



MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖZEL TANIMLI MATRİSLERİN DEĞERLER CİSMİ

F. FEYZA GÜNDÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY

Temmuz-2011

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL TANIMLI MATRİSLERİN DEĞERLER CİSMİ

F. FEYZA GÜNDÜZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK danışmanlığında hazırlanan bu tez 01/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN Yrd. Doç. Dr. Osman ŞAHİN
Başkan Üye Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Hüseyin GÖZÜBENLİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam.....	4
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	8
3.1. MATERYAL	8
3.1.1. Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri	8
3.1.1.1. Özdeğer ve Özvektörün Hesaplanması	10
3.1.2. Kuadratik Formlar	13
3.1.2.1. İki değişkenli Kuadratik Formlar	14
3.1.2.2. Kuadratik Formların Geometrisi.....	16
3.1.2.3. Matrisler ile Kuadratik Formların İncelenmesi	26
3.1.2.3.1. Kuadratik Fonksiyonların Kritik Değerlerinin Hesaplanması	26
3.1.2.3.2. Pozitif Tanımlı Kuadratik Formlar.....	28
3.1.2.3.3. Kuadratik Formların Köşegenleştirilmesi	32
3.1.3. Matrislerin Değerler Cismi ve Sayısal Görüntüsü.....	40
3.1.3.1. Bazı Kompleks Matrislerin MAPLE Programı ile Sayısal Görüntüleri..	45
3.1.3.2. Değerler Cisminin Temel Özellikleri.....	49
3.1.3.3. Değerler Cisminin Konveksliği	59
3.2. YÖNTEM	70
3.2.1. Bazı Özel Tanımlı Üç Bant ve Beş Bant Matrislerin Değerler Cismi	70
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	84
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	85
KAYNAKLAR.....	86

TEŞEKKÜR.....	88
ÖZGEÇMİŞ	89
EKLER.....	90

ÖZET

BAZI ÖZEL TANIMLI MATRİSLERİN DEĞERLER CİSMİ

Tez, materyal ve yöntem olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Tezin materyal kısmında, matrisler için “özdeğer” ve “özvektör” kavramları, bu kavramlar üzerine hesaplamalar, bazı kuadratik form kavramları, kuadratik formların matrisel gösterimleri, geometrileri, pozitifliği, köşegenleştirilmeleri, karesel matrisler için “değerler cismi” ve “sayısal görüntü (sayısal bölge)” kavramları incelenmiştir. Tezin yöntem kısmında, $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ ve ayrıca $a, b, c \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{c} & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{c} & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{c} & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindeki üç bant matrislerin ve $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{C}$ ve ayrıca $a, b, k \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindeki beş bant matrislerin değerler cisimleri ve sayısal görüntüleri (veya sayısal bölgeleri) elde edilmiştir.

2011, 92 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Üç Bant Matrisler; Beş Bant Matrisler; Matrislerin Değerler Cismi; Matrislerin Sayısal Görüntüsü.

ABSTRACT

FIELD OF VALUES OF SOME SPECIAL DEFINED MATRICES

This thesis has consisted of two parts which are named as material and method. In the part of material, it has been examined the "eigenvalue" and "eigenvectors" concepts for matrices, the calculations on these concepts, some quadratic form concepts, the general matrix forms, the geometry, the positivity, the diagonalization of quadratic forms, the "field of values" and "numerical range (numerical domain)" concepts for matrices. In the part of method, for $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ and also $a, b, c \in \mathbb{C}$ the "field of values" and "numerical range (numerical domain)" of the tridiagonal matrices such that

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{c} & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{c} & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{c} & \ddots \end{bmatrix}$$

and for $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{C}$ and also $a, b, k \in \mathbb{C}$, the "field of values" and "numerical range (numerical domain)" of the pentadiagonal matrices such that

$$\begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix}$$

have been obtained.

2011, 92 pages

Key Words: Tridiagonal Matrices; Pentadiagonal Matrices; Field of Values of Matrices; Numerical Range of Matrices.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$M_{m,n}(\mathbb{R})$	$m \times n$ Tipinde Reel Matrisler Kümesi
$M_{m,n}(\mathbb{C})$	$m \times n$ Tipinde Kompleks Matrisler Kümesi
$M_n(\mathbb{R})$	$n \times n$ Tipinde Reel Matrisler Kümesi
$M_n(\mathbb{C})$	$n \times n$ Tipinde Kompleks Matrisler Kümesi
$S + T$	S ve T Kümelerinin Toplamı
$A \oplus B$	A ve B Matrislerinin Direkt Toplamı
$\ A\ $	A Matrisinin Normu
$iz(A)$	A Matrisinin Köşegen Elemanları Toplamı
$\det(A)$	A Matrisinin Determinantı
$W(A)$	A Matrisinin Değerler Cismi
$H(A)$	A Matrisinin Hermityen Kısmı
$S(A)$	A Matrisinin Ters Hermityen Kısmı
$\sigma(A)$	A Matrisinin Özdeğerlerinin Kümesi
x^*	x Vektörünün Eşlenik Transpozu
\bar{x}	x Vektörünün Eşleniği
x^T	x Vektörünün Transpozu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1. AX ile X vektörlerinin doğrusal olmaması.....	9
Şekil 2. AX ile X vektörlerinin doğrusal olması.....	9
Şekil 3. $\lambda > 1$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi.....	10
Şekil 4. $0 < \lambda < 1$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi.....	10
Şekil 5. $\lambda < 0$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi.....	10
Şekil 6. Çemberin koni kesiti olarak elde edilmesi.....	17
Şekil 7. Elipsin koni kesiti olarak elde edilmesi.....	17
Şekil 8. Hiperbolün koni kesiti olarak elde edilmesi.....	17
Şekil 9. Parabolün koni kesiti olarak elde edilmesi.....	17
Şekil 10. Noktanın koni kesiti olarak elde edilmesi.....	18
Şekil 11. Kesişen iki doğrunun koni kesiti olarak elde edilmesi.....	18
Şekil 12. Çakışık iki doğrunun koni kesiti olarak elde edilmesi.....	18
Şekil 13. Elipsin içi ve dışının gösterimi.....	21
Şekil 14. Elipsin dışbükey olduğunun gösterimi.....	22
Şekil 15. Elipsin dışbükey olmadığıının gösterimi.....	22
Şekil 16. Elipsin dışbükey olmadığıının gösterimi.....	22
Şekil 17. Elipsin dışbükeyliğinin gösterimi.....	23
Şekil 18. Elipsin sivri noktalarla gösterimi.....	23
Şekil 19. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsiyle dikey doğruların kesişimi.....	24
Şekil 20. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsiyle dikey olmayan doğruların kesişimi.....	24
Şekil 21. Elipsin genel gösterimi.....	25
Şekil 22. $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ denkleminin belirttiği elips.....	38
Şekil 23. $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$ denkleminin belirttiği elips.....	39
Şekil 24. A_1 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	45
Şekil 25. A_2 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	46
Şekil 26. A_3 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	46
Şekil 27. A_4 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	47
Şekil 28. A_5 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	47
Şekil 29. A_6 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	48
Şekil 30. A_7 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	48
Şekil 31. A_8 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	49
Şekil 32. A_{11} matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	74

Şekil 33. A_{12} matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	75
Şekil 34. A_{13} matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	81

1. GİRİŞ

Özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$$

ile tanımlanan spektral yarıçapı,

$$r(A) = \max_{|x|=1} |(Ax, x)|$$

ile tanımlanan sayısal yarıçapı ve

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

ile tanımlanan spektral normu çoğu durumda, matrisin temsil ettiği problemleri yorumlamalarda temel argümanlardır. Bu üç argüman arasındaki

$$\rho(A) \leq r(A) \leq \|A\| \leq 2r(A)$$

bağıntıdan hareketle, matrisin spektral yarıçapı, sayısal yarıçapı ve normunu kapsayan karmaşık sayılar kümesinin kapalı sınırlı bir alt kümesi olan $W(A) = \{z^* Az : \|z\| = 1, z \in \mathbb{C}^n\}$ kümesinin belirlenmesi çoğu problemin yorumlanmasında yeterli olabilmektedir. $W(A)$ kümesi, cebirsel olarak “*A matrisinin değerler cismi*” ve geometrik olarak ise “*A matrisinin sayısal görüntüsü veya sayısal bölgesi*” olarak bilinmektedir.

Çalışmanın oluşumu sırasındaki kaynak araştırmalarımız sonucu ulaştığımız bilgilere dayanarak, matrisin değerler cisminin (veya sayısal görüntüsünün) uygulama alanlarına değinelim.

Sayısal bölgenin tayini; operatör teori, fonksiyonel analiz, C^* -cebiri, Banach cebiri, matris normları, eşitsizlikler, sayısal analiz, pertürbe teori, operatörün yakınsaklık özelliklerinin belirlenmesi, fonksiyonel denklemlerin çözümlenmesi, operatör trigonometri, model teori, indirgeme teorisi, matris polinomlarının ayrışımı, matris polinomları, sistem teori, kuantum fiziği gibi uygulamalı bilimin bir çok branşıyla ilgili uygulamalara sahiptir.

Sayısal bölge ve sayısal yarıçap kavramları ve bu kavramların genelleştirilmeleri üzerine oldukça fazla çalışma vardır (Horn, 1991; Gustafson, 1997).

Halen de çeşitli araştırma grupları tarafından yürütülen bir çok araştırma projeleri mevcuttur. “<http://www.ams.org/mathscinet/search.html>” matematik bilim sitesi üzerinde sayısal bölge (veya değerler cismi) ve sayısal yarıçap konuları etrafında 500’ü aşkın bilimsel çalışma ve proje yer almaktadır. Ayrıca bir çok doktora tezinin tamamı veya bir kısmı bu konulara adanmıştır. Bazı monografiler, dergilerin bazı özel sayıları, çoğu matematik ders kitaplarının bazı bölümleri bu konulara ayrılmıştır (Bonsall and Duncan, 1971; Bonsall and Duncan, 1973; Bonsall and Duncan, 1980; Gustafson and Rao, 1997; Halmos, 1982; Horn and Johnson, 1991; Istratescu, 1982; Sun and Stewart, 1990). Konu üzerine araştırma çalışmaları sürekli olarak saygın matematik dergilerinde görülmekte ve konu üzerine konferanslar düzenlenmekte ve konuşmalar yapılmaktadır.

Bazı bilim alanlarının hangi kısımlarında bu konuya gereksinim duyulduğuna değinelim:

- **Kuantum hesaplama ve kuantum kontrol**

Kuantum hesaplama ve kuantum kontrol bilim alanı ile ilgili olarak en heyecan verici gelişmelerden biri; $X^*X = I_k$ ve $X^*AX = zI_k$ olacak şekilde $n \times k$ tipinde X matrisinin varlığını sağlayan z kompleks sayılarından oluşan küme olarak tanımlanan rank- k sayısal bölge çalışmasıdır. Bu çalışmaya, kuantum hata doğrulama kodları üzerine yapılan çalışmalar destek vermektedir. Ayrıca bir matrisin C -sayısal bölgesi; NMR ile ilgili olan kuantum kontrol problemleri üzerine çalışmak için faydalı bir araçtır.

- **Operatör teori ve fonksiyonel analiz**

Hilbert ve Banach uzaylarında tanımlanan lineer operatörler üzerine çalışırken, sayısal bölge ve sayısal yarıçap tayinleri çok önem arz etmektedir. Sayısal bölge ve sayısal yarıçap kavramları; m -konveks cebirleri, topolojik- $*$ -cebirleri, H -lokal konveks uzayları, Krein uzayları, Wachs uzayları, gerçel kuaterniyonlar üzerindeki iç çarpım uzayları gibi daha genel uzaylarda tanımlanan doğrusal ve doğrusal olmayan operatörler üzerine çalışma yapmak için vazgeçilmez kavramlardır. Ayrıca, yarı hiponormal operatör, harmonik sembolü Toeplitz operatörü, üç bant operatörü, blok kaydırma operatörü, kuaterniyon operatörü gibi özel operatörlerin sayısal bölgelerinin tayini üzerine çalışmalarda oldukça fazla ve halen devam etmektedir. Birçok durumda özel operatörleri, yarı adjoint, normal ve üniter olarak sınıflandırmak için ve ayrıca

Banach- $*$ -cebirlerini karakterize etmek için kullanılan bir araçtır sayısal bölge tayini konusu.

- **Doğrusal cebir**

A herhangi n -kare kompleks matris ve $K(A)$ da belirli bir matris fonksiyonu ile ilgili olan A 'nın indirgenmiş operatörü olmak üzere; A 'nın ayrılabilir sayısal bölgesi, ayrılabilir birim vektörler üzerinde hareket eden x^* vektörü için $(K(A)x^*, x^*)$ formundaki kompleks sayıların kümesidir. Klasik sayısal bölgeye benzer olarak ayrılabilir sayısal bölge, indirgenmiş $K(A)$ operatörü üzerine çalışma yapmada faydalı bir araçtır. Ayrıca ayrılabilir sayısal yarıçapla ilgili olan sonuçlar bize her zaman ilginç ve değerli matris eşitsizlikleri sunmaktadır.

- **Spektrum bölgesi ve uygulamaları**

Matrisin klasik sayısal bölgesi, her zaman kendisinin spektrumunu içermektedir. Bunun bir sonucu olarak, matrisin özdeğerlerinin bulunduğu bölgeyi tayin etme ile yakından ilgili olan “matrislerin kararlılığı” ve “matrislerin tekil olmaması” gibi konular için büyük önem taşımaktadır. Daha genel uzaylarda klasik sayısal bölge kavramı genelleştirilerek doğrusal ve doğrusal olmayan operatörler üzerine spektra çalışmaları literatürde mevcuttur ve halen de devam etmektedir. Matrisin spektrumuna ek olarak sayısal bölge, pozitif tanımlı matrislerin genelleştirilmiş özdeğerlerinin pertürbe edilmesi alanında da önemli bir araçtır.

- **Kuantum fiziği**

A ve C sabit matrisler ve U , üniter matris olmak üzere kuantum fiziğindeki birçok problem CU^*AU formunda ifade edilmektedir. $tr(CU^*AU)$ şeklindeki kompleks sayıların kümesi, A 'nın C -sayısal bölgesi olarak bilinmektedir ve son yıllarda bir çok fizikçi bu bölgenin tayini ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Kuantum dinamiği alanında konu ile ilgili çalışma, hermityen olmayan durumlar arasındaki üniter dönüşümlerin etkililiği üzerinedir ve bu etkililiğin belirlenmesi, belirli A ve C nilpotent matrisleri için A 'nın C -sayısal bölgesinin tayin edilmesi ile mümkündür. Ayrıca bir matrisin sayısal bölgesinin tayini, kuantum fiziğindeki p -etkileşimli q -parça sistemlerinin çalışma alanı ile yakından ilgilidir.

- **Sayısal analiz**

Sayısal bölge tayini, çeşitli algoritmaların yakınsaklık oranını belirlemede önemli bir rol oynamaktadır. Bu konu hakkında mükemmel bir kaynak olarak (Gustafson and Rao, 1997) gösterilebilir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Literatürde (Chien and Huang, 2001) $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindeki üç bant matrisin değerler cismi (sayısal bölgesi) için ulaşılan sonuçların genişletilmesi düşüncesi ile, $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ ve ayrıca $a, b, c \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{c} & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{c} & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{c} & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

şeklindeki üç bant matrislerin ve $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{C}$ ve ayrıca $a, b, k \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

şeklindeki beş bant matrislerin değerler cisimlerini ve değerler cisimlerinin kompleks düzleme yansımaları olan sayısal görüntülerini (veya sayısal bölgelerini) elde etme çalışmanın amacıdır.

Matrisler için “özdeğer” ve “özvektör” kavramlarının tanımlanmaları ve hesaplanmaları, genel olarak “kuadratik form” kavramının tanımlanması, kuadratik formların matrissel olarak ifade edilmeleri, kuadratik formların geometrik olarak incelenmeleri, bir kuadratik formun pozitifliğinin tanımlanması, kuadratik formun pozitifliğinin belirlenmesi ve köşegenleştirilmesi için yöntemlerin verilmesi, karesel matrislerin “değerler cismi” ve “sayısal görüntü (sayısal bölge)” kavramlarının tanımlanıp genel olarak bu kavramların temel özelliklerinin incelenmesi, (1.1) ve (1.2) ile verilen özel tanımlı matrislerin değerler cisimleri (veya sayısal bölgeleri) için elde edilen bulguların sunulması çalışmanın kapsamını oluşturmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

A , $n \times n$ tipinde kompleks bir matris olmak üzere A nın sayısal bölgesi $W(A) = \{z^*Az : \|z\|=1, z \in \mathbb{C}^n\}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Klasik sayısal bölge üzerinde bilinen sonuçları genelleştirilen tridiagonal matrisin C -sayısal bölgesinin eliptik bir disk olabilmesi için gerekli koşullar verilmektedir (Chien and Nakazato, 2001). Li ve ark. (2002), negatif olmayan bir matrisin sayısal bölgesi için Perron-Frobenius sonuçlarının hemen hemen bütün gelişimini sunmuşlardır.

Negatif olmayan matrislerin sayısal bölgeleri düzenli aşağı bükey poligon olarak elde edilmekte ve bazı problemler ortaya atılmaktadır.

Sürekli kesir matrisin sayısal bölgesi eliptik bir disk olarak elde edilmiştir (Chien and Huang, 2001). Matrisin klasik sayısal bölgesinin birer genelleştirilmesi olarak değerlendirilen cebirsel sayısal bölge ve M -sayısal bölge gibi kavramlar türetilmiştir. Bu genelleştirilmiş sayısal bölge kavramlarıyla birlikte yeni tanımlar üretilmiştir.

Kısmi diferansiyel denklemler ve sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri için kararlı metotlar üretmede, sayısal analizdeki kararlılık incelemesi ile sayısal bölgelerin ilişkisi dikkate alınmaktadır. Ayrıca kararlı tahmin ediciler hakkında varsayımlar sunulmaktadır (Spijker, 1993).

Matris polinomlarının spektrumlarının sınırlanması ile, kuadratik sayısal bölgeler arasındaki ilişkilere değinilmektedir (Guo ve ark., 2009).

Eiermann, elemanları kapalı formda

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{i,i+1} = a, & i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ a_{i+1,i} = b, & i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ a_{ij} = 0, & |i-j| > 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan ve açık bir şekilde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & \ddots \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$$

ile verilen $A_1 = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks üç bant matrisin değerler cisminin

$$W(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : z = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)(ae^{-i\theta} + be^{i\theta}), 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

ile tanımlanan bir eliptik disk olduğunu gösterdi (Eiermann, 1993).

Eiermann'ın bulduğu sonuçların bir neticesi olarak Chien ve Huang (Chien and Huang, 2001).

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisinin sayısal bölgesini elde etmiştir. A_2 matrisinin belirttiği küme

$$W(A_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2i \sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), 0 \leq \theta < \pi \right\}$$

şeklinindedir.

Chien ve Huang'ın aynı çalışmasında A_3 matrisinin sayısal bölgesi kanıtlanmıştır.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Merkezi $(a+b)/2$ olan bir eliptik disk. Yatay eksen uzunluğu $|a-b|$, dikey eksen uzunluğu $4 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ dir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin özgün sonuçlarını içeren yöntem bölümü için gerekli ön bilgiler verilecektir.

3.1. MATERYAL

Bu bölümde, matrisler için “özdeğer” ve “özvektör” kavramları tanımlanacak ve hesaplanmalarına değinilecek, kuadratik form tanımı verilip kuadratik formların matrissel olarak ifade edilmeleri üzerinde durulacak, kuadratik formlar geometrik olarak incelenecek, bir kuadratik formun pozitifliği tanımlanıp kuadratik formun pozitifliğinin belirlenmesi ve köşegenleştirilmesi için yöntemler verilecek ve son olarak matrisler için “değerler cismi” ve “sayısal görüntü (sayısal bölge)” kavramları tanımlanıp genel olarak değerler cisminin temel özellikleri verilecektir.

3.1.1. Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri

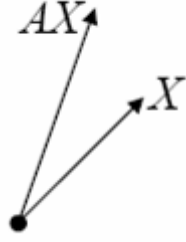
Son yıllarda matris yöntemleri üzerinde yapılan çalışmaların fizik, mekanik, yöneylem ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerde verimli bir ortam sağlaması, matrislerin özdeğer ve özvektörleri konusunun önemini artırmıştır. Uygulamada kullanılan matrislerin simetrik matris olarak seçilmesi ile simetrik matrislerin özelliklerinden dolayı uygulamalar daha da kullanışlı hale gelmiştir.

Özdeğer ve özvektör ifadelerinin İngilizce karşılıkları eigenvalue ve eigenvector dür. Eigen terimini ilk olarak David Hilbert (1862-1943) kullanmıştır. Hilbert eigenfunction ve eigenwert ifadelerini ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirimlerinde kullanmıştır. Hilbert’in çıkış noktası homojen olmayan integral denklemlerin, bir λ parametresiyle matrissel karşılığının $(I - \lambda A)x = y$ olması idi. Hilbert bu eşitliğin sıfırdan farklı homojen çözümü için λ değerlerine eigenwerte adını vermiştir ve λ değerleri A matrisinin karakteristik köklerine karşılık gelmektedir. Eigenvector kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır.

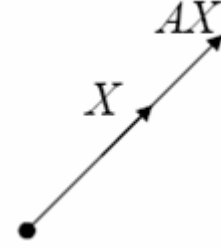
John Von Neuman (1903-1957) bir eserinde $f \neq 0$ şartı altında $Rf = \lambda f$ ifadesindeki λ yı eigenwerte, f yi ise eigenfunction olarak adlandırmıştır. Bu yaygın bir kullanım haline gelmiştir. 1946 da H.&B. Jeffreys in “ Methods of

Mathematical Physics ” adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik değer ve gizli kök kavramlarıyla eş anlamlı olarak ifade edilmiştir.

AX ile X vektörü arasında genellikle geometrik bir ilişki yoktur (Şekil 1). Bazı durumlarda, sıfır olmayan öyle X vektörleri bulunabilir ki, X ile AX çarpımı birbirlerinin bir katı olurlar (Şekil 2). Bu durumda X vektörüne A matrisinin özvektörü denir.



Şekil 1. AX ile X vektörlerinin doğrusal olmaması



Şekil 2. AX ile X vektörlerinin doğrusal olması

Aşağıda geometrik olarak tanımlanan matrisin özvektörü kavramı, cebirsel olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1 A , $n \times n$ tipinde bir matris ve X sıfır olmayan vektör olmak üzere; AX çarpımı X vektörünün bir katı, yani,

$$AX = \lambda X \quad (3.1)$$

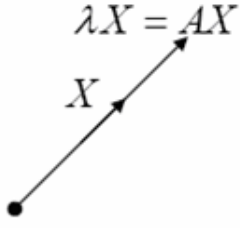
ise, λ ya A 'nın özdeğeri ve x e A 'nın λ ya karşılık gelen özvektörü denir.

Örnek 3.1 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özvektörüdür. Burada X vektörüne karşılık gelen özdeğer 3 olup,

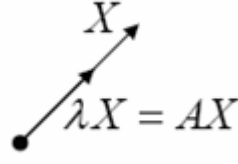
$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3X$$

yazılır.

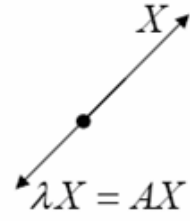
Matrisin özdeğerleri ve özvektörleri için temel geometrik yorum, Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5 de verilmektedir.



Şekil 3. $\lambda > 1$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi



Şekil 4. $0 < \lambda < 1$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi



Şekil 5. $\lambda < 0$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi

3.1.1.1. Özdeğer ve Özvektörün Hesaplanması

Bu kısımda, açık olarak

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılan $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipindeki matrisin özdeğerlerini hesaplama yöntemine değinilecektir. (3.1) denklemi I_n birim matris olmak üzere,

$$AX = \lambda X \Rightarrow \lambda X - AX = 0$$

ya da

$$\lambda XI_n - AX = 0 \quad (3.2)$$

formunda ifade edilir. (3.2) denklemi ayrıca $(A - \lambda I_n)X = 0$ şeklinde de yazılabilir.

$(\lambda I_n - A)$ ifadesi için verilecek tanımlar $(A - \lambda I_n)$ ifadesi için de doğru olacaktır.

$(\lambda I_n - A)$ ifadesi matrissel olarak açık bir şekilde,

$$(\lambda I_n - A) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanım 3.2 $(\lambda I_n - A)$ matrisinin determinantına, A matrisinin karakteristik polinomu denir.

(3.2) denkleminin $X \neq 0$ çözümü için,

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

olmalı yorumu, homojen doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri bilgisinden hemen getirilir.

Tanım 3.3 $p(\lambda) = 0$ denkleminin, A matrisinin karakteristik denklemi denir.

Tanım 3.4 $p(\lambda) = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin özdeğerleri denir. A matrisinin λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots, k$, özdeğerleri için $(\lambda_k I_n - A)x = 0$ sisteminin çözüm vektörlerine λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots, k$, özdeğerlerine karşılık gelen A' nın özvektörleri denir.

Not. $p(\lambda)$ polinomunun n -inci dereceden kompleks katsayılı polinom olacağı açıktır. Kompleks katsayılı $p(\lambda)$ polinomunun \mathbb{C} de n tane kompleks kökünün (çakışık olabilir) varlığı ise cebirin esas teoreminden bilinmektedir. A matrisinin karakteristik polinomunda λ^n ,

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

çarpımından elde edilir ve böylece λ^n ifadesinin katsayısı 1 olur. Buradan,

$$\det(\lambda I_n - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

denkleminde ulaşılır. $\lambda = 0$ alırsak,

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(-A) = a_n$$

olur. Sonuç olarak, $a_n = (-1)^n \det A$ olur.

Teorem 3.1 n . mertebeden bir kare matrisin karakteristik polinomu n . dereceden bir polinomdur ve en yüksek dereceli terimin katsayısı 1, polinomdaki sabit terim $a_n = (-1)^n |A|$ ve λ^{n-1} in katsayısı $-iz(A)$ dır. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise $iz(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ve $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ şeklindedir.

İspat. $(\lambda I_n - A)$ matrisinin determinantını ilk satır elemanlarına göre açarsak A_{1i} ($i = 1, 2, \dots, n$), $\det(\lambda I_n - A)$ determinantının $(1, i)$. elemanının işaretli minörü olmak üzere

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})A_{11} + \sum_{i=2}^n a_{1i}A_{1i} \quad (3.3)$$

olur. $i = 1, 2, \dots, n$ için A_{1i} determinantında $(\lambda - a_{ii})$ şeklindeki elemanlardan $n-2$ tane vardır. O halde bu açılmadan elde edilecek polinom $(n-2)$. dereceden bir polinom olacaktır. Dolayısıyla (3.3) denkleminde,

- i. $\Delta_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})A_{11} + \{(n-2). dereceden \text{ veya daha küçük dereceden } \lambda \text{ ya bağlı polinom}\}$

elde edilir. Yukarıdaki benzer işlemler A_{11} determinantına uygulanır ve bu işleme ardışık olarak devam edilirse,

- ii. $\Delta_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn}) + \{(n-2). dereceden \text{ veya daha küçük dereceden } \lambda \text{ ya bağlı polinom}\}$

elde ederiz. $\Delta_A(\lambda)$ polinomundaki birinci terim açılırsa,

- iii. $\Delta_A(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + \{(n-2). dereceden \text{ veya daha küçük dereceden } \lambda \text{ ya bağlı polinom}\}$

olur.

O halde karakteristik polinom n . dereceden ve en yüksek dereceli terimin katsayısı 1 ve λ^{n-1} teriminin katsayısı $-iz(A)$ olur. Diğer yandan

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

ifadesinde $\lambda = 0$ alınırsa karakteristik denklemdeki sabit terimin

$$a_n = \det(-A) = (-1)^n |A|$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca λ_i ler ($i = 1, 2, \dots, n$), karakteristik denkleminin kökü olduklarından

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

olacaktır. Burada $\lambda = 0$ yazılırsa,

$$(-1)^n \det(A) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

olur ki, istenendir.

3.1.2. Kuadratik Formlar

En temel anlamda bir kuadratik form, kuadratik iki değişkenli a, b, c katsayıları tamsayı olan $ax^2 + 2bxy + cy^2$ biçimindeki bir ifadedir. Kuadratik formlar iki (binary form), üç (ternary form) veya herhangi sayıdaki değişkene sahip olabilir.

x_1, x_2, \dots, x_n şeklinde n değişkenli kuadratik form, skalerlerden oluşan A , $n \times n$ matrisi için kapalı formda

$$x^T A x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

veya açık olarak

$$x^T A x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$ toplamı, $a_{ij}x_i x_j$ formundaki tüm terimlerin

toplamını belirtir. x_i ve x_j farklı değişkenler olmak üzere, $a_{ij}x_i x_j$ terimleri kuadratik formun çapraz çarpım terimleri olarak adlandırılır.

Örnek 3.2 x_1, x_2 ve x_3 değişkenli $x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ kuadratik form

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Örnekte de görüldüğü üzere, kuadratik formun karesel terimlerinin katsayıları, simetrik matrisin ana köşegeninin ve çapraz çarpım terimlerinin katsayıları köşegen dışındaki yerlerin elemanlarıdır.

Not. Kuadratik formun $x^T Ax$ şeklindeki matrissel gösteriminde aksi belirtilmedikçe A 'nin simetrik olduğu anlaşılacaktır.

$x^T Ax$ kuadratik formun Euclidean iç çarpımı ile ifadesi,

$$x^T Ax = x^T (Ax) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, A^T x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

şeklinde olacaktır.

3.1.2.1. İki Değişkenli Kuadratik Formlar

Bu bölümde iki değişkenin çarpımı ya da değişkenlerin karelerini ifade eden terimlerin fonksiyonlarından bahsedeceğiz. Bu türden fonksiyonlar, geometri, mekanik sistemlerin salınımı, istatistik ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli uygulama alanlarında ortaya çıkmaktadırlar.

x ve y den oluşan iki değişkenli bir kuadratik form genel olarak

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (3.5)$$

şeklinde olabilir.

x ve y den oluşan iki değişkenli bir kuadratik form için kullanılan iki ayrı notasyon vardır. Biricisi $ax^2 + bxy + cy^2$, ikincisi $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dir. İkinci durumda ortadaki katsayı çifttir. $ax^2 + 2bxy + cy^2$ notasyonundaki form $x^2 + xy + y^2$ biçimindeki formları da kapsar. Çünkü açık olarak bu formla sözcelişi

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2(x^2 + xy + y^2)$$

formunun bütün özellikleri aynıdır. Bu notasyonların birinin diğerine üstünlüğü yoktur. Bazı sonuçlar ilk notasyonu kullandığımızda, bazı sonuçlar ise diğer notasyonu kullandığımızda daha basit olarak ortaya çıkmaktadırlar. Birinci durumdaki notasyon Dedekind'in formların sınıfları arasında karşılaştırmalarda daha uygun ve $a\xi^2 + b\xi + c = 0$ in kökleri ile hesaplanan bazı cebirsel sayı kümeleri için daha avantajlıdır. $D = b^2 - 4ac$ diskriminantı birinci durum için söz konusudur. Burada (a, b, c) notasyonu ikinci durum için kullanılır. 2 çarpanın kullanıldığı notasyon Legendre, Gauss, Dirichlet tarafından; 2 çarpanın olmadığı notasyon ise Lagrange, Kronecker ve Dedekind tarafından kullanılmıştır.

Örnek 3.3 x ve y den oluşan (3.5) genel kuadratik formunun bazı özel durumlarına örnekler;

i. $a = 2, b = 3, c = -7$ için, $2x^2 + 6xy - 7y^2$

ii. $a = 4, b = 0, c = -5$ için, $4x^2 - 5y^2$

iii. $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0$ için, xy

şeklinde verilebilir.

Matrislerin çarpımı hatırlanırsa, genel $ax^2 + 2bxy + cy^2$ kuadratik formu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde matrissel formda verilebilir. (3.6) denklemindeki $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ matrisi simetriktir.

Matrisin köşegen elemanlarının kuadratik formdaki karesel terimlerin katsayıları ve ters köşegenin elemanlarının ise kuadratik formda xy teriminin katsayısının yarısı oldukları görülmektedir.

Aşağıda bazı kuadratik formların matrissel formları gösterilmektedir.

Örnek 3.4

$$\text{i. } 2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\text{ii. } 4x^2 - 5y^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\text{iii. } xy = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Not. $ax^2 + 2bxy + cy^2$ kuadratik formların (3.6) denkleminde olduğu gibi verilmesi ya da

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ matrisinin kullanılması zorunlu değildir.

Örnek 3.5

$$\text{i. } 2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\text{ii. } 2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Simetrik matrislerin bilgisayarlardaki işlemlerde kolaylık sağlaması özelliğinden, bu tür matrislerin kullanılması hesaplamalarda avantaj sağlamaktadır. Bu sebepten, simetrik matrisler yardımıyla kuadratik formların matrissel formlarına ulaşılmak istenmektedir.

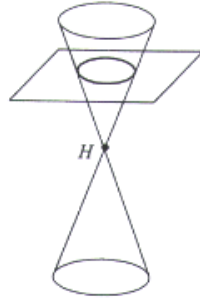
3.1.2.2. Kuadratik Formların Geometrisi

\mathbb{R} de

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (3.7)$$

biçiminde iki bilinmeyenli ikinci dereceden bir denklemini sağlayan (x, y) noktalarının uzayda oluşturduğu geometrik şekle ikinci dereceden bir eğri ya da bir konik eğrisi denir.

Bu bölümde, ikinci dereceden konik eğrileri ile ilgilenilecektir. Eğer a , b ve c katsayılarının hepsi birden sıfırsa denklemimiz $dx + ey + f = 0$ şeklinde birinci dereceden denkleme dönüşeceğinden a , b ve c katsayılarından en az birinin sıfır olmadığı varsayılacaktır. Düzlemdeki konik eğrilerinin, uzayda bir koni yüzeyi ile bir düzlemin arakesitleri olduğu gösterilebilir. Bu yüzden konik eğrilerine koni kesitleri adı da verilir. Bir koni yüzeyi ile bir düzlemin arakesitleri çember, elips, hiperbol, parabol, nokta, kesişen iki doğru, çakışık iki doğru olabilir.



Şekil 6. Çemberin koni kesiti olarak elde edilmesi



Şekil 7. Elipsin koni kesiti olarak elde edilmesi



Şekil 8. Hiperbolün koni kesiti olarak elde edilmesi



Şekil 9. Parabolün koni kesiti olarak elde edilmesi



Şekil 10. Noktanın koni kesiti olarak elde edilmesi



Şekil 11. Kesişen iki doğrunun koni kesiti olarak elde edilmesi



Şekil 12. Çakışık iki doğrunun koni kesiti olarak elde edilmesi

Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8 de çember, elips ve hiperbol eğrilerinin koni kesiti olarak nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Şekil 9, Şekil 10, Şekil 11 ve Şekil 12 de parabol, nokta, kesişen iki doğru ve çakışık iki doğrunun koni kesiti olarak nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

Bir koni yüzeyi ile bir düzlemin arakesitlerinden oluşan nokta kümelerinden her biri düzlemde bir konik eğrisi olarak isimlendirilir. Bu eğrilerden nokta, kesişen iki doğru, çakışık iki doğru yoz konik eğrileri olarak, çember, elips, hiperbol, parabol ise yoz

olmayan konik eğrileri olarak adlandırılır. Katsayıların değerlerine göre eğrinin şekli değişmektedir. (3.7) denkleminin bazı özel durumlarını inceleyelim.

Birinci Tip Denklemler: İlk olarak

$$x^2 + by^2 = 0$$

denklemlerine bakalım.

- i. Eğer $b > 0$ ise sadece $x = y = 0$ buluruz, buradan da anlaşılacağı gibi koniğin sadece $(0,0)$ noktası vardır:

$$C = \{(0,0)\}.$$

- ii. Eğer $b = 0$ ise $x = 0$ doğrusu elde edilir. Sonuç olarak,

$$C = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

noktalarının düzlemde oluşturduğu geometrik şekil elde edilir.

- iii. Eğer $b < 0$ ise, $d = -b > 0$ tanımını yaparak

$$0 = x^2 + by^2 = x^2 - dy^2 = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d})$$

denklemini elde ederiz. Bu durumda konik, $x + y\sqrt{d} = 0$ ve $x - y\sqrt{d} = 0$ doğrularının bileşimidir ve bu cebirsel olarak $C = \{(\pm y\sqrt{d}, y) : y \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir.

İkinci Tip Denklemler: Şimdi $x^2 = f$ denklemiyle tanımlanan koniklere bakalım.

- i. $f < 0$ ise, $x^2 = f$ denkleminin \mathbb{R} de çözümü yok: $C = \emptyset$ ve dolayısıyla düzlemde konik eğrisi oluşmaz.
- ii. $f = 0$ ise, $x^2 = f$ denklemi \mathbb{R} de $C = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ şeklinde çözüme sahiptir. Çözüm noktalarının oluşturduğu geometrik şekil $x = 0$ doğrusudur.
- iii. $f > 0$ ise, $x^2 = f$ denklemi \mathbb{R} de $C = \{(\pm\sqrt{f}, y) : y \in \mathbb{R}\}$ şeklinde çözüme sahiptir. Denklemi sağlayan noktaların oluşturduğu konik eğrisi $x = \sqrt{f}$ ve $x = -\sqrt{f}$ doğrularının birleşimidir.

Tanım 3.5 Dördüncü tip olan $y = ax^2$ denkleminin verdiği koniğe ve bu koniğin döndürülerine ve ötelemelerine parabol adı verilir.

(3.7) denkleminin bir diğer özel durumu ise, $ax^2 + by^2 = 1$ olma durumudur. Bu denklemi incelemeden önce elips ve hiperbol tanımlarını verelim.

Tanım 3.6 $a > 0$ ve $b > 0$ için,

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

denkleminin verilen eğrilere ve bunların döndürü ve ötelemelerine elips denir.

Tanım 3.7 $a > 0$ ve $b > 0$ için,

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

denkleminin verilen eğrilere ve bunların döndürü, simetri ve ötelemelerine hiperbol denir.

Üçüncü Tip Denklemler: a ve b katsayılarının en az biri pozitif değilse

$$ax^2 + by^2 = 1$$

denkleminin tanımladığı eğri boş kümedir. Bundan böyle iki katsayıdan birinin pozitif olduğunu varsayalım. Bu varsayıma göre, eğer $a \leq 0$ ise $b > 0$ olmak zorundadır ve bu durumda $x = y$ doğrusuna göre düzlemin simetriğini alırsak x eksenini y ve y eksenini de x eksenini olur ve a ile b 'nin rolleri değişir. Dolayısıyla a 'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. Eğer $b = 0$ ise, eğri iki doğrudan oluşur. Bundan böyle b 'nin 0 olmadığını varsayalım. Analizimizi $b > 0$ ya da $b < 0$ koşullarına göre ikiye ayıracağız. Birinci tür eğriye elips, ikinci türe hiperbol denir.

$ax^2 + by^2 = 1$ denkleminde a yerine $\frac{1}{a^2}$ ve b yerine $\frac{1}{b^2}$ yazarak,

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

elipsin denklemine, benzer olarak a yerine $\frac{1}{a^2}$ ve b yerine $-\frac{1}{b^2}$ yazarak

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

şeklinde de hiperbolün denklemine ulaşılır.

Bu bölümde, elips denkleminin analizi üzerinde durulacaktır. Genel olarak $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denklemiyle verilen elipsin a ve b 'nin durumlarına göre hangi geometrik şekillere bürüneceğine değinelim.

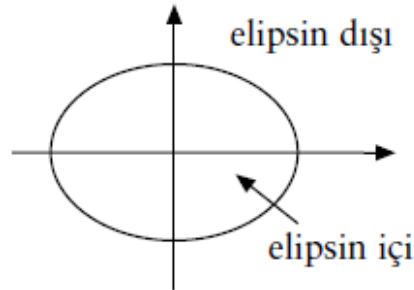
- Eğer $a = b$ ise, denklem $x^2 + y^2 = a^2$ biçimine bürünür ve bu denklemin verdiği elips $(0,0)$ merkezli ve a yarıçaplı çemberdir. Dolayısıyla a ve b birbirlerine yakın sayılırsa elipsin çembere benzeyeceği tahmininde bulunabiliriz.
- Elipsin

$$E = \{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$$

noktalar kümesi için, $(x, y) \in E$ ise, $(-x, y) \in E$, $(x, -y) \in E$, $(-x, -y) \in E$ dir.

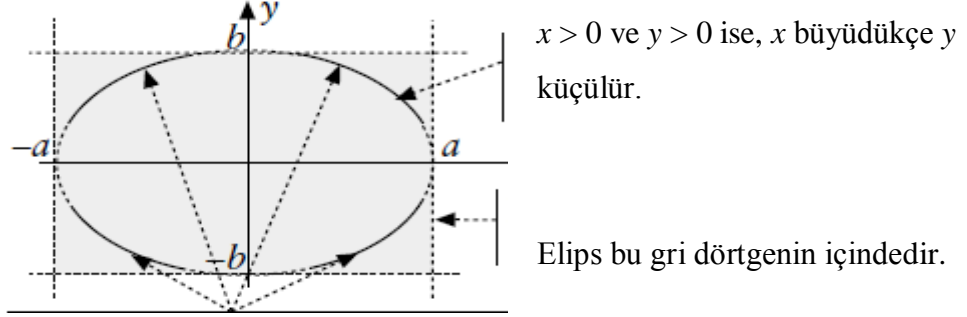
Dolayısıyla E elipsi, x ve y eksenlerine göre simetriktir.

- x^2 en büyük değerini $y^2 = 0$, yani $y = 0$ olduğunda alır. O halde $x^2 \leq a^2$ ya da $-a \leq x \leq a$ olacaktır. Benzer eşitsizlikler y değişkeni için de geçerlidir: $-b \leq y \leq b$. Demek ki elips $[-a, a] \times [-b, b]$ dikdörtgeninin içine sıkışmıştır.
- Eğer x ve y pozitifse ikisinden biri arttığında diğeri bu artışa ters orantılı olarak $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ eşitliğini sağlayabilmek için azalacaktır. Benzer yorumlar, x ve y simetri eksenlerinden dolayı diğer durumlar için de yapılabilir.
- “Elipsin iç ve dış noktaları” kavramları şu şekilde tanımlanabilir. Eğer düzlemin $A(x, y)$ noktası $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu noktanın elipsin içinde olduğu ve $A(x, y)$ noktası için $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$ ise noktanın elipsin “dışında” olduğu söylenir.



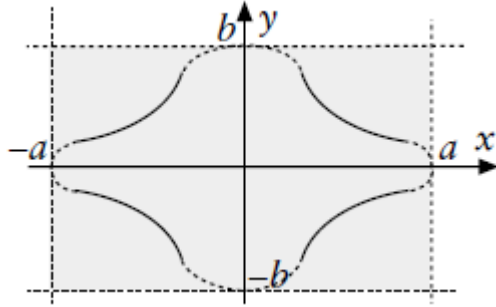
Şekil 13. Elipsin içi ve dışının gösterimi

- Elips x ve y eksenlerine göre simetriktir.

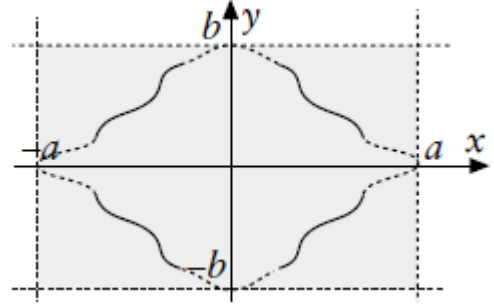


Şekil 14. Elipsin dışbükey olduğunun gösterimi

- Şimdiye kadarki bulgularımıza göre elips yukarıdaki gibi olabileceği gibi aşağıdaki şekillerdeki gibi de olabilir.



Şekil 15. Elipsin dışbükey olmadığını gösterimi



Şekil 16. Elipsin dışbükey olmadığını gösterimi

- Elipsin içinde alınan bir noktayla elipsin dışında alınan bir noktayı birleştiren doğru parçası elipsi tek bir noktada keser.
- Eğer iki nokta elipsin içindeyse, bu noktaları birleştiren doğru parçası da elipsin içindedir. Sonuç olarak ,

$$x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 < 1 \text{ ve } x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 < 1$$

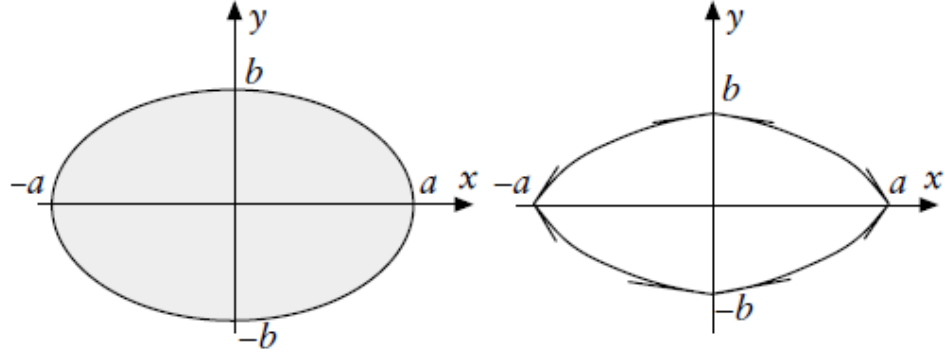
eşitsizlikleri sağlanıyorsa, o zaman her $\lambda \in [0,1]$ sayısı için,

$$(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1)^2/a^2 + (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_1)^2/b^2 < 1$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece, elipsin yukarıdaki Şekil 14 deki gibi dışbükey olduğu çıkar. Şekil 15 ve Şekil 16 yukarıda kanıtladığımız özelliği sağlamazlar.

O halde elipsin aşağıdaki iki şekilden biri gibi olabileceği kararına varılır.



Şekil 17. Elipsin dışbükeyliğinin gösterimi

Şekil 18. Elipsin sivri noktalarla gösterimi

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsi yukarıdaki dışbükey şekillerden biri gibi olabilir.

Sağdaki sivri noktalar vardır. Elipste böyle sivri noktalar olabilir mi?

- Elipsin şeklinin Şekil 17 ve Şekil 18 den hangisi olacağı kararı için incelemelere devam edelim. Elipsin herhangi bir noktasından geçen herhangi bir doğrunun elipsi kaç noktada kestiğini bulalım. Yukarıdaki Şekil 18 deki gibi, sivri noktalar olmaması için biri (teğet olanı) dışında, bunların her birinin elipsi iki değişik noktada kesmesi gerekir.

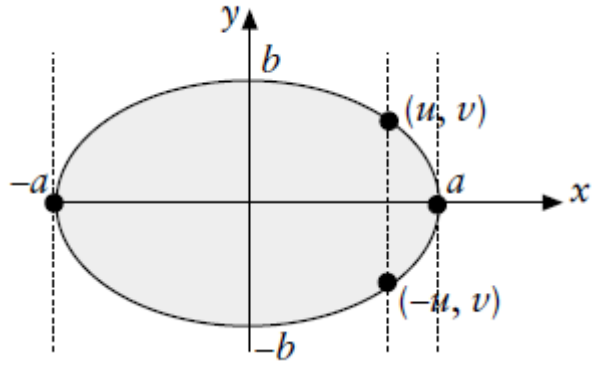
Elipsin üstünde alınan noktanın koordinatları (u,v) olsun. u ile v arasında

$$u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$$

ilişkisi vardır. Bu noktadan geçen bir doğrunun denklemi ya $x = u$ 'dur ya da,

$$y = m(x-u) + v$$

dir. Önce $x = u$ doğrusuyla $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsini kesiştirelim. Kesişim noktalarından biri (u, v) ise, $(u, -v)$ de diğeridir. Dolayısıyla $v \neq 0$ ise kesişim en az iki noktadır. Eğer $v = 0$ ise, $u = \pm a$ dır.

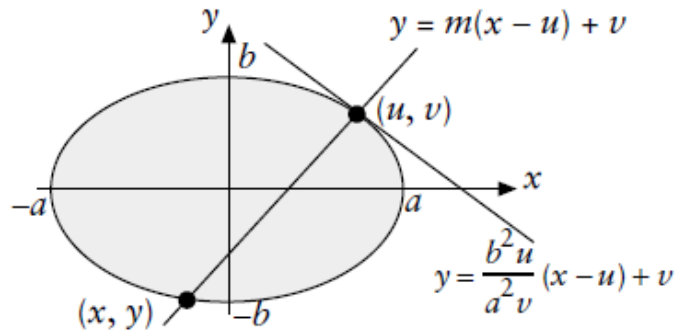


Şekil 19. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsiyle dikey doğruların kesişimi

u 'nun bu değeri $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa $y=0$ elde edilir. Anlıyoruz ki $v=0$ durumunda kesişim noktası bir tane ve o nokta da $(u,0)$ koordinatlı noktadır. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denkleminde verilen elipsle bu elipsi bir (u, v) noktasında kesen

$$y = m(x - u) + v$$

doğrusunu kesiştirelim. Kesişim noktalarından biri (u, v) olup, olası ikinci bir kesişim noktasına (x, y) diyelim.



Şekil 20. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsiyle dikey olmayan doğruların kesişimi

$x \neq u$ durumu ile birlikte,

$$\begin{aligned}
 1 &= x^2/a^2 + y^2/b^2 \\
 &= x^2/a^2 + (m(x-u) + v)^2/b^2 \\
 &= x^2/a^2 + m^2(x-u)^2/b^2 + v^2/b^2 + 2mv(x-u)/b^2 \\
 &= x^2/a^2 + m^2(x-u)^2/b^2 + 1 - u^2/a^2 + 2mv(x-u)/b^2 \\
 &= 1 + (x^2 - u^2)/a^2 + m^2(x-u)^2/b^2 + 2mv(x-u)/b^2
 \end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Gerekli aritmetik işlemler yapılarak,

$$= (x+u)/a^2 + m^2(x-u)/b^2 + 2mv/b^2 = 0$$

elde edilir ve buradan da

$$(1/a^2 + m^2/b^2)x = -u/a^2 + m^2u/b^2 - 2mv/b^2$$

eşitliğine ulaşılır.

$$(1/a^2 + m^2/b^2)u \neq -u/a^2 + m^2u/b^2 - 2mv/b^2$$

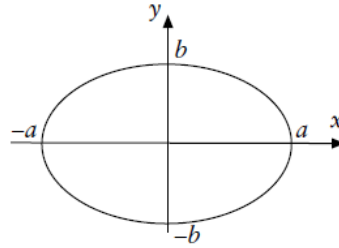
ise, $x \neq u$ koşulundan dolayı, iki değişik kesim noktası bulunur. Eğer

$$(1/a^2 + m^2/b^2)u = -u/a^2 + m^2u/b^2 - 2mv/b^2$$

ise, buradan

$$m = -ub^2/va^2$$

ise tek bir kesişim noktası vardır; bu da (u, v) noktasından elipse teğet geçen doğrunun eğimidir. Anlıyoruz ki elipsin herhangi bir noktasından elipsi sadece bir noktada kesen tek bir doğru vardır (ve bu doğru da o noktadan geçen teğettir.). Böylece elipsin aşağıdaki gibi bir eğri olduğunu kanıtlamış olduk.



Şekil 21. Elipsin genel gösterimi

Örnek 3.6 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ denklemi $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$ in formudur ($k = 2$ ve $l = 3$). Böylece grafiği x ekseninde $(-2, 0)$ ve $(2, 0)$ da kesişen ve y ekseninde de $(0, -3)$ ve $(0, 3)$ de kesişen standart pozisyonda bir eliptir. $x^2 - 8y^2 = -16$ denklemi yeniden düzenlenerek $y^2/2 - x^2/16 = 1$ şeklinde yazılabilir. Bu denklem $y^2/k^2 - x^2/l^2 = 1$ formundadır. $k = \sqrt{2}$ ve $l = 4$ tür. Grafiği böylece y ekseninde $(0, -\sqrt{2})$ ve $(0, \sqrt{2})$ de kesişen standart pozisyonda bir hiperboldür. $5x^2 + 2y = 0$ denklemi yeniden $x^2 = -\frac{2}{5}y$ olarak yazılabilir. Bu denklem $k = -\frac{2}{5}$ kullanılarak $x^2 = ky$ formunda yazılabilir. $k < 0$ olduğundan grafiği standart pozisyonda aşağı doğru azalan bir paraboldür.

3.1.2.3. Matrisler ile Kuadratik Formların İncelenmesi

3.1.2.3.1. Kuadratik Fonksiyonların Kritik Değerlerinin Hesaplanması

n değişkenli kuadratik formlara aynı zamanda n değişkenli bir fonksiyon olarak bakılabilmektedir. Aşağıdaki teorem, x_1, x_2, \dots, x_n şeklinde n değişkenli kuadratik fonksiyonun $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = 1$ kısıtlaması altında maksimum ve minimum değerlerini bulmada, $x^T Ax$ matrissel formundan hareket edilebileceğini göstermektedir.

Teorem 3.2 A özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ şeklinde azalan sırada olan $n \times n$ tipinde simetrik bir matris olsun. \mathbb{R}^n deki Euclidean iç çarpımı ile ilgili olan $(\|u\|^2 = \langle u, u \rangle)$ $\|\cdot\|$ norm fonksiyonu için $\|x\| = 1$ kısıtlamasını sağlayan $x \in \mathbb{R}^n$ vektörlerini dikkate alalım. Bu takdirde,

- a) $\lambda_1 \geq x^T Ax \geq \lambda_n$,
- b) x , A nın λ_n e karşılık gelen özvektörü ise $x^T Ax = \lambda_n$ dir ve x , A nın λ_1 e karşılık gelen özvektörü ise $x^T Ax = \lambda_1$ dir.

Aşağıdaki örnek, yukarıdaki teoremin iki değişkenli bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulmada, $x^T Ax$ matrisel gösteriminde A matrisinin özdeğer ve özvektörlerinin nasıl rol aldığını gösteren bir örnektir.

Örnek 3.7 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ iki değişkenli fonksiyonunun $x_1^2 + x_2^2 = 1$ kısıtlaması altında maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ fonksiyonunu x_1 ve x_2 değişkenlerine bağlı $x_1^2 + x_2^2 = 1$ kısıtlaması altında bir kuadratik form olarak değerlendirebilirsek,

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

yazılımına ulaşırız. f in maksimum ve minimum değerlerini bulurken,

$$f(x_1, x_2) = x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini dikkate alarak Teorem 3.1 de verilen $\lambda_1 \geq x^T Ax \geq \lambda_n$ eşitsizliğini kullanabiliriz.

Bir başka ifade ile,

$$\lambda_1 \geq x^T Ax \geq \lambda_n \Rightarrow \lambda_1 \geq f(x_1, x_2) \geq \lambda_n$$

yazılımdan f in minimum değeri A nın en küçük özdeğeri ve f in maksimum değeri A nın en büyük özdeğeri olacaktır. Bu adımda ise A nın en küçük ve en büyük özdeğerlerini bulalım. A nın karakteristik denklemi

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

dir. Böylece A nın özdeğerleri $\lambda = 3$ ve $\lambda = -1$ dir. Bu özdeğerler sırasıyla kuadratik formun bir üst ve alt sınırlarıdır. Yani, $3 \geq f(x_1, x_2) \geq -1$ dir.

3.1.2.3.2. Pozitif Tanımlı Kuadratik Formlar

Bu kısımda pozitif ve yarı pozitif tanımlı kuadratik formlar tanımlanacaktır. Kuadratik formların pozitif ya da yarı pozitif olmalarını belirleyen bazı kriterler (gerek ve yeter koşullar) verilecektir.

Tanım 3.8 Tüm $0 \neq x \in \mathbb{R}$ (veya \mathbb{C}) vektörleri için $x^T Ax > 0$ ise, $x^T Ax$ kuadratik formuna pozitif tanımlı kuadratik form ve $x^T Ax \geq 0$ ise, $x^T Ax$ kuadratik formuna yarı-pozitif tanımlı kuadratik form denir. $x^T Ax$ kuadratik formu pozitif (veya yarı-pozitif) tanımlı ve A simetrik (veya hermityen) ise, bu takdirde A matrisine pozitif (veya yarı-pozitif) tanımlı matris denir.

Verilen matrislerin pozitif ve yarı pozitifliğinin belirlenmesi aşağıda örneklendirilmiştir.

Örnek 3.8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin pozitif tanımlı olduğunu gösterelim.

Verilen matris ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ vektörü için

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

olup, $x^T Ax = (Ax, x)$ değeri

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= (2x_1 + 2x_2)(x_1) + (2x_1 + 4x_2)(x_2) \\ &= 2(x_1)^2 + 4x_1x_2 + 4(x_2)^2 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ki, gerekli cebirsel işlemlerle

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= 0.5(x_1)^2 + \left[1.5(x_1)^2 + 4x_1x_2 + \frac{8}{3}(x_2)^2 \right] + 0.5(x_2)^2 + \frac{1}{6}(x_2)^2 \\ &\geq 0.5 \left[(x_1)^2 + (x_2)^2 \right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

pozitifliğine ulaşılır. Böylece verilen matris, pozitif tanımlı bir matris olarak isimlendirilir.

Örnek 3.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin yarı pozitif tanımlı olduğunu gösterelim.

Verilen matris ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ vektörü için,

$$(Ax, x) = (x_1 + 2x_2)x_1 + (2x_1 + 4x_2)x_2$$

eşitliği ve buradan da

$$(Ax, x) = (x_1)^2 + 4x_1x_2 + 4(x_2)^2 = (x_1 + 2x_2)^2 \geq 0$$

yarı pozitifliğine ulaşılır. Böylece verilen matris, yarı pozitif tanımlı olarak isimlendirilir.

Aşağıdaki teorem, simetrik (veya hermityen) matrisin pozitif tanımlılığının matrisin kendisinden başka bir argümana ihtiyaç duymadan da belirlenebileceğini ifade etmektedir.

Teorem 3.3 A simetrik (veya hermityen) matrisi pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow A$ nın tüm özdeğerleri pozitiftir.

İspat. $\Rightarrow A$ pozitif tanımlı bir matris ve λ , A nın herhangi bir özdeğeri olsun. x , A nın λ ya karşılık gelen özvektörü ise, $x \neq 0$ ve $Ax = \lambda x$ dir. Böylece,

$$0 < x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2$$

dir ki, x in $\|x\|$ Euclidean normu için $\|x\|^2 > 0$ gerçeği ile birlikte $\lambda > 0$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır.

$\Leftarrow A$ nın tüm özdeğerleri pozitif olsun. Tüm $x \neq 0$ için $x^T Ax > 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 3.2 yi uygulayabilmek için $x \neq 0$ vektöründen $\|y\| = 1$ özelliğini sağlayan

$$y = \frac{x}{\|x\|} \text{ vektörünü elde etmeliyiz.}$$

Teorem 3.2 den dolayı λ_n , A nın en küçük özdeğeri olmak üzere $y^T Ay \geq \lambda_n > 0$ dir. Böylece

$$y^T Ay = \left(\frac{x}{\|x\|} \right)^T A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{1}{\|x\|^2} x^T Ax > 0$$

olur ki, $x^T Ax > 0$ sonucuna ulaşılır ve A simetrik (veya hermityen) matrisi pozitif tanımlıdır.

Örnek 3.10 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ simetrik matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 8$ dir. A

simetrik matrisi pozitif olduğundan Teorem 3.3 gereği, A matrisi pozitif tanımlıdır. O halde, simetrik (veya hermityen) matrislerin pozitif tanımlılık tanımından tüm $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için

$$x^T Ax = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 > 0$$

yazılır.

“Simetrik (veya hermityen) matrislerin pozitif tanımlılığını incelemeye bir başka kriter ise, matrisin alt determinantları üzerine kurulmuştur. bu kriteri verebilmek için gerekli kavramları verelim.

Tanım 3.9 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$ karesel bir matrisinin esas alt matrisleri, A

nın ilk r sütunu ve ilk r satırından oluşmuş alt matrislerdir. $r = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere bu alt matrisler

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem, simetrik (veya hermityen) matrislerin pozitif tanımlılığını matrisin alt determinantlarına göre incelemede bir kriter sunmaktadır.

Teorem 3.4 A simetrik matrisi pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow A$ nın her esas alt matrisinin determinantı pozitiftir.

Örnek 3.11 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin esas alt matrislerinin determinantları

hesaplanırsa,

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

bulunur ve Teorem 3.4 gereği A matrisinin pozitif tanımlı olduğu sonucuna ulaşılır. Ek olarak, A nın tüm özdeğerlerinin pozitif ve de tüm $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için $x^T Ax > 0$ olduğu söylenebilir.

Aşağıdaki not, A simetrik (veya hermityen) matrisi için $x^T Ax$ kuadratik formu üzerine verilebilecek tanımları özetlemektedir.

Not: A $n \times n$ simetrik (veya hermityen) matrisi ve tüm $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ vektörleri için

- $x^T Ax \geq 0$ ise, $x^T Ax$ kuadratik formu (veya A matrisi) pozitif yarı tanımlıdır.
- $x^T Ax < 0$ ise, $x^T Ax$ kuadratik formu (veya A matrisi) negatif tanımlıdır.
- $x^T Ax \leq 0$ ise, $x^T Ax$ kuadratik formu (veya A matrisi) negatif yarı tanımlıdır.

A $n \times n$ simetrik (veya hermityen) matrisinin pozitif yarı tanımlılığı, negatif tanımlılığı ve negatif yarı tanımlılığı için Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 e benzer kriterler üretilebilir.

Aşağıdaki iki teorem, A $n \times n$ simetrik (veya hermityen) matrisinin pozitif yarı tanımlılığı için farklı kriterler sunmaktadırlar.

Teorem 3.5 A $n \times n$ simetrik (veya hermityen) matrisi pozitif yarı tanımlıdır ancak ve ancak tüm özdeğerleri negatif olmayan değerlere sahiptir.

Teorem 3.6 A $n \times n$ simetrik (veya hermityen) matrisi pozitif yarı tanımlıdır ancak ve ancak tüm esas alt matrislerinin determinant değerleri negatif değildir.

3.1.2.3.3. Kuadratik Formların Köşegenleştirilmesi

A simetrik (veya hermityen) matris olmak üzere

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

kuadratik formunu gözönüne alalım. Bu bölümde $x^T Ax$ kuadratik formdaki çapraz çarpım terimlerinin yok edilmesine değinilecektir. A simetrik (veya hermityen) matris olduğundan, A matrisi her zaman köşegenleştirilebilir ya da başka ifade ile A yı köşegenleştiren P ortogonal matrisi vardır. Buradan, A nın $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri,

$$D = \text{köş}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi ve A yı köşegenleştiren P ortogonal matrisi için

$$P^T AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{C},$$

vektörü ile $x = Py$ dönüşümü dikkate alınır ve bu dönüşüm $x^T Ax$ kuadratik formunda uygulanırsa

$$x^T Ax = (Py)^T APy = y^T P^T APy = y^T Dy$$

eşitliğine ulaşılır. $y^T Dy$ kapalı formundan,

$$y^T Dy = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

çapraz çarpım terim içermeyen kuadratik forma ulaşılır. Böylece, çapraz terim içeren $x^T Ax$ kuadratik formu, çapraz terim içermeyen sadece karelerin toplamı olarak ifade edilebilen $y^T Dy$ formuna indirgenmiş olur.

Örnek 3.12 $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ kuadratik formuna denk olan, çapraz terim içermeyen ve de sadece karelerin toplamı olarak ifade edilebilen kuadratik formu belirleyelim.

Çözüm Kuadratik form matrissel formda

$$x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

şeklinde ki, matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$ olarak bulunur. Özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin bulunması ile, matrisin özçiftleri

$$(\lambda_1 = 0, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}), (\lambda_2 = -3, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}), (\lambda_3 = 3, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix})$$

şeklinde elde edilir. Böylece A matrisini ortogonalleştirilen P matrisi $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

olacaktır. $x = Py$ (daha açık olarak $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$) dönüşümü ile verilen

kuadratik forma denk, çapraz terim içermeyen ve sadece karelerin toplamı olarak ifade edilebilen kuadratik form

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -3y_2^2 + 3y_3^2$$

şeklinde dir.

Düzlemdeki konik eğrileriyle kuadratik formlar arasında yakın bir ilişki vardır. Kuadratik formu belirten A simetrik matrisinin özelliklerinden yararlanarak denklemi verilen konik eğrisinin çizimi kolaylaştırılabilir.

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, K = [d \quad e] \text{ için (3.7) denklemi matris formunda}$$

$$x^T Ax + Kx + f = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. xy koordinatlarındaki denklemi

$$x^T Ax + Kx + f = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde olan C koniğini dikkate alalım. Bu bölümde xy koordinatlarında çapraz terim içeren (3.9) denklemi ile verilen C koniğinin, $x'y'$ koordinatlarında çapraz terim içermeyen bir formda ifade edilmesine aşağıdaki teorem ile değinilecektir.

Teorem 3.7 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ denklemi C koniğinin xy koordinatlarındaki denklemi ve $x^T Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2$ birleştirilmiş kuadratik formu için, A nın λ_1 ve λ_2 özdeğerleri olmak üzere C koniğinin $x'y'$ koordinatlarındaki denklemi $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ dir (Anton and Rornes, 1994).

xy koordinatlarında çapraz terim içeren (3.9) denklemi ile verilen C koniğinin, $x'y'$ koordinatlarında çapraz terim içermeyen bir formda ifade edilebileceğini belirleyen teoremin ispatı niteliği taşıyan adımları aşağıda verelim.

Adım 1.1 $x^T Ax$ kuadratik formundaki A matrisini köşegenleştiren ortogonal bir

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \text{ matrisi bulunur.}$$

Adım 1.2 Ortogonal P matrisi aracılığı ile $x = Px'$ dönüşümü

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

gerçekleştirilir.

Adım 1.3 $x'y'$ sistemindeki C nin denklemini elde etmek üzere denklem (3.10) denklemi (3.9) denklemine yerine yazılır ve böylece

$$(Px')^T A(Px') + K(Px') + f = 0$$

veya

$$(x')^T (P^T AP)x' + (KP)x' + f = 0 \quad (3.11)$$

eşitliğine ulaşılır. $P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ eşitliği ile (3.11),

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

ya da

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \quad (d' = dp_{11} + ep_{21} \text{ ve } e' = dp_{12} + ep_{22})$$

eşitliğine dönüşür.

Örnek 3.13 xy koordinatlarında çapraz terim içeren

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

denklemleri C koniğini $x'y'$ koordinatlarında çapraz terim içermeyen bir formda ifade edelim.

Çözüm $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ matrisi ve $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektörü için, C koniğinin matrisel formu

$$x^T Ax - 36 = 0 \quad (3.12)$$

denkleminin matris formu olup, A nın karakteristik denklemi

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

dir. Böylece A nın özçiftleri

$$(\lambda_1 = 4, v_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}) \text{ ve } (\lambda_2 = 9, v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix})$$

dir.

O halde, $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ ortogonal matrisi A yı $P^T AP = D$ şeklinde

köşegenleştiren matris olacaktır. Böylece ortogonal koordinat dönüşümü,

$$x = Px' \quad (3.13)$$

dönüşümüdür. (3.13) denklemini, (3.12) denkleminde yerine yazarsak

$$(Px')^T A(Px') - 36 = 0$$

ya da

$$(x')^T (P^T AP)x' - 36 = 0$$

dir. $P^T AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ olduğundan bu denklem

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

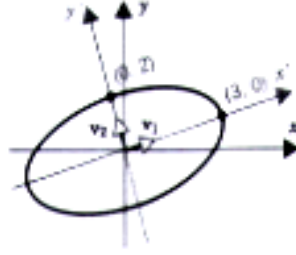
ya da

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

olacaktır. Buradan,

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1 \text{ dir.}$$

büyük eksen uzunluğu 6 br, küçük eksen uzunluğu 4 br olan $x'y'$ koordinatlarında merkezli elipsin denkleminde ulaşılır. Bu denklemin ifade ettiği elips ise, Şekil 22 de resmedilmiştir.



Şekil 22. $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ denkleminin belirttiği elips

Örnek 3.14 Denklemi $5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$ olan C koniğini tanımlayınız.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ve $K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ olmak üzere verilen denklemin matrisel

formu,

$$x^T Ax + Kx + 4 = 0 \quad (3.14)$$

dir. $x^T Ax$ i ortogonal olarak köşegenleştiren matris $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ dir. $x = Px'$

dönüşümü (3.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(Px')^T A(Px') + K(Px') + 4 = 0$$

ya da

$$(x')^T (P^T AP)x' + (KP)x' + 4 = 0 \quad (3.15)$$

formuna ulaşılır. Böylece,

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ ve } KP = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}$$

hesaplamaları ile birlikte (3.15) denklemini

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \quad (3.16)$$

olarak yazılabilir. Koniğin standart gösterimini (merkezil halini) elde edelim.

(3.16) denkleminde,

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

formu ve karelerin tamamlanması ile de

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

formu ya da

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \quad (3.17)$$

formuna ulaşılır. Koordinat eksenlerinin,

$$x'' = x' - 1, \quad y'' = y' - 2$$

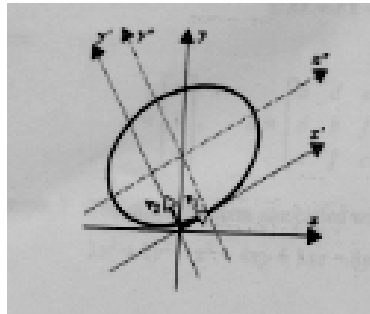
dönüşüm denklemlerinden yola çıkarak (3.17) denklemi,

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36$$

ya da

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

şeklinde olacaktır ki, koniğin standart gösterimi elde edilir. Bu elipsin düzlemde resmedilmesi ise Şekil 23 dür.



Şekil 23. $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$ denkleminin belirttiği elips

3.1.3. Matrislerin Değerler Cismi ve Sayısal Görüntüsü

Bu bölümde özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$$

ile tanımlanan spektral yarıçapı,

$$r(A) = \max_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

ile tanımlanan sayısal yarıçapı ve

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ile tanımlanan spektral normunu kapsayan, karmaşık sayılar kümesinin kapalı sınırlı bir alt kümesi olan ve cebirsel olarak “A matrisinin değerler cismi” ve geometrik olarak ise “A matrisinin sayısal görüntüsü veya sayısal bölgesi” olarak bilinen $W(A)$ kümesi ve bu kümenin cebirsel ve geometrik özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.10 $n \times n$ kompleks matrisler kümesinden kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesine tanımlanan,

$$F(\cdot): M_n \rightarrow D (D \subseteq \mathbb{C}), A \rightarrow F(A) = x^* Ax, (x \in \mathbb{C}^n)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu takdirde,

$$W(A) = \{F(A) : A \in M_n\}$$

$$= \{x^* Ax : A \in M_n, x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}$$

$$= \{x^* Ax : A \in M_n, x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$$

ile tanımlanan kümeye, cebirsel anlamda $A \in M_n$ matrisinin değerler cismi, kümedeki kompleks sayılara kompleks düzlemde noktaların karşılık getirilmesi ile oluşan geometrik şekle, A'nın sayısal görüntüsü denir. Bir başka ifade ile, cebirsel olarak matrisin değerler cismi, geometrik olarak sayısal görüntü anlamındadır.

Örnek 3.15 I , n -kare birim matrisinin değerler cismini bulalım. I , birim matrisinin $W(I)$ değerler cismi,

$$W(I) = \{F(I) : I, n \times n \text{ birim matris}\}$$

$$= \{x^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}$$

$$= \{[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{C}, \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \dots + \bar{x}_n x_n = 1\}$$

$$= \{[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{C}, \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \dots + \bar{x}_n x_n = 1\} = \{1\}$$

şeklinde bir kümedir. O halde, I , birim matrisinin sayısal görüntüsünün de, kompleks düzlemde 1 kompleks sayısına karşılık gelen bir nokta olacağı yorumu yapılır.

Örnek 3.16 I , n -kare birim matris ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere αI matrisinin değerler cismini ve de sayısal görüntüsünü bulalım. αI matrisi için $W(\alpha I)$ kümesi,

$$\begin{aligned} W(\alpha I) &= \{F(\alpha I) : I, n \times n \text{ birim matris}, \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{x^*(\alpha I)x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1, \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\alpha(x^* I x) : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1, \alpha \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

$$W(\alpha I) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} x^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1, \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \{\alpha : \alpha \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$$

şeklinde elde edilir ki, αI matrisinin değerler cisminin kompleks sayılar kümesi ve de sayısal görüntüsünün de kompleks düzlem olduğu bilgilerine ulaşılır.

Örnek 3.17 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin değerler cismini ve sayısal görüntüsünü bulalım.

Verilen matris için $W(A)$ kümesi,

$$W(A) = \{z = F(A) : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$$= \{z = x^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x : x^* x = 1, x \in \mathbb{C}^2\}$$

$$= \{z = [\bar{x}_1 \bar{x}_2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

$$= \{z = \bar{x}_1 x_1 : \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

$$= \{z = |x_1|^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

şeklinde elde edilir. $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, şartı altında $W(A)$ kümesinin $z = |x_1|^2$ elemanlarını karakterize edelim.

$x_1 \in \mathbb{C}$ için $z = |x_1|^2$ olduğundan

$$0 \leq z_1 = |x_1|^2 \tag{3.18}$$

yazılır. Değişken $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sayıları için $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ eşitliğinden,

$$z = |x_1|^2 \leq 1 \quad (3.19)$$

yazılır. (3.18) ve (3.19) denklemlerinden $0 \leq z \leq 1$ elde edilir. O halde A matrisinin değerler cismi $W(A) = [0,1]$ olarak elde edilir. Elde edilen A matrisinin değerler cisim kümesi $W(A)$ nın kompleks düzlemdeki yansıması A matrisinin sayısal görüntüsü olacaktır ki, bu yansıma düzlemi oluşturan reel eksenin 0 ve 1 arasında kalan parçasıdır.

Verilen matrisin değerler cismini ve de sayısal görüntüsünü elde etmenin daha iyi anlaşılması açısından aşağıdaki örneği dikkate alalım.

Örnek 3.18 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin değerler cismini ve de sayısal görüntüsünü bulalım.

Verilen matris için $W(A)$ kümesi,

$$\begin{aligned} W(A) &= \{z = F(A) : A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{z = x^* \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x : x \in \mathbb{C}^2, x^* x = 1\} \\ &= \{z = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1\} \\ &= \{z = 2\bar{x}_1 x_2 : \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ özelliğini de dahil ederek $W(A)$ kümesinin $z = 2\bar{x}_1 x_2$ formundaki elemanlarını belirleyelim. Buradan,

$$z = 2\bar{x}_1 x_2 \Rightarrow |z| = |2\bar{x}_1 x_2| \Rightarrow |z| = 2|\bar{x}_1||x_2| \Rightarrow |z| = 2|x_1||x_2| \in \mathbb{R}$$

yazılır. $(|x_1| - |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1||x_2|$ özdeşliği ile,

$$0 \leq (|x_1| - |x_2|)^2 = 1 - 2|x_1||x_2|$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikte, $|z| = 2|x_1||x_2|$ olduğu dikkate alınırsa, $W(A)$ kümesinin

$$0 \leq 1 - |z| \Rightarrow |z| \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan z kompleks sayılarından oluştuğu sonucuna varılır. O halde, verilen matrisin değerler cismi $W(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ olacaktır. Şimdi $W(A)$ daki kompleks sayıların kompleks düzlemdeki nokta temsillerinin oluşturduğu geometrik şekli (A matrisinin sayısal görüntüsünü) belirleyelim. $W(A)$ nın tüm elemanlarını temsil eden değişken eleman $z = u + iv$ olsun. Bu değişken elemanın taşıması gereken

$$|z| \leq 1 \text{ ya da } |u + iv| \leq 1$$

özellik ile,

$$|u + iv| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1 \Rightarrow u^2 + v^2 \leq 1$$

eşitsizliğine ulaşılır ki, geometrik olarak bu eşitsizlik uv dik koordinatlarıyla belirlenen kompleks düzlemdeki birim çember ve içini belirler. Bir başka ifade ile, A matrisinin sayısal görüntüsü kompleks düzlemde bir çember ve onun iç noktalarından oluşan geometrik şekildir.

Aşağıdaki teorem, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin özdeğerlerinin $W(A)$ kümesinde olduğunu ya da matrisin spektrumunun $W(A)$ kümesinin alt kümesi olduğunu ifade eden bir teoremdir.

Teorem 3.8 λ nın, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin bir özdeğeri olması için $\Leftrightarrow \lambda = x^* Ax$, $x^* x = 1$ olacak şekilde bir x vektörünün olmasıdır.

İspat. λ , $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin bir özdeğeridir $\Leftrightarrow Au = \lambda u$, $\exists 0 \neq u \in \mathbb{C}^n$

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda x, \exists x = \frac{u}{\|u\|} \in \mathbb{C}^n \ni x^* x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^* Ax = \lambda(x^* x)$$

$$\Leftrightarrow x^* Ax = \lambda \text{ dir.}$$

Böylece, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin $\sigma(A)$ spektrumu ve $W(A)$ kümesi için

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \{\lambda : Ax = \lambda x, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n\} \\
&= \{\lambda = x^* Ax : Au = \lambda u, 0 \neq u \in \mathbb{C}^n, x = \frac{u}{\|u\|}\} \\
&\subset W(A)
\end{aligned}$$

bağıntısı geçerlidir.

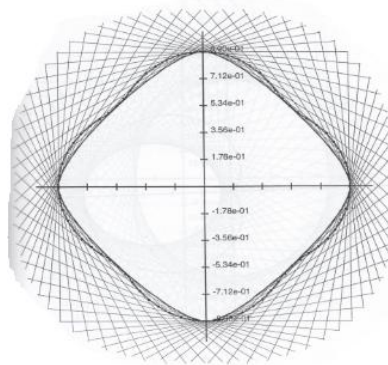
3.1.3.1. Bazı Kompleks Matrislerin MAPLE Programı ile Sayısal Görüntüleri

MAPLE programlama dili analitik ve sayısal işlem özelliği olan aynı zamanda üstün grafik tasarımı ile dikkat çeken bir yazılım dili ve sistemidir. MAPLE programlama dilinde diğer programlama dillerinde olduğu gibi fonksiyon işlemleri gören alt programlar (procedure) yazılabilir veya sahip olduğu çok fazla sayıdaki hazır fonksiyonlardan yararlanılabilir.

Şu anki MAPLE programı içerisinde kompleks matrislerin sayısal görüntülerinin ekran görüntülerini sunan algoritmik yazılımı (procedure) içeren bir paket mevcuttur. Girilen kompleks matrislerin sayısal görüntülerinin MAPLE ekran görüntülerini sunan MAPLE algoritmik yazılımı (procedure), tezin “**EKLER**” bölümünde verilmektedir.

Aşağıda bazı kompleks matrislerin, MAPLE bilgisayar programı yardımı ile sayısal görüntülerinin (sayısal bölgelerinin) ekran görüntüleri sunulmaktadır.

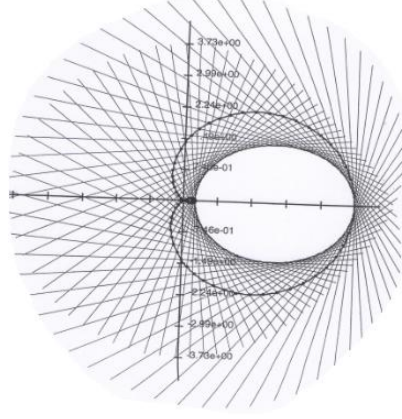
Örnek 3.19 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 24. A_1 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

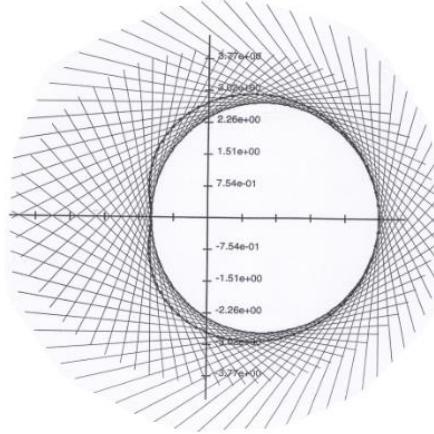
Örnek 3.20 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 25. A_2 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

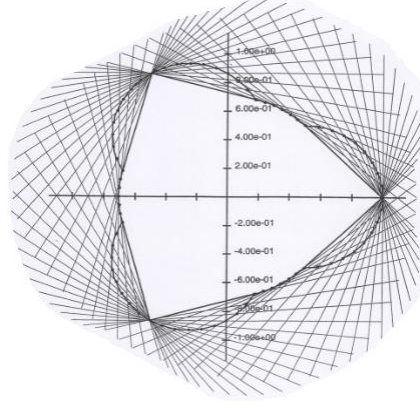
Örnek 3.21 $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 26. A_3 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

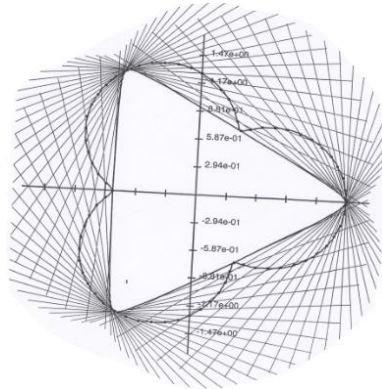
Örnek 3.22 $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 27. A_4 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

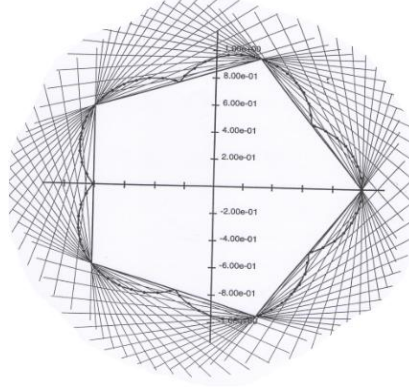
Örnek 3.23 $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 28. A_5 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

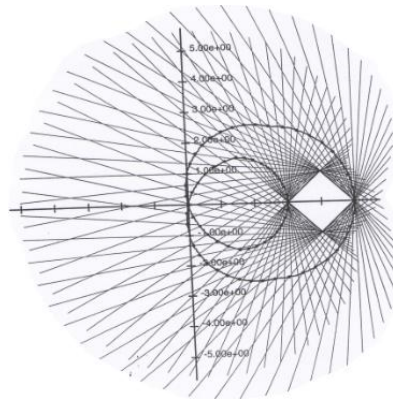
Örnek 3.24 $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 29. A_6 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

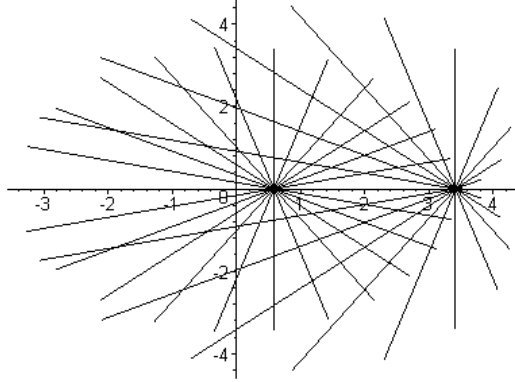
Örnek 3.25 $A_7 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 30. A_7 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

Örnek 3.26 $A_8 = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, $i^2 = -1$, matrisinin sayısal görüntüsü,



Şekil 31. A_8 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı şeklindedir.

3.1.3.2. Değerler Cisminin Temel Özellikleri

Bu kısımda $W(\cdot)$ değerler cisminin bazı temel özelliklerine değinilecektir.

Tanım 3.11 $S, T \subset \mathbb{C}$ alt kümelerininin toplamı, $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ dir.

Önerme 3.1 $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$W(A + \alpha I) = W(A) + \alpha$$

dir.

İspat. $A + \alpha I$ matrisinin $W(A + \alpha I)$ değerler cismi tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} W(A + \alpha I) &= \{x^*(A + \alpha I)x : x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + \alpha : x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + \alpha x^*x : x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax : x^*x = 1\} + \{\alpha x^*x : x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax : x^*x = 1\} + \alpha \\ &= W(A) + \alpha \end{aligned}$$

şeklinde önermenin ispatı tamamlanır.

Aşağıdaki önerme, kompleks $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin değerler cismi ile onun skaler katının değerler cismi arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Önerme 3.2 $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$W(\alpha A) = \alpha W(A)$$

dır.

İspat. αA matrisinin $W(\alpha A)$ değerler cismi tanımı ile,

$$\begin{aligned} W(\alpha A) &= \{x^*(\alpha A)x : x^*x = 1\} \\ &= \{\alpha x^*Ax : x^*x = 1\} \\ &= \alpha \{x^*Ax : x^*x = 1\} \\ &= \alpha W(A) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.

Tanım 3.12 $A \in M_n(\mathbb{C})$ için, $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ matrisine A matrisinin Hermityen kısmı ve $S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$ kısmına ise A matrisinin ters Hermityen kısmı denir.

Tezimizin önceki bir bölümünde de değinildiği üzere, hermityen (veya simetrik) matrislerle işlem yapmak daha net ve hızlı sonuçlar vermektedir. Bu bilgi, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin değerler cisminin gerçel elemanlarından oluşan alt kümesinin ($\text{Re}W(A)$), A matrisinin Hermityen kısmının ($H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$) değerler cismine eşit olduğunu ifade eden aşağıdaki önermeyi uygulama açısından oldukça önemli kılmaktadır.

Önerme 3.3 $A \in M_n(\mathbb{C})$ için, $W(H(A)) = \text{Re}W(A)$ dir.

İspat. $A \in M_n(\mathbb{C})$ için, $W(H(A)) = \text{Re}W(A)$ eşitliğine, $W(H(A))$ ve $\text{Re}W(A)$ kümelerinin elemanlarının eşitliğini elde ederek ulaşalım.

$$\begin{aligned}
x^*H(A)x &= x^* \frac{1}{2}(A + A^*)x \\
&= \frac{1}{2}(x^*Ax + x^*A^*x) \\
&= \frac{1}{2}(x^*Ax + \overline{x^*Ax}) \\
&= \frac{1}{2}2\operatorname{Re}(x^*Ax) \\
&= \operatorname{Re}(x^*Ax)
\end{aligned}$$

Elemanlarıyla kompleks düzlemdeki noktaların eşleşmesi sonucu sağ yarı kompleks düzlemi oluşturan (orjin dahil değil) küme $RHP \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ şeklinde tanımlanabilir. $A \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks matrisinin değerler cisminin RHP nin alt kümesi olması ile A nın Hermityen kısmının pozitif tanımlı olması arasında bağ kuran önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.4 $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $RHP \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ olmak üzere,

$$W(A) \subset RHP \Leftrightarrow A + A^* \text{ pozitif tanımlıdır.}$$

İspat. $\Rightarrow A \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks matrisi için, $W(A) \subset RHP$ durumu kabul edilip, $A + A^*$ matrisinin pozitif tanımlı olması kanıtlanacaktır.

Bunun için, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin $W(A)$ değerler cisminin tüm elemanlarını temsil eden $z = x^*Ax$ değişken elemanı dikkate alalım. $W(A) \subset RHP$ olması ile, $z \in F(A) \Rightarrow z \in RHP$ yazılacağı açıktır. RHP kümesinin özelliği gereği $\operatorname{Re} z > 0$ olacaktır. O halde,

$$\operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(x^*Ax) > 0 \text{ ya da } 2\operatorname{Re}(x^*Ax) > 0$$

yazılır. $2\operatorname{Re}(x^*Ax) > 0$ ve

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(x^*Ax) &= (x^*Ax) + \overline{(x^*Ax)} = (x^*Ax) + (x^*Ax)^* \\
&= (x^*Ax) + (x^*A^*x) = x^*(A + A^*)x
\end{aligned}$$

eşitliği ile birlikte $A + A^*$ matrisi ve tüm $x \in \mathbb{C}^n$ vektörleri

$$x^*(A+A^*)x > 0$$

pozitifliğine ulaşılır ki, $A+A^*$ matrisi pozitif tanımlı olarak isimlendirilir.

$\Leftrightarrow A \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks matrisi için, $A+A^*$ matrisinin pozitif tanımlı olması durumunda, $W(A) \subset RHP$ olduğu kanıtlanacaktır. $A+A^*$ matrisinin pozitif tanımlılığı ile tüm $x \in \mathbb{C}^n$ vektörleri için $x^*(A+A^*)x > 0$ pozitifliliğine ulaşılır. Böylece cebirsel işlemlerle,

$$0 < x^*(A+A^*)x = x^*Ax + x^*A^*x = x^*Ax + (x^*Ax)^*$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve de kompleks sayıların

$$x^*Ax + (x^*Ax)^* = x^*Ax + \overline{(x^*Ax)} = 2\operatorname{Re}(x^*Ax) = 2\operatorname{Re}z$$

özelliği gereği $\operatorname{Re}z > 0$ sonucuna ulaşılır.

Elemanlarıyla kompleks düzlemdeki noktaların eşleşmesi sonucu sağ yarı kompleks düzlemi oluşturan (orjin dahil) küme $RHP_0 \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z \geq 0\}$ şeklinde tanımlanabilir. $A \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks matrisinin değerler cisminin RHP_0 in alt kümesi olması ile A 'nın Hermityen kısmının pozitif yarı tanımlı olması arasında bağ kuran önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.5 $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $RHP_0 \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z \geq 0\}$ olmak üzere,

$$W(A) \subset RHP_0 \Leftrightarrow A+A^* \text{ pozitif yarı tanımlıdır.}$$

İspat. Bu önermenin ispatı Önerme 3.4 ün ispatına benzer olarak yapılacaktır.

$\Rightarrow A \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks matrisi için, $W(A) \subset RHP_0$ durumu kabul edilip, $A+A^*$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olması kanıtlanacaktır. Bunun için, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin $W(A)$ değerler cisminin tüm elemanlarını temsil eden $z = x^*Ax$ değişken elemanı dikkate alalım. $W(A) \subset RHP$ olması ile, $z \in W(A) \Rightarrow z \in RHP_0$ yazılacağı açıktır. RHP kümesinin özelliği gereği $\operatorname{Re}z \geq 0$ olacaktır. O halde, $z = x^*Ax$ ve $\operatorname{Re}z \geq 0$ olsun. $A+A^*$ matrisinin yarı pozitif tanımlılığını ispatlayalım. $\operatorname{Re}z \geq 0$ özelliğinden,

$$\operatorname{Re} z \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(x^* Ax) \geq 0 \Rightarrow 2\operatorname{Re}(x^* Ax) \geq 0$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik ve $2\operatorname{Re}(x^* Ax)$ için

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(x^* Ax) &= (x^* Ax) + \overline{(x^* Ax)} \\ &= (x^* Ax) + (x^* Ax)^* \\ &= (x^* Ax) + (x^* A^* x) \\ &= x^* (A + A^*) x \end{aligned}$$

eşitliği dikkate alındığında $x^* (A + A^*) x \geq 0$ olur ve böylece $A + A^*$ in yarı pozitif tanımlı bir matris olduğu sonucuna varılır.

\Leftarrow Şimdi $A + A^*$ matrisi yarı pozitif tanımlı bir matris, $x^* (A + A^*) x \geq 0$, olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} x^* (A + A^*) x &= x^* Ax + x^* A^* x \\ &= x^* Ax + (x^* Ax)^* \\ &= x^* Ax + \overline{(x^* Ax)} \\ &= 2\operatorname{Re}(x^* Ax) = 2\operatorname{Re} z \geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ki, $W(A)$ için $W(A) \subset RHP_0$ kapsanma bağıntısı yazılır.

Örnek 3.27 $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ matrisinin $W(A)$ değerler cisminin $W(A) \subset RHP_0$ şeklinde

kapsandığını gösterelim. $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için,

$$\begin{aligned}
x^*(A + A^*)x &= (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \left[\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2(\bar{x}_2 x_1 + \overline{\bar{x}_2 x_1}) \\
&= 2 \operatorname{Re} z \geq 0
\end{aligned}$$

olur ki,

Önerme 3.5 gereği $W(A) \subset RHP_0$ bağıntısı geçerlidir.

Önerme 3.6 $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $\sigma(A) \subset W(A)$ dir.

İspat. $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin özdeğerler kümesi $\sigma(A)$ nın, değerler cisim kümesi $W(A)$ nin alt kümesi olduğunu göstermek için $\sigma(A)$ daki her elemanın aynı zamanda $W(A)$ da olacağını kanıtlamak gerekir. O halde $\sigma(A)$ daki temsili $\lambda \in \sigma(A)$ elemanı için $\lambda \in W(A)$ olacağını kanıtlayalım. $\lambda \in \sigma(A)$ ise λ , A nın bir özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{C}^n$ özvektörü mevcuttur. (λ, x) özçiftinin

$$Ax = \lambda x$$

bağıntısı ile belirleneceği bilinmektedir. Buradan,

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A \frac{x}{\|x\|} = \lambda \frac{x}{\|x\|}$$

yazılır ve $w = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{C}^n$ ataması ile

$$Aw = \lambda w$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\lambda \in \mathbb{C}$ skaleri

$$\lambda = w^* Aw$$

formunda olacaktır ki, bu formda olan tüm kompleks sayıların $W(A)$ da olacağı bilgisi ile de $\lambda \in W(A)$ yazılır. Sonuç olarak, $\sigma(A) \subset W(A)$ bağıntısına ulaşılır ve önermenin ispatı tamamlanır.

Önerme 3.6 ile ispatlanan $\sigma(A) \subset W(A)$ özelliğine, literatürde spektral sınırlama özelliği denilmektedir.

Örnek 3.28 Spektral sınırlama özelliğini kullanarak, pozitif tanımlı matrislerin özdeğerlerinin pozitif reel sayılar olduğunu gösterelim.

A pozitif tanımlı matris olsun. O halde, her $x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için $x^*Ax > 0$ dir. Bu eşitsizlik A nın özvektörleri için de sağlanacaktır. (λ, u) çifti A nın tüm özçiftlerini temsil etsin. A pozitif tanımlı olduğundan (her $x \in \mathbb{C}^n$ için $0 < x^*Ax$),

$$0 < u^*Au = u^*\lambda u = \lambda u^*u = \lambda \|u\|^2$$

yazılır. u , A nın özvektörü olduğundan $u \neq 0$ ve $\|u\| \neq 0$ dir. Böylece, A nın özdeğerlerinin

$$0 < \lambda \|u\|^2 \Rightarrow 0 < \lambda$$

pozitiflik özelliğine ulaşılır.

Önerme 3.7 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $W(A+B) \subset W(A) + W(B)$ dir.

İspat.

$$W(A+B) = \{x^*(A+B)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} = \{x^*Ax + x^*Bx : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

dir ve buradan

$$W(A+B) \subset \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} + \{y^*By : y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1\} = W(A) + W(B)$$

bağıntısı elde edilir.

Önerme 3.8 $A, U \in M_n(\mathbb{C})$ için, $W(U^*AU) = W(A)$ dir.

İspat. $W(U^*AU) = W(A)$ eşitliğinin ispatı, iki kümenin eşitliği prensibi olarak bilinen

$$W(U^*AU) \subset W(A) \text{ ve } W(U^*AU) \supset W(A)$$

bağıntılarının gerçekleştiklerinin kanıtlanmaları üzerine olacaktır.

Şimdi $W(U^*AU)$ kümesinde temsili bir w elemanı alalım ve bu elemanın aynı zamanda $W(A)$ da olduğunu kanıtlayalım.

$$w \in W(U^*AU) \Rightarrow w = x^*(U^*AU)x, (x \in \mathbb{C}^n) \Rightarrow w = (x^*U^*)A(Ux), (x \in \mathbb{C}^n)$$

yazılır ve $y = Ux, (x \in \mathbb{C}^n)$ ataması ile w vektörü $w = y^*Ay$ formunda olur. Buradan $W(U^*AU)$ kümesine ait olan her w vektörünün aynı zamanda $W(A)$ ya ait olduğu sonucuna varılır ve $W(U^*AU) \subset W(A)$ bağıntısına ulaşılır.

$W(A)$ kümesinde temsili bir v elemanı alalım ve bu elemanın aynı zamanda $W(U^*AU)$ da olduğunu kanıtlayalım.

$$v \in W(A) \Rightarrow v = y^*Ay, (\text{her } y \in \mathbb{C}^n \text{ ve } y^*y = 1)$$

dir. Her $y \in \mathbb{C}^n$ ve $y^*y = 1$ için $y = Ux, (x \in \mathbb{C}^n)$ ataması yapıldığında $v = y^*Ay$ eşitliğinden $v = x^*(U^*AU)x$ eşitliği elde edilir ki, $W(A)$ kümesine ait olan her $y \in \mathbb{C}^n$ vektörünün aynı zamanda $W(U^*AU)$ kümesine ait olduğu sonucuna ya da matematiksel olarak $W(U^*AU) \supset W(A)$ bağıntısına ulaşılır.

Tanım 3.13 $AA^* = A^*A$ özelliğini sağlayan A karesel matrise normal matris denir.

Aşağıdaki önermeyi vermeden önce teoremden ve tezin ilerleyen kısımlarında kullanılan $Co(\cdot)$ gösterimini tanımlayalım. $S \subseteq \mathbb{C}$ alt kümesinin sonlu sayıdaki elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarından oluşan küme $Co(S)$ ile gösterilir.

Önerme 3.9 $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal bir matris ise, $W(A) = Co(\sigma(A))$ dir.

İspat. A normal bir matris olsun. Bu takdirde, A nın $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri ve esas köşegeni A nın özdeğerlerinden oluşan köşegen $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ matrisi ve de U üniteri matrisi için, A matrisinin $A = U^*DU$ formunda ifade edilebileceği bilinmektedir. Bir matrisin değerler cismi ile matrise üniter benzer olan matrisin değerler cisminin eşitliğini garantileyen Önerme 3.8 ile

$$W(A) = W(U^*DU) = W(D)$$

yazılır. O halde $W(A) = Co(\sigma(A))$ eşitliği, $W(D)$ kümesinin A nın özdeğerlerinin tüm konveks kombinasyonlarından oluşan bir küme olduğunun kanıtlanması ile gösterilecektir.

D köşegen matrisinin değerler cismi

$$\begin{aligned} W(D) &= \{x^* D x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \lambda_i : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde olup, D nin köşegen elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesidir. Böylece önermenin ispatı tamamlanır.

Tanım 3.14 $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n(\mathbb{C})$ karesel matrisleri için,

$$\bigoplus_{i=1}^n A_i = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan $\bigoplus_{i=1}^n A_i$ blok matrisine $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerinin direkt toplam matrisi denir.

Önerme 3.10 $A \in M_{n_1}(\mathbb{C})$ ve $B \in M_{n_2}(\mathbb{C})$ için, $W(A \oplus B) = Co(W(A) \cup W(B))$ dir.

İspat. $A \in M_{n_1}(\mathbb{C})$ ve $B \in M_{n_2}(\mathbb{C})$ matrislerinin direkt toplam matrisi

$A \oplus B \in M_{n_1+n_2}(\mathbb{C})$ şeklinde bir matris olacaktır. İspatımıza $W(A \oplus B) \supset W(B)$ olduğunu kanıtlayarak başlayalım. Her $x \in \mathbb{C}^{n_1}$ ve $y \in \mathbb{C}^{n_2}$ vektörleri için $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$ deki tüm vektörleri temsil eden

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$$

vektörünü gözönüne alalım. Bu temsili vektör ve $A \oplus B$ matrisi için

$$z^* (A \oplus B) z = x^* A x + y^* B y$$

yazılır. $x = 0$ ve $y^* y = 1$ olduğu durumlarda $z^* (A \oplus B) z$ kompleks sayıları

$$z^* (A \oplus B) z = y^* B y \in W(B)$$

formunda olacaklarından $W(A \oplus B)$ kümesinin $W(B)$ nin elemanlarını da barındırdığı yorumu yapılabilir. Bir başka deyişle

$$W(A \oplus B) \supset W(B)$$

bağıntısı yazılabilir. Benzer şekilde $y = 0$ ve $x^*x = 1$ olduğu durumlarda $z^*(A \oplus B)z$ kompleks sayıları

$$z^*(A \oplus B)z = x^*Ax \in W(A)$$

formunda olacaklarından $W(A \oplus B)$ kümesinin $W(A)$ nin elemanlarını da barındırdığı yorumu yapılabilir. Bir başka deyişle

$$W(A \oplus B) \supset W(A)$$

bağıntısı yazılabilir. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} W(A \oplus B) \supset W(B) \\ W(A \oplus B) \supset W(A) \end{array} \right\} \Rightarrow W(A \oplus B) \supset W(A) \cup W(B)$$

dır. $W(A+B)$ konveks olduğundan, $W(A) \cup W(B)$ kümesinin elemanlarının konveks kombinasyonlarını da kapsayacaktır, sonuç olarak,

$$W(A+B) \supset Co(W(A) \cup W(B))$$

olacaktır.

Bu adımda $W(A \oplus B) \subset Co(W(A) \cup W(B))$ bağıntısının gerçekleştiğini

gösterelim. $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ vektörü ve $A \oplus B$ matrisi için

$$z^*(A \oplus B)z = x^*Ax + y^*By = x^*x \begin{bmatrix} x^*Ax \\ x^*x \end{bmatrix} + y^*y \begin{bmatrix} y^*By \\ y^*y \end{bmatrix}$$

elde edilir. $z^*z = x^*x + y^*y = 1$ eşitliğinin dikkate alınması ile,

$$\left. \begin{array}{l} z^*z = x^*x + y^*y = 1 \\ x^*x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y^*By}{y^*y} \in W(B)$$

ve

$$\left. \begin{array}{l} z^*z = x^*x + y^*y = 1 \\ y^*y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^*Ax}{x^*x} \in W(A)$$

bilgilerine ulaşılır. Böylece, $W(A \oplus B) \subset Co(W(A) \cup W(B))$ bağıntısı yazılır.

Sonuç olarak,

$$\left. \begin{array}{l} W(A \oplus B) \supset Co(W(A) \cup W(B)) \\ W(A \oplus B) \subset Co(W(A) \cup W(B)) \end{array} \right\} \Rightarrow W(A \oplus B) = Co(W(A) \cup W(B))$$

eşitliğine ulaşılır ve önermenin ispatı tamamlanır.

3.1.3.3. Değerler Cisminin Konveksliği

\mathbb{C} nin $S \subset \mathbb{C}$ alt kümesinin konveksliği için, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $s, t \in S$ olmak üzere $\alpha s + (1 - \alpha)t \in S$ olduğunun gösterilmesi gerektiği gerçeğinden, $W(A)$ nin konveksliği için de $0 \leq \alpha \leq 1$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $x^*x = 1 = y^*y$ olmak üzere

$$\alpha x^*Ax + (1 - \alpha)y^*Ay \in W(A)$$

olduğu gösterilmelidir. Bir başka ifade ile, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $x^*x = 1 = y^*y$ olmak üzere $\alpha x^*Ax + (1 - \alpha)y^*Ay \in W(A)$ özelliğindeki $W(A)$ kümesi konveks bir küme olarak isimlendirilir.

Bu kısımda $W(A)$ kümesinin konveksliğine, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisine üniter benzer olan bir başka deyişle U üniter matrisi için $B = U^*AU$ formunda ifade edilebilen B matrisinin 2×2 tipindeki sol üst esas alt matrisi $B(\{1, 1\})$ in değerler cisminin konveksliği ile karar verilmesine değinilecektir. Buradan,

“ $W(A)$ kümesinin konveksliği ile $W(B(\{1, 1\}))$ in konveksliği denktir.”

sonucuna ulaşılabacaktır.

Her $x, y \in \mathbb{C}^n$ vektör çifti ve U üniter matrisi için ilk iki değerinden sonraki değerleri sıfıra denk olan

$$x = Uv, \quad y = Uw$$

olacak şekilde $v, w \in \mathbb{C}^n$ vektörleri mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} \alpha x^* Ax + (1-\alpha) y^* Ay &= \alpha v^* U^* AUv + (1-\alpha) w^* U^* AUw \\ &= \alpha v^* U^* AUv + (1-\alpha) w^* U^* AUw \\ &= \alpha v^* Bv + (1-\alpha) w^* Bw \end{aligned}$$

yazılır ve böylece ξ ve η sırasıyla bileşenleri v ve w vektörlerinin ilk iki elemanından oluşan vektörler olmak üzere

$$\alpha x^* Ax + (1-\alpha) y^* Ay = \alpha \xi^* B(\{1, 2\}) \xi + (1-\alpha) \eta^* B(\{1, 2\}) \eta$$

elde edilir. O halde görülmektedir ki, B matrisine $B = U^* AU$ şeklinde üniter benzer olan A matrisinin $W(A)$ değerler cisminin konveksliği ile $W(B(\{1, 1\}))$ in konveksliği denktir.

Bu denklikten hareketle, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin $W(A)$ değerler cisminin konveksliğine $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $(0 < a, b \in \mathbb{R})$ formundaki matrislerin $W\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right)$ değerler cisimlerinin konveksliği üzerinden karar verilecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem ile, herhangi bir $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin üniter benzerlik durumuna değinilecektir.

Yardımcı Teorem 3.9 Her $A \in M_2(\mathbb{C})$ için, W^*AW nun iki ana köşegen elemanı eşit olacak şekilde $W \in M_2(\mathbb{C})$ üniteri matrisi vardır.

İspat. $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi ile $B = A - \frac{1}{2} iz(A)$ matrisini tanımlayalım. Bu tanımlamadan $izB = 0$ olacağı açıktır. Bir kompleks matrisin özdeğerlerinin toplamının, matrisin izine eşit olması gerekliliği prensibinden 2×2 tipinde ve $izB = 0$ özelliğine haiz B matrisinin

λ_1 ve λ_2 kompleks özdeğerleri için $izB = \lambda_1 + \lambda_2$ ya da $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ yazılır. Gösterimin kolaylığı açısından $\lambda_1 = \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\lambda_2 = -\alpha \in \mathbb{C}$ atamaları yapılsın.

$$W^*BW = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

eşitliğini sağlayan W üniteri matrisinin varlığını kanıtlayalım. W matrisini $W = [[w], [v]]$ şeklinde sütun vektörleri ile tanımlayalım. Açıktır ki, W matrisinin üniteri matris olabilmesi için w vektörü $w^*w = 1$ eşitliğini ve (3.20) denkleminin gerçekleşmesi için de $w^*Bw = 0$ eşitliğini sağlamalıdır. Bu şekilde w vektörünün varlığını araştıralım.

Durum 1. B matrisinin bir özdeğeri $\alpha = 0$ olsun. α özdeğerine karşılık gelen özvektör x_0 olmak üzere $Bx_0 = \alpha x_0$ eşitliği vardır. x_0 özvektörü için $x_0 \neq 0$ ya da $\|x_0\| \neq 0$ dir.

$x = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ değişken ataması ile $\|x\| = 1$ ($x^*x = 1$) olacaktır. $Bx_0 = \alpha x_0$, $\alpha = 0$ ve $x = \frac{x_0}{\|x_0\|}$

eşitliklerinin aynı anda dikkate alınması ile $x^*Bx = 0$ eşitliği elde edilir. Böylece x_0 özvektörünün varlığından $\|x\| = 1$ ve $x^*Bx = 0$ eşitliğini sağlayan x vektörünün varlığı bilgisine ulaşılır. $w = x$ kabulü ise istenen durum olacaktır.

Durum 2. B matrisinin bir özdeğeri $\alpha \neq 0$ olsun. α özdeğerine karşılık gelen özvektör x_0 ve $-\alpha$ özdeğerine karşılık gelen özvektör y_0 olmak üzere

$$Bx_0 = \alpha x_0 \text{ ve } By_0 = (-\alpha)y_0$$

eşitlikleri yazılır.

$$x = \frac{x_0}{\|x_0\|} : \alpha \text{ ya karşılık gelen normalleştirilmiş özvektör}$$

$$y = \frac{y_0}{\|y_0\|} : -\alpha \text{ ya karşılık gelen normalleştirilmiş özvektör}$$

vektörlerini tanımlayalım. x ve y vektörleri lineer bağımsızdır. Bir başka ifade ile, x ve y vektörleri ile oluşturulan $\beta_1 x + \beta_2 y = 0$ denklemi ancak ve ancak $\beta_1 = \beta_2 = 0$ olması ile sağlanır. x ve y lineer bağımsız ve $e^{i\theta} \neq 0$, ($\theta \in \mathbb{R}$) olması

$$w = e^{i\theta}x + y = e^{i\theta}x + (1)y, (\theta \in \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan w vektörünün sıfırdan farklı bir vektör olmasını garantiler. Bu şekilde tanımlanan w vektörünün $\|w\|=1$ ve $w^*Bw=0$ eşitliklerini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} w^*w &= (e^{i\theta} + y)^* (e^{i\theta}x + y) = (e^{-i\theta}x^* + y^*) (e^{i\theta}x + y) \\ &= \left[\overline{(e^{i\theta}x + y)} \right]^T \cdot [e^{i\theta}x + y] = \|e^{i\theta}x + y\|^2 = 1 \end{aligned}$$

ve θ , $e^{-i\theta}x^*y$ reel olacak şekilde seçilmesi durumunda $\text{Im}(e^{-i\theta}x^*y) = 0$ olacağı gerçeği ile

$$\begin{aligned} w^*Bw &= \alpha(-x^*x + e^{-i\theta}x^*y - e^{i\theta}xy^* + y^*y) \\ &= \alpha(-1 + e^{-i\theta}x^*y - e^{i\theta}xy^* + 1) \\ &= \alpha(e^{-i\theta}x^*y - e^{i\theta}xy^*) \\ &= 2i\alpha \text{Im}(e^{-i\theta}x^*y) = 0 \end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak $\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$ durumlarında da $\|w\|=1$ ve $w^*Bw=0$ eşitliklerini sağlayan w vektörlerinin varlığı kanıtlanmıştır.

Böylece, v sütun vektörünün niteliği belirtilmeden kısmen tanımlanan $W = \begin{bmatrix} [w], [v] \end{bmatrix}$ matrisinin tanımlanması, w vektörlerinin varlığından hareketle v sütun vektörünün niteliği belirtilerek tamamlanabilir. v sütun vektörü, w vektörüne dik birim uzunluklu bir vektör olsun. Bu adımda ise, tanımlanması tamamlanan $W = \begin{bmatrix} [w], [v] \end{bmatrix}$ matrisinin üniter matris olduğu ve bu üniter matris ile (3.20) denkleminin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
W^*W &= \begin{bmatrix} [w^*] \\ [v^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [w] & [v] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w^*w & w^*v \\ v^*w & v^*v \end{bmatrix}, \quad (w^*w=1, w \perp v \Rightarrow w^*v = v^*w = 0) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2
\end{aligned}$$

olup, W matrisi üniterdir ve

$$\begin{aligned}
W^*BW &= \begin{bmatrix} [w^*] \\ [v^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [w] & [v] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w^*b_1 & w^*b_2 \\ [*] & [*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [w_1] \\ [w_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [*] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w^*b_1w_1 + w^*b_2w_1 & [*] \\ [*] & -(w^*b_1w_1 + w^*b_2w_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & [c_{12}] \\ [c_{21}] & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde (3.20) denklemini sağlar. $B = A - \frac{1}{2}iz(A)$ ifadesi (3.20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix} &= W^* B W \\
&= W^* \left(A - \frac{1}{2} i z A I \right) W \\
&= W^* A W - \frac{1}{2} i z A (W^* W) \\
&= W^* A W + \left(-\frac{1}{2} i z A \right) I \\
&= W^* A W + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, k = -\frac{1}{2} i z A
\end{aligned}$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir ve buradan da $\begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix} = W^* A W$ eşitliğine ulaşılır.

Böylece herhangi $A \in M_2(\mathbb{C})$ için, $W^* A W$ matrisinin iki ana köşegen elemanı eşit olacak şekilde $W \in M_2(\mathbb{C})$ üniter matrisinin varlığı kanıtlanmış olup teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1 Herhangi $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi,

$$W^* A W = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}, k = -\frac{1}{2} i z A$$

şeklinde $D = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}$ matrisine üniter benzer ise, bu takdirde $W(A) = W(D) + (-k)$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. Herhangi $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi,

$$W^* A W = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}, k = -\frac{1}{2} i z A,$$

şeklinde $D = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}$ matrisine üniter benzer olsun. Değerler cisminin üniter benzerlik altında değişmemezliği ve değerler cisminin toplamsallık özelliği ile

$$\begin{aligned} W(A) &= W(W^*AW) \\ &= W\left(\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}\right) \\ &= W(D + (-k)I) \\ &= W(D) + (-k) \end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç ispatlanır.

Yardımcı Teorem 3.9 ile ulaşılan; herhangi $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin,

$$W^*AW = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}, k = -\frac{1}{2}iZA,$$

şeklinde bir üniter benzerliğe sahip olacağı ve Sonuç 3.1 ile ulaşılan;

$$W(A) = W\left(\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}\right) + (-k)$$

eşitliğinin aynı anda değerlendirilmesi ile, $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ formundaki matrislerin

$W\left(\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}\right)$ değerler cisimlerinin elde edilmelerinin önemi daha net anlaşılmaktadır.

$D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ formundaki matrislerin $W(D)$ değerler cismini elde etme

işlemini biraz daha basitleştirelim. $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ üniter matris için, D matrisinin

üniter benzer matrisi

$$\begin{aligned}
W^*DW &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ce^{i\theta} \\ de^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. c ve d kompleks sayılarının $c = |c|e^{i\theta_1}$, ($\theta_1 \in \mathbb{R}$) ve $d = |d|e^{i\theta_2}$, ($\theta_2 \in \mathbb{R}$) şeklinde yazılımları ve $\theta = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ alınması ile,

$$W^*DW = \begin{pmatrix} 0 & ce^{i\theta} \\ de^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} = e^{i\psi} \begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}, \psi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

formu elde edilecektir. Böylece, $D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ kompleks matrisin değerler cismi, köşegen elemanları negatif olmayan $\begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin değerler cismi üzerinde belirlenebilecektir. Daha açık olarak,

$$W(D) = W \left(e^{i\psi} \begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix} \right) = e^{i\psi} W \left(\begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix} \right)$$

eşitliğinden $W(D)$ ye ulaşılabilecektir. $D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ kompleks matrisinin değerler cisminin reel $\begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin değerler cismine indirgenmesi, değerler cisim kümesine ulaşırken takip edilen incelemeyi oldukça kolay kılacaktır.

Aşağıdaki teorem, $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$ formundaki reel matrisin sayısal

görüntüsü olan geometrik şekli belirleyen bir teoremdir.

Teorem 3.10 $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, 0 \leq a, b \in \mathbb{R}$ formundaki bir matrisin sayısal görüntüsü xoy -kompleks düzlemi üzerinde merkezi orjinde, sanal eksen üzerinde $|a-b|$ uzunluklu küçük eksene, reel eksen üzerinde $|a+b|$ uzunluklu büyük eksene sahip ve odakları $\pm\sqrt{ab}$ olan elips ve onun iç bölgesidir.

İspat. $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, a, b \geq 0$, matrisinde geneli bozmaksızın \mathbb{R} deki sıralamadan

$0 \leq b \leq a$ yazılır. $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ vektörlerinin bileşenlerinin kompleks skalerler olması ile

$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}; \theta_1 \in \mathbb{R}$ ve $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}; \theta_2 \in \mathbb{R}$ yazılır. Bu yazım ile,

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} |z_1|e^{i\theta_1} \\ |z_2|e^{i\theta_2} \end{pmatrix} = e^{i\theta_1} \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2|e^{i(\theta_2-\theta_1)} \end{pmatrix} \\ &= e^{i\theta_1} \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2|e^{i\theta} \end{pmatrix}, \theta = \theta_2 - \theta_1 \\ &= e^{i\theta_1} \cdot w, w = \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2|e^{i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliği kullanarak, $W(A) = \{z^*Az : z^*z = 1, z \in \mathbb{C}^2\}$ değerler cisminin elemanlarını belirleyelim. z^*Az formundaki elemanlarla ifade edilen $W(A)$ kümesi

$$z^*Az = (e^{i\theta_1}w)^* A(e^{i\theta_1}w) = w^*Aw$$

eşitliği ile w^*Aw formunda

$$W(A) = \left\{ w^*Aw : w = \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2|e^{i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde ifade edilecektir. $w = \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2| e^{i\theta} \end{pmatrix}$, ($\theta \in \mathbb{R}$) vektörünün bileşenlerini, $w^* w = 1$

özelliğini dikkate alarak karakterize edelim. $w^* w = 1$ özelliği ile

$$\left(|z_1| |z_2| e^{-i\theta} \right) \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2| e^{i\theta} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

yazılır. Ulaşılan $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ eşitliğinden, $|z_1|$ ve $|z_2|$ değişkenleri için $0 \leq |z_1|, |z_2| \leq 1$ sınırı hemen yazılır. Gösterimin kolaylığı açısından $|z_1| = t$ değişken ataması yapalım.

Böylece $|z_2|$ değişkeni de $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ eşitliğinden $|z_2| = (1-t^2)^{1/2}$ ile ifade edilecektir.

Böylece w vektörü $w = \begin{pmatrix} t \\ (1-t^2)^{1/2} \cdot e^{i\theta} \end{pmatrix}$ olacaktır. O halde, $W(A)$ nın elemanları

$$\begin{aligned} w^* A w &= \begin{pmatrix} t & (1-t^2)^{1/2} e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ (1-t^2)^{1/2} e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b(1-t^2)^{1/2} e^{-i\theta} & ta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ (1-t^2)^{1/2} \cdot e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= t(1-t^2)^{1/2} b e^{-i\theta} + t(1-t^2)^{1/2} a e^{i\theta} \\ &= t(1-t^2)^{1/2} [(a+b) \cos \theta + i(a-b) \sin \theta] \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$W(A) = \left\{ t(1-t^2)^{1/2} [(a+b) \cos \theta + i(a-b) \sin \theta] : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq b \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

dir. Cebirsel olarak bulunan A nın değerler cisim kümesi $W(A)$ nın kompleks düzlemde hangi geometrik şeklin temsili olduğunu belirleyelim.

Bunun için ilk önce, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için $u = (a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta$ kompleks sayılarını ya da bunların sıralı ikili temsillerini $u = ((a+b)\cos\theta, (a-b)\sin\theta)$ dikkate alalım.

$$\begin{aligned} x &= (a+b)\cos\theta \\ y &= (a-b)\sin\theta \end{aligned} \quad , 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.21)$$

değişken atamaları ile, $u = (x, y)$ noktalarının kompleks düzlemde oluşturduğu geometrik şekil bir elips olacaktır. (3.21) denklemi kompleks düzlemdeki bir elipsin parametrik denklemi olup, (3.21) denklemi ile tanımlanan $u = (x, y)$ ikilileri

$$\varepsilon: \frac{(x-0)^2}{(a+b)^2} + \frac{(y-0)^2}{(a-b)^2} = 1 \quad (3.22)$$

denklemini sağlamaktadırlar. (3.22) denkleminde yorumlanabilir ki, denklemi sağlayan $u = (x, y)$ noktaları kompleks düzlemde merkezi orjinde, sanal eksen üzerinde $2|a-b|$ uzunluklu küçük eksene, reel eksen üzerinde $2|a+b|$ uzunluklu büyük eksene sahip bir elips oluştururlar. Elips kompleks düzlemde olduğundan çoğu durumda bu elipse dejenere elips denilmektedir.

$W(A)$ nın elemanları $t(1-t^2)^{1/2}[(a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta]$ formunda ya da $t(1-t^2)^{1/2} \cdot u$ formunda elemanlar olduğuna göre, $f(t) = t(1-t^2)^{1/2}$, $0 \leq t \leq 1$, tek değişkenli fonksiyonunun değişim aralığına (değer aralığına) göre $u = (x, y)$ noktalarının kompleks düzlemde oluşturduğu dejenere ε elipsinin büzüşmesi incelenmelidir.

$f(t) = t(1-t^2)^{1/2}$, $0 \leq t \leq 1$, fonksiyonunun değişim aralığını inceleyelim. Problem artık, $f: [0,1] \rightarrow ?$, $f(t) = t(1-t^2)^{1/2}$ fonksiyonunun değer aralığını belirlemektir. Bu tek değişkenli fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerini bulma problemi olup, gerekli işlemler ile,

i. $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ iken, $f(t)$ artan fonksiyon olup $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ dir.

- ii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$ iken, $f(t)$ azalan fonksiyon olup $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ dir.

sonuçlarına ulaşılır. O halde, $W(A)$ nın $f(t)[(a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta]$ elemanları kompleks düzlemde merkezi orjinde, sanal eksen üzerinde $|a-b|$ uzunluklu küçük eksene, reel eksen üzerinde $|a+b|$ uzunluklu büyük eksene sahip ve odakları $\pm\sqrt{ab}$ olan elips ve iç bölgesini oluşturular.

3.2. YÖNTEM

3.2.1. Bazı Özel Tanımlı Üç Bant ve Beş Bant Matrislerin Değerler Cismi

Bu kısımda bazı özel tanımlı üç bant ve beş bant matrislerinin değerler cisimleri ve sayısal görüntüleri elde edilecektir. Bu bölümün içeriği; genel olarak üç ve beş bant matris kavramalarının verilmesi, bu kavramların örneklendirilmesi, “Niçin üç ve beş bant matrislerin değerler cismi?” sorusuna yanıtlar verilmesi, özgün olarak elde edilen bulgulara kaynak teşkil eden literatür bilgilerine değinilmesi ve çalışmanın özgün sonuçlarının sunulmaları şeklinde olacaktır.

Tanım 3.15 Elemanları kapalı formda, $|i-j| > 1$ için $a_{ij} = 0, (1 \leq i, j \leq n)$ ile tanımlanan ya da açık bir şekilde

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & d_2 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & u_3 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-2} & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{n-1} & d_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ile verilen $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}), n \geq 2$, karesel kompleks matrisine bir üç bant matrisi denir.

Örnek 3.29 $A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 4×4 tipinde reel üç bant matrise örnektir.

Tanım 3.16 Elemanları kapalı formda, $|i-j| > 2$ için $a_{ij} = 0, (1 \leq i, j \leq n)$ ile tanımlanan ya da açık bir şekilde

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & \ddots & & \vdots \\ a_1 & b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & e_{n-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{n-2} & e_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ile verilen $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}), n \geq 3$, karesel kompleks matrise bir beş bant matrisi denir.

Örnek 3.30 $A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 2 & 1 & 1+i & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1+2i & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1+2i \end{bmatrix}, i^2 = -1$, matrisi 7×7 tipinde

kompleks beş bant matrise örnektir.

Kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde ve de matematiksel biyolojide modellenen dinamik sistemlerin analizinde üç bant ve beş bant matrislere çok sık rastlanması ve bu matrislerin özdeğerlerinin bulunduğu bölgelere göre modelin (problemin) yorumlanması, “Niçin üç ve beş bant matrislerin değerler cismi?” sorusu için bir yanıt niteliğindedir.

Aşağıda verilen teorem, $A = \begin{bmatrix} a & c \\ -\bar{c} & b \end{bmatrix}, (a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C})$ formundaki tüm kompleks matrislerin sayısal görüntülerinin bir elips ve iç bölgesi olduğunu vurgulamaktadır.

Yardımcı Teorem 3.11 $A = \begin{bmatrix} a & c \\ -\bar{c} & b \end{bmatrix}, (a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C})$ olsun. $W(A)$, merkezi $(a+b)/2$, yatay eksen uzunluğu $|a-b|$ ve dikey eksen uzunluğu $2|c|$ olan bir eliptik disk (Chien and Huang, 2001).

Aşağıdaki teorem, $A \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks matrislerin değerler cisimlerinin, 2×2 tipinde kompleks matrislerin değerler cisimleri üzerinden elde edilebilmesini ifade eden bir teoremdir.

Teorem 3.12 $A \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. S yi \mathbb{C}^n nin sıfırdan farklı altuzayı olarak seçelim.

$$W(A) = \cup_{x,y} W(A_{x,y}),$$

olmak üzere x ve y sırasıyla S ve S^\perp nin birim vektörleridir öyle ki;

$$A_{x,y} = \begin{pmatrix} x^* Ax & x^* Ay \\ y^* Ax & y^* Ay \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Chien, 1996).

Teorem 3.13 $D \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks üç bant matrisi,

$$D = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{c} & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{c} & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{c} & \ddots \end{bmatrix}, (a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}) \quad (3.23)$$

ile tanımlansın. Bu takdirde $W(D)$; merkezi $(a+b)/2$, yatay eksen uzunluğu $|a-b|$, dikey eksen uzunluğu $4|c|\cos\frac{\pi}{n+1}$ olan bir eliptik diskdir.

İspat. $D \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin değerler cismine Teorem 3.12 den faydalanarak ulaşılabacaktır. e_i , $i=1,2,\dots,n$, n boyutlu i -inci birim koordinat vektör (e_i nin i -inci elemanı 1 ve geri kalan elemanları 0) olsun. Ayrıca S , $\{e_1, e_3, \dots\}$ tarafından gerilen \mathbb{C}^n nin altuzayı olsun. Böylece S^\perp , $\{e_2, e_4, \dots\}$ tarafından gerilen \mathbb{C}^n nin bir diğer altuzayıdır. x ve y sırasıyla S ve S^\perp nin birim vektörleri olsunlar. Buradan, D matrisinden üretilen $D_{x,y}$ matrisleri

$$D_{x,y} = \begin{pmatrix} x^*Dx & x^*Dy \\ y^*Dx & y^*Dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c(\bar{x}_1y_2 - \bar{x}_3y_2 + \bar{x}_3y_4 - \bar{x}_5y_4 + \dots) \\ -\bar{c}(-\bar{x}_1y_2 + \bar{x}_3y_2 - \bar{x}_3y_4 + \bar{x}_5y_4 - \dots) & b \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Yardımcı Teorem 3.11 den $D_{x,y}$ matrislerinin sayısal görüntüleri merkezi $(a+b)/2$, yatay eksen uzunluğu $|a-b|$ ve dikey eksen uzunluğu $2|\bar{x}_1y_2 - \bar{x}_3y_2 + \bar{x}_3y_4 - \bar{x}_5y_4 + \dots|$ olan bir eliptik disk olacaktır. $D_{x,y}$ matrislerinin $W(D_{x,y})$ değerler cisimlerinden D matrisinin $W(D)$ değerler cismine $W(D) = \bigcup_{x,y} W(D_{x,y})$ eşitliği ile ulaşabilmek için,

$$\max|\bar{x}_1y_2 - \bar{x}_3y_2 + \bar{x}_3y_4 - \bar{x}_5y_4 + \dots|$$

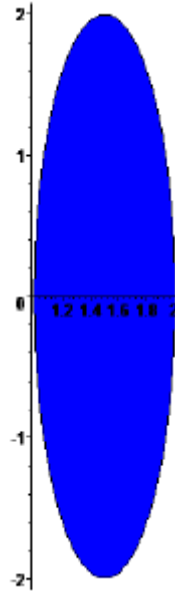
değeri

$$\max|\bar{x}_1y_2 - \bar{x}_3y_2 + \bar{x}_3y_4 - \bar{x}_5y_4 + \dots| = 2|c|\cos\frac{\pi}{n+1}$$

şeklinde bulunur ki, teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 3.31 Teorem 3.10 a göre $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ -1-i & 2 & 1-i \\ 0 & -1-i & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin $W(A_{11})$ sayisal

görüntüsü, $M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ merkezli, yatay eksen uzunluğu $1br$, dikey eksen uzunluğu $4br$ olan bir eliptik disk. Maple 12 de yapılan hesaplamalar da bunu doğrulamakta ve



Şekil 32. A_{11} matrisinin sayisal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

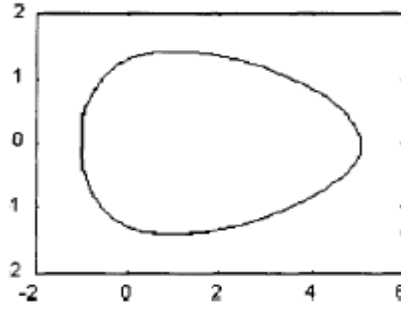
şeklindeki görüntü elde edilmektedir.

Aşağıdaki sonuç, esas köşegen üzerindeki elemanların diziliminin önemini vurgulamaktadır.

Sonuç 3.2 (3.23) de tanımlanan D matrisinin esas köşegen elemanları $ababab...$ şeklinde değil de, genel olarak $a_1a_2a_3a_4...$ şeklinde devam ederse her zaman $W(D)$ bir eliptik disk değildir.

Örnek 3.32 Sonuç 12 ye göre $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin $W(A_{12})$ sayisal görüntüsü

bir eliptik disk değildir. Maple 12 de yapılan hesaplamalarla sayisal görüntü



Şekil 33. A_{12} matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklindedir.

Çalışmamızın ikinci aşamasında ise, (3.23) de tanımlanan D matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanların kompleks olması durumunda

$$E = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{c} & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{c} & a & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{c} & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n}, a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \quad (3.24)$$

matrisinin sayısal görüntüsünü elde ettik.

(3.24) de tanımlanan E matrisinin sayısal görüntüsü için vereceğimiz teoreme geçmeden önce, genel olarak $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ matrislerinin sayısal görüntüleri hakkında bilgi veren ve literatürde önemli bir yeri olan aşağıdaki teoremi sunalım.

Teorem 3.14 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin sayısal görüntüsü odakları λ ve μ özdeğerleri olan yatay eksen uzunluğu $(\|A\|^2 - 2\operatorname{Re} \lambda \bar{\mu})^{1/2}$, dikey eksen uzunluğu $(\|A\|^2 - |\lambda|^2 - |\mu|^2)^{1/2}$ olan bir eliptik diskdir.

(3.24) de tanımlanan E matrisinin sayısal görüntüsü için verdiğimiz aşağıdaki teorem, $W(E)$ 'ün yine bir eliptik disk olduğunu ve de bu eliptik diskin merkezinin

matrisin esas köşegenini oluşturan a ve b değerlerine bağlı olduğunu, yatay ve dikey eksen uzunluklarının ise sadece a, b, c ve n ye bağlı olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.15 (3.24) de tanımlanan E matrisinin sayısal görüntüsü, $\frac{a+b}{2}$ merkezli

$$\left(4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 + \left| 4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

yatay eksen uzunluklu ve

$$\sqrt{2} \left(4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 - \left| 4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

dikey eksen uzunluklu bir eliptik diskidir.

İspat.

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= \begin{pmatrix} x^*Ax & x^*Ay \\ y^*Ax & y^*Ay \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & cw \\ -\bar{c}\bar{w} & b \end{pmatrix}; w = \bar{x}_1 y_2 - \bar{x}_3 y_2 + \dots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$W(E) = \bigcup_{x,y} (W(E_{x,y}))$$

dir. $E_{x,y}$,

$$E_{x,y} = \begin{pmatrix} a & \rho \\ -\bar{\rho} & b \end{pmatrix}, \rho = cw$$

dir. $E_{x,y} = B$ olmak üzere, B 'nin özdeğerleri,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a-\lambda & \rho \\ -\bar{\rho} & b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(b-\lambda) + |\rho|^2 \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab + |\rho|^2 \end{aligned}$$

denkleminin kökleri olup,

$$\lambda = \frac{\frac{a+b}{2} - \left((a+b)^2 - 4ab - 4|\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\mu = \frac{\frac{a+b}{2} + \left((a+b)^2 - 4ab - 4|\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

dir. B matrisinin sayısal görüntüsü olan elipsin odakları λ ve μ ise, elipsin merkezi $\frac{\lambda + \mu}{2}$ dir. O halde, B matrisinin sayısal görüntüsü $\frac{\lambda + \mu}{2} = \frac{a+b}{2}$ merkezli bir elips olacaktır. Şimdi ise, eliptik diskin yatay eksen uzunluğunu hesap edelim.

$$\|B\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |\rho|^2 + |\rho|^2; |-\bar{\rho}|^2 = |\rho|^2$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + 2|\rho|^2$$

ve

$$\bar{\mu} = \frac{\overline{a+b}}{2} + \frac{1}{2} \overline{\left((a+b)^2 - 4ab - 4|\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

dir.

$$(a+b)^2 - 4ab - 4|\rho|^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab - 4|\rho|^2$$

$$= (a-b)^2 - 4|\rho|^2$$

özdeşliği ve her $z = a + ib$ kompleks sayısının trigonometrik formda, z nin esas argümenti θ olmak üzere $z = |z|e^{i\theta}$, ($z = (|z|, \text{cis}\theta)$) şeklinde yazılabileceği bilgisi ile, λ ve μ değerleri

$$\mu = \frac{a+b}{2} + \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}$$

ve

$$\lambda = \frac{a+b}{2} - \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}$$

formunda yazılır. Buradan μ değerinin eşleniği,

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} + \left(\left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}$$

şeklinde olacaktır. λ ve $\bar{\mu}$ değerlerinin çarpımı,

$$\begin{aligned}\lambda\bar{\mu} &= \left\{ \frac{a+b}{2} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} \right\} \cdot \left\{ \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} \right\} \\ &= \frac{a \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b}}{4} + \frac{a+b}{2} \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} \\ &\quad - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ki, böylece $\lambda\bar{\mu}$ çarpımının reel kısmı

$$\operatorname{Re}(\lambda\bar{\mu}) = \frac{a \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b}}{4} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|$$

şeklinde olacaktır. Buradan $\|B\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\mu})$ ifadesi

$$\begin{aligned}\|B\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\mu}) &= |a|^2 + |b|^2 + 2|\rho|^2 - \frac{|a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + b\bar{a}}{2} + 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - b\bar{a}}{2} + 2|\rho|^2 + 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| \\ &= \frac{a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} - a \cdot \bar{b} - b \cdot \bar{a}}{2} + 2|\rho|^2 + 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| \\ &= \frac{(a-b)(\overline{a-b})}{2} + 2|\rho|^2 + 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| \\ &= \frac{|a-b|^2}{2} + 2|\rho|^2 + 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $(\|B\|^2 - 2\operatorname{Re} \lambda\bar{\mu})^{\frac{1}{2}}$ ifadesi,

$$\left(\|B\|^2 - 2\operatorname{Re} \lambda\bar{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left\{ \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 + |\rho|^2 + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

olacaktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
|\rho| &= |cw| \\
&= |c||w| \\
&= |c||x_1y_2 - x_3y_2 - \dots| = 2|c| \cdot \cos \frac{\pi}{n+1}
\end{aligned}$$

eşitliği (3.25) de yerine yazılırsa, $W(A)$ nın kompleks düzleme yansıması konumundaki A matrisinin sayısal bölgesi olan eliptik diskin yatay eksen uzunluğunun hesabını veren formül

$$Y.U = \sqrt{2} \left[\left| \frac{a-b}{2} \right|^2 + 4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - 4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} \right| \right]$$

şeklinde olacaktır. A matrisinin sayısal bölgesi olan eliptik diskin dikey eksen uzunluğunun hesabını veren formülü elde edelim. Formülün elde edileceği $(\|B\|^2 - |\lambda|^2 - |\mu|^2)^{\frac{1}{2}}$ ifadesinde, $\|B\|^2$ değeri hesaplanmıştı. O halde, daha önce hesaplanmayan $|\lambda|^2$ ve $|\mu|^2$ değerlerini hesap edelim.

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 &= \lambda \cdot \bar{\lambda} \\
&= \left\{ \frac{a+b}{2} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\theta} \right\} \left\{ \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} \right\} \\
&= \left\{ \frac{|a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + b\bar{a}}{4} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\theta} \cdot \frac{a+b}{2} \right. \\
&\quad \left. - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} \cdot \frac{a+b}{2} \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|\mu|^2 &= \mu \cdot \bar{\mu} \\
&= \left\{ \frac{a+b}{2} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\theta} \right\} \left\{ \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} \right\} \\
&= \frac{|a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + b\bar{a}}{4} + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\theta} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
&\quad + \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-i\theta} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right)
\end{aligned}$$

dir ve böylece $|\lambda|^2 + |\mu|^2$ değeri

$$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = \frac{|a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + b\bar{a}}{2} + 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|$$

şeklinde hesaplanır. Buradan,

$$\|B\|^2 - (|\lambda|^2 + |\mu|^2) = \frac{|a-b|^2 + 2|\rho|^2}{2} - 2 \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right|$$

ve

$$\left(\|B\|^2 - (|\lambda|^2 + |\mu|^2) \right)^{1/2} = \sqrt{2} \left(\left(\frac{|a-b|^2}{2} + |\rho|^2 - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - |\rho|^2 \right| \right)^{1/2} \right) \quad (3.26)$$

eşitliklerine ulaşılır. $W(E) = \cup W(B)$ eşitliği gereği, $\max_{x,y} |\rho|$ değerine ihtiyaç duyulmaktadır. (3.26) deki $|\rho|$ değerinin en büyük değeri

$$\begin{aligned} \max_{x,y} |\rho| &= \max_{x,y} |cw| \\ &= |c| \max_{x,y} |w| \\ &= |c| 2 \cos \frac{\pi}{n+1} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece A nın sayısal görüntüsü olan eliptik diskin dikey eksen uzunluğu,

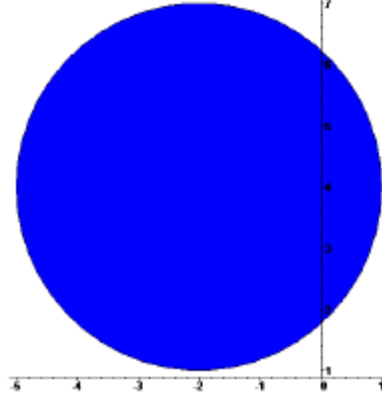
$$D.U = \sqrt{2} \left[\left(\frac{|a-b|}{2} \right)^2 + 4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} - \left| \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - 4|c|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} \right| \right]^{1/2}$$

eşitliği ile verilir.

Örnek 3.33 Teorem 3.15 e göre

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2+2i & 1+i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1+i\sqrt{2} & -4+2i & 1+i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1+i\sqrt{2} & 2+2i & 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1+i\sqrt{2} & -4+2i & 1+i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1+i\sqrt{2} & 2+2i \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

matrisinin sayısal görüntüsünün, kompleks düzlemde merkezi $M(-2,4)$, yatay eksen uzunluğu 6 br, dikey eksen uzunluğu 6 br olan eliptik disk olduğu beklenir. Maple 12 kullanılarak yapılan hesaplamalar sonucu sayısal görüntünün



Şekil 34. A_{13} matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

şeklinde olduğu görülmekte ve Teorem 3.15 doğrulanmaktadır.

Çalışmamızın son aşamasında ise,

$$F = \begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n} \in M_n \quad (3.27)$$

ile tanımlanan beş bant matrisin değerler cismi için bazı sonuçlar verdik.

Teorem 3.16 $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{C}$ olmak üzere, F matrisinin değerler cismi için

$$W(F) = \left\{ z_1 + z_2 \in \mathbb{C} : \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} \leq \operatorname{Re} z_1 \leq \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}; \right. \\ \left. |\operatorname{Im} z_1| \leq 4|k| \cos \frac{\pi}{n+1}; z_2 = 2ki \sin \theta \cos \frac{\pi}{n+1}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

dir.

İspat. F matrisinin

$$\begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & 0 & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde iki matrisin toplamı şeklinde yazılması ve Teorem 3.13 ün uygulanması ile teoremin ispatı açıktır.

Not. Teorem 3.14'de verilen üst küme, $W(F)$ için en küçük üst kümedir.

Teorem 3.17 $a, b, k \in \mathbb{C}$

$$\delta_1 = \sqrt{2} \left(4|k|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 + \left| 4|k|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} - \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right| \right)^{1/2}$$

ve

$$\delta_2 = \sqrt{2} \left(4|k|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 - \left| 4|k|^2 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} - \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right| \right)^{1/2}$$

olmak üzere, F matrisinin değerler cismi için

$$W(F) \subseteq \left\{ z_1 + z_2 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{\delta_1}{2} \leq \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{\delta_1}{2}; \right. \\ \left. \operatorname{Im} \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{\delta_2}{2} \leq \operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{\delta_2}{2}, z_2 = 2ki \sin \theta \cos \frac{\pi}{n+1}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

dir.

İspat. F matrisinin, aşağıdaki gibi iki matrisin toplamı şeklinde yazılması, Teorem 3.13 ve

$$W(A+B) \subseteq W(A) + W(B)$$

bağıntısının uygulanması ile

$$\begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & 0 & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{k} & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

teorem ispatlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

$a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ ve ayrıca $a, b, c \in \mathbb{C}$ için

$$T = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{c} & b & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\bar{c} & a & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\bar{c} & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklindeki üç bant matrislerin ve $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{C}$ ve ayrıca $a, b, k \in \mathbb{C}$ için

$$P = \begin{bmatrix} a & k & k & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{k} & b & k & k & \ddots & \vdots \\ -\bar{k} & -\bar{k} & a & k & \ddots & 0 \\ 0 & -\bar{k} & \ddots & b & \ddots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \dots & 0 & -\bar{k} & -\bar{k} & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklindeki beş bant matrislerin değerler cisimlerinin ve değerler cisimlerinin kompleks düzleme yansımaları olan sayısal görüntülerinin (veya sayısal bölgelerinin) belirlenmesi üzerine elde edilen sonuçlar araştırma bulgularımızdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde, (4.1) ile verilen T üç bant matrisinin değerler cisminin (veya sayısal bölgesinin) belirlenmesini sağlayan formüller içeren sonuçlar sunulmuş, böylece $M_n(\mathbb{C})$ T matrisi biçimindeki tüm üç bant matrislerin değerler cisminin (veya sayısal bölgesinin) belirlenmesi sağlanmıştır.

$M_n(\mathbb{C})$ de en genel kompleks üç bant matris formu olarak bilinen

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & d_2 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & u_3 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-2} & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

matrisin değerler cisminin (veya sayısal bölgesinin) belirlenmesi üzerine çalışma yapılması önerilebilir.

(4.2) ile verilen P beş bant matrisin değerler cismi (veya sayısal bölgesi), tam olarak belirlenememiş fakat bu matrisin değerler cismini kapsayan en küçük kümeye ulaşılmıştır.

P matrisinin değerler cisminin (veya sayısal bölgesinin) tam olarak belirlenmesi üzerine çalışma yapılması önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Anton, H. and Rornes, C., 1994. **Elementary linear algebra applications version**, ISBN 0-471-58741-9 Von Hoffmann Press Inc., U.S.A.
- Bonsall, F. F. and Duncan, J., 1971. **Numerical ranges, Cilt. I**, Cambridge University Press.
- Bonsall, F. F. and Duncan, J., 1973. **Numerical ranges, Cilt. II**, Cambridge University Press.
- Bonsall, F. F. and Duncan, J., 1980. **Studies in functional analysis - numerical ranges**, Studies in Mathematics Vol. 21, MAA.
- Calbeck, W., 2008. Elliptic numerical ranges of 3×3 companion matrices, **Linear Algebra and Its Applications**, 428, 11(12): 2715-2722.
- Chien, M. T., 1996. On the numerical range of tridiagonal operators, **Linear Algebra and Its Applications**, 246: 203-214
- Chien, M. T. and Huang, J. M., 2001. Numerical range of a continuant matrix, **Applied Mathematics Letters**, 14(2): 213-216.
- Chien, N. T. and Nakazato, H., 2001. The c-numerical range of tridiagonal matrices, **Linear Algebra and Its Applications**, 335, 1(3): 55-61.
- Conway, J. B., 1990. **A course in functional analysis, 2nd ed.**, Springer-Verlag, New York.
- Eiermann, M., 1993. Fields of values and iterative methods, **Linear Algebra and Its Applications**, 180: 167-197.
- Gau, H. L., 2010. Numerical ranges of reducible companion matrices, **Linear Algebra and Its Applications**, 432(5): 1310-1321.
- Gau, H. L. and Wu, P. Y., 2007. Numerical ranges of companion matrices, **Linear Algebra and Its Applications**, 421, 2(3): 202-218
- Guo, H. B., Liu, X. G. and Wang, W. G., 2009. The block numerical range of matrix polynomials, **Applied Mathematics and Computation**, 211(2): 265-283
- Gustafson, K. E. and Rao, D. K. M., 1997. **Numerical range: the field of values of linear operators and matrices**, Springer-Verlag, New York.
- Halmos, P. R., 1982. **A Hilbert space problem book, Second Ed.**, Springer-Verlag, New York.

- Horn, R. A. and Johnson, C. R., 1991. **Topics in matrix analysis**, Cambridge University Press, New York.
- Istratescu, B., 1982. **Introduction to linear operator theory**, Marcel Dekker, New York.
- Kişisel, A.Ö. ve Nesin, A., 2005. İkinci dereceden eğrilerin cebirsel analizi, **Matematik Dünyası Dergisi**, 14(2): 19-22
- Kişisel, A.Ö. ve Nesin, A., 2005. Parabol, elips ve hiperbol, **Matematik Dünyası Dergisi**, 14(2): 23-28
- Li, C. K., Tam, B. S. and Wu P. Y., 2002. The numerical range of a nonnegative matrix, **Linear Algebra and Its Applications**, 350, 1(3): 1-23.
- Sabuncuoğlu, A., 2008. **Lineer Cebir**, ISBN 978-975-591-171-7, Nobel Yayın Dağıtım A.Ş., Ankara.
- Spijker, M. N., 1993. Numerical ranges and stability estimates, **Applied Numerical Mathematics**, 13, 1(3): 241-249.
- Sun J. G. and Stewart G.W., 1990. **Matrix Perturbation Theory**, Academic Press, New York.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca değerli görüş ve fikirleriyle bana yol gösteren, ileri doğru attığım bu adımda çok büyük emeği olan sayın danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK'e sonsuz teşekkür ederim.

Güvenini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen bölüm başkanım Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ'a, bu süreçteki olumlu yaklaşımlarından ve desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU'na , Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN'e, Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU'na ve bölümümüzün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca sevgisi ve güveniyle bana güç veren ve her zaman yanımda olan değerli eşim Selim GÜNDÜZ'e ve beni bugünlere getiren aileme teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adana'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adana'da tamamladım. 2004-2008 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans eğitimimi tamamladım. 2009 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım. Aynı yıl yüksek lisans eğitimine başladım. Halen aynı fakültede araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

EKLER

Herhangi kompleks matrislerin sayısal görüntülerinin MAPLE ekran görüntülerini sunan MAPLE algoritmik yazılımı (procedure) aşağıda verilmektedir.

> **restart;**

> **with(LinearAlgebra):**

> **with(plots):**

> **W:=proc(M::'Matrix'(square))**

#DECLARE LOCAL VARIABLES

local n,p,r,T,DM,R,i,j,E,H,G,B,k,J,V,W,points;

#PROVIDE FOR OPTIONAL ARGUMENTS

**#n IS NUMBER OF BOUNDARY POINTS PLOTTED (DEFAULT VALUE
50)**

#PLOT OPTIONS START WITH args[p]

if nargs > 1 then

if type(args[2],posint) then

n:=args[2];

p:=3;

else

n:=50;

if (type(args[2], equation)) then

p:=2;

else

**WARNING("Second argument should either be a positive integer or a plot
option");**

p:=3;

fi;

fi;

else

n:=50;

fi;

#FORCE MAPLE TO USE FLOATS

M[1,1]:=evalf(M[1,1]);

#NEXT LOOP IMPLEMENTS ALGORITHM DESCRIBED IN SECTION

II

for r from 0 to n do

T:=MatrixAdd((evalf(exp(2*Pi*I*r/n))*M),

(HermitianTranspose(evalf(exp(2*Pi*I*r/n))*M)))/2;

DM:=RowDimension(T);

R:=Matrix(1..DM,1..DM,shape=hermitian,datatype=complex(float));

for i from 1 to DM do

#T[i,i] SHOULD BE REAL

#GUARD AGAINST ROUNDING ERRORS BY TAKING REAL PART

R[i,i]:=Re(T[i,i]);

od;

for i from 1 to DM do

for j from i+1 to DM do

R[i,j]:=T[i,j];

od;

od;

E:=Eigenvectors(R)[1]; #R IS HERMITIAN SO E-VALUES REAL

H:=Eigenvectors(R)[2];

G:=Dimension(E);

B:=max(seq(E[k], k=1..G));

#GET INDEX J FOR MAX E-VALUE B

for k from 1 to G do

if testfloat(E[k], B, 5)=true then

J:=k;

```
fi;  
od;  
  
#V IS E-VECTOR FOR MAX E-VALUE B  
V:=Column(H,J);  
  
#W[r] IS BOUNDARY POINT CORRESPONDING TO r-TH ROTATE  
W[r]:=evalf(Multiply(HermitianTranspose(V), Multiply(M,V)));  
od;  
  
#RETURN PLOT OF BOUNDARY POINTS, CONNECT=TRUE  
points:= [seq([Re(W[r]), Im(W[r])], r=0..n)];  
if nargs>1 then  
RETURN(display(pointplot(points, connect=true, seq(args[k],k=p..nargs))));  
else  
RETURN(display(pointplot(points, connect=true)));  
fi;  
end proc;
```