MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAUSDORFF UZAYLARIN H-KAPALI ve MİNİMAL HAUSDORFF GENİŞLEMELERİ

MUSA ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY
Haziran - 2011

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAUSDORFF UZAYLARIN H-KAPALI ve MİNİMAL HAUSDORFF GENİŞLEMELERİ

MUSA ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya / HATAY
Haziran - 2011

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAUSDORFF UZAYLARIN H-KAPALI ve MİNİMAL HAUSDORFF GENİŞLEMELERİ

MUSA ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yrd. Doç. Dr. Fevzi BİLGİN danışmanlığında hazırlanan bu tez 24 / 06 / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Fevzi BİLGİN	Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ	Yrd. Doç.Dr. Turgut YELOĞLU
Başkan	Üye	Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalı’nda hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Necat AĞCA
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada kompakt uzayların genellemesi olan H-kapalı ve minimal Hausdorff uzayları tanıtılacaktır. Tanım gereği bu uzaylar Hausdorff uzaylardır. Bilindiği gibi kompakt Hausdorff uzaylar tamamen regülerdir. O halde bir Hausdorff uzayın kompakt Hausdorff olabilmesi için uzayın kendisinin tamamen regüler olması gerekir. Bu çalışmada sadece Hausdorff olan bir uzayı yoğun bir biçimde içeren H-kapalı ve minimal Hausdorff uzayların nasıl inşa edildiğini gösteren bir derleme verilecektir.

2011, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hausdorff uzayları, kompakt uzayları,H-kapalı, minimal hausdorff uzayları, düzenli uzaylar.

ABSTRACT

In this study, We will explain H-closed and minimal Hausdorff spaces which are generalization of compact spaces. By definition these spaces, Hausdorff spaces. As a such that compact hausdorff spaces are completely regüler. Because of this definition being a hausdorff compact spaces depends on condition of being completely regüler
In this study, We review how to construct H-closed and minimal Hausdorff spaces intense include only Hausdorff space.

2011, 66 pages

Key Words: Hausdorff spaces, compact spaces, H-closed, minimal hausdorff spaces, regüler spaces.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\subset$	: Alt küme sembolü
$\bar{A}$ veya A^{-} veya $cl[A]$	: Bir A kümesinin kapanışı
$cl_X A$	: Bir A kümesinin X'e göre kapanışı
A^0	: Bir A kümesinin içi
A^{-^0}	: Bir A kümesinin kapanışının içi
A^{0^-}	: Bir A kümesinin içinin kapanışı
A'	: Bir A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
(X, τ)	: Bir topolojik uzay
(A, τ_A)	: Bir topolojik uzayın alt uzayı
$\emptyset$	: Boş küme sembolü
$\cap$	: Kesişim sembolü
$\cup$	: Birleşim sembolü
$\in$	: Elemanıdır sembolü
$\notin$	: Elemanı değildir sembolü
$\ni$	: Öyle ki sembolü
$\exists$	: En azından bir sembolü
$\forall$	: Her sembolü
$\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$	: I bir indis kümesi olmak üzere kümeler ailesi
$\cong$	: Yaklaşık olarak eşit
$\equiv$	: Denklik sembolü
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\mathcal{N}(x)$	: x in komşuluklar ailesi
A x B	: A kümesi ile B kümesinin Kartezyen çarpımı
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	: Ayrık $\tau -$ *ultra süzgeç*ler
X^*	: *X in katetov genişlemesi*
µX	: X in Katetov Minimal Hausdorff genişlemesi
βX	: X in Stone- Cech kompaktifikasyonu
ω	: Süzgeç tabanı

$C^*(X)$	: X de, ,reel değerli sürekli fonksiyonlar
π_i	: İzdüşüm fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Kompaktlık ile ilgili kapalılık özelliği topolojistlerin ilgisini çekmektedir. Bu bölümde kompakt bir X Hausdorff uzayı, Y Hausdorff uzayının içinde gömülü ise Xin görüntüleride daima Y nin kapalı bir alt uzayıdır olduğu ile ilgili özelliklerin bir birleşimini anlatacağız. Bu özellik ilk olarak 1924 te Alexandroff ve Urysohn tarafından keşfedildi ve bu uzaylar H-kapalı uzaylar olarak tanımlandı. Bir Haudorff uzayın toplojisi τ olsun. X üzerinde τ tarafından içerilen bir topoloji artık Hausdorff değilse (X,τ) uzayına minimal Hausdorff denir. Katetov 1940 daki çalışmasında minimal Hausdorff uzayların H-kapalı ve yarı düzenli olduğunu gösterdi. Bourbaki; X Hausdorff uzayı olmak üzere H-kapalılık özelliğinin H(i):Xde her açık süzgeç tabanının bir bağlılığı vardır özelliğine, minimal Hausdorff özelliğinin H(ii): Tek bağlı noktaya sahip olan her açık süzgeç tabanı bu noktaya yakınsar özelliğine denk olduğunu gösterdi.

Bir X uzayının alt kümelerinin bir ailesinin birleşimi X de yoğun ise bu aileye yaklaşık örtü diyelim. Alexandroff, bir Hausdorff uzayı mutlak kapalı olması için gerek ve yeter koşulun X in her açık örtüsünün, sonlu bir yaklaşık örtüsü olduğunu gösterdi.

Alexandroff'un bu karakterizasyonundan Hausdorff hipotezini kaldırarak elde edilen uzaylar sınıfını quasi-H-kapalı olarak adlandırıyoruz. Quasi kompakt terimini kullanan Bourbakidir. Bu uzaylar Scarborough ve Stone' nun H(i) uzaylarına özdeştir.

Katetov, herhangi bir X Hausdorff uzayının H-kapalı X^* uzayı içinde yoğunlukla gömülü olabileceğini gösterdi. Ayrıca Xde her bir sınırlı, reel değerli, sürekli özelliğe sahip fonksiyon X^* a genişletilir. X^*, X in Katetov genişlemesidir. X^*, H-kapalıdır. Stone Cech kompaktifikasyonuna benzer özelliklere sahip olsa da X^* kompakt ise X kompakttır. X in genişlemeleri kümesi $\mathfrak{A}$ olsun. Banaschewski bu kümede izdüşüm fikrini fark etti. $Y \in \mathfrak{A}$ olsun. Eğer $\mathfrak{A}$ içinde her bir Z için, X noktasal olarak sabit bırakan $Y\ den\ Z$ye sürekli bir fonksiyon var ise $\mathfrak{A}$ içindeki bir Y genişlemesi bu kümede projektif en büyüktür denir. X uzayının Katetov genişlemesi X uzayını içeren tüm H-kapalı uzaylar içinde projektif en büyüktür.

Porter ve J.Thomas, Katetov genişlemesinin inşası ile bir topolojik uzayın yarı düzenlileştirilmesi arasında bir ilişki geliştirmişlerdir. Aynı zamanda Berri tarafından

‘Her Hausdorff uzayı, minimal Hausdorff uzayı içinde gömülü olabilir mi? ‘sorusu olumlu bir şekilde cevaplandırmışlardır.

Banaschewski, tamamen düzenli uzaylar arasında, sadece kompakt uzayların Stone- Weierstrass özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. Ayni zamanda kompakt olmayan tamamen düzenli bir uzayın, Stone- Weierstrass özelliğine sahip ve kompakt olmayan bir uzay içine gömülebileceğini kanıtlamıştır. Stone- Weierstrass özelliğine sahip bu uzay Katetov genişlemesinin bir alt uzayıdır.

Kompakt olmayan tamamen düzenli bir uzayın Katetov genişlemesi Stone- Weierstrass özelliğine sahip midir? Bu sorunun cevabı Porter ve J.Thomas tarafından verilmiştir.

δ, profesör L. L. Herrington ve P.E.Long tarafından Hausdorff tamamen normal ve full normal uzayların bir alt sınıfını içeren topolojik uzaylar sınıfı olarak tanımlansın.

Bir Y Hausdorff uzayı, H-kapalıdır$\Leftrightarrow$ δ sınıfındaki her X uzayı için, her bir kuvvetlice-kapalı g:X$\longrightarrow$Y eğrisi, zayıf olarak süreklidir.

δ sınıfındaki her X uzayı için, her bir 1-1, örten, kuvvetlice-kapalı g:X$\longrightarrow$Y eğrisi zayıf olarak sürekli ise bir Y Hausdorff uzayı H-kapalıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Açık Küme Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.τnun elemanlarına (X, τ)uzayının açık kümeleri denir. Diğer bir tanım verecek olursak R^n de bir A alt kümesinin her bir elemanı, A kümesinin bir iç noktası oluyorsa, A ya açık küme denir.

Örnek: $V \subseteq X$ ise $V \in P(X)$ olduğundan X in her alt kümesi$(X,P(X))$ayrık uzayında açık bir kümedir.

Örnek:(X, τ)kaba uzayının açık kümeleri $\emptyset$ve X kümeleridir.

Örnek: R standart uzayında R nin alt kümeleri olan açık aralıklar açık kümeye örnek teşkil eder.

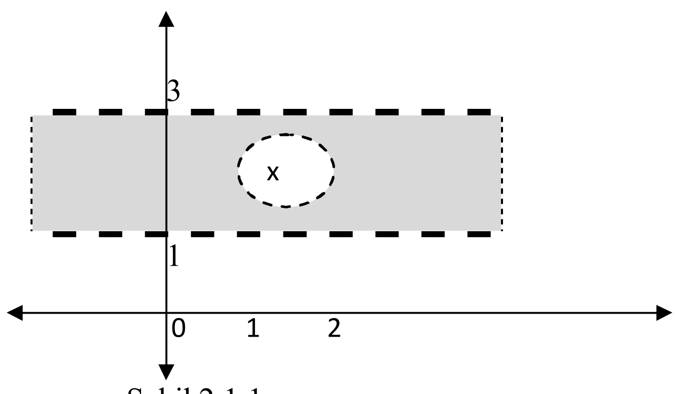
Not: R^n de her x_0 merkezli, r yarıçaplı $B(x_0,r)$ açık yuvarı açık kümedir.

2.1.2.İç Nokta Tanımı

R^n de bir A alt kümesi ve bir $x_0 \in$ A noktası verilsin.

$B(x_0 , \varepsilon) \subset$ A olacak şekilde yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, x_0 noktası için A'nın bir iç noktasıdır denir.

Örnek: R^2 de $A=\{(x, y) \in RxR \mid 1<y<3 \}$ alt kümesi verilsin.



Şekil 2.1.1

Buna göre R^2 de verilen Şekil 2.1.1 deki x (1,2) noktası A'nın bir iç noktasıdır.

2.1.3. Kapalı Küme Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve V kümesi X'in bir alt kümesi olsun. X\V kümesi, (X, τ) topolojik uzayında açık bir küme ise V kümesi için X uzayının kapalı alt kümesidir denir.

Örnek: X=[0 ,∞)ve τ={∅, X}∪{(b, ∞) : b ≥ 0} sınıfı X üzerinde bir topolojidir. (X, τ) topolojik uzayının kapalı kümelerinin sınıfı τ nun tümleyeni olan τ' ={∅, X}∪ {[0,b] : b ≥ 0,b∈R} dir.

Örnek: R standart uzayında a, b ∈R ve b ≥a olmak üzere R'nin alt kümeleri olan [a, b] kapalı aralıkları kapalı kümedir. Çünkü [a, b] kapalı aralıklarının tümleyeni R\ [a, b] = (-∞,a) ∪ (b, ∞) dur. (-∞,a) kümesi ile (b, ∞) kümesi açık kümelerdir. Bu kümelerin birleşimi de açık bir kümedir. Dolayısıyla R\ [a, b] açık kümedir. Buradan [a, b] kapalı aralıkları kapalı kümedir.

2.1.4. Yığılma Noktası Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $p \in X$ noktasını alalım. p'yi ihtiva eden τ da ki her G açık kümesi için $(G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa p ye A kümesinin bir yığılma noktası denir.

Bütün yığılma noktalarından oluşan kümeye A'nın türev kümesi denir.

2.1.5. Kapanış Noktası Tanımı

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini ihtiva eden tüm kapalı kümelerin ara kesitine A kümesinin kapanışı denir. Yani, bir kümenin kapanış kümesi o kümeyi ihtiva eden en küçük kapalı kümedir.

Kapanış kümesi $\overline{A}$ veya $cl_X A$ ile gösterilir. Kapanış kümesinde yer alan noktalara da kapanış noktası denir.

2.1.6. İzole Noktası Tanımı

(X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. x noktasını içeren bir U açık kümesi, x noktasından başka A'nın hiçbir elemanını içermeyecek şekilde varsa x noktasına A'nın bir izole noktası denir.

Örnek: R standart uzayında Z tamsayılar kümesinin her noktası Z'nin bir izole noktasıdır.

Gerçekten de $m \in Z$ ve $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ alınırsa $(m-\varepsilon, m+\varepsilon) \cap (Z \setminus \{m\}) = \emptyset$ olur. m noktası Z nin bir izole noktasıdır. $m \in Z$ noktası keyfi olarak alındığı için Z nin her noktası Z nin bir izole noktasıdır.

2.1.7. Alt Uzay Tanımı

(X,τ) bir topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi üzerindeki $\tau_A=\{A \cap U \mid U \in \tau\}$ topolojisine, A kümesi üzerine indirgenen alt uzay topolojisi, (A,τ_A) uzayına da (X,τ) uzayının alt uzayı denir.

2.1.8. Taban Tanımı

(X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ nun her elemanı β nın elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, β ya τ nun bir tabanı denir.

Örnek: $(X,P(X))$ ayrık bir uzayı ve $\beta=\{\{x\} : x \in X\}$ olsun. β, P(X) in bir tabanıdır.

2.1.9 Alt Taban Tanımı

(X,τ) bir topolojik uzay ve $\rho \subset \tau$ olsun.

ρ ya ait tüm sonlu sayıdaki bir takım kümelerin arakesiti τ nun bir tabanı oluyorsa ρ ya τ nun bir alt tabanı denir.

Örnek: (R, τ_d) alışılmış topolojik uzay ve $\rho=\{(-\infty,b), (a,\infty) : a<b \text{ ve } a,b \in R\}$ ailesi verilsin. ρ ailesi R nin alışılmış topolojisi için bir alt tabandır.

Gerçekten de $\{(-\infty, b) \cap$ (a, ∞) =(a,b) : a<b ve a, b ∈R } ailesi τ_d için bir tabandır. Bu nedenle ρ bir alt tabandır.

2.1.10. Komşuluk Tabanı Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay, x∈X ve β_x de x noktasını içeren açık kümelerin bir sınıfı olsun. x ∈U özelliğindeki her U∈ τ için B ⊆ U olacak şekilde bir B∈$\beta_x$varsaβ_x sınıfına x noktasının komşuluk tabanı denir.

Örnek: (X, τ) kaba topolojik uzayı verilsin. β_x ={x} ailesi x∈X noktasının komşuluk tabanıdır.

2.1.11. Süzgeç Tanımı

Bir X kümesi ve F ⊂ P(X) ailesi verilsin. Eğer F ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa, F ailesine X üzerinde bir süzgeç denir.

S1). Boş küme F ailesinin elemanı değildir.

S2). F ailesine ait herhangi iki kümenin arakesiti, yine F ailesine aittir.

S3). F ailesine ait herhangi bir kümeyi kapsayan her küme, yine F ailesine aittir.

Örnek: X boş olmayan bir küme olsun.

F ={X} ailesi, süzgeç aksiyomlarını sağlayacağından bu aile X kümesi üzerinde süzgeçtir.

Örnek: N doğal sayılar kümesi üzerinde F={A⊂N: N \A sonlu}ailesi bir süzgeçtir. Bu süzgece Frechet süzgeci denir.

Örnek: R=$\bigcup_{n\in \mathrm{N}}(-n, n)$ve her n∈ N için (-n, n) aralığı R de açık olduğu için {(-n, n)| n∈ N} sınıfı R standart uzayının açık bir örtüsüdür.

2.1.12. Süzgeçlerin Karşılaştırılması Tanımı

Bir X kümesi üzerinde F_1ve F_2 süzgeçleri verilsin. $F_1 \subset F_2$ ise F_1 süzgeci F_2 süzgecinden daha kabadır ya da F_2 süzgeci F_1süzgecinden daha incedir denir.

2.1.13. Ultra Süzgeç Tanımı

Bir X kümesi üzerinde bir F süzgeci verilsin. Eğer X kümesi üzerinde en ince süzgeç F ise, F süzgecine ultra süzgeç denir.

Örnek: Bir X kümesi ve a$\in$ X elemanı verilsin. Bu takdirde F={ A$\subset$X |a $\in$A } ailesi, X kümesi üzerinde bir ultra süzgeçtir.

2.1.14. Süzgeç Tabanı Tanımı

β $\subset$ P(X) ailesi, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa β ailesi için X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanıdır denir.

ST_1)$\beta \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \beta$dır.

ST_2)Her $B_1, B_2 \in \beta$ için, $\exists B \in \beta \ni B \subset (B_1 \cap B_2)$ dir.

Not: Her süzgeç bir süzgeç tabanıdır, fakat bir süzgeç tabanı süzgeç olmayabilir.

Örnek: N doğal sayılar kümesi ve bir n $\in$ N doğal sayısı verilsin. A_n={n, n+1, n+2, …}olmak üzere β ={ A_n }$_{n\in N}$ ailesi, N doğal sayılar kümesi üzerinde Frechet süzgecinin bir tabanıdır.

2.1.15. Yoğun Küme Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Eğer$A^{-^{0}} \neq \emptyset$ ise A kümesine (X, τ) uzayı içinde yoğun küme denir.

2.1.16. Her Yerde Yoğun Küme Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. A^{-}=X ise, A kümesine X uzayı içinde her yerde yoğun küme denir.

Örnek: Q rasyonel sayılar kümesi R sayılar kümesi üzerinde alışılmış topolojiye göre her yerde yoğundur. Çünkü Q nun kapanışı R reel sayılara eşittir.

YaniQ^{-} = R dır.

2.1.17. Kendi İçinde Yoğun Küme Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A'nın yığılma noktalarının kümesi A' olmak üzere $A \subset A'$ ise, A kümesine kendi içinde yoğun küme denir.

2.1.18. Hiçbir Yerde Yoğun Olmayan Küme Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A^{-0} = \emptyset$ ise, A kümesine X uzayı içinde hiçbir yerde yoğun değil denir.

Örnek: (X, τ) topolojik uzayının kapalı bir alt kümesinin sınırı hiçbir yerde yoğun değildir.

2.1.19. Örtü Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. I bir indis kümesi olmak üzere $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilmiş olsun. Eğer X kümesi $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesinin elemanlarının birleşimi tarafından kapsanıyorsa $\mathfrak{A}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü denir. Eğer örtünün elemanları sonlu ise, örtüye sonlu örtü denir. Eğer örtünün elemanları sayılabilir ise, örtüye sayılabilir örtü denir.

Eğer X, $\mathfrak{A}$ nun bir B alt ailesinin elemanlarının birleşimi tarafından kapsanıyorsa, B ye alt örtü denir.

X in bir topolojik uzay olması ve $\mathfrak{A}$ örtüsünün bütün elemanlarının açık olması halinde bu örtüye açık örtü denir.

X in bir topolojik uzay olması ve $\mathfrak{A}$ örtüsünün bütün elemanlarının kapalı olması halinde bu örtüye kapalı örtü denir.

$\mathfrak{A} = \{U_i : i \in I\}$ sınıfı A nın açık bir örtüsü ve $J \subseteq I$ olmak üzere $\vartheta = \{U_i : i \in J\}$ sınıfı A nın bir örtüsü ise $\vartheta = \{U_i : i \in J\}$ örtüsü $\mathfrak{A} = \{U_i : i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsüdür. Bu durumda eğer J sonlu ise $\vartheta = \{U_i : i \in J\}$ örtüsüne $\mathfrak{A} = \{U_i : i \in I\}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

2.1.20. Homeomorfizm Tanımı

f : $(X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ birebir, örten bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1}fonksiyonlarının her ikiside sürekli ise f ye bir homeomorfizm denir.

(X, τ_1) ile (Y, τ_2)uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara homeomorfik uzaylar denir ve genel olarak$(X, \tau_1) \cong (Y, \tau_2)$şeklinde gösterilir.

Örnek: f: (-1,1)⟶R fonksiyonu$f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ şeklinde tanımlansın.

f fonksiyonu birebir ve örtendir.

f fonksiyonu süreklidir.

$$f^{-1} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & , x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & , x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlananf^{-1}fonksiyonu süreklidir. Böylece f bir homeomorfizmdir.

2.1.21. Tanım

X_1 ve X_2 uzaylarının genişlemeleri sırasıyla Y_1 ve Y_2 olsun. f ∈ F(X_1, X_2) olsun.(F(X_1, X_2)={f: $X_1 \longrightarrow X_2$: f bir fonksiyon}). Eğer F∈F(Y_1,Y_2)ve $F|_X$ = f oluyorsa F ye f fonksiyonun bir genişlemesi denir.

Eğer Y, X'in bir genişlemesi ise Y-X uzayına (Y'nin alt uzayı olarak)X in kalanı denir.

2.1.22. Tanım

Y_1 ve Y_2 X in iki genişlemesi olsun. Eğer h:$Y_1 \longrightarrow Y_2$, h(x)=x(x ∈ X), olacak şekilde bir h homeomorfizması varsa Y_1 ve Y_2 ye denktir denir ve $Y_1 \equiv_X Y_2$ şeklinde yazılır.

X bir uzay ise X in denk genişlemeleri arasında fark gözetilmez.

Buna E(X)={ Y: Y,X in bir genişlemesi} olarak gösterirsek Z, X in bir genişlemesi ise$Y \equiv_X Z$ olacak şekilde bir Y ∈ E(X) vardır. Yani E(X) denklik sınıflarının temsilcilerinden oluşan bir ailedir.

Not: Bir X uzayı için E(X) bir kümedir.(küme: belirli bir P önermesini gerçekleyen tüm x öğelerinden oluşan varlık olmak üzere bir kümenin iyi tanımlı olması için bir nesne verildiğinde o nesnenin verilen kümeye ait olup olmadığının cevabı kesinlikle verilmelidir.
Eğer genişlemelerinin denkliği tanımlanmamış olsaydı E(X) bir küme olmayabilirdi.

2.1.23. Uzayın Genişlemesi Tanımı

(X, τ), (Y, τ')topolojik uzaylar ve $A \subset Y$ alt kümesi Y de yoğun olsun. Eğer (X, τ) dan (A, τ'_A) ya bir homeomorfizm mevcutsa, (Y, τ') için (X, τ) uzayının bir genişlemesidir denir.

Not: T_x, ayırma aksiyomlarından herhangi birisini göstermek üzere, aşağıdaki ifade verilebilir.
T_x-genişlemesi$\Leftrightarrow(Y, \tau')T_x$-uzayıdır.

2.1.24. Kompaktlık Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa(X, τ) uzayına kompakt topolojik uzay denir.

Not: Bir uzayın kompakt olmadığını göstermek için uzayın sonlu bir alt örtüsü olmayan açık bir örtüsünün olduğunu göstermek yeterlidir.

Örnek: X sonlu bir küme olmak üzere (X, τ) bir topolojik uzay olsun.X sonlu bir küme olduğundan τ sonludur.Böylece $\{V_i : i \in I\}$sınıfı bu uzayın açık bir örtüsü ise$\{V_i : i \in I\} \subseteq \tau$ olduğundan bu örtü sonludur.Böylece X in her $\{V_i : i \in I\}$açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu nedenle (X, τ) uzayı kompakttır.

Not: Sonlu her topolojik uzay kompakt olur.

2.1.25. Kompaktlaştırma Tanımı

(X, τ) herhangi bir topolojik uzay , (Y, τ') kompakt bir uzay ve $A \subset Y$ alt kümesi Y'de yoğun olsun. Eğer (X, τ) dan (A, τ'_A) ya bir homeomorfizm varsa, (Y, τ') uzayına, (X, τ) uzayının bir kompaktlaştırması denir.

Örnek: R reel sayıların alışılmış topolojisine göre, X =(0,1)açık aralığı R nin kompakt olmayan bir alt uzayıdır. Diğer yandan X⊂[0,1]=$\bar{X}$in yoğun bir alt kümesidir. Bu nedenle İ: X ⟶ $\bar{X}$, İ(X)=X fonksiyonu, X den X e bir homeomorfizmdir.
Böylece X = (0,1)açık aralığının kompaktlaştırılması [0,1] kapalı aralığıdır.

2.1.26. Zayıf Sürekli Fonksiyon Tanımı

f: X ⟶ Y bir fonksiyon olsun. Her x ∈ X ve f(x) i kapsayan her V⊂Y açık kümesi için, f(U)⊂V^- olacak şekilde, x i kapsayan bir U⊂X açık kümesi varsa, f fonksiyonuna zayıf sürekli fonksiyon denir.

2.1.27. Açık Fonksiyon Tanımı

f : $(X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun.

X in açık her U alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan f(U) kümesi Y nin açık bir alt kümesi ise f ye açık fonksiyon denir.

2.1.28. θ − kapalı Tanımı

G_f ={(x, f(x)) : x ∈ X} ⊂ X x Y,f: X ⟶ Y fonksiyonunun grafiği olsun. Her x ∈ X ve f(x) ≠ y ∈ Y için, $f(U^-) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde, x in bir U⊂X açık komşuluğu ve y nin bir V⊂ Y açık komşuluğu varsa, G_f kümesine, X e göre $\theta - kapal$ı denir.

2.1.29. Projektive Maximum Tanımı

Bir X uzayı için$\emptyset \neq$ Q ⊆ E(X) olsun. Eğer Y ∈ E(X) , Y ∈ Q ve her Z ∈ Q için Z ≤ Y oluyorsa, Y ye Q da bir projektiv maximum denir. Bu tanımda hemen belirtelim ki Y ≥ VQ ve Y ∈ Q olduğundan VQ ≥ **Y** olup Y$\equiv_X$VQ olur. Böylece eğer Q bir projektif maximuma sahipse tektir ve VQ ya eşittir.

Önerme: Her X uzayı için VE(X) = X dir.

İspat: X∈ E(X)ve Y∈ E(X) ise I: X ⟶ Y, I(x)=x sürekli olduğundan Y ≤ Xolur ise X, E(X)in projektif maksimumdur.

2.1.30. Kuvvetli Kapalılık Tanımı

X, Y topolojik uzaylar ve F:X ⟶Y bir çoğul değerli fonksiyon olsun. G(F), F nin grafiği olmak üzere her bir (x,y) ∈ X x Y-G(F) için (U x V)∩G(F)=∅ [(U x $\overline{V}$) ∩G(F)=∅] olacak şekilde X içinde x noktasının bir U, Y içinde y noktasının bir V komşuluğu varsa F ye grafiği kapalıdır (kuvvetli kapalıdır) denir.

2.1.31. Hausdorff Uzayı Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. x≠ y özelliğindeki her x, y ∈ X için x ∈ U, y ∈ V ve U∩V = ∅ olacak şekilde U, V∈ τ kümeleri varsa (X, τ) uzayına bir Hausdorff uzayı denir.

Örnek: Herhangi bir (X,P(X))ayrık uzayı verilsin. x≠ y ve x, y ∈ X olsun. Bu durumda{x},{y}∈ P(X) dir. Ayrıca x∈{x}, y∈{y}ve {x} ∩{y} = ∅ dur. Böylece bu uzay Hausdorff uzayıdır.

2.1.32. Quasi H-Kapalılık Tanımı

(X, τ) herhangi bir topolojik uzay olsun. A⊆ X için A nın her açık örtüsünün kapanışları A yı örten bir sonlu alt örtüsü varsa, A ya quasi H-kapalıdır denir.

Eğer X uzayının kendisi quasi H- kapalı ise uzaya quasi H-kapalıdır denir. Eğer X uzayı hem quasi H-kapalı hem de Hausdorff ise uzaya H-kapalıdır denir.

X uzayında her x∈X noktasının quasi H-kapalı olan bir U açık komşuluğu varsa uzaya yerel H-kapalı uzay denir.

2.1.33. Urysohn Uzayı Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y elemanları için N∈$\mathcal{N}(x)$ve M∈$\mathcal{N}(y)$komşulukları olmak üzere ∋ $\overline{N} \cap \overline{M}$=∅ ise, X uzayına Urysohn uzayı denir. Diğer bir ifadeyle X bir topolojik uzay olsun. Herhangi iki farklı x, y ∈ X noktaları için,

$x \in U$, $y \in V$ ve $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ olacak şekilde, U, V açık kümeleri varsa, X uzayına Urysohn uzayı denir.

2.1.34. Regüler kapalı(açık) Küme Tanımı

(X, τ) herhangi bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$olsun. Eğer $A^{0^-} = A$ $(A = A^{-^0})$ ise A ya regüler kapalı (regüler açık) küme denir.

2.1.35. Almost Regüler Uzay Tanımı

(X, τ) herhangi bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her bir $x \in X$ ve x noktasını bulundurmayan her bir A regüler kapalı kümesi için $x \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümeleri varsa (X, τ) ya hemen hemen regüler (almost regüler) uzay denir.

2.1.36. Semi- Regüler Uzay Tanımı

(X, τ) herhangi bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her bir $x \in X$ ve x noktasını bulundurmayan her bir A yarı kapalı kümesi için $x \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı açık kümeleri varsa (X, τ) ya yarı regüler (semi- regüler) uzay denir.
Diğer bir ifadeyle**:** X bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ ve x in her $V \subset X$ açık komşuluğu için, $x \in U \subset U^{-^0} \subset V$ olacak şekilde, x in bir $U \subset X$ açık komşuluğu varsa, X uzayına yarı düzenli (semi-regüler) uzay denir.

2.1.37.Regüler Uzay Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X noktasını içermeyen X uzayının kapalı her K kümesi ile x noktasının ayrık komşulukları varsa X uzayına x noktasında düzenli uzay denir.

Örnek: Her(X,P(X)) ayrık uzayı, düzenli uzaydır.

2.1.38. Tamamen Regüler Uzay Tanımı

(X,τ) topolojik uzayını, (R,U) alışılmış uzayının [0,1] alt uzayını alalım. Uzayın kapalı bir $F \subset X$ alt kümesi ve F ye ait olmayan bir $x \in X$ noktası verildiğinde eğer $f(x)=0$, $f(F)=\{1\}$ şeklinde tanımlanan sürekli bir $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa, (X,τ) uzayına tamamen düzenli uzay denir. f fonksiyonu için F kümesi ile x noktasını ayırıyor diye söylenir.

Örnek: Birden fazla elemanı olan bir X kümesi üzerinde en kaba topoloji olan $\tau=\{X, \emptyset\}$ mevcutsa bu uzay tamamen düzenli uzaydır.

2.1.39. Normal Uzay Tanımı

(X,τ) bir topolojik uzay ve X in herhangi kapalı ayrık iki alt kümesi F_1 ve F_2 olsun. Eğer F_1 ve F_2 kümelerinin ayrık komşulukları varsa, yani her F_1, $F_2 \subset X$ kapalı ve $F_1 \cap F_2=\emptyset$ için $\exists N_1 \in N(F_1)$ ve $\exists N_2 \in N(F_2)$ vardır. $\ni N_1 \cap N_2=\emptyset$ ise, X uzayına normal uzay denir.

Örnek: $\tau=\{X, \emptyset\}$olmak üzere (X,τ) ayrık olmayan uzayı, normal uzaydır. Çünkü bu uzayın kapalı alt kümeleri X ve $\emptyset$ dir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde “kompakt uzaylar”, “H-kapalı” ve “minimal hausdorff uzaylar” kavramları tanımlanıp, “kompaktlaştırma”, “Stone –Weierstrass Özelliği”, “katetov genişlemesi”,“quasi H-kapalı”,“H-kapalı urysohn uzayları” ve “hausdorff uzayların genişlemeleri” konuları hakkında geniş bir literatür taraması, bilimsel çalışmalar, tezler ve notlar incelendi.

3.1. MATERYAL

3.1.1. Kompakt Uzaylar

Klasik analizde birçok Önemli teorem, kapalı ve sınırlı aralıklar için ispatlanmıştır. Örneğin sürekli bir fonksiyon kapalı ve sınırlı aralık üzerinde maksimum ve minimum değerlerini alması gibi. Bu tür teoremlerin ispatlarında şüphesiz öklid uzayındaki kapalı ve sınırlı kümeleri karakterize eden **Bolzano-Weierstrass teoremi** (*R nın sınırlı ve sonsuz bir A altkümesinın bu uzayda en az bir yığılma noktası vardır*) ve **Heine-Borelteoremi** (*R'nin kapalı ve sınırlı bir altkümesinin her açık örtüsü sonlu bir örtüye sahiptir*) nin önemi büyüktür. İşte R deki kapalı ve sınırlı alt kümelerin sahip olduğu özelliklere benzer özellikler genel topolojik uzaylarda var mıdır? sorusu karşımıza kompaktlık kavramını çıkarmaktadır. R deki kapalı bir küme kavramından farklı olmakla birlikte, genel topolojik uzaylarda kapalı altküme tanımı bilinmektedir. Ancak R deki sınırlı küme kavramını, genel topolojik uzaylarda tanımlamak mümkün değildir. Çünkü her topolojik uzay üzerinde metrik tanımlamak mümkün değildir. Böylece topolojik uzaylarda R deki sınırlılık özelliğine benzer özellik göstermesi beklenen kümeler kompakt kümeler olacaktır.

Topolojik uzaylarda kompaktlık kavramı, çok değişik şekillerde tanımlandığı gibi, birçok kompaktlık çeşidi de vardır. Bu bakımdan kompaktlık konusu çok geniş bir konudur. Bu kitapta, bunlardan bazılarını incelemekle yetineceğiz.

Kompakt kavramını ilk defa 1906 yılında **Frechet** kullanmıştır. Şöyle ki: *"Bir küme kompakttır $\Leftrightarrow$ her sonsuz A altkümesi bir limit noktasına sahipse (limit noktasının A altkümesine ait olması gerekmez)"*.

Bu kavram daha sonra *"Bir küme kompakttır $\Leftrightarrow$ sonsuz her A altkümesi, A da olan bir limit noktasına sahipse"* şekline dönüşmüştür. Sonlu arakesit özelliğine sahip olan kapalı kümeler ailesi ile kompaktlık kavramı 1908'de **Riesz** tarafından verilmiştir. 1924 **Alexandroff** ve **Urysohn** kompakt kümeyi şöyle tanımlamışlardır; *"Bir küme kompakttır $\Leftrightarrow$ her açık örtüsü sonlu bir örtüye sahipse"*. Daha sonra **Tychonoff** (1930-1936) da herhangi sayıda kompakt uzayların kartezyen çarpımının da yine kompakt uzay olduğunu göstermiştir. 1940'da **Bourbaki**, **Heine-Borel** özelliğine eşdeğer bikompaktlık tanımını vermiştir.

3.1.1.1. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının her fl={A_i} $_{i\in I}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına kompakt uzay denir, yani;

X kompakt $\Leftrightarrow$ X' in $\forall\, fl=\{A_i\}_{i\in I}$ açık örtüsü için $\exists J\subset I\ (J\ sonlu)$ var

$\exists X=\bigcup\limits_{i\in j} A_i \Leftrightarrow \forall\, fl\subset\tau \quad ve\ \ X=\bigcup\limits_{A\in fl} A$ için $\exists G\subset fl\left(G\,sonlu\right)$ var $\exists$ X=$\bigcup\limits_{A\in G} A$ dır.

Örnek: X sonlu bir küme olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayı kompakttır. Çünkü her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahiptir.

Örnek: Sonsuz çoklukta elemana sahip bir X kümesi üzerine konulan τ={∅} ∪{A⊂X: A^c sonlu } sonlu tümleyenler topolojisine göre, (X, τ) uzayı kompakttır. Gerçekten, fl={A_i} $_{i\in I}$X in her hangi bir açık örtüsü ve $A_{i_o}\in fl$ olsun. $A_{i_o}\in\tau$ olduğundan $A_{i_o}^{\ c}$ sonludur, yani $A_{i_o}^{\ c}=\left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$ olsun, fl, X in bir örtüsü ve $A_{i_o}\subset X$ olduğundan $\forall a_k\in A_{i_0}^{\ c}\ için \exists A_{i_k}\in fl$ var $\ni a_k\in A_{i_k}\, dır.$ O halde

$A_{i_o}^{\ c}\subset A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_n}=\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}\ ve\ X=A_{i_o}\cup A_{i_o}^{\ c}\ olduğundan$

$X\subset A_{i_o}\cup(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_n})\ olur.$ $Bu\ da\ X\ küme$ sin in

$\left\{A_{i_o}, A_{i_1}, A_{i_2},\ldots, A_{i_n}\right\}$ sonlu altailesi ile *ö*rt*ü*lmesi demektir.

Örnek: X, sonsuz çoklukta elemana sahip olmak üzere, (X, τ=P(X)) ayrık uzayı kompakt değildir. Çünkü her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

Teorem: (X,τ) topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) X kompakttır,

ii) X uzayının kapalı alt kümelerden oluşan ve $\bigcap\limits_{K\in k} K=\varnothing$ özelliğine sahip her K ailesi için ∃H ⊂K (H sonlu) alt ailesi var $\ni\ \bigcap\limits_{K\in H} K=\varnothing$ dır,

iii) X uzayının kapalı alt kümelerinden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine (s.a.ö) sahip her K ailesi için $\bigcap\limits_{K\in k} K\neq\varnothing$ dır.

İspat: i)$\Rightarrow$ ii)X kompakt ve $\bigcap_{K\in k} K=\varnothing$ olacak şekilde kapalı kümelerin oluşturduğu aile K olsun. $\forall K\in K$ için K^c açık ve $\bigcup_{K^c\in k^c} K^c = X$ olduğundan $\{K^c\}$ $K^c \in k^c$ ailesi X in açık bir örtüsüdür. X: kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır, yani $\bigcup_{K^c\in H^c} K^c = X, H^c \subset K^c\ veH^c\ sonlu.$ Böylece $\bigcap_{K\in H} K = \varnothing\ dır.$

$ii \Rightarrow iii$ K ailesi kapalı kümelerden oluşan s.a.ö. sahip bir aile olsun. Bu durumda $\bigcap_{K\in k} K \neq \varnothing$ dır. Eğer fl*K~0* olsaydı (ii) den K! ailesinin $\bigcap K=\varnothing$ olacak şekilde sonlu bir H alt ailesi vardır. Bu da s.a.ö.ile çelişir. Böylece.(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) dır.

iii)$\Rightarrow$i) veya ii) $\Rightarrow$ i) alalım. X uzayının her hangi bir açık örtüsü fl=$\{A_i\}i\in I$, yani $X=\bigcup_{i\in I} A_i$ olsun. $\forall i\in I$ için A_i, açık ve A_i^c kapalı ve $\bigcap_{i\in I} A_i^c=\varnothing$ dır. O halde X in kapalı kümelerden oluşan ve kesişimi boş olan $\{A_i^c : i\in I\}$ ailesi vardır, (ii) den bu ailenin $\bigcap_{i\in I} A_{i_k}^c=\varnothing$ olacak şekilde sonlu bir $\{A_{i_k}^c$: k=l,2J...,n) alt ailesi vardır. Buradan $\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}^{\ c}=X$ bulunur. Böylece $\{A_{i_k}$: k=l,2,...,n $\}\subset$fl sonlu bir alt örtüsü olup, X kompakttır.

Teorem:(X,τ) topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) X kompakttır,

ii) X üzerindeki her süzgeç bir limit (kaplama) noktasına sahiptir,

iii) X üzerindeki her ağ bir limit (kaplama) noktasına sahiptir.

3.1.1.2. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subset X$ olsun, fl $\subset \tau$ olmak üzere, fl nın elemanlarının birleşimi B kümesini kapsıyorsa, yani $B \subset \bigcup_{A \in fl} A$ ise fl ye B kümesinin açık bir örtüsü denir.

(B,τ_B) X in bir alt uzayı olmak üzere, eğer B alt uzayının her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise, (B,τ_B) uzayına kompakt alt uzay, B kümesine de X in kompakt altkümesi denir.

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay ve (B,τ_B) X in bir alt uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) (B,τ_B) kompakt alt uzaydır,

ii) B kümesinin X uzayının açık alt kümelerinden oluşan her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.

İspat: i)$\Rightarrow$ii) (B,τ_B) kompakt ve fl, X in açık alt kümelerinden oluşan B nin her hangi bir açık örtüsü olsun. $\forall$ $fl_B \subset \tau_B$ için $B = \bigcup_{A_B \in fl_B} A_B$ için fl_B nın $\{A_B^k \in fl_B : k=1,2,...,n\}$ sonlu alt ailesi var $\ni$ $B= \bigcup_{k=1}^{n} A_B^k$ dır.

k=1,2,...,n için $A_B^k \in \tau_B$ olduğundan $A_K \in fl$ olacak şekilde $\exists$ $A_K \in \tau$ var $\ni$ $A_B^k = B \cap A_k$ dır. O halde $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_B^k = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k) = B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$ olup, $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ dır. Böylece fl ailesinin B yi örten sonlu $\{A_k$: k=I,2,...,n $\}$ ait ailesi bulunmuş oldu.

ii)$\Rightarrow$i) (B,τ_B) alt uzay, fl_B bu alt uzayın her hangi bir açık örtüsü ve fl da X in açık altkümelerinden oluşan ve B yi örten sonlu bir alt örtüsüne sahip B'nin açık örtüsü olsun. Bu durumda $A_k \in fl$ olmak üzere, $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ dır.

Buradan B=B$\cap$B$\subset$B$\cap$ ($\bigcup_{k=1}^{n}$ A$_k$) = $\bigcup_{k=1}^{n} B\cap A_k$ = $\bigcup_{k=1} A_B^k$ olur. Böylece fl$_B$ ailesine ait B yi örten sonlu { A_B^k: k=1,2,…,n } ailesi bulunmuş oldu. O halde (B,τ_B) uzayı kompakttır.

Sonuç: (X,τ) bir topolojik uzay ve B $\subset$D $\subset$X olmak üzere(B,τ_B),(D,τ_D) alt uzaylar olsun. Bu durumda fl=τ , X in bir açık örtüsü olmak üzere, B uzayı hem τ ya hem de τ_D ye göre kompakttır. Çünkü τ_B = (τ $_D$)$_B$ dır.

Örnek: R reel sayılar kümesi kompakt değildir. Çünkü {(-n, n):n$\in$N } R nin açık bir örtüsüdür. Ancak bu örtü içinden R yi örtecek sonlu bir örtü çıkarmak mümkün değildir. Fakat klasik analizin standart bir sonucu olan (Heine-Borel teoremine göre) R nin [a, b] kapalı aralığı kompakttır. Gerçekten, fl , [a, b] kapalı aralığının her hangi bir açık örtüsü olsun.

B={x: a $\leq$ x < b, [a, x] kümesi fl'nin sonlu bir fl' alt ailesi ile örtülsün} kümesini alalım. a$\in$B olduğundan B$\neq\emptyset$ dır.

Şimdi B kümesinin [a, b] de açık olduğunu gösterelim: x$\in$B herhangi bir nokta olsun. Bu durumda x, fl açık Örtüsünün her hangi A elamanına aittir. A açık olduğundan ε >0 için (x-ε , x+ε) $\subset$A dır. Ayrıca$\forall$ y$\in$(x-ε ,x+ε) için [a, y] kümesi sonlu fl'U{A} örtüsü ile örtüldüğünden y$\in$B dır. Yani, (x-ε ,x+ε) $\subset$ B dır. O halde B kümesi [a, b] de açıktır.

Şimdi de B nin [a, b] de kapalı olduğunu gösterelim: z$\in$ $\overline{B}$ her hangi bir nokta olsun. Bu durumda z, fl ailesinin her hangi bir A' elemanına aittir. A' açık olduğundan ε > 0 için (z-ε ,z+ε)$\subset$A' dır. y$\in$ (z-ε ,z+ε)$\cap$A' var ve [a, y] kümesi fl' gibi sonlu bir alt örtü ile örtüldüğünden [a, z] de fl'U{A'} sonlu alt örtü ile örtülür. O halde z$\in$B dır. Böylece $\overline{B}$ $\subset$B dır. B$\subset$ $\overline{B}$ olduğundan B = $\overline{B}$ elde edilir, yani B kapalıdır. Sonuç olarak B = [a, b] dır ve [a, b] kompakttır.

Örnek: (R,τ) alışılmış topolojik uzay ve B = (0,1) olmak üzere(B. τ B) alt uzayı verilmiş olsun. B alt uzayı kompakt değildir. Gerçekten,

$fl = \left\{ A_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) : n \in N \right\}$ açık aralıkların oluşturduğu aile B nin açık bir örtüsüdür, yani B = $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dır. Bu örtünün B yi örten sonlu bir alt örtüsü yoktur. Aksini kabul edelim , fl'={(a_1,b_1),(a_2,b_2),...,(a_m,b_m)} ailesi B yi örten fl nin sonlu bir alt örtüsüdür. Eğer ε = min{a_1,a_2,...,a_m} ise, $\varepsilon > 0$ ve(a_1,b_1) ⋃...⋃ (a_m, b_m) ⊂ (ε ,1) dır, Ancak (O,ε]⋂ (ε ,1)=∅ olduğundan fl', B nin bir örtüsü olamaz. O halde B = (0,1) kompakt değildir.

Teorem:(X,τ) bir topolojik uzay ve X in sonlu sayıda kompakt altkümeleri $B_1,B_2,\ldots,B_n$ verilmiş olsun. Bu durumda B=$\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ kümesi de kompakttır.

İspat: B nin her hangi bir açık Örtüsü fl = { A_i }$_{i \in I}$ olsun, yani B=$\bigcup_{i \in I} A_i$ dır.

k=1,2,...,n için $B_k \subset$ B olduğundan $B_k \subset \bigcup_{i \in I} A_i$dır, yani fl={$A_i$}$_{i \in I}$ ailesi B_k nin açık bir örtüsüdür. k=l,2,...,n için B_k kompakt olduğundan $B_k \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} A_{i_j}$ dır. O halde fl = {A_i}$_{i \in I}$ ailesinin{ A_{i_1},, A_{i_2},, $A_{i_{m_1}}$ },…,{ A_{i_1},, A_{i_2}, ,$A_{i_{m_k}}$ }elemanlarından oluşan sonlu alt aileler vardır. Öyle ki bu sonlu alt ailelerin birleşimi fI nın sonlu bir alt ailesi olup, B kümesini örter, yani $B_k \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} A_{i_j} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} B_k = B \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\bigcup_{j=1}^{m_k} A_{i_j})$ dır. Böylece B kümesi kompakttır.

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

i) Kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de kompakttır.

ii) X Hausdorff uzayının kompakt bir K kümesi X de kapalıdır.

iii) Kompakt bir Hausdorff uzayın bir alt kümesi kompakttır <=> bu alt küme kapalıdır.

iv) {X_i, τ_i }$_{i \in I}$ Hausdorff uzaylar ailesi olsun. Bu durumda $\prod_{i \in I} X_i$ | kompakttır ⇔ $\forall i \in I$ için X_i kompakttır.

İspat:

i) (X,τ) kompakt uzay, (Y, τ') herhangi bir uzay ve $f:X\to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\{A_i\}_{i\in I}$ ailesi f(X) in herhangi bir açık örtüsü ise, f fonksiyonu sürekli olduğundan $\left\{f^{-1}(A_i)\right\}_{i\in I}$ ailesi X in açık bir örtüsü olup, $\{f^{-1}(A_{i_k}):k=1,2,...,n\}$ sonlu alt örtüsüne sahiptir. O halde $\{f^{-1}(A_{i_k}):k=1,2,...,n\}$ ailesi $f(X)$ in sonlu bir alt örtüsüdür. Böylece $f(X)$ kompakttır.

ii) $K\subset X$ altkümesi kompakt olsun. K kapalı mı? Bunun için gösterelim ki $K^c=X\backslash K$ açıktır. $x_o\in K^c$ keyfi sahil bir nokta olsun. Her bir $a\in K$. noktası için $x_0\neq a$ ve x_o, $a\in X$ olduğundan $\exists N_a\in N(a)$ ve $\exists M_a\in N(x_o)$ açık komşulukları var $\ni N_a\cap M_a=\varnothing$ dır. $\{N_a\cap K:a\in K\}$ ailesi K nın açık bir örtüsü ve K kompakt olduğundan ($N_{a_k}\cap K$: k=l,2,...,n } sonlu açık bir örtüsü vardır, yani $K\subset \bigcup_{k=i}^{n}(N_{a_k}\cap K)$ dır. k=I,2,...,n için N_{a_k} $\cap M_{a_k}=\varnothing$ olduğundan $N_K=\bigcup_{k=I}^{n} N_{a_k}\in N(K)$ $ve\, M=\bigcap_{k=1}^{n} M_{a_k}\in N(x_o)$ $olup$, $N_K\cap M=\varnothing$ dır. Böylece $x_o\in M\subset K^c$ olduğundan K^c açık $\Rightarrow$ K kapalıdır.

iii) K kompakt ise, K nin kapalı olduğu (ii) de gösterildi. Şimdi gösterelim ki *K* kapalı ise, K kompakttır. $\{B_i: i\in I\}$ ailesi K da kapalı kümelerden oluşan ve $\bigcap_{i\in I} B_i=\varnothing$ olan herhangi bir aile olsun.

K, X de kapalı olduğundan K ya göre kapalı olan kümeler X e göre de kapalı olacaktır. O halde $\{B_i: i\in I\}$ ailesi X de kapalı kümeler ailesi ve X kompakt olduğundan (B_{i_k} :k=l,2,...,n} sonlu alt ailesi var $\ni$ $\bigcap_{i=1}^{n} B_{i_k}=\varnothing$ dir. Böylece K kompakttır.

iv) $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ve $\pi_i:\prod x_i\to X_i$ izdüşüm fonksiyonu olsun. π_i izdüşüm fonksiyonu $\forall i\in I$ için sürekli ve örten olduğundan (i) den dolayı $\forall i\in I$ için X_i kompakttır. Tersine olarak $\forall i\in I$ için X_i kompakt ve β, $\prod_{i\in I} X_i$ de aşkın süzgeç tabanı (maksimal süzgeç tabanı) olsun, π_i sürekli, olduğundan her sabit i için $\pi_i(\beta)X_i$ de aşkın süzgeç tabanıdır ve X_i Hausdorff olduğundan $\pi_i(\beta)$ aşkın süzgeç tabanı x_i tek kaplama noktası, $\pi_i(\beta)$ nın yakınsadığı noktadır, yani $\pi_i(\beta) \to x_i$ dır. O halde β aşkın süzgeç tabanı $\{x_i\}$ noktasına yakınsar, yani $\beta \to \{x_i)$ dır. Böylece $\prod_{i\in I} X_i$ kompakttır.

Sonuçlar: (X, τ) kompakt Hausdorff uzay, (Y, τ ') herhangi bir topolojik uzay ve f:X $\to$ Y sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

i) f örten ise, Y kompakttır.

ii) Kompaktlık topolojik özelliktir.

iii) Kompaktlık Hausdorff uzayların kapalı alt kümelerinde kalıtsaldır.

iv) Kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altıdaki görüntüsü de kompakttır.

v) Kompakt uzayların bölüm uzayları da kompakttır.

vi) K,X in kompakt bir altkümesi ve $x\notin K$ ise, $K \subset N$, $x\in M$ ve $N\bigcap M=\varnothing$ olacak şekilde N ve M açıkları vardır.

vii) X düzenli uzaydır.

viii) X normal uzaydır.

Teorem: Kompakt uzaylar üzerinde tanımlı her reel değerli sürekli fonksiyon, bu uzaylar üzerinde sınırlıdır ve ekstremum değerlerini alır.

İspat: X kompakt uzay ve f:X $\to$ R sürekli bir fonksiyon olsun. Önce f nin sınırlı olduğunu gösterelim. Her bir $x\in X$ için R de I_x = (f(x)-l, f(x)+1) açık aralığım alalım, f sürekli olduğundan $f^{1}(I_x) = V_x$ açık ve x noktasını içerir. O halde f fonksiyonu her bir V_x açığı üzerinde sınırlıdır $\{V_x\colon x\in X\}$ ailesi X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan $\{V_{xi}.:i=l,2,...,n\}$sonlu alt ailesi var ve X i örten M=max{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)}+1 ve m = min{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)}-1olsun. Ayrıca, herhangi $x\in X$ için $\exists$ i var $\ni$ $x\in V_{x_i}$ dır (X= $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ den). Bu durumda f(x_i)-1< f(x) < f(x_i)+l ve m < f(x) < M olduğundan f sınırlıdır. Eğer X de f(x)=L olacak şekilde hiçbir x noktası yoksa, bu durumda g:X $\to$ R, g(x) =1/(L-f(x)) şeklinde sürekli bir g fonksiyonunu tanımlayabiliriz,

E fonksiyonu sınırlı değildir. Gerçekten, verilen herhangi r > 0 için $\exists$ $x\in X$ var $\ni$ *f(x)* > L- $\frac{1}{r}$ ve g(x) > r dır. Fakat yukarıda gösterildi ki kompakt uzay üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyon sınırlıdır. O halde bu bir çelişkidir. Böylece X de f(x) = L olacak şekilde $\exists\, x\in X$ vardır. f(x) = E olacak şekilde $\exists\, x\in X$ in varlığı benzer şekilde gösterilir. Şimdi bazı kaynaklarda Bolzano-Weierstrass (B-W) kompakt uzay tanımı olarak verilen

" *Eğer X in sonsuz her alt kümesinin en az bir limit (yığılma) noktası, varsa, (X, τ) topolojik uzayına B-W kompakt uzay denir.* " ifadesini teorem olarak verelim;

Teorem: (X, τ) kompakt uzayın sonsuz her altkümesinin X de en az bir limit (yığılma) noktası vardır.

İspat: A, X in sonsuz bir altkümesi olsun. Kabul edelim ki A nın X de hiçbir yığılma noktası yoktur, yani $\forall x \in X$ için $\exists N_x \in N(x)$ açık komşuluğu var $\ni$ $A \cap N_x = \varnothing$ veya $A \cap N_x = \{x\}$ dır. $\forall x \in X$ için $x \in N_x$ olduğundan X= $\bigcup_{x \in X}^{n} N_x$ olur. Böylece $\{N_x : x \in X\}$ ailesi X in açık bir örtüsü olup, X kompakt olduğundan $\{N_{xi}$:i=l,2,...,n) sonlu alt örtü var $\ni$ X = $\bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}$ dır. $A \subset X$ olduğundan $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}$ olur, Böylece $A = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap N_{x_i}) = \varnothing$ veya $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap N_{x_i}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olur. Her iki durumda da A sonlu bir kümedir. Bu durum A nın sonsuz olması ile çelişir. O halde A nın X de en az bir yığılma (limit) noktası vardır.

3.1.2. Kompaktlık Çeşitleri

3.1.2.1. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X' deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa, X uzayına dizisel kompakt uzay denir.

Örnek: X - {0,1} ve $\tau = \{\varnothing, X, \{0\}, \{1\}\}$ olsun. Bu durumda (X, τ) ayrık bir uzay olup, bu uzay dizisel kompakttır. Çünkü bu uzayda alınan her dizinin alt diziler ya 0 a yada 1 e yakınsar.

Kompakt uzaylar genelde dizisel kompakt değildir. Gerçekten, N doğal sayılar kümesi, P(N) kuvvet kümesi ve B = {0,1} kümesi üzerinde ayrık topoloji verilmiş olsun. P(N) den B ye tanımlanan bütün fonksiyonların kümesine X diyelim. Bu durumda X üzerindeki topoloji B = {0,1} kümesi üzerindeki ayrık topolojinin P(N) indis kümesi üzerinden çarpım topolojisidir. B kompakt olduğundan X kompakt uzaydır. X kompakt uzayında bir (f_n) dizisini şöyle tanımlayalım: $A \in P(N)$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$f_n(A)=\begin{cases}1, & n\in A\\ 0, & n\notin A\end{cases}$$

olsun. Bu dizinin bir alt dizisi $(f_{n_k})_{k\in N}$ ve A={$n_1, n_3,..., n_{2k+1},....$ } (Burada p < q ise $n_p<n_q$) olsun. Bu durumda

$$f_n(A)=\begin{cases}1, & k \quad tek \quad ise\\ 0, & k \quad çift \quad ise\end{cases}$$

olsun. O halde bu dizi B uzayında (koordinat uzayında) yakınsak değildir.

Sonuç olarak X kompakt uzayı dizisel kompakt değildir. Ayrıca, bu örnek gösteriyor ki B={0,1} dizisel kompakt olduğu halde sonlu olmayan bir indis kümesi üzerinde dizisel kompakt uzayların kartezyen çarpımı dizisel kompakt değildir.

Örnek: B = (0,1) $\subset$R alt kümesi R nin alışılmış topolojisinden indirgenen topolojiye sahip olsun. B = (0,l) kümesi dizisel kompakt değildir. Gerçekten, B de alınan (x_n) = { $\frac{1}{n}$: n > 1) dizisi 0 noktasına yakınsar. Dolayısıyla dizinin her alt dizisi de 0 noktasına yakınsar. $0\notin$B olduğundan B dizisel kompakt değildir.

Teorem:(X,τ) dizisel kompakt uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

i) Dizisel kompaktlık kapalı altkümeler da kalıtsaldır.

ii) Dizisel kompakt uzayların sürekli fonksiyon altındaki görüntüleri de dizisel kompakttır, yani dizisel kompaktlık topolojik özelliktir.

İspat:

i) özelliği kolayca gösterilebilir.

ii) (X,τ) dizisel kompakt, (Y,τ') topolojik uzay ve f:X$\rightarrow$Y sürekli bir fonksiyon olsun. (y_n), f(X) de herhangi bir dizi olsun. Bu durumda $\exists(x_n)\subset$ X dizisi var $\ni f(x_n) = y_n$, $\forall$ $n\in$N dır. X dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi var $\ni$

$x_{n_k}\rightarrow x_0\in X$dır. f sürekli olduğundan $f(x_{n_k})\rightarrow f(x_0)\in f(X)$ dır. O halde f(X) dizisel kompakttır. Eğer f fonksiyonu örten ve sürekli ise, Y de dizisel kompakttır.

3.1.2.2. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X'e sayılabilir kompakt uzay denir.

Örnek: Kompakt her uzay, sayılabilir kompakttır. Çünkü kompakt uzayın her Örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bunlar içinde sayılabilir olanlarının da sonlu bir alt örtüsü vardır. Diğer taraftan sayılabilir kompakt uzayların kompakt olması gerekmez.

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) X sayılabilir kompakttır,

ii) X in sayılabilir sonsuz her altkümesi, bu uzayda en az bir yığılma (limit) noktasına sahiptir (B-W kompakt),

iii) X deki her dizi bir yığılma noktasına sahiptir.

İspat:

i)$\Rightarrow$ii) A, X de sayılabilir sonsuz bir altküme olsun. Kabul edelim ki A nın hiçbir yığılma noktası yoktur.

Bu durumda $\overline{A}= A\cup A'$ den $A= \overline{A}$ ve her bir $a_i \in A$ için $\exists N_i \in N(a_i)$ açık komşuluğu var $\ni$ $N_i \cap A=\{a_i\}$ dır. Yani A kapalı ye ayrık bir kümedir. Böylece $\{N_i : i \in N\} U A^c$ ailesi X in sayılabilir açık bir örtüşüdür. Bu örtü içinde X i örtecek şekilde hiçbir sonlu alt örtü yoktur. Bu bir çelişkidir. O halde A nın en az bir yığılma (limit) noktası vardır.

ii)$\Rightarrow$ii) $f:N\to X$ fonksiyonu X de bir dizidir, yani $f(N) = (x_n) \subset X$ dır. Eğer f(N) dizisi X de sayılabilir sonsuz bir altküme ise, hipotezden x_0 gibi bir yığılma noktası vardır. Yani x_0 in her komşuluğunda $f(N) = (x_n)$ dizisinin sonsuz çoklukta elemanı vardır. O halde $x_n \to x_0$ dır Diğer taraftan, eğer f(N), X de sonlu ise, bu demektir ki $\exists\, n_0 \in N$ var $\ni \forall n \geq n_0$ için $f(n) = x_0$ dır. Böylece $x_n \to x_0$ olur.

iii)=>i) Kabul edelim ki X sayılabilir kompakt değildir. Bu durumda X in sayılabilir $\{N_i : i \in I\}$ açık bir örtüsü var öyle ki bu örtünün X i örten sonlu bir örtüsü yoktur.

$\forall n \in N$ için $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ seçerek (x_n) dizisini oluşturabiliriz. Bu şekilde oluşan dizinin X de hiçbir yığılma noktası yoktur. Çünkü her bir $x \in X$ için $\forall N_{n(x)} \in N(x)$ komşuluğu var $\ni$ $(x_{n(x)+1}) \cap N_{n(x)} = \emptyset$ dır. Bu bir çelişkidir. O halde X sayılabilir kompakttır.

Sonuç: Her dizisel kompakt uzay, sayılabilir kompakttır.

İspat: Dizisel kompakt uzayda, her dizi yakınsak bir alt diziye sahip olduğundan, bu alt dizinin yakınsadığı nokta, uzayın bir limit noktasıdır. Uzay sayılabilir kompakttır.
O halde aşağıdaki diagram vardır:

$$\begin{array}{c} \text{Kompaktlık} \\ \Downarrow \\ \text{Sayılabilir kompaktlık} \Leftarrow \text{Dizisel kompaktlık} \\ \Downarrow \\ \text{B-W kompaktlık} \end{array}$$

Eğer (X, τ) topolojik uzayı ikinci sayılabilir uzay ise,
Kompaktlık $\Leftrightarrow$ Sayılabilir kompaktlık $\Leftrightarrow$ Dizisel kompaktlık ifadeleri denk kavramlardır. Bu ifadeler metrik uzaylarda da denktir.

3.1.3. Yerel Kompakt Uzaylar

Topolojik uzaylarda öyle kavramlar vardır ki, uzayın tamamında değil de, uzayın belli bölgelerinde sağlanır. Bunlar dan biri de yerel kompaktlıktır. Yerel kompaktlık kavramı, 1924 de Tietze ve Alexandroff tarafından verilmiştir.

3.1.3.1. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının X uzayında kompakt bir komşuluğu varsa, X uzayına x noktasında yerel kompakt denir,

Eğer, X uzayı her noktasında yerel kompakt ise, X uzayına yerel kompakt uzay denir, yani, X uzayı yerel kompakt $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için $\exists N \in N(x)$ komşuluğu var $\ni N$ kompakt.

Not: Çeşitli kaynaklarda, çok değişik fakat hepsi de doğru olan yerel kompaktlık tanımları vardır. Bunlardan bazıları:

a) $\forall x \in X$ için $\exists N \in N(x)$ komşuluğu var $\ni \overline{N}$ kompakt ise,

b) $\forall x \in X$ ve $\forall N \in N(x)$ için $\exists N^* \in N(x), N^* \subset N$ var $\ni \overline{N^*}$ kompakt ise,

c) $\forall x \in X$ için $\ni N \in N(x)$ var $\in$ N kompakt ise, (X, τ) uzayına yerel kompakt uzay denir.

Bu tanımların genel topolojik uzaylarda, durumları aşağıdaki gibidir:

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \text{ dır.}$$

(a), (b) ve (c) ifadelerinden en zayıf şart olan (c) dır. Bu bakımdan (c) özelliğini sağlayan yerel kompakt topolojik uzaylar sınıfı, diğerlerinden daha geniştir. Biz de (c) özelliğini tercih edeceğiz.

Örnek: Her kompakt uzay, yerel kompakttır. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir. Gerçekten, X kompakt ise, her noktasının kompakt bir komşuluğudur. Diğer taraftan R reel sayılar kümesi alışılmış topolojisi ile birlikte kompakt uzay değildir. Ancak her $x \in R$ için $[x-\mathcal{E}, x+\mathcal{E}]$ olacak şekilde $\mathcal{E} > 0$ sayısı bulmak mümkündür.$[x-\mathcal{E}, x+\mathcal{E}]$ kümesi R de kompakt bir altkümedir. O halde R yerel kompakttır.

Örnek: X sonsuz bir küme ve $\tau = P(X)$ olsun. Bu durumda (X, τ) ayrık uzayı kompakt değildir. Ancak $\forall x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi x in kompakt bir komşuluğu olduğundan (X, τ) yerel kompakttır.

Teorem: (X, τ) düzenli uzayı x noktasında yerel kompakt olsun. Bu durumda x noktasının kompakt komşuluklarından oluşan bir yerel tabanı (komşuluklar tabanı) vardır.

İspat: X düzenli ve x noktasında yerel kompakt olsun. Bu durumda x noktasının bir kompakt K komşuluğu vardır. N, x noktasının herhangi bir komşuluğu olsun. X düzenli bir uzay olduğundan teorem 6.31’ den x noktasının kapalı bir M komşuluğu var $\ni$ $M \subset N$ dır. Böylece $M \cap K \in N(x)$ ve $M \cap K \subset N$ dır. Ayrıca K, X in kapalı bir altkümesi olduğundan $M \cap K$ kümesi(M, τ_M) ye göre, M nin kapalı bir altkümesidir. M kompakt olduğundan $M \cap K$ de kompakttır. O halde x noktasının herhangi bir N komşuluğu için $M \cap K \subset N$ olacak şekilde x noktasının kompakt $M \cap K$ komşuluğu bulunmuş oldu. Bu şekildeki kompakt komşulukların ailesi, x noktasının bir yerel tabanını (komşuluklar tabanını) oluşturur.

Teorem: (X, τ) Hausdorff uzayı, $x \in X$ noktasında yerel kompakt olsun. Bu durumda x noktasının kompakt komşulukları, x in bir yerel tabanını oluşturur.

İspat: K, x noktasının kompakt bir komşuluğu ve $N \in N(x)$ herhangi bir komşuluğu olsun. Bu durumda (K, τ_K) kompakt Hausdorff alt uzayıdır. O halde K düzenli uzaydır. $K \cap N$, x in X de ve dolayısıyla K da bir komşuluğudur. K düzenli bir uzay olmasından x noktasının K da kapalı bir M komşuluğu var $\ni$ $M \subset K \cap N$ dır. M, K kompakt uzayın kapalı bir altkümesi olduğundan kompakttır. Ayrıca K, x in komşuluğu olduğundan M, X uzayında x in bir komşuluğu ve $M \subset N$ dır. Böylece M kompakt komşuluklarının oluşturduğu aile, x in yerel tabanıdır.

Sonuç: Her yerel kompakt Hausdorff uzay, düzenli uzaydır.

İspat: X yerel kompakt Hausdorff uzay ve $x \in X$ olsun. x in bütün kompakt komşuluklar ailesi, x noktasında yerel tabandır. X uzayı Hausdorff uzay olduğundan, her kompakt altkümesi kapalıdır. Böylece x in tabanı kapalı komşuluklardan oluşmaktadır. O halde X düzenli uzaydır.

Not: (a) Yerel kompaktlık sürekli fonksiyon altında korunan özellik değildir. Çünkü herhangi bir topolojik uzay, yerel kompakt olan ayrık uzayın sürekli bir görüntüsü olarak ifade edilebilir. Ancak sürekli fonksiyon açık fonksiyon olursa, yerel kompakt uzayın sürekli görüntüsü yerel kompakt olur. O halde yerel kompaktlık topolojik özelliktir.

(b) Yerel kompakt uzayların sonsuz çarpımları da yerel kompakt değildir. Çünkü R reel sayılan kümesi alışılmış topoloji ile yerel kompakt olmasına rağmen

$$\prod_{n \in N} R_n$$

çarpım uzayı yerel kompakt değildir. Ancak yerel kompakt uzayların sonlu çarpımları yerel kompakttır. Yani i=l,2,...,n için (X_i, τ_i) yerel kompakt $\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} (X_i, \tau)$ çarpım uzayı yerel kompakttır.

(c) Yerel kompakt kalıtsal değildir. Çünkü R reel sayılar kümesi alışılmış topolojiye göre yerel kompakttır. Fakat Q rasyonel sayılar kümesi yerel kompakt değildir.

Teorem: Yerel kompakt düzenli bir uzayın açık alt uzayı yerel kompakttır.

İspat: X yerel kompakt düzenli uzay ve $A \subset X$ açık altküme olsun, $y \in A$ alalım. A açık olduğundan $A \in N(y)$ dır. Ayrıca A, y nin X de de bir komşuluğudur. y noktasının

$K \subset A$ olacak şekilde bir kompakt K komşuluğu vardır. O halde A, y noktasında yerel kompakttır. y, A nın keyfi bir noktası olduğundan (A, τ_A) açık alt uzayı yerel kompakttır.

Teorem: (X, τ) Hausdorff uzay ve A da X de yoğun bir altküme olsun. Eğer (A, τ_A) yerel kompakt alt uzay ise, A altkümesi X de açıktır.

İspat: $y \in A$ herhangi bir nokta ve K, y nin A da kompakt bir komşuluğu olsun. Bu durumda N, y nin X de bir komşuluğu olmak üzere, K kompakt komşuluğu $N \cap A$ şeklindedir. $\overset{0}{N}$, N nin içi ise, $y \in \overset{0}{N}$ dır. Gösterelim ki, $\overset{0}{N} \subset A$ dır. $z \in \overset{0}{N}$ ve V, z nin X de herhangi bir açık komşuluğu ise, bu durumda $\overset{0}{N} \cap V$, X in açık bir altkümesidir. A, X de yoğun olduğundan $\overset{0}{N} \cap V \cap A \neq \varnothing$ dır. Bu da bize gösteriyor ki z nin her açık komşuluğu ile $\overset{0}{N}$ nin arakesiti boştan farklıdır. Böylece $z \in \overset{0}{N} \cap A$ ve $\overset{0}{N} \subset \overline{\overset{0}{N} \cap A}$ dır. K, X Hausdorff uzayın kompakt bir altkümesi olduğundan K, X de kapalıdır.

$\overset{0}{N} \subset N \Rightarrow \overset{0}{N} \cap A \subset N \cap A = K \Rightarrow \overline{\overset{0}{N} \cap A} \subset \overline{N \cap A} = \overline{K} = K$ dır. Yani $\overline{\overset{0}{N} \cap A} \subset K$ dır. O halde $\overset{0}{N} \subset K \subset A$ dır. A içindeki her noktanın komşuluğu olduğundan A açıktır.

Teorem: (X, τ) yerel kompakt Hausdorff uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) A yerel kompakttır,

ii) A, $\overline{A}$ da açıktır.

İspat: ii) $\Rightarrow$ i) $\overline{A} = B$ olsun. Önce gösterelim ki (B, τ_B) alt uzayı X in yerel kompakt alt uzayıdır. $y \in B$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $y \in X$ ve X yerel kompakt olduğundan, y noktasının X de kompakt bir K komşuluğu vardır. O halde $K \cap B$ kümesi y noktasının (B, τ_B) uzayında bir komşuluğudur. Diğer taraftan $B \subset X$ kapalı olduğundan $K \cap B$ kümesi (K, τ_K) uzayında kapalıdır. K kompakt Hausdorff uzay olduğundan $K \cap B$ kümesi (K, τ_K) da kompakttır. O halde $(K \cap B,) (\tau_B)_{B \cap K}) \subset (B, \tau_B)$ alt uzayı kompakttır. Böylece $K \cap B$ kümesi, y noktasının (B, τ_B) uzayında kompakt bir komşuluğudur. O halde (B, τ_B) alt uzayı y noktasında yerel kompakttır. y noktası keyfi olduğundan (B, τ_B) alt uzayı yerel kompakttır. Diğer taraftan (B, τ_B) Hausdorff uzay olduğundan (B, τ_B) düzenli uzaydır. Eğer A, B de açık ise, A yerel kompakttır.

i) $\Rightarrow$ ii) A yerel kompakt olsun. A, $\overline{A}$ de yoğun olduğundan teorem 7.34 den A, $\overline{A}$ de açıktır.

3.1.4. Kompaktlaştırma

Matematikte yapılacak bir iş için, bazen eldeki uzay, bu iş için yeterli olmadığı görülür. Örneğin, C kompleks düzlem üzerinde tanımlı kompleks analitik bir f(z) fonksiyonunun $z \to \infty$ için nasıl bir davranış gösterdiği araştırılırken, C kompleks düzlem Riemann küresinin bir alt uzayı olarak ele alınır. Öyle ki Riemann küresinin kuzey kutbu, "∞" notasyonu ile gösterilen ve ideal nokta diye adlandırılan noktaya karşılık getirilerek, Riemann küresi ile CU{∞}= C* kümesi arasında bire-bir eşleme yapılmış olur. Bu da bize f(z) fonksiyonunun "∞" noktasında nasıl bir davranış gösterdiğini inceleme imkanını verir. Bir başka örnek; $x^2 = 2$ denkleminin çözümü, Q rasyonel sayılar kümesinde imkansızdır. Ancak Q rasyonal sayılar kümesine -$\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ irrasyonal sayıların eklenmesi halinde, yani Q rasyonal sayılar kümesinin genişlemesi durumunda, bu denklemi çözmek mümkündür.

Kompaktlaştırma kavramının altında yatan temel düşünce, yukarıdaki örneklerden de anlaşıldığı gibi, verilen topolojik uzayın genişlemesidir. Yani kompakt olmayan bir topolojik uzay, kompakt olan bir topolojik uzay haline getirilebilir mi? Bu konudaki çalışmalar 1924 de Tietze in makalesinde kullandığı ″1-nokta kompaktlaştırması″ kavramı ile başlamıştır. Yine 1924 de Alexandroff ve Urysohn öncelikle kompaktlaştırmayı, sayılabilir kompakt uzayların genişlemesi olarak düşünmüşlerdir. Daha sonra 1930 da Tychonoff tamamen düzenli uzaylarda kompaktlaştırmada önemli çalışmalar yapmıştır. 1937 de M.H.Stone ve Cech, Tychonoff un düşüncelerini daha da geliştirmişlerdir. Bu konudaki çalışmalar Freudentha (1942), Myskis (1949), Kelley (1955), Wagner (1957) ve Kovvalsky (1961) ile devam etmiş ve etmeye de devam etmektedir.

3.1.4.1. Tanım

(X,τ), (Y, τ ') topolojik uzaylar ve $A\subset Y$ altkümesi Y de yoğun olsun. Eğer (X, τ) dan (A, τ'_A) ya bir homeomorfizm varsa,(Y,τ ') uzayına (X, τ) uzayının bir genişlemesi denir. (Y,τ ') genişlemeye T_α -genişlemesi denir $\Leftrightarrow$ (Y, τ ') T_α -uzayı ise, Burada T_α ayırma aksiyomlarında ki herhangi birisini göstermektedir.

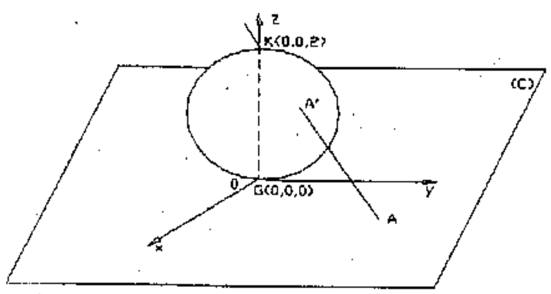
3.1.4.2. Tanım:

(X,τ) herhangi bir topolojik uzay, (Y, τ ') kompakt bir uzay ve $A \subset Y$ altkümesi Y de yoğun olsun. Eğer (X, τ) dan {A, τ'_A} ya bir homeomorfizm varsa, (Y,τ ') uzayına,(X, τ)uzayının bir kompaktlaştırması denir.

Örnek: Y, τ) kompakt bir uzay, X de Y de yoğun bir altküme ise, (X, τ_X) den (Y, τ) ye her $x\in X$ için i(x) = x şeklinde tanımlanan i dahil etme fonksiyonu, X den X e bir homeomorfizmadır. Dolayısıyla Y uzayı, X uzayının bir kompaktlaştırmasıdır.

Örnek: R reel sayıların alışılmış topolojisine göre, X=(0,1) açık aralığı R nın kompakt olmayan alt uzayıdır. Diğer taraftan $X\subset$ [0,1] = $\overline{X}$ in yoğun bir altkümesidir. O halde $i:X\rightarrow \overline{X}$, i(x) = x dahil etme fonksiyonu, X den X e bir homeomorfizmdir. Böylece X = (0,1) açık aralığının kompaktlaştınlması [0,1] kapalı aralığıdır.

Örnek: S^2 Riemann küresi ve C kompleks düzlem olsun. Aşağıdaki şekilde olduğu gibi S^2 küresini C kompleks düzlem üzerine yerleştirelim.



Şekil 3.1.1.

C kompleks düzlem üzerindeki herhangi bir A noktasını, kürenin kuzey kutbu olan K noktasını bir doğru ile birleştirdiğimizde, doğru küre üzerinde bir A' noktasını belirleyecektir. Böylece A noktası kompleks düzlemi taradığında, doğrunun diğer ucu K kuzey kutbundan geçmek şartı ile A' noktası da K noktası hariç, kürenin bütün noktalarını tarar, Yani, C den S^2-{K} ye f(A)= A' şeklinde tanımlanan f fonksiyonu birebir ve örten olur. Diğer taraftan C ile S^2-{K} kümelerinin üzerlerindeki topoloji göz önüne alınırsa, görülür ki fonksiyonu bir homeomorfizmdir. $\overline{S^2-\{K\}} = S^2$ olduğundan S^2 Riemann küresi, C kompleks düzlemin bir kompaktlaştırmasıdır.

Şimdi bir topolojik uzayın nasıl genişletilebileceğini gösterelim. Bunun için(X, τ) herhangi bir topolojik uzay ve p de X de olmayan herhangi bir nokta (veya bir sembol) olsun. Bu durumda X'=X$\bigcup$ {p} alalım ve X' kümesi üzerinde bir τ ' ailesini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

a) τ ya ait her küme τ ' ye ait,

b) A$\subset$X' altküme $\ni$ $p \in A$ için X' \ A = (X$\bigcup$ {p}) \ A = X\A$\bigcup$ {p}\A = X\A$\subset$

X altkümesi X de kapalı ve kompakt olmak üzere (X' kümesinin p noktasını içeren altkümelerin X' ye göre tümleyenleri X de kapalı ve kompakt olan X in altkümeleri) A$\in \tau$ ' olsun.

Teorem: Yukarıdaki notasyonlara göre,

1. τ ' ailesi X' üzerinde bir topolojidir.
2. τ ' topolojisinin X e kısıtlaması τ topolojisidir.
3. (X', τ ') kompakt uzaydır.
4. X kümesi X' uzayında yoğundur.

İspat:

1) τ_1 = {A$\subset$X': p$\in$A ve X'\A, X de kapalı ve kompakt} olmak üzere, $\tau' = \tau \bigcup \tau_1$ ailesinin X' üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

t_1)$\varnothing \in \tau$ olduğundan $\varnothing \in \tau$ ' dır. X'\X'=$\varnothing$ dır. $\varnothing$ küme X de kapalı ve kompakt olduğundan X'$\in \tau$ ' dır.

t_2) G,H$\in \tau$ 'için $G \bigcap H \in \tau$ '

i)G,H$\in \tau$ ise, G$\bigcap H \in \tau$ olduğundan G$\bigcap H \in \tau$ 'dır.

ii) $G \in \tau$ ve $H \in \tau_1$ ise, bu durumda G$\bigcap$H= G$\bigcap$(H-{p}) dır. Çünkü p$\notin$G dır. H-$\{p\}$ X in açık bir altkümesidir. Çünkü bu kümenin X deki tümleyeni X'\H ya eşittir. Bu kümede X de kapalı idi. O halde, H-{p}$\in \tau$ ve böylece $G \bigcap H \in \tau$ dır. $\tau \subset \tau'$ olduğundan $G \bigcap H \in \tau$ ' dır.

iii) $G,H \in \tau_1$ ise, $p \in G \bigcap H$ dır. O halde X'\ (G$\bigcap$H) = (X'\G) U(X'\ H) dır. X'\G ve X'\H, kümeleri X de kapalı ve kompakt olduğundan G$\bigcap$H$\in\tau_1$ dır. $\tau_1 \subset \tau'$ olduğundan $G \bigcap H \in \tau'$ dır. Böylece (t_2) şartı sağlanmış oldu.

t_3) $\{V_i\}_{i\in I} \subset \tau'$ için $\bigcup_{i\in I} = V \in \tau'$

i) Eğer $\forall i \in I$ için $v_i \in \tau$ ise, $\bigcup_{i\in I}$ $V_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} v_i \in \tau'$ dır.

ii) Eğer, bazı j$\in I$ için $V_J \in \tau_1$ ise, $V_j \subset V$ olduğundan p$\in$V dır.

X'\V= $\bigcap_{i\in I}$ (X' \$V_i$) = $\bigcap_{i\in I}$ (X\$V_i$) dır. Çünkü p$\in$X\V dır. Diğer taraftan p$\in V_i$ veya p$\notin V_i$ ise, her bir X\ V_i kümesi X de kapalıdır. Dolayısıyla X'\V de X in kapalı bir altkümesidir. X'\ V_i kompakt ve X'\V$\in$X'\$V_i$ olduğundan X'\V de X de kompakttır. O halde V$\in \tau_1$, ve V$\in \tau'$ dır. Sonuç olarak τ' ailesi X' üzerinde bir topolojidir.

2) Eğer $H \in \tau$ ise, açıkça H=H$\bigcap$X dır. Eğer $H \in \tau_1$ ise, p$\in$H dır. (t_2) (ii) de gösterildi ki H$\bigcap$X=H-{p} kümesi X de açıktır. O halde herhangi $H \in \tau'$ için X$\bigcap$ $H \in \tau$ dır. Böylece τ' nün X e kısıtlaması τ topolojisidir.

3) (X',τ') kompakt mı? β={B} ailesi X in açık bir örtüsü olsun. Bu örtünün bazı B$\in \beta$ için p$\in$B ise, X'\B kümesi X in kompakt altkümesidir. Dolayısıyla X' nünde kompakt altkümesidir. Böylece X'\B, β nın sonlu çokluktaki elemanlarından oluşan β' sonlu alt örtüsü ile örtülür. O halde $\beta' \bigcup \{B : p \in B$ ve B sonlu çoklukta} ailesi β nın X' yü örten sonlu alt ailesidir. Böylece X' kompakttır.

4) X' nün tanımından X$\subset$X' dır. Diğer taraftan τ' topolojisine göre, X kümesini kapsayan tek kapalı küme X' dır. O halde kapanış tanımından $\overline{X} = X'$ dır. Böylece X, X' de yoğundur.

3.1.4.3. Tanım

(X', τ') kompakt uzayına, (X, τ) topolojik uzayının bir-nokta veya Alexandroff kompaktlaştırması denir.

Tanımda görüldüğü gibi, X' üzerinde tanımlanan τ' topolojisi X de olmayan p noktasının seçimine bağlı değildir. Böyle bir noktanın seçimi her zaman mümkündür.

Çünkü kümeler teorisinde hiçbir küme yoktur ki kendisini kapsamasın. Örneğin, X de olmayan α ve β noktaları (sembolleri) seçilerek X$\bigcup$ $\{\alpha\}$ ve X$\bigcup\{\beta\}$ uzayları oluşturulabilir, öyle ki bu uzaylar homeomorftur. Çünkü $\forall x \in X$ noktasını kendisine ve α yı da β ya karşı getiren fonksiyon bir homeomorfizmdir. Bu da gösteriyor ki bir nokta kompaktlaştırma tanımı iyi tanımlıdır.

Örnek: C kompleks düzleme, S^2 Riemann küresinin kuzey kutbuna karşı gelecek şekilde, ideal nokta diye adlandırılan "∞" noktası ilave edilirse, yani C$\bigcup\{\infty\}$=C* kümesi üzerinde topoloji kurulabilir. O halde (C*,τ ')kompakt uzay olup, C nin bir nokta veya Alexandroff kompaktlaştırmasıdır.

Teorem: (Y,τ) kompakt Hausdorff uzay, $y_0 \in Y$ herhangi bir nokta ve X=Y\{y_0}olsun. Bu durumda Y, X in Alexsandroff kompaktlaştırmasına homeomorftur.

İspat: (X,τ_X) alt uzay ve X' de X in Alexsandroff kompaktlaştırması olsun. Y den X' ye bir f fonksiyonunu $\forall y \in Y$ için f(y) = y ve f(y_0) = p şeklinde tanımlayalım, f fonksiyonunun bire-bir ve üzerine *{bijektif)* olduğu açıktır. {y_0} tek nokta kümesi Y Hausdorff uzayında kapalı olduğundan X = Y\{y_0} kümesi Y de açıktır. Dolayısıyla X, Y nin açık altkümesidir. O halde f|X kısıtlaması sürekledir. Bu demektir ki f fonksiyonu $\forall y \in Y$,y$\neq$p için süreklidir. Gösterelim ki f fonksiyonu p noktasında süreklidir. f(y_0) = p noktasını içeren X' de herhangi bir G açık kümesini alalım. Bu durumda Y\f^{-1}*(G)* = f^{-1} (X'\G) =X\G kümesi X in kompakt altkümesidir. Y, T_2 - uzayı olduğundan Y de kapalıdır. O halde f^{-1}(G), Y de açıktır. Böylece f, p noktasında süreklidir. Sonuç olarak f, Y de süreklidir.

Şimdi f^{-1} in sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için f nin açık fonksiyon olduğunu gösterelim. G, Y de herhangi bir açık altküme olsun.

i) Eğer $y_0 \notin$ G ise, bu durumda $G \subset X$ *ve* f(G) = G kümesi açık ve dolayısıyla X' de açıktır. $\Rightarrow$ f açık fonksiyondur.

ii) Eğer $y_0 \in$ G ise, bu durumda p$\in$ f(G) ve X' \ f(G) = Y \ G kapalıdır. Y kompakt olduğundan X' \ f(G) = Y \ G kümesi kompakttır. O halde f(G), X' de açıktır. Yani f açık fonksiyondur. G keyfi olduğundan f^{-1}süreklidir. Sonuç olarak f bir homeomorfizmdir. Böylece Y, X' ye homeomorftur.

Sonuç: Uzayların genişlemesinde, verilen uzay T_α-uzayıdır $\Leftrightarrow$ uzayın genişlemesi T_α -genişlemesidir. Gerçekten; Y, T_2 -uzayı ise, Y, X' ye homeomorf olduğundan X' de T_2 -uzayıdır.

Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve(X',τ'), X in bir-nokta kompaktlaştırması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) X',Hausdorff uzayıdır.

ii*)* X yerel kompakt Hausdorff uzaydır.

İspat: i)$\Rightarrow$ ii) $X\subset X'$ ve X' Hausdorff uzayı olduğundan X de Hausdorff uzayıdır. X, X' nün açık alt uzayı ve X' Hausdorff uzayı olduğundan X yerel kompakt Hausdorff uzaydır.

ii)$\Rightarrow$ i) X yerel kompakt Hausdorff uzay ve x, $y\in X$, $x\neq y$ olsun. $x\neq p$ ve $y\neq p$ olduğundan X de $\exists U\in N(x)$ ve $\exists V\in N(y)$ açık komşulukları var $\ni$ $U\cap V=\emptyset$ dır. X' nün tanımından U ve V açıklan X' de de açıktır. Böylece x, $y\in X'$ noktalarının X' de de ayrık komşulukları vardır.

Şimdi $y\in X$ ve x = p alalım. X yerel kompakt olduğundan y nin X de K gibi kompakt bir komşuluğu vardır. X, Hausdorff uzayı olduğundan K, X de kapalıdır. O halde X' \ K, x noktasının açık bir komşuluğudur.

$U= X'\setminus K\in N(x)$ ve $V=\overset{o}{K}$ alalım. V, X de açık olduğundan X' de de açıktır. O halde $U\cap V=\emptyset$ olduğundan X' Hausdorff uzayıdır.

Sonuç: Her yerel kompakt Hausdorff uzayı tamamen düzenli (ve böylece bir Tychonoff uzayı) dır.

İspat: X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve X' de X in Alexsandroff kompaktlaştırması olsun. X' Hausdorff uzayıdır.

X' kompakt olduğundan X' tamamen düzenli uzaydır. Böylece X, X' nün alt uzay olması kalıtsallık özelliğinden X de tamamen düzenli uzaydır.

3.1.4.4. Tanım

(X,τ) herhangi bir topolojik uzay ve (Y,τ') kompakt bir uzay olsun. $i:X\rightarrow Y$ dahil etme fonksiyonu olmak üzere i(X), Y de yoğun ise, (i, Y) çiftine X in bir kompaktlaştırması denir. Eğer Y \ i(X) kümesinin tane elemanı varsa, (i, Y) ye n-nokta kompaktlaştırması denir.

Örnek: R de alışılmış topolojiye göre, X=(0,1) açık aralığı ve Y=[0,1] olsun. i:(0,1) → [0,1] fonksiyonu dahil etme fonksiyonu olup, $i((0,1)) \subset [0,1]$ altkümesi [0,1] de yoğundur. O halde [0,1] \ i((0,1))={0,1}olduğundan (i,Y), X in 2-nokta kompaktlaştırmasıdır.

3.2. YÖNTEM

3.2.1. Quasi H-Kapanma ve Yarı Düzenlilik

Bu bölüm quasi H-kapalı ve yarı düzenli uzayların hakkında kullanılan bilgilerin bir kataloğuna temeldir. Eğer her açık örtü, kapanışları uzayı kapsayan sonlu bir alt aileye sahipse, bir başka deyişle her açık örtünün sonlu bir yaklaşık alt örtüsü varsa, X uzayı quasi H-kapalıdır. τ topoloji ile X uzayının bir A alt uzayı her bir τ açık ailesi A yı örten sonlu bir alt ailenin bileşimi A da τ yoğunsa X'e bağlı quasi H- kapalıdır. Kompaktlıkta olduğu gibi quasi H-kapalılık mutlak değildir. Bir A alt uzayı X'e göre quasi H-kapalı olduğu halde kendisi quasi H-kapalı olmayabilir. Diğer taraftan A kendisi quasi H-kapalı ise alt uzayı olduğu her uzaya göre quasi H-kapalıdır. Bu bağlamda aşağıdaki gözlemlerin doğruluğu kolayca görülür.

(3.2.1.1) Quasi H- kapalı alt uzayın kapanışı quasi H-kapalıdır.

(3.2.1.2) Quasi H- kapalı uzay içindeki açık alt kümelerin kapanışı da quasi H-kapalıdır.

(3.2.1.3) Eğer A ve B, X'in quasi H-kapalı alt kümeleri iseler A∪B de quasi H-kapalıdır.

(3.2.1.4) Eğer A, quasi H-kapalı X uzayının kapalı bir alt kümesi ve A nın sınırı quasi H-kapalı ise o zaman A da quasi H-kapalıdır.

(3.2.1.5) X Hausdorff ve A, X e bağlı H- kapalı olsun. Her bir y $\in X$ -A için bir U_y açık kümesi için $A \subset \tau(U_y) \subset X - \{y\}\, olur. y \in X - A\; için\; A = \cap\, \tau(U_y)$. Bu yüzden A, X de kapalıdır.

U kümesi X in bir alt kümesi ise $\alpha(U) = int(clU))$ olarak tanımlanır. $\alpha(U) = U$ ise U ya yarı düzenli bir açık küme denir. Eğer p nin düzenli açık komşulukları p de komşuluk tabanı ise $p \in X$, yarı düzenli noktadır. Her bir nokta yarı düzenliyse X yarı düzenlidir. Eğer p nin kapalı komşuluklarının kesişimi $\{p\}$ ise p bir T_2 noktasıdır (veya X, p de yerel Hausdorfftur). $\mathfrak{U}$ (X) kümesi X içinde bir τ süzgecin yeğane yığılma noktası olan noktalar kümesi olsun.

(3.2.1.6) $X, H(i)\; dir$ olması için gerek ve yeter koşul X quasi H-kapalıdır.

(3.2.1.7) Eğer X , $H(ii)$ ve $\mathfrak{U}$(X) boş değilse ise X, quasi H-kapalıdır.

(3.2.1.8) Eğer $p \in \mathfrak{A}(X)$ ise o zaman $\overline{\{p\}} = \{p\} dir. Eğer\ \mathfrak{A}(X) = X\ ise\ X$, T_1dir.

(3.2.1.9) Eğer X, H(ii) ise o zaman X in her Hausdorff noktası yarı düzenli noktadır.

(3.2.1.10) Eğer X kompakt ise o zaman X, H(ii) dir.

(3.2.1.11) Eğer X quasi H-kapalı ve $\mathfrak{U}$(X) in her bir noktası yarı düzenli ise o zaman X, H(ii) dir.

İzleyen örneklerde görüleceği gibi (3.2.1.11) in tersi doğru değildir. X, eklenmiş bir p noktası ile reel sayıların kapalı [-1,1] aralığı olsun. p nin bir komşuluk tabanının $\{\{p\} \cup (0, {}^1/_n) | n = 1,2,3, \dots\}$ kümelerinden oluştuğunu varsayalım. Diğer noktaların komşuluklarının ise [-1,1] aralığındaki alışılagelmiş topolojideki gibi olsun. X kompakttır ve bu yüzden H(ii) dir. $\{(-{}^1/_n, 0) | n = 1,2,3, \dots\}$ kümesi 0 (sıfır) noktasına bağlı olarak açık süzgeç tabanıdır. Fakat X, 0 da (sıfır noktasında) ne Hausdorff ne de yarı düzenlidir.

(3.2.1.12) H(i) fonksiyonlar altında korunur.

Düzenli açık kümelerin ailesi, sonlu kesişimler altında kapalıdır ve X' i örterler. Düzenli açık kümelere X de τ_s ile gösterilen ve verilen topolojiden daha küçük olan bir topolojinin tabanıdır. Bu topoljiye τ nun yarı düzenlileştirilmişi denir.

(3.2.1.13) U$\in \tau\ ise\ \tau(U) = \tau_s(U)\ ve\ \alpha_\tau(U) = \alpha_{\tau_s}(U)\ dir.$

(3.2.1.14) Eğer U ve V ayrık τ açık kümelerse $\alpha(U)\ ve\ \alpha(V)$ de ayrık τ açık kümelerdir.

(3.2.1.15) $X, \tau\ topolojisine\ sahipken$ eğer Y düzenli ve $f: X \rightarrow Y\ sürekliyse\ o\ zaman\ X,\ \tau_s\ topolojisine\ sahipken\ f$ süreklidir.

(3.2.1.16) Eğer (X,τ) uzayı H-kapalıysa ya da H(i) özelliğine sahipse o zaman (X,τ_s) uzayı minimal Hausdorfftur ya da H(ii) özelliğini sağlıyor demektir.

(3.2.1.17) Eğer (X,τ) uzayı H-kapalı ve Urysohn ise o zaman (X,τ_s) kompakttır. Bu nedenle düzenli bir H-kapalı uzayı kompakttır.

3.2.2. H-Kapalı Urysohn Uzayları

Bir H-kapalı, Urysohn uzayı kompakt olmak zorunda değildir. Herhangi bir uzay, her nokta çifti sürekli bir fonksiyon tarafından ayrılabiliyorsa bu uzay tamamen Hausdorfftur.

Teorem: X, H-kapalı Urysohn uzayı M, X' e bağlı H-kapalı olsun ve $\boldsymbol{p} \notin \boldsymbol{M}$ olsun. Bu takdirde **p** ve M nin ayrık kapanışlarının komşuluklarını bulabiliriz.

İspat: Kompakt Hausdorff uzayının düzenli olduğunu gösterirken kullanılan kanıt burada tekrarlanırsa p nin U ve M nin V ayrık açık komşuluklarını bulabiliriz. $\tau(V)$, (3.2.1.2)den X e bağlı quasi H-kapalıdır. İspatı tamamlamak için M yerine $\tau(V)$ kullanabiliriz.

Teorem: (X, $\boldsymbol{\tau}$) H-kapalı Urysohn uzayı ve A alt küme olsun. Aşağıdakiler denktir.

(a) A, X' e bağlı H-kapalıdır.

(b) X-A, τ_s-açıktır.

(c) A, (X,τ_s) de kompakttır.

Teorem: (X,$\boldsymbol{\tau}$) H-kapalı Urysohn uzayı ve M ve N, X ‘ e bağlı H-kapalı ayrık alt kümeler olsun. Bu takdirde;

(a) M de 0 (sıfır) ve N de 1 değerini alan (X,τ) da sürekli, reel değerli f fonksiyonu vardır.

(b) M ve N ayrık komşuluklara sahiptir.

(c) (X,τ) tamamen Hausdorfftur.

3.2.3 Katetov Genişlemesi

Eğer X⊂Y, $\sigma_X = \tau$ ve $\sigma(X) = Y$ ise (Y, σ), (X, τ) nun genişlemesidir. p herhangi bir topolojik özelliği için, X in bir p-genişlemesi bu özelliğe sahip bir genişlemedir. (Y, σ),(X, τ) nun genişlemesi olsun. Y-X içindeki her bir y için, $\mathcal{N}(y)$, $\alpha < A >$ süzgeçinin X de izi olsun ve τ da U için $I(U) = \{y \in \mathrm{Y} - \mathrm{X} \mid \mathrm{U} \in \mathcal{N}(y)\}$. Bu çalışmada kullanılacak X in diğer genişlemelerinden (Y, σ) ayırmak gerekliyse $I(U)$ kümesi $I(U, \sigma)$ şeklinde gösterilecek.

Önerme: (Y,$\boldsymbol{\sigma}$) , (X,$\boldsymbol{\tau}$) nun genişlemesi olsun. U,V∈ $\boldsymbol{\tau}$ olsun.

(a) $I(U) \subset \sigma(U) - X$

(b) $I(U) \cap I(V) = I(U \cap V)$

(c) $U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow (U \cup I(U)) \cap (V \cup I(V)) = \emptyset$

(d) $W \in \sigma için W \subset$ (W ∩ X) ∪ I(W ∩ X)

(e) $U \cup I(U) \in \sigma$

(f) Her bir $W \in \sigma\ için\ \sigma(W \cap X) = \sigma(W)$

Eğer Y ve Z, X in genişlemeleri ve Y den Z ye, X in noktalarını sabit bırakan sürekli bir fonksiyon varsa o zaman Y, Z den daha geniş izdüşümdür. (Y>Z). Eğer X in noktalarını sabit bırakan Y den Z ye homeomorfizma varsa Y ve Z izomorfiktir. Eğer Y ve Z, X in Hausdorff genişlemeleriyse Y ve Z izomorfiktir. ⇔Y>Z ve Y<Z dir.

X in Hausdorff genişlemesi Y, eğer ϕ kümesi içinde bulunan her bir Z den daha geniş izdüşüm ise X in Hausdorff genişlemesinin ϕ kümesi içinde en büyük izdüşümdür. Şimdi Katetov genişlemesinin inşasının bir özetini verelim.

X*, X uzayına her bir her bir serbest $\tau - ultrasüzgeç$ $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ için bir p($\boldsymbol{\mathcal{F}}$) noktası eklenmesiyle elde edilen ideal noktaların I(X) kümesin birleşiminden oluşan küme olsun.

X deki her bir x için $\tau < x >$ x in τ^* komşuluğudur. p($\boldsymbol{\mathcal{F}}$) ideal noktalarının τ^*komşulukları $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ deki kümelerin her birine p($\boldsymbol{\mathcal{F}}$) eklenmesiyle elde edilen kümeler olsun. (X^*, τ^*), yoğun açık alt küme olarak X i içerir ve H-kapalıdır. Bu (X,τ) nun Katetov genişlemesi olarak adlandırılır ve bu X de her sınırlı, sürekli, reel fonksiyon X^* a genişleyebilir ve bu Stone-Cech kompaktifikasyonuna benzerdir. X^* da M için $int_{\tau^*}M = int^*M$, $\alpha_{\tau^*}(M) = \alpha^*(M)$, $M \cap X = M_1 ve M - X = M_2$dir.

Teorem: $\mathbf{X}^*$, X in katetov genişlemesi olsun.

$(a) M \subset X^*$ için ,int^*M =$(int_\tau(M_1) \cup (M_2 \cap I(int_\tau(M_1)))$

(b)τ^*içinde U için$\tau^*(U) = \tau(U_1) \cup I(U_1) ve I(U_1) = \tau^*(U_1) - X$

(c)$\tau içinde U için I(U) = I(\alpha_\tau \in (U))$

(d) $U \in \tau^*$,$\alpha^*(U) = \alpha_\tau(U_1) \cup I(U_1)$

Teorem: $(\boldsymbol{X}^{*}, \boldsymbol{\tau}^{*})$ Katetov genişlemesi, (X,$\boldsymbol{\tau}$) Hausdorff uzayının H-kapalı genişlemeleri arasında en büyük izdüşümdür.

Sonuç: X ve Y Hausdorff uzayı olsun ve$f: X \rightarrow Y$fonksiyonu sürekli, açık fonksiyon olsun. Bu durumda $f: X^{*} \rightarrow Y^{*}$ sürekli bir fonksiyona genişletilebilir. Katetov genişlemesi, en büyük izdüşüm H-kapalı genişlemesine izomorftur.

3.2.4. Katetov Genişlemesi ve Yarı Düzenlilik

Teorem: (X,$\boldsymbol{\tau}$) herhangi bir topolojik uzay olsun. Eğer $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, X de bir(serbest) $\boldsymbol{\tau - ultras}$ü$\boldsymbol{zge}$ç olsun. O zaman $\boldsymbol{\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \cap \tau_s}$ bir (serbest) $\boldsymbol{\tau_s}$-ultra süzgeçtir. Eğer $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ farklı $\boldsymbol{\tau - ultra\ s}$ü$\boldsymbol{zge}$çlerse $\boldsymbol{\mathcal{F}_s ve\ \mathcal{G}_s}$ de farklı $\boldsymbol{\tau_s}$-ultra süzgeçtir.
$\mathcal{F}'\tau_s$-ultra süzgeç ise o zaman$\mathcal{F}'$yi içeren $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ gibi bir ve yalnız bir (serbest) $\tau - ultrasüzgeç$ vardır ve $\mathcal{F}' = \mathcal{G}_s$ dir.

Teorem: X in t birim tasviri $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{\tau}_s')$, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau_s})$ nin Katetov genişlemesi olmak üzere sürekli, 1-1, örten $\boldsymbol{t}^{*}$: $(\boldsymbol{X}^{*}, \boldsymbol{\tau}^{*})$→ $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{\tau}_s')$ fonksiyonuna genişletilebilir.

İspat: $t^{*}(\mathrm{p}(\mathcal{F})) = \mathrm{p}(\mathcal{F}_s)$ olarak tanımlansın. t^{*}, 3.2.4.1teoreminden 1-1 ve örtendir. t^{*} süreklidir. $U \in \tau_s'$ ve U nun parçalanışı $U_1 = U \cap X ve U_2 = U - X\ olsun.$ $U_1 \in \tau_s$, $U_2 \subset \mathrm{I}(U_1, \tau_s')$ ve $t^{*-1}(U) = U \cup t^{*-1}(U_2)$.
Eğer p($\boldsymbol{\mathcal{F}}$) ideal noktaları $t^{*-1}(U_2)$ aitse o zaman $\mathrm{p}(\mathcal{F}_s)$ U_2ye aittir. Böylece $\mathcal{F}_s$ (ve bu yüzden $\boldsymbol{\mathcal{F}}$) U_1 i içermek zorundadır. $U_1 \cup \{\mathrm{p}(\mathcal{F})\}$ açıktır ve $t^{*-1}(U)$ bu şekildeki kümelerin birleşimidir ve dolayısıyla açıktır.

Sonuç: U, X in $\tau_s - açık$alt kümesi olsun. Bu takdirde t^{*} fonksiyonu $\mathrm{I}(U, \tau^{*})$kümesini $\mathrm{I}(U, \tau_s')$kümesini üzerine tasvir eder.

İspat: 3.2.4.1 teoreminin ispatından $\mathrm{I}(U, \tau_s') \subset t^{*}(\mathrm{I}(U, \tau^{*}))$ dır. Eğer p($\boldsymbol{\mathcal{F}}$), $\mathrm{I}(U, \tau^{*})$kümesine ait ise o zaman $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, U yu içerir. Çünkü $U \in \tau_s$dir. $\mathcal{F}_s$ de U yu içerir. Bu yüzden $\mathrm{p}(\mathcal{F}_s) = t^{*}(\mathrm{p}(\mathcal{F}))$, $\mathrm{I}(U, \tau_s')$ kümesine aittir.

Teorem: $\boldsymbol{t}^{*}$, $(\boldsymbol{X}^{*}$, $(\boldsymbol{\tau}^{*})_s)$ dan $(\boldsymbol{X}', (\boldsymbol{\tau}_s')_S)$ a $\boldsymbol{t}_S^{*}$ homeomorfizmasını doğurur.

İspat: t_S^{*}ve t^{*}aynı fonksiyonlardır. Bu yüzden t_S^{*} , 1-1 ve üzerinedir.
t_S^{*} ın sürekli olduğunu göstermek için $U = \alpha_S'(U)$, τ_S' de düzenli açık küme olsun. Göstermek zorundayız ki $t^{*-1}(U)$, τ^{*}da düzenli açıktır. 3.2.3.2 Teorem (d) den U açık kümesi(X, σ)nun Katetov genişlemesinde düzenli açıktır ⇔

U_1, σ $düzenli$ $açık$ ve $U_2 = \mathrm{I}(U_1, \sigma^*)$ dir. 3.2.4.1 deki Sonuç'tan $t^{*-1}(U) = U_1 \cup t^{*-1}(I(U_1, \tau'_S)) = U_1 \cup I(U_1, \tau^*)$ ve U_1 , $\tau_S -$ $düzenli$ $açık$ olduğundan aynı zamanda $\tau -$ $düzenli$ $açıktır$. $(X^*, (\tau^*)_S)$ minimal Hausdorff olduğundan (3.2.1.16), τ_S^* bir homeomorftur.

Teorem: i: $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau}) \rightarrow (\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{\tau}^*)$ ve i_S: $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau}_S) \rightarrow (\boldsymbol{X}', \boldsymbol{\tau}'_S)$ fonksiyonları alışılagelmiş gömme fonksiyonları olsun. p: $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{\tau}^*) \rightarrow (\boldsymbol{X}^*, (\boldsymbol{\tau}^*)_S)$ ve p_S: $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{\tau}'_S) \rightarrow (\boldsymbol{X}', (\boldsymbol{\tau}'_S)_S)$ özdeş fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccc}
(X, \tau) & \xrightarrow{\ i\ } & (X^*, \tau^*) & \xrightarrow{\ p\ } & (X^*, (\tau^*)_S) \\
\downarrow t & & \downarrow t^* & & \downarrow t_S^* \\
(X, \tau_S) & \xrightarrow{\ i_S\ } & (X', \tau'_S) & \xrightarrow{\ p_S\ } & (X', (\tau'_S)_S)
\end{array}$$

Şekil 3.2.1.

Ayrıca p_S o i_S, yoğun gömmedir ve t_S^* homeomorfizmadır.

İspat: Değişmeli diyagramı kontrol etmek kolaydır. $U_1, \tau -$ $düzenli$ $açık$ ile $U_1 \cup I(U_1, \tau'_S)$ formunun kümeleri, $(X', (\tau'_S)_S)$ nın tabanıdır ve p_S o i_S nin ters görüntüleri U_1 olduğundan p_S o i_S bir gömme olduğu açıktır. Yoğun bir gömme olması ise i_S nin yoğun bir gömme olmasının bir sonucudur.

Sonuç. X, bir minimal Hausdorff uzayının içinde yoğun gömülüdür olması için gerek ve yeter koşul X Hausdorff ve yarı düzenlidir.

3.2.5. H-Kapalı Genişlemeleri ve Stone –Weierstrass Özelliği

3.2.5.1. Tanım

(X, τ) Hausdorff ve yarı düzenli olsun. µX = X^* ve µ = $(\tau^*)_S$. (µX, µ), (X, τ) nun Katetov Minimal Hausdorff genişlemesi olarak adlandırılacaktır.

Teorem: X tamamen düzenli, µX, X in Katetov Minimal Hausdorff genişlemesi ve (βX, β), X in Stone- Cech kompaktifikasyonu olsun. X in birim dönüşümünü genişleten ϕ:(µX, µ)→(βX, β) gibi üzerine ve sürekli fonksiyon vardır.

İspat: f: (X^*, τ^*)→(βX, β)fonksiyonu sürekli, üzerine bir f fonksiyonu vardır öyleki 3.2.1.15 ten $\forall x \in X$ $için$ $f(x) = x$ dir. ϕ: $(X^*, (\tau^*)_S)$ →(βX,β):y→ $f(y)$ süreklidir.

Teorem: X tamamen düzenli olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) μX, βX e izomorfiktir.

(b) ϕ: μX→ βX fonksiyonu 1-1 dir.

(c) μX kompakttır.

(d) μX Urysohndur.

Teorem: μX = βX olması için gerek ve yeter koşul $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ **nın düzenli** olması ve her bir $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ayrık serbest $\boldsymbol{\tau - ultra\, süzgeç}$ çifti için $\mathcal{F}$'de U ve $\mathcal{G}$ de V $\boldsymbol{\tau(U)} \cap \boldsymbol{\tau(V)} = \emptyset$ koşulunu sağlayan çık kümeleri olmasıdır.

İspat: Gereklilik açıktır. Tersine X in düzenli olduğunu ve verilen koşulları sağladığını varsayalım. X^*ın Urysohn olduğunu görmek yeterlidir.(3.2.1.17) den μX kompakttır. x ve y X^* ın ayrık noktaları olsun. Eğer bu noktalardan biri veya ikisi X içinde ise x ve y ayrık kapalı komşuluklara sahiptir. Farz edelim ki x= p($\mathcal{F}$) ve y= p($\mathcal{G}$) olsun. Hipotezden $\mathcal{F}$de U ve $\mathcal{G}$ de V açık kümeleri vardır öyle ki $\tau(U) \cap \tau(V) = \emptyset$ ve $U' = U \cup \{p(\mathcal{F})\}$ ve $V' = V \cup \{p(\mathcal{G})\}$,p($\mathcal{F}$) ve p($\mathcal{G}$) nin açık komşuluklarıdır. 3.2.3.2 teoreminden$\tau(U) \cap I(U) = \tau^*(U')ve\tau(V) \cap I(V) = \tau^*(V')$dır. Açıkçası $I(U) \cap I(V)$ boştur bu yüzden $\tau^*(U') \cap \tau^*(V')$ boştur.

3.2.5.2. Tanım

X in M alt kümesi, ki $\tau(U) \cap \tau(V) = \tau(M)$ olacak şekilde U ve V'nin ayrık açık kümeleri varsa M ye düzenli olarak hiçbir yerde yoğun değildir denir.

Her kapalı, düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan küme, düzenli açık kümenin sınırının alt kümesidir. Her düzenli açık kümenin sınırı düzenli de olsa her yerde yoğun değildir.

μX=βX⇔X tamamen düzenlidir ve X de her düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı kümenin kompakt olduğu teoremini Katetov ispatlanmıştır.

Teorem: μX = βX ⇔X tamamen düzenlidir ve X de her düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı küme kompakttır.

İspat: Farz edelim ki μX = βX olsun. X düzenlidir ve eğer M,X de düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan küme ise o zaman $U_1 ve\, U_2$ayrık açık kümeleri vardır öyle ki $\tau(U_1) \cap \tau(U_2) = M$ dir. İ=1,2,3,… için $\alpha_\tau(X - U_i) = X - \tau(U_i)$ dir.

Böylece $(X-\tau(U_i)) \cup I(X-\tau(U_i)) \in M ve\ W = U_{i=1}^{2}((X-\tau(U_i)) \cup I(X-\tau(U_i))$. X-M, X de yoğun açık kümedir ve bu yüzden her $\tau -$ ultra süzgeç e aittir.

Çünkü $X - M = (X-\tau(U_1)) \cup (X-\tau(U_2))\ bu\ yüzden\ I(X-\tau(U_1)) \cup I(X-\tau(U_2)) =$ μX − X dir.Bu yüzden W, μ −açık kümedir, M'den ayrıktır ve μX − Xi içerir. Bu yüzden $\mu(\mathrm{M}) = \tau(M) = M$ kompakttır. Tersine, eğer X düzenlidir ve her düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı küme X de kompakt olduğunu görmek kolaydır.

Sonuç: Eğer X Hausdorff ve yarı düzenli ve X de her düzenli hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı küme kompaktsa X tamamen düzenlidir ve μX = βXdir.

İspat: Bir Hausdorff X uzayında, X de her düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı kümenin kompakt olması için gerekli ve yeter şart X in izole edilmemiş noktalarının alt kümesinin kompakt olmasıdır. Çünkü daima düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler, hiçbir yerde yoğun değildir. Öyle ise sonlu sayıda izole edilmemiş noktalara sahip Hausdorff uzayları (özellikle ayrıksı uzaylar) Katetov Minimal Hausdorff genişlemesi, Stone- Cech kompaktifikasyonuna izomorfiktir.

3.2.5.3. Tanım

$C^*(X)$; X de, ,reel değerli sürekli fonksiyonlar olarak tanımlansın. Eğer X de her bir x ve y ayrık nokta çifti için, K da f(x) ≠ f(y)fonksiyonu varsa K⊂ $C^*(X)$ kümesi noktaları ayırır diyeceğiz.

3.2.5.4. Tanım

Eğer X tamamen Hausdorff ve noktaları ayıran her K ⊂ $C^*(X)$ alt halkası için $C^*(X)$ içindeki her f, K da bir fonksiyonlar dizisinin düzgün limiti oluyorsa X uzayı, Stone –Weierstrass özelliğine sahiptir denir.

Önerme: (X,τ) Stone–Weierstrass özelliğine sahiptir⇔(X,τ_s) Stone-Weierstrass özelliğine sahiptir.

Teorem: X, H-kapalı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(a) X, Urysohndir.

(b) X tamamen Hausdorfftur.

(c) X, Stone –Weierstrass özelliğine sahiptir.

Teorem: X Hausdorff olsun. $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{\tau}^*)$, $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ nun Katetov genişlemesi Stone – Weierstrass özelliğine sahiptir olması için gerek ve yeter koşul $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau_s})$de her düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan $\boldsymbol{\tau_s}$ -kapalı küme kompakttır.

İspat: Farz edelim ki(X^*, τ^*) Stone –Weierstrass özelliğine sahip olsun.

$(\mu' X, \mu')$, (X, τ_s) nin Katetov Minimal Hausdorff genişlemesi olsun. 3.2.4.3 Teoreminden $(\mu' X, \mu')$,$(X^*, (\tau^*)_s)$'e homomorftur ki (3.2.1.17) den kompakttır. 3.2.5.4 Teoreminden her düzenli olarak hiçbir yerde yoğun olmayan τ_s -kapalı küme(X, τ_s) de kompakttır. Tersine farz edelim ki yukarıdaki şartlar sağlansın. 3.2.5.1 sonucundan $(\mu' X, \mu')$ kompakt Hausdorfftur ve 3.2.4.4 Teoreminden$(X^*, (\tau^*)_s)$ kompakt Hausdorfftur. Bu yüzden Stone–Weierstrass özelliğine sahiptir. 3.2.5.1 önermesinden (X^*, τ^*) Stone –Weierstrass özelliğine sahiptir.

Önerme: X Hausdorff ve X^*,X in Katetov genişlemesi olsun. $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}, \tau-$ kapalı açık ve $\mathrm{M} = \tau^*(\mathrm{U})$ ise o zaman $(M, (\tau^*)_M)$, U'nun Katetov genişlemesidir.

İspat: X^*da $\tau^*(\mathrm{U}) = \mathrm{U} \cup \mathrm{I}(\mathrm{U})$, $\tau^*(\mathrm{U})$, (3.2.1.2) den H- kapalıdır. $(U^*, (\tau_{\mathrm{U}})^*)$, (U, τ_U) nun Katetov genişlemesi olsun. Her bir p($\mathcal{F}$)∈ $I(U)$ için $\mathcal{F}_{\mathrm{U}} = \{\mathrm{V} \in \mathcal{F} | \mathrm{V} \subset \mathrm{U}\}$ kümesi $\tau_U - ultra\ süzgeçtir.$ Üstelik her bir $\tau_U - ultra\ süzgeç$ $\boldsymbol{\mathcal{G}}$, tek $\tau - ultra\ süzgeç$ $\mathfrak{K}$ yi içerir ve $\mathfrak{K}_U$= $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ dir. Bu yüzden $f: \tau^*(\mathrm{U}) \to U^*$ olarak tanımlanan f fonksiyonu; U içindeki x için $f(x) = x$ ten ve I(U)içindeki p($\mathcal{F}$) için $f\big(\mathrm{p}(\mathcal{F})\big) = f(\mathcal{F}_{\mathrm{U}})$ 1-1 ve üzerinedir. f fonksiyonu süreklidir.

δ, Hausdorff tamamen normal ve full normal uzayları bir alt sınıf olarak içeren topolojik uzayların bir sınıfı olsun. Profesör L.L. Herrington ve P.E. Long şu gerçeği kanıtlamışlardır:

Bir Y Hausdorff uzayı, H-kapalıdır⇔δ sınıfındaki her X uzayı için, grafiği kuvvetlice-kapalı her bir g:X⟶Y fonksiyonu zayıf olarak süreklidir.

3.2.5.5. Tanım

Eğer V, uzayın açık alt kümesi, $\mathrm{x} \in \mathrm{V}$ ve $\mathrm{K} \cap \mathrm{cl}[\mathrm{V}] \neq \emptyset$ şartı sağlanıyorsa x noktası uzayın K alt kümesinin$\theta-$ kapanışındadır ve bunu $\mathrm{x} \in \theta - \mathrm{cl}[\mathrm{K}]$ şeklinde göstereceğiz.

3.2.5.6. Tanım

$F \in \omega$ olmak üzere $x \in \theta - cl[F]$ ise x noktası tanımlanan uzayda ω süzgeç tabanının $\theta -$ bağlı bir noktasıdır. Bu durumda ω süzgeç tabanı x e $\theta -$ bağlıdır denir ve bu $x \in \theta - adh\ \omega$ şeklinde gösterilir.

3.2.5.7. Tanım

Eğer her $x \in X$ ve $g(x)$ civarında Y de her W açığı için $g(V) \subset cl[W]$ şartını sağlayan X de x in civarında bir V açığı varsa $g:X \longrightarrow Y$ fonksiyonu zayıf olarak süreklidir.

Teorem: $g:X \longrightarrow Y$ fonksiyonu zayıf olarak süreklidir olması için gerek ve yeter koşul her bir $K \subset X$ için $g(cl[K]) \subset \boldsymbol{\theta} - \mathbf{cl}[\mathbf{g}(\mathbf{K})]$ dır.

İspat: Gereklilik: $K \subset X$ ve $g:X \longrightarrow Y$ fonksiyonu zayıf olarak sürekli olduğu yerde $y \in g(cl[K])$ olsun. $x \in cl[K]$ ile $y=g(x)$ ve y civarında W açığı olsun.

$g(V) \subset cl[W]$ şartını sağlayan x in civarında bir V açığı vardır. Bu yüzden $\emptyset \neq g(V \cap K) \subset g(V) \cap g(K) \subset cl[W] \cap g(K)$ dır. Böylece gereklilik tamamlanır.

Yeterlilik: Farz edelim ki $g:X \longrightarrow Y$ fonksiyonu teoremin şartlarını sağlasın.

$x \in X$ ve Y de $g(x)$ civarında W açık olsun.

O zaman $W \cap \theta - cl\big[g(X) - cl[W]\big] = \emptyset$ dir.

Sonuç olarak $g(x) \notin \theta - cl\big[g(X) - g^{-1}cl[W]\big]$ dır.

Bu yüzden $g(x) \notin g(\,cl\big[X - g^{-1}cl[W]\big])$ ve $x \notin cl\big[X - g^{-1}cl[W]\big]$ dir. Bu da gösterir ki $V \subset g^{-1}cl[W]$ şartını sağlayan x civarında bir V açığı vardır ve ispat tamamlanır.

3.2.5.8. Tanım

Eğer her bir $(x,y) \notin G(g)$ için, g eğrisi x ve y yi içeren sırasıyla $V \subset X$ ve $W \subset Y$ açık kümeleri varsa $g:X \longrightarrow Y$ fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahiptir. Öyle ki $(V \times cl[W]) \cap G(g) = \emptyset$ dir.

Teorem: g:X⟶Y fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir grafiğe sahiptir olması için gerek ve yeter koşul her $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ve x de her açık küme tabanı$\sum$ için {g(x)= $\bigcap_{\sum}$ $\boldsymbol{\theta} -$ $\mathbf{cl}[\mathbf{V}]$ }dir.

3.2.5.9. Tanım

x_0, X uzayında bir nokta ve ω, X de bir süzgeç tabanı ise o zaman$\{A \subset X \mid x_0 \in X - A$ veya $F \cup \{x_0\} \subset A,$ bazı $F \in \omega$için$\}$, X de bir topolojidir. Bunu x_0 ve ωye bağlı X de topoloji olarak adlandıracağız.

Teorem: x_0, X uzayında bir nokta ve $\boldsymbol{\omega},$ X de bir süzgeç tabanı olsun. **ω süzgeç tabanının** $\mathbf{X} - \{\mathbf{x_0}\}$ da kesişim kümeleri boş küme olsun. Bu durumda $\mathbf{x_0}$ve **ω** a bağlı X uzayı ,$\boldsymbol{\delta}$ sınıfındadır.

3.2.6. H-kapalı Uzaylar

3.2.6.1. Tanım

Eğer uzaydaki her bir süzgeç tabanı, bu uzay içindeki bazı noktalara $\theta -$bağlı ise Haudorff uzayı H- kapalı diyeceğiz.

Teorem: δ sınıfındaki her X uzayı için, her bir 1-1, örten, grafiği kuvvetlice-kapalı g:X⟶Y fonksiyonu zayıf olarak sürekli ise bir Y Hausdorff uzayı H-kapalıdır. Bunun tersi de doğrudur.

İspat: Kuvvetli gereklilik: X uzayı herhangi bir uzay, Y ise H-kapalı olsun.

g:X⟶Y fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahip ve K⊂X olsun.

$y \in g(cl[K])$ için $x \in cl[K]$ ile y=g(x) seçilsin ve $\sum$,x in açık küme tabanı olsun. O zaman ω ={g(V)∩g(K): V∈ $\sum$ }Y de süzgeç tabanıdır.

Sonuçta $\theta - adh\, \omega \neq \emptyset$ dir. Üstelik; 3.2.5.9 Teorem ve $\theta -$ kapanış özelliklerinden $\theta - adh\, \omega \subset \{g(x)\} \cap \theta - cl[g(K)]$ dır.

Yeterlilik: Y Hausdorff olsun. x_0 Y ve farz edelim ki ω ,$Y - \{x_0\}$ da herhangi bir noktaya θ bağlı olmasın. Bu durumda ω, Y de süzgeç tabanıdır.

$X = Y, \omega$ ve x_0 a bağlı olsun. X 3.2.5.10 teoreminden δ sınıfındadır. i: X $\longrightarrow$Y özdeş fonksiyon olsun. Eğer $x \neq y, x \neq x_0$ ve $x \notin cl[W]$ ile Y'de y civarındaki W açık seçilsin o zaman {x}, X'de açıktır ve $(\{x\} \times cl[W]) \cap G(i) = \emptyset$ dır. Eğer $x \neq y$ ve $x = x_0$ ise $y \neq x_0$ dır. Çünkü $x_0 \notin cl[W]$ ve $F \cap cl[W] = \emptyset$ şartını sağlayan y civarındaki W açığı ve $F \in \omega$ vardır. $F \cup \{x_0\}$, X'de açıktır ve $\left((F \cup \{x_0\}) \times cl[W]\right) \cap G(i) = \emptyset$ dır. Böylece i'nin kuvvetlice kapalı bir eğriye sahip olduğunu ispatlamış olduk. Bu yüzden den i, x_0'da zayıf olarak süreklidir. Her bir $F \in \omega$ için $i(cl[F]) \subset \theta -$ cl[F] dir. Çünkü her bir $F \in \omega$ için $x_0 \in cl[F]$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem: Bir $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$Hausdorff uzayı H-kapalıdır olması için gerek ve yeter koşul Xüzerinde $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*)$ $\boldsymbol{\delta}$ **sınıfına düşecek şekilde ve i**: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*) \longrightarrow$ $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$**özdeş fonksiyonu kuvvetlice − kapalı bir grafiğe sahip** her bir $\boldsymbol{\tau}^*$ topolojisi için, her bir 1-1, örten grafiği kuvvetlice- kapalı her bir g: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*) \longrightarrow$ $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ fonksiyonu için X de F(g)kapalıdır.

İspat: Kuvvetli gereklilik: (X, τ) ,H-kapalı olsun. τ^* ,X de herhangi bir topoloji olsun ki i: $(X, \tau^*) \longrightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahip, her g: $(X, \tau^*) \longrightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu kuvvetlice-kapalı bir eğriye sahip fonksiyonlar olsunlar. $v \in cl[F(g)]$; 3.2.1.1 teoreminden g zayıf olarak süreklidir. Eğer $g(v) \neq v$ise$(v,g(v)) \in V \times W$ ve $(V \times) \cap G(i) = \emptyset$ ile $W \in \tau$ ve $V \in \tau^*$ açık kümeleri vardır. i fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahip olduğundan bu çıkarılır. Çünkü g zayıf olarak süreklidir.

$g(A) \subset cl[W]$ve $v \in A$ ile $A \in \tau^*$ vardır. $V \cap A \in \tau^*$ ve $v \in V \cap A$;

$g(V \cap A) \subset cl[W]$, g(x)=x şartını sağlayan $x \in V \cap A$ yoktur. Bu çelişki gerekliliği tamamlar.

Yeterlilik: Farz edelim ki ω , (X, τ) de süzgeç tabanı olsun. ω, X de herhangi bir noktaya $\theta -$ bağlı olmasın. $x_0 \in X$ seçelim ve τ^* , ω ve x_0 a bağlı X de bir topoloji olsun. 3.2.5.11 teoreminin yeterliliğine benzer şekilde aynı ispatı kullanıyoruz.

(X, τ^*), δ sınıfındadır ve i: $\longrightarrow (X, \tau)$özdeş fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahiptir. $y_0 \in X - \{x\}$ seçelim ve g:$(X, \tau^*) \longrightarrow (X, \tau)$fonksiyonu tanımlansın ki $g(x_0)=y_0$, $g(y) = x_0$ ve $g(x)= x$ şeklinde olsun. Başka bir deyişle 1-1, örten g:$(X, \tau^*) \longrightarrow (X, \tau)$fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahiptir.

$(x,y) \in (X, Y) - G(g)$. Eğer $x_0, W \in \tau$, $y \in W$ ve $g(x) \notin cl[W]$ seçersek o zaman $(\{x\} \times cl[W]) \cap G(g) = \emptyset$ olur. Eğer $x=x_0$, $y \neq y_0$,$\{x_0\} \cup \left(cl[W] \cap (F \cup \{x_0, y_0\})\right) =$

$\{x_0\}$; $((F \cup \{x_0\}) \times cl[W]) \cap G(g) = \emptyset$ şartları sağlandığında y nin civarında bir W açığı ve $F \in \omega$ seçebiliriz. Bu g fonksiyonunun kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahip olduğunu gösterir. Biz kolayca şunu görebiliriz ki F(G)=X-$\{x_0, y_0\}$, τ^* kapalı değildir. Bu tezat ispatı tamamlar.

Teorem: Bir $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$Hausdorff uzayı H-kapalıdır⇔ X üzerinde $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*)$ $\boldsymbol{\delta}$ **sınıfına düşecek şekilde ve i**: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*)$ **den**$(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ **ya özdeş fonksiyonu kuvvetlice − kapalı bir grafiğe sahip** her bir $\boldsymbol{\tau}^*$ topolojisi için, grafiği kuvvetlice- kapalı her bir g: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*) \longrightarrow (\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ fonksiyonu için F(g) yoğun ise X=F(g) dir.

İspat: Kuvvetli gereklilik: 3.2.6.2 teoreminde bulduk ki i: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*) \longrightarrow (\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ özdeş fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğrisi için X de her bir$\boldsymbol{\tau}^*$topolojisi için, F(g) kapalıdır. Her g: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*) \longrightarrow (\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$ fonksiyonu kuvvetlice- kapalı bir eğriye sahipse F(g), $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^*)$ da yoğunsa F(g)= X'dir.

Yeterlilik: g'yi tanımlamadan önce 3.2.6.2 teoreminin yeterlilik kanıtını izleyeceğiz. $x \neq x_0$ ve $g(x_0) = y_0$ ise$y_0 \in X - \{x_0\}$seçilir ve g: $(X, \tau^*) \longrightarrow (X, \tau)$ ve g(x) = x olmak üzere tanımlansın. 3.2.6.2 teoreminin yeterliliğine benzer argümanlar kullanarak g nin kuvvetlice- kapalı eğriye sahip olduğunu görebiliriz. O zaman F(g)= $X - \{x_0\}$, X de yoğundur. Çelişki ispatı tamamlar.

3.2.7. Minimal Hausdorff Uzaylar

3.2.7.1. Tanım

Eğer bir tek $\theta -$ bağlı noktası olan uzaydaki her bir süzgeç tabanı yakınsak ise Hausdorff uzayı minimal Hausdorfftur.

Minimal Hausdorff uzayının içine olan bir fonksiyon grafiği kuvvetlice-kapalı ise kesinlikle sürekli olmak zorundadır. Hausdorff uzayının içine olan zayıf olarak sürekli fonksiyon kapalı bir grafiğe sahiptir. O halde; bir uzay minimal Hausdorff ise uzayın içine olan sürekli fonksiyonlar sınıfı ile kuvvetlice - kapalı grafiğe sahip fonksiyonlar sınıfı birbiriyle çakışır.

Teorem: Eğer Y Hausdorff ve $g:X\longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise g kuvvetlice-kapalı grafiğe sahiptir.

Teorem: Y minimal Hausdorff olsun. Öyleyse $g:X\longrightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir olması için gerek ve yeter koşul g kuvvetlice-kapalı grafiğe sahiptir.

Teorem: Y Hausdorff uzayı, minimal Hausdorfftur olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{\delta}$ sınıfındaki her X uzayı için, her bir 1-1, örten, grafiği kuvvetlice-kapalı her $g:X\longrightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Y minimal Hausdorff, X herhangi bir uzay olsun, $g:X\longrightarrow Y$ kuvvetlice-kapalı grafiğe sahip bir fonksiyon olsun. $K\subset X$ olsun, $y\in g(cl[K])$; $x\in cl[K]$ ile $g(x)=y$ ve $\sum$, X de açık küme tabanı olsun. O zaman $\bigcap_{\sum}\ \theta-cl[g(V)\cap(K)]=\{g(x)\}$dir.

Çünkü $\omega=\{g(V)\cap g(K): V\in\sum\ \}$Y de süzgeç tabanıdır. g kuvvetlice-kapalı grafiğe sahiptir ve Y, H- kapalıdır. Çünkü Y minimal Hausdorfftur. $\omega\longrightarrow y$ ye yakınsar. Öyleyse y civarında Y içinde her W açığı için, $g(V)\cap g(K)\subset W$ şartını sağlayan $V\in\sum$ vardır.

Sonuç olarak $W\cap\ g(K)\neq\emptyset$ ve $y\in(cl[g(K)])$ dır.

Yeterlilik:ω, x_0 noktasına$\theta-$bağlı noktaların çoğunluğu ile Y de bir süzgeç tabanı olsun.

X=Y, ω ve x_0'a bağlı uzay olsun. i: $X\longrightarrow Y$ özdeş fonksiyon olsun. i nin kuvvetlice- kapalı bir grafiğe sahip olduğunu göstermiştik. Öyleyse i süreklidir ve eğer W, x_0 ın civarında Y de açıksa $F\subset W$ ile $F\in\omega$ vardır. Bu yüzden $\omega\longrightarrow x_0$'a yakınsar ve ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu tezde kompakt bir X Hausdorff uzayı, Y Hausdorff uzayının içinde gömülü ise Xin görüntüleride daima Y nin kapalı bir alt uzayıdır olduğu ile ilgili özelliklerin bir birleşimi anlatıldı. Bu özellik ilk olarak 1924 te Alexandroff ve Urysohn tarafından keşfedildi ve bu uzaylar H-kapalı uzaylar olarak tanımlandı. Bir Haudorff uzayın topolojisi τ olsun. X üzerinde τ tarafından içerilen bir topoloji artık Hausdorff değilse (X,τ) uzayına minimal Hausdorff olduğu anlatıldı. Katetov 1940 daki çalışmasında minimal Hausdorff uzayların H-kapalı ve yarı düzenli olduğunu gösterdi. Bourbaki; X Hausdorff uzayı olmak üzere H-kapalılık özelliğinin H(i):Xde her açık süzgeç tabanının bir bağlılığı vardır özelliğine, minimal Hausdorff özelliğinin H(ii): Tek bağlı noktaya sahip olan her açık süzgeç tabanı bu noktaya yakınsar özelliğine denk olduğunu gösterdi.

Bir X uzayının alt kümelerinin bir ailesinin birleşimi X de yoğun ise bu aileye yaklaşık örtü diyelim. Alexandroff, bir Hausdorff uzayı mutlak kapalı olması için gerek ve yeter koşulun X in her açık örtüsünün, sonlu bir yaklaşık örtüsü olduğunu gösterdi.

Alexandroff'un bu karakterizasyonundan Hausdorff hipotezini kaldırarak elde edilen uzaylar sınıfını quasi-H-kapalı olarak adlandırıyoruz. Quasi kompakt terimini kullanan Bourbakidir. Bu uzaylar Scarborough ve Stone' nun H(i) uzaylarına özdeştir.

Katetov, herhangi bir X Hausdorff uzayının H-kapalı X^* uzayı içinde yoğunlukla gömülü olabileceğini gösterdi. Ayrıca Xde her bir sınırlı, reel değerli, sürekli özelliğe sahip fonksiyon X^* a genişletilir. X^*, X in Katetov genişlemesidir. X^*, H-kapalıdır. Stone Cech kompaktifikasyonuna benzer özelliklere sahip olsa da X^* kompakt ise X kompakttır. X in genişlemeleri kümesi $\mathfrak{A}$ olsun. Banaschewski bu kümede iz düşüm fikrini fark etti. Y ϵ $\mathfrak{A}$ olsun. Eğer $\mathfrak{A}$ içinde her bir Z için, X noktasal olarak sabit bırakan $Y\ den\ Z$ye sürekli bir fonksiyon var ise $\mathfrak{A}$ içindeki bir Y genişlemesi bu kümede projektif en büyüktür denir. X uzayının Katetov genişlemesi X uzayını içeren tüm H-kapalı uzaylar içinde projektif en büyüktür.

Porter ve J.Thomas, Katetov genişlemesinin inşası ile bir topolojik uzayın yarı düzenlileştirilmesi arasında bir ilişki geliştirmişlerdir. Aynı zamanda Berri tarafından 'Her Hausdorff uzayı, minimal Hausdorff uzayı içinde gömülü olabilir mi? 'sorusu olumlu bir şekilde cevaplandırmışlardır.

Banaschewski, tamamen düzenli uzaylar arasında, sadece kompakt uzayların Stone- Weierstrass özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. Ayni zamanda kompakt olmayan tamamen düzenli bir uzayın, Stone- Weierstrass özelliğine sahip ve kompakt olmayan bir uzay içine gömülebileceğini kanıtlamıştır. Stone- Weierstrass özelliğine sahip bu uzay Katetov genişlemesinin bir alt uzayıdır.

Kompakt olmayan tamamen düzenli bir uzayın Katetov genişlemesi Stone- Weierstrass özelliğine sahip midir?

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde "kompakt uzaylar", "H-kapalı" ve "minimal hausdorff uzaylar" kavramları tanımlanıp, "kompaktlaştırma", "Stone –Weierstrass Özelliği", "katetov genişlemesi","quasi H-kapalı","H-kapalı urysohn uzayları" ve "hausdorff uzayların genişlemeleri" konularında bir derleme yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Alexandroff, P., 1960. Someresultsin thetheoryoftopolgicalspaces ,obtainedwith in the last twenth-five years.**Russian Math. Surveys,**15: 23-83.

Alexandroff, P. and Urysohn, P. 1924. Zur Theorieder TopologischenRdume. **Math.Ann.,**92: 258-266.

Banaschewski, B., 1959. On the Katetov and Stone –Cech extensions, canad. **Math.Bull.,**2: 1-4.

1961. Hausdorffsch –Minimale Erweiterungenvon Rdumery **Archi Math.** 12 (1961),355-365.

1957. On the Weierstrass-Stone Appromiximation Theorem, **Fund. Math**. 44 (1957),244-252.

1964. Extensions of Topological Spaces,Canad.**Math.Bull**. 7 (1964),1-22.

Berri, M.P., 1963. Minimal topological spaces. **Trans.Amer. Math.Soc.,** 108: 97-105.

Bourbaki, N., 1941.Escapesminimaux etespacescompletement separes.**C. R. Acad. Sci.,** Paris 212: 215-218.

Topologie Generale 3rd. Ed.,ActualitesSci.Indust. No.1142, **Hermann,Paris**,1961.

Flachsmeyer, J. 1966. Zur theoriederH-abgeschlossenerweiterungen, **Math. Z.,** 94: 349-381.

Fomin, 1943. Extensions of topological spaces.**Ann OfMath**,. 44: 471-480.

Halmos, P., 1963.Lectures on boolean algebras.**Van Nostrand, Princeton,N. J.**

Katetov, M,Ober H., 1940. Abgeschlosseneand bikompakterdume.**CasopisPes. Math.,** 69: 36-49.

Katetov, M., 1947. OnH-closed extensions oftopological Spaces.**CasopisPes. Math.,** 72: 17-32.

Katetov, M., 1947. On the equivalence ofcertaintypes ofextensions oftopological Spaces. **CasopisPes. Math.,** 72: 101-106.

Katetov, M., 1947. A note on semiregular andnearly regular spaces.**CasopisPes. Math.,** 72: 97-99.

Porter, J and Thomas, J.,OnH-Closed and Minimal HausdorffSpaces.

Ramanathan, A., 1947. Maximal-Hausdorff spaces. **Proc.İndian Acad.Sci.Sect.,** A: 26.

Stone, M.H., 1937. Applications of theoryofbooleanringstogeneral topology. **Trans.Amer.Math.Soc.** 41: 314- 481.

Scarborough, C.T.andStone, A.H., 1966. ProductofnearlycompaktSpaces, **Trans.Amer.Math.Soc,**. 124: 131-147.

Lipschutz, S., 1965. **General topology**.Temple University, New York.22.

Sımmons, G.,1963.**Topology and modern analysis.**W.H.Freeman and Company,London.

Munkres, J.R.,1975. **Topology A first course.** Prentice-Hall,Inc.Englewood Ciffs,NewJersey.

Urysohn, P., 1925. Über die mactigkeitder zusammenhangendenMengen.**Math.Ann.,** 94: 262-295.

Munshi, B.M. and Bassan, D.S., 1982. Super- Continous mappings. **Indian J.Pure Appl.Math.,** 14: 229-236.

Levine, N., 1961. A Decomposition ofcontinutityintopological spaces. **Amer. Math. Monthly,** 44-46.

Vilinco, N.V., 1968. H-closed topolojical spaces.**Amer.Math. Soc. Transl.,** 78(2): 103-118.

Long P.E. and Herrıngton, L.L. 1975. Functions with Strongly-closed graphs.**Boll. U.M.I.** (Italy) 4(12): 381-384.

Mıchael, E., 1951. Topologies on spacies of subsets. **Trans. Amer. Math. Soc.,** 71: 152-182.

Choquet, G., 1947. Convergence.**Grenoble Universıty Annalles,** 23: 57-112.

Y. Küçük ve M. Akdağ, 1991. 2^{Y}-Üzerinde çeşitli topolojiler ve çoğul-değerli fonksiyonların H-süreklilikleri. **IV. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiri Özetleri Kitapçığı.**

Dorset, 1982. Semi-regular spaces, **Soochow J. Math.,**8: 45-53.

Yıldız, C., 1999.**Genel topoloji.** Gazi Üniversitesi Basımevi, Ankara.

Yüksel, Ş., 2000. **Genel topoloji.** Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya.

Karaçay,T., 1993. **Genel topoloji.**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,Yayın No:66,Samsun.

Kılıç,S.A., 2002. **Genel Topoloji.** Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,Yayın No:66, Balıkesir.

Gürkanlı,T., 1993. **Genel Topoloji.** Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Yayın No:73,Samsun.

Oxtoby,J.C., 1976. Measure and category,springer, **Springer-Verlag,Newyork**.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında büyük bir titizlik, sabır ve özveriyle bana destek olan, değerli görüş, katkı ve bilgilerini esirgemeyen, yol gösteren ve iyi bir bilimsel çalışma ortamı sağlayan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Fevzi BİLGİN ’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında değerli görüş, katkı ve bilgilerini esirgemeyen sayın Öğr. Gör. Mustafa GÖKTÜRK ’e ve sayın Arş. Gör. Metin DURU’ ya teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında manevi desteğini esirgemeyen hayatımın her aşamasında bana destek olan sevgili eşime ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Gaziantep'te doğdum. İlköğrenimimi aynı ilde, Orta ve lise öğrenimimi İzmir'de tamamladım. 1995 yılında girdiğim Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 1999 yılında mezun oldum. 1999 - 2009 yılları arasında İzmir'de dershanede öğretmen olarak çalıştım. 2009 yılında Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi Yayladağı Meslek Yüksek Okulunda öğretim görevlisi olarak çalışmaya başladım ve halen devam etmekteyim.