MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Mehmet VURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY
Ocak–2011

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

MEHMET VURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN danışmanlığında hazırlanan bu tez 28/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN	Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ	Yrd. Doç. Dr. H. Ali ÇETİNKARA
Başkan	Üye	Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Necat AĞCA
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

ADİ DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN NUMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu tezde lineer olmayan adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır.

Çalışmanın ilk bölümünde optimal kontrol teorisi hakkında genel bazı bilgiler verildikten sonra ikinci bölümde tezde kullanılan tanımlar, teoremler ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise ilk olarak Cauchy probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlık ve tekliğine ait olan teoremin ispatı verilerek bu teoremin hükmü yardımıyla incelenen optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Daha sonra problemin çözümü için gerek şart Pontryagin'in maksimum prensibi şeklinde elde edilmiştir. Son olarak amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilir olduğu ispatlanarak fonksiyonelin Gradienti için bir formül elde edilmiş ve Gradient için elde edilen bu formül kullanılarak problemin çözümü için Gradientin izdüşümü yönteminin algoritması açıklanmıştır.

2011, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Adi diferansiyel denklem, Optimal kontrol problemi, Lions fonksiyoneli, Pontrygain'in maksimum prensibi.

ABSTRACT

AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WİTH LIONS FUNCTİONAL AND ITS NUMERICAL SOLUTION

In this thesis, an optimal control problem with Lions functional is considered for non- linear ordinary differential equation.

In the first part of this work, some general information about optimal control theory is given. Later, in the second part descriptions, theorems and mathematical concepts, which are used in the thesis, are clarified. In the third part for the first time the proof of the theorem about existence and singularity of the generalized solution of cauchy problem is shown. By means of results's this theorem, the existence and singularity of the solution of optimal control problem which we work on is proved. After that the required condition for the solution is Pontryagin's maximum principle is understood. Finally after the proof of differentiability of control function, a formula for the gradient of the function can be obtained. By using this obtained Formula the algorithm of the gradient projection method for the solution is identified.

2011, 46 pages

Key Words: Ordinary differential equation, Optimal control problem, Lions functional, Pontrygain's maximum principle.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	Herhangi
$\overset{\circ}{\forall}$	Hemen Hemen Her Yerde
$T > 0$	Verilen Sayı
$t \in [0,T]$	Bağımsız Değişken
$u = u(t)$	Kontrol
V	Kontrol Kümesi
$x_p = x_p(t), \quad P = [0,T]$	Cauchy Probleminin Çözümü
$\psi_p = \psi_p(t), \quad P = [0,T]$	Eşlenik Sistemin Çözümü
$J_\alpha(u), \quad u \in V, \quad \alpha > 0$	Amaç Fonksiyoneli

1. GİRİŞ

İnsan bireysel olarak toplum içerisinde ki girişimlerin de ya da toplumdan izole edilmiş kendi dünyasında da maddi manevi menfaatini en üst seviyede tutmaya ve bunu korumaya temayül gösterir. Dünyamızda ki her sistemin çekirdeğinde bahsi geçen insan olduğundan dolayı sistemlerden de menfaatini, günümüz deyimi ile kazancın en üst seviyeye çıkarılması ve aynı zamanda da çabanın yani sistemi aktive etmek için gerekli zamanın ve ücretin en aza indirmesi beklenir. içinde bulunduğumuz bu eğilim de optimal kontrol meselesinin varoluş sebebini barındırır.

"Optimal" kelimesi Latin kökenli olup "en iyi, en mükemmel" anlamı taşır. Bundan dolayı en iyinin arandığı problemlerde optimalleştirme metotlarını kullanırız. Optimalleştirilecek problemler öncelikle yapısal olarak incelendikten sonra optimalleştirme metotlarından hangisi ile örtüşüyorsa o yöntemden faydalanarak çözümlenir.

Toplanmış parametreli sistemler için optimal kontrol teorisi optimal süreçler teorisinin ve adi diferansiyel denklemler teorisinin ana bölümlerini içermektedir.

Optimal kontrol problemleri inceleniyorken bir takım sorularla karşılaşılacaktır:

1. Optimal kontrol probleminin iyi konulması.
2. Problemin çözümü için gerek ve yeter şartların elde edilmesi.
3. Optimal kontrol problemlerinin çözüm yöntemlerinin oluşturulması.

Bu sorular toplanmış parametreli sistemler için optimal kontrol problemleri üzerine farklı yazarlarca incelenmiştir (Alekseev, 1975; Gabasov, 1971; Li, 1972; Pontryagin, 1976;Vasilyev, 1980; 1981).

Adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen geniş sınıftan optimal kontrol süreçlerinde, kontrol edilen süreci başlangıç durumundan son duruma getirecek olan kontrolün olası kontroller kümesinden seçilmesi gerekir. Bu tür optimal kontrol problemlerinin iyi konulması ve onların çözüm yöntemlerinin incelenmesi ilk olarak yukarıda bahsetmiş olduğumuz kaynaklarda ele alınmıştır.

Görüleceği üzere bu tezde sunulan optimal kontrol probleminde kullanılan Lions fonksiyonelli adi diferensiyel denklemler için optimal kontrol problemlerinde kullanılmakta olup konulma açısından tezde incelenen optimal kontrol problemi gerek teorik gerekse de pratik açıdan önem taşımaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Optimal kontrol teorisi günlük yaşamda hemen hemen her alanda karşımıza çıktığından aslında çok eski bir tarihe dayanır. Var olan alternatifler arasında en iyi en mükemmel olanı seçmek her zaman olağandır. İnsanlar yüzyıllar boyunca karşılaştıkları problemlere en iyi çözümü getirmek gibi bir ihtiyaçla karşılaşmışlardır. Karşılaşılan problemler asırlar boyunca kendine özgü yöntemlerle çözülmüş ve tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaşımlar oluşmuştur. Ancak daha sonraları birçok doğa yasasının varyasyon prensipleriyle ifade edilebilir olmasının anlaşılmasıyla matematiğin çok önemli bir dalı olan varyasyon hesabı oluşmuştur. Fakat son yıllarda teknolojinin hızla gelişmesi sonucu bir takım problemler klasik varyasyon hesabı yöntemleri ile çözülemediğinden yeni metotların geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. İşte bu süreçte modern anlamda optimal kontrol teorisinin temelleri atılmış oldu.

Toplanmış parametreli sistemler için optimal kontrol teorisi optimal süreçler teorisinin ve adi diferansiyel denklemler teorisinin ana bölümlerini içermektedir. Temelinin bir Rus Matematikçisi olan Pontryagin'in maksimum prensibi adlı çalışmasına dayandığı bu teorinin gelişmesinde toplanmış parametreli sistemler için optimal kontrol teorisinin önemli bir payı vardır. Fransız matematikçisi Lions dağılmış parametreli sistemler için optimal kontrol teorisinin gelişmesinde önemli bir rol oynamış ve onun aldığı sonuçlar 1971 yılında ingilizce olarak yayınlanan "Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations " adlı kitapta detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Daha sonraları Butkovskiy, Vasilyev, Lure, Bidout, Gobel, İskenderov ve diğer bilim adamlarının çalışmaları optimal kontrol teorisinin gelişmesinde önemli rol oynamıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

3.1.1. Kuramsal Temeller

Bu bölümde ilerleyen kısımlarda kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 3.1.1.1: $L_2(0,T)$ uzayı Hilbert uzayı olup, elemanları $(0,T)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm

$$\left\langle u,v\right\rangle_{L_2(0,T)} = \int_0^T u(t)\,\overline{v}(t)\,dt,$$

$$\| u \|_{L_2(0,T)} = \sqrt{\left\langle u,v\right\rangle_{L_2(0,T)}} < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.1.2: $L_\infty(0,T)$ Banach uzayı olup, $[0,T]$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar uzayıdır ve burada norm

$$\| u \|_{L_\infty(0,T)} = \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\left|u(t)\right| < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.1.3: $\mathrm{C}[0,T]$ uzayı $[0,T]$ aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonların Banach uzayıdır. Burada norm

$$\| u \|_{C[0,T]} = \max_{0\le t\le T}\left|u(t)\right| < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.1.4: B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $w(u,\gamma)= \ v: v\in B, \ \ \| v-u \|_B < \gamma$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için,

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{\mathrm{o}(h,u)}{\| h \|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \left\langle J'(u), h \right\rangle_B + \mathrm{o}\left\langle h, u \right\rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferensiyellenebilirdir denir. Burada B^* uzayı B uzayının eşlenik uzayıdır (Vasilyev, 1980).

Teorem 3.1.1.5: U kümesinin B Banach uzayının bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyonelinin bu U kümesinde 1. mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \ u\in U : J(u) = J_* = \inf\limits_U J(u)$ kümesinin ise $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olduğunu farz edelim. Bu taktirde $\forall u_* \in U_*$ için $\left\langle J(u_*), u-u_* \right\rangle \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilyev, 1980).

Lemma 3.1.1.6 (Gronwall Lemması): $\varphi(t), b(t)$ fonksiyonlarının $[t_0, T]$ aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve a 'nın sabit olduğunu farzedelim. Eğer bu şartların yanısıra

$$\varphi(t) \leq a \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

şartı sağlanıyorsa bu taktirde

$$0 \leq \varphi(t) \leq a \int_{t_0}^{t} b(t)\, e^{a(t-\tau)} d\tau + b(t)$$

eşitsizliği ve eğer $b(t) = b = sabit \geq 0$ ise

$$0 \leq \varphi(t) \leq b e^{a(t-\tau)}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

eşitsizliği geçerlidir (Vasilyev, 1980).

3.2. Yöntem

3.2.1. Lineer Olmayan Adi Diferensiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde lineer olmayan adi diferensiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili olan gerekli şartların elde edilmesine ve çözüm algoritmasının inşa edilmesine yönelik sorular cevaplandırıldı.

3.2.1.1. Problemin Konulması

$$J_\alpha(u) = \left\| x_0(\cdot,u) - x_T(\cdot,u) \right\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha \left\| u - u_0 \right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{1}$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ u = u(t) : u \in L_2(0,T), \quad \left| u(t) \right| \le b_0, \quad \overset{\circ}{\forall}\, t \in (0,T) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = f(t, x_p(t), u(t)), \quad 0 \le t \le T, \quad p = 0, T \tag{2}$$

$$x_0(0) = x_0, \quad x_T(T) = x_T \tag{3}$$

şartları altında minimumunun bulunması gerekir.

Burada $T > 0$, $b_0 > 0$, $\alpha \ge 0$, x_0 ve x_T verilen sayılar, $u_0 \in L_2(0,T)$ verilen eleman, $f(t,x,u)$ verilen fonksiyon olup $[0,T] \times \mathbb{R} \times [-b_0, b_0]$ bölgesinde tanımlı olan sürekli fonksiyondur ve her bir $t \in [0,T]$ verildiğinde (x,u) değişkenlerine göre Lipschitz şartını sağlar:

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,v)\right| \le L\ \left|x-y\right|+\left|u-v\right|\ ,$$
$$\forall (x,u),(y,v)\in \mathbb{R}\times[-b_0,b_0],\quad \forall t\in[0,T] \tag{4}$$

Burada $L>0$ Lipschitz sabitidir.

Her bir $u\in V$ için (2)-(3) şartlarından $x_p = x_p(t),\quad p=0,T$ fonksiyonlarının bulunması problemi adi diferansiyel denklem için Cauchy problemidir.

Tanım 3.2.1.1.1: Her bir $u\in V$ için (2)-(3) Cauchy probleminin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall t\in[0,T]$ için

$$x_0(t)\equiv x_0+\int_0^t f(\tau,x_0(\tau),u(\tau))\,d\tau \tag{5}$$

$$x_T(t)\equiv x_T-\int_t^T f(\tau,x_T(\tau),u(\tau))\,d\tau \tag{6}$$

integral özdeşliklerini sağlayan $x_p = x_p(t),\quad p=0,T$ fonksiyonları anlaşılmaktadır.

Bu tanımda verilen çözüme (2)-(3) Cauchy probleminin genelleştirilmiş çözümü denir.

3.2.1.2 Lineer Olmayan Adi Diferensiyel Denklem İçin Cauchy Probleminin Genelleştirilmiş Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde her bir $u\in V$ için (2)-(3) Cauchy probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğini inceleyeceğiz.

Bu amaçla ilk önce aşağıdaki Cauchy problemini ele alalım:

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),u(t)),\quad 0\le t\le T, \tag{7}$$

$$x(0)=x_0 \tag{8}$$

Burada x_0 , $T > 0$ verilen sayılar, $f(t,x,u)$ fonksiyonu $[0,T]\times\mathbb{R}\times[-b_0,b_0]$ bölgesinde tanımlanıp, değişkenlerine göre sürekli olup $\forall t\in[0,T]$ için (x,u) değişkenlerine göre aşağıdaki Lipschitz şartını sağlar:

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,v)\right|\le L\ \left|x-y\right|+\left|u-v\right|\ ,$$

$$\forall(x,u),(y,v)\in\mathbb{R}\times[-b_0,b_0],\quad \forall t\in[0,T]$$

Tanım 3.2.1.2.1: Her bir $u\in V$ için (7)-(8) Cauchy probleminin genelleştirilmiş çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall t\in[0,T]$ için

$$x(t)\equiv x_0+\int_0^t f(\tau,x(\tau),u(\tau))\,d\tau \tag{9}$$

integral özelliğini sağlayan $x=x(t)$ fonksiyonu anlaşılır.

Şimdi ise (Alekseev, 1975; Vasilev, 1980) çalışmalarından bildiğimiz varlık ve teklik teoremini ifade ederek ispatını verelim.

Teorem 3.2.1.2.1: $f(t,x,u)$ fonksiyonunun $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bölgesinde tanımlı olup değişkenlerine göre sürekli olduğunu ve $\forall t\in[0,T]$, $\forall u\in\mathbb{R}$ için x değişkenine göre

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,v)\right|\le L\left|x-y\right|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{10}$$

şartını yani Lipschitz şartını sağladığını farz edelim. Burada $L>0$ Lipschitz sabitidir. Bu takdirde herhangi $u\in L_\infty(0,T)$ kontrolü için ve herhangi $x_0\in\mathbb{R}$ başlangıç değeri için (7)-(8) Cauchy probleminin $[0,T]$ aralığında sürekli olan bir tek $x=x(t)$ genelleştirilmiş çözümü vardır. Bu çözüm $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde $\dot{x}(t)$ genelleştirilmiş türevine sahiptir, $\dot{x}(t)\in L_\infty(0,T)$ ve (7) denklemini $\mathring{\forall}\, t\in(0,T)$ için sağlar.

İspat: C[0,T] uzayının $[0,T]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı olduğunu farz edelim. Bilindiği üzere $C[0,T]$ uzayı Banach uzayıdır ve bu uzayda norm

$$\left\|x\right\|_{C[0,T]}=\max_{0\le t\le T}\left|x(t)\right|<+\infty$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir x_0 noktasını ve $u=u(t)$ sınırlı ölçülebilir fonksiyonunu tespit edelim.

$\forall x = x(t) \in C[0,T]$ için $f(t,x(t),u(t))$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığında tanımlı, sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Yani

$$\left|f(t,x(t),u(t))\right| \le f_0(t), \quad \forall x \in \mathrm{C}[0,T], \quad \forall u \in V, \quad \mathring{\forall} t \in [0,T] \tag{11}$$

şartı sağlanır (Vasilyev, 1980). Burada $f_0 \in L_\infty(0,T)$, $f_0 > 0$ verilen fonksiyondur.

Şimdi $C[0,T]$ uzayını $C(0,T)$ uzayına dönüştüren A dönüşümünü (operatörünü) tanımlayalım:

$$z(t) = Ax = \int_0^t f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + x_0, \quad 0 \le t \le T \tag{12}$$

$z(\cdot) = Ax(\cdot)$ fonksiyonunun t noktasındaki değerini $Ax(\cdot)(t)$ ile gösterelim. A^m 'nin, m 'nin yeteri kadar büyük değerleri için daralma dönüşümü olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla matematiksel tümevarım yöntemini uygulayalım. Yani $\forall x,y \in C[0,T], \forall t \in [0,T]$ ve $\forall m = 1,2,\ldots$ için

$$\left|A^m x(\cdot)(t) - A^m y(\cdot)(t)\right| \le \frac{1}{m!} \max_{0\le\tau\le t}\left|x(\tau)\, y(\tau)\right| \left(\int_0^t L\, d\tau\right)^m \tag{13}$$

olduğunu gösterelim.

$m = 1$ için (13) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\left|A^m x(\cdot)(t) - A^m y(\cdot)(t)\right| &= \left|\int_0^t \left(f(\tau,x(\tau),u(\tau)) - f(\tau,y(\tau),u(\tau))\right) d\tau\right| \\
&\le \int_0^t \left|f(\tau,x(\tau),u(\tau)) - (f(\tau,y(\tau),u(\tau))\right| d\tau \\
&\le \int_0^t L\left|x(\tau),y(\tau)\right| d\tau \\
&\le \max_{0\le\tau\le t}\left|x(\tau) - y(\tau)\right| \int_0^t L\, d\tau
\end{aligned} \tag{14}$$

Buradan $m = 1$ için (13) eşitsizliğinin doğru olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi de (13) eşitliğinin $m \ge 1$ için doğru olduğunu kabul ederek $m+1$ için bu eşitsizliğin geçerli olduğunu ispatlayalım.

$$A^{m+1}x(\cdot)(t) - A^{m+1}y(\cdot)(t) = A(A^m x(\cdot))(t) - A(A^m y(\cdot))(t)$$
$$= \int_0^t (f(\tau, A^m x(\cdot)(\tau), u(\tau)) - f(\tau, A^m y(\cdot)(\tau), u(\tau))\, d\tau.$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır.

Lipschitz şartını kullanarak, bu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|A^{m+1}x(\cdot)(t) - A^{m+1}y(\cdot)(t)\right| \leq \int_0^t L \left|A^m x(\cdot)(\tau) - A^m y(\cdot)(\tau)\right| d\tau.$$

Belirlenen $m \geq 1$ için bu eşitsizlikte (13) eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|A^{m+1}x(\cdot)(t) - A^{m+1}y(\cdot)(t)\right| \leq \int_0^t L \frac{1}{m!} \max_{0\leq\xi\leq\tau}\left|x(\xi) - y(\xi)\right| \left(\int_0^\tau L d\xi\right)^m d\tau$$
$$\leq \frac{1}{m!} \max_{0\leq\xi\leq\tau}\left|x(\xi) - y(\xi)\right| \int_0^t L \left(\int_0^\tau L d\xi\right)^m d\tau$$
$$= \frac{1}{(m+1)!} \max_{0\leq\tau\leq t}\left|x(\tau) - y(\tau)\right| \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(\int_0^\tau L d\xi\right)^{m+1} d\tau$$
$$= \frac{1}{(m+1)!} \max_{0\leq\tau\leq t}\left|x(\tau) - y(\tau)\right| \left(\int_0^t L d\tau\right)^{m+1}$$
$$= \frac{1}{(m+1)!} \max_{0\leq\tau\leq t}\left|x(\tau) - y(\tau)\right| \left[Lt\right]^{m+1}, \quad \forall t \in [0,T]$$

Böylece $m+1$ için

$$\left|A^{m+1}x(\cdot)(t) - A^{m+1}y(\cdot)(t)\right| \leq \frac{1}{(m+1)!} \max_{0\leq\tau\leq t}\left|x(\tau) - y(\tau)\right| \, Lt^{\;m+1}, \quad \forall t \in [0,T] \quad (15)$$

eşitsizliği ispatlanmış oldu. Buradan tümevarım yöntemine göre (13) eşitsizliğinin $\forall m = 1,2,...$ için geçerli olduğu elde edildi. (13) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla yazabiliriz:

$$\left\|A^m x(\cdot) - A^m y(\cdot)\right\|_{C[0,T]} \leq \frac{1}{m!}(LT)^m \left\|x - y\right\|_{C[0,T]}$$

Bildiğimiz üzere,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(LT)^m}{m!}=0$$

olduğundan, yani yeteri kadar büyük m değerleri için

$$\frac{(LT)^m}{m!}<1$$

şartı sağlanır. Bu şarttan A^m dönüşümünün daralma dönüşümü olduğu elde edilir. (Kolmogorov, 1976, sayfa 82) çalışmasından bildiğimiz daralma dönüşüm prensibine göre $x(t)=Ax(t)$ şartını sağlayacak bir tek $x=x(t)$ olduğu ve $x\in C[0,T]$ şartını sağladığı ispatlanmış oldu.

(Kolmogorov, 1976, sayfa 344) çalışmasından bildiğimiz üst sınırı değişken olan Lebesgue integralinin özelliğine göre $x=x(t)$ fonksiyonu $[0,T]$ aralığında mutlak süreklidir ve $L_\infty[0,T]$ uzayına ait olan $\dot{x}(t)$ genelleştirilmiş türevine sahiptir ve $x=x(t)$ fonksiyonu (7) denklemini $[0,T]$ aralığında hemen hemen her $t\in[0,T]$ için sağlar.

Başlangıç şartının sağlanması ise (9) integral özdeşliğinden kolaylıkla elde edilir.Teorem 3.2.1.2.1 ispatlandı.

Şimdi aşağıdaki probleme bakalım:

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),u(t)),\quad 0\le t\le T \tag{16}$$

$$x(T)=x_T \tag{17}$$

Burada $T>0$, x_T verilen sayılar ve $f(t,x,u)$ fonksiyonu (10) şartını sağlamaktadır.

Bu problemde $\tau=T-t$ değişken dönüşümü yapalım. Bu taktirde;

$$x(t)=x(T-\tau)=\tilde{x}(\tau)$$

olarak gösterirsek (16)-(17) eşitliklerinden aşağıdaki Cauchy problemini elde ederiz:

$$\frac{d\,\tilde{x}(\tau)}{d\tau}=-\tilde{f}(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)),\quad 0\le\tau\le T \tag{18}$$

$$\tilde{x}(0)=x_T. \tag{19}$$

Burada;

$$\tilde{u}(\tau) = u(T-\tau) = u(t),$$

$$\tilde{f}(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)) = f(T-\tau, x(T-\tau), u(T-\tau)) = f(t, x(t), u(t))$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere (18)-(19) problemi (7)-(8) problemi ile benzer Cauchy problemidir, sadece sağ tarafta işaret farklıdır.

Tanım 3.2.1.2.2: Her bir $u \in V$ için (18)-(19) Cauchy probleminin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall \tau \in [0,T]$ için

$$\tilde{x}(\tau) = x_T - \int_0^{\tau} \tilde{f}(\xi,\tilde{x}(\xi),\tilde{u}(\xi))\, d\xi \qquad (20)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.2.1.2.1'e dayanarak (18)-(19) Cauchy probleminin Tanım 3.2.1.2.2 anlamında $[0,T]$ aralığında sürekli olan $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ çözümüne sahip olduğu ve bu çözümün $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde $\frac{d\,\tilde{x}(\tau)}{d\tau}$ türevine sahip olduğu elde edilir. Bunun yanı sıra $\frac{d\,\tilde{x}(\tau)}{d\tau} \in L_{\infty}(0,T)$ olduğu sonucuna varılabilir; yani $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ fonksiyonu (18) denklemini hemen hemen her $\tau \in [0,T]$ için sağlar. $\tilde{x}(\tau) = x(T-\tau) = x(t)$ olduğundan $x(t)$ fonksiyonunun (16)-(17) probleminin çözümü olduğu görülür. Eğer (20) özdeşliğinde geriye dönük işaretleme yaparsak, $\forall t \in [0,T]$ için

$$x(t) = x_T - \int_t^{T} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \qquad (21)$$

integral özdeşliğini elde ederiz.

Sonuç olarak (16)-(17) probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait olan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.1.2.2: $f(t,x,u)$ fonksiyonunun Teorem 3.2.1.2.1'in şartlarını sağladığını farz edelim. Bu takdirde herhangi $u \in L_{\infty}(0,T)$ kontrolü ve herhangi $x_T \in \mathbb{R}$ değeri için (16)-(17) probleminin $[0,T]$ aralığında sürekli olan bir tek $x = x(t)$ genelleştirilmiş çözümü vardır. Bu çözüm $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde $\dot{x}(t)$ genelleştirilmiş türevine sahiptir, yani $\dot{x}(t) \in L_\infty(0,T]$ ve (16) denklemini $\overset{o}{\forall} t \in [0,T]$ için sağlar.

Teorem 3.2.1.2.1 ve Teorem 3.2.1.2.2'nin hükümlerini birleştirerek (2)-(3) Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait olan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.1.2.3: $f(t,x,u)$ fonksiyonunun $[0,T]\times\mathbb{R}\times[-b_0,b_0]$ bölgesinde tanımlanıp, değişkenlerinin sürekli fonksiyonu olduğunu ve $\forall t\in[0,T]$, $\forall u\in[-b_0,b_0]$ için x değişkenine göre

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,u)\right| \le L\left|x-y\right|, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

şartını sağladığını farz edelim. Burada $L>0$ sabiti Lipschitz sabiti ve x_0, x_T verilen sayılardır. Bu takdirde (2)-(3) Cauchy probleminin Tanım 3.1.1.1 anlamında bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır. Bu $x_p = x_p(t),\quad p=0,T$ çözümü $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde olan ve $L_\infty(0,T)$ uzayına ait olan $\dot{x}_p(t),\quad p=0,T$ türevlerine sahiptir ve bu çözüm (2) denklemlerini $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde sağlar.

3.2.1.3. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde (1)-(3) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyeceğiz.

Teorem 3.2.1.3.1: $f(t,x,u)$ fonksiyonunun $[0,T]\times\mathbb{R}\times[-b_0,b_0]$ bölgesinde tanımlanıp değişkenlerinin sürekli fonksiyonu olduğunu, $\forall t\in[0,T]$ için (x,u) değişkenlerine göre (4) Lipschitz şartını sağladığını ve ayrıca x_0, x_T sayılarının verilen sayılar olduğunu farz edelim. Bu taktirde $L_2(0,T)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki; $\forall u_0\in G$ ve $\alpha>0$ için (1)-(3) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: Önce $J_0(u)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir $u \in V$ elemanı alalım ve ona $u + \Delta u = V$ olacak şekilde $\Delta u \in L_\infty(0,T)$ artışı verelim. $x_p(t) \equiv x_p(t;u)$, $x_{p\Delta}(t) \equiv x_p(t;u+\Delta u)$, $P = 0,T$ fonksiyonlarının (2)-(3) Cauchy probleminin sırasıyla $u \in V$ ve $u + \Delta u \in V$ elemanlarına karşılık gelen çözümleri olduğunu farz edelim. Bu taktirde (2)-(3) şartlarından

$$\Delta x_p(t) = x_p(t;u+\Delta u) - x_p(t;u) = x_{p\Delta}(t) - x_p(t), \quad p = 0,T$$

fonksiyonlarının aşağıdaki Cauchy probleminin çözümü olduğu görülür:

$$\begin{gathered} \frac{dx_p(t)}{dt} = f(t, x_p(t) + \Delta x_p(t), u(t) + \Delta u(t)) - f(t, x_p(t), u(t)) \\ 0 \le t \le T, \quad P = 0,T \end{gathered} \tag{22}$$

$$\Delta x_0(0) = 0, \quad \Delta x_T(T) = 0. \tag{23}$$

(5) ve (6) özdeşliklerinden (22)-(23) probleminin çözümü için aşağıdaki integral özdeşliklerini elde ederiz:

$$\begin{gathered} \Delta x_0(t) \equiv \int_0^t \left(f(\tau, x_0(\tau) + \Delta x_0(\tau), u(\tau) + \Delta u(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\right) d\tau \\ \forall t \in [0,T] \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \Delta x_T(t) \equiv -\int_t^T \left(f(\tau, x_T(\tau) + \Delta x_T(\tau), u(\tau) + \Delta u(\tau)) - f(\tau, x_T(\tau), u(\tau))\right) d\tau \\ \forall t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{25}$$

(4) Lipschitz şartını kullanarak bu integral özdeşliklerinden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \left|\Delta x_0(t)\right| &\le \int_0^t \left|f(\tau, x_0(\tau) + \Delta x_0(\tau), u(\tau) + \Delta u(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\right| d\tau \\ &\le L \int_0^t \left|\Delta x_0(\tau)\right| d\tau + L \int_0^t \left|\Delta u(\tau)\right| d\tau, \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

$$\left|\triangle x_T(t)\right| \le \int_t^T \left|f(\tau, x_T(\tau) + \triangle x_T(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau)) - f(\tau, x_T(\tau), u(\tau))\right| d\tau$$
$$\le L\int_t^T \left|\triangle x_T(\tau)\right| d\tau + L\int_t^T \left|\triangle u(\tau)\right| d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\left|\triangle x_0(t)\right| \le L\int_0^t \left|\triangle x_0(\tau)\right| d\tau + L\left\|\triangle u\right\|_{L_1(0,T)}, \tag{26}$$

$$\left|\triangle x_T(t)\right| \le L\int_t^T \left|\triangle x_T(\tau)\right| d\tau + L\left\|\triangle u\right\|_{L_1(0,T)}. \tag{27}$$

Bu eşitsizliklere (Vasilyev, 1981) çalışmasından bildiğimiz Gronwall Lemmasını uygularsak (22)-(23) probleminin çözümü için

$$\left|\triangle x_p(t)\right| \le c_0 \left\|\triangle u\right\|_{L_1(0,T)}, \quad p = 0, T, \quad \forall t \in [0,T] \tag{28}$$

kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_0 > 0$ sayısı $\triangle u$ 'dan bağımsızdır.

$J_0(u)$ fonksiyonelinin artışını herhangi $u \in V$ elemanı üzerinde bulalım. (1) formülünü $\alpha = 0$ için kullanırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\begin{aligned} \triangle J_0(u) &= J_0(u + \triangle u) - J(u) \\ &= 2\int_0^T (x_0(t) - x_T(t))(\triangle x_0(t) - \triangle x_T(t))dt + \\ &\quad + \left\|\triangle x_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + \left\|\triangle x_T\right\|^2_{L_2(0,T)} - 2\int_0^T \triangle x_0(t)\triangle x_T(t)dt \end{aligned} \tag{29}$$

Buradan da Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\triangle J_0(u)\right| \le 2\int_0^T \left|x_0(t) - x_T(t)\right|\left|\triangle x_0(t) - \triangle x_T(t)\right| dt +$$

$$+2\left\|\triangle x_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + 2\left\|\triangle x_T\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{30}$$

$$\le 2.\ \left\|x_0\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|x_T\right\|_{L_2(0,T)} \quad \left\|\triangle x_0\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|\triangle x_T\right\|_{L_2(0,T)} \ +$$

$$+2\left\|\triangle x_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + 2\left\|\triangle x_T\right\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Şimdi bu eşitsizlikte yer alan $\left\|x_p\right\|_{L_2(0,T)}$, $\left\|\triangle x_p\right\|_{L_2(0,T)}$ terimlerini değerlendirelim.(28) kestirimini kullanırsak,

$$\left\|\triangle x_p\right\|_{L_2(0,T)} \le c_1.\left\|\triangle u\right\|_{L_1(0,T)}, \quad p = 0, T \tag{31}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_1 > 0$ sabiti $\triangle u$ 'dan bağımsızdır. $\left\|x_p\right\|_{L_2(0,T)}$, $p = 0, T$ normlarını değerlendirmek için (5) ve (6) özdeşliklerini kullanalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\left|x_0(t)\right| \le \left|x_0\right| + \int_0^t f(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\, d\tau,$$

$$\left|x_T(t)\right| \le \left|x_T\right| + \int_t^T f(\tau, x_T(\tau), u(\tau))\, d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitsizliklerde (11) şartını kullanırsak,

$$\left|x_0(t)\right| \le \left|x_0\right| + \int_0^t \left|f_0(\tau)\right| d\tau, \quad \forall t \in [0,T],$$

$$\left|x_T(t)\right| \le \left|x_T\right| + \int_t^T \left|f_0(\tau)\right| d\tau, \quad \forall t \in [0,T]$$

eşitsizlikleri bulunur. $f_0 \in L_\infty(0,T)$ olduğunu ve x_0 , x_T'nin verilen sayılar olduğunu dikkate alırsak,

$$\left|x_p(t)\right| \le c_2, \quad P = 0, T, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimi elde edilir. Buradan da,

$$\left\|x_p\right\|_{L_2(0,T)} \le c_3, \quad \text{p=0,T} \tag{32}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_3 > 0$ bir sayıdır.

Böylece (11) ve (12) kestirimlerini kullanarak fonksiyonelin artışı için

$$\left\|\triangle f_0(u)\right\| \le c_4 \left\|\triangle u\right\|_{L_1(0,T)} + \left\|\triangle u\right\|_{L_1(0,T)}^2 \tag{33}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_4 > 0$ sayısı $\triangle_u$ 'dan bağımsızdır ve $u \in V$ herhangi elemandır. Sonuncu eşitsizlikten $\forall u \in V$ ve $\left\|\triangle u\right\|_{L_\infty(0,T)} \to 0$ için

$$\left|\triangle J_0(u)\right| \to 0 \tag{34}$$

limit bağıntısı geçerlidir. Yani $J_0(u)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde süreklidir. Diğer taraftan $J_0(u) \ge 0$ olduğundan alttan sınırlıdır. V kümesi $L_\infty(0,T)$ uzayında kapalı,sınırlı ve konveks kümedir. Bu kümenin $L_2(0,T)$ uzayında da kapalı ve sınırlı olduğunu kolaylıkla ispatlayabiliriz. V kümesinin sınırlı olduğu açıktır. Çünkü $L_\infty(0,T) \subset L_2(0,T)$ dir. Bu nedenle V kümesinin $L_2(0,T)$ uzayında kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

Herhangi $u_k \in V$ dizisi alalım ki; $u \in L_2(0,T)$ elemanına $L_2(0,T)$ normunda yakınsamış olsun; yani $k \to \infty$ için

$$\left\|u_k - u\right\|_{L_2(0,T)} \to 0 \tag{35}$$

şartı sağlansın. $u \in V$ olduğunu ispatlayalım. u_k dizisi $L_2(0,T)$ normunda $u \in L_2(0,T)$ elemanına yakınsadığından bu $u \in L_2(0,T)$ elemanına $[0,T]$ aralığında hemen hemen yakınsayan u_{k_m} alt dizisi seçebiliriz. Yani $m \to \infty$ için

$$u_{k_m}(t) \to u(t), \quad \overset{\circ}{\forall} t \in (0,T) \tag{36}$$

limit bağıntısı geçerlidir. $u_k \in V$ olduğundan

$$\left|u_{k_m}(t)\right| \le b_0, \quad \overset{\circ}{\forall} t \in (0,T), \quad m = 1,2,... \tag{37}$$

şartı sağlanır. (36) limit bağıntısı göz önünde bulundurulup $m \to \infty$ için limit geçilirse (37)'den

$$\left|u(t)\right| \le b_0, \quad \overset{\circ}{\forall} t \in (0,T)$$

şartını buluruz. Buradan ve $u \in L_2(0,T)$ şartından $u \in V$ olduğu elde edilir. Yani V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalıdır. Daha önce V kümesinin sınırlı olduğu söylendi. Buna göre V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı ve sınırlı bir kümedir ve $L_2(0,T)$ uzayı ise düzgün konveks uzaydır (Yosida, 1980, sayfa 182).Böylece $J_0(u)$ fonksiyoneli ve V kümesi için (Goebel, 1979) çalışmasından bilinen teoremin şartlarını sağlandığını görürüz.

Bu teoreme dayanarak $L_2(0,T)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan G alt kümesinin var olduğu ve $\forall u_0 \in G$ ve $\forall \alpha > 0$ için (1)-(3) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğu sonucuna varabiliriz.Teorem 3.2.1.3.1 ispatlandı.

3.2.1.4. Pontryagin'in Maksimum Prensibi

Bu bölümde (1)-(3) optimal kontrol probleminde çözüm için Pontryagin'in maksimum prensibi olarak adlandırılan prensip şeklinde gerek şartı elde edeceğiz.

Bu amaçla Hamilton-Pontryagin fonksiyonu olarak adlandırılan bir fonksiyon tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}\left(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)\right) = {} & \psi_0(t) f\left(t, x_0(t), u(t)\right) + \\ & + \psi_T(t).f\left(t, x_T(t), u(t)\right) - \\ & - \left|x_0(t) - x_T(t)\right|^2 - \alpha \left|u(t) - u_0(t)\right|^2 . \end{aligned} \tag{38}$$

Burada $x_0(t)$, $x_T(t)$ fonksiyonları (2)-(3) Cauchy probleminin $u \in V$ için çözümü, $\psi_0(t), \psi_T(t)$ fonksiyonları ise aşağıdaki eşlenik sistemin çözümüdür:

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}\ \ t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)}{\partial x_0}, \quad 0 \le t \le T \tag{39}$$

$$\frac{dx_T(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}\ \ t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)}{\partial x_T}, \quad 0 \le t \le T \tag{40}$$

$$\psi_0(T) = 0, \quad \psi_T(0) = 0. \tag{41}$$

Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun genel yazılış biçimi kullanılarak (39)-(40) sistemini açık olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = 2(x_0(t) - x_T(t)) - \psi_0(t) f_{x_o}(t, x_0(t), u(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{42}$$

$$\psi_0(T) = 0, \tag{43}$$

$$\frac{d\psi_T(t)}{dt} = -2(x_0(t) - x_T(t)) - f_{x_T}(t, x_T(t), u(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{44}$$

$$\psi_T(0) = 0. \tag{45}$$

Yukarıdaki ifadelerde $f_x(t,x,u)$ fonksiyonu $f(t,x,u)$ fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türevlerini göstermektedir.

Görüldüğü üzere burada eşlenik sistemde $\psi_0(t)$ fonksiyonunun (42)-(43) şartlarından ve $\psi_T(t)$ fonksiyonunun (44)-(45) şartlarından bulunmasıyla ilgili iki Cauchy problemi oluşmaktadır. Ayrıca burada (42)-(45) eşlenik sisteminin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve aşağıdaki integral özdeşliklerini sağlayan $\psi_0(t)$ ve $\psi_T(t)$ fonksiyonları anlaşılmaktadır:

$$\psi_0(t) = \int_t^T \left[f_{x_0}(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\psi_0(\tau) - 2(x_0(\tau) - x_T(\tau)) \right] d\tau, \quad \forall t \in [0,T], \tag{46}$$

$$\psi_T(t) = -\int_0^t \left[f_{x_T}(\tau, x_T(\tau), u(\tau))\psi_T(\tau) + 2(x_0(\tau) - x_T(\tau)) \right] d\tau, \quad \forall t \in [0,T], \tag{47}$$

$f(t,x,u)$ fonksiyonu için yukarıda varsaymış olduğumuz şartların yanı sıra $f(t,x,u)$ fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türeve sahip olduğunu, bu kısmi türevin $[0,T] \times \mathbb{R} \times [-b_0, b_0]$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon olduğunu ve $f_x(t,x,u)$

kısmi türevinin $\forall t \in [0,T]$ için (x,u) değişkenine göre aşağıdaki Lipschitz şartını sağladığını farz edelim:

$$\left|f_x(t,x,u) - f_x(t,y,v)\right| \le \widetilde{L}\ \left|x-y\right| + \left|u-v\right|\ ,\quad \forall (x,u),(y,v) \in \mathbb{R} \times [-b_0,b_0] \tag{48}$$

(11) şartının elde edilmesinde kullanılan metodolojiye benzer bir düşünceden yararlanarak $\forall u \in v,\ \ \forall x \in C[0,T],\quad \mathring{\forall} t \in (0,T)$ için

$$\left|f_x(t,x(t),u(t))\right| \le \widetilde{f}_0(t) \tag{49}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\widetilde{f}_0 \in L_\infty(0,T)\,,\widetilde{f}_0 > 0$ şeklinde bilinen bir fonksiyondur, yani $\widetilde{f}_0(t)$ fonksiyonu $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve pozitif bir fonksiyondur.

$x_0,x_T \in C[0,T]$ olduğundan ve $f_x(t,x,u)$ fonksiyonu (48)-(49) şartlarını sağladığından Teorem 3.2.1.2.3'ün aynısı eşlenik sistem için de ispatlanarak (42)-(45) eşlenik sisteminin $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve bu aralıkta $L_\infty(0,T)$ uzayına ait olan türevlere sahip bir tek $\psi_0(t)\,,\psi_T(t)$ çözümünün var olduğu ve bu çözümün (42) ve (44) denklemlerini hemen hemen her $t \in (0,T)$ için sağladığı sonucuna varılabilir.

Şimdi, $\psi_0(t)\,,\psi_T(t)$ fonksiyonları için kestirimler elde edelim. (46)-(47) integral özdeşliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz;

$$\left|\psi_0(t)\right| \le \int_t^T \left|f_{x_o}(\tau,x_0(\tau),u(\tau))\right|\left|\psi_0(\tau)\right| d\tau + 2\int_t^T \left|x_0(\tau)-x_T(\tau)\right| d\tau,\quad \forall t \in [0,T]$$

$$\left|\psi_T(t)\right| \le \int_0^t \left|f_{x_T}(\tau,x_T(\tau),u(\tau))\right|\left|\psi_T(\tau)\right| d\tau + 2\int_0^t \left|x_0(\tau)-x_T(\tau)\right| d\tau,\quad \forall t \in [0,T].$$

Burada (49) şartı kullanılarak,

$$\left|\psi_0(t)\right| \le \left\|\tilde{f}_0\right\|_{L_\infty(0,T)} \int_t^T \left|\psi_0(\tau)\right| d\tau + 2\left\|x_0\right\|_{L_1(0,T)} + 2\left\|x_T\right\|_{L_1(0,T)},\quad \forall t \in [0,T],$$

$$\left|\psi_T(t)\right| \le \left\|\tilde{f}_0\right\|_{L_\infty(0,T)} \int_0^t \left|\psi_T(\tau)\right| d\tau + 2\left\|x_0\right\|_{L_1(0,T)} + 2\left\|x_T\right\|_{L_1(0,T)},\quad \forall t \in [0,T]$$

eşitsizlikleri ve daha sonra Gronwall lemmasını kullanarak aşağıdaki kestirimler kolaylıkla elde edilebilir:

$$\left|\psi_p(t)\right| \le c_5 \ \left\|x_0\right\|_{L_1(0,T)} + \left\|x_T\right\|_{L_1(0,T)} \ , \quad P = 0,T, \quad \forall t \in [0,T] \tag{50}$$

Burada $c_5 > 0$ sabiti x_0 ve x_T ’den bağımsızdır.

Teorem 3.2.1.4.1: $f(t,x,u)$ fonksiyonu ve onun x ’e göre kısmi türevi olan $f_x(t,x,u)$ fonksiyonu $[0,T]\times\mathbb{R}\times[-b_0,b_0]$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar olup (4),(48) şartlarını sağladığını farz edelim. Eğer $u = u(t)$ kontrolü V kümesinden olan optimal kontrol ise ve $x_0(t)$, $x_T(t)$ fonksiyonları (2)-(3) Cauchy probleminin $u \in V$ optimal kontrolüne karşılık gelen çözümü ise, bu taktirde:

1) (39)-(41) eşlenik sistemin çözümü olan $\psi_0(t)$, $\psi_T(t)$ fonksiyonları vardır.

2) $u(t)$ optimal kontrolünün süreklilik noktaları olan $\forall t \in [0,T]$ için $\mathscr{H}(t,x_0(t),x_T(t),u,\psi_0(t),\psi_T(t))$ fonksiyonu $u \in \mathbb{R}$ değişkeninin fonksiyonu olarak kendisinin en küçük üst sınırına $[-b_0,b_0]$ aralığında $u = u(t)$ optimal kontrolünde sahip olur. Yani $\overset{\circ}{\forall}\, t \in [0,T]$ için

$$\mathscr{H}(t,x_0(t),x_T(t),u(t),\psi_0(t),\psi_T(t)) = \sup_{u\in[-b_0,b_0]} \mathscr{H}(t,x_0(t),x_T(t),u,\psi_0(t),\psi_T(t)) \tag{51}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat: V kümesinden alınan $u = u(t)$ ’nin optimal kontrol olduğunu farzedelim. Bu optimal kontrole $u + \Delta u \in V$ olacak şekilde $\Delta u = \Delta u(t)$ artışı verelim. Bu taktirde $\overset{\circ}{\forall}\ \ t \in [0,T]$ için $u(t) + \Delta u(t) \in [-b_0,b_0]$ olduğu aşikardır. Eğer $x_0(t) \equiv x_0(t;u)$, $x_T(t) \equiv x_T(t;u)$ fonksiyonları (2)-(9) Cauchy probleminin $u \in V$ ’ye karşılık gelen çözümü ve $x_{0\Delta}(t) \equiv x_0(t;u+\Delta u)$, $x_{T\Delta}(t) \equiv x_T(t;u+\Delta u)$ fonksiyonları ise (2)-(9) Cauchy probleminin $u + \Delta u \in V$ ’ye karşılık gelen çözümü oluyor ise, bu taktirde $\Delta x_p(t) \equiv x_p(t;u+\Delta u) - x_p(t;u), \quad p = 0,T$ fonksiyonları (24)-(25) integral denklemlerinin veya (22)-(23) Cauchy probleminin çözümü olacaktır. Bildiğimiz üzere $\Delta x_p(t), \quad p = 0,T$ fonksiyonları için (28) kestirimi geçerlidir.

Şimdi $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin $u = u(t)$ optimal kontrolünde artışını bulalım. (1) ve (29) formüllerini kullanırsak aşağıdaki formülleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}\triangle J_\alpha(u) &= J_\alpha(u+\triangle u) - J_\alpha(u)\\ &= 2\int_0^T (x_0(t)-x_T(t))(\triangle x_0(t)-\triangle x_T(t))\,dt+\\ &\quad +2\alpha\int_0^T (u(t)-u_0(t))\triangle u(t)\,dt+\left\|\triangle x_0\right\|^2_{L_2(0,T)}+\left\|\triangle x_T\right\|^2_{L_2(0,T)}+\\ &\quad +2\int_0^T \triangle x_0(t)\triangle x_T(t)\,dt+\alpha\left\|\triangle u\right\|^2_{L_2(0,T)}.\end{aligned} \tag{52}$$

Önce $\triangle J_\alpha(u)$ artışı için

$$\begin{aligned}\triangle J_\alpha(u) = -\int_0^T [\mathscr{H}(t,x_0(t),x_T(t),u(t)+\triangle u(t),\psi_0(t),\psi_T(t)) -\\ -\mathscr{H}(t,x_0(t),x_T(t),u(t),\psi_0(t),\psi_T(t))]dt+\\ +R(\triangle u)\end{aligned} \tag{53}$$

formülünü ispatlayalım. Burada $R(\triangle u)$ için

$$\left|R(\triangle u)\right| \le c_6\left(\int_0^T \left|\triangle u(t)\right| dt\right)^2 \tag{54}$$

şartı sağlanmaktadır.

(22)-(23) bağıntılarını ve (42)-(45) eşlenik sistemini kullanarak (42) formülünün sağ tarafındaki birinci terimi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}2\int_0^T (x_0(t)-x_T(t))(\triangle x_0(t)-\triangle x_T(t))dt &= \int_0^T 2(x_0(t)-x_T(t))\triangle x_0(t)\,dt-\\ &\quad -\int_0^T 2(x_0(t)-x_T(t))\triangle x_T(t)\,dt\\ &= \int_0^T \psi_0'(t)+f_{x_0}(t,x_0(t),u(t)).\psi_0(t)\ \triangle x_0(t)\,dt+\end{aligned}$$

$$+\int_0^T \psi_0'(t) + f_{x_T}(t, x_T(t), u(t)).\psi_T(t)\; \Delta x_T(t)\, dt$$

$$= \int_0^T f_{x_0}(t, x_0(t), u(t)).\psi_0(t)\Delta x_0(t)\, dt +$$

$$+\int_0^T f_{x_T}(t, x_T(t), u(t))\psi_T(t)\Delta x_T(t)\, dt + \tag{55}$$

$$+\int_0^T \psi_0'(t)\Delta x_0(t)dt + \int_0^T \psi_0'(t)\Delta x_T(t)\, dt.$$

Kısmi integrasyon formülünü ve $\triangle x_0(0) = \triangle x_T(T) = 0,\;\; \psi_0(T) = \psi_T(0) = 0$ şartlarını kullanırsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\int_0^T \psi_0'(t)\Delta x_0(t)\, dt = -\int_0^T \psi_0(t)\Delta x_0'(t)\, dt;$$

$$\int_0^T \psi_T'(t)\Delta x_T(t)\, dt = -\int_0^T \psi_T(t)\Delta x_T'\,(t)\, dt.$$

Bu eşitliklerde (22) bağıntılarını kullanırsak:

$$\int_0^T \psi_0'(t)\Delta x_0(t)\, dt = -\int_0^T \psi_0(t)[f(t, x_0(t) + \Delta x_0(t), u(t) + \Delta u(t)) - \\ -f(t, x_0(t), u(t)]\, dt \tag{56}$$

$$\int_0^T \psi_0'(t)\Delta x_T(t)\, dt = -\int_0^T \psi_T(t)[f(t, x_T(t) + \Delta x_T(t), u(t) + \Delta u(t)) - \\ -f(t, x_T(t), u(t)]\, dt \tag{57}$$

eşitliklerinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Bu eşitlikleri dikkate alarak (52) formülünden aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$2\int_0^T (x_0(t)-x_T(t))(\triangle x_0(t)-\triangle x_T(t))\,dt = -\int_0^T \psi_0(t)[f(t,x_0(t)+\triangle x_0(t),u(t)+\triangle u(t))-$$
$$-f(t,x_0(t),u(t)]\,dt - \int_0^T \psi_T(t)[f(t,x_T(t)\ \ +\triangle x_T(t),u(t)+\triangle u(t))-f(t,x_T(t),u(t)]\,dt + \quad (58)$$
$$+\int_0^T \psi_0(t)f_{x_0}(t,x_0(t),u(t))\triangle x_0(t)\,dt + \int_0^T \psi_T(t)f_{x_T}(t,x_T(t),u(t))\triangle x_T(t)\,dt.$$

Bu eşleniğin sağ tarafına,

$$\int_0^T \psi_0(t)f(t,x_0(t),u(t)+\triangle u(t))\,dt$$
$$\int_0^T \psi_T(t)f(t,x_T(t),u(t)+\triangle u(t))\,dt$$

terimlerini ekleyip çıkartalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
2\int_0^T (x_0(t)-x_T(t))(\triangle x_0(t)-\triangle x_T(t))dt = &-\int_0^T \psi_0(t)f(t,x_0(t),u(t)+\triangle u(t))dt + \\
&+\int_0^T \psi_0(t)f(t,x_0(t),u(t))\,dt - \\
&-\int_0^T \psi_T(t)f(t,x_T(t),u(t)+\triangle u_T(t))\,dt + \\
&+\int_0^T \psi_T(t)f(t,x_T(t),u(t))\,dt - \\
&-\int_0^T \psi_0(t)[f(t,x_0(t)+\triangle x_0(t),u(t)+\triangle u(t))- \\
&-f(t,x_0(t),u(t)+\triangle u(t)]\,dt - \\
&-\int_0^T \psi_T(t)[f(t,x_T(t)+\triangle x_T(t),u(t)+\triangle u(t))- \\
&-f(t,x_T(t),u(t)+\triangle u(t)]\,dt + \\
&+\int_0^T \psi_0(t)f_{x_0}(t,x_0(t),u(t))\triangle x_0(t)\,dt + \qquad (59) \\
&+\int_0^T \psi_T(t)f_{x_T}(t,x_T(t),u(t))\triangle x_T(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Hamilton-Pontryagin fonksiyonu için olan (38) formülünü kullanırsak, (59) eşitliğinin yardımıyla fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazarız:

$$\begin{aligned}\triangle J_{\alpha}(u) = -\int_0^T [&\mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), u(t) + \triangle u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)) - \\ &-\mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t))]\, dt + \\ &+R(\triangle u).\end{aligned} \tag{60}$$

Burada $R(\triangle u)$ aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}R(\triangle u) = -\int_0^T &\psi_0(t)[f(t, x_0(t) + \triangle x_0(t), u(t) + \triangle u(t)) - \\ &-f(t, x_0(t), u(t) + \triangle u(t)]\, dt - \\ &-\int_0^T \psi_T(t)[f(t, x_T(t) + \triangle x_T(t), u(t) + \triangle u(t)) - \\ &-f(t, x_T(t), u(t) + \triangle u(t)]\, dt + \\ &+\int_0^T \psi_0(t) f_{x_0}(t, x_0(t), u(t)) \triangle x_0(t)\, dt + \\ &+\int_0^T \psi_T(t) f_{x_T}(t, x_T(t), u(t)) \triangle x_T(t)\, dt + \\ &+\left\|\triangle x_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + \left\|\triangle x_T\right\|^2_{L_2(0,T)} - \\ &-2\int_0^T \triangle x_0(t) \triangle x_T(t)\, dt\end{aligned} \tag{61}$$

Şimdi $R(\triangle u)$ kalan terimini değerlendirelim. Bu amaçla sonlu artış formülünü uygularsak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}&f(t, x_0(t) + \triangle x_0(t), u(t) + \triangle u(t)) - f(t, x_0(t), u(t) + \triangle u(t)) = \\ &= f_{x_0}(t, x_0(t) + \theta_0(t) \triangle x_0(t), u(t) + \triangle u(t)) \triangle x_0(t)\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}&f(t, x_T(t) + \triangle x_T(t), u(t) + \triangle u(t)) - f(t, x_T(t), u(t) + \triangle u(t)) = \\ &= f_{x_T}(t, x_T(t) + \theta_1(t) \triangle x_T(t), u(t) + \triangle u(t)) \triangle x_T(t)\end{aligned} \tag{63}$$

Burada $0 < \theta_0(t) < 1$, $0 < \theta_1(t) < 1$, $\forall t \in [0, T]$'dir.

Bu eşitlikleri $R(\triangle u)$ için olan formülde dikkate alırsak,

$$R(\triangle u) = -\int_0^T \psi_0(t)[f_{x_0}(t, x_0(t) + \theta_0(t)\triangle x_0(t), u(t) + \triangle u(t)) - f_{x_0}(t, x_0(t), u(t)]\triangle x_0(t)dt -$$

$$-\int_0^T \psi_T(t)[f_{x_T}(t, x_T(t) + \theta_1(t)\triangle x_T(t), u(t) + \triangle u(t)) - f_{x_T}(t, x_T(t), u(t)]\triangle x_T(t)dt +$$

$$+\left\|\triangle x_0\right\|_{L_2(0,T)}^2 + \left\|\triangle x_T\right\|_{L_2(0,T)}^2 - 2\int_0^T \triangle x_0(t)\triangle x_T(t)\,dt$$

formülünü elde ederiz. Buradan (48) Lipschitz şartının yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$R \le \int_0^T \left|\psi_0(t)\right|\left|\triangle x_0(t)\right|\tilde{L}\,\left(\left|\triangle x_0(t)\right| + \left|\triangle u(t)\right|\right)\,dt +$$

$$+\int_0^T \left|\psi_0(t)\right|\left|\triangle x_T(t)\right|\tilde{L}\,\left(\left|\triangle x_T(t)\right| + \left|\triangle u(t)\right|\right)\,dt +$$

$$+2\left\|\triangle x_0\right\|_{L_2(0,T)}^2 + 2\left\|\triangle x_T\right\|_{L_2(0,T)}^2$$

(32)-(50) kestirimlerini kullanarak sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği yakalayabiliriz:

$$\left|R(\triangle u)\right| \le c_7\left(\int_0^T \left|\triangle x_0(t)\right|\left|\triangle u(t)\right|dt + \int_0^T \left|\triangle x_T(t)\right|\left|\triangle u(t)\right|dt + \left\|\triangle x_0\right\|_{L_2(0,T)}^2 . \left\|\triangle x_T(t)\right\|_{L_2(0,T)}^2\right)$$

Burada (28)-(31) kestirimlerini kullanırsak, aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left|R(\triangle u)\right| \le c_8\left(\int_0^T \left|\triangle u(t)\right|dt\right)^2$$

Bu ifadede $c_6 = c_8$ seçersek (54)'ün doğruluğunu ispatlamış oluruz. Böylece fonksiyonelin artışı için (53) formülünün geçerli olduğunu ispatladık.

V kümesinin elemanı olan $u = u(t)$ optimal kontrol olduğundan $\forall \triangle u \in L_\infty(0,T)$ için $u + \triangle u \in V$ olmak üzere

$$\triangle J_\alpha(u) = J_\alpha(u + \triangle u) - J_\alpha(u) \ge 0 \tag{64}$$

şartı sağlanır.

$u = u(t)$ optimal kontrolünün herhangi süreklilik noktası, yani $u(t)$ için Lebesgue noktası $\tau \in [0,T]$ ve $\varepsilon > 0$ verilen herhangi bir sayı olmak üzere $\left[\tau - \frac{\varepsilon}{2}, \tau + \frac{\varepsilon}{2}\right] \in [0,T]$ şartı sağlansın. $u = u(t)$ optimal kontrolünün artışını

$$\triangle u_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} v - u(t), & \tau - \frac{\varepsilon}{2} \le t \le \tau + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & , \ t \in [0,T] \, / \, [\tau - \frac{\varepsilon}{2}, \tau + \frac{\varepsilon}{2}] \end{cases} \qquad (65)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $v \in [-b_0, b_0]$ olan herhangi bir noktadır. (65) biçimindeki artışa $u = u(t)$ optimal kontrolünün eğrisel varyasyonu denir.

$u(t) + \triangle u_{\varepsilon}(t)$ 'nin V kümesinin elemanı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani $u(t) + \triangle u_{\varepsilon}(t)$ olası kontroldür.

Fonksiyonelin artışı için olan (53) formülünü kullanırsak

$$\triangle J_{\alpha}(u) = -\int_0^T g(t)dt + R(\varepsilon) = -\int_{\tau-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau+\frac{\varepsilon}{2}} g(t)dt + R(\varepsilon) \qquad (66)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $g(t)$ fonksiyonu

$$g(t) = \mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), v, \psi_0(t), \psi_T(t)) - \mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t))$$
$$\tau - \frac{\varepsilon}{2} \le t \le \tau + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (67)$$

formülü ile tanımlanır. (54) kestirimini kullanırsak

$$\left|R(\triangle u)\right| = \left|R(\varepsilon)\right| \le c_6 \left(\int_{\tau-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau+\frac{\varepsilon}{2}} \left|\triangle u_{\varepsilon}(t)\right| dt \right)$$
$$\le \varepsilon . c_6 \int_{\tau-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau+\frac{\varepsilon}{2}} \left|\triangle u_{\varepsilon}(t)\right|^2 dt \qquad (68)$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_6 > 0$ sabiti $\varepsilon > 0$ 'dan bağımsızdır. Buradan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \qquad (69)$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu diyebiliriz. (64) eşitsizliğini dikkate alıp (66) eşitliğinden yararlanırsak

$$\triangle J_{\alpha}(u) = -\int_{\tau-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau+\frac{\varepsilon}{2}} g(t)dt + R(\varepsilon) \geq 0$$

bağıntısını elde ederiz. Lebesgue noktasının tanımı gereği

$$-\varepsilon g(\tau) + \circ(\varepsilon) + R(\varepsilon) \geq 0 \qquad (70)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\circ(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \qquad (71)$$

(70) eşitsizliğinin her iki tarafını $\varepsilon > 0$ sayısına bölerek $\varepsilon \to 0$ için limite geçip (69) ve (71) bağıntılarını kullanırsak, $u = u(t)$ optimal kontrolünün herhangi $\tau \in [0,T]$ süreklilik noktası için

$$g(\tau) \geq 0 \qquad (72)$$

bağıntısını elde ederiz. Süreklilik veya Lebesgue noktaları $[0,T]$ aralığının hemen hemen her yerde noktaları olduğundan (72) bağıntısından

$$g(t) \geq 0, \quad \mathring{\forall} t \in [0,T]$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluruz.

Burada da (67) formülünü kullanırsak,

$$\mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), v, \psi_0(t), \psi_T(t)) \leq \mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t))$$
$$\mathring{\forall} t \in [0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten ve $v \in [-b_0, b_0]$ noktasının herhangi nokta olmasından teoremin hükmünün geçerli olduğu gösterilmiş oldu.

3.2.1.5. Fonksiyonelin Diferensiyellenebilirliği ve İntegral Biçiminde Maksimum Prensibi

Bu alt bölümde amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilir olduğunu göstererek integral biçiminde maksimum prensibini inceleyeceğiz. Bu amaçla $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin herhangi $u \in V$ için artışını bulalım. Bunun için (53) formülünü kullanırsak $\triangle J_\alpha(u)$, $u \in V$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \triangle J_\alpha(u) = -\int_0^T [&\mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), u(t) + \triangle u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)) - \\ &-\mathscr{H}(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t))]dt + R(\triangle u) \end{aligned} \tag{73}$$

Burada $R(\triangle u)$ kalanı (61) formülü ile tanımlanır. Burada Hamilton-Pontryagin fonksiyonu için (38) formülünü kullanırsak fonksiyonelin artışını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \triangle J_\alpha(u) = &-\int_0^T \psi_0(t)[f(t, x_0(t), u(t) + \triangle u(t)) - f(t, x_0(t), u(t)]dt - \\ &-\int_0^T \psi_T(t)[f(t, x_T(t), u(t) + \triangle u(t)) - f(t, x_T(t), u(t)]dt + \\ &+2\alpha \int_0^T u(t) - u_0(t) \; \triangle u(t)dt + \alpha \left\| \triangle u \right\|^2_{L_2(0,T)} + R(\triangle u) \end{aligned} \tag{74}$$

$f(t, x, u)$ fonksiyonu yukarıda varsaydığımız şartların yanı sıra u değişkenine göre $[0, T] \times \mathbb{R} \times [-b_0, b_0]$ bölgesinde sürekli $f_u(t, x, u)$ kısmi türevine sahip olduğunu ve $\forall t \in [0, T]$ için (x, u) değişkenine göre aşağıdaki Lipschitz şartını sağladığını farz edelim:

$$\begin{gathered} \left[f_u(t, x, u) - f_u(t, y, v) \right] \leq L_0 \; \left| x - y \right| + \left| u - v \right| \;, \\ \forall (x, u), \quad (y, v) \in \mathbb{R} \times [-b_0, b_0] \end{gathered} \tag{75}$$

Burada $L_0 > 0$ sabiti Lipschitz sabitidir.

Teorem 3.2.1.5.1: $f(t, x, u)$ fonksiyonunun ve onun (x, u) değişkenlerine göre kısmi türevlerinin $[0, T] \times \mathbb{R} \times [-b_0, b_0]$ bölgesinde tanımlanıp sürekli olduğunu ve (4)-(48) ve (75) Lipschitz şartlarını sağladığını farz edelim. Bu taktirde $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferensiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için

$$J'_{\alpha}(u) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = -\psi_0(t) f_u(t, x_0(t), u(t)) - \\ -\psi_T(t) f_u(t, x_T(t), u(t)) + 2\alpha(u(t) - u_0(t)) \tag{76}$$

formülü geçerlidir.

İspat: Lagrange'nin sonlu artış formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$f(t, x_0(t), u(t) + \Delta u(t)) - f(t, x_0(t), u(t)) = \\ = f_u(t, x_0(t), u(t) + \theta_2(t).\Delta u(t))\Delta u(t) \tag{77}$$

$$f(t, x_T(t), u(t) + \Delta u(t)) - f(t, x_T(t), u(t)) = \\ = f_u(t, x_T(t), u(t) + \theta_3(t).\Delta u(t))\Delta u(t) \tag{78}$$

Burada $0 < \theta_2(t) < 1$, $0 < \theta_3(t) < 1$, $\forall t \in (0, T)$ 'dir. Bu eşitlikleri (74)'de kullanırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\Delta J_{\alpha}(u) = -\int_0^T \psi_0(t) f_u(t, x_0(t), u(t) + \theta_2(t).\Delta u(t))\Delta u(t)dt - \\ -\int_0^T \psi_T(t) f_u(t, x_T(t), u(t) + \theta_3(t).\Delta u(t))\Delta u(t)dt + \\ +2\alpha \int_0^T u(t) - u_0(t) \ \Delta u(t)dt + \alpha \left\| \Delta u \right\|^2_{L_2(0,T)} + R(\Delta u) \tag{79}$$

Bu formülün sağ tarafına

$$\int_0^T \psi_0(t) f_u(t, x_0(t), u(t))\Delta u(t)dt$$

$$\int_0^T \psi_T(t) f_u(t, x_T(t), u(t))\Delta u(t)dt$$

terimlerini ekleyip çıkartalım. Bu taktirde fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\triangle J_{\alpha}(u) = -\int_0^T f_u(t, x_0(t), u(t))\psi_0(t)\Delta u(t)dt -$$
$$-\int_0^T f_u(t, x_T(t), u(t))\psi_T(t)\Delta u(t)dt + \tag{80}$$
$$+2\alpha\int_0^T u(t) - u_0(t)\ \triangle u(t)dt + R_1(\triangle u)$$

Burada $R_1(\triangle u)$ kalanı

$$R_1(\triangle u) = R(\triangle u) + \alpha\left\|\triangle u\right\|^2_{L_2(0,T)} - \int_0^T [f_u(t, x_0(t), u(t) + \theta_2(t).\Delta u(t)) -$$
$$-f_u(t, x_0(t), u(t))]\psi_0(t)\Delta u(t)dt - \int_0^T [f_u(t, x_T(t), u(t) + \theta_3(t).\Delta u(t)) - \tag{81}$$
$$-f_u(t, x_T(t), u(t))]\psi_T(t)\Delta u(t)dt$$

formülü ile $R(\triangle u)$ kalanı ise (61) formülü ile tanımlanır. $R(\triangle u)$ kalanı (54) kestirimi ile değerlendirilmiştir. Bu kestirimi ve $R_1(\triangle u)$ için olan (81) formülünü kullanırsak bu terimi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz.

$$\left|R_1(\triangle u)\right| \le c_6\left(\int_0^T \left|\triangle u(t)\right| dt\right)^2 + \alpha\left\|\triangle u\right\|^2_{L_2(0,T)} +$$
$$+\int_0^T \left|f_u(t, x_0(t), u(t) + \theta_2(t).\Delta u(t)) -\right.$$
$$\left.-f_u(t, x_0(t), u(t))\right|\left|\psi_0(t)\right|\left|\triangle u(t)\right| dt + \tag{82}$$
$$+\int_0^T \left|f_u(t, x_T(t), u(t) + \theta_3(t).\Delta u(t)) -\right.$$
$$\left.-f_u(t, x_T(t), u(t))\right|\left|\psi_T(t)\right|\left|\triangle u(t)\right| dt$$

Burada (75) Lipschitz şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}\left|R_1(\triangle u)\right| \le c_6 &\left(\int_0^T \left|\triangle u(t)\right| dt \right)^2 + \alpha \left\|\triangle u\right\|^2_{L_2(0,T)} + \\ &+ \int_0^T L_0 \left|\triangle u(t)\right| \left|\psi_0(t)\right| \left|\triangle u(t)\right| dt + \\ &+ \int_0^T L_0 \left|\triangle u(t)\right| \left|\psi_T(t)\right| \left|\triangle u(t)\right| dt \\ &\le c_6 \left(\int_0^T \left|\triangle u(t)\right| dt \right)^2 + \alpha \left\|\triangle u\right\|^2_{L_2(0,T)} + \\ &+ \max_{t\in[0,T]} \left|\psi_0(t)\right| + \max_{t\in[0,T]} \left|\psi_T(t)\right| \int_0^T \left|\triangle u(t)\right|^2 dt\end{aligned}$$

Bu eşitlikte (32) ve (50) kestirimlerini uygularsak, $R_1(\triangle u)$ kalanı için kolaylıkla

$$\left|R_1(\triangle u)\right| \le c_9 \left\|\triangle u\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{83}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_9 > 0$ sabiti $\triangle u$ 'dan bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlik

$$R_1(\triangle u) = \circ \left\|\triangle u\right\|_{L_2(0,T)} \tag{84}$$

olduğunu gösterir, yani $R_1(\triangle u)$ kalanı $\left\|\triangle u\right\|_{L_2(0,T)}$ normuna göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür. Başka bir deyişle,

$$\lim_{\left\|\triangle u\right\|_{L_2(0,T)} \to 0} \frac{R_1(\triangle u)}{\left\|\triangle u\right\|_{L_2(0,T)}} = 0 \tag{85}$$

geçerlidir. Bu bağıntıyı dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\begin{aligned}\triangle J_\alpha(u) = \int_0^T \Big[&-f_u(t, x_0(t), u(t))\psi_0(t) - \\ &-f_u(t, x_T(t), u(t))\psi_T(t) \Big] \triangle u(t) dt + \circ \left\|\triangle u\right\|_{L_2(0,T)}\end{aligned} \tag{86}$$

Bu formülü ve fonksiyonellerin $L_\infty(0,T)$ uzayında Frechet anlamında diferensiyellenebilir olduğunun tanımını kullanırsak $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin V

kümesinin herhangi $u = u(t)$ elemanı üzerinde diferensiyellenebilir olduğunu ve onun gradiyenti için

$$\begin{aligned} J'_\alpha(u) = & -f_u(t, x_0(t), u(t))\psi_0(t) - \\ & -f_u(t, x_T(t), u(t))\psi_T(t) + \\ & +2\alpha(u(t) - u_0(t)) \end{aligned} \tag{87}$$

formülünün geçerli olduğunu elde ederiz.

Bu formülden, Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun da yardımıyla (76) formülünün geçerli olduğunu ispatlamış oluruz. Teorem 3.2.1.5.1 ispatlandı.

Şimdi integral biçiminde maksimum prensibini, yani gerek şartı bulalım.

Teorem 3.2.1.5.2: Teorem 3.2.1.5.1'in şartlarının sağlandığını ve $u^* = u^*(t)$ kontrolünün V kümesinden olan optimal kontrol olduğunu farz edelim. Bu taktirde $\forall u \in V$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^T \Big[f_u(t, x_0^*(t), u^*(t))\psi_0^*(t) + f_u(t, x_T^*(t), u^*(t))\psi_T^*(t) - \\ & -2\alpha(u^* - u_0(t))\Big]\Big[u(t) - u^*(t)\Big] dt \le 0 \end{aligned} \tag{88}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x_0^*(t) = x_0(t; u^*)$, $x_T^*(t) = x_T(t; u^*)$ fonksiyonları (2)-(3) Cauchy probleminin, $\psi_0^*(t) = \psi_0(t; u^*)$, $\psi_T^*(t) = \psi_T(t; u^*)$ fonksiyonlar ise eşlenik problemin $u^* \in V$ için çözümüdür.

İspat: V kümesinin $L_\infty(0,T)$ uzayında konveks küme olduğu açıktır. $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim, yani $J'_\alpha(u)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım.

Teorem 3.1.5.1'e göre $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferensiyellenebilir ve onun gradiyenti için (87) formülü geçerlidir. Bu formülü kullanarak V kümesi üzerinde

$$\left\| J'_\alpha(u + \triangle u) - J'_\alpha(u) \right\|_{L_1(0,T)} \le c_{10} \left\| \triangle u \right\|_{L_\infty(0,T)} \tag{89}$$

kestiriminin geçerli olduğunu gösterelim.

Burada $c_{10} > 0$ sabiti $\triangle u$ 'dan bağımsızdır. Bu amaçla $\forall u \in V$ için $u + \triangle u \in V$ olacak şekilde bu elemana $\triangle u \in L_\infty(0,T)$ artışı verelim. (87) formülünün yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} J'_\alpha(u+\triangle u) - J'_\alpha(u) = & -f_u(t, x_0(t) + \triangle x_0(t), u(t) + \\ & + \triangle u(t))\psi_0(t; u + \triangle u) - \\ & - f_u(t, x_T(t) + \triangle x_T(t), u(t) + \\ & + \triangle u(t))\psi_T(t; u + \triangle u) + \\ & + f_u(t, x_0(t), u(t))\psi_0(t) + \\ & + f_u(t, x_T(t), u(t))\psi_T(t) + \\ & + 2\alpha \triangle u(t) \end{aligned} \tag{90}$$

Burada $x_0(t)$, $x_T(t)$ fonksiyonları (2)-(3) Cauchy probleminin, $\triangle x_0(t)$, $\triangle x_T(t)$ fonksiyonları (22)-(23) probleminin, $\psi_0(t) \equiv \psi_0(t;u)$, $\psi_T(t) \equiv \psi_T(t;u)$ fonksiyonları eşlenik sistemin $u \in V$ için ve $\psi_{0\triangle}(t) \equiv \psi_0(t; u+\triangle u)$, $\psi_{T\triangle}(t) \equiv \psi_T(t; u + \triangle u)$ fonksiyonları ise eşlenik sistemin $u + \triangle u \in V$ için çözümüdür.

(46) ve (47) integral denklemlerini kullanarak,

$$\triangle\psi_0(t) = \psi_{0\triangle}(t) - \psi_0(t) \equiv \psi_0(t; u + \triangle u) - \psi_0(t;u),$$

$$\triangle\psi_T(t) = \psi_{T\triangle}(t) - \psi_T(t) \equiv \psi_T(t; u + \triangle u) - \psi_T(t;u),$$

fonksiyonlarının aşağıdaki integral denklemlerinin çözümü olduğunu görebiliriz:

$$\begin{aligned} \triangle\psi_0(t) = & \int_t^T \Big[f_{x_0}(\tau, x_0(\tau) + \triangle x_0(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau))\psi_0(\tau, u + \triangle u) - \\ & - 2.(x_0(\tau) + \triangle x_0(\tau)) - (x_T(\tau) + \triangle x_T(\tau)) \Big] d\tau - \\ & - \int_t^T \Big[f_{x_0}(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\psi_0(\tau) - 2(x_0(\tau) - x_T(\tau)) \Big] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle\psi_T(t) = & - \int_0^t \Big[f_{x_T}(\tau, x_T(\tau) + \triangle x_T(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau))\psi_T(\tau, u + \triangle u) + \\ & + 2.(x_0(\tau) + \triangle x_0(\tau)) - (x_T(\tau) + \triangle x_T(\tau)) \Big] d\tau + \\ & + \int_t^T \Big[f_{x_T}(\tau, x_T(\tau), u(\tau))\psi_T(\tau) + 2(x_0(\tau) - x_T(\tau)) \Big] d\tau \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden de aşağıdaki eşitlikleri kolaylıkla elde ederiz:

$$\begin{aligned}\triangle\psi_0(t) = \int_t^T \Big[& f_{x_0}(\tau, x_0(\tau) + \triangle x_0(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau))\psi_0(\tau, u + \triangle u) - \\ & - f_{x_0}(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\psi_0(\tau)\Big] d\tau - \\ & -2\int_t^T (\triangle x_0(\tau) - \triangle x_T(\tau))\Big] d\tau, \\ & \forall t \in [0, T]\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}\triangle\psi_T(t) = -\int_0^t \Big[& f_{x_T}(\tau, x_T(\tau) + \triangle x_T(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau))\psi_T(\tau, u + \triangle u) - \\ & - f_{x_T}(\tau, x_T(\tau), u(\tau))\psi_T(\tau)\Big] d\tau + \\ & +2\int_t^T (\triangle x_0(\tau) - \triangle x_T(\tau))\Big] d\tau, \\ & \forall t \in [0, T]\end{aligned} \tag{92}$$

Önce (91) eşitliğini kullanarak $\triangle\psi_0(t)$ 'yi değerlendirelim. Bu amaçla (91) eşitliğini aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned}\triangle\psi_0(t) = \int_t^T \Big[& f_{x_0}(\tau, x_0(\tau) + \triangle x_0(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau)) - \\ & - f_x(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\psi_0(\tau)\Big]\psi_0(t; u + \triangle u) d\tau + \\ & + \int_t^T \Big[f_{x_0}(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\triangle\psi_0(\tau) d\tau - \\ & -2\int_t^T \triangle x_0(\tau) d\tau + \\ & +2\int_t^T \triangle x_T(\tau) d\tau \\ & \forall t \in [0, T]\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafını değerlendirirsek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\triangle\psi_0(t)\right| \le \int_t^T \left|f_{x_0}(\tau, x_0(\tau) + \triangle x_0(\tau), u(\tau) + \triangle u(\tau)) - \right.$$

$$\left. - f_{x_0}(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\right| \left|\psi_0(\tau; u + \triangle u)\right| d\tau +$$

$$+ \int_t^T \left|f_{x_0}(\tau, x_0(\tau), u(\tau))\right| \left|\triangle\psi_0(\tau)\right| d\tau +$$

$$+ 2\int_t^T \left|\triangle x_0(\tau)\right| d\tau +$$

$$+ 2\int_t^T \left|\triangle x_T(\tau)\right| d\tau$$

$$\forall t \in [0, T]$$

Burada (48) Lipschitz şartını ve (49) şartını kullanırsak, sonuncu eşitsizlikten

$$\left|\triangle\psi_0(t)\right| \le \int_t^T \widetilde{L} \; \left|\triangle x_0(\tau)\right| + \left|\triangle u(\tau)\right| \; \left|\psi_0(\tau; u + \triangle u)\right| d\tau +$$

$$+ \int_t^T \widetilde{f}_0(\tau) \left|\triangle\psi_0(\tau)\right| d\tau +$$

$$+ 2\int_t^T \left|\triangle x_0(\tau)\right| d\tau +$$

$$+ 2\int_t^T \left|\triangle x_T(\tau)\right| d\tau$$

$$\forall t \in [0, T]$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu görebiliriz.

$f_0(t)$ fonksiyonunun $L_\infty(0, T)$ uzayından olmasını ve (28),(32) ve (50) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\triangle\psi_0(t)\right| \le c_{11}\int_t^T \left|\triangle\psi_0(\tau)\right| d\tau + c_{12}\int_0^T \left|\triangle u(t)\right| d\tau, \quad \forall t \in [0, T]$$

Burada $c_{11} > 0, c_{12} > 0$ sabitleri $\triangle u$ ’dan bağmsızdır.

Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasını uygularsak,

$$\left|\Delta\psi_0(t)\right| \leq c_{13}\int_0^T \left|\Delta u(t)\right| dt, \quad \forall t \in [0,T] \tag{93}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{13} > 0$ sabiti Δu'dan bağımsızdır.

Benzer biçimde işlemler yapılarak (92) eşitliğinden $\Delta\psi_T(t)$ için aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left|\Delta\psi_T(t)\right| \leq c_{14}\int_0^T \left|\Delta u(t)\right| dt, \quad \forall t \in [0,T] \tag{94}$$

Burada $c_{14} > 0$ sabiti Δu'dan bağımsızdır.

Şimdi $J'_\alpha(u+\Delta u) - J'_\alpha(u)$ ifadesi için olan (90) formülünü dönüştürelim. Bunun için bu ifadeyi aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned} J'_\alpha(u+\Delta u) - J'_\alpha(u) = &-\Big[f_u(t, x_0(t)+\Delta x_0(t), u(t)+\Delta u(t)) - \\ &-f_u(t, x_0(t), u(t))\Big]\psi_0(t; u+\Delta u) - \\ &-\Big[f_u(t, x_T(t)+\Delta x_T(t), u(t)+\Delta u(t)) - \\ &-f_u(t, x_T(t), u(t))\Big]\psi_T(t; u+\Delta u) - \\ &-f_u(t, x_0(t), u(t))\Delta\psi_0(t) - \\ &-f_u(t, x_T(t), u(t))\Delta\psi_T(t) + 2\alpha\Delta u, \\ &\overset{\circ}{\forall} t \in (0,T) \end{aligned}$$

Bu eşitlikten (75) Lipschitz şartının yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \left|J'_\alpha(u+\Delta u) - J'_\alpha(u)\right| \leq\ & L_0\ \left|\Delta x_0(t)\right| + \left|\Delta u(t)\right|\ \left|\psi_0(t; u+\Delta u)\right| + \\ &+L_0\ \left|\Delta u_T(t)\right| + \left|\Delta u(t)\right|\ \left|\psi_T(t; u+\Delta u)\right| + \\ &+\left|f_u(t, x_0(t), u(t))\right|\left|\Delta\psi_0(t)\right| + \\ &+\left|f_u(t, x_T(t), u(t))\right|\left|\Delta x_T(t)\right| + \\ &+2\alpha\left|\Delta u(t)\right|, \\ &\overset{\circ}{\forall} t \in (0,T) \end{aligned} \tag{95}$$

Kabul ettiğimiz şartlar altında $\forall x \in C[0,T], \forall u \in V$ ve $\overset{\circ}{\forall} t \in (0,T)$ için

$$\left|f_u(t, x(t), u(t))\right| \leq \widetilde{f}_1(t) \tag{96}$$

eşitsizliğini elde ederiz, burada $\tilde{f}_1(t) > 0$ ve $\tilde{f}_1 \in L_\infty(0,T)$ olacak şekilde bilinen bir fonksiyondur.

(96) şartını kullanarak (95) eşitsizliği ve (27), (32), (50), (93) ve (94) kestirimleri yardımıyla aşağıdaki bağıntının geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\| J'_\alpha(u + \triangle u) - J'_\alpha(u) \right\|_{L_1(0,T)} \leq c_{15} \left\| \triangle u \right\|_{L_1(0,T)} \tag{97}$$

Burada $c_{15} > 0$ sayısı $\triangle u$ 'dan bağımsızdır.

Bu ifadeden de (89) kestiriminin geçerli olduğu sonucu elde edilir. Böylece $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin V kümesinin herhangi $u \in V$ elemanı üzerinde Frechet anlamında sürekli diferensiyellenebilir olduğu ispatlandı; yani $J_\alpha(u) \in C^1(V)$ 'dir. Bunun yanı sıra V kümesi konveks kümedir. Bu taktirde (Vasilyev, 1981, sayfa 28) çalışmasındaki ilgili teoreme göre, eğer $u^* = u^*(t)$ optimal kontrol ise

$$< J'_\alpha(u^*), u - u^* >_{L_\infty(0,1)} \geq 0, \quad \forall u \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu sonucuna varabiliriz. Burada $J'_\alpha(u)$ için olan (87) formülünü kullanıp $u = u^*$ olarak kabul edersek (88) şartının sağlandığını görebiliriz. Teorem 3.2.1.5.2 ispatlandı.

3.2.1.6. Optimal Kontrol Probleminin Gradientin İzdüşümü Yöntemi İle Nümerik Çözüm Algoritması

Bu alt bölümde (1)-(3) optimal kontrol probleminin gradientinin izdüşümü yöntemiyle nümerik çözüm algoritmasını açıklayacağız.

$u^\circ = u^\circ(t) \in V$ herhangi başlangıç yaklaşımı olduğunu farz edelim. Bu taktirde (1)-(3) optimal kontrol problemi için gradientin izdüşümü yöntemiyle ardışık yaklaşımlar (Vasilyev, 1981) çalışmasından bildiğimiz üzere

$$u^{(s+1)}(t) = P_V(u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s(t)), \quad s = 0,1,2,... \\ \overset{\circ}{\forall}\, t \in (0,T) \tag{98}$$

formülü ile inşa edilir. Burada $P_V(z)$, $z = z(t)$ noktasının V kümesine izdüşümüdür ve

$$P_V(u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s(t)) = \begin{cases} b_0 & , u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s(t)) > b_0 \\ -b_0 & , u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s(t) < -b_0 \\ u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s(t) & , -b_0 \le u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s(t) \le b_0 \end{cases} \tag{99}$$

$$\mathring{\forall}\, t \in (0,T)$$

formülü ile tanımlanır.

$J'_\alpha(u^s)$ fonksiyonelinin gradientinin $u^{(s)}$ noktasındaki değeri olup

$$\begin{aligned} J'_\alpha(u^{(s)}) = & -f_u(t, x_0^{(s)}(t), u^{(s)}(t))\psi_0^{(s)}(t) - \\ & -f_u(t, x_T^{(s)}(t), u^{(s)}(t))\psi_T^{(s)}(t) + \\ & +2\alpha(u^{(s)}(t) - u_0(t)) \\ & t \in (0,T) \end{aligned} \tag{100}$$

formülü ile tanımlanır. Burada $x_0^{(s)}(t) \equiv x_0(t; u_0^{(s)}(t))$, $x_T^{(s)}(t) \equiv x_T(t; u_0^{(s)}(t))$ fonksiyonları Cauchy probleminin $u^{(s)} \in V$ yaklaşımına karşılık gelen çözümü, $\psi_0^{(s)}(t) \equiv \psi_0(t; u_0^{(s)}(t))$, $\psi_T^{(s)}(t) \equiv \psi_T(t; u_0^{(s)}(t))$ fonksiyonları ise $u^{(s)} \in V$ için eşlenik probleminin çözümüdür.

$\beta_s > 0$ parametresi bilinmeyen parametre olup, örneğin

$$J_\alpha(u^{(s+1)}) < J_\alpha(u^{(s)}) \tag{101}$$

şartlarından bulunan parametredir.

Ardışık yaklaşıkların bulunması sürecini sona erdirmek için

$$\left\| u^{s+1} - u^s \right\|_{L_\infty(0,T)} \le \varepsilon \tag{102}$$

şartı kullanılmaktadır.(1)-(3) optimal kontrol problemi genelde kararsız problem olduğundan $\alpha > 0$ parametresinin regülarizasyon parametresi rolünü oynadığını burada belirtmek gerekir.

Bu parametreyi seçmek için (Tikhonov, 1979; Vasilyev, 1979) çalışmasından bildiğimiz algoritma kullanılmaktadır.

(1)-(3) optimal kontrol problemini nümerik yöntemle çözmek için ona sonlu farklar yöntemini uygulayıp, elde edilen ayrık optimal kontrol problemine gradientin izdüşümü yöntemini uygulayabiliriz.

İlk önce (1)-(3) probleminin sonlu farklı aynısını yazmaya çalışalım. Bu amaçla önce $[0,T]$ aralığını $t_k = k\tau,\ \ k=\overline{1,N}$ noktaları ile ağa dönüştürelim. (1) fonksiyonelinde yer alan integralleri dikdörtgenler formülünün yardımıyla toplamlarla değiştirelim. (2) denklemlerini ise Euler şemasının yardımıyla cebirsel denklemlere dönüştürelim. Sonuçta aşağıdaki ayrık optimal kontrol problemini elde ederiz:

$$\mathrm{I}_{N\alpha}\ \left[u\right]_n\ = \tau\sum_{k=0}^{N-1}\left|x_{0k}-x_{Tk}\right|^2+\alpha\tau\sum_{k=0}^{N-1}\left|u_k-u_{0k}\right|^2 \tag{103}$$

Bu fonksiyonun $U_N \equiv\ [u]_n = (u_0, u_1, ..., u_{N-1}),\ \ \left|u_k\right| \le b_0,\ \ k=\overline{0,N-1}$ kümesi üzerinde

$$x_{0k+1} = x_{0k} + \tau f_k(x_{0k}, u_k),\quad k=\overline{0,N-1} \tag{104}$$

$$x_{Tk+1} = x_{Tk} + \tau f_k(x_{Tk}, u_k),\quad k=\overline{N-1,0} \tag{105}$$

$$x_{0N} = x_0,\quad x_{TN} = x_T \tag{106}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada;

$f_k(x_{ok}, u_k) = f(t_k, x_{ok}, u_k),\ \ f_k(x_{Tk}, u_k) = f(t_k, x_{Tk}, u_k),\ \ k=\overline{0,N-1}$'dir.

$x_{pk} = x_{pk}\ [u]_n\ ,\ \ p=0,T,\ \ k=\overline{0,N}$ ağ fonksiyonları olup (104)-(106) fark şemasının çözümüdür.

Görüldüğü gibi (103)-(106) ayrık optimal kontrol problemi sonlu boyutlu bir extramal problemdir. Bu problemi çözerek (1)-(3) optimal kontrol problemini nümerik olarak çözmüş oluruz. Şimdi (103)-(106) ayrık optimal kontrol probleminin çözüm yöntemini açıklayalım. Bu amaçla gradientin izdüşümü yönteminin sonlu boyutlu aynısını kullanalım. Bu yönteme göre $[u]_n^0 \in V_n$ başlangıç yaklaşımı verildiğinde ardışık yaklaşımlar (Vasilyev, 1980; İskenderov, 2002) çalışmalarından da bildiğimiz üzere aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$[u_N]^{s+1} = P_{U_N}\ \ [u]_N^S - \beta_s \mathrm{I}'_N([u_N]^s)\ ,\quad s=0,1,2... \tag{107}$$

Burada $P_{U_N}([Z]_n)$ ifadesi $[Z]_n$ elemanının U_N kümesine izdüşümü olup, onun bileşenleri aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$U_k^{(s+1)} = \begin{cases} b_0 & , u^{(s)}(t) - \beta_s \ \mathrm{I}'_N([u]_n^s)_k > b_0 \\ -b_0 & , u^{(s)}(t) - \beta_s \ \mathrm{I}'_N([u]_N^s)_k < -b_0 \\ -u^s(t) - \beta_s \ \mathrm{I}'_N([u_n]^s)_k & , -b_0 \le u_k^s - \beta_s \ \mathrm{I}'_N([u]_N^s)_k \le b_0 \end{cases} \quad k = 0,1,2,...,N-1 \tag{108}$$

$\mathrm{I}'_N([u]_N^s)$ değeri $\mathrm{I}'_N([u]_N$ gradientinin $[u]_N^s$ 'deki değeri olup,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}'_N([U]_N^s)_k &= -f_{uk}(x_{0k}^{(s)}, u_k^{(s)})\psi_{0k}^{(s)} - f_{uk}(x_{Tk}^{(s)}, u_k^{(s)})\psi_{Tk}^{(s)} + \\ &+2\alpha \ u_k^{(s)} - u_{0k} \ , \quad k = \overline{0, N-1} \end{aligned} \tag{109}$$

bileşenlerine sahip bir vektördür. Burada $x_{pk}^{(s)} \equiv x_{pk} \ [u_k]^s$, $\mathrm{p} = 0, T$ ağ fonksiyonları (104)-(106) sisteminin $[u]_N^s \in U_N$ 'e karşılık gelen çözümüdür.

$\psi_{pk}^{(s)} \equiv \psi_{pk} \ [u_k]^s$, $P = 0, T$ ağ fonksiyonları ise aşağıdaki eşlenik sistemin $[u]_N^s \in U_N$ için çözümüdür:

$$\psi_{0k} = \psi_{0k+1} + \tau \ \psi_{0k+1} f_{x_0 k+1}(x_{0k+1}, u_k) - 2(x_{0k+1} - x_{Tk+1}) \ , \quad k = \overline{N-1, 0} \tag{110}$$

$$\psi_{Tk+1} = \psi_{Tk} - \tau \ f_{x_T k}(x_{Tk}, u_k)\psi_{Tk} + 2(x_{0k} - x_{Tk}) \ , \quad k = \overline{0, N-1} \tag{111}$$

$$\psi_{0N} = 0, \quad \psi_{T0} = 0 \tag{112}$$

Burada;

$$f_{x_0 k+1}(x_{0k+1}, u_k) = f_{x_0}(t_{k+1}, x_{0k+1}, u_k), \quad f_{x_T k}(x_{Tk}, u_k) = f_{x_T}(t_k, x_{Tk}, u_k), \quad k = \overline{0, N-1}$$

$\beta_s > 0$ parametresini seçmek için;

$$\mathrm{I}_N([u]_N^{(s+1)}) < \mathrm{I}_N([u]_N^s) \tag{113}$$

şartı kullanılabilir. Ardışık yaklaşımların bulunması sürecini sona erdirmek için

$$\max_k \left| u_k^{(s+1)} - u_k^{(s)} \right| \le \varepsilon \tag{114}$$

şartı kullanılır.

$\alpha > 0$ parametresi daha önce belirttiğimiz gibi regülarizasyon parametresi gibi bulunur(Tikhonov, 1979; Vasilyev, 1980).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Tezin 3.1 bölümünde lineer olmayan adi diferensiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı ve çözüm için Pontryagin maksimum prensini ve integral biçimde maksimum prensibi şeklinde gerek şartlar elde edildi. Bunların yanı sıra fonksiyonelin gradienti için formül ispatlandı ve verilen problemin nümerik çözümü için gradientin izdüşümü yöntemi açıklandı.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tezde alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardan önemli bir biçimde ayrılmaktadır. Adi diferensiyel denklemler için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi çok az ele alınıp incelendiğinden dolayı bu tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşımaktadır.

Bu tezde Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri için elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar diğer çalışmalardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

KAYNAKLAR

Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., Fomin, S. V., 1975. **Optimal Control**. Moskova, Nauka.

Beyhan, Serkan., 2007. **Hiperbolik Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözüm Algoritması**, Yüksek Lisans Tezi. Kafkas Üniversitesi, Kars.

Blagodatskikh, V. I., 1978. **Optimal Kontrolün Lineer Teorisi**. MDÜ yayınevi, Moskova.

Gabbasov, R., and Kirillova, F. M., 1971. **Optimal Süreçlerin Nitelik Teorisi**. Moskova, Nauka.

Goebel, M., 1979. **On existence of optimal control**. Math. Nachr, **Vol 93**. 67-73.

İskenderov, A. D., ve Tagiev, R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayılarında olan kontrolörle optimizasyon problemi. **Diferensiyel Denklemler**, 19(8): 1324-1334.

İskenderov, A. D., 1984. **Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Probleminin Varyasyon Konulmaları Hakkında, Cilt 274**. (3): 531-533

İskenderov, A. D., Mahmudov N. M., 1995. Kuantum Mekanik Sistemler için Lions Kriterli Optimal Kontrol. AMEA'nın Haberleri. **Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi, Cilt 16**. (5), (6), (30), (35)

Kolmogorov, A. N., ve Fomin, S. V., 1989. **Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları**, 624 s, Moskova, Nauka

Lions, J. L., 1971. **Optimal Control of Systems Governed By Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 400 p, New York.

Li, E. B., Markus, L., 1972. **Optimal Kontrol Teorisinin Temelleri**. Moskova, Mir.

Pontryagin, L. S., Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V., ve Mişenko, E. F., 1969. **Optimal süreçlerin matematik teorisi**. 384 s, Mosakova, Nauka

Tikhonov, A. N., ve Arsenin, V. Ya., 1979. **İll-posed problemlerin çözüm metotları**. 288 s., Moskova, Nauka

Vasilyev, F. P., 1980. **Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metotları**. 388 s., Moskova.

Vasilyev, F. P., 1981. **Ekstremal problemlerin çözüm metotları**. 400 s., Moskova, Nauka.

Yosida, K., 1980. **Functional Analysis**. Springer-Verlag, 624 p, New York.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar çalışmaya yön ve hız kazandıran danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN’ e süreç boyunca göstermiş olduğu sabır ve destekleri için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım süresince maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme sonsuz ve derinden teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Hatay'ın merkez ilçesi Antakya'da doğdum. İlk, orta ve lise eğitimimi aynı ilçede tamamladım. 2003 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde eğitim-öğretim almaya hak kazandım. 2008 yılında fakültemden matematikçi vasfı ile mezun oldum. Mezuniyetimin ardından aynı yıl içerisinde Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-edebiyat fakültesinde matematik ana bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladım. Ve halen yüksek lisans öğrencisiyim.