1.2.1. Reel İntervaller ve Reel İnterval Aritmetik

Tanım 3.1.1. $\underline{X} \le \overline{X}$ olacak şekilde, $\underline{X}$ ve $\overline{X}$ reel sayıları arasındaki sayılardan oluşan kümeye *reel interval* denir ve

$$X=\left[\underline{X},\overline{X}\right]=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underline{X}\leq x\leq\overline{X}\right\}$$

ile ifade edilir.

Reel intervallerden oluşan kümeye, *reel intervaller kümesi* denir ve

$$I(\mathbb{R})=\left\{\left[\underline{X},\overline{X}\right]:\underline{X},\overline{X}\in\mathbb{R},\underline{X}\leq\overline{X}\right\}$$

şeklinde ifade edilir.

$\underline{X}=\overline{X}$ olması halinde, $\left[\underline{X},\overline{X}\right]$ intervalinin bir reel sayı olacağı açıktır. Bu şekildeki intervale, *dejenere interval* denir.

Örnek 3.1.3. -1 ve 2 reel sayılar arasındaki reel sayılar, $[-1,2]$ intervali ile ifade edilir.

Örnek 3.1.4. 3 reel sayısı interval olarak $3=[3,3]$ ile gösterilir.

Not 3.1.1. Çalışma boyunca, X,Y ve Z sembolleri ile sırasıyla $X=\left[\underline{X},\overline{X}\right]$, $Y=\left[\underline{Y},\overline{Y}\right]$ ve $Z=\left[\underline{Z},\overline{Z}\right]$ reel aralıkları gösterilecektir.

Tanım 3.1.2. $X,Y\in I(\mathbb{R})$ intervalleri için $\underline{X}=\underline{Y}$ ve $\overline{X}=\overline{Y}$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu şekildeki aralıklara *eşit intervaller* denir.

Tanım 3.1.3. $X,Y\in I(\mathbb{R})$ *intervallerinin arakesiti*,

$$\begin{aligned}X\cap Y&=\{z\ :\ z\in X\ \text{ ve } z\in Y\}\\&=\left[\max\{\underline{X},\underline{Y}\},\min\left\{\overline{X},\overline{Y}\right\}\right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.5. $X=[0,2]$ ve $Y=[-1,1]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin arakesiti,

$$\begin{aligned}X\cap Y&=\left[\max\{0,-1\},\min\{2,1\}\right]\\&=[0,1]\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.6. $X=[2,4]$ ve $Y=[-1,1]$ intervallerinin arakesiti ise,

$$X\cap Y=\varnothing$$

dir.

Tanım 3.1.4. $X, Y \in I(\mathbb{R})$ *intervallerinin birleşimi*,

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{z \ : \ z \in X \ \text{ veya } z \in Y\} \\ &= \left[\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.7. $X = [0,2]$ ve $Y = [-1,1]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin birleşimi,

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \left[\min\{0,-1\}, \max\{2,1\}\right] \\ &= [-1,2]. \end{aligned}$$

Tanım 3.1.5. $X, Y \in I(\mathbb{R})$ *intervallerinin hull'u*; X ve Y intervallerini içeren en küçük interval olarak tanımlanır. Yani

$$X \underline{\cup} Y = \left[\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right]$$

dır.

Not 3.1.2. İki intervalin birleşimi her zaman bir interval olarak ifade edilemez. Ancak iki intervalin hull'u genelde bir interval olarak yazılır. Bununla birlikte, herhangi $X, Y \in I(\mathbb{R})$ intervalleri için;

$$X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y$$

ifadesi mevcuttur.

Örnek 3.1.8. $X = [-1,0]$ ve $Y = [1,2]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin arakesiti boş küme olduğundan birleşimleri bir interval olarak ifade edilemez. Ancak, $X \underline{\cup} Y = [-1,2]$ dir.

Tanım 3.1.6. Bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin infimumu* intervalin sol uç notasıdır ve

$$\inf(X) = \underline{X}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.7. Bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin supremumu* intervalin sağ uç noktasıdır ve

$$\sup(X) = \overline{X}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.8. Bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin genişliği* uç noktaları arasındaki fark olarak tanımlanır. Yani,

$$wid(X) = \overline{X} - \underline{X}$$

dir.

Eğer X 'in genişliği sıfır ise ($\overline{X} = \underline{X}$), aralık *dejenere* yada *ince interval* olarak, $\underline{X} < \overline{X}$ ise, *kalın interval* olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.9. $X = [-1, 4] \in I(\mathbb{R})$ intervalinin genişliği

$$wid(X) = 4 - (-1) = 5$$

olur ki verilen interval kalın interval olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.9. Bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin orta noktası*,

$$mid(X) = \frac{\overline{X} + \underline{X}}{2}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.10. $X = [-1, 4] \in I(\mathbb{R})$ intervalinin orta noktası

$$mid(X) = \frac{4 + (-1)}{2} = \frac{3}{2}$$

dır.

Tanım 3.1.10. Bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin yarıçapı*; orta noktasından uç noktalarına olan mesafe olarak tanımlanır. Yani,

$$rad(X) = \frac{\overline{X} - \underline{X}}{2}$$

dir.

Örnek 3.1.11. $X = [-1, 4] \in I(\mathbb{R})$ intervalinin yarıçapı,

$$rad(X) = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

dir.

Tanım 3.1.9 ve Tanım 3.1.10'u kullanarak aşağıdaki tanımlamayı yazabiliriz.

$$X = mid(X) + \left[-rad(X), rad(X)\right]$$

Tanım 3.1.11. Bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin mutlak değeri* yada *büyüklüğü*,

$$|X| = \max\left(\left|\overline{X}\right|, \left|\underline{X}\right|\right)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.12. $X, Y \in I(\mathbb{R})$ *intervallerinin toplamı*,

$$\begin{aligned} X + Y &= \left\{x \in \mathbb{R} :\ \underline{X} \le x \le \overline{X}\right\} + \left\{y \in \mathbb{R} :\ \underline{Y} \le y \le \overline{Y}\right\} \\ &= \left\{x + y\ :\ x \in X, y \in Y\right\} \\ &= \left[\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.12. $X = [0,2]$ ve $Y = [-1,1]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin toplamı,

$$\begin{aligned} X + Y &= [0-1, 2+1] \\ &= [-1, 3] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.13. $X, Y \in I(\mathbb{R})$ *intervallerinin farkı*,

$$\begin{aligned} X - Y &= \left\{x \in \mathrm{R} : \underline{X} \le x \le \overline{X}\right\} - \left\{y \in \mathrm{R} : \underline{Y} \le y \le \overline{Y}\right\} \\ &= \left\{x - y : x \in X, y \in Y\right\} \\ &= \left[\underline{X} - \overline{Y}, \overline{X} - \underline{Y}\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.13. $X = [-1,0]$ ve $Y = [1,2]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin farkı,

$$X - Y = [-3, -1]$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.14. $S=\left\{\underline{X}.\underline{Y},\overline{X}.\underline{Y},\underline{X}.\overline{Y},\overline{X}.\overline{Y}\right\}$ olmak üzere, $X,Y\in I(\mathbb{R})$ *intervallerinin çarpımı,*

$$X.Y=\left[\min S,\max S\right]$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.1.14. $X=\left[-1,0\right]$ ve $Y=\left[1,2\right]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin çarpımı,

$$S=\left\{-1.1,-1.2,0.1,0.2\right\}=\left\{-1,-2,0\right\}$$

olmak üzere

$$X.Y=\left[-2,0\right]$$

dır.

Görülmektedir ki iki intervalin çarpımının uç noktalarını; çarpım kümesi olan S 'nin minumum ve maksimum değerleri oluşturmaktadır. Aşağıdaki tablo, X ve Y intervallerinin çarpım aralığını ($X.Y=\left[\min S,\max S\right]$) belirlemede S 'nin minumum ve maksimum değerlerini vermektedir.

Durumlar	$\min S$	$\max S$
$0\le\underline{X}$ ve $0\le\underline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$	$\overline{X}.\overline{Y}$
$\underline{X}<0<\overline{X}$ ve $0\le\underline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$	$\overline{X}.\overline{Y}$
$\overline{X}\le 0$ ve $0\le\underline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$	$\overline{X}.\underline{Y}$
$0\le\underline{X}$ ve $\underline{Y}<0<\overline{Y}$	$\overline{X}.\underline{Y}$	$\overline{X}.\overline{Y}$
$\overline{X}\le 0$ve $\underline{Y}<0<\overline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$
$0\le\overline{X}$ ve $\overline{Y}\le 0$	$\overline{X}.\underline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$
$\underline{X}<0<\overline{X}$ ve $\overline{Y}\le 0$	$\overline{X}.\underline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$
$\overline{X}\le 0$ ve $\underline{Y}\le 0$	$\overline{X.Y}$	$\underline{X.Y}$
$\underline{X}<0<\overline{X}$ ve $\underline{Y}<0<\overline{Y}$	$\min\left\{\underline{X}.\overline{Y},\overline{X}.\underline{Y}\right\}$	$\max\left\{\underline{X.Y},\overline{X.Y}\right\}$

(3.1)

Tanım 3.1.15. $0 \le n \in \mathbb{Z}$ için, bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin* n*-inci kuvveti,*

$$\left[\underline{X},\overline{X}\right]^n = \begin{cases} [1,1] & n=0 \\ \left[\overline{X}^n,\underline{X}^n\right], & \overline{X}<0 \text{ ve } n \text{ çift} \\ \left[\underline{X}^n,\overline{X}^n\right], & \underline{X}>0 \text{ veya } n \text{ tek} \\ \left[0,\max\left\{\underline{X}^n,\overline{X}^n\right\}\right], & \underline{X}<0<\overline{X} \text{ ve } n>0 \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 3.1.3. Özel bir durum olarak bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin karesi* ile $X.X$ aynı değildir.

Örnek 3.1.15. $[-1,1]^2 = [0,1]$ iken $[-1,1].[-1,1] = [-1,1]$ dir.

Tanım 3.1.16. $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı ile $X \in I(\mathbb{R})$ intervalinin çarpımı,

$$\alpha X = \begin{cases} \left[\alpha.\underline{X},\alpha.\overline{X}\right] & \alpha \ge 0 \\ \left[\alpha.\overline{X},\alpha.\underline{X}\right] & \alpha < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.17. $X,Y \in I(\mathbb{R})$ $(0 \notin Y)$ iki *intervalinin bölümü yani,* X/Y*,*

$$1/Y = \{1/y \,:\, y \in Y\} = \left[1/\overline{Y}, 1/\underline{Y}\,\right]$$

ifadesi kullanılarak

$$X/Y = X.(1/Y)$$

çarpımı ile elde edilir.

Örnek 3.1.16. $X = [1,2]$ ve $Y = [-5,-3]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin bölümü,

$$X/Y = [1,2].(1/[-5,-3]) = [-2/3,-1/5]$$

dır.

Eğer $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$ ise bölme işlemi,

$$
\begin{aligned}
X/Y &= \left[\underline{X},\overline{X}\right]/\left[\underline{Y},\overline{Y}\right] \\
&= \left[\underline{X},\overline{X}\right]/\left[\underline{Y},0^{-}\right] \cup \left[\underline{X},\overline{X}\right]/\left[0^{+},\overline{Y}\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde yapılır.

Örnek 3.1.17. $X=[1,2]$ ve $Y=[-1,1]$ intervalleri verilsin. Bu iki intervalin bölümü,

$$
\begin{aligned}
X/Y &= [1,2]/[-1,1] \\
&= [1,2]/\left[-1,0^{-}\right] \cup [1,2]/\left[0^{+},1\right] \\
&= (-\infty,-1] \cup [1,\infty)
\end{aligned}
$$

dır.

Not 3.1.4. $X,Y \in I(\mathbb{R})$ iki intervali için $Y.(X/Y)=X$ olarak ifade edilemez.

Örnek 3.1.18. $X=[1,2]$ ve $Y=[-5,-3]$ intervalleri alınsın. O taktirde,

$$
Y.(X/Y) = [3/5, 10/3] \neq [1,2]
$$

olduğu açıktır.

Tanım 3.1.18. $X,Y \in I(\mathbb{R})$ gibi herhangi iki *intervalin toplama ve çarpma işlemine göre değişme özelliği,*

$$
X+Y = Y+X, \quad XY = YX,
$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.19. $X,Y,Z \in I(\mathbb{R})$ gibi herhangi üç *intervalinin toplama ve çarpma işlemine göre birleşme özelliği ise*

$$
X+(Y+Z) = (X+Y)+Z, \quad X(YZ) = (XY)Z,
$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.20. *İnterval aritmetiğinde toplama ve çarpma işlemine göre birim eleman* 0 ve 1 dejenere intervalleridir. Yani herhangi bir $X \in I(\mathbb{R})$ intervali için,

$$
\begin{aligned}
0+X &= X+0 = X \\
1.X &= X.1 = X \\
0.X &= X.0 = 0
\end{aligned}
$$

dır.

Tanım 3.1.21. İnterval aritmetiğinde herhangi bir $X \in I(\mathbb{R})$ *intervalinin toplama işlemine göre tersi* $-X$ intervali değildir. Açıkça ifade edilirse

$$X+(-X)=\left[\underline{X},\overline{X}\right]+\left[-\overline{X},-\underline{X}\right]=\left[\underline{X}-\overline{X},\overline{X}-\underline{X}\right]$$

dir. Ancak burada $\underline{X}=\overline{X}$ olduğu zaman $[0,0]$ eşitliği çıkar.

Not 3.1.5. Herhangi bir $X \in I(\mathbb{R})$ intervalinin çarpma işlemine göre tersi, $1/X$ değildir. Gerçekten, $\underline{X}>0$ veya $\overline{X}<0$ durumları için,

$$X.\frac{1}{X}=\begin{cases}\left[\underline{X}/\overline{X},\overline{X}/\underline{X}\right], & \underline{X}>0 \\ \left[\overline{X}/\underline{X},\underline{X}/\overline{X}\right], & \overline{X}<0\end{cases}$$

yazılır ki, $X.\dfrac{1}{X}=1$ olması X intervalinin dejenere bir interval olması ile mümkün olacağı sonucuna ulaşılır.

Not 3.1.6. İntervaller için tanımlanan çarpım işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği her zaman geçerli değildir ve bu durum, $X,Y,Z \in I(\mathbb{R})$ intervalleri için

$$X(Y+Z) \subseteq XY+XZ$$

bağıntısı ile verilir. $X(Y+Z)$ ve $XY+XZ$ intervallerinin eşitliği aşağıda verilen durumlarda sağlandığı görülmektedir.

- Her $x \in \mathbb{R}$ reel sayısı ve herhangi $Y,Z \in I(\mathbb{R})$ reel intervalleri için

$$x(Y+Z)=xY+xZ\,,$$

- Herhangi bir $X,Y,Z \in I(\mathbb{R})$ intervalleri için

$$X\left(Y+Z\right)=XY+XZ,\ YZ>0$$

dır.

Örnek 3.1.19. $X=\left[1,2\right]$, $Y=\left[1,1\right]$ ve $Z=\left[-1,-1\right]$ intervalleri alınsın. O takdirde,

$$\begin{aligned} X\left(Y+Z\right) &= \left[1,2\right]\left(\left[1,1\right]+\left[-1,-1\right]\right) \\ &= \left[0,0\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} XY+XZ &= \left[1,2\right]\left[1,1\right]+\left[1,2\right]\left[-1,-1\right] \\ &= \left[-1,1\right] \end{aligned}$$

3.1.2.2. Reel İnterval Matrisler ve Aritmetiği

Tanım 3.1.22. $\underline{x}_i$ **,** $\overline{x}_i\in\mathbb{R}$, $1\le i\le n$, skalerleri için

$$x=([x_i])_i^T=\left(\left[\underline{x}_i,\overline{x}_i\right]\right)_i^T=\left(\left[\underline{x}_1,\overline{x}_1\right],\left[\underline{x}_2,\overline{x}_2\right],\ldots,\left[\underline{x}_n,\overline{x}_n\right]\right)^T$$

formundaki vektörlere, $n\times1$ tipinde *reel interval vektörler* denir.

Ayrıca $x=([\underline{x}_i,\overline{x}_i])_i^T$ reel interval vektörü, $\underline{x}=(\underline{x}_i)_i^T$ ve $\overline{x}=(\overline{x}_i)_i^T$ reel vektörleri için

$$x=\left\{\tilde{x}\in\mathbb{R}^n : \underline{x}\le\tilde{x}\le\overline{x},\underline{x},\overline{x}\in\mathbb{R}^n\right\}$$

ile tanımlanır ve $x=\left[\underline{x},\overline{x}\right]$ şeklinde gösterilir.

Reel interval vektörler kümesi ise $I\left(\mathbb{R}^n\right)$sembolü ile temsil edilir.

Örnek 3.1.20. $\underline{x}=\left(-1,1\right)^T$ ve $\overline{x}=\left(0,2\right)^T$ olmak üzere, $x=\left(\left[-1,0\right],\left[1,2\right]\right)^T$ reel interval vektörü $x=\left\{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{2\times1} : \underline{x}\le\tilde{x}\le\overline{x}\right\}$ ile ifade edilir ki, x’in bir elemanı $\tilde{x}=\left(-1/2,3/2\right)^T\in x$ dir.

Tanım 3.1.23. $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, skalerleri için $A = ([a_{ij}])_{ij} = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij}$ formundaki matrislere, $m \times n$ tipinde *reel interval matrisler* denir.

Ayrıca $A = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij}$ reel interval matrisi, $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})_{ij}$ ve $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{ij}$ reel matrisleri için

$$A = \left\{ \tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{A} \le \tilde{A} \le \overline{A}, \underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \right\}$$

ile tanımlanır ve $A = \left[\underline{A}, \overline{A} \right]$ şeklinde gösterilir.

Reel interval matrisler kümesi ise $I\left(\mathbb{R}^{m \times n}\right)$ sembolü ile temsil edilir.

Örnek 3.1.21. $\underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ve $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere, $A = \begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}$ reel interval matrisi $A = \left\{ \tilde{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \underline{A} \le \tilde{A} \le \overline{A} \right\}$ ile ifade edilir ki, A'nın bir elemanı $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \in A$ dır.

Tanım 3.1.24. Bir $A = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} \in I\left(\mathbb{R}^{m \times n}\right)$ *interval matrisinin infimum matrisi*,

$$\inf(A) = (\inf[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} = \underline{A}$$

dir.

Örnek 3.1.22. $A = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-2,1] & [0,2] \end{pmatrix}$ reel interval matrisinin infimum matrisi,

$$\inf(A) = \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

Tanım 3.1.25. Bir $A = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} \in I\left(\mathbb{R}^{m \times n}\right)$ *interval matrisinin supremum matrisi* (veya supremumu),

$$\sup(A) = (\sup[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} = \overline{A}$$

dir.

Örnek 3.1.23. $A = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-2,1] & [0,2] \end{pmatrix}$ reel interval matrisinin supremum matrisi,

$$\sup(A) = \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.26. $A = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} \in I\left(\mathbb{R}^{m \times n}\right)$ reel interval matrisinin bileşenlerinin orta noktalarının oluşturduğu reel matrise, *A matrisinin orta matrisi* denir ve

$$\hat{A} = mid(A) = ([\frac{\underline{a}_{ij} + \overline{a}_{ij}}{2}])_{ij}$$

ile verilir.

Örnek 3.1.24. $A = \begin{pmatrix} [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [0,0] \\ [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] \\ [0,0] & [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] \end{pmatrix}$ reel interval matrisinin bileşenlerinin orta noktalarının oluşturduğu reel matris,

$$\hat{A} = mid(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.27. $A = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} \in I\left(\mathbb{R}^{m \times n}\right)$ reel interval matrisinin bileşenlerinin yarıçaplarının oluşturduğu reel matrise, A matrisinin yarıçapı denir ve

$$rad(A) = ([\frac{\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}}{2}])_{ij}$$

ile tanımlanır.

Eğer $A \in I\left(\mathbb{R}^{m \times n}\right)$ interval matrisi için $rad\left(A\right) = 0$ ise matris ince, $rad\left(A\right) > 0$ ise matris kalın olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.25. $A=\begin{pmatrix}[2,4] & [-1,1]\\ [-2,1] & [0,2]\end{pmatrix}$ reel interval matrisinin yarıçap matrisi

$$rad(A)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.28. Bir $A=([\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}])_{ij}\in I\left(\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ *interval matrisin mutlak değeri yada büyüklüğü,*

$$|A|=(\max\{|\underline{a}_{ij}|,|\overline{a}_{ij}|\})_{ij}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.26. $A=\begin{pmatrix}[2,4] & [-1,1]\\ [-2,1] & [0,2]\end{pmatrix}$ reel interval matrisinin mutlak değeri

$$|A|=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi ise interval matrisler kümesindeki aritmetik işlemleri verelim.

Tanım 3.1.29. $A,B\in I\left(\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ *interval matrisleri için toplam veya fark matrisi,*

$$A\pm B=\left\{\widetilde{A}\pm\widetilde{B}:\widetilde{A}\in A,\widetilde{B}\in B\right\}$$

ile tanımlanan $A\pm B\in I\left(\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ interval matrisidir.

Tanım 3.1.30. $A\in I\left(\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ ve $B\in I\left(\mathbb{R}^{n\times p}\right)$ *interval matrislerinin çarpım matrisi,*

$$A.B=\left\{\widetilde{A}.\widetilde{B}:\widetilde{A}\in A,\widetilde{B}\in B\right\}$$

ile tanımlanan $A.B\in I\left(\mathbb{R}^{m\times p}\right)$ interval matrisidir.

Tanım 3.1.31. $A \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ *interval matrisinin bir* $\alpha \in I(\mathbb{R})$ *skaleri ile çarpımı*

$$\alpha A = \left\{ \tilde{\alpha}\tilde{A} : \tilde{\alpha} \in \alpha, \tilde{A} \in A \right\}$$

ile tanımlanan $\alpha A \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ interval matrisidir.

Tanım 3.1.32. $A \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ *interval matrisinin tersi*,

$$A^{-1} = \left\{ \tilde{A}^{-1} : \tilde{A} \in A \right\}$$

ile tanımlanan $A^{-1} \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ interval matrisidir.

Örnek 3.1.27. $A = \begin{pmatrix} 2 & [-1,0] \\ [-1,0] & 2 \end{pmatrix}$ interval matrisi verilsin. O halde,

$$A = \left\{ \tilde{A} \in A : \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -\beta & 2 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in [0,1] \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left\{ \frac{1}{4-\alpha\beta} \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in [0,1] \right\} \\ &= \begin{pmatrix} [1/2, 2/3] & [0, 1/3] \\ [0, 1/3] & [1/2, 2/3] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 3.1.1. $A, A', B, B', C \in I(\mathbb{R}^{m\times n})$ interval matrisleri için;

i. $A + B = \left[\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B} \right]$, $A - B = \left[\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B} \right]$,

ii. $A \pm B = \left\{ \tilde{A} \pm \tilde{B} : \tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B \right\}$,

iii. $A + B = B + A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$,

iv. $A' \subseteq A, B' \subseteq B \Rightarrow A' \pm B' \subseteq A \pm B$

özellikleri mevcuttur.

Önerme 3.1.2. $A, A' \in I\left(\mathbb{R}^{m\times n}\right)$, $B, B' \in I\left(\mathbb{R}^{n\times p}\right)$ ve $\alpha, \alpha' \in I(\mathbb{R})$ olsun. O taktirde;

i. $\left(AB\right)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk}$,

ii. $A' \subseteq A,\ B' \subseteq B \Rightarrow A'B' \subseteq AB$,

iii. $A\left(B + B'\right) \subseteq AB + AB'$ (Eğer $rad\left(A\right) = 0$ yada $B, B' \geq 0$ ise eşitlik mevcuttur.),

iv. $\left(A + A'\right)B \subseteq AB + AB'$ (Eğer $rad\left(B\right) = 0$ yada $A, A' \geq 0$ ise eşitlik mevcuttur.),

v. $\left(\alpha A\right)_{ik} = \alpha A_{ik}$,

vi. $\alpha' \subseteq \alpha, A' \subseteq A \Rightarrow \alpha' A' \subseteq \alpha A$,

vii. $\alpha\left(B \pm B'\right) \subseteq \alpha B \pm \alpha B'$ (Eğer $rad\left(\alpha\right) = 0$ ise eşitlik mevcuttur.)

viii. $\left(\alpha \pm \alpha'\right)B \subseteq \alpha B \pm \alpha' B$ (Eğer $rad\left(B\right) = 0$ ise eşitlik mevcuttur.),

ix. $x \in I(\mathbb{R}^{n\times 1})$ vektörü için, $A\left(\alpha x\right) \neq \alpha\left(Ax\right)$,

x. $C \in I(\mathbb{R}^{p\times r})$ matrisi için, $A\left(BC\right) = \left(AB\right)C$ eşitliği her zaman sağlanmaz. Yani, interval matrislerde, intervallerdeki çarpma işlemine göre birleşme kuralı her zaman geçerli değildir.

Aşağıdaki örnek, Önerme 3.1.2'nin ix ve x özellikleri için verilebilir.

Örnek 3.1.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ 0 & [-1,1] \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} [-1,0] \\ [1,2] \end{pmatrix}$ olsun. O taktirde,

$$\left(AB\right)C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix},$$

$$A\left(BC\right) = A\begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}$$

bulunur.

Görüldüğü gibi birleşme kuralı geçerli olmayabilir. Aynı zamanda,

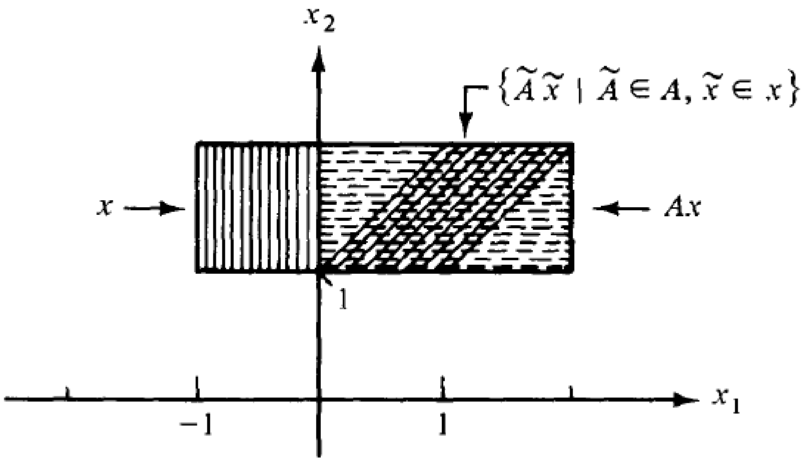
$$A([-1,1]x) = A\begin{pmatrix}[-1,1]\\ [-2,2]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[-3,3]\\ [-2,2]\end{pmatrix},$$

$$[-1,1](Ax) = [-1,1]\begin{pmatrix}[0,2]\\ [1,2]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[-2,2]\\ [-2,2]\end{pmatrix}$$

bulunur, öyleki α skaler intervalleri için $A(\alpha x) \neq \alpha(Ax)$ dir.

Dahası, $\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} \in Ax = \begin{pmatrix}[0,2]\\ [1,2]\end{pmatrix}$ dır. Fakat $\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$,

Şekil **3.1.1**'den $\tilde{A} \in A, \tilde{x} \in x$ için $\tilde{A}\tilde{x}$ 'in elemanı değildir.



Şekil 3.1.1. Ax ile $\{\tilde{A}\tilde{x} : \tilde{A} \in A, \tilde{x} \in x\}$

Buradan $Ax \neq \{\tilde{A}\tilde{x} : \tilde{A} \in A, \tilde{x} \in x\}$ yazılır.

Önerme 3.1.3. $A \in I(\mathbb{R}^{m\times n})$, $B \in I(\mathbb{R}^{n\times p})$, $C \in I(\mathbb{R}^{p\times q})$ olsun. O taktirde;

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \text{ için } A\tilde{x} = \{\tilde{A}\tilde{x} : \tilde{A} \in A\}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha A = \{\alpha\tilde{A} : \tilde{A} \in A\}$$

olmak üzere,

i. $rad(A)=0$ yada $B,C\geq 0$ ise $(AB)C\subseteq A(BC)$,

ii. $rad(C)=0$ yada $A,B\geq 0$ ise $A(BC)\subseteq(AB)C$,

iii. $rad(A)=0$ ve $rad(C)=0$ yada $A,B,C\geq 0$ ise $A(BC)=(AB)C$,

iv. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için, $A(\alpha B)=\alpha(AB)$,

eşitlikleri sağlanır.

Önerme 3.1.4. $A\in I(\mathbb{R}^{m\times n})$, $B\in I(\mathbb{R}^{n\times p})$, $x\in I(\mathbb{R}^{n})$ ve varsayalım ki $A\geq 0$ olsun. O zaman,

$$Ax=\left[\underset{\sim}{A}\underline{x},\tilde{A}\overline{x}\right];\underset{\sim}{A},\tilde{A}\in A$$

dir. Özelliklede $A\geq 0$ için;

i. $B\geq 0$ ise $AB=\left[\underline{A}\underline{B},\overline{A}\overline{B}\right]$,

ii. $0\in B$ ise $AB=\left[\overline{A}\underline{B},\overline{A}\overline{B}\right]$,

iii. $B\leq 0$ ise $AB=\left[\overline{A}\underline{B},\underline{A}\overline{B}\right]$,

iv. $rad(A)=0$ ise $AB=\left[A\underline{B},A\overline{B}\right]$,

dir.

Önerme 3.1.5. $A\in I(\mathbb{R}^{m\times n})$, $B\in I(\mathbb{R}^{n\times p})$ ve varsayalım ki $\underline{A}=0$ olsun. O taktirde,

$$AB=\left[\overline{A}\inf\{\underline{B},0\},\overline{A}\sup\{\overline{B},0\}\right]$$

dir.

3.1.2.3. Kompleks İntervaller ve Kompleks İnterval Aritmetik

Bu bölümde Alefeld ve Herzberger (1983) tarafından tanımlanan kompleks interval kavramı verilecek ve reel interval aritmetik için elde edilen sonuçlar ve özelliklerin çoğunun kompleks interval artimetik içinde sağlandığı gösterilecektir.

Tanım 3.1.33. $[x],[y]\in I(\mathbb{R})$ intervalleri ve $i=\sqrt{-1}$ kompleks sayısı için,

$$[z]=[x]+i[y]=\{z=x+iy : x\in[x], y\in[y]\}$$

formundaki sayılara kompleks interval sayıları veya kompleks intervaller denir.

$[z]=[x]+i[y]$ kompleks intervalinde, $[x]$'e $[z]$'nin reel kısmı ve $[y]$'e $[z]$'nin imajiner kısmı denir ve $Re[z]=[x]$, $\operatorname{Im}[z]=[y]$ gösterimleri kullanılır.

Tüm kompleks intervallerin kümesi ise,

$$I(\mathbb{C})=\left\{z=[x]+i[y]:[x],[y]\in I(\mathbb{R}); i=\sqrt{-1}\right\}$$

ile tanımlanır.

Bir $[z]$ kompleks intervalinin ince yada nokta intervali olabilmesi için hem reel kısmının hemde imajiner kısmının ince olması gerekir. Aksi takirde kalın olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.34. $[z_1],[z_2]\in I(\mathbb{C})$ kompleks intervalleri için $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$ ve $\operatorname{Im}(z_1)=\operatorname{Im}(z_2)$ eşitlikleri sağlanıyorsa, $[z_1]$ ve $[z_2]$ *kompleks intervallerine eşittir* denilir.

Tanım 3.1.35. $[z]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervalinin mutlak değeri,*

$$\|[z]\|=\|[z_{re}]\|+\|[z_{im}]\|$$

dir.

Örnek 3.1.29. $[z]=[0,1]+i[-2,2]$ kompleks intervallerinin mutlak değeri,

$$\begin{aligned}\|[z]\| &= \|[0,1]\|+\|[-2,2]\| \\ &= 3\end{aligned}$$

dür.

Tanım 3.1.36. $[z_1],[z_2]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervallerinin arakesiti,*

$$[z_1]\cap[z_2]=([x_1]\cap[x_2])+i([y_1]\cap[y_2])$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.30. $[z_1]=[-1,1]+i[2,3],[z_2]=[0,1]+i[-2,2]$ kompleks intervallerinin arakesiti,

$$\begin{aligned}[z_1]\cap[z_2] &= [\max\{-1,0\},\min\{1,1\}]+i[\max\{-2,2\},\min\{2,3\}] \\ &= [0,1]+i[2,2]\end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.1.37. $[z_1],[z_2]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervallerinin birleşimi,*

$$[z_1]\cup[z_2]=([x_1]\cup[x_2])+i([y_1]\cup[y_2])$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.31. $[z_1]=[-1,1]+i[2,3],[z_2]=[0,1]+i[-2,2]$ kompleks intervallerinin birleşimi,

$$\begin{aligned}[z_1]\cup[z_2] &= [\min\{-1,0\},\max\{1,1\}]+i[\min\{-2,2\},\max\{2,3\}] \\ &= [-1,1]+i[-2,3]\end{aligned}$$

dır.

Şimdi ise kompleks intervaller kümesindeki aritmetik işlemleri tanımlayalım.

Tanım 3.1.38. $[z_1],[z_2]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervallerinin toplamı,*

$$[z_1]+[z_2]=([x_1]+[x_2])+i([y_1]+[y_2])$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.32. $[z_1]=[-1,1]+i[2,3],[z_2]=[0,1]+i[-2,2]$ kompleks intervallerinin toplamı,

$$\begin{aligned}[z_1]+[z_2]&=[-1,1]+[0,1]+i([2,3]+[-2,2])\\&=[-1,2]+i[0,5]\end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.1.39. $[z_1],[z_2]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervallerinin farkı*,

$$[z_1]-[z_2]=([x_1]-[x_2])+i([y_1]-[y_2])$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.33. $[z_1]=[-1,1]+i[2,3]$, $[z_2]=[0,1]+i[-2,2]$ kompleks intervallerinin farkı,

$$\begin{aligned}[z_1]+[z_2]&=[-1,1]-[0,1]+i([2,3]-[-2,2])\\&=[-2,1]+i[0,5]\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.1.40. $[z_1]$, $[z_2]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervallerinin çarpımı*,

$$[z_1].[z_2]=([x_1].[x_2]-[y_1].[y_2])+i([x_1].[y_2]-[y_1].[x_2])$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.1.34. $[z_1]=[-1,1]+i[2,3]$, $[z_2]=[0,1]+i[-2,2]$ kompleks intervallerinin çarpımı,

$$\begin{aligned}[z_1].[z_2]&=([-1,1].[0,1]-[2,3].[-2,2])+i([-1,1].[-2,2]-[2,3].[0,1])\\&=[-7,7]+i[-5,2]\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.1.41. $0\notin[x_2]\in I(\mathbb{R})$ veya $0\notin[y_2]\in I(\mathbb{R})$ reel intervalleri için $[z_1]=[x_1]+i[y_1]$, $[z_2]=[x_2]+i[y_2]\in I(\mathbb{C})$ *kompleks intervallerinin bölümü*,

$$[z_1]/[z_2]=\left(\frac{[x_1].[x_2]+[y_1].[y_2]}{[x_2]^2+[y_2]^2}\right)+i\left(\frac{[y_1].[x_2]-[x_1].[y_2]}{[x_2]^2+[y_2]^2}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.41'de $[z_1]/[z_2]$ kompleks intervalinin reel ve imajiner kısımlarının paydalarının elemanter kare fonksiyon kullanılarak $0 \notin [x_2]^2 + [y_2]^2$ şeklinde tanımlanması, $0 \notin [x_2] \in I(\mathbb{R})$ veya $0 \notin [y_2] \in I(\mathbb{R})$ şartını sağlayan $[z_2] = [x_2] + i[y_2] \in I(\mathbb{C})$ intervalinin her zaman bölen konumunda olabileceğini garantilemektedir.

Tanımın bu şekilde verilmesinin gerekliliği aşağıdaki örnekle vurgulanmaktadır.

Örnek 3.1.35. $[z_2] = [-2,2] + i[2,3]$ olsun. O taktirde,

$$0 \notin [x_2]^2 + [y_2]^2 = [0,4] + [4,9] = [4,13]$$

elde edilir.

Eğer burada $[-2,2]$ ve $[2,3]$ intervallerinin kare fonksiyonları yerine çarpımları alınsaydı

$$[x_2][x_2] + [y_2][y_2] = [-4,4] + [4,9] = [0,13]$$

sıfırı içeren bir aralık bulunurdu ki bölme işlemi hatalı olurdu.

Kompleks intervaller kümesi çarpma ve toplama işlemlerine göre değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir. Aynı zamanda reel intervaller kümesine benzer olarak toplama ve çarpma işlemlerine göre tersleri yoktur ve dağılma kuralı genellikle sağlanmaz.

3.1.2.4. Kompleks İnterval Matrisler ve Aritmetiği

Tanım 3.1.42. $x = ([x_i])_i^T,\ y = ([y_i])_i^T \in I(\mathbb{R}^n)$ reel interval vektörleri için,

$$z = x + iy$$

formundaki vektörlere, $n \times 1$ tipinde *kompleks interval vektörler* denir.

Kompleks interval vektörler kümesi ise $I(\mathbb{C}^n)$ sembolü ile temsil edilir.

Örnek 3.1.36. $x=\left(\left[-1,2\right],0\right)^T$ ve $y=\left(0,\left[1,3\right]\right)^T$ reel interval vektörleri için, $z=\left(\left[-1,2\right],\left[1,3\right]i\right)^T$ vektörü $z=x+iy$ formunda yazılabildiğinden, *z* vektörü bir kompleks interval vektördür.

Tanım 3.1.43. $\underline{a_{ij}}$ **,** $\overline{a}_{ij}$ **,** $\underline{b_{ij}}$ ve $\overline{b}_{ij}\in\mathbb{R}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, skalerleri için

$$A=([a_{ij}]+i[b_{ij}])_{ij}=([\underline{a_{ij}},\overline{a}_{ij}])_{ij}+i([\underline{b_{ij}},\overline{b}_{ij}])_{ij}$$

formundaki matrislere, $m\times n$ tipinde *kompleks interval matrisler* denir.

Kompleks interval matrisler kümesi ise $I\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right)$ sembolü ile temsil edilir.

Örnek 3.1.37. $A_1=\begin{pmatrix}[-1,0] & [-1,1]\\ \left[0,1\right] & [-2,2]\end{pmatrix}$ ve $A_2=\begin{pmatrix}\left[-2,1\right] & \left[0,1\right]\\ [-1,1] & \left[0,1\right]\end{pmatrix}$ reel interval matrisleri için

$$A=\begin{pmatrix}[-1,0]+i\left[-2,1\right] & [-1,1]+i\left[0,1\right]\\ \left[0,1\right]+i[-1,1] & [-2,2]+i\left[0,1\right]\end{pmatrix}$$

matrisi $A=A_1+iA_2$ formunda yazılabildiğinden A matrisi bir kompleks interval matristir.

Tanım 3.1.44. $\underline{a_{ij}}$, $\overline{a}_{ij}$, $\underline{b_{ij}}$ ve $\overline{b}_{ij}\in\mathbb{R}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, skalerleri için $A=([a_{ij}]+i[b_{ij}])_{ij}=([\underline{a_{ij}},\overline{a}_{ij}])_{ij}+i([\underline{b_{ij}},\overline{b}_{ij}])_{ij}\in I\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right)$ *kompleks interval matrisinin infimum matrisi*,

$$\inf(A)=(\inf[\underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}])_{ij}+i(\inf[\underline{b_{ij}},\overline{b_{ij}}])_{ij}$$

dir.

Örnek 3.1.38. $A=\begin{pmatrix}[-1,0]+i\left[-2,1\right] & [-1,1]+i\left[0,1\right]\\ \left[0,1\right]+i[-1,1] & [-2,2]+i\left[0,1\right]\end{pmatrix}$ kompleks interval matrisinin infimum matrisi

$$\inf(A)=\begin{pmatrix}-1-2i & -1\\ -i & -2\end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.45. $\underline{a}_{ij}$, $\overline{a}_{ij}$, $\underline{b}_{ij}$ ve $\overline{b}_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, skalerleri için $A = ([a_{ij}] + i[b_{ij}])_{ij} = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} + i([\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}])_{ij} \in I(\mathbb{C}^{m \times n})$ *kompleks interval matrisinin supremum matrisi*,

$$\sup(A) = (\sup[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])_{ij} + i(\sup[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}])_{ij}$$

dir.

Örnek 3.1.39. $A = \begin{pmatrix} [-1,0] + i[-2,1] & [-1,1] + i[0,1] \\ [0,1] + i[-1,1] & [-2,2] + i[0,1] \end{pmatrix}$ kompleks interval matrisinin supremum matrisi,

$$\sup(A) = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1+i & 2+i \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.46. $A = ([a_{ij}] + i[b_{ij}])_{ij} \in I(\mathbb{C}^{m \times n})$ kompleks interval matrisinin bileşenlerinin orta noktalarının oluşturduğu kompleks matrise, *A matrisinin orta matrisi* denir ve

$$\hat{A} = mid(A) = ([\frac{\underline{a}_{ij} + \overline{a}_{ij}}{2}])_{ij} + i([\frac{\underline{b}_{ij} + \overline{b}_{ij}}{2}])_{ij}$$

ile verilir.

Örnek 3.1.40. $A = \begin{pmatrix} [-1,0] + i[-2,1] & [-1,1] + i[0,1] \\ [0,1] + i[-1,1] & [-2,2] + i[0,1] \end{pmatrix}$ kompleks interval matrisinin bileşenlerinin orta noktalarının oluşturduğu kompleks matris,

$$\hat{A} = mid(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & i\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.47. $A = ([a_{ij}] + i[b_{ij}])_{ij} \in I\left(\mathbb{C}^{m \times n}\right)$ kompleks interval matrisinin bileşenlerinin yarıçaplarının oluşturduğu kompleks matrise, A matrisinin yarıçapı denir ve

$$rad(A) = \left(\left[\frac{\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}}{2}\right]\right)_{ij} + i\left(\left[\frac{\overline{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}}{2}\right]\right)_{ij}$$

ile tanımlanır.

Eğer $A \in I\left(\mathbb{C}^{m \times n}\right)$ interval matrisi için $rad\left(A\right) = 0$ ise matris ince, $rad\left(A\right) > 0$ ise matris kalın olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.41. $A = \begin{pmatrix} [-1,0] + i[-2,1] & [-1,1] + i[0,1] \\ [0,1] + i[-1,1] & [-2,2] + i[0,1] \end{pmatrix}$ kompleks interval matrisinin yarıçap matrisi

$$rad(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{3}{2} & 1 + i\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + i & 2 + i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 3.1.48. Bir $A = ([a_{ij}] + i[b_{ij}])_{ij} \in I\left(\mathbb{C}^{m \times n}\right)$ *kompleks interval matrisinin mutlak değeri yada büyüklüğü,*

$$|A| = (\max\{|\underline{a}_{ij}|, |\overline{a}_{ij}|\})_{ij} + (\max\{|\underline{b}_{ij}|, |\overline{b}_{ij}|\})_{ij}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.42. $A = \begin{pmatrix} [-1,0] + i[-2,1] & [-1,1] + i[0,1] \\ [0,1] + i[-1,1] & [-2,2] + i[0,1] \end{pmatrix}$ kompleks interval matrisinin mutlak değeri

$$|A| = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi ise kompleks interval matrisler kümesindeki aritmetik işlemleri verelim.

Tanım 3.1.49. $A,B\in I\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right)$ *kompleks interval matrisleri için toplam veya fark matrisi,*

$$A\pm B=\left\{\widetilde{A}\pm\widetilde{B}:\widetilde{A}\in A,\widetilde{B}\in B\right\}$$

ile tanımlanan $A\pm B\in I\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right)$ interval matrisidir.

Tanım 3.1.50. $A\in I\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right)$ ve $B\in I\left(\mathbb{C}^{n\times p}\right)$ *interval matrislerinin çarpım matrisi,*

$$A.B=\left\{\widetilde{A}.\widetilde{B}:\widetilde{A}\in A,\widetilde{B}\in B\right\}$$

ile tanımlanan $A.B\in I\left(\mathbb{C}^{m\times p}\right)$ interval matrisidir.

Tanım 3.1.51. $A\in I\left(\mathbb{C}^{n\times n}\right)$ *interval matrisinin bir* $\alpha\in I\left(\mathbb{R}\right)$ *skaleri ile çarpımı*

$$\alpha A=\left\{\widetilde{\alpha}\widetilde{A}:\widetilde{\alpha}\in\alpha,\widetilde{A}\in A\right\}$$

ile tanımlanan $\alpha A\in I\left(\mathbb{C}^{n\times n}\right)$ interval matrisidir.

3.1.3. Reel ve Kompleks Kuaterniyonlar

Bu bölümde reel ve kompleks kuaterniyon kavramları tanımlanacak ve bunların vektör ve matris temsilleri sunulacaktır.

3.1.3.1. Reel Kuaterniyonlar ve Aritmetiği

Tanım 3.1. 52. $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ ve

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=k=-ji,\ jk=i=-kj,\ ki=j=-ik \tag{3.2}$$

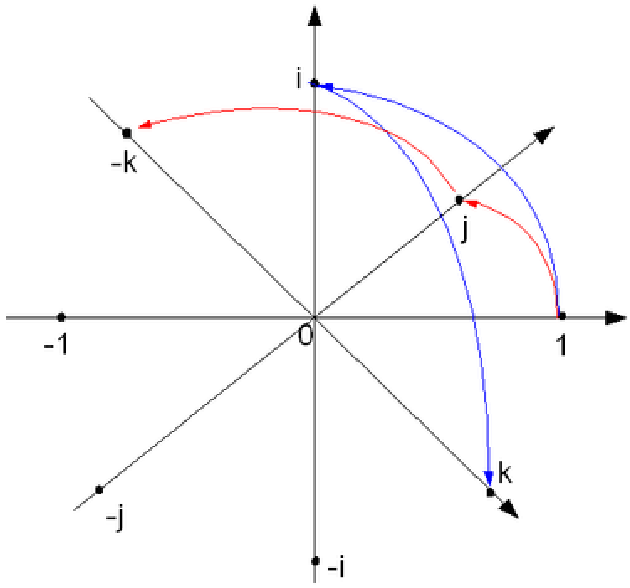
özelliğine sahip i,j,k skalerleri için $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ formundaki sayılara *reel katsayılı kuaterniyonlar* veya *reel kuaterniyonlar* denir.

Reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbf{H}[\mathbb{R}] = \{a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \ : \ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,3\}$$

ile tanımlanır.

(3.2) bağıntısı, geometrik olarak



Şekil 3.1.2. i, j, k kuaterniyon baz vektörlerinin geometrik gösterimi

şeklinde verilebilir.

Takibin kolaylığı açısından $a, b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ kuaterniyonları

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \ \text{ ve } \ b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

şeklinde kabul edilecektir.

Tanım 3.1.53. $a, b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ kuaterniyonları için

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$$

ise a, b kuaterniyonlarına *eşit kuaterniyonlar* denir.

Tanım 3.1.54. $a, b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonlarının toplamı ve farkı*,

$$a \pm b = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) i + (a_2 \pm b_2) j + (a_3 \pm b_3) k$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.55. $a,b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonlarının çarpımı*,

$$\begin{aligned} a.b = & \left(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3\right) + \left(a_1b_0 + a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3\right)i \\ & + \left(a_2b_0 + a_3b_1 + a_0b_2 - a_1b_3\right)j + \left(a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3\right)k \end{aligned}$$

veya $u = a_1i + a_2j + a_3k$, $v = b_1i + b_2j + b_3k$ olmak üzere

$$a.b = a_0b_0 - u.v + a_0.v + b_0.u + u \times v$$

şeklinde tanımlanır (Burada "." ve "$\times$" üç boyutlu vektör uzayında sırasıyla skaler ve vektörel çarpımları göstermektedir.).

Reel kuaterniyonların çarpımı işlemi aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

- İki reel kuaterniyonun çarpımı bir reel kuaterniyondur.
- Reel kuaterniyon çarpımı bileşimlidir.
- Reel kuaterniyon çarpımı toplama üzerine sağdan ve soldan dağılımlıdır.
- $a,b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ için $a.b \neq b.a$ (Reel Kuaterniyon çarpımı değişimli değildir) dir.

Tanım 3.1.56. $a \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, αa kuaterniyonu

$$\alpha a = \alpha a_0 + \alpha a_1 i + \alpha a_2 j + \alpha a_3 k \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$$

dır.

Tanım 3.1.57. $a \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonunun eşleniği*,

$$\overline{a} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$$

dir.

Önerme 3.1.6. $a,b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ kuaterniyonları için

i. $a + \overline{a} = 2a_0$,

ii. $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$,

iii. $\overline{\left(\overline{a}b\right)} = \overline{b}a$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 3.1.58. $a \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonunun normu*,

$$\|a\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

dir.

$1, i, j, k$ skalerleri normları 1 olan kuaterniyonlar olduklarından, bu kuaterniyonlara *birim kuaterniyonlar* denir.

Önerme 3.1.7. $a, b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ kuaterniyonları için

$$\|ab\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$$

dir.

Tanım 3.1.59. $0 \neq a \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonunun çarpımsal tersi*,

$$a^{-1} = \frac{\overline{a}}{\|a\|^2}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.60. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonunun vektör temsili* veya *vektörel gösterimi*

$$\mathbf{r}_a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve $a \cong \mathbf{r}_a$ ile gösterilir.

Sonuç 3.1.1. $a \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonunun eşleniğinin* $\left(\overline{a} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k\right)$ *vektör temsili* ise

$$\mathbf{r}_{\overline{a}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

dir ve $\overline{a} \cong \mathbf{r}_{\overline{a}}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.1.8. $a, b \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonlarının toplam veya farkı,* kuaterniyonların vektör temsilleri $\left(a \cong \mathbf{r}_a, b \cong \mathbf{r}_b\right)$ ile

$$a \pm b \cong \mathbf{r}_a \pm \mathbf{r}_b$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.61. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ *kuaterniyonunun matris temsili,* $\mathbf{R}_a$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 i & a_2 + a_3 i \\ -\overline{a_2 + a_3 i} & \overline{a_0 + a_1 i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ile verilir ve $\mathbf{R}_a \cong a$ ile gösterilir (Zhang, 1997).

3.1.3.2. Kompleks Kuaterniyonlar ve Aritmetiği

Tanım 3.1.62. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $a' = a'_0 + a'_1 i + a'_2 j + a'_3 k \in \mathbf{H}[\mathbb{R}]$ reel kuaterniyonları için

$$A = a + ia',\ i = \sqrt{-1} \tag{3.3}$$

formundaki kuaterniyona *kompleks kuaterniyon* denir.

(3.3)'de verilen A kompleks kuaterniyonu

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + i\left(a'_0 + a'_1 i + a'_2 j + a'_3 k\right) \\ &= \left(a_0 + ia'_0\right) + \left(a_1 + ia'_1\right) i + \left(a_2 + ia'\right) j + \left(a_3 + ia'_3\right) k \\ &= A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ki Tanım 3.1.62'nin bir başka versiyonu Tanım 3.1.63'dür.

Tanım 3.1.63. $A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$ skalerleri için, $A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ şeklindeki sayılara kompleks kuaterniyonlar denir (Boche, 1965).

Komplek kuaterniyonlar kümesi ise $\mathbf{H}[\mathbb{C}]$ ile gösterilir.

Burada $i^2 = -1$ olup, $A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$ dir. Diğer bir deyişle nasıl bileşenleri reel sayılar olan kuaterniyonlar reel kuaterniyon olarak adlandırılıyorsa, bileşenleri kompleks sayılar olan kuaterniyonlarda kompleks kuaterniyonlar olarak adlandırılır.

Reel ve kompleks kuaterniyonların cebirsel yapıları benzerlik göstermektedir.

Tanım 3.1.64. $A, B \in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ *kompleks kuaterniyonlarının çarpımı,*

$$A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k = A_0 + a \text{ ve } B = B_0 + B_1 i + B_2 j + B_3 k = B_0 + b$$

kompleks kuaterniyonları için,

$$AB = \left(A_0 + a\right)\left(B_0 + b\right) = A_0 B_0 + A_0 b + B_0 a - a.b + a \times b$$

ile tanımlanır. (Burada "." ve "$\times$" üç boyutlu vektör uzayında sırasıyla skaler ve vektörel çarpımları göstermektedir.)

Tanım 3.1.65. $A \in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ *kompleks kuaterniyonunun eşleniği,*

$$\overline{A} = A_0 - A_1 i - A_2 j - A_3 k$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.9. $A, B \in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ kompleks kuaterniyonları için,

$$\overline{\left(AB\right)} = \overline{B}\,\overline{A}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.1.66. $A_s^c, s = 0,1,2,3;\ A_s \in \mathbb{C}, s = 0,1,2,3,$ kompleks sayılarının eşlenikleri olmak üzere $A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ *kompleks kuaterniyonunun kompleks eşleniği,*

$$A^c = A_0^c + A_1^c i + A_2^c j + A_3^c k$$

ile tanımlanır.

Bu işlem sonucu elde edilen niceliğin yine bir kompleks kuaterniyon olacağı açıktır.

Örnek 3.1.43. $A=(1+i)+(2-i)i+(2i)j+(1-i)k\in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ kompleks kuaterniyonunun eşleniği ve kompleks eşleniği sırasıyla

$$\overline{A}=(1+i)-(2-i)i-(2i)j-(1-i)k$$

$$A^c=(1-i)+(2+i)i+(-2i)j+(1+i)k$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi eşlenik ve kompleks eşlenik birbirinden farklı kavramlardır.

Tanım 3.1.67. $A\in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ *kompleks kuaterniyonunun normu,*

$$\|A\|=A\overline{A}=A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.1.10. $A,B\in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ kompleks kuaterniyonları için,

$$\|AB\|=AB\overline{(AB)}=AB\overline{B}\,\overline{A}=B\overline{B}A\overline{A}=\|B\|\|A\|$$

eşitliği mevcuttur.

Tanım 3.1.68. $0\neq A\in \mathbf{H}[\mathbb{C}]$ *kompleks kuaterniyonunun çarpımsal tersi,*

$$A^{-1}=\frac{\overline{A}}{\|A\|}$$

dir.

Kompleks kuaterniyonların vektör ve matris temsillerinin oluşturulması, reel kuaterniyonlar için takip edilen işlem basamaklarına benzer olarak yapılmaktadır.

3.1.4. Matrislerin İndirgenemezliği ve Yakınsaklığı

Tanım 3.1.69. $X = \{1, 2, ..., n\}$ düğümler kümesi ve $E = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$ yönlü kenarlar kümesi için, $G(A) = (X, E)$ grafına $A \in M_n$ matrisinin yönlü grafı denir.

Tanım 3.1.70. $A \in M_n$ matrisinin yönlü $G(A) = (X, E)$ grafndaki, $X = \{1, 2, ..., n\}$ düğümler kümesinin her i, j düğümü bir yolla bir birine bağlı ise, bu takdirde A matrisine *indirgenemez matris* denir. İndirgenemez olmayan matrise, *indirgenebilir matris* denir.

Örnek 3.1.44. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin yönlü grafı için düğüm kümesi $X = \{1, 2\}$ ve kenar kümesi $E = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ olup, her bir i, j düğümünün bir yolla bir birine bağlı olduğu görülmektedir. Böylece, A matrisi indirgenemezdir.

Örnek 3.1.45. $A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & -1+2i \\ 0 & 2 & i & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. i, j düğümlerinin bir yolla birbirlerine bağlı olup olmadığı $t_{ij} = \begin{cases} t_{ij} = 1, & a_{ij} \neq 0 \\ t_{ij} = 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$ ile tanımlanan $(t_{ij})_{ij}$ matrisinden belirlenmek istenirse,

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

matrise göre yönlü kenarlar takip ederek 1 düğümünden 2 düğümüne hiç bir şekilde ulaşılamadığı görülmektedir. O halde A matrisi indirgenebilir bir matristir.

Örnek 3.1.46. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ kompleks matrisi için $i, j = 1, 2$ için $a_{ij} \neq 0$ dır ki, A indirgenemez bir matristir.

Tanım 3.1.71. $n \times n$ tipindeki interval olmayan A matrisi için,

i. $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$ ise, A 'ya yakınsak,

ii. $\lim_{k \to \infty} A^k = \tilde{A}$ ise, A 'ya yarı-yakınsak

denir.

Aşağıdaki teorem, interval olmayan matrislerin yakınsaklığını ve yarı-yakınsaklığını belirleme de temel teoremdir.

Teorem 3.1.1. $A \in \mathrm{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin.

i. A 'nın yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\rho(A) < 1$ olmalıdır.

ii. A 'nın yarı-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\rho(A) < 1$ olmalı yada $\rho(A) = 1$; $\lambda = 1$, $|\lambda| = 1$ özelliğine sahip A 'nın tek özdeğeri ve $\lambda = 1$ 'in elemanter bölenleri lineer olmalıdır.

3.2. YÖNTEM

3.2.1. Kuaterniyon İntervaller ve Kuaterniyon İnterval Denklem Sistemleri

Bu bölüm, kuaterniyon ve interval kavramlarının birleştirilip "*kuaterniyon interval sayı", "kuaterniyon interval vektör" ve "kuaterniyon interval matris"* olarak isimlendirilen yeni kavramların verildiği çalışmanın özgün sonuçlarının sunulacağı ilk bölümdür.

Bu bölümde ayrıca, kuaterniyon intervallerin matris ve vektör temsilleri sunulmuş ve sunulan temsili matrisin bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Kuaterniyon interval matris ve vektörleri içeren genel $[x]=[A][x]+[b]$ sisteminin çözümü için yöntemler ve kriterler sunulmuştur.

3.2.1.1. Kuaterniyon İntervaller

Tanım 3.2.1. i,j,k birim kuaterniyonları ve $[A]=[A_0]+[A_1]i+[A_2]j+[A_3]k$ formundaki intervaller için,

i. $[A_0],[A_1],[A_2]$ ve $[A_3]$ den en az birinin reel interval sayı olması durumunda, $[A]$ ya kuaterniyon interval sayısı denir ve kuaterniyon interval sayılar kümesi $\mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ şeklinde gösterilir.

ii. $[A_0],[A_1],[A_2]$ ve $[A_3]$ $n\times 1$ vektörlerden en az biri reel interval vektör ise, $[A]$ ya kuaterniyon interval vektör denir ve kuaterniyon interval vektörler kümesi $\mathbf{H}[I(\mathbb{R}^n)]$ şeklinde gösterilir.

iii. $[A_0],[A_1],[A_2]$ ve $[A_3]$ $m\times n$ matrislerden en az biri reel interval matris ise, ise, $[A]$ ya kuaterniyon interval matris denir ve kuaterniyon interval matrisler kümesi $\mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{m\times n})]$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.2.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ j & [0,1]k \end{pmatrix}$ matrisi

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}i+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}j+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [0,1] \end{pmatrix}k$$

şeklinde ifade edilebildiğinden ve en az bir bileşeni reel interval sayı olduğundan, A bir kuaterniyon interval matristir.

A_0, A_1, A_2, A_3 reel intervallerinin dejenere interval olması durumunda, kuaterniyon intervaller de dejenere kuaterniyon interval olarak isimlendirileceklerdir.

Hem kolaylık hem de matematiksel ifadelerin daha kolay ve anlaşılır olması açısından aksi belirtilmedikçe, $[A]=[A_0]+[A_1]i+[A_2]j+[A_3]k$ kuaterniyon intervali $A=A_0+A_1i+A_2j+A_3k$ ile, $[B]=[B_0]+[B_1]i+[B_2]j+[B_3]k$ kuaterniyon intervali ise $B=B_0+B_1i+B_2j+B_3k$ ile temsiledilecektir.

Tanım 3.2.2. $A\in \mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ *kuaterniyon intervalinin vektör temsili,*

$$\mathbf{r}_A=\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=\{\mathbf{r}_a=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} : \ a_i\in A_i,\ A_i\in I\left(\mathbb{R}\right), i=0,1,2,3\}$$

şeklinde tanımlanır ve $A\cong \mathbf{r}_A$ ile gösterilir.

Sonuç 3.2.1. $A\in \mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ *kuaterniyon intervalinin eşleniğinin vektör temsili ise*

$$\mathbf{r}_{\overline{A}}=\begin{pmatrix} A_0 \\ -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{pmatrix}=\left\{\mathbf{r}_{\overline{a}}=\begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} : a_i\in A_i,\ A_i\in I\left(\mathbb{R}\right), i=0,1,2,3\right\}$$

şeklinde verilir ve $\overline{A}\cong \mathbf{r}_{\overline{A}}$ ile gösterilir.

Önerme 3.2.1. $A, B \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ *kuaterniyon intervallerinin toplam veya farkı,* kuaterniyonların vektör temsilleri ile

$$A \pm B \cong \mathbf{r}_A \pm \mathbf{r}_B$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.3. $A = \left\{ a = a_0 + a_1 i + \left(a_2 + a_3 i\right) j \ : \ a_i \in A_i, A_i \in I\left(\mathbb{R}\right), i = 0,1,2,3 \right\}$ *kuaterniyon intervalinin matris temsili,* $\mathbf{R}_A$,

$$\mathbf{R}_A = \left\{ \mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 i & a_2 + a_3 i \\ -a_2 + a_3 i & a_0 + a_1 i \end{pmatrix} : a_i \in A_i, \ A_i \in I\left(\mathbb{R}\right), i = 0,1,2,3 \right\}$$

ile tanımlanır.

Buradan, kompleks sayılar için sunulan matris temsilinin de dikkate alınması ile $\mathbf{R}_A$ interval matrisi daha açık bir şekilde

$$\mathbf{R}_A = \left\{ \mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_i \in A_i, \ A_i \in I\left(\mathbb{R}\right), i = 0,1,2,3 \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ -A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ -A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

yazılır ve bu temsili durum $\mathbf{R}_A \cong A$ ile gösterilir.

Önerme 3.2.2. $A, B \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ kuaterniyon intervalleri için $A \cong \mathbf{R}_A, B \cong \mathbf{R}_B$ olsun. O taktirde aşağıdaki özellikler mevcuttur.

i. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalerleri için,

$$\alpha A \pm \beta B \cong \alpha \mathbf{R}_A \pm \beta \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{\alpha A + \beta B}$$

dir.

ii. $A.B \cong \mathbf{R}_A \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{A.B}$ dir.

iii. $C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ olsun. $A\in\mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ kuaterniyon intervalinin

adjointinin vektör temsili olan $\mathbf{r}_{\overline{A}}$ vektörü; $\mathbf{r}_A$ vektörü ve C matrisi ile

$$\mathbf{r}_{\overline{A}}=C.\mathbf{r}_A=\begin{pmatrix}A_0\\-A_1\\-A_2\\-A_3\end{pmatrix},$$

şeklinde ifade edilir.

iv. $\mathbf{L}_A=C\mathbf{R}_A C$ matrisi için,

a) $\mathbf{L}_A.\mathbf{r}_B\cong AB$,

b) $\mathbf{L}_A\mathbf{R}_B^T=\mathbf{R}_B^T\mathbf{L}_A$,

c) $\mathbf{R}_B\mathbf{R}_A=\mathbf{R}_{\left(\mathbf{R}_{A.B}^T\right)}$,

d) $\mathbf{L}_{\overline{A}}=\mathbf{L}_A^T$,

e) $\mathbf{R}_{\overline{A}}=\mathbf{R}_A^T$,

f) $\mathbf{R}_A^T\mathbf{R}_A=\mathbf{R}_A\mathbf{R}_A^T$,

g) $A\overline{A}\cong\mathbf{R}_{\overline{A}}^T\mathbf{r}_A=\mathbf{L}_A\mathbf{r}_{\overline{A}}$

h) $\overline{BA}\cong C\left(\mathbf{R}_A^T.\mathbf{r}_B\right)=\left(C\mathbf{R}_A^T\right).\mathbf{r}_B=\mathbf{L}_A^T\left(C.\mathbf{r}_B\right)=\mathbf{L}_{\overline{A}}.\mathbf{r}_{\overline{B}}\cong\overline{A}\,\overline{B}$

dir.

Tanım 3.2.4. $\mathbf{R}_A$ *temsili matrisinin determinantı,*

$$\det \mathbf{R}_A = \left\{ f\left(a_0,a_1,a_2,a_3\right) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} : a_i \in A_i,\ A_i \in I\left(\mathbb{R}\right), i = 0,1,2,3 \right\}$$

$$= \left\{ f\left(a_0,a_1,a_2,a_3\right) = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 \ : a_i \in A_i,\ A_i \in I\left(\mathbb{R}\right), i = 0,1,2,3 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 3.2.1. $\det \mathbf{R}_A$ kümesi içerisinde yer alan $f\left(a_0,a_1,a_2,a_3\right) = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2$ fonksiyonu için $f_{a_i}^{'}\left(a_0,a_1,a_2,a_3\right) = 4a_i\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$ olur ki, a_i 'lerin bulundukları aralıklara göre $\det \mathbf{R}_A$ kümesi bir aralık veya aralıkların birleşimi olarak yazılabilmektedir.

Bu durumda $\mathbf{R}_A$ matrisinin determinantının hesaplanması problemi artık dört değişkenli bir fonksiyonun yerel minumum ve yerel maksimum değerlerinin hesaplanması problemine indirgenir. a_i 'lerin bulundukları aralıklara göre $\det \mathbf{R}_A$ kümesi bir aralık olarak ayrı ayrı 81 farklı durum ile ifade edilebilecektir.

Şimdi 3 farklı durumda $\det \mathbf{R}_A$ kümesinin nasıl bir aralık olarak ifade edildiği gösterilecektir:

- $\underline{A_0} \geq 0, \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} \geq 0$ için,

$$\det \mathbf{R}_A = \left[\left(\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2 \right)^2, \left(\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2 \right)^2 \right],$$

- $\underline{A_0} \geq 0, \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} \leq 0$ için,

$$\det \mathbf{R}_A = \left[\left(\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2 \right)^2, \left(\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2 \right)^2 \right],$$

- $\underline{A_0} \geq 0, \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} < 0$ ve $\overline{A_3} > 0$ için,

$$\det \mathbf{R}_A = \left[\left(\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + 0^2 \right)^2, \max\{ \left(\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2 \right)^2 \right.$$
$$\left. , \left(\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2 \right)^2 \right]$$

ile verilir.

Diğer durumlarda benzer olarak yazılabilir.

Tanım 3.2.5. $\mathbf{R}_A$ *temsili matrisinin Euclidean normu,*

$$\left\| \mathbf{R}_A \right\| = \left\{ f\left(a_0, a_1, a_2, a_3\right) = 4\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \;\; : a_i \in A_i, \; A_i \in I\left(\mathbb{R}\right), i = 0,1,2,3 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 3.2.2. $\left\| \mathbf{R}_A \right\|$ kümesi içerisinde yer alan $f\left(a_0, a_1, a_2, a_3\right) = 4\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ fonksiyonu için $f_{a_i}'\left(a_0, a_1, a_2, a_3\right) = \dfrac{4a_i}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ olur ki, a_i'lerin bulundukları aralıklara göre $\left\| \mathbf{R}_A \right\|$ kümesi bir aralık veya aralıkların birleşimi olarak yazılabilmektedir.

Bu durumda $\mathbf{R}_A$ matrisinin Euclidean normunun hesaplanması problemi artık dört değişkenli bir fonksiyonun yerel minumum ve yerel maksimum değerlerinin hesaplanması problemine indirgenir. a_i'lerin bulundukları aralıklara göre $\left\| \mathbf{R}_A \right\|$ kümesi bir aralık olarak ayrı ayrı 81 farklı durum ile ifade edilebilecektir.

Şimdi 3 farklı durumda $\left\| \mathbf{R}_A \right\|$ kümesinin nasıl bir aralık olarak ifade edildiği gösterilecektir:

- $\underline{A_0} \geq 0, \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} \geq 0$ için,

$$\left\| \mathbf{R}_A \right\| = \left[\sqrt{\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}, \sqrt{\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2} \right],$$

- $\underline{A_0} \geq 0, \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} \leq 0$ için,

$$\left\|\mathbf{R}_A\right\| = \left[\sqrt{\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}, \sqrt{\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}\right],$$

- $\underline{A_0} \geq 0, \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} < 0$ ve $\overline{A_3} > 0$ için,

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{R}_A\right\| = &\left[\sqrt{\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + 0^2}, \sqrt{\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}\right] \cup \\ &\left[\sqrt{\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \underline{0}^2}, \sqrt{\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}\right] \\ = &\left[\sqrt{\underline{A_0}^2 + \underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + 0^2}, \max\{\sqrt{\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}, \sqrt{\overline{A_0}^2 + \overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}\}\right]\end{aligned}$$

ile verilir.

Diğer durumlarda benzer olarak yazılabilir.

Tanım 3.2.6. $\mathbf{R}_A$ *temsili matrisinin tersi,*

$$\mathbf{R}_A^{-1} = \left\{\frac{1}{\|a\|^2}\mathbf{R}_a^T \ : \ a_i \in A_i, \ i = 0,1,2,3\right\}$$

dir.

Tanım 3.2.7. $\mathbf{R}_A$ *temsili matrisinin izi,*

$$\begin{aligned} iz\left(\mathbf{R}_A\right) &= iz\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ -A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ -A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix} \\ &= \left[4\underline{A_0}, 4\overline{A_0}\right] \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2.1. $a_* = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olsun. $A \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ *kuaterniyon intervali için* $\mathbf{R}_A$ *temsili matrisinin* $\mu(s)$, $s = 1,2,3,4$*, özdeğerleri;*
$\|a_*\| \neq 0$ için,

$$\mu_{1,2} = \left\{ \lambda = a_0 + i\|a_*\| \ : \ i^2 = -1, a_k \in A_k, k = 0,1,2,3 \right\}$$

ve

$$\mu_{3,4} = \left\{ \lambda = a_0 - i\|a_*\| \ : \ i^2 = -1, a_k \in A_k, k = 0,1,2,3 \right\}$$

$\|a_*\| = 0$ için,

$$\mu_{1,2,3,4} = \left\{ \lambda = a_0 \ : \ a_0 \in A_0 \right\} = \left[\underline{A_0}, \overline{A_0} \right]$$

dir.

İspat. İnterval cebiri kullanılarak $A \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R})]$ kuaterniyon intervali için $\mathbf{R}_A$ temsili matrisinin $\mu(s)$, $s = 1,2,3,4$ özdeğerleri,

$$\mu_s = \{\lambda_k \in \mathbb{C} : \ \mathbf{R}_a u_k = \lambda_k u_k, \ 0 \neq u \in \mathbb{C}^4 \ , k = 0,1,2,3,4\}$$

şeklinde olacaktır. O halde problem $\mathbf{R}_a$ matrisinin özdeğerlerinin tespiti problemine indirgenmiştir. $a_* = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere

$$\mathbf{R}_a = a_0 I_4 + \mathbf{R}_{a_*}$$

şeklinde yazılır. Buradan söylenebilir ki; $\mathbf{R}_a$ 'nın özdeğerleri, $\mathbf{R}_{a_*}$ 'ın özdeğerlerine a_0 'ın eklenmesiyle bulunur. $\mathbf{R}_{a_*}$ matrisinin özdeğerleri ise θ_k, $k = 1,2,3,4$ olsun. O taktirde her bir k için

$$\begin{aligned} \left(a_0 I_4 + \mathbf{R}_{a_*}\right) x_k &= a_0 I_4 x_k + \mathbf{R}_{a_*} x_k \\ &= \left(a_0 + \theta_k\right) x_k \end{aligned}$$

elde edilir ki, $\mathbf{R}_a$ 'nın özdeğerlerinin, $\lambda_k = a_0 + \theta_k$, $k = 1,2,3,4$ olduğu görülür.

Bilindiği üzere $\mathbf{R}_{a_*}$ matrisinin bir özdeğeri θ ise $\mathbf{R}_{a_*}^2$ matrisinin özdeğeri θ^2 'dir.

$\mathbf{R}_{a_*}^2 = -\|a_*\|^2 I_4$ olduğundan $\theta^2 = -\|a_*\|^2$ bulunur. Böylece $\mathbf{R}_{a_*}$ 'ın özdeğerleri sadece $\theta = i\|a_*\|$ yada $\theta = -i\|a_*\|$ olabilir. Fakat $\mathbf{R}_{a_*}$ reel matrisinin kompleks özdeğerleri eşlenik çiftlerden oluşur öyleki $\mathbf{R}_{a_*}$; $i\|a_*\|$ için iki özdeğere ve $-i\|a_*\|$ için iki özdeğere sahiptir. O taktirde $\mathbf{R}_a$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = a_0 + i\|a_*\| \text{ ve } \lambda_{3,4} = a_0 - i\|a_*\|$$

dir. Dolayısıyla, $\mathbf{R}_A$ temsili matrisinin özdeğerleri,

$$\mu_{1,2} = \left\{\lambda = a_0 + i\|a_*\| \,:\, i^2 = -1, a_k \in A_k, k = 0,1,2,3\right\}$$

ve

$$\mu_{3,4} = \left\{\lambda = a_0 - i\|a_*\| \,:\, i^2 = -1, a_k \in A_k, k = 0,1,2,3\right\}$$

şeklinde tanımlanan çift katlı aralıklarıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Not 3.2.3. Küme olarak verilen $\mu_{1,2}$ ve $\mu_{3,4}$ özdeğerleri, bir aralık olarak ayrı ayrı 27 farklı durum ile ifade edilebilmektedir. Burada sadece, $\mu_{1,2}$ özdeğerinin 3 farklı durumda nasıl bir aralık olarak ifade edildiği gösterilecektir.

- $A_0 \in I(\mathbb{R}), \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} \geq 0$ için,

$$\mu_{1,2} = \left[\underline{A_0}, \overline{A_0}\right] + i\left[\sqrt{\underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}, \sqrt{\overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}\right]$$

- $A_0 \in I(\mathbb{R}), \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} \leq 0$ için,

$$\mu_{1,2} = \left[\underline{A_0}, \overline{A_0}\right] + i\left[\sqrt{\underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}, \sqrt{\overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}\right],$$

- $A_0 \in I(\mathrm{R}), \underline{A_1} \geq 0, \underline{A_2} \geq 0, \underline{A_3} < 0$ ve $\overline{A_3} > 0$ için,

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= \left[\underline{A_0}, \overline{A_0}\right] + i\left\{\left[\sqrt{\underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + 0^2}, \sqrt{\overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}\right] \cup \right.\\ &\quad \left.\left[\sqrt{\underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + \underline{0}^2}, \sqrt{\overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}\right]\right\}\\ &= \left[\underline{A_0}, \overline{A_0}\right] + i\left[\sqrt{\underline{A_1}^2 + \underline{A_2}^2 + 0^2}, \max\{\sqrt{\overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \underline{A_3}^2}, \sqrt{\overline{A_1}^2 + \overline{A_2}^2 + \overline{A_3}^2}\}\right].\end{aligned}$$

Sonuç 3.2.2. Bir matrisin determinantı onun özdeğerlerinin çarpımı olduğundan $\mathbf{R}_a$ matrisinin determinantı,

$$\begin{aligned}\det \mathbf{R}_a &= \prod_{i=1}^{4} \lambda_i = \left(a_0 + i\left\|a_*\right\|\right)^2 \left(a_0 - i\left\|a_*\right\|\right)^2\\ &= \left\|a\right\|^4\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\det \mathbf{R}_A &= \left\{\det \mathbf{R}_a = \left\|a\right\|^4 \ : \ a_i \in A_i,\ A_i \in I(\mathbb{R})\, i = 0,1,2,3\right\}\\ &= \left\{\det \mathbf{R}_a = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 \ : a_i \in A_i,\ A_i \in I(\mathbb{R})\, i = 0,1,2,3\right\}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2.1.2. Kuaterniyon İnterval Denklem Sistemleri

Matematikte bir çok problem bir lineer denklemler kümesine veya $Ax = b$ sistemine indirgenmekte ve bu sistemin çözümüne ulaşmak için yöntemler ve algoritmalar geliştirilmektedir.

Literatürde, $Ax = b$ sistemi A ve b'nin durumlarına göre aşağıdaki gibi gruplandırılmaktadır:

Reel Sistem: A matrisi ve b vektörünün tüm bileşenleri reel sayı ise, $Ax = b$ sistemine reel sistem,

Kompleks Sistem: A matrisi veya b vektörünün en az bir bileşeni kompleks sayı ise, $Ax = b$ sistemine kompleks sistem,

Kuaterniyon Sistem: A matrisi veya b vektörünün en az bir bileşeni kuaterniyon sayı ise, $Ax = b$ sistemine kuaterniyon sistem,

Reel İnterval Sistem: A matrisi ve b vektörünün tüm bileşenleri reel interval ise, $Ax = b$ sistemine reel interval sistem,

Kompleks İnterval Sistem: A matrisi veya b vektörünün en az bir bileşeni interval katsayılı kompleks sayı ise, $Ax = b$ sistemine kompleks interval sistem,

Kuaterniyon İnterval Sistem: A matrisi veya b vektörünün en az bir bileşeni interval katsayılı kuaterniyon sayı ise, $Ax = b$ sistemine kuaterniyon interval sistem.

Mayer ve Warnke (2003)

$$[x] = [A][x] + [b] \tag{3.4}$$

reel interval siteminin çözümünün varlığı ve tekliğini araştırmışlardır.

Mayer ve Warnke (2003)'nin çalışmasındaki sonuçları kullanılarak, (3.4) sisteminin çözümüne bir ulaşma yöntemi olan

$$[x]^{k+1} = [A][x]^k + [b], k = 0,1,... \tag{3.5}$$

iteratif sisteminin yakınsaklığı üzerine kriterler verilmektedir (Alefeld and Mayer, 2005; Mayer, 2004).

Mayer doktora tezinde, (3.5) iterasyon denkleminin her bir $\left([x]^k\right)$ dizisinin aynı limite yakınsaması için kriterler sunmaktadır (Mayer, 1968).

Arndt ve Mayer (2005) ise (3.5) iterasyon denkleminden (3.4) sisteminin çözümüne ulaşmıştır.

Arndt (2007),

$$[y] = [A][y] + [b] \tag{3.6}$$

kompleks interval sistemi ile

$$[x] = R([A])[x] + \begin{pmatrix} [b_{re}] \\ -[b_{im}] \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

sistemi arasında bir bağ kurarak, (3.6) sisteminin çözümünün varlığının kontrolünü ve de varsa çözüm vektörüne ulaşmayı, (3.7) sistemi üzerinden gerçekleştirmiştir.

Yani Arndt (2007), (3.6) formunda ifade edilebilen kompleks sistemlerinin çözümlerinin varlığını ve çözüm vektörünü bulma problemini, bu sistemden elde edilen (3.7) reel sisteminin çözümünün varlğının tespiti ve bu sistemin çözüm vektörünü bulma problemine indirgemiştir.

Böylece Arndt (2007), (3.6) formundaki kompleks sistemlerin çözümlerine, reel sistemler için geliştirilen çözüm yöntemleri ve de algoritmalar ile ulaşılmasına olanak sağlamış olmaktadır.

Bu çalışmanın ilk aşamasında ise biz, $[A]\in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n\times n})]$ matrisi ve $[x],[b]\in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n})]$ vektörleri için;

$$[x]=[A][x]+[b] \tag{3.8}$$

kuaterniyon interval sistemi ile

$$[x]=\mathbf{R}\big([A]\big)[x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

reel interval sisteminin dikkate alınması ile,

- (3.8) sisteminin çözümünün varlığının, (3.9) sisteminin çözümünün varlığını garantilediği,
- (3.8) sisteminin çözümünün, (3.9) sisteminin çözümü ile ifade edilebildiği,

sonuçlarna ulaştık.

Böylece, (3.8) formunda ifade edilebilen kuaterniyon sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve çözme problemi, bu sistemden elde edilen (3.9) reel sisteminin çözümünün varlığının tespiti ve bu sistemi çözme problemine indirgenerek; (3.8) formundaki kuaterniyon sistemlerinin çözümlerine, reel sistemler için geliştirilen çözüm yöntemleri ve de algoritmalar ile ulaşılmasına olanak sağlanmış olunmaktadır.

Aşağıdaki teorem, (3.8) sisteminin çözümünün varlığı ile (3.9) sisteminin çözümünün varlığı arasındaki bağı kurmaktadır.

Teorem 3.2.2. (3.8) sisteminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart (3.9) sisteminin bir çözüme sahip olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow$) $[x]^*$, (3.8) sisteminin bir çözümü olsun. Yani; (3.8) denklemi $[x]^*$ için sağlansın.

O halde,

$$[x]^* = [A][x]^* + [b]$$

yazılır. Bu denkleme denk gelen temsili denklem ise

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\left([x]^*\right) &= \mathbf{R}\left([A][x]^* + [b]\right)\\ &= \mathbf{R}\left([A]\right)\mathbf{R}\left([x]^*\right) + \mathbf{R}\left([b]\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

olacaktır. $[u]$; $\mathbf{R}\left([x]^*\right)$'ın ve $[b]^*$ da $\mathbf{R}\left([b]\right)$'nin 1. sütun vektörü ise (3.10)'dan,

$$[u] = \mathbf{R}\left([A]\right)[u] + [b]^*;\ [b] = [b_0] + [b_1]i + [b_2]j + [b_3]k$$

$$[u] = \mathbf{R}\left([A]\right)[u] + \begin{pmatrix} -[b_0] \\ [b_1] \\ [b_2] \\ [b_3] \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

sistemine ulaşılır ki; (3.11) sisteminin çözümünün varlığını (3.8) sisteminin çözümünün varlığının garantilediği sonucuna varılır.

$\Leftarrow$) Şimdi ise $[u]^*$,

$$\begin{pmatrix} -[u_0] \\ [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \end{pmatrix} = \mathbf{R}\left([A]\right)\begin{pmatrix} -[u_0] \\ [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -[b_0] \\ [b_1] \\ [b_2] \\ [b_3] \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

(3.12) sisteminin bir çözümü olsun, bu çözüm aynı zamanda. (3.11) sisteminin de çözümüdür. Bu taktirde, (3.12)'nin çözümünün olduğunu kanıtlamalıyız. (3.12) sisteminden,

$$\mathbf{R}\left([u]^*\right)=\mathbf{R}\left([A]\right)\mathbf{R}\left([u]^*\right)+\mathbf{R}\left([b]^*\right)$$

temsili sistemi elde edilir ve bu sistem $\mathbf{R}([y])$, bir özel $[y]$ kuaterniyonunun temsili matrisi ve $\mathbf{R}([b])$, $[b]$ kuaterniyonunun temsili matrisi olmak üzere

$$\mathbf{R}([y])=\mathbf{R}([A])\mathbf{R}([y])+\mathbf{R}([b])$$

$$\mathbf{R}([y])=\mathbf{R}([A][y]+[b])$$

şeklinde yazılır ve buradan da

$$[y]=[A][y]+[b]$$

kuaterniyon sistemine ulaşılır. Yani; (3.11)'den bir $[y]$ çözümü var ise bu çözüm bizi (3.8) 'ün çözümüne ulaştırır. Aynı şekilde (3.8)'de bir $[x]^*$ çözümü var ise bu çözümü kullanarak (3.11)'in $[u]$ çözümünün varlığına ulaşırız.

Bu teorem, (3.8) kuaterniyon interval sisteminin çözümünün varlığı problemini, (3.9) reel interval sisteminin çözümünün varlığı problemine indirgemektedir.

Örnek 3.2.2. $[y]=\begin{pmatrix}[y_1]\\ [y_2]\end{pmatrix}\in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^2)]$ olmak üzere,

$$[y]=\begin{pmatrix}1 & i\\ j & 1\end{pmatrix}[y]+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

dejenere kuaterniyon interval sisteminin çözümünün olması

$$[x]=\mathbf{R}\left[\begin{pmatrix}1 & i\\ j & 1\end{pmatrix}\right][x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix}$$

dejenere interval sisteminin çözümünün olması ile eşdeğerdir.

Gerçekten;

$$[x]^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [x]^* + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemi incelendiğinde,

$$Rank\left[\mathbf{R}\left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ j & 1 \end{pmatrix}\right] : [b]\right] = Rank\left[\mathbf{R}\left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ j & 1 \end{pmatrix}\right]\right]$$

olduğu görülür ki, dejenere interval sisteminin çözümü olduğundan verilen dejenere kuaterniyon interval sistemininde çözümü vardır.

Aşağıdaki teorem, (3.8) sisteminin çözümü ile (3.9) sisteminin çözümü arasındaki bağı kurmaktadır.

Teorem 3.2.3. (3.9) sisteminin bir çözümü

$$[x]^* = \begin{pmatrix} [x_0]^* \\ [x_1]^* \\ [x_2]^* \\ [x_3]^* \end{pmatrix} \in I\left(\mathbb{R}^{4n}\right) \tag{3.13}$$

ise bu takdirde,

$$[y]^* = -[x_0]^* + [x_1]^* i + [x_2]^* j + [x_3]^* k \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^n)] \tag{3.14}$$

vektörü de (3.8) sisteminin çözümüdür. Aynı şekilde; (3.14) formundaki $[y]$ değeri (3.8)'in bir çözümü ise (3.13) formundaki $[x]$ değeri de (3.9)'un bir çözümüdür.

Örnek 3.2.3. $[y]=\begin{pmatrix}[y_1]\\ [y_2]\end{pmatrix}\in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^2)]$ olmak üzere,

$$[y]=\begin{pmatrix}1 & i\\ j & 1\end{pmatrix}[y]+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

dejenere kuaterniyon interval sisteminin çözümünü araştıralım.

(3.15) sisteminden,

$$[x]=\mathbf{R}\left[\begin{pmatrix}1 & i\\ j & 1\end{pmatrix}\right][x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}[x]+\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

reel sisteme ulaşılır.

$$[x_0]^*=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ [x_1]^*=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ [x_2]^*=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ [x_3]^*=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

olmak üzere, (3.16) sisteminin çözümü $[x]^*=\begin{pmatrix}[x_0]^*\\ [x_1]^*\\ [x_2]^*\\ [x_3]^*\end{pmatrix}$ dır. Gerçekten, kuaterniyon aritmetiği kullanılarak ulaşılan (3.15) sisteminin çözümü $[y]^*=\begin{pmatrix}j\\ i\end{pmatrix}$ dir ki; $[y]^*$

$$[y]^*=-[x_0]^*+[x_1]^*i+[x_2]^*j+[x_3]^*k$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

Örnek 3.2.4. $[a,b]\ (0<a), [c,d]\ (d<0)$ için,

$$[y]=\begin{pmatrix} 1 & [a,b]i \\ [c,d]j & k \end{pmatrix}[y]+\begin{pmatrix} -i \\ -j \end{pmatrix}$$

sisteminin **interval ve kuaterniyon aritmetiği** kullanılarak elde edilen çözümü

$$[y]^*=\begin{pmatrix} [\frac{1}{d},\frac{1}{c}]+[-\frac{1}{bc},-\frac{1}{ad}]i+[-\frac{1}{bc},-\frac{1}{ad}]j \\ [\frac{1}{b},\frac{1}{a}] \end{pmatrix}$$

dir. Bu sistemden yazılan

$$[x]=\mathbf{R}([A])[x]+\begin{pmatrix} -[b_0] \\ [b_1] \\ [b_2] \\ [b_3] \end{pmatrix}$$

sisteminin çözümü ise; $[x_k]^*=[[x_{k1}]^*,[x_{k2}]^*]^T,\ k=0,1,2,3,$ için

$$[x]^*=\begin{pmatrix} [x_{01}]^* \\ [x_{02}]^* \\ [x_{11}]^* \\ [x_{12}]^* \\ [x_{21}]^* \\ [x_{22}]^* \\ [x_{31}]^* \\ [x_{32}]^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -[1/d,1/c] \\ -[1/b,1/a] \\ [-1/bc,-1/ad] \\ 0 \\ [-1/bc,-1/ad] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılırki, gerçekten $[y]^*=-[x_0]^*+[x_1]^*i+[x_2]^*j+[x_3]^*k$ olduğu görülür.

$[A]\in\mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n\times n})]$ matrisi, $[x],\ [b]\in\mathbf{H}[I(\mathbb{R}^n)]$ vektörleri için,

$$[y]=[A][y]+[b]$$

kuaterniyon sisteminin çözümüne

$$[x]=\mathbf{R}\left([A]\right)[x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix}$$

sisteminden değil

$$[y]^{k+1}=[A][y]^{k}+[b],\;\; k=0,1,... \tag{3.17}$$

şeklinde iterasyon denkleminin $\left([y]^{k}\right)$ dizisi ile ulaşmak bir diğer yöntemdir.

Bunun için öncelikle iterasyonun yakınsaklığının kontrolünün yapılması gerekmektedir. Aksi halde, (3.8) kuaterniyon sisteminin çözümüne ulaşmada, ıraksayan (3.17) iterasyon denklemi ile çözümü elde etme yöntemini tercih etmek hatalı olur.

Çalışmanın bu aşamasında, (3.17) iterasyon denkleminin yakınsaklığı ile $\mathbf{R}\left([A]\right)$'nın yakınsaklığı arasında bağlar kurulmaktadır.

Bu noktada,

$$[z]^{k+1}=[A][z]^{k}+[b],\;\; k=0,1,... \tag{3.18}$$

interval iterasyonunun yakınsaklığının incelendiği Alefeld ve Mayer (2005)'in çalışmasında yer alan aşağıdaki teoremler dikkate alınmaktadır.

Teorem 3.2.4. İndirgenemez $n\times n$ interval $[A]$ matrisi için $rad\left([A]\right)\neq 0$ ve $[z]=[A][z]+[b],\;\; k=0,1,...$ sistemi uyumlu olsun. Bu takdirde, herhangi bir $[z]^{0}$ için (3.18) iterasyonunun her bir $\left([z]^{k}\right)$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

i. $[A]$ interval matrisi yarı-yakınsak,

ii. $|[A]|$ matrisi yarı-yakınsak olmalıdır.

Teorem 3.2.5. İndirgenemez $[A]\in I\left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ matrisi için $rad\left([A]\right)\neq 0$ şartı sağlansın. Bu taktirde;

i. $[A]$'nın yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\rho\left(|[A]|\right)<1$ olmalıdır.

ii. $[A]$'nın yarı-yakınsak olması için gerek ve yeter şart,

a) $|[A]|$ matrisi yarı-yakınsak,

b) Eğer $\rho\left(\|[A]\|\right)=1$ ve $[A]$, $|\tilde{A}|=\|[A]\|$ şartn sağlayan bir $\tilde{A}$ matrisi içeriyorsa, bu taktirde D bir işaret matrisi ($|D|=I$) olmak üzere

$$\tilde{A} \neq -D\|[A]\|D$$

dir.

Bu teoremler dikkate alınarak, (3.8) kuaterniyon sisteminin çözümüne götüren

$$[y]^{k+1}=[A][y]^{k}+[b],\ k=0,1,...$$

interval iteratif denklemin yakınsaklığının, $[A]$ ve $\|[A]\|$ matrislerinin yakınsaklıklarına bağlı olduğu görülmektedir.

Çalışma ise; $[A]$ kuaterniyon interval matrisinin yakınsaklığını (veya yarı-yakınsaklığını), $\mathbf{R}([A])$ interval matrisi ve $\|[A]\|,|\mathbf{R}([A])|$ negatif olmayan reel matrislerinin yakınsaklıklarına (veya yarı-yakınsaklıklarına) bağlamayı amaçlamaktadır. Bunun için öncelikle, $[A]$ ve $\mathbf{R}([A])$ matrislerinin indirgenemezlikleri için kriterler vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $[A]$ kuaterniyon interval matrisinin indirgenemezliği $\mathbf{R}\left([A]\right)$'nın indirgenemezliğini gerektirmez.

Örnek 3.2.5. $[A]=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ dejenere kuaterniyon matrisini ve bu matrisin

$$\mathbf{R}\left([A]\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temsili matrisini göz önüne alalım.

$\|[A]\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olup, $i, j = 1, 2$ için $a_{ij} \neq 0$ olur ki, $\|[A]\|$'nın ve dolayısıyla $[A]$'nın indirgenemez olduğu söylenir. Fakat, $\left|\mathbf{R}([A])\right|$ matrisi için 1 ve 2 düğümlerini bağlayan bir yol olmadığından, $\left|\mathbf{R}([A])\right|$ ve dolayısıyla $\mathbf{R}([A])$ indirgenebilirdir.

Aşağıdaki teorem, $[A]$ kuaterniyon interval matrisinin indirgenemezliği ile $\mathbf{R}([A])$'nın indirgenemezliği arasında bir bağ kurmaktadır.

Teorem 3.2.6. $[A] \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n \times n})]$ kuaterniyon interval matrisi indirgenemez ve $\left|\mathbf{R}([a_{st}])\right| > 0$ olacak şekilde $[A]$ da bir $[a_{st}]$ elemanı varsa, bu takdirde $\mathbf{R}([A])$ indirgenemezdir.

Örnek 3.2.6. $[A] = \begin{pmatrix} [0,1] & 1+i+j+k \\ [0,1/2]+[-1/2,0]i & 1 \end{pmatrix}$ kuaterniyon interval matrisi için $\|[A]\| = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olup $i, j = 1, 2$ için $a_{ij} \neq 0$ olur ki, $\|[A]\|$'nın ve dolayısıyla $[A]$'nın indirgenemez olduğu açıktır.

Aynı zamanda, $[A]$'nın $[a_{12}] = 1+i+j+k$ elemanı için

$$\left|\mathbf{R}([a_{12}])\right| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

yazılır ki, teoreme göre $\mathbf{R}([A])$'nın indirgenemez olması beklenir. Gerçekten,

$$\left|\mathbf{R}([A])\right| = 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisine göre $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ düğüm kümesindeki her bir düğüm bir birine bir yolla bağlıdır. Böylece, indirgenemezlik tanımına göre $\left|\mathbf{R}([A])\right|$ ve $\mathbf{R}([A])$ matrisleri indirgenemezdir.

Aşağıdaki teorem; $\mathbf{R}([A])$ ve $\left|\mathbf{R}([A])\right|$ reel matrislerinin yakınsaklığı ile $[A]$ ve $\left|[A]\right|$ kuaterniyon interval matrislerinin yakınsaklıkları ve dolayısıyla (3.8) sisteminin çözüm vektörünü elde etmek için kurulan iteratif denklemin yakınsaklığı arasında bir bağ kurmaktadır.

Teorem 3.2.7. $[A] \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n\times n})]$ kuaterniyon interval matrisi indirgenemez ve $rad([A]) \neq 0$ şartını sağlasın. $[A]$, $\left|\mathbf{R}([a_{st}])\right| > 0$ şartını sağlayan bir $[a_{st}]$ elemana sahip olsun. Bu taktirde; $[A]$'nın yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\rho\left(\left|\mathbf{R}([A])\right|\right) < 1$ olmalıdır.

İspat. $[A]$ matrisi indirgenemez olduğundan bir üst üçgen veya alt üçgen matris olarak ifade edilemez. Dahası graf teoriden matrisin indirgenebilirliği ile bağlantılılık arasındaki bağıntıdan $[a_{ii}] \neq 0$ dır. Böylece $[A]$'nın genel formu;

$$[A] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & \cdots & [a_{st}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{pq}] & \cdots & [a_{nn}] \end{pmatrix}$$

dir. $[A]$ matrisinden,

$$\mathbf{R}([A]) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}([a_{11}]) & \cdots & \mathbf{R}([a_{st}]) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}([a_{pq}]) & \cdots & \mathbf{R}([a_{nn}]) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}([A])$ temsili matrisini yazabiliriz. Burada $[A]$ indirgenemez olduğundan öyle bir P permütasyon matrisi vardır ki, $\mathbf{R}([A]) = P\mathbf{R}([A])P^T$ şeklinde yazılır. Bu matrisin mutlak değer matrisi,

$$\left|\mathbf{R}([A])\right| = \begin{pmatrix} \left|\mathbf{R}([a_{11}])\right| & \cdots & \left|\mathbf{R}([a_{st}])\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|\mathbf{R}([a_{pq}])\right| & \cdots & \left|\mathbf{R}([a_{nn}])\right| \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. $\left|\mathbf{R}([A])\right|$ matrisi içinde $\exists\left|\mathbf{R}([a_{st}])\right| > 0$ şeklinde bir eleman olduğundan $\exists m \in \mathbb{N}$ öyleki $\left|\mathbf{R}([A])\right|^m > 0$ dır. $\mathbf{R}([A]) = P\mathbf{R}([A])P^T$ eşitliğinde $|.|$ mutlak değer fonksiyonunu kullanırsak,

$$\left|\mathbf{R}([A])\right| = P\left|\mathbf{R}([A])\right|P^T$$

eşitliğini ve mutlak değer fonksiyonu ile P permütasyon matrisinin özelliğinden

$$\begin{aligned} 0 < \left|\mathbf{R}([A])\right|^m &= P\left|\mathbf{R}([A])\right|^m P^T \\ &= P^T\left(P\left|\mathbf{R}([A])\right|^m P^T\right)P \\ &= \left|\mathbf{R}([A])\right|^m \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşırız. O halde $\left|\mathbf{R}([A])\right|$ indirgenemez ve böylece $\mathbf{R}([A])$ da indirgenemezdir.

Örnek 3.2.7. $[A] = \begin{pmatrix} [-1/4,0]i & [1/8,1/4]+[-1/4,0]i+[1/5,1/4]j+[0,1/4]k \\ [-1/4,0]j & [-1/4,0]k \end{pmatrix}$

kuaterniyon interval matrisini gözönüne alalım. Bu matris için,

- $[A]$, indirgenemez,
- $\left|\mathbf{R}([a_{12}])\right| > 0$,
- $rad([A]) \neq 0$

olduğundan $[A]$ matrisi teoremin şartlarını sağlamaktadır. O halde, $[A]$'nın yakınsaklığı için $\rho\left(\left|\mathbf{R}([A])\right|\right) < 1$ durumu incelenmelidir.

$[A]$'nın temsili matrisinin mutlak değer matrisi $\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right|$,

$$\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right| = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup, $\rho(\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right|) = 0.75$ dir. Böylece, $[A]$ kuaterniyon interval matrisi ve de

$$[z]^{k+1} = [A][z]^k + [b],\ k = 0,1,...$$

iteratif denklem yakınsaktır.

Aşağıdaki verilen teoremler, $[A]$ ve $\left|[A]\right|$'nın yarı-yakınsaklıkları ile $\mathbf{R}\left([A]\right)$ ve $\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right|$'nın yarı-yakınsaklıkları arasında bağı kuran kriterleri vermektedirler.

Teorem 3.2.8. $[A] \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n\times n})]$ kuaterniyon interval matrisi indirgenemez ve $rad\left([A]\right) \neq 0$ şartını sağlasın. Ayrca $[A]$, $\left|\mathbf{R}\left([a_{st}]\right)\right| > 0$ şartını sağlayan bir $[a_{st}]$ elemana sahip olsun. Bu taktirde; $[A]$'nın yarı-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right|$'nın yarı-yakınsak olmasıdır.

Teorem 3.2.9. $[A] \in \mathbf{H}[I(\mathbb{R}^{n\times n})]$ kuaterniyon interval matrisi indirgenemez ve $rad\left([A]\right) \neq 0$ şartını sağlasın.

i. $[A]$'nın yarı-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{R}\left([A]\right)$'nın yarı-yakınsak olmasıdır.

ii. $\left|[A]\right|$'nın yarı-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right|$'nın yarı-yakınsak olmasıdır.

Aşağıdaki örnek, son teoremdeki $rad([A]) \neq 0$ şartının kaldırılması durumunda iddiaların geçersizliğini göstermektedir.

Örnek 3.2.8. $[A] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} j & -j \\ j & -j \end{pmatrix}$ kuaterniyon matrisi ele alınsın. Açıkça görülmektedir ki; $[A]$ indirgenemez ve $rad([A]) \neq 0$ dır. Bu şartlar altında Teorem 3.2.9'un i) ve ii) durumları dikkate alındığında $[A], \mathbf{R}([A]), |[A]|$ matrislerinin yarı-yakınsak ancak $|\mathbf{R}([A])|$ matrisinin ıraksak olduğu sonucuna ulaşılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu tezde; “kuaterniyon interval sayı”, “kuaterniyon interval vektör” ve “kuaterniyon interval matris” kavramları tanımlanarak literatürde yer alan “reel ve kompleks interval sayı”, “reel ve kompleks interval vektör” ve “reel ve kompleks interval matris” kavramları genişletildi.

Kuaterniyon interval sayı, vektör ve matrislerin matris temsilleri sunularak, kuaterniyonlardan reele geçiş sağlandı. Temsili matrislerin determinantları, normları, izleri, özdeğerleri ve diğer bazı karakteristikleri hesaplandı.

Kuaterniyonlar için bazı cebirsel hesaplamalar reel temsili matrisler üzerinden gerçekleştirildi. $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sistemine denk olan $[x]=\mathbf{R}\left([A]\right)[x]+\begin{pmatrix}-[b_{re}]\\ [b_{im}]\end{pmatrix}$ reel interval sistemi tanımlanarak; kuaterniyon interval sistemi reel interval sistemi ile incelendi.

$$[x]=[A][x]+[b]$$

kuaterniyon interval sisteminin çözümü için bir metod olarak kullanılan

$$[x]^{k+1}=[A][x]^{k}+[b], k=0,1,...$$

iteratif sistemin yakınsaklığı için; $\mathbf{R}\left([A]\right)$, $\left|\mathbf{R}\left([A]\right)\right|$ reel matrislerini içeren kriterler sunuldu.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez; “kuaterniyon interval sayı”, “kuaterniyon interval vektör” ve “kuaterniyon interval matris” kavramlarının verildiği, kuaterniyon interval matris ve vektörleri içeren $[x]=[A][x]+[b]$ kuaterniyon interval sisteminin çözümünün varlığı için kriterlerin sunulduğu ve sistemin çözümünün formüle edildiği özgün bir çalışma olmuştur.

KAYNAKLAR

Adler, S. L., 1994. **Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields**. Oxford U:P:, New York.

Alefeld, G. ve Mayer, G., (2005). Enclosing Solutions of Singular Interval Systems Iteratively. **Reliable Computing**. 11: 165-190.

Alefeld, G. ve Mayer,G., 2004. On Singular Interval Systems, in:Alt, R., Frommer, A., Kearfott, R. B., and Luther, W. (eds.), Numerical Software with Result Verification (Platforms, Algorithms, Applications in Engineering, Physics and Economics), **Lecture Notes in Computer Science**, Springer, Berlin, pp:191-197.

Alefeld, G. ve Herzberger, J., 1983. **Introduction to Interval Computations**. Academic Press, New York.

Arndt, H. R., 2007. On Interval Systems $[x]=A[x]+[b]$ and the Powers of Interval Matrices in Complex Interval Arithmetics. **Reliable Computing**. 13: 245-259, DOI: 10.1007/s11155-006-9032-3.

Arndt, H. R. ve Mayer, G., 2005. On the Solutions of Interval System $[x]=A[x]+[b]$.**Reliable Computing**. 11(2): 87-103.

Arndt, H. R. ve Mayer, G., 2004. On the Semi-Converge of Interval Matrices. **Linear Algebra Appl**. 393: 15-37.

Balaji, G. V. ve Seader, J. D., 1995. Application of interval newton methods to chemical engineering problems. **Reliable Computing**. 1(3):215-223.

Boche, R. E., 1965. Complex interval arithmetic with some applications. **Technical Report LMSC4-22-66-1, Lockheed Missiles and Space Co**.

Chou, J.C.K., 1992. Quaternion Kinematic and Dynamic Differantial Equations. **IEEE Transaction on Robotics and Automation**. 8(4):53-64.

Fefferman, C. L. ve Seco, L.A., 1996. Interval arithmetic in quantum mechanics. (R.B.Kearfott and V. Kreinovich, Editors). In: **Applications of Interval Computations. Applied Optimization**. 3:145-167. Dordrecht, Netherlands, Kluwer.

Finkelstein, D., Jauch, J.M., Schiminovich, S. ve Speiser, D., 1959. **Notes on quaternion quantum mechanics.** CERN 59(9):59-17.

Funda, J. ve Richard, P.P., 1990. A Computational Analysis of Screw Transformations in Robotics. **IEEE Transaction on Robotics and Automation**. 6(3): 348-356.

Ganesan, K., 2007. On Some Properties of Interval Matrices. **International Journal of Computational and Mathematical Sciences.** 1;2 © www.waset.org Spring.

Gough, W., 1984. Quaternions and Spherical Harmonics. **Europan Journal of Physics**. 5:163-171.

Grob, J., Trenkler, G., Troschke, S.O., 2001. Quaternions: Further Contributions to a Matrix Oriented Approach. **Linear Algebra Appl**. 326 : 205-213.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, **Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Yayınları**. Math. No.2.

Hamilton, W. R., 1844. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. **Philosophical Magazine**. Vol. 25, no 3: 489-495.

Hamilton, W. R., 1866. **Elements of Quaternions**. University of Dublin Press. (William Edwin Hamilton, Editor).

Hamilton, W. R., 1899. **Elements of Quaternions volume I** (1901) volume II. Edited by Charles Jasper Joly; published by Longmans, Green & Co.

Hansen, E. R., 1997. Sharpness in Interval Computations. **Reliable Computing**. 3(1): 17–29.

Hansen E., Walster G. W., 2004. **Global Optimization Using Interval Analysis**, Second Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker, New York, ISBN 0-8247-4059-9.

Horn, R. A. ve Johnson, C. R., 1985. **Matrix Analysis.** Cambridge University Press, Cambridge.

Jaulin, J., Kieffer, M., Didrit, O. ve Walter, E., 2001. **Applied Interval Analysis**. Springer-Verlag London Limited.

Kula, L. 2003. **Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları**. Doktora Tezi.

Mayer, G. ve Warnke, I., On the Fixed Points of the Interval Function $[f]([x]) = [A][x] + [b]$, **Linear Algebra Appl**. (2003) **363:** 201--216.

Moore, R. E., Kearfott, R. B. ve Cloud, M. J., 2009. **Introduction to Interval Analysis**. SIAM, ISBN 978-0-898716-69-6.

Moore, R. E., 1966. **Interval Analysis**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J.

Moore, R. E., 1959. **Automatic error analysis in digital computation**. Technical Report Space Div. Report LMSD84821, Lockheed Missiles and Space Co.

Moore, R. E., 1999. The dawning. **Reliable Computing**. 5:423-424.

Moore, R. E., Strother, W., ve Yang, C. T., 1960. **Interval integrals**. Technical Report Space Div. Report LMSD703073, Lockheed Missiles and Space Co.

Neumaier, A., 1990. **Interval Methods for Systems of Equations**. Cambridge University Press,London.

Özdaş, K. ve Özdaş, A., 1989. Fiziksel Niceliklerin Kuaterniyonlarla Temsili. **Fen Edebiyat Dergisi.** 1, 2, 101-113.

Özdaş, K., 1995. Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları. **Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları,** Eskişehir, Türkiye.

Reiter, A., 1965. **Interval arithmetic package (INTERVAL).** Technical Report, Univ. of Wisconsin Mathematics Research Center.

Rohn, J., 1993. Inverse Interval Matrix. **SIAM J. Numerical Anal.** vol. 30, no. 3:864–870.

Rohn, J., 1989. Systems of Linear Interval Equations. **Linear Algebra and Its Applications.** 126:39-78.

Silva, C:C. ve Martins, R. A., 2002. Polar and Axial Vectors Versus Quatrenions. **American Journal of Physics**. 70,9: 958-964.

Snyder, J.M., 1992. Interval analysis for computer graphics. **Computer Graphics.** 26(2): 121-130.

Tanışlı, M., 1995. **Uzaysal Dönmelerin ve Robot Kollarının Pozisyonunun Kuaterniyon Dönüşümleri ile İncelenmesi.** Doktora Tezi. Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye.

Wang, Q. W., van derWoude, J.W., Chang, H.X., 2009. A System of Real Quaternion Matrix Equations with Applications. **Linear Algebra and Its Applications**. 431: 2291-2303.

Ward, J. P., 1997. **Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications**. Published by Kluwer Acedemic Publishers,250 s.

Zhang, F., 1997. Quaternions and Matrices of Quaternions. **Linear Algebra and Its Applications**. 251:21- 57.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK ‘e çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen sayın bölüm başkanım Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ’a ayrıca çalışmalarım sırasında değerli görüş, katkı ve bilgilerini esirgemeyen hocalarım sayın Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU ve Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN’e teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında yanımda bulunan bütün arkadaşlarıma ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Cennet BOLAT

Eylül 2010

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adana'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi aynı ilde tamamladım. 2002-2006 yılları arasında Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisansımı tamamladım. 2008 yılından bu yana Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.