MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BLOKLARA AYRILMIŞ MATRİSLERİN KHATRİ-RAO ve TRACY-SİNGH ÇARPIMLARI İÇİN ALGORİTMALAR

TUBA PARLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY

Eylül–2010

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BLOKLARA AYRILMIŞ MATRİSLERİN KHATRİ-RAO ve TRACY-SİNGH ÇARPIMLARI İÇİN ALGORİTMALAR

TUBA PARLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK danışmanlığında hazırlanan bu tez 03/09/2010 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK	Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN	Yrd. Doç. Dr. H. Ali ÇETİNKARA
Başkan	Üye	Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Necat AĞCA

Enstitü Müdürü

.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

BLOKLARA AYRILMIŞ MATRİSLERİN KHATRI-RAO VE TRACY-SINGH ÇARPIMLARI İÇİN ALGORİTMALAR

Khatri-Rao çarpımı ve Tracy-Singh çarpımı sırasıyla genelleştirilmiş Hadamard çarpımı ve Kronecker çarpımı olarak bilinmektedir. Bu çalışmada, bloklara ayrılmış matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarını bilgisayar ortamında hesaplayan MATLAB algoritması tanımlanmakta, algoritmanın akış çizelgesi verilerek algoritma adımsal olarak anlatılmaktadır. Son olarak, algoritma örneklerle test edilmektedir.

2010, 48 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Blok matris çarpımları; Hadamard çarpımı; Kronecker çarpımı; Khatri-Rao çarpımı; Tracy-Singh çarpımı; MATLAB; algoritma.

ABSTRACT

ALGORITHMS FOR KHATRI-RAO AND TRACY-SINGH PRODUCTS OF PARTITIONED MATRICES

The Khatri-Rao and Tracy-Singh products are known as generalized Hadamard and generalized Kronecker products, respectively. In this study, the MATLAB algorithms which computes the Khatri-Rao and Tracy-Singh products of the partitioned matrices on computer has been defined, has been giving the flowchart of the algorithms the algorithms has been explained stepwisely. Finally, the algorithm has been tested with examples.

2010, 48 pages

Key Words: Block matrix products; Hadamard product; Kronecker product; Khatri-Rao product; Tracy-Singh product; MATLAB; algorithm.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$M_{m,n}(\mathbb{R})$	$m\times n$ tipinde Reel Matrisler Kümesi
$M_{m,n}(\mathbb{C})$	$m\times n$ tipinde Kompleks Matrisler Kümesi
$M_{n}(\mathbb{R})$	$n\times n$ tipinde Reel Matrisler Kümesi
$M_{n}(\mathbb{C})$	$n\times n$ tipinde Kompleks Matrisler Kümesi
$A\circ B$	Hadamard Matris Çarpımı
$A\otimes B$	Kronecker Matris Çarpımı
$A*B$	Khatri-Rao Matris Çarpımı
$A\Theta B$	Tracy-Singh Matris Çarpımı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Çoğu bilimsel problemin matematiksel modellemeleri bünyelerinde matrisleri barındırmalarının:

- $Ax = b$ formundaki denklem sistemleri
- $AX + XB = C$ Lyapanov matris denklem sistemleri

yanı sıra çoğu zaman da problemin çözümüne, problemin matrissel formda ifade edilmesi yolu ile

- Yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerin birinci mertebeden matris sistemine indirgenmesi $(\dot{z} = Az + f)$
- Benzer olarak, yüksek mertebeden fark denklemlerin birinci mertebeden matris sistemine indirgenmesi $(z_{n+1} = Az_n + f_n)$

ulaşılmak istenmektedir.

Problemin çözümüne matrissel yoldan gidilmek istenmesi veya matrislerin taşıdığı özelliklere göre problemin yorumlanması düşüncesi matris çarpımlarını tanımlama zorunluluğu gerektirmektedir:

- A ve b matrislerinin adi çarpımı sayesinde, A tersinir matris olmak üzere $Ax = b$ sisteminin x çözümü, $x = A^{-1}b$ şeklinde ifade edilmektedir.
- Reel simetrik iki $n \times n$ $A = [a_{ij}]_{ij}$ ve $B = [b_{ij}]_{ij}$ pozitif tanımlı matrislerin Hadamard çarpım matrisinin bileşenlerinin toplamının pozitif olduğunun bilinmesi $\left(\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} > 0 \right)$, bazı başlangıç değerli eliptik kısmi diferansiyel denklemleri için teklik teoremi elde etmede kullanılan önemli bir sonuçtur (Moutard, 1894).
- Birinci mertebeden homojen diferensiyel denklemlerinin $(\dot{z} = Az)$ (veya fark denklemlerin $(z_{n+1} = Az_n)$) aşikâr çözümünün asimptotik kararlılığını belirleyen A n-kare katsayı matrisinin kararlılığını araştırmada kullanılan

$$AX + XA = C$$

Lyapunov matris denklemi, Kronecker çarpım yardımıyla

$$[(I \otimes A) + (A^T \otimes I)]vecX = vecC$$

şeklinde $\mathrm{HZ} = \mathrm{B}$ formuna indirgenmektedir. Böylece matrislerdeki adi çarpım ve Kronecker çarpım özellikleri kullanılarak Lyapunov matris denkleminin X çözümüne ve bu çözüme göre de A matrisinin kararlı olup olmadığına ulaşılmaktadır.

1.1. Amaç ve Kapsam

Önceki bölümde bazı uygulama alanlarına değindiğimiz matris çarpımları, artık çoğu matematiksel problemin çözümüne ulaşmada kullanılan önemli araçlar olarak görülmektedirler. Bu sebepten, bu çarpımlar üzerine kurulan her bir teori bir uygulama alanı bulmaktadır. Çoğu zaman ise, kurulan teorilerin sayısal olarak desteklenmesine veya kontrolüne gerek duyulmaktadır. Çarpıma giren matrislerin boyutlarına doğru orantılı olarak boyutları hızla büyüyen Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarını hesaplamada hız, kolaylık ve de doğruluk sağlayacak bilgisayar destekli matematiksel programlar için geliştirilen algoritmalar, bu çarpımlar üzerine çalışanlar için önem kazanmaktadır.

Bu çalışmamızda, genelleştirilmiş Hadamard çarpımı olarak bilinen Khatri-Rao ve genelleştirilmiş Kronecker çarpımı olarak bilinen Tracy-Singh çarpımı için, MATLAB programını kullanarak algoritmalar geliştirdik. Sayısal örneklerle de, algoritmaların doğruluğunu test ettik.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Son birkaç yıldır matris cebrinde, çok değişkenli istatistiksel analiz, doğrusal programlama, sinyal işleme ve diğer birçok konular üzerinde önemli bir rolü olan bölümlenmiş matris çarpımlarına ve bazı genelleştirilmiş permütasyon matrislerine bir ilgi artışı da olmuştur (Tracy ve Jinadasa, 1989; Mišić ve ark., 1999; Van Loan, 2000; Al Zhour ve Kiliçman, 2005; Al Zhour ve ark., 2005; Kiliçman ve Al Zhour, 2007).

Bölümlenmiş matrisler için tanımlanan Khatri-Rao çarpımı $(A * B)$, genelleştirilmiş bir Hadamard çarpımı $(A \circ B)$ olarak (Khatri ve Rao, 1968), Tracy-Singh çarpımı $(A \Theta B)$, genelleştirilmiş bir Kronecker çarpımı $(A \otimes B)$ olarak (Tracy ve Singh, 1972) görülür.

Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh matris çarpımlarının tanımlandığı ve çoğu temel özeliklerinin sunulduğu temel kaynaklar olarak, (Graham, 1981), (Rao ve ark., 1998), (Steeb, 1997), (Visick, 2000), (Liu, 2002), (Lev-Ari, 2005), (Al Zhour ve Kiliçman, 2006a) ve (Al Zhour ve Kiliçman, 2006b) çalışmaları verilebilir.

Hadamard çarpımları, periyodik fonksiyonların konvolüsyonlarının trigonometrik momentlerinin yorumlanmalarında, integral denklem çekirdeklerinin çarpımlarının elde edilmelerinde, kısmi diferensiyel denklemlerin zayıf minimum prensibinin oluşturulmasında önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Tauber (1978) Hadamard çarpımı ile bir hava kirliliği probleminin kısmi diferensiyel denklemini çözmüştür ve Ando (1978) köşegen matrislerin Hadamard çarpımları ile ilgili çeşitli yaklaşımlar sunmuştur.

Hadamard çarpımı, değişmeli, birleşmeli ve toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Lev-Ari (2005), kare matrisin köşegen elemanlarının oluşturduğu bir sütun vektörü olan köşegen çıkarım operatörü *Vec d(.)* yi tanımlamış ve Kronecker, Khatri-Rao ve Hadamard çarpımları arasında yeni ilişkiler kurmuştur. Bu sayede matris en küçük kareler probleminin çözümünde çok verimli hesaplama yöntemleri geliştirilmiştir.

Kronecker çarpımlarına ilginin artmasındaki temel nedenlerden biri, Kronecker çarpımlarının, vektör operatörleri ile birlikte kontrol teorisi, sistem teorisi, istatistik, fizik, haberleşme sistemleri, optimizasyon, ekonomi, kuramsal ve uygulamalı matematiğin diğer bir çok alanında sorunları geniş bir yelpazede çözmede önemli rolü olduğunun doğrulanmasıdır. Kronecker çarpım ayrıca, sinyal işleme, doğrusal programlama, matris denklemleri, matris diferansiyel denklemleri, kesirli ifadeleri içeren hesaplamalar gibi alanlarda da aktif rol oynamaktadır (Tauber, 1978; Al Zhour ve Kiliçman, 2005; Al Zhour ve ark., 2005; Ding ve Chen, 2005; Kiliçman ve Al Zhour, 2005a; Kiliçman ve Al Zhour, 2005b; Kiliçman ve Al Zhour, 2007). Bir diğer temel neden ise, Kronecker çarpımlarının anlaşılması kolay, kullanımı basit ve zengin cebriyle hızlı ve pratik algoritmaları desteklemesidir.

Kronecker çarpımları oldukça dikkat çekici özelliklere sahiptir. *A* ve *B* aynı boyutta matrisler olmak üzere, *A* ve *B*'nin Hadamard çarpım matrisinin $(A \circ B)$, *A* ve *B*'nin Kronecker çarpımının $(A \otimes B)$ bir alt matrisi olması özelliği (Kronecker çarpımın Hadamard çarpımı barındırması), Kronecker çarpımın en dikkat çekici özelliği olarak değerlendirilmektedir (Horn ve Johnson, 1990; Zhang, 1999).

Koning ve ark. (1991) blok Kronecker çarpımı $A \overset{b}{\otimes} B$ olarak adlandırılan Tracy-Singh çarpımını tanımladılar. Tracy ve Jinadasa (1989), Tracy-Singh ve Kronecker çarpımları arasında ilişkiler kurmak için bazı genelleştirilmiş permütasyon matrislerini kullandılar. Liu (1999) sıfırlardan ve birlerden oluşan Z_1 ve Z_2 bölümlenmiş matrislerini tanımladı ve bu tanımlamaları Tracy-Singh ve Kronecker çarpımları arasında temel bazı bağlantılar kurmak için kullandı.

Al-Zhour ve Kiliçman (2006), çeşitli pozitif matrislerin Khatri-Rao çarpımlarını içeren genelleştirilmiş eşitsizlikler ve bazı genellemeler verdi, Liu (2002) pozitif tanımlı matrislerin Khatri-Rao çarpımlarını içeren çeşitli eşitsizlikler sundu ve bu eşitsizliklerin istatistiksel uygulamalarına değindi. Xu ve ark. (2006) büyüme eğrisi modeli ile üretilen bilinmeyen blok köşegen regresyon katsayı matrisini tahmin etmek için Tracy-Singh çarpımını kullandı. Tracy ve Jinadasa (1989) belirtilen istatistik uygulamalar ile rastgele matrislerin Tracy-Singh çarpımlarının kovaryanslarını ve beklentilerini türetmiştir ve Koning ve ark. (1991) *k*-faktöriyel kovaryans yapıların tahmininde blok Kronecker ve Tracy-Singh çarpımlarını kullanmışlardır.

Bu çalışmada ise, bloklara ayrılmış matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarını bilgisayar ortamında hesaplayan MATLAB algoritmaları verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünün ilk kısmında, matrisler üzerine genel tanım ve özellikler, bazı özel matris tanımlamaları, bazı özel matris çarpım tanımlamaları ile birlikte bu çarpımların genel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümünün ikinci kısmında ise MATLAB programı hakkında temel bilgiler sunulmuştur. Bloklara ayrılmış matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarını bilgisayar ortamında hesaplayan MATLAB algoritmalarının verildiği kısım temel bölümüdür. Bu kısımda algoritmaların doğruluğu örneklerle test edilmiştir. Çalışmanın dördüncü ve beşinci bölümünde ise, çalışmada ulaşılan sonuçlar ve çalışmanın daha da geliştirilebilmesi için sunduğumuz öneriler yer almaktadır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin ilerleyen bölümleri için gerekli ön bilgiler verilecektir.

3.1. Materyal

3.1.1. Matrisler ve Matris İşlemleri

3.1.1.1. Matrisler

Tanım 3.1 $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ skalerlerinin *m* satır ve *n* sütunlu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki dikdörtgensel bir yapı üzerine dizilmesi ile oluşan forma $m \times n$ tipinde bir reel (veya kompleks) matris denir ve $A = [a_{ij}]_{ij}$ kapalı formu ile gösterilir.

a_{ij} 'ye *(i,j)*-inci bileşen (*i*-inci satır, *j*-inci. sütundaki bileşen) veya *(i,j)*-inci eleman denir. *A* nın *i*-inci satırı

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m$$

ve *A* nın *j*-inci sütunu

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \qquad 1 \le j \le n$$

şeklindedir.

Eğer *m=n* ise, *A*'ya *n*-inci mertebeden bir kare matris denir.

$m \times n$ tipinde reel (veya kompleks) matrisler kümesi $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (veya $M_{m,n}(\mathbb{C})$) sembolü ile ifade edilir. *n*-kare reel (veya kompleks) matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{R})$ (veya $M_n(\mathbb{C})$) sembolü ile temsil edilir.

Tanım 3.2 $A=[a_{ij}]_{ij} \in M_n(\mathbb{R},\mathbb{C})$ karesel matrisinin $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarından oluşan köşegene, *A*'nın esas köşegeni denir.

Örnek 3.1 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ matrisleri sırasıyla 3×3 ve 1×3 tipindeki reel matrislere, $C=\begin{bmatrix} 2i \\ -1+i \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2i \end{bmatrix}$ matrisleri ise 4×1 ve 2×2 tipindeki kompleks matrislere birer örnektirler.

Tanım 3.3 $A=\left[a_{ij}\right]_{ij}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisleri için $a_{ij}=b_{ij}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, ise bu takdirde *A* ve *B* matrislerine eşit matrisler denir ve $A=B$ ile gösterilir.

Örnek 3.2 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$ matrisleri *w=1, x=-3, y=0* ve *z=5* durumunda eşit matrislerdir.

Tanım 3.4 *A*, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer *m=1* ise, yani *A*, $1\times n$ tipinde bir matris ise *A* matrisine *satır matrisi*; *n=1* ise, yani *A*, $m\times 1$ tipinde bir matris ise *A* matrisine *sütun matrisi* denir.

Örnek 3.3 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ matrisi satır matrisine, $B=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ matrisi de sütun matrisine birer örnektir.

Tanım 3.5 Bir matriste satır sayısı ile sütun sayısı eşit ise bu matrise *kare matris* denir. $n\times n$ tipindeki bir kare matrise, *n*-inci mertebeden kare matris denir. Ayrıca, *n*-inci mertebeden bir kare matriste, $i = 1, 2, \ldots, n$ için a_{ii} öğelerine matrisin *köşegen öğeleri* denir.

Örnek 3.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi 3-üncü mertebeden bir kare matristir. Kare matrisin köşegen öğeleri ise 1, 1 ve 3'tür.

Tanım 3.6 Bir matrisin tüm öğeleri sıfır ise, bu matrise *sıfır matris* denir ve $m \times n$ tipindeki bir sıfır matris $O_{m\times n}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.5 $O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri sıfır matrisine birer örnektir.

Tanım 3.7 *A, n*-inci mertebeden bir kare matris olsun. Her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine *köşegen matris* denir.

Örnek 3.6 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri sırasıyla 3-üncü ve 4-üncü mertebeden köşegen matrislerdir.

Tanım 3.8 Bir köşegen matriste, köşegen üzerindeki öğelerin hepsi eşit ise bu matrise *skaler matris* denir.

Örnek 3.7 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ matrisinin skaler matris olması için $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ olması gerektiğinden $x = 2$ ve $y = 2$ olmalıdır.

Tanım 3.9 Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki tüm öğeleri 1 ve geriye kalan bütün öğeleri 0 ise, bu matrise *birim matris* denir. *n*-inci mertebeden bir birim matris I_n ile gösterilir ve

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \; i = j \; ise \\ 0, \; i \neq j \; ise \end{cases}$$

olmak üzere $I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n}$ biçiminde ifade edilir.

Örnek 3.8 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri, sırasıyla 2-inci ve 5-inci mertebeden birim matrislerdir.

Tanım 3.10 $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matris verilsin. Eğer her *i,j* için $a_{ij} = a_{ji}$ ise *A* matrisine *simetrik matris* denir.

Örnek 3.9 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin simetrik olabilmesi için $i, j = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ olmalıdır. $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 4$ olduğundan *A* matrisi bir simetrik matristir.

Tanım 3.11 $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matris verilsin. Eğer her *i,j* için $a_{ij} = -a_{ji}$ ise *A* matrisine *ters simetrik matris* denir.

Bir ters simetrik matriste, $i = j$ olması durumunda $a_{ii} = -a_{ii}$ koşulunun ancak $a_{ii} = 0$ iken sağlandığına dikkat edersek, ters simetrik matrisin köşegen öğelerinin sıfır olması gerektiğini söyleyebiliriz.

Örnek 3.10 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 4-üncü mertebeden ters simetrik bir matristir.

Tanım 3.12 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisinde her $i < j$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine *altüçgensel matris*, her $i > j$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine *üstüçgensel matris* denir.

Örnek 3.11 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi altüçgensel matrise, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi üstüçgensel matrise birer örnektir.

Tanım 3.13 Bir A matrisini satırları ile sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise, A matrisinin *transpozesi* denir ve A^t ile gösterilir.

Örnek 3.12 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesi $A^t=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ matrisidir.

Tanım 3.14 A herhangi bir matris olsun. A matrisinin bir kısım satır ve sütunlarının silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin bir *alt matrisi* denir.

$A=\left[a_{ij}\right]_{ij}\in M_{3,5}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisini yatay ve dikey çizgelerle çeşitli alt matrislere ayırabiliriz. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

matrisi,

$$A_{11}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}a_{13} & a_{14} & a_{15}\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{bmatrix}$$

alt matrislerine ayrılır ve bloklara ayrılmış şekilde

$$A=\left[\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]$$

ile yazılır.

3.1.1.2. Bazı Özel Matrisler

Tanım 3.15 $x_i \neq y_j, 1\leq i, j\leq n,$ şartını sağlayan $x_i, y_j \in \mathbb{C},\ 1\leq i,\ j\leq n,$ sayıları için, elemanları

$$c_{ij}=\frac{1}{x_i-y_j},\ 1\leq i,\ j\leq n, \tag{3.2}$$

ile tanımlı $C=[c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ matrisine Cauchy matrisi denir.

Tanım 3.16 $n\geq 1$ tamsayısı ve $h_s,\ 0\leq s\leq 2n-2,\ x_k,\ 0\leq k\leq n-1,$ kompleks sayıları için

$$H_{n-1}(x,x)=\sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j}x_i\overline{x}_j$$

kuadratik formuna *Hankel formu* denir. Bu forma uyan ve

$$H_{n-1}=[h_{i+j}]_{i,j=0}^{n-1}$$

$$=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1}\\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_n\\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots & h_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-2}\end{bmatrix}$$

ile tanımlanan matrise de *Hankel matrisi* denir.

Tanım 3.17 $n \geq 1$ tamsayısı ve t_s, $-n+1 \leq s \leq n-1$, x_k, $0 \leq k \leq n-1$, kompleks sayıları için

$$T_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j} x_i \overline{x}_j$$

kuadratik formuna *Toeplitz formu* denir. Bu forma uyan ve

$$T_{n-1} = [t_{i-j}]_{i,j=0}^{n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-n+2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan matrise de *Toeplitz matrisi* denir.

Tanım 3.18 $h \neq 0$ ve $\dfrac{g}{h} \notin \mathbb{Z}$ olmak üzere, (3.2) ile tanımlı Cauchy matrisinde $x_i = g + ih,\ y_j = jh,\ 1 \leq i,\ j \leq n,$ alınarak oluşturulan

$$T_n = \left[\frac{1}{g+(i-j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

matrise *Cauchy-Toeplitz matrisi* denir.

Tanım 3.19 $h \neq 0$ ve $\dfrac{g}{h} \notin \mathbb{Z}$ olmak üzere, (3.2) ile tanımlı Cauchy matrisinde $x_i = g + ih,\ y_j = -jh,\ 1 \leq i,\ j \leq n,$ alınarak oluşturulan

$$H_n = \left[\frac{1}{g+(i+j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

matrise *Cauchy-Hankel matrisi* denir.

3.1.1.3. Matris İşlemleri

3.1.1.3.1. Adi Matris Toplamı ve Çarpımı

Tanım 3.20 $A=\left[a_{ij}\right]_{ij}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{ij}\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisleri için, bileşenleri

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$$

ile tanımlı $C=\left[c_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisine A ve B matrislerinin toplamı denir ve $A+B=C$ ile ifade edilir.

O halde A ve B matrislerinin toplanabilirliği, boyutlarının eşit olmasına bağlıdır.

Örnek 3.13 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}$ matrislerinin toplam matrisi

$$A+B=\begin{bmatrix}1+0 & -2+2 & 3+1\\ 2+1 & -1+3 & 4+(-4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.21 A_{ij} ve B_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, matrisleri sırasıyla $A=[A_{ij}]_{ij}$ ve $B=[B_{ij}]_{ij}$ matrislerinin alt matrisleri olsunlar. A ve B matrislerinin aynı indisli blokları toplanabilir ise (boyutları eşit ise) alt matrislere göre bileşenleri

$$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$$

ile tanımlı $C=[C_{ij}]_{ij}$ matrisine A ve B matrisinin toplamı denir.

Örnek 3.14 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}12 & 7 & 9\\ 4 & 8 & 0\\ 6 & 4 & 5\\ 10 & 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisleri

$$A=\left[\begin{array}{c|cc} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \text{ ve } B=\left[\begin{array}{c|cc} 12 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 0 \\ \hline 6 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

şeklinde bloklara ayrılabilir. Bu alt matrislere göre *A* ve *B*'nin toplamı

$$A+B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 11 & 9 & 14 \\ 7 & 12 & 1 \\ 8 & 5 & 10 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ile elde edilir.

Tanım 3.22 $A=\left[a_{ij}\right]_{ij}\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $B=\left[b_{ij}\right]_{ij}\in M_{n,p}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisleri için, bileşenleri

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\,,\, i=1,2,\ldots,m\,,\; j=1,2,\ldots,p$$

ile tanımlı $C=\left[c_{ij}\right]\in M_{m,p}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisine *A* ve *B* matrislerinin adi çarpımı denir ve $AB=C$ ile ifade edilir.

$A=\left[a_{ij}\right]_{ij}\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $B=\left[b_{ij}\right]_{ij}\in M_{n,p}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrislerinin çarpım matrisi daha açık bir gösterimle,

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\,,\, i=1,2,\ldots,m\,,\; j=1,2,\ldots,p$$

olmak üzere

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}=C$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 3.22’den görülmektedir ki, *A* ve *B* matrislerinin çarpılabilir olması için *A*’nın sütun sayısı ile *B*’nin satır sayısının eşit olması gerekmektedir.

Örnek 2.15 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin adi çarpımı

$$AB=\begin{bmatrix} (1)(-2)+(2)(4)+(-1)(2) & (1)(5)+(2)(-3)+(-1)(1) \\ (3)(-2)+(1)(4)+(4)(2) & (3)(5)+(1)(-3)+(4)(1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$A=\left[a_{ij}\right]_{ij}\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{ij}\in M_{s,t}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrislerinin çarpım matrisi elde edilmek istendiğinde, aşağıdaki durumlar ile karşılaşılır:

1. $n\neq s$ *ise* *BA* tanımlı değildir.
2. *AB* ve *BA* matrislerinin tanımlı olmaları için $n=s$ ve $m=t$ olmalıdır. Eğer, $n=s$ ve $m=t$ ise, *BA* $n\times n$ tipinde ve *AB* $m\times m$ tipinde matristirler. $m\neq n$ durumunda ise *AB* ve *BA* farklı mertebeden matrisler olacaktır.
3. *AB* ve *BA* aynı mertebeden olsalar bile, birbirlerine eşit olmayabilirler.

Örnek 3.16 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ eşit boyutlu matrislerin çarpım matrisleri

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ ve } BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

olup, $AB\neq BA$ dır.

Örnek 3.16, AB ve BA matrislerinin tanımlı olmaları durumunda, $AB=BA$ durumunun her zaman sağlanmayacağını göstermektedir.

Tanım 3.23 $r_i\times r_j$ boyutlu A_{ij} ve $r_j\times r_k$ boyutlu B_{jk} alt matrislerine göre $A=[A_{ij}]_{ij}$ ve $B=[B_{ij}]_{ij}$ matrisleri sırasıyla

$$A=\begin{bmatrix}[A_{11}] & [A_{12}] & \cdots & [A_{1q}]\\ [A_{21}] & [A_{22}] & \cdots & [A_{2q}]\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ [A_{r1}] & [A_{r2}] & \cdots & [A_{rq}]\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}[B_{11}] & [B_{12}] & \cdots & [B_{1s}]\\ [B_{21}] & [B_{22}] & \cdots & [B_{2s}]\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ [B_{q1}] & [B_{q2}] & \cdots & [B_{qs}]\end{bmatrix}$$

şeklinde bloklara ayrılsınlar. Bu takdirde, alt matrislerine göre bileşenleri

$$[C_{ik}]=\sum_{s=1}^{q}[A_{is}][B_{sk}]$$

olan $C=[C_{ik}]_{ik}$ matrisine, A ve B'nin bloklara ayrılarak elde edilen çarpım matrisi denir.

Örnek 3.17 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 9 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 6 & 7 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ matrislerinin çarpımı,

bu matrislerin

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 4\\ \hline 0 & 3 & -1 & 0\end{array}\right] \text{ ve } B=\left[\begin{array}{c|cc|ccc}2 & 5 & 9 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 6 & 7 & 0 & 2 & 1\\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right]$$

şeklinde bloklara ayrılarak blok çarpımları ile

$$AB=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&9\\6&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&9\\6&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix} \end{bmatrix.$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&4\\0&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\2&1&0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&4\\0&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\2&1&0\end{bmatrix} \end{matrix}\right]$$

şeklinde yazılır. Skaler matrislerin adi çarpımları ile A ve B'nin çarpımı,

$$AB=\begin{bmatrix}1&5&8&2&-2&2\\13&24&25&10&4&9\\2&18&20&1&5&1\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.1.1.3.2. Hadamard Matris Çarpımı

Tanım 3.24 $A=\left[a_{ij}\right]_{ij}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{ij}\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrislerinin Hadamard çarpımı,

$$A\circ B=\left[a_{ij}b_{ij}\right]_{ij}\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

şeklinde tanımlanır (Graham, 1981; Zhang, 1999; Liu, 1999; Visick, 2000; Liu, 2002).

$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümelerinin adi çarpım işlemine göre değişmeli olduklarından, A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A \circ B = \left[a_{ij} b_{ij} \right]_{ij}$$

$$= \left[b_{ij} a_{ij} \right]_{ij}$$

$$= B \circ A$$

özelliğine sahiptir.

Örnek 3.18 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 16 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= B \circ A$$

dır.

$A = \left[a_{ij} \right]_{ij}$, $B = \left[b_{ij} \right]_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ matrisleri verilsin ve $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$, $n = \sum_{j=1}^{s} n_j$ olmak üzere A_{ij} ve B_{ij} matrisleri sırasıyla *A* ve *B* matrislerinin $m_i \times n_j$ tipindeki alt matrisleri olsun. Bu takdirde, *A* ve *B* matrislerinin Hadamard çarpımı bir başka şekilde

$$A \circ B = \left[A_{ij} \circ B_{ij} \right]_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $A_{ij} \circ B_{ij}$, $m_i \times n_j$ tipinde *ij*-inci alt matristir.

Örnek 3.19 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin ve *A* ve *B* matrisleri sırasıyla

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \text{ ve } B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \end{array} \right]$$

şeklinde alt matrislere bölümlensin. Buradan *A* ve *B* matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A \circ B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \circ \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} \circ B_{11} & A_{12} \circ B_{12} \\ \hline A_{21} \circ B_{21} & A_{22} \circ B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 21 \\ 8 & 25 & 48 \\ \hline 21 & 48 & 81 \end{array}\right]$$

dir.

3.1.1.3.3. Kronecker Matris Çarpımı

Tanım 3.25 $A = \left[a_{ij} \right]_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ve $B = \left[b_{ij} \right]_{ij} \in M_{p,q}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ matrislerinin Kronecker çarpımı,

$$A \otimes B = \left[a_{ij} B \right]_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B & \cdots & a_{2n}B \\ a_{31}B & a_{32}B & a_{33}B & \cdots & a_{3n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & a_{m3}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

şeklinde tanımlanır (Graham, 1981; Rao, 1998; Zhang, 1999; Liu, 1999; Visick, 2000; Wei ve Zhang, 2000; Liu, 2002).

Burada, $a_{ij} B \in M_{p,q}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ matrisi, $A \otimes B$ matrisinin *ij*-inci alt matrisidir.

Örnek 3.20 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ matrislerinin Kronecker çarpımı,

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}B & 2B & 3B\\ 3B & 2B & B\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3\\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 9\\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1\\ 6 & 9 & 4 & 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.1.3.4. Khatri-Rao Matris Çarpımı

Tanım 3.26 $A\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisi $m_i\times n_j$ $(m=\sum_{i=1}^{r}m_i, n=\sum_{j=1}^{s}n_j)$ tipinde A_{ij} alt matrislerine ve $B\in M_{p,q}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisi de $p_k\times q_l$ $(p=\sum_{k=1}^{t}p_k, q=\sum_{l=1}^{h}q_l)$ tipinde B_{kl} alt matrislerine bölümlenmiş olsun. Bu takdirde, *A* ve *B* matrislerinin Khatri-Rao çarpımı,

$$A*B=\left[A_{ij}\otimes B_{ij}\right]_{ij}\in M_{M,N}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ M=\sum_{i=1}^{r}m_i p_i,\ N=\sum_{j=1}^{s}n_j q_j$$

şeklinde tanımlanır (Khatri ve Rao, 1968; Tracy, 1990; Horn ve Mathias, 1992; Liu, 1999; Cao ve ark., 2002; Zhang ve ark., 2002; Zhour ve Kiliçman, 2006a; Zhour ve Kiliçman, 2006b).

Burada, $A_{ij}\otimes B_{ij}$ matrisi $m_i p_i\times n_j q_j$ tipinde $A*B$ 'nin *ij*-inci alt matrisidir.

Örnek 3.21 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$ matrisleri verilsin ve

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

şeklinde bölümlensin. Bu bölümlemeye göre, *A* ve *B* matrislerinin Khatri-Rao çarpımı

$$A*B=\begin{bmatrix} A_{11}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12} \\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1B_{11} & 2B_{11} & 3B_{12} \\ 4B_{11} & 5B_{11} & 6B_{12} \\ 7B_{21} & 8B_{21} & 9B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 & 21 \\ 4 & 5 & 24 & 42 \\ 14 & 16 & 45 & 72 \\ 21 & 48 & 54 & 81 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.1.1.3.5. Tracy-Singh Matris Çarpımı

Tanım 3.27 $A\in M_{m,n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisi $m_i\times n_j$ $(m=\sum_{i=1}^{r} m_i, n=\sum_{j=1}^{s} n_j)$ tipinde A_{ij} alt matrislerine ve $B\in M_{p,q}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ matrisi de $p_k\times q_l$ $(p=\sum_{k=1}^{t} p_k, q=\sum_{l=1}^{h} q_l)$ tipinde B_{kl} alt matrislerine bölümlenmiş olsun. Bu takdirde, *A* ve *B* matrislerinin Tracy-Singh çarpımı

$$A\Theta B=\left[A_{ij}\Theta B\right]_{ij}=\left[\left[A_{ij}\otimes B_{kl}\right]_{kl}\right]_{ij}\in M_{mp,nq}(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

tanımlanır (Tracy ve Singh, 1972; Tracy ve Jinadasa, 1989; Tracy, 1990; Liu, 1999; Wei ve Zhang, 2000; Cao ve ark., 2002; Liu, 2002; Zhang ve ark., 2002; Zhour ve Kiliçman, 2006a; Zhour ve Kiliçman, 2006b).

Burada, $A_{ij} \otimes B_{kl}$, $m_i p_k \times n_j q_l$ tipinde *kl*-inci alt matris ve $A_{ij} \Theta B$, $m_i p \times n_j q$ tipinde *ij*-inci alt matristir.

Örnek 3.22 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin ve

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right], \; B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

şeklinde bölümlensin. Bu bölümlemeye göre, *A* ve *B* matrislerinin Tracy-Singh çarpımı

$$A\Theta B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}\Theta B & A_{12}\Theta B \\ \hline A_{21}\Theta B & A_{22}\Theta B \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} \otimes B_{11} & A_{11} \otimes B_{12} & A_{12} \otimes B_{11} & A_{12} \otimes B_{12} \\ \hline A_{11} \otimes B_{21} & A_{11} \otimes B_{22} & A_{12} \otimes B_{21} & A_{12} \otimes B_{22} \\ \hline A_{21} \otimes B_{11} & A_{21} \otimes B_{12} & A_{22} \otimes B_{11} & A_{22} \otimes B_{12} \\ \hline A_{21} \otimes B_{21} & A_{21} \otimes B_{22} & A_{22} \otimes B_{21} & A_{22} \otimes B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cccc|c|cc} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 14 & 3 & 12 & 21 \\ 4 & 5 & 16 & 28 & 20 & 35 & 6 & 24 & 42 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 8 & 10 & 16 & 6 & 15 & 24 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 12 & 18 & 9 & 18 & 27 \\ 8 & 10 & 20 & 32 & 25 & 40 & 12 & 30 & 48 \\ 12 & 15 & 24 & 36 & 30 & 45 & 18 & 36 & 54 \\ \hline 7 & 8 & 28 & 49 & 32 & 56 & 9 & 36 & 63 \\ \hline 14 & 16 & 35 & 56 & 40 & 64 & 18 & 45 & 72 \\ 21 & 24 & 42 & 63 & 48 & 72 & 27 & 54 & 81 \end{array}\right]$$

şeklinde elde edilir.

Liu (1999)'nun çalışmasında Kronecker çarpım ile Tracy-Singh çarpımı ve Hadamard çarpım ile Khatri-Rao çarpımı arasındaki

- Bölümlenmemiş A ve B matrisleri için,

$$A\Theta B = \left[a_{ij}\Theta B\right]_{ij} = \left[\left[a_{ij}\Theta B_{kl}\right]_{kl}\right]_{ij} = \left[\left[a_{ij}B_{kl}\right]_{kl}\right]_{ij} = \left[a_{ij}B\right]_{ij} = A\otimes B,$$

- $m\times n$ tipinde bölümlenmemiş A ve B matrisleri için,

$$A*B = \left[a_{ij}\otimes b_{ij}\right]_{ij} = \left[a_{ij}b_{ij}\right]_{ij} = A\circ B$$

bağıntıları verilerek, Khatri-Rao çarpımının genelleştirilmiş bir Hadamard çarpımı ve Tracy-Singh çarpımının ise genelleştirilmiş bir Kronecker çarpımı olarak görülebileceği belirtilmiştir.

3.2. Yöntem

3.2.1. MATLAB Programı

MATLAB (MATrix LABoratory), ilk defa Linpack ve Eispack projeleri ile başlanan matematik ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılmak üzere geliştirilmiş etkileşimli bir paket programlama dilidir. İlk sürümleri Fortran diliyle yazılmış olmakla beraber son sürümleri C dilinde hazırlanmıştır. MATLAB, temel olarak nümerik hesaplama, grafiksel veri gösterimi ve programlamayı içeren teknik ve bilimsel hesaplamalar için yazılmış yüksek performansa sahip bir yazılımdır. İlk başlarda bilim adamlarına problemlerin çözümüne matris temelli teknikleri kullanarak yardımcı olmaktaydı. Bugün ise geliştirilen yerleşik kütüphanesi ve uygulama ve programlama özellikleri ile gerek üniversite ortamlarında (başta matematik ve mühendislik olmak üzere tüm bilim dallarında) gerekse sanayi çevresinde yüksek verimli araştırma, geliştirme ve analiz aracı olarak yaygın bir kullanım alanı bulmuştur.

MATLAB programının belli başlı uygulama alanları: Matematik ve hesaplama işlemleri, algoritma geliştirme, veri toplama, modelleme, simülasyon (benzetim) ve prototipleme, veri analizi ve görsel efektlerle destekli gösterim, bilimsel ve mühendislik alanında grafik işlemleri, grafiksel kullanıcı arayüz yapısını da içine alan uygulama geliştirme şeklinde özetlenebilir. MATLAB; kontrol, görüntü işleme, istatistik, optimizasyon, bulanık mantık, sinir ağları, sayısal işaret işleme, güç sistemleri, filtre dizaynı, genetik algoritma, grafik, veri tabanı, web sunucusu, finans bir çok alanda güvenli bir şekilde kullanılacak araç kutuları içerir. MATLAB’in sürekli olarak geliştirilen sürümleri kullanıcıya yeni kullanım alanları sunmaktadır. MATLAB’in bir diğer üstünlüğü de, bilinen algoritmaların birçoğunu birkaç komut ile çözerek kullanıcıya sunmasıdır. MATLAB ile bir dosya derlenerek exe haline getirilmeden yorumlayarak çalıştırılabilir. Bu da hataları ayıklama sürecini kısaltır.

MATLAB’da bütün değişkenler matris olarak ele alınırlar. Boyutu 1×1 olan bir matrise skaler adı verilir. Tek satırlı veya tek sütunlu matrislere vektör adı da verilir. Bir skalere de tek elemanlı vektör olarak bakılabilir.

MATLAB, komut temelli bir programdır. Komut penceresinde “»” işareti MATLAB’in komut satırını gösterir. MATLAB diğer programlama dillerinde olduğu gibi bir giriş olarak çeşitli matematiksel ve metinsel ifadeler sağlar. Bu ifadeler dört temel başlıkta incelenir: sayılar, değişkenler, işleçler, fonksiyonlar.

Diğer programlama dillerinden farklı olarak MATLAB ile matrisler üzerindeki işlemlerinizi hızla ve kolaylıkla gerçekleştirebilirsiniz. MATLAB ile matris oluşturmanın farklı yöntemleri vardır:

- Eleman listesi olarak girme ([x…;x…;…])
- Veri dosyalarından yükleme
- Hazır fonksiyonlar yardımıyla oluşturma
- M-dosyaları şeklinde oluşturduğunuz fonksiyonlarınız aracılığı ile oluşturma

Komut satırında eleman listesi olarak girerek aşağıdaki biçimde *A* matrisini kolaylıkla oluşturabilirsiniz:

» A=[16 3 2 13; 5 10 11 8; 9 6 7 12; 4 15 14 1]

MATLAB girdiğiniz matrisi

A =

16 3 2 13

5 10 11 8

9 6 7 12

4 15 14 1

şeklinde ekrana yansıtacaktır.

» A = 1;

» A(2) = 2;

» A(2,2)=3;

Yukarıda verilen kodlar ile ne yapıldığını inceleyelim; ilk satırda "*A*" adlı 1x1'lik bir matris yaratır ve bu matrisin tek elemanına 1 değerini atar. İkinci satırda bu matrisi 1x2'lik olacak şekilde genişletir ve ikinci elemanına 2 değerini atar. Bu noktada $A=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ olmuştur. Üçüncü satırda *A* matrisini 2x2 olacak şekilde genişletir. İkinci satırın ikinci elemanına 3 değerini atar ve boş kalan yerleri sıfır ile doldurur. Artık *A* matrisimiz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

haline gelmiştir.

Matris elemanlarını bulmak için ilgili satır ve sütunların numaraları parantez içinde virgülle ayrılmış olarak verilmelidir.

A=[16 3 2 13; 5 10 11 8; 9 6 7 12; 4 15 14 1]

A(3,1), A matrisinin üçüncü satır, birinci sütunundaki elemanı 9'u verecektir.

MATLAB'de tanımlı bazı özel matrislerden bahsedelim:

```
» B=zeros(2,2)
B =
     0     0
     0     0
```

2x2 boyutunda elemanları 0 olan B matrisini oluşturur.

```
» C=ones(2,3)
C =
     1     1     1
     1     1     1
```

2x3 boyutunda elemanları 1 olan C matrisini oluşturur.

MATLAB'de, bir matrisin boyutunu bulmak için *size* fonksiyonu kullanılır.

```
» D=[ 2  3  4  5  6
       7  8  9 10 11];
» s=size(D)
s =
     2     5
```

Bir vektörün uzunluğunu ya da matristeki en büyük boyut değerini bulmak için ise *length* komutu kullanılır.

```
» E=[ 17 11 0 30 40 50];
» k=length(E)
k =
     6
» EE=[1 2 3 4 5;4 5 6 7 8;6 7 8 9 10]
```

```
EE =
     1     2     3     4     5
     4     5     6     7     8
     6     7     8     9    10
» length(EE)
ans =
     5
```

MATLAB’de çeşitli akış kontrol yapıları mevcuttur: if-else-end, switch, for, while, continue ve break yapıları gibi. MATLAB diğer programlar gibi aritmetiksel, mantıksal ve ilişkisel işleçleri kullanmaktadır.

İlişkisel işleçler: < (küçük), <= (küçük ya da eşit), > (büyük), >= (büyük ya da eşit), == (eşit), ~= (eşit değil); mantıksal işleçler: & (ve işleci), | (ya da işleci), ~ (değil işleci=) olarak verilir.

if-else-end yapısı genel olarak,

```
if   ifade
          deyim-1
else
          deyim-2
end
```

şeklindedir. Burada ‘ifade’ doğru ise deyim-1 satırı doğru değilse deyim-2 satırı işler.

Bir grup işlemi öngörülen sayıda tekrarlayan *for* döngü yapısı

```
for i = 1:m
          for j = 1:n
                    H(i,j) = 1/(i+j);
          end
end
```

şeklinde örneklenebilir. Burada H matrisinin i. satır, j. sütun elemanları döngü içerisinde 1/(i+j) formülü ile oluşturulur.

“while” döngü yapısı ise bir grup işlemi mantıksal bir koşula bağlı olarak tekrarlar:

while ifade

deyimler

….

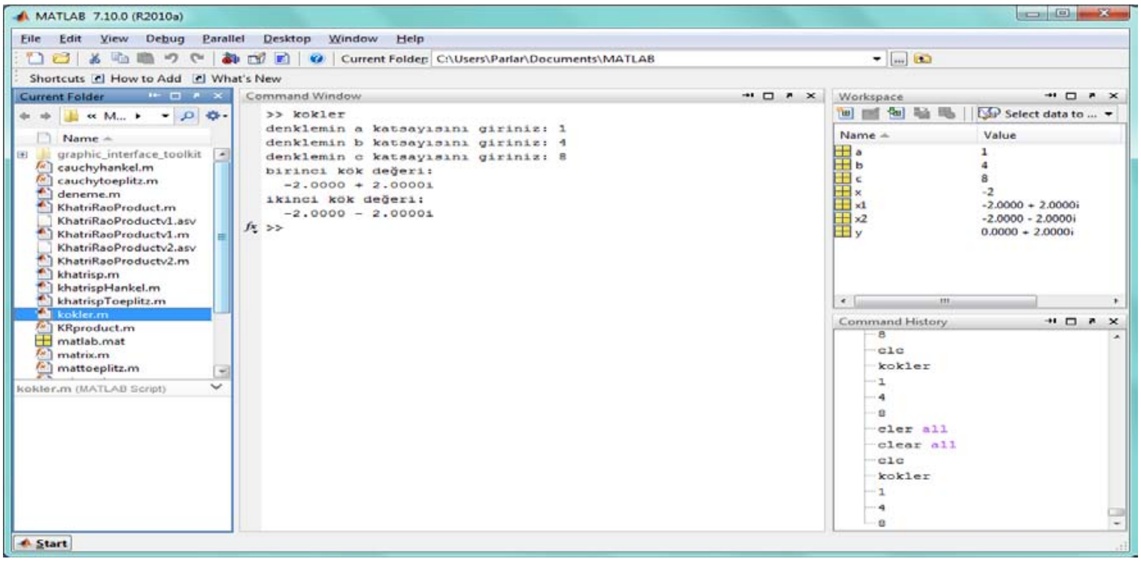
end

MATLAB Programındaki text dosyalarına M-file denir. Bu script dosyalarının uzantısı ‘m’dir. Bir script dosyası yaratmak için File menüsünden “New” sekmesi seçilir. Şimdi basit bir problemi çözen bir M-file ile MATLAB ile programlamaya bir örnek verelim.

```
% kokler.m
% ikinci dereceden bir denklemin köklerinin hesaplanması


a=input('denklemin a katsayısını giriniz: ');
b=input('denklemin b katsayısını giriniz: ');
c=input('denklemin c katsayısını giriniz: ');
x=-b/(2*a);
y=sqrt(b^2-4*a*c)/(2*a);
x1=x+y;
x2=x-y;
disp('birinci kök değeri: ');
disp(x1);
disp('ikinci kök değeri: ');
disp(x2);
```

Çalışma alanı penceresinde değişken adları ve içerdiği değerler görülür.



Şekil 3.1 *kökler.m* programının sonuç ekranı

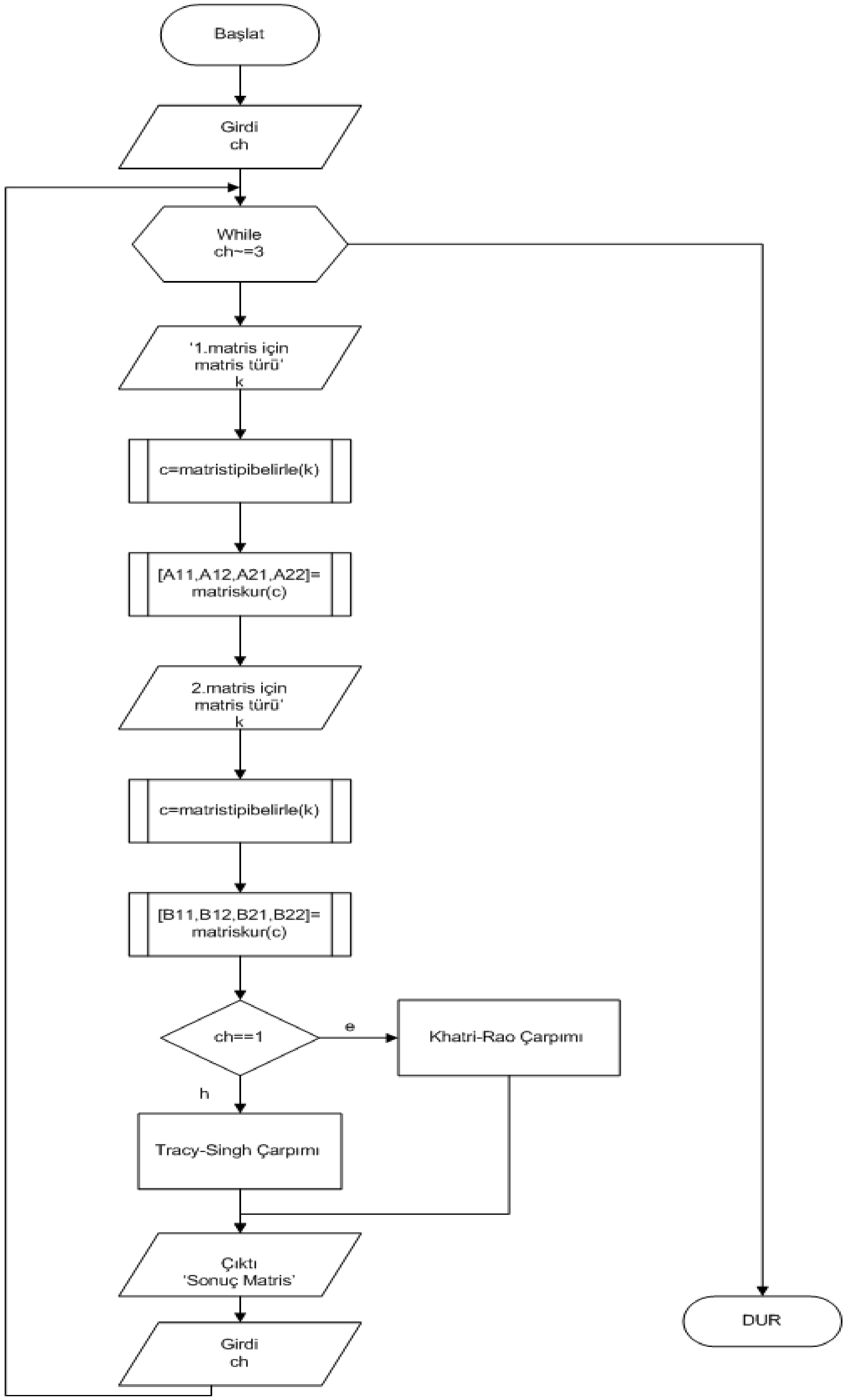
3.2.2. Bloklara Ayrılmış Matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh Çarpımları için Algoritmalar

Bu bölümde, Khatri-Rao ve Tracy-Singh matris çarpımlarının bilgisayar ortamında hesaplanmasına ilişkin algoritma girdi ve çıktı değişkenleri verilerek Şekil 3.2'deki akış çizgesi ile tanımlanmıştır.

Algoritma : Bloklara ayrılmış matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh Çarpımları için Algoritmalar

Girdi Değişkenleri : Çarpım Matrisleri A ve B; Blok matris satır ve sütun değerleri; Matris elemanlarının hesaplanması yöntem tercihleri; Manuel seçimde matris elemanlarının girişi

Çıktı Değişkenleri : Sonuç Matrisi



Şekil 3.2 *KRTSP.m* programının akış çizgesi

Bloklara ayrılmış matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh Çarpımları Algoritması adımsal olarak şu şekilde verilebilir:

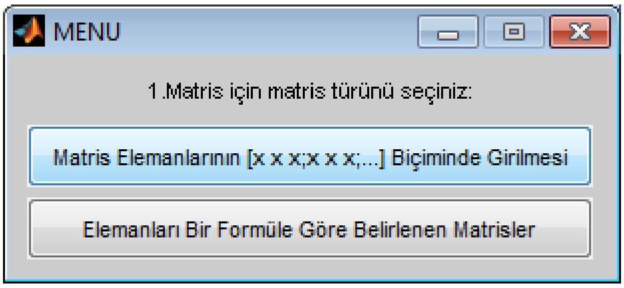
Adım 1.

Programın genel mantığı çerçevesinde, önce Khatri-Rao ya da Tracy-Singh çarpım türü Şekil 3.3'de verilen kullanıcı sorgu ekranı ile belirlenir; aynı zamanda programın sonlandırılması da sorgulanır. Program sonlandırılmadığı sürece Adım 2, 3, 4, 5 ve Adım 6 işlemleri bir döngü içerisinde yinelenir.

Şekil 3.3 Ana menü görünümü

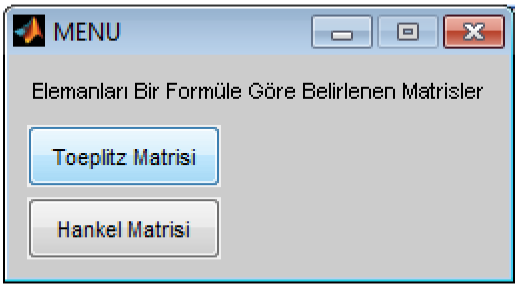
Adım 2.

Çarpım işleminde kullanılacak A ve B matrislerin oluşturulması işlemine geçilir. Önce A matrisinin değerlerinin belirlenmesi için kullanıcıdan yöntem istenir (Şekil 3.4).



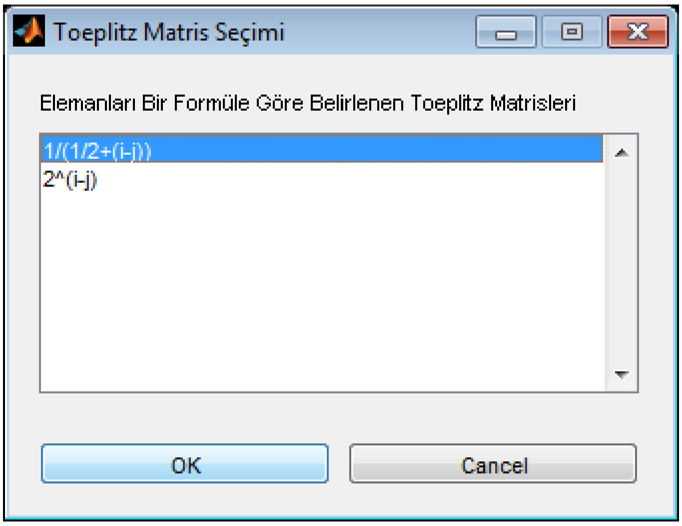
Şekil 3.4 Matris türü seçimi ekranı

Eğer 'Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen Matrisler' seçilirse bir sorgu ekranı ile daha karşılaşılır (Şekil 3.5).



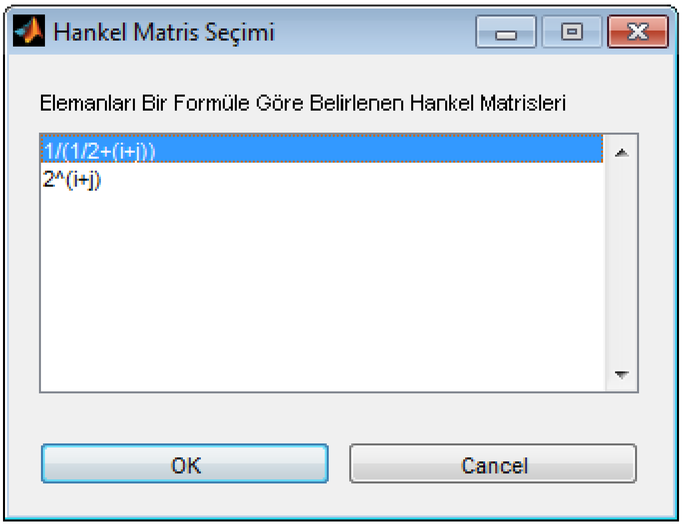
Şekil 3.5 Elemanları formüle bağlı matris türü seçimi ekranı

Bu ekrandaki matris türleri arasından seçim yapılarak, oluşturulacak matris için matris türü belirlenir. Toeplitz Matrisi seçildiğinde Şekil 3.6'daki liste kutusu ekranı görüntülenir. Seçenekler arasından tercih yapılır.



Şekil 3.6 Toeplitz matris türü seçimi ekranı

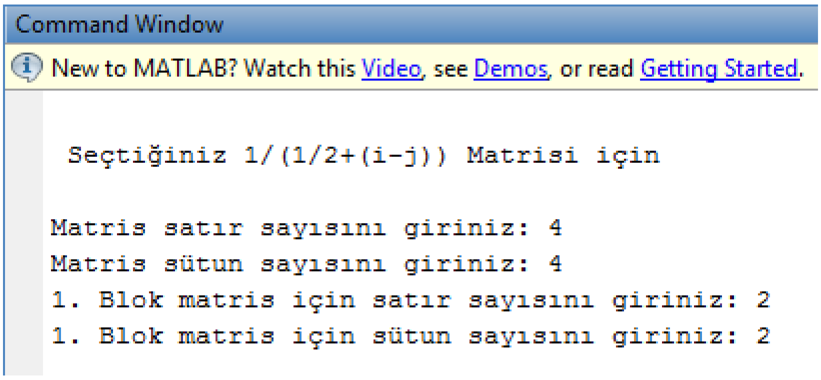
Hankel Matrisi seçildiğinde ise Şekil 3.7'deki liste kutusu ekranı görüntülenir. Seçenekler arasından tercih yapılır.



Şekil 3.7 Hankel matris türü seçimi ekranı

Adım 3.

Matris elemanlarını oluşturmak için yöntem belirlendikten sonra *matriskur.m* fonksiyonu çağrılarak önce oluşturulacak matrisin satır ve sütun değerleri kullanıcı sorgusu ile belirlenir. Sonra bloklara ayırma işlemi için yine kullanıcı sorgusu ile 1-inci blok matris satır ve sütun sayısı belirlenir (Şekil 3.).



Şekil 3.8 Matris türü seçiminden sonra satır ve sütun sayılarının girilmesi

Bu aşamada, çarpımları yapılacak A ve B matrislerinin elemanları oluşturulur. Yapılan yöntem seçimi eğer 'Matris Elemanlarının [x x x;x x x;...] Biçiminde Girilmesi' ise, aşağıdaki gibi manüel olarak matris girişi gerçekleştirilir (Şekil 3.9).

```
 Seçtiğiniz Elemanları Manüel Giriş Seçeneği için

Matris satır sayısını giriniz: 5
Matris sütun sayısını giriniz: 3
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 3
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 2
Matris elemanlarını [x x x;x x x;...] biçiminde giriniz: [1 -1 3;0 2 1;1 0 2;3 5 -1;4 2 1]
```

Şekil 3.9 Manüel olarak matris elemanlarının girilmesi

'Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen Matrisler' yöntemi seçilmiş ise *matristipi.m* fonksiyonunun döndürdüğü bu seçim koduna göre *cauchyhankel.m, cauchytoeplitz.m* fonksiyonları gibi koşula uygun bir fonksiyon çağrılarak matris elemanları fonksiyon yardımı ile oluşturulur. *matriskur.m* fonksiyonunda son olarak bloklara ayırma işlemi de gerçekleştirilir.

Adım 5.

Çarpıma girecek ikinci matris olan B matrisinin oluşturulması için de Adım 2, 3 ve 4'deki işlemler tekrarlanır. Böylece B matrisi de kullanıcıdan alınan seçimlere göre oluşturulur ve bloklara ayrılır.

Adım 6.

Bu aşamada, Adım 1'de belirlenen çarpım türüne göre bloklara ayrılmış matris çarpımı seçime bağlı olarak Khatri-Rao ya da Tracy-Singh çarpımı olarak gerçekleştirilir. Çarpım sonunda elde edilen blok matrisler birleştirilerek sonuç matris elde edilir ve ekranda gösterilir (Şekil 3.10).

Program akışı tekrar Adım 1 e dönecektir. 'Çıkış' seçeneği seçilmedikçe döngü devam ederek kullanıcı sorgusu ile belirlenen tercihlere göre çarpım işlemleri istenilen matrisler üzerinde uygulanır.

```
 Seçtiğiniz 1/(1/2+(i-j)) Matrisi için

Matris satır sayısını giriniz: 4
Matris sütun sayısını giriniz: 4
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 2
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 2

 Seçtiğiniz 1/(1/2+(i+j)) Matrisi için

Matris satır sayısını giriniz: 5
Matris sütun sayısını giriniz: 5
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 3
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 3

Khatri-Rao Çarpımı
Sonuç Matrisi:
    0.8000    0.5714    0.4444   -0.8000   -0.5714   -0.4444   -0.1212   -0.1026   -0.0727   -0.0615
    0.5714    0.4444    0.3636   -0.5714   -0.4444   -0.3636   -0.1026   -0.0889   -0.0615   -0.0533
    0.4444    0.3636    0.3077   -0.4444   -0.3636   -0.3077   -0.0889   -0.0784   -0.0533   -0.0471
    0.2667    0.1905    0.1481    0.8000    0.5714    0.4444   -0.3636   -0.3077   -0.1212   -0.1026
    0.1905    0.1481    0.1212    0.5714    0.4444    0.3636   -0.3077   -0.2667   -0.1026   -0.0889
    0.1481    0.1212    0.1026    0.4444    0.3636    0.3077   -0.2667   -0.2353   -0.0889   -0.0784
    0.0727    0.0615    0.0533    0.1212    0.1026    0.0889    0.2353    0.2105   -0.2353   -0.2105
    0.0615    0.0533    0.0471    0.1026    0.0889    0.0784    0.2105    0.1905   -0.2105   -0.1905
    0.0519    0.0440    0.0381    0.0727    0.0615    0.0533    0.0784    0.0702    0.2353    0.2105
    0.0440    0.0381    0.0336    0.0615    0.0533    0.0471    0.0702    0.0635    0.2105    0.1905
```

Şekil 3.10 Sonuç matrisin görüntülenmesi

??????

Örnek 3.23 $T = \begin{bmatrix} [T_{11}]_{2\times2} & [T_{12}]_{2\times2} \\ [T_{21}]_{2\times2} & [T_{22}]_{2\times2} \end{bmatrix}_{4\times4}$ ve $H = \begin{bmatrix} [H_{11}]_{3\times3} & [H_{12}]_{3\times2} \\ [H_{21}]_{2\times3} & [H_{22}]_{2\times3} \end{bmatrix}_{5\times5}$

şeklinde bloklara ayrılmış Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Khatri-Rao Çarpım matrisi, MATLAB Programı ile hesaplanmıştır. Programın sonuç ekran görünümü Şekil 3.11 de verilmiştir.

```
 Seçtiğiniz 1/(1/2+(i-j)) Matrisi için

Matris satır sayısını giriniz: 4
Matris sütun sayısını giriniz: 4
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 2
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 2

 Seçtiğiniz 1/(1/2+(i+j)) Matrisi için

Matris satır sayısını giriniz: 5
Matris sütun sayısını giriniz: 5
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 3
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 3

Khatri-Rao Çarpımı
Sonuç Matrisi:
    0.8000    0.5714    0.4444   -0.8000   -0.5714   -0.4444   -0.1212   -0.1026   -0.0727   -0.0615
    0.5714    0.4444    0.3636   -0.5714   -0.4444   -0.3636   -0.1026   -0.0889   -0.0615   -0.0533
    0.4444    0.3636    0.3077   -0.4444   -0.3636   -0.3077   -0.0889   -0.0784   -0.0533   -0.0471
    0.2667    0.1905    0.1481    0.8000    0.5714    0.4444   -0.3636   -0.3077   -0.1212   -0.1026
    0.1905    0.1481    0.1212    0.5714    0.4444    0.3636   -0.3077   -0.2667   -0.1026   -0.0889
    0.1481    0.1212    0.1026    0.4444    0.3636    0.3077   -0.2667   -0.2353   -0.0889   -0.0784
    0.0727    0.0615    0.0533    0.1212    0.1026    0.0889    0.2353    0.2105   -0.2353   -0.2105
    0.0615    0.0533    0.0471    0.1026    0.0889    0.0784    0.2105    0.1905   -0.2105   -0.1905
    0.0519    0.0440    0.0381    0.0727    0.0615    0.0533    0.0784    0.0702    0.2353    0.2105
    0.0440    0.0381    0.0336    0.0615    0.0533    0.0471    0.0702    0.0635    0.2105    0.1905
```

Şekil 3.11 Khatri-Rao Çarpımı ile elde edilen sonuç matrisi

Örnek 3.24 $A=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \end{bmatrix}_{5\times 3}$ ve $B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2} & \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{bmatrix}_{4\times 4}$

blok matrislerin Tracy-Singh Çarpım matrisi MATLAB Programı ile hesaplanmıştır. Programın sonuç ekran görünümü Şekil 3.12 de verilmiştir.

```
 Seçtiğiniz Elemanları Manüel Giriş Seçeneği için

Matris satır sayısını giriniz: 5
Matris sütun sayısını giriniz: 3
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 3
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 2
Matris elemanlarını [x x x;x x x;...] biçiminde giriniz: [1 -1 3;0 2 1;1 0 2;3 5 -1;4 2 1]

 Seçtiğiniz Elemanları Manüel Giriş Seçeneği için

Matris satır sayısını giriniz: 4
Matris sütun sayısını giriniz: 4
1. Blok matris için satır sayısını giriniz: 2
1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: 2
Matris elemanlarını [x x x;x x x;...] biçiminde giriniz: [1 2 3 4;4 3 2 1;5 6 7 8;10 9 8 7]

Tracy-Singh Çarpımı
Sonuç Matrisi:
     1     2    -1    -2     3     4    -3    -4     3     6     9    12
     4     3    -4    -3     2     1    -2    -1    12     9     6     3
     0     0     2     4     0     0     6     8     1     2     3     4
     0     0     8     6     0     0     4     2     4     3     2     1
     1     2     0     0     3     4     0     0     2     4     6     8
     4     3     0     0     2     1     0     0     8     6     4     2
     5     6    -5    -6     7     8    -7    -8    15    18    21    24
    10     9   -10    -9     8     7    -8    -7    30    27    24    21
     0     0    10    12     0     0    14    16     5     6     7     8
     0     0    20    18     0     0    16    14    10     9     8     7
     5     6     0     0     7     8     0     0    10    12    14    16
    10     9     0     0     8     7     0     0    20    18    16    14
     3     6     5    10     9    12    15    20    -1    -2    -3    -4
    12     9    20    15     6     3    10     5    -4    -3    -2    -1
     4     8     2     4    12    16     6     8     1     2     3     4
    16    12     8     6     8     4     4     2     4     3     2     1
    15    18    25    30    21    24    35    40    -5    -6    -7    -8
    30    27    50    45    24    21    40    35   -10    -9    -8    -7
    20    24    10    12    28    32    14    16     5     6     7     8
    40    36    20    18    32    28    16    14    10     9     8     7
```

Şekil 3.12 Tracy-Singh Çarpımı ile elde edilen sonuç matrisi

MATLAB ortamında oluşturulan programın kaynak kodlarının tamamı aşağıda verilmiştir:

```
% KRTSP.m
% Bloklara Ayrılmış Matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh
% Çarpımlarını Gerçekleştirir.
% Eylul 2010
clear all;
clc;
% Çarpım türünün Khatri-Rao ya da Tracy-Singh olduğu belirlenir
% Çıkış seçilene kadar döngü devam eder
secim = menu('Matris Çarpımı Türünü Seçiniz:  ','Khatri-Rao
Çarpımı',...
    'Tracy-Singh Çarpımı','Çıkış');
while secim ~= 3
```

```
    % A Matrisi için matris türü belirlenir
    k = menu('1.Matris için matris türünü seçiniz:',...
        'Matris Elemanlarının [x x x;x x x;...] Biçiminde
Girilmesi',...
        'Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen Matrisler');
    [a,c] = matristipi(k);
    % Belirlenen matris tipine göre 1. matris oluşturulur ve
    % bloklara ayrılır
    [A11, A12, A21, A22] = matriskur(a,c);
    % B Matrisi için matris türü belirlenir
    k = menu('2.Matris için matris türünü seçiniz:',...
        'Matris Elemanlarının [x x x;x x x;...] Biçiminde
Girilmesi',...
        'Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen Matrisler');
    [a,c] = matristipi(k);
    % Belirlenen matris tipine göre 2. matris oluşturulur ve
    % bloklara ayrılır
    [B11, B12, B21, B22] = matriskur(a,c);
    % Khatri-Rao Çarpımı
    if secim == 1
        C11 = kron(A11,B11);
        C12 = kron(A12,B12);
        C21 = kron(A21,B21);
        C22 = kron(A22,B22);
        % Blok matrisler birleştirilir
        C1 = horzcat(C11,C12);
        C2 = horzcat(C21,C22);
        % Sonuç matris elde edilir
        C = vertcat(C1,C2);
        disp(' '),disp('Khatri-Rao Çarpımı ');
    else
    % Tracy-Singh Çarpımı
        C11 = kron(A11,B11);
        C12 = kron(A11,B12);
        C13 = kron(A12,B11);
        C14 = kron(A12,B12);
        C21 = kron(A11,B21);
        C22 = kron(A11,B22);
        C23 = kron(A12,B21);
        C24 = kron(A12,B22);
        C31 = kron(A21,B11);
        C32 = kron(A21,B12);
        C33 = kron(A22,B11);
        C34 = kron(A22,B12);
        C41 = kron(A21,B21);
        C42 = kron(A21,B22);
        C43 = kron(A22,B21);
        C44 = kron(A22,B22);
        % Blok matrisler birleştirilir
        C1 = cat(2,C11,C12,C13,C14);
        C2 = cat(2,C21,C22,C23,C24);
        C3 = cat(2,C31,C32,C33,C34);
        C4 = cat(2,C41,C42,C43,C44);
```

```
        % Sonuç matris elde edilir
        C = cat(1,C1,C2,C3,C4);
        disp(' '),disp('Tracy-Singh Çarpımı ');
    end
    % Sonuç matris görüntülenir
    disp('Sonuç Matrisi: '),disp(C);
    secim = menu('Matris Çarpımı Türünü Seçiniz:  ','Khatri-Rao
Çarpımı',...
    'Tracy-Singh Çarpımı','Çıkış');
end


% matristipi.m
% elemanları bir formüle göre belirlenen matris türünü sorgular
ve
% seçilen türün kodunu döndürür
% k = seçim
function [a,c] = matristipi(k)

% Matris türü belirlenir
disp(' ');
a = 0;
if k == 2
    a = menu('Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen
Matrisler',...
    'Toeplitz Matrisi','Hankel Matrisi');
    if a == 1  % Toeplitz Matrisi Seçimi
        c = listdlg('PromptString',...
        'Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen Toeplitz
Matrisleri',...
        'SelectionMode','single', 'ListString',...
        {'1/(1/2+(i-j))','2^(i-j)'},...
       'Name','Toeplitz Matris Seçimi','ListSize',[300 130]);
        if c == 1
            disp(' Seçtiğiniz 1/(1/2+(i-j)) Toeplitz Matrisi
için');
        else
            disp(' Seçtiğiniz 2^(i-j)) Toeplitz Matrisi için');
        end
    else       % Hankel Matrisi Seçimi
        c = listdlg('PromptString',...
        'Elemanları Bir Formüle Göre Belirlenen Hankel
Matrisleri',...
        'SelectionMode','single', 'ListString',...
        {'1/(1/2+(i+j))','2^(i+j)'},...
       'Name','Hankel Matris Seçimi','ListSize',[300 130]);
        if c == 1
            disp(' Seçtiğiniz 1/(1/2+(i+j)) Hankel Matrisi
için');
        else
            disp(' Seçtiğiniz 2^(i+j)) Hankel Matrisi için');
        end
    end
```

```
else        % k == 1  koşulu
     c = 3; % elemanların manüel olarak girilmesi seçeneği
     disp(' Seçtiğiniz Elemanları Manüel Giriş Seçeneği için');
end


% matriskur.m
% kullanıcı sorgusu ile belirlenen matris türüne göre
% matris elemanlarını oluşturur
% ve bloklara ayırır
% a,c = matris türü seçimi
% [A11,A12,A21,A22] oluşturulan matris bloklara ayrılır

function [A11,A12,A21,A22]=matriskur(a,c)
% matris satır ve sütun sayısı belirlenir
M = input('\nMatris satır sayısını giriniz: ');
N = input('Matris sütun sayısını giriniz: ');
% bloklara ayırma işlemi için 1. blok matris
% satır ve  sütun sayısı belirlenir
m11 = input('1. Blok matris için satır sayısını giriniz: ');
n11 = input('1. Blok matris için sütun sayısını giriniz: ');

if  c == 3  % manüel giriş seçeneği
    % elemanları manüel olarak girilmesi koşulunda matris
oluşturulur
    A = input('Matris elemanlarını [x x x;x x x;...] biçiminde
giriniz: ');
else
    % elemanları bir formüle bağlı olarak
    % belirlenecek matris oluşturulur
    % bu matris seçime bağlı olarak caucy-toeplitz/cauchy-
hankel/...
    % gibi matrisler olabilir
    if a == 1 % Toeplitz seçeneği
        if c == 1
            A = cauchytoeplitz(M,N);
        else
            A=zeros(M,N);
            for i=1:M
                for j=1:N
                    A(i,j)=2^(i-j);
                end
            end
        end
    elseif a == 2   % Hankel Seçeneği
        if c == 1
            A = cauchyhankel(M,N);
        else
            A=zeros(M,N);
            for i=1:M
                for j=1:N
                    A(i,j)=2^(i+j);
                end
```

```
            end
        end
    end
end
% elemanları girilen matris bloklara ayrılır
A11 = A(1:m11,1:n11);
A12 = A(1:m11,n11+1:N);
A21 = A(m11+1:M,1:n11);
A22 = A(m11+1:M,n11+1:N);
```

```
% cauchytoeplitz.m
% Cauchy-Toeplitz formunda mxn boyutunda matris oluşturur
function a=cauchytoeplitz(m,n)
h = 1;
g = 1/2;
a = zeros(m,n);
for i = 1:m
    for j = 1:n
        a(i,j) = 1/(g+(i-j)*h);
    end
end

% cauchyhankel.m
% Cauchy-Hankel formunda mxn boyutunda matris oluşturur
function a=cauchyhankel(m,n)
h = 1;
g = 1/2;
a = zeros(m,n);
for i = 1:m
    for j = 1:n
        a(i,j) = 1/(g+(i+j)*h);
    end
end
```

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Çalışmanın 3. bölümünde matrisler üzerine genel tanım ve özellikler, bazı özel matris tanımlamaları, çalışma konusuna bağlı olarak bazı özel matris çarpım tanımlamaları ile birlikte bu çarpımların genel özellikleri verilmiştir. Daha sonra çalışmamızda kullandığımız MATLAB programı hakkında temel bilgiler sunulmuştur.

Son olarak ise bloklara ayrılmış matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarını bilgisayar ortamında hesaplayan MATLAB algoritması tanımlanmış, algoritmanın akış çizelgesi verilerek algoritma adımsal olarak anlatılmıştır. Algoritma, örneklerle test edilmiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

En temel anlamda,

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde bloklara ayrılan $M \times N$ ve $K \times L$ tipinde A ve B matrislerinin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları için MATLAB algoritmaları geliştirildi.

Rastgele girilen iki matrisin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarının hazırlanan MATLAB programı ile hesaplama sonuçları verildi.

Geliştirilen bu algoritma, çoklu bloklu matrislerin Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarını da üretebilir. Bunun için, A'nın ve B'nin bloklara ayrılması için takip edilen adımların A_{ij}, B_{st} alt blok matrislerine uygulanması sonucu; A ve B,

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bloklara ayrılmış olacak ve sonrasında algoritmanın artan blok matrisler için düzenlenmesi yeterli olacaktır.

Khatri-Rao çarpımının Hadamard çarpımının bir genelleştirilmesi, Tracy-Singh çarpımının Kronecker çarpımının bir genelleştirilmesi olduğu hatırlanırsa, oluşturulan programın diğer iki çarpımı da kapsamasını programın avantajları olarak görmekteyiz.

KAYNAKLAR

Al Zhour, Z. ve Kiliçman, A., 2005. New algebraic method for solving the axial N-index transportation problem based on the Kronecker product. **Matematika**, 21 (2): 113–123.

Al Zhour, Z. ve Kiliçman, A., 2006. Extensions and generalization inequalities involving the Khatri–Rao product of several positive matrices. **J. Inequal. Appl.**, Article ID 80878: 1–21.

Al Zhour, Z. ve Kiliçman, A., 2006. Matrix equalities and inequalities involving Khatri–Rao and Tracy–Singh sums. **J. Inequal. Pure Appl. Math**., Article 34, 7 (1): 496–513.

Al Zhour, Z., Kiliçman, A. ve Abu Hasan, M., 2005. A new algebraic method for solving the balanced transportation problem based on the Kronecker product. **IRSIAM J. Appl. Math.**, 1 (1): 64–80.

Ando, T., 1979. Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products. **Linear Algebra Appl.**, 26: 203–241.

Brewer, J.W., 1978. Kronecker products and matrix calculus in system theory. **IEEE Trans. Circuits Syst.**, CAS-25 (9): 772–781.

Cao, C.-G., Zhang, X. ve Yang, Z.-P., 2002. Some inequalities for the Khatri–Rao product of matrices. **Electron. J. Linear Algebra**, 9: 276–281.

Ding, F. ve Chen, T., 2005. Iterative least-squares solutions of coupled Sylvester matrix equations. **Syst. Control Lett.**, 54: 95–107.

Graham, A., 1981. **Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications.** Ellis Horwood Ltd., New York.

Horn, R.A. ve Johnson, C., 1990. **Topics in Matrix Analysis**. Cambridge University Press, New York.

Horn, R.A. ve Mathias R., 1992. Block-matrix generalizations of Shur’s basic theorems on Hadamard products. **Linear Algebra Appl.**, 172: 337–346.

Johnson, C.R. ve Nylen, P., 1991. Largest singular value submultiplicativity. **SIAM J. Matrix Anal. Appl.**, 12: 1–6.

Khatri, C.G. ve Rao, C.R., 1968. Solution to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions. **Sankhya**, 30: 167–180.

Kiliçman, A. ve Al Zhour, Z., 2005. Improvements on geometric means related to the Tracy–Singh products of positive matrices. **Matematika**, 21 (2): 49–65.

Kiliçman, A. ve Al Zhour, Z., 2005. The general common exact solutions of coupled linear matrix and matrix differential equations. **J. Anal. Comput.**, 1 (1): 15–29.

Kiliçman, A. ve Al Zhour, Z., 2007. Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications. **Appl. Math. Comput.**, 187 (1): 250–265.

Koning, R.H., Neudecker, H. ve Wasbeek, T., 1991. Block Kronecker products and the vec-operator. **Linear Algebra Appl.**, 149: 267–277.

Lev-Ari, H., 2005. Efficient solution of linear matrix equations with application to multistatic antenna array processing. **Commun. Inf. Syst**., 5 (1): 123–130.

Liu, S., 1999. Matrix results on the Khatri–Rao and Tracy–Singh products. **Linear Algebra. Appl.**, 289: 267–277.

Liu, S., 2002. Several inequalities involving Khatri–Rao products of positive semi definite matrices. **Linear Algebra Appl.**, 345: 175–186.

MacRae, E.C., 1974. Matrix derivatives with an application to an adaptive linear decision problem. **Ann. Statist.**, 2: 337–364.

Magnus, J.R. ve Neudecker, H., 1979. The commutation matrix: Some properties and applications. **Ann. Statist**., 7: 381–394.

Mićić, J., Seo, Y., Takahasi, S.-E. and Tominaga, M., 1999. Inequalities of Furuta and Mond-Pečarić. **Math. Inequal. Appl.**, 2 (1): 83–111.

Rao, C.R. ve Rao, M.B., 1998. **Matrix Algebra and its Applications to Statistics and Econometrics**. World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd., Singapore.

Steeb, W.-H., 1997. **Matrix Calculus and Kronecker Product with Applications and C++ Programs**. World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd., Singapore.

Tauber, S., 1978. An applications of the Hadamard product to air pollution. **Appl. Math. Comput.**, 4: 167–176.

Tracy, D.S. ve Jinadasa, K.G., 1989. Partitioned Kronecker products of matrices and applications. **Canad. J. Statist.**, 17: 107–120.

Tracy, D.S. ve Singh, R.P., 1972. A new matrix product and its applications in partitioned matrix differentiation. **Statist. Neerlandica**, 26: 143–157.

Tracy, D.S., 1990. Balanced partitioned matrices and their Kronecker products. **Comput. Statist. Data Anal.**, 10: 315–323.

Van Loan, G.F., 2000. The ubiquitous Kronecker product. **J. Comput. Appl. Math.**, 123: 85–100.

Visick, G., 2000. A quantitative version of the observation that the Hadamard product is a principal submatrix of the Kronecker product. **Linear Algebra Appl.**, 304: 45–68.

Wei, Y. ve Zhang, F., 2000. Equivalence of a matrix product to the Kronecekr product. **Hadronic J. Suppl.**, 15 (3): 327–331.

Xu, L., Stoica, P. ve Li, J., 2006. A block-diagonal growth curve mode. **Digital Signal Processing**, 16 (6): 902–912.

Yüksel, İ., 2004. **MATLAB ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü**. Paradigma

Zhang, F., 1999. **Matrix Theory: Basic Results and Techniques**. Springer-Verlag, New York Inc.

Zhang, F., 2000. Schur complements and matrix inequalities in the lowner ordering. **Linear Algebra Appl.**, 32 (1): 399–410.

Zhang, X., Yang, Z.-P. ve Cao, C.-G., 2002. Inequalities involving Khatri–Rao products of positive semi-definite matrices. **Appl. Math. E-Notes,** 2: 117–124.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkarılmasında her aşamada yol gösteren ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK'e sonsuz teşekkür ederim. Bu çalışmaya başlamamda her zaman görüş ve fikirleriyle bana yön veren bölüm başkanım Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca, bu süreçteki olumlu yaklaşımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU ve Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam süresince sabır ve sevgiyle bana güç ve moral veren, her zaman yanımda olan en değerli varlığım aileme yürekten ve sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Antakya, Hatay'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Antakya'da tamamladım. 1989–1994 yılları arasında Hacettepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Bilimleri Mühendisliği Bölümünde lisans eğitimimi tamamladım. 1994 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Dörtyol Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak görevime başladım. 1995 yılında Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kadrom aktarıldı. Halen aynı fakültede görev yapmaktayım.