T.C.
NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL FARK ÖZELLİKLERİNİN KORUNMASI İLE ÇOK KATLI DEĞİŞKENLERE BAĞIMLI $\overset{¿r>¿(G,s)}{f \in B^{¿}_{p,\theta}}$ FONKSİYONLARININ $G \subset E_n$ BÖLGESİ DIŞINA GENİŞLETİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sadiye AKTAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. GÜLİZAR ALİSOY

Tekirdağ-2018

Doç. Dr. Gülizar ALİSOY danışmanlığında, Sadiye AKTAŞ tarafından hazırlanan "Diferansiyel Fark Özelliklerinin Korunması İle Çok Katlı Değişkenlere Bağımlı $¿r>¿(G,s)$ $f \in B^{¿}_{p,\theta}$ Fonksiyonlarının $G \subset E_n$ Bölgesi Dışına Genişletilmesi" isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Juri Başkanı: Doç. Dr. Gülizar ALİSOY *İmza*:

Üye: Dr. Öğretim Üyesi Zehra PINAR *İmza*:

Üye: Dr. Öğretim Üyesi Hakan KARAYILAN *İmza*:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL FARK ÖZELLİKLERİNİN KORUNMASI İLE ÇOK KATLI DEĞİŞKENLERE BAĞIMLI $¿r>¿(G,s)$ $f \in B^{¿}_{p,\theta}$ FONKSİYONLARININ $G \subset E_n$ BÖLGESİ DIŞINA GENİŞLETİLMESİ

Sadiye AKTAŞ

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans tez çalışması giriş, kuramsal temeller, materyal ve yöntem, araştırma bulguları, tartışma ve sonuç ve kaynaklar olmak üzere toplam *altı bölümden* oluşmaktadır. *Tezin giriş* kısmında konuya ilişkin literatür özetleri, çalışmanın güncelliği, tez çalışmasının amacı, bu amaca varmak için çözülmesi gereken problemler ve tez çalışmasında elde edilen sonuçların bilimsel yeniliği verilmiştir. *İkinci bölümde* çalışmada ihtiyaç duyulan fonksiyon uzayları, temel integral eşitsizlikleri ve integral gösterimi ile ilgili kuramsal temeller verilmiştir. *Üçüncü bölümde* çok boyutlu $G \subset E_n$ bölgede tanımlanmış $¿r>¿(G,s)$ $B^{¿}_{p,\theta}$ fonksiyon uzay tipi için gerekli olan temel kavramlar ve notasyonlar verilmiş, "σ *- yarım boynuz*"ve"*kuvvetli* σ *- yarım boynuz*" koşulunu sağlayan bölgeler sınıfı tanımlanmıştır. *Dördüncü bölümde,* $G \subset E_n$ bölgesinde tanımlanmış $¿r>¿(G,s)$ $f \in B^{¿}_{p,\theta}$ fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla, tanım bölgesinin dışına genişletilmesine ilişkin integral eşitsizlikleri biçiminde gömülme teoremleri verilmiştir. *Beşinci bölümde* ise çalışmanın esas sonuçlarını ifade eden teoremlerin ispatları verilmiştir.

Anahtar kelimeler : Lebesgue ve Besov Uzayları, integral ayrılış, gömülme teoremleri biçimindeki eşitsizlikler

2018, 55 Sayfa

ABSTRACT

Ms. Thesis

EXTENSION OF FUNCTIONS $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ DEPENDENT ON THE MULTI PACKAGE VARIABLES OUTSIDE THE $G \subset E_n$ REGION WITH PRESERVATION OF THE CLASS

Sadiye AKTAŞ

Tekirdag Namık Kemal University

Institute of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

The master thesis study consists of a total of six sections; introduction, theoretical basis, material and method, research findings, discussion and results and references. *In the introduction* of the thesis, the literature abstracts about the subject, the aim of the thesis study, the problems to be solved for this purpose and the scientific innovation of the results obtained in the thesis study are given. *The second section* summarizes the basic concepts, definitions and theorems related to function spaces, basic integral inequalities and integral representation needed in operation. *In the third section*, we give the basic concepts and notation necessary for the type of the functional space $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ defined in the multidimensional domain $G \subset E_n$ satisfying the conditions of the " σ *-half horn*" and "*strong* σ *-half horn*". *In the fourth section*, the theorems of the embedding are given in the form of integral inequalities for expanding beyond the definition domain with preservation of the class the function $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$. *In the fifth section*, the proofs of the theorems expressing the main results of the study are given.

Keywords: Lebesgue and Besov Spaces, integral representation, embedding theorems

2018, 55 Pages

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım yüksek lisans konusunda beni yetiştiren ve bu tezin oluşturulmasında bana en önemli desteği veren Hocam sayın Doç. Dr. Gülizar ALİSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde değerli görüşlerini esirgemeyen Namık Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ve öğrenimim süresince hep yanımda olan, sabırla sıkıntılarımı çeken ve benden hiçbir yardımını esirgemeyen eşime ve çocuklarıma teşekkür ederim.

Sadiye AKTAŞ

SİMGELER DİZİNİ

$W_p^r(G)$: Sobolev - Slobodetskii fonksiyonel uzayı

$H_p^r(G)$: Nikol'skii, fonksiyonel uzayı

$W_{p,\alpha}^{r}(G)$: Sobolev – Kudryavtsev weighted fonksiyonel uzayı

$S_p^l W(G)$: Nikol'skii- Lizorkin-Dzhabrailov uzayı

$B_{p,\theta}^{r}(G)$: Nikol'skii-Besov fonksiyonel uzayı

$S_{p,\theta}^{l} B(G)$: Nikol'skii-Dzhabrailov-Amanov uzayı

$B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$: Dzhabrailov - Alisoy uzayı

$L_p(G)$: G alt kümesinde $f(x)$ fonksiyonunun ölçülebilir uzayı

$L_{loc}^{p}(G)$: p dereceden integrallenebilen $G \subset E_n$ bölgesinde ölçülebilir fonksiyonlar uzayı

$\|\cdot\|$: fonksiyonun X üzerinde bir normu

E_n : $x=(x_1,\cdots,x_n)$ noktalarının n boyutlu Euclidean uzayı

$\{f_k\}_1^\infty$: $L_p(G)$ uzayı altında kendine yakınsayan fonksiyonlar dizisi

$\{I_m\}_1^\infty$: sınırlı ve ölçülebilir kümeler ailesi

C_0^∞ : finit fonksiyonlar uzayı

$supp\,\varphi$: fonksiyonunun sıfırdan farklı tüm noktalarının kapanış kümesi (destekleyicisi)

$\chi=D^k f$: G açık kümesinde f - fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi

$f_{\vartheta^\lambda}(x)$: ortalama fonksiyon

$D^k\left(f_{v^\lambda}(x)\right)$: ortalama fonksiyonun genelleştirilmiş türevi

$\left(D^k f\right)_{v^\lambda}(x)$: genelleştirilmiş türevin ortalama fonksiyonu

$\Delta^m(t)f$: $f(x)$ fonksiyonunun m - mertebeden sonlu karışık farkı

$A_{i,\delta}f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun integral operatörü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET…………………………………………………………………………………….…………i

ABSTRACT……………………………………………………………………….………ii

TEŞEKKÜR……………………………………………………………………………iii

SİMGELER DİZİNİ……………………………………………………………...….iv

İÇİNDEKİLER………………………………………………………………………....v

1.GİRİŞ ……………………………………………..…………………..……….1

1.1. Tez çalışmasının güncelliği…………………………………………………………….1

1.2.Tez çalışmasının amacı…………………………………...………………………… 3

1.3.Tez çalışmasının bilimsel yeniliği…………………………………………………......3

2.KURAMSAL TEMELLER …………………………………………………………….4

2.1 Normlu Uzay ……………..……………………………………………………………..4

2.2 Sürekli Fonksiyonlar Uzayı…………………………………………………………..5

2.3 Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Uzayı…………………………………………….6

2.4 Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyon……………………………………..……...6

2.5 Lp- uzayı…………………………………………………………………………..……..7

2.6 Sobolev Uzayı………………………………………………………………………….11

2.7 Besov ve Sobolev uzayları arasındaki ilişki..……………………………………………12

2.8 Temel integral eşitsizlikleri……………………………………………………………13

2.8.1 Hölder eşitsizliği………………………………………………………………… 14

2.8.2 Ters Hölder Eşitsizliği………………………………………………...…………..16

2.8.3 Minkowski Eşitsizliği…………………………………………………...…………...17

2.8.4. Genelleştirilmiş Minkowski's eşitsizliği…………………………………………19

2.8.5 Young eşitsizliği…………………………………………………………………..19

2.8.6 Genelleştirilmiş Hardy eşitsizliği………………………………………………….19

2.8.7 Hardy-Littlewood eşitsizliği……………………………………...……………20

2.9 Diferansiyellenen Fonksiyonların İntegral Gösterimi…………………………...20

2.10 Ortalama fonksiyonunun oluşturulması ………………………………………..22

2.11. Genelleştirilmiş Türev…………………………………………………………23

3. MATERYAL ve YÖNTEM……………………………………………...…………27

3.1.Temel tanımlar ve gerekli işaretlemeler…………………………………...…………...27

3.2. $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ - Dzhabrailov-Alisoy Fonksiyon uzayı……………..……………………30

3.3. Bölgeler sınıfı ……………………………..……………..……………..……………………31

4. ARAŞTIRMA BULGULARI…………………………………………………………33

4.1 Çok değişkenli $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonların diferansiyel fark özelliklerinin korunması koşuluyla $G \in E_n$ bölgesinin ötesine genişletilmesine ilişkin teoremler……………………..33

4.1.1 Teorem 4.1……………………………………………………………...……………33

4.1.2 Teorem 4.2……………………………………………………………………..…….34

4.1.3 Teorem 4.3……………………………………………………………………..….34

4.1.4 Teorem 4.4……………………………………………………………………..….35

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR…………………………………………………………..36

5.1. Düzgün fonksiyonların integral gösterimi……………..………………………………...36

5.2. Yardımcı fonksiyonlar dizisinin inşası ……………………………….……………..38

5.3. Yardımcı fonksiyonların değerlendirilmesi ………………………………..……..…..39

5.4. İntegral operatörlerinin değerlendirilmesi……………………………………..…...40

5.4 Teorem 4.1'in ispatı……………………………………………………..…………..48

5.5 Teorem 4.2'in ispatı……………………………………………………..…………..49

6. KAYNAKLAR ……………………………………………………..…………..52

ÖZGEÇMİŞ …………………………………………………………………...……55

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmasının Güncelliği

Fonksiyonel uzaylar teorisinin gelişimi ve onların matematiksel fiziğin denklemlerine (kısmi türevli diferansiyel denklemlere) uygulamaları, bu teorilerin birleştirilmesi ve de genelleştirilmesi doğrultusunda yeni problemler ortaya koymaktadır. Matematiksel fizikte fonksiyonel analizin bazı uygulamalarını kapsayan bu teori ilk olarak, S. L. Sobolev tarafından ortaya atılmıştır (Sobolev, 1991). Sonraki aşamalarda, teorinin gelişmesinde, S.L.Sobolev , L.N.Slobodetskii ($W_p^r(G) -$ Sobolev .- Slobodetskii fonksiyonel uzayı) ; S.M. Nikol'skii ($H_p^r(G)$ - Nikol'skii, fonksiyonel uzayı); L.D. Kudryavtsev ($W^r_{p,\alpha}(G)$ - Sobolev – Kudryavtsev weighted fonksiyonel uzayı), P.V. İlyin, P.İ. Lizorkin($S^l_p W(G)$ - Nikol'skii- Lizorkin-Dzhabrailov uzayı), O.B. Besov ($B^r_{p,\theta}(G)$ - Nikol'skii-Besov fonksiyonel uzayı), A.D. Dzhabrailov , T.M. Amanov ($S^l_{p,\theta} B(G)$ - Nikol'skii-Dzhabrailov-Amanov uzayı), V.I. Burenkov, Y.S Bugrov ,Grisvard P, Gagliardo E, Benedek A, Panzone R, Garding L , Lions J.L , Kalder $G \in E_n$ on A.P , Zygmund A , Nirenberg L gibi görkemli matematikçiler çok
büyük katkılarda bulunmuşlardır [Slobodetskii (1958,1966),Nikol'skii (1963,1969) Besov ve ark.,(1969,1996),Il'in(1965),Lizorkin P.I.(1964),Dzhabrailov (1974,1981,1988,2001),Amanov (1965), Burenkov(1979), Kudryavtsev (1988, 2017)].
Diferansiyellenen fonksiyonlar için "Gömülme Teoremleri" adı ile tanımlanan problemlerde, fonksiyonların bir metrikteki bilinen diferansiyel özelliklerine göre, onların başka bir metrikteki özellikleri belirlenir. Bu türden ilk önemli sonuçlar S.L. Sobolev tarafından tanımlanan $W_p^r(G) -$ uzayı için elde edilmiştir[Sobolev (1991),Besov ve ark.,(1969, 1996)].

Kudryavtsev S.N. (2017), fonksiyonların normlarının belirlenmesinde fonksiyonların bilinen mertebe yönlü türevlerinin sürekliliğinin mutlak değeri yerine, onların " L_p - ortalama" mutlak değerlerini kullanılarak fonksiyonların tanım bölgesi dışına genişletilebileceğini incelemiştir.

Besov O.V. ve ark., (1996); Dzhabrailov (1974), $W_p^{\,l}(G)$ ve $B_{p,\theta}^{\,l}(G)$ fonksiyonel uzayları için integral ayrılış yöntemi kullanarak $\Omega \subset E_n$ bölgesi dışında $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel özelliklerini incelemiş ve gömülme teoremleri verilmiştir.

Dzhafarov (1964) , $H_p^r(G)$ - Nikol'skii fonksiyonel uzayının diferansiyel ve diferansiyel-fark özelliklerini incelenmiş ve gömülme teoremleri verilmiştir. Diğer bir çalışmasında ise $H_p^r(G)$ fonksiyonel uzayına göre daha kapsamlı olan $H_p^{\vec{r},\vec{s}}$ uzaylarının diferansiyel fark özellikleri incelenerek, gömülme teoremlerinin iyileştirilmesi yapılmıştır

Dzabrailov & Mamedov (1981), baskın karışık türevlere sahip (with domınant mixed derivatives) çok değişkenli diferansiyellenen fonksiyonlar için yeni integral ayrılışı verilmiş ve bu integral ayrılışı yardımıyla $S_{p,\theta}^{\,r}B(G)$ uzayından olan fonksiyonların diferansiyel özellikleri incelenmiştir.

Mashıyev (1988), Mashiyev ve ark.,(2011,2012) $B_{p,\theta}^{\,r}(G)$ ve fonksiyonel uzayların belirli aileleri için fonksiyonların integral ayrılışı ve gömülme teoremleri incelenmiştir.

Kerimova (Alisoy) (1997), $G \subset E_n$ bölgesinde belirlenmiş çok değişkenli diferansiyellenen fonksiyonlar için yeni $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonel uzaylar oluşturulmuş ve elde edilen yeni integral gösterimlerinin yardımıyla, bu fonksiyonel uzaylar için yeni gömülme (embedding) teoremleri ispatlanmıştır [DzhabrailovA.D & Kerimova (Alisoy), 1988]. Bu teoremlerin sonuçları olarak, verilmiş uzaylarda farklı normların eşdeğerliliği gösterilmiştir [Kerimova (Alisoy),1997].

Alisoy G. ve ark.,(1997,1998,2002,2005), elde edilen sonuçlar, matematiksel analizin "uzay teorisi 'ne veya çok değişkenli diferansiyellenen fonksiyonların gömülme teoremlerine (Theory of Embedding Theorems) ilişkin yeni orijinal sonuçlar içermektedir. Bu çalışmalardaki, çok değişkenli diferansiyellenen fonksiyonlar için oluşturulmuş yeni fonksiyonel uzaylar $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ (Dzhabrailov- Alisoy) , özel durumlarda s = 1 için Nikol'skii – Besov ve s = n için ise Nikol'skii - Dzhabrailov- Amanov fonksiyonel uzaylarına dönüşmektedir.

Alisoy & Aktaş (2018), $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonların diferansiyel-fark özelliklerinin korunması şartı ile $G \subset E_n$ bölgesinin ötesine genişletilmesine ilişkin gömülme teoremleri biçiminde yeni integral eşitsizlikleri tanımlanmış ve ispatlanmıştır.

Sonuç olarak, bu tür özelliklere sahip $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonların Diferansiyel-Fark Özelliklerinin korunması şartı ile $G \subset E_n$ bölgesinin ötesine genişletilmesi, çözümünü bekleyen problemler arasında yer almakta olup, çalışmanın günceliğini belirtir.

1.2. Tez Çalışmasının Amacı

$G \subset E_n$ bölgesinde tanımlanmış *"σ -yarım boynuz"* ve *"kuvvetli σ -yarım boynuz"* koşulunu sağlayan $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla $G \subset E_n$ bölgesinin dışına genişletilmesine ilişkin integral eşitsizlikleri biçiminde gömülme teoremlerinin tanımlanması ve ispatı çalışmanın esas amacını oluşturmaktadır.
Bu amaca varmak için aşağıdaki problemlerin çözülmesi gerekmektedir.

i) $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonu için *"σ -yarım boynuz"* ve *"kuvvetli σ -yarım boynuz"* koşulunu sağlayan $G \subset E_n$ bölgeler sınıfının belirlenmesi;

ii) Yardımcı fonksiyonlar dizisinin inşası;

iii) İntegral operatörlerin değerlendirilmesi;

iv) Çok değişkenli $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonların diferansiyel fark özelliklerinin korunması koşuluyla $G \in E_n$ bölgesinin dışına genişletilmesine ilişkin teoremler

1.3.Tez Çalışmasının Bilimsel Yeniliği

İntegral ayrılış yöntemi kullanılarak tüm E_n ’de tanımlı ve $G \subset E_n$ bölgesinde $f \in B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ fonksiyonu ile çakışan bir $\widetilde{f}_v = \widetilde{f}_v(x)$ inşa edilmiştir.
İnşa edilen bu fonksiyon için ilk kez $G \subset E_n$ bölgesinde tanımlanmış “*σ -yarım boynuz*” ve “*kuvvetli σ -yarım boynuz*” koşulunu sağlayan $f \in B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla $G \subset E_n$ bölgesinin dışına genişletilmesine ilişkin gömülme teoremleri biçiminde yeni sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bazı Genel Tanımlar ve Kavramlar

Bu bölüm, tez kapsamında kullanılacak bazı tanımlar, teoremler, integral gösterimler ve eşitsizliklerle birlikte üzerinde çalışılan Sobolev, Besov ve Dzhabrailov-Alisoy uzayları hakkındaki bilgileri içermektedir.
E_n ‘de $n-¿$ boyutlu Öklid uzayı ve bunun sınırlı olmayan ölçülebilir bir G alt uzayı üzerinde işlemler yapılacaktır. G ’de tanımlanan reel f(x) fonksiyonlarının yardımıyla $L_p(G)$ uzayı tanımlanacak ve bu uzayın özellikleri incelenecektir. Bu uzayın yardımıyla çeşitli intergral eşitsizlikleri tanımlanacaktır ve gömülme teoremleri verilecektir.

2.1. Normlu Uzay

Tanım 2.1.1. (Musayev,2000) X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \to R$ fonksiyonu için, $\forall x, y \epsilon X$ ve $\lambda \epsilon C$ olmak üzere,

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** denir. Bu durumda elde edilen $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine *normlu uzay*, $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının normu denir.

Her $\|\cdot\|$ normu, $\rho : X \times X \to R$ olmak üzere,

$\rho(x, y) = \|x - y\|$

seklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Bununla birlikte, bir metrik uzayın normlu uzay olması şart değildir.

Bundan sonra, incelemelerde aksi belirtilmedikçe $\|\cdot\|_X$ ile X normlu uzayında tanımlanan norm kastedilecektir.

Tanım 2.1.2. (Adams,2003**)** X bir normlu uzay $x \in X$ ve $r \in R$ pozitif bir sayı olmak üzere

$B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\|_X < r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir *açık yuvar*,

$\widetilde{B}_r(x) = \{y \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir *kapalı yuvar* olarak tanımlanır. $A \subset X$ olmak üzere, $\forall x \in A$ için $B_r(x) \subset A$ olacak şekilde $\exists r > 0$ ise o halde A ‘ya *açık küme* denir.

Tanım 2.1.3. $\{x_n\}$, X - normlu uzayında bir dizi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa, yani $n, m \to \infty$ iken $\|x_n - x_m\|_X \to 0$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.4. (Brudnıy,1976) Bir X normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X ’in bir elemanına
yakınsıyorsa, X ’e tam uzay veya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.5. (Brudnıy,1976) X normlu uzayında tanmlı farklı iki norm $\|\cdot\|_{X,1}$ ve $\|\cdot\|_{X,2}$
olmak üzere, $\forall x \in X$ için

$$c_1 \|x\|_{X,2} \leq \|x\|_{X,1} \leq c_2 \|x\|_{X,2}$$

olacak¸ şekilde pozitif c_1 , c_2 reel sayıları varsa o zaman $\|\cdot\|_{X,1}$ ve $\|\cdot\|_{X,2}$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 2.1.6. (Brudnıy,1987) X normlu uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer $\acute{A} = X$ oluyorsa A kümesi X uzayında *yoğundur* denir. Bununla birlikte A ve B , X normlu uzayının iki alt kümesi olmak üzere, eğer $\forall x \in B$ ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|x - y\|_X < \varepsilon$
olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı varsa A kümesi B ’de yoğundur denir.

Tanım 2.1.7.(Schvartsman,1981) X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse X normlu uzayına *ayrılabilir uzay* denir.

2.2. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.2.1. (Muramatu,1971/72) G , E_n 'nin açık bir bölgesi olmak üzere,

$$C^0(G) := \{f : G \to E_n\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye sürekli fonksiyonlar uzayı denir. Bu uzay, $|\cdot|$, E_n 'de tanımlanan norm olmak üzere,

$$\|f\|_{C^0(G)} = ¿ x \in G |f(x)| < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.2. (Stasyuk&Yanshenko) $f, G \subset E_n$ bölgesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in G$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

olacak ¸sekilde negatif olmayan bir $L = L(f)$ sabiti varsa, f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar veya Lipschitz-süreklidir denir. Lipschitz-sürekli fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı $C^{0,1}(\acute{G})$ ile gösterilir.

2.3. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.3.1. (Besov ve ark.,1996) Bir $G \subset E_n$ kümesinin kapanışı $\widetilde{G}$ ve Ω, E_n 'de bir bölge olmak üzere, $\widetilde{G} \subset \Omega$ ve $\widetilde{G}$ kümesi E_n 'in kompakt bir alt kümesi ise bu durum $G \subset \subset \Omega$

şeklinde gösterilir. f , G 'de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun desteği $supp\, f = \{x \in G : f'(x) \neq 0\}$ seklinde tanımlanır. Eğer $supp\, f \subset \subset \Omega$ ise, f fonksiyonu Ω 'da kompakt desteğe sahiptir denir

Tanım 2.3.2.(Maksudov & Dzhabrailov,2000) Ω , E_n ‘de bir bölge olsun. Negatif olmayan herhangi m tamsayısı için bölgesinde $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar tüm

$D^\alpha f$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3.(Maksudov & Dzhabrailov,2000) E_n 'de tanımlanmış, sonsuz diferansiyellenebilen ve sınırda sıfır olan fonksiyonlara finite (sonlu) fonksiyonu denir. Finite fonksiyonlar uzayı C_0^∞ şeklinde gösterilir**.** G kümesi E^n de açık küme olsun. Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonu G 'de finite fonksiyon ise o zaman $\varphi(x)$ fonksiyonu G - açık kümesinde tanımlıdır ve G kümesinden olan kompakt taşıyıcılara sahiptir. Fonksiyonun sıfırdan farklı tüm noktalarının kapanış kümesine bu fonksiyonun taşıyıcısı veya destekleyicisi denir. $\varphi(x)$ fonksiyonunun taşıyıcısı $supp\,\varphi$ olarak gösterilir.

2.4 Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyon

$[a,b]$ aralığındaki noktaların keyfi kümesi $E\subset[a,b]$ ve bu kümelerin tümleyeni ise $CE:=[a,b]\setminus E$ olsun

E kümesi, uzunlukları uygun olarak $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ olan sınırlı veya sayılabilir açık aralıkların sisteminin alt kümesi olsun. Bu durumda $\sum_k \alpha_k>0$ olacaktır.

Bu nedenle bu toplam alttan sınırlıdır ve dakik alt sınır limit değerine sahiptir

Tanım 2.4.1. $inf\sum_k \alpha_k$, E - kümesini kapsayan aralıklar sisteminin dakik alt limit değeri

olmak üzere,

$$m^{¿}(E):=inf\sum_k \alpha_k$$

ifadesine $E\subset[a,b]$ kümesinin dış ölçüsü denir.

Tanım 2.4.2. $m^{¿}(CE)$, E - kümesinin tümleyeninin dış ölçüsü olmak üzere,

$$m_{¿}(E):=(b-a)-m^{¿}(CE)$$

ifadesine $E\subset[a,b]$ kümesinin iç ölçüsü denir.

Tanım 2.4.3. $m(E)$ **,** E kümesinin Lebesgue ölçümü olmak üzere,

$$m_{¿}(E)=m^{¿}(E)=:m(E)$$

ise o halde $E \subset [a,b]$ Lebesgue anlamında ölçülebilir bir kümedir denir.

Tanım 2.4.4. Eğer $\forall A \in R$ için $\{x \in E : f(x) > A\}$ kümesi ölçülebilir bir küme ise o halde $f(x)$ fonksiyonu $E \subset [a,b]$ ’de ölçülebilir bir fonksiyondur.

Tanım 2.4.5. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $E \subset [a,b]$ ’ de ölçülebilir bir fonksiyon ise o halde, $f(x)$ fonksiyonu her ölçülebilir $F \subset E$ alt kümesi üzerinde de ölçülebilirdir, yani $\{x \in F : f(x) > A\} = F \cap \{x \in E : f(x) > A\}$

Tanım 2.4.6. Eğer f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, o zaman f fonksiyonu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan $f^{+} = max\{f;0\}$ ve $f^{-} = -min\{f;0\}$ fonksiyonları cinsinden $f = f^{+} - f^{-}$ şeklinde yazılabilir. Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlanan $\int_{\Omega} f^{+}(x)\,dx$ ve $\int_{\Omega} f^{-}(x)\,dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere,

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\Omega} f^{+}(x)\,dx - \int_{\Omega} f^{-}(x)\,dx$$

biçiminde ifade olunabilir.

Eğer iki integral de sonlu ise f fonksiyonuna Ω bölgesinde Lebesgue integrallenebilir denir.

2.5. L_p - uzayı

Bu bölümde, ölçülebilir (fakat sınırlı olması şart olmayan) bir $G \subset E_n$ alt kümesinde tanımlı reel değerli fonksiyonların L_p uzayının bazı özellikleri verilecektir. Burada E_n $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_n$ noktalarının n-boyutlu Öklid uzayıdır. Tezin ileriki bölümlerinde

L_p uzayın yardımıyla çeşitli eşitsizlikler ve dağılım fonksiyonu tanımlanacaktır. Hatırlayalım ki buradaki kümelerin ölçüle bilirliği Lebesgue anlamındaki bir ölçüle bilirliktir.

Tanım 2.5.1

$$L_p(G)=\left\{f: f \text{ ölçülebilir fonksiyon}, \int_G |f(x)|^p dx<\infty, 1\le p<\infty\right\} \qquad (2.5.1)$$

biçiminde tanımlanan ifadeye $L_p(G)$ uzayı denir. Şimdi ise bu uzay altında tanımlanan normu belirleyelim;

p - reel sayı olmak üzere $1 \le p < \infty$ olsun. G alt kümesinde $f(x)$ fonksiyonunun ölçülebilir uzayı $L_p(G)$ biçiminde gösterilir. Bu G alt kümesinde fonksiyonun Lebesgue anlamında integrali vardır. Hatırlayalım ki $f \in L_p(G)$ fonksiyonunun $L_p(G)$ uzayı altında tanımlanan normu aşağıdaki ifadeyle belirlenir [Besov ve ark.,1996].

$$\|f\|_{L_p(G)} = \|f\|_{p,G} = \left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.5.2)$$

$p=\infty$ değeri için $L_\infty(G)$ uzayı elde edilir. $L_\infty(G)$ uzayının elemanları ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlardan ibarettir. Bu uzay altında tanımlanan $f \in L_\infty(G)$ fonksiyonunun normu aşağıdaki gibi belirlenir [Nikolskii,1969]

$$\|f\|_{L_\infty(G)} = \|f\|_{\infty,G} = \underset{x\in G}{\operatorname{ess\,sup}} |f(x)| = \inf\{c>0: |f(x)| \le c\} \qquad (2.5.3)$$

G - bölgesinin düzgün sürekli $f(x)$ fonksiyonunun $L_\infty(G)$ uzayının önemli bir alt uzayı ise $C(G)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $f \in C(G)$ fonksiyonunun normu aşağıdaki gibi belirlenir

$$\|f\|_{C(G)} = \sup_{x\in G} |f(x)| \qquad (2.5.4)$$

Varsayalım ki her $p=(p_1,\cdots,p_n)$ her $i=1,\cdots,n$ için bileşenleri $1\le p_i\le\infty$ eşitsizliğini sağlayan bir vektördür. Bu durumda E_n 'de tanımlanan ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonlar uzayını

$L_p(E_n)$ ile işaretlersek o halde $f(x)$ fonksiyonunun bu uzay altında tanımlanan sonlu normu şöyle olacaktır.

$$\|f\|_{p,E_n}=\|f\|_{(p_1,\cdots,p_n),E_n}=\|\cdots\|\|f\|_{p_1,,x_1}\|_{p_2,x_2}\cdots\|_{p_n,x_n}=¿$$

$$¿\left\{\int_{E_1}\left[\cdots\left\{\int_{E_1}\left(\int_{E_1}|f(x)|^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{p_3/p_2}\cdots\right]^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right\}^{1/p_n} \qquad (2.5.5)$$

Hatırlayalım ki yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun normunun belirlenmesi için yazılan denklemde değişkenlerinin sırası önemlidir. Örneğin iki değişkenli $f(x_1,x_2)$ fonksiyonu için

$$\left[\int_{E_1}dx_2\left(\int_{E_1}|f(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}\right]^{1/p_2}\neq\left[\int_{E_1}dx_1\left(\int_{E_1}|f(x_1,x_2)|^{p_2}dx_2\right)^{p_1/p_2}\right]^{1/p_1} \qquad (2.5.6)$$

G kümesi En ‘de ölçülebilir bir küme ve f- fonksiyonu da G üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise o halde

$$\|f\|_{p,G}=\|\tilde{f}\|_{p,E_n}$$

olduğunu kabul edeceğiz. Burada $x \in G$ için $\tilde{f}(x)=f(x)$ ve $x \in E_n \setminus G$ için ise $\tilde{f}(x)=0$ olur. Ayrıca $\|f\|_{p,G}$ normunun sonlu olması durumunda $f\in L_p(G)$ yazılacaktır.

Basitlik adına $G=E_n$ için çoğunlukla $\|f\|_{p,E_n}$ gösterimi yerine $\|f\|_p$ işaretlemesi kullanılacaktır.

Hatırlayalım ki $1\le p\le\infty$ olmak üzere $L_p(G)$ uzayı Banach uzayıdır. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) $\|f\|_{p,G}=0$ ($\forall$ $x\in G$ için $f(x)=0$)

2) $\|f_2\|_{p,G}=\|cf\|_{(p,G)}$

3) $\|f_1+f_2\|_{p,G} \le \|f_1\|_{p,G}+\|f_1\|_{p,G}$ (Minkowski's eşitsizliği)

4) $L_p(G)$ - uzayı tamdır başka bir değişle, $f_k \in L_p(G)$ $(k=1,2,\dots)$ ise o halde

$$\|f_k-f_l\|_{p,G} \to 0 \,(k,l \to \infty) \tag{2.5.7}$$

Yukarıda tanımlanan birinci ve ikinci özelliklerin doğruluğu açıktır. Üçüncü özellik ise Minkowski's eşitsizliği olup 2.8.3 paragrafında ispatlanacaktır. Bu nedenle burada sadece $L_p(G)$ uzayının tamlığı ispat edilecektir.

Biz burada $L_p(G)$ uzayının tamlığını $G=E_n$ durumu için ispat edeceğiz. $L_p(G)$ uzayı altında kendine yakınsayan fonksiyonlar dizisi $\{f_k\}_1^\infty$ olsun. Bu önermenin ispatı için 2.7.1 paragrafında verilen Hölder integral eşitsizliğinin sonucundan hareketle G üzerinde ölçülebilir her φ fonksiyonu için ve her $p, 1 \le p \le \infty$ için

$$\|\varphi\|_p = ¿ \|g\|_{p'}=1 \int_{E_n} |\varphi(x)\, g(x)|\, dx \tag{2.5.8}$$

eşitliği doğrudur. Burada $p'=(p_1', \cdots, p_n')$ ve $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i'}=1\,(i=1,\cdots,n)$.

$\{I_m\}_1^\infty$ -sınırlı ve ölçülebilir kümeler ailesi ve χ_{I_m} ise I_m kümesinin bir karakteristik fonksiyonu olmak üzere $¿1¿\infty I_m=E_n$ olsun. O halde (2.5.7) ifadesinden hareketle aşağıdaki eşitsizlik elde edilecektir.

$$\|f_k-f_l\|_p = ¿ \|g\|_{p'}=1 \int_{E_n} |f_k-f_l||g|\,dx \ge \|\chi_{I_m}\|_{p'} \int_{I_m} \|f_k-f_l\|\,dx \,(2.5.9)$$

Böylece, (2.5.6) ifadesi göz önünde bulundurularak ve L_1 uzayının tamlığı da dikkate alınarak (2.5.9) ifadesinden şu sonuca varılır. E_n 'de tanımlı öyle bir f fonksiyonu vardır ki her m için $\|(f-f_k)\,\chi_{I_m}\|_I \to 0$ doğrudur. Köşegen işlemi (Kantor yöntemi) yardımıyla $\{f_k\}_1^\infty$ fonksiyonlar dizisinden E_n 'de hemen her yerde f fonksiyonuna yakınsayan bir $\{f_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ dizisi seçelim.

Daha sonra ise $\{|f_{k_i}-f_{k_j}||g|\}(k_j=k_i, k_{i+1}, \cdots), \|g\|_p=1$ dizisine Fatou-Lebesgue teoremi uygulanarak ve (2.1.8) ifadesinin de dikkate alınmasıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_{E_n}^{\square} |f_{k_i} - f||g|dx \leq \text{¿} k_s \geq k_i \int_{E_n}^{\square} |f_{k_i} - f_{k_j}||g|dx \leq \text{¿} k_j \geq k_i \|f_{k_i} - f_{k_j}\|_p \qquad (2.5.10)$$

Bu eşitsizlik tüm $g \in L_{p'}$ ve $\|g\|_{p'}$ için doğru olduğundan, $(f - f_{k_i}) \in L_p$ ifadesi için de doğru olacaktır. O halde, Minkowski's eşitsizliğine istinaden $f = (f - f_{k_i}) + f_{k_i} \in L_p$ yaza biliriz. Böylece, (2.5.10) eşitsizliğinde (2.5.7) ifadesinin dikkate alınmasıyla $\|f_k - f\|_p \to 0 \,(k \to \infty)$ sonucuna varılır. Dolayısıyla $L_p(G)$ uzayı tamdır.

2.6 W_p^l Sobolev uzayı

Tanım 2.6.1. [Besov ve ark.,1996]. G , E_n 'de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, G bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p dereceden integrallenebilen G bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L_{loc}^p(G)$ ile gösterilir. Bu uzay $p=1$ için $L_{loc}^1(G)$ ¸seklinde gösterilen, lokal (yerel) integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir.

Tanım 2.6.2. [Besov ve ark.,1996]. $u \in L_{loc}^1(G)$ ve α çoklu-indislisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(G)$ için

$$\int_{\Omega}^{\square} v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega}^{\square} u D^\alpha \varphi dx$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $u \in L_{loc}^1(G)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun zayıf türevi denir. Bununla birlikte v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.6.3. [Besov ve ark.,1996]. G , E_n 'de bir bölge, l pozitif bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W_p^l(G) := \{u \in L_p(G) : D^\alpha u \in L_p(G), 0 \leq |\alpha| \leq l\}$$

seklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. $W_p^l(G)$ uzayı

$$\|u\|_{W_p^l(G)} := \|u\|_{l,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le l} |D^\alpha u|_p^p \right)^{1/p} ; 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{W_p^l(G)} := \|u\|_{l,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le l} |D^\alpha u|_\infty ; p = \infty$$

tanımlanan normlar altında bir Banach uzayı olur.

2.7 $B_{p,\theta}^l$ Besov uzayı ve W_p^l Sobolev uzayları arasındaki ilişki

Tanım m_i - doğal sayı, k_i - negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $m_i > l_i - k_i > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ olsun. Her $1 \le p^i \le \infty \ (i = 1,2,\cdots,n)$ ve $1 \le \theta \le \infty$ için $G \subset E_n$, başka bir deyişle G , E_n ’de açık bir küme olsun. Bu koşullar altında $f(x)$ fonksiyonunun G ’de

$$\|f\|_{B^l_{p^0;p^1,\cdots;p^n,\theta}(G)} = \|f\|_{p^0,G} + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{h_0} \left[\frac{\left\| \Delta_i^{m_i}(h;G) D_i^{k_i} f \right\|_{p^i}}{h^{l_i - k_i}} \right]^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta}$$

normuna göre tanımlı lineer normlu uzayı $B^l_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)$ dir. Görüldüğü üzere bu uzay genelleştirilmiş bir Hölder uzayıdır.

$B^l_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)$ uzayı, $H_p^l(G)$ uzayları gibi, gömülme (embedding) teoremlerine göre kapalı bir sistem oluşturmaları ve diğer taraftan $W_p^l(G)$ Sobolev uzayları ile yakın bir bağlantıya sahip olmaları açısından ilginçtir.

Teorem 2.7.1 $B^l_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)$ uzayı tamdır.

İspat[Besov ,İl’yin & Nikolskii,s.295, 1996]

$1 \le \theta < \infty$ için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu varsayalım

$$\|f_\nu - f_\mu\|_{B^l_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)} \to 0 \qquad (\nu, \mu \to \infty)$$

$L_{p^0}(G)$ uzayının yoğunluğundan dolayı $f\in L_{p^0}(G)$ fonksiyonu için

$$\|f_v-f\|_{p^0,G}\to 0 \qquad (v\to\infty)$$

$Q,Q^{¿}$ - açık n - boyutlu küpler olmak üzere, $\acute{Q}\subset Q^{¿}$ ve $\acute{Q}^{¿}\subset G$ olsun. Hölder eşitsizliğinin de dikkate alınmasıyla

$$B^{l}_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)\hookrightarrow B^{l}_{1,\theta}(Q^{¿})\hookrightarrow W^{k}_{1}(Q)$$

Bu ifadeden hareketle ve ayrıca $W^{k}_{1}(Q)$ uzayının tamlığı dikkate alınırsa, $v\to\infty$ için

$$\left\|D_i^{k_i}f_v-D_i^{k_i}f\right\|_{1,\theta}\to 0$$

olduğunu elde ederiz.

$L_{p^i,\theta}(G\times(0,h_0))$ uzayının tamlığı nedeniyle öyle bir $F_i(x,h)$ fonksiyonu vardır ki $v\to\infty$

için aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\left\|h^{-l_i+k_i-\frac{1}{\theta}}\Delta_i^{m_i}(h;G)D_i^{k_i}f_v(x)-F_i(x,h)\right\|_{(p^i,\theta),G\times(0,h_0)}\to 0$$

O halde her $x\in Q$ ve $h\in(0,h_0)$ olmak üzere, her $\{f_{v_j}\}$ alt dizisi için

$$D_i^{k_i}f_{v_j}(x)\to D_i^{k_i}f(x) \qquad (j\to\infty, i=1,\cdots,n)$$

ve

$$h^{-l_i+k_i-\frac{1}{\theta}}\Delta_i^{m_i}(h;G)D_i^{k_i}f_v(x)\to F_i(x,h) \qquad (j\to\infty)$$

yaza biliriz.

Buradan hareketle, tüm $(x,h)\in Q\times(0,h_0)$ ve $(x,h)\in G\times(0,h_0)$ $(\acute{Q}\subset G)$ için

$$F_i(x,h)=h^{-l_i+k_i-\frac{1}{\theta}}\Delta_i^{m_i}(h;G)D_i^{k_i}f(x)$$

ifadesini elde ederiz.

Sonuç olarak, yukarıda elde edilen ifadelerden hareketle, $v\to\infty$ için

$$\|f_v-f\|_{B^{l}_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)}\to 0$$

olduğu yazıla bilir. Bu ise, $B^{l}_{p^0,p^1;\cdots;p^n,\theta}(G)$ uzayının tamlığını ispatlar.

2.8 Temel integral eşitsizlikler

Gerçek değerli fonksiyonların uzayında bazı temel özelliklerinin açıklanmasında;

i) kesirli(fractional) integraller için Hölder, Minkowski, Hardy, Hardy-Littlewood integral eşitsizlikleri;

ii) singuler integraller için ise Mikhlin-Calderon-Zygmund integral eşitsizlikleri temel integral eşitsizlikleri olarak bilinmektedir.

Eğer p sayısı verilmiş ve $1\leq p\leq\infty$ ise, o halde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ eşitliğini sağlayan p' sayısına p sayısının eşleniği denir. Özel durumda eğer $p=1$ ise $p'=\infty$ veya $p=\infty$ ise $p'=1$ olur.

Bu özelliklere sahip p ve p' değerleri dikkate alınarak aşağıdaki eşitsizlikleri tanımlayalım

2.8.1. Hölder eşitsizliği

Varsayalım ki $1\leq p\leq\infty$, $f_1\in L_p(E^n)$ ve $f_2\in L_{p'}(E^n)$. O halde $f_1(x)f_2(x)$, E^n de integrallenebilirdir ve

$$\int_{E_n}|f_1(x)f_2(x)|dx\leq\|f_1\|_p\|f_2\|_{p'} \tag{2.8.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik Hölder Eşitsizliği olarak tanımlanır [Besov ve ark.,1996]

İspat

(2.1.1) eşitsizliğinin doğruluğu $p=1$ ve $p=\infty$ durumları için açıktır. Fakat $1\leq p\leq\infty$ için ispat yapılmadan önce aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğu gösterilmelidir.

$p,p'\in R^{+}\setminus\{1\}$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olmak üzere $\forall u,v\in R$ için

i) $p>1$ için $|uv|\leq\frac{|u|^p}{p}+\frac{|v|^{p'}}{p'}$ ve

ii) $1\leq p\leq\infty$ için ise $|uv|\geq\frac{|u|^p}{p}+\frac{|v|^{p'}}{p'}$ olduğunu kabul edeceğiz.

Öncelikle $p>1$ durumunu ele alalım. Varsayalım ki $u>0$ ve $v>0$. Daha sonra ise

$\beta=\frac{1}{p}(0<\beta<1)$ ve $t\in(0,\infty)$ olmak üzere $\varphi(t)=t^{\beta}(1-\beta t^{1-\beta})$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon incelendiğinde $\forall t\in(0,\infty)$ için $\varphi(t)$ fonksiyonunun maksimum değerinin $t=1$ noktasında olduğu görülür. Bu demektir ki $\forall t\in(0,1)$ için $\varphi(t)\leq\varphi(1)$ olacaktır. Dolayısıyla $t^{\beta}-\beta t\leq 1-\beta$ veya bu eşitsizliğin yeniden düzenlenmesiyle $t^{\beta}-1\leq\beta(t-1)$ olduğunu elde ederiz. Elde ettiğimiz bu eşitsizlikte u ve v yukarıda tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere $t=\frac{u^{p}}{v^{p'}}$ değişken değiştirmesi ve bazı düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki şekilde tanımlanmış eşitsizlikleri yaza biliriz.

$$\left(\frac{u^{p}}{v^{p'}}\right)^{\frac{1}{p}}-1\leq\frac{1}{p}\left(\frac{u^{p}}{v^{p'}}-1\right)\Longrightarrow\frac{v^{p'}u}{\left(v^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}}-v^{p'}\leq\frac{v^{p'}}{p}\left(\frac{u^{p}}{v^{p'}}-1\right)$$

ve ya

$$uv-v^{p'}\leq\frac{u^{p}}{p}-\frac{v^{p'}}{p}\Longrightarrow uv\leq\frac{u^{p}}{p}+\left(\frac{p-1}{p}\right)v^{p'}$$

Elde edilen son eşitsizlikte $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ koşulunun dikkate alınmasıyla her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|uv|\leq\frac{|u^{p}|}{p}+\frac{|v^{p'}|}{p'}$$

sonucuna varırız. Bu ise $p>1$ için kabul ettiğimiz varsayımın doğruluğunu ispatlar. Benzer yorumlarla $1\leq p\leq\infty$ durumuna karşılık gelen $|uv|\geq\frac{|u^{p}|}{p}+\frac{|v^{p'}|}{p'}$ eşitsizliği ispatlanır.

Şimdi ise yukarıda $p>1$ ve $1\leq p\leq\infty$ durumları için ispatladığımız varsayımlardan hareketle (2.8.1.1) ifadesi ile tanımlanan Hölder eşitsizliğini ispatlayalım

$$a^{p}=\left(\int_{E_n}|f_1(x)|^{p}dx\right) \quad \text{ve} \quad b^{p'}=\left(\int_{E_n}|f_2(x)|^{p'}dx\right) \quad \text{olsun.}$$

Burada a ve b sayılarından biri sıfır ise (2.8.1.1) ifadesi ile tanımlanan eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır. $a>0$ ve $b>0$ olması koşullarında $f_1(x)=au(x)$ ve $f_2(x)=bv(x)$ fonksiyonları tanımlayalım. Daha sonra ise $|uv|\le\frac{|u^p|}{p}+\frac{|v^{p'}|}{p'}$ eşitsizliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int_{E_n}|u(x)v(x)dx|\le\int_{E_n}\frac{|u(x)|^p}{p}dx+\int_{E_n}\frac{|v(x)|^{p'}}{p'}dx \qquad (2.8.1.2)$$

yaza biliriz. (2.8.1.2) ifadesinde integral altı $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları uygun olarak $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları cinsinden ifade edilirse aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\int_{E_n}\left|\frac{f_1(x)}{a}\frac{f_2(x)}{b}\right|dx\le\frac{1}{p}\int_{E_n}\frac{|f_1(x)|^p}{a^p}dx+\frac{1}{p'}\int_{E_n}\frac{|f_2(x)|^{p'}}{b^{p'}}dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

ve ya $\int_{E_n}|f_1(x)f_2(x)|dx\le ab$ yaza biliriz. Daha sonra ise bu eşitsizlikte a ve b sayıları yerine onların yukarıda tanımladığımız integral değerleri yerine yazılarak Hölder eşitsizliğinin doğruluğu ispatlanır

$$\int_{E_n}|f_1(x)f_2(x)|dx\le\left(\int_{E_n}|f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{E_n}|f_2(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}=\|f_1\|_p\|f_2\|_{p'}.$$

2.8.2. Ters Hölder eşitsizliği

$0<p<1$ için $p'=\frac{p}{p-1}<0$ ve $f\in L_p(E_n)$ olmak üzere $0<\int_{E_n}|g(x)|^{p'}dx<\infty$

olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik doğrudur [Besov ve ark., (1996), Kolmogarov& Fomin (2012)]

$$\int_{E_n}|f(x)g(x)|dx\ge\left(\int_{E_n}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{E_n}|g(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (2.8.2.1)$$

İspat

$fg \in L_1(E_n)$ olur. Aksi takdirde (2.8.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı sonsuz olur.

$\phi = |g|^{-p}$ ve $\psi = |fg|^{p}$ alırsak $\phi\psi = |f|^{p}$ olur. Eğer $q = \frac{1}{p} > 1$ ise $\psi \in L_q(E_n)$ ve $q' = \frac{1}{1-p}$ ise $\phi \in L_{q'}(E_n)$ olur. Bu durumda aşağıdaki ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_{E_n} |f(x)|^p dx = \int_{E_n} |\phi(x)\,\psi(x)|\,dx \le \left(\int_{E_n} |\phi(x)|^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{E_n} |\psi(x)|^{q} dx\right)^{\frac{1}{q}} = ¿$$

$$¿\,\|\phi\|_{q'}\|\psi\|_{q} = \left(\int_{E_n} |f(x)\,g(x)|\,dx\right)^{p} \left(\int_{E_n} |g(x)|^{p'} dx\right)^{1-p}$$

sonucuna varılır. Böylece

$$\int_{E_n} |f(x)\,g(x)|\,dx \ge \left(\int_{E_n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_n} |g(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

ters Hölder eşitsizliği ispatlanmış olur

Eğer, (2.8.1.1) ifadesi ile tanımlanan Hölder eşitsizliğinde $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları sonlu değerli fonksiyonlar ise o halde integral yerine toplam sembolü kullanılacaktır. Bu durumda elde edilen eşitsizlik Hölder'in toplam eşitsizliği olarak adlandırılır ve şöyle ifade olunur

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |b_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (1 \le p \le \infty) \qquad (2.8.2.2)$$

2.8.3. Minkowski Eşitsizliği

Varsayalım ki $1 \le p \le \infty$, $f_i \in L_p(E^n)$ $(i = 1, \ldots, m)$. O halde $(f_1 + \ldots + f_m) \in L_p(E^n)$ ve

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} f_i \right\|_p \le \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_p \qquad (2.8.3.1).$$

eşitsizliği doğrudur [Besov ,İl'yin & Nikolskii, 1996]. Bu eşitsizlik Minkowski eşitsizliği olarak tanımlanır. Bu eşitsizliğin $m=2$ için ispatına bakalım. Buna göre $\|f_1+f_2\|_p \le \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$ olacaktır.

İspat

$$|f_1+f_2|^p = |f_1+f_2|^{p-1}|f_1+f_2| \le |f_1+f_2|^{p-1}\left(|f_1|+|f_2|\right) = ¿$$

$$¿\, |f_1||f_1+f_2|^{p-1} + |f_2||f_1+f_2|^{p-1}$$

$$\|f_1+f_2\|_p^p = \int_{E_n} |f_1(x)+f_2(x)|^p \, dx \le$$

$$\le \int_{E_n} |f_1(x)||f_1(x)+f_2(x)|^{p-1} dx + \int_{E_n} |f_2(x)||f_1(x)+f_2(x)|^{p-1} dx = I_1 + I_2$$

Burada, $I_1 = \int_{E_n} |f_1(x)||f_1(x)+f_2(x)|^{p-1} dx$ ve $I_2 = \int_{E_n} |f_2(x)||f_1(x)+f_2(x)|^{p-1} dx$

Daha sonra ise I_1 ve I_2 ifadelerine (2.8.1.1) ifadesi ile tanımlanan Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$I_1+I_2 = \left(\int_{E_n} |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_n} |f_1(x)+f_2(x)|^{(p-1)p'} dx\right)^{1/p'} + ¿$$

$$+ \left(\int_{E_n} |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_n} |f_1(x)+f_2(x)|^{(p-1)p'} dx\right)^{1/p'}$$

Bu ifade, $(p-1)\,p' = p$ olduğu dikkate alınarak yeniden düzenlenirse

$$I_1+I_2 = \left(\int_{E_n} |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_n} |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{1/p'} + ¿$$

$$+ \left(\int_{E_n} |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_n} |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{1/p'}$$

Eğer, I_1 ve I_2 ifadelerindeki ortak çarpan parantez dışına alınırsa o halde

$$I_1+I_2 = \left(\int_{E_n} |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{1/p'} \left[\left(\int_{E_n} |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{E_n} |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right] =$$

$$¿\, I_3 \left[\left(\int_{E_n} |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{E_n} |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

yaza biliriz. Burada $I_3=\left(\int_{E_n}|f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{1/p'}$ olur.

Sonuç olarak,

$$\int_{E_n}|f_1(x)+f_2(x)|^p dx \le I_3\left[\left(\int_{E_n}|f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E_n}|f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer, bu eşitsizliğin her iki tarafı I_3 'e bölünürse

$$\left(\int_{E_n}|f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{p'}} \le \left(\int_{E_n}|f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E_n}|f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Başka bir ifade ile $\|f_1+f_2\|_p \le \|f_1\|_p+\|f_2\|_p$ sonucu ispatlanmış olur.

2.8.4. Genelleştirilmiş Minkowski's eşitsizliği

$1 \le p \le \infty$ olmak üzere $E_x \times E_y$ 'de $\varphi(x,y)$ ölçülebilir bir fonksiyon ise o halde

$$\left\|\int_{E_y}\varphi(x,y)\,dy\right\|_{p,E_x} \le \int_{E_y}\|\varphi(x,y)\|_{p,E_x}\,dy$$

biçiminde tanımlanan eşitsizliğe genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği denir.

2.8.5. Young eşitsizliği

Varsayalım ki $p,q,r \in R$ reel sayıları için $1 \le p \le \infty$ ve $1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ koşulları doğrudur.

$f(x)$ ve $K(x)$ fonksiyonları $f \in L_p(E^1)$ ve $K \in L_r(E^1)$, E^1 üzerinde tanımlı tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$$I(x)=\int_{E^1} f(y)K(y-x)\,dy$$

olsun. O halde aşağıda tanımlanan eşitsizlik doğrudur.[Besov ,İl'yin & Nikolskii, 1996]

$$\|I\|_q \le \|K\|_r \|f\|_p$$

2.8.6. Genelleştirilmiş Hardy eşitsizliği

$E^1_+ = (0,\infty)$ yarım ekseninde incelenen bir değişkenli f fonksiyonun normu

$$\|f\|_{p,E^1_+} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde belirlenir.

Her $1 \le p \le q \le \infty$, için $\alpha \ne 0$, $\gamma > 0$ olmak üzere , $f \in L_p(E^1_+)$ olsun

Eğer, $\alpha > 0$ için

$$F_{\alpha,\gamma}(x) = \int_0^{x^\gamma} f(y)\, y^{-\frac{1}{p'}+\alpha} \, dy$$

ve $\alpha < 0$ için

$$F_{\alpha,\gamma}(x) = \int_{x^\gamma}^{\infty} f(y)\, y^{-\frac{1}{p'}+\alpha} \, dy$$

fonksiyonları tanımlanırsa, o halde $E^1_+ = (0,\infty)$ yarım ekseninde incelenen bir değişkenli fonksiyon için Hardy eşitsizliği aşağıdaki biçimde ifade edilir

$$\left\| x^{-\frac{1}{q}-\alpha\gamma} F_{\alpha,\gamma} \right\|_{q,E^1_+} \le \gamma^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{\mu}{|\alpha|} \right)^{\mu} \|f\|_{p,E^1_+}$$

burada $\mu = 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$

2.8.7. Hardy-Littlewood eşitsizliği

Varsayalım ki $1 < p < q < \infty$, $\mu = 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ ve $f \in L_p(E^1)$.

$$J(x) = \int_{E^1} f(y)\, |y-x|^{-\mu} \, dy$$

olmak üzere

$$\|J\|_q \le K(p,q)\|f\|_p$$

eşitsizliği doğrudur. [Besov ,İl'yin & Nikolskii, 1996]

2.9 Diferansiyellenen Fonksiyonların İntegral Gösterimi

İntegral Gösterimi nedir ve niçin kullanılır?

Çok değişkenli fonksiyonların integral gösterimi, belirli bir bölgenin herhangi bir noktasında fonksiyonun değerini bu fonksiyonun integrali, bazı türevleri veya fonksiyonun sonlu farkı cinsinden ifade etmeye olanak sağlar.

Farklı diferansiyel veya diferansiyel-fark özellikleri ile tanımlanan fonksiyonlar sınıfı için bu fonksiyonlar sınıfına özgü integral gösterimi oluşturulur. Burada önemli olan iki husus vardır. Bunlar sırasıyla:

i) integral gösterimi biçiminin incelenen fonksiyonlar sınıfının karakteri ile,

ii) gösterim taşıyıcılarının(başka bir değişle gösterimdeki integralleme bölgesinin biçiminin) ise fonksiyonun verildiği bölgeler sınıfının parametreleri ile belirlenmesidir.

Bu hususlar doğrultusunda *integral gösterim*, incelenen fonksiyonlar sınıfının özellikleri ile fonksiyonun verildiği bölgelerin özellikleri arasındaki ilişkiyi analiz etmeye olanak sağlar. Yukarıda da belirtildiği gibi *bu teori ilk olarak* 1938 yılında *S. L. Sobolev* tarafından tanımlanmış ve daha sonra yoğun bir şekilde ünlü matematikçiler tarafından bu teorinin gelişmesine önemli katkılar sağlanmış ve henüz de bu teori matematiksel fizikte, fonksiyonel analizin bazı uygulamalarını kapsayan problemler için önem arz etmektedir.

Tezin ileriki aşamasında ihtiyaç duyulan integral gösterimle ilgili bazı temel işaretlemeleri tanımlayalım.

Negatif olmayan bileşenlere sahip $\forall k=(k_1,\cdots,k_n)$ vektörü için

$|k|=\sum_{i=1}^{n} k_i$ ve $k-1=(k_1-1,\cdots,k_n-1)$ olduğu varsayılacaktır. Burada $1=(1,\cdots,1)$

ve her $i=1,2,\cdots,n$ için k_i negatif olmayan tamsayılardır ve $k!=\prod_{i=1}^{n} k_i!$.

Eğer, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E_n$ ise o halde $x^k=x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, $(-x)^k=(-1)^{|k|}x^k(k_i\ge 0)$ ve $x^i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ olduğu varsayılacaktır.

Her $i=1,2,\cdots,n$ için $\lambda_i>0$ olmak üzere $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ ve $\upsilon>0$ olsun. Bu durumda,

$\upsilon^{\lambda}=\left(\upsilon_1^{\lambda_1},\cdots,\upsilon_n^{\lambda_n}\right)$,

$x\upsilon^{\lambda}=\left(x_1\upsilon_1^{\lambda_1},\cdots,x_n\upsilon_n^{\lambda_n}\right)$ ve $x:\upsilon^{\lambda}=x\upsilon^{-\lambda}=\left(x_1\upsilon_1^{-\lambda_1},\cdots,x_n\upsilon_n^{-\lambda_n}\right)$ olsun.

Ayrıca varsayalım ki

$(k,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}k_i\lambda_i$,

$I_{v^{\lambda}}(a)=\left\{x:\left|x_i-a_i\right|\le v^{\lambda_i}(i=1,\cdots,n)\right\}\left(a=(a_1,\cdots,a_n)\right)$,

$I_{v^{\lambda}}=I_{v^{\lambda}}(0)\left(0=(0,\cdots,0)\right)$,

$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ (x_i ekseni yönünde birim vektördür),

$\prod_{j}^{(i)}t_j=\prod_{j\neq i}t_j$

biçiminde tanımlanır. x_i argümanına göre türevi D_{x_i} ve i argümanına göre ise türevi D_i ile işaretleyeceğiz. Bu durumda

$$D_{x_i}K\left(xv^{\lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}K\left(x:v^{\lambda}\right)=D_iK\left(x:v^{\lambda}\right)v^{-\lambda_i}$$

$$D_x=\left(D_{x_1},\cdots,D_{x_n}\right)\ ,\quad D_{x_i}^{k_i}=\left(D_{x_i}\right)^{k_i}=\frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i^{k_i}}\ ,\quad D_x^k=D_{x_1}^{k_1}\cdots D_{x_n}^{k_n}\ ,$$

$D=\left(D_1,\cdots,D_n\right)$, $D_i^{k_i}=\left(D_i\right)^{k_i}$, $D^k=D_1^{k_1}\cdots D_2^{k_n}$ ifadelerini tanımlayalım.

Bu durumda $D_{x_i}f(x)=D_if(x)$, ve $D_x^kf(x)=D^kf(x)$ olduğu açıktır.

$\Omega_1\in E_n$ ve $\Omega_2\in E_n$ olmak üzere, Ω_1 ve Ω_2 kümelerinin aritmetik toplamı $\Omega_1+\Omega_2$ ve aritmetik fark ise $\Omega_1-\Omega_2$ seklinde gösterilecektir.

2.10 Ortalama Fonksiyonun Oluşturulması

İncelenen bölgede tanımlanmış çok değişkenli diferansiyellenen fonksiyonlar için yeni fonksiyon uzayların oluşturulması için gerekli olan “yeni integral gösterimlerini” elde etmek için yapılması gereken ilk aşama, belirli koşullarda $f(x)$ fonksiyonuna yakınsayan sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonlar dizisinin oluşturulmasıdır. Bu işlem $f(x)$ fonksiyonunun ortalaması olarak tanımlanır

Tanım. 2.10

$K(x)$ destekleyicisi sınırlı ve E_n 'de olan sonsuz kez diferansiyellenebilen bir fonksiyonu göstersin. Başka bir değişle $K(x) \in C_0^\infty(E^n)$ dır. Ayrıca $K(x)$

$$\int_{E_n} K(x)\, dx = 1 \qquad (2.10.1)$$

ve $supp\, K = S(K) \subset I_1$ koşulları sağlasın.

$i=(1,\cdots,n)$ için $\lambda_i > 0$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ ve $\vartheta > 0$ de pozitif bir sayı olmak üzere;

$$K_{\vartheta^\lambda}(x) = \vartheta^{-|\lambda|} K(x : \vartheta^\lambda) \qquad (2.10.2)$$

fonksiyonu E_n 'de sonsuz defa diferansiyellenebilirdir ve onun destekleyicisi $S_{\vartheta^\lambda}(K) \subset I_{\vartheta^\lambda}$

$$S_{\vartheta^\lambda}(K) = \{x : (x : \vartheta^\lambda) \in S(K)\} \qquad (2.10.3)$$

şeklindedir [Kerimova (Alisoy) (1997), Kolmogorov & Fomin (2012)].
(2.10.1) ifadesi gereğince,

$$\int_{E^n} K_{\vartheta^\lambda}(x)\, dx = \int_{E^n} \vartheta^{-|\lambda|} K(x : \vartheta^\lambda)\, dx = \int_{E^n} K(x)\, dx = 1 \qquad (2.10.4)$$

G , E_n uzayı üzerinde ölçülebilir bir alt küme ve f fonksiyonu da G üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca $E_n \setminus G$ üzerinde $f=0$ alırsak ve bu koşullarda E_n üzerinde belirlenen f fonksiyonu $L^{loc}(E_n)$ 'e ait tüm E_n 'ler üzerinde alınacaktır, yani $f \in L^{loc}(E_n)$. O takdirde f fonksiyonuna karşılık, ortalama çekirdeği K ve ortalama parametresi ϑ^λ olan bir *ortalama fonksiyon* tanımlanacaktır [Maksudov& Dzhabrailov, 2000]

$$f_{\vartheta^\lambda}(x) = \vartheta^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(x+y) K(y : \vartheta^\lambda)\, dy = \vartheta^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) K((y-x) : \vartheta^\lambda)\, dy \qquad (2.10.5)$$

Burada $f_{\vartheta^{\lambda}}(x)$ fonksiyonu, sürekli ve E_n 'deki tüm mertebeden türevleri içinde süreklidir. Örneğin; α_i negatif olmayan tamsayı alındığında keyfi $\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_n)$ için,

$$D_x^{\alpha} f_{\vartheta^{\lambda}}(x)=(-1)^{|\alpha|}\vartheta^{-|\lambda|-(\alpha,\lambda)}\int_{E^n} f(y)\,K\left((y-x):\vartheta^{\lambda}\right)dy \qquad (2.10.6)$$

olur.

2.10. Genelleştirilmiş Türev

S.L. Sobolev anlamında genelleştirilmiş türev kavramı, çok katlı değişkenlere bağımlı tekrarlanan diferansiyel fark karakteristikli yeterince sonlu fonksiyonlar için yeni integral gösterimlerinin elde edilmesinde çok önemlidir. Bununla birlikte genelleştirilmiş türev kavramı fonksiyonlar için yeni fonksiyon uzaylarının türetilmesinde ve bu uzayların gömme teoremleri kapsamında incelenmesinde ve de türetilmiş fonksiyon uzaylarından olan çok katlı değişkenlere bağımlı fonksiyonlar için diferansiyel ve diferansiyel fark özelliklerinin incelenmesinde büyük öneme sahiptir [Kerimova (Alisoy),1997].

Tanım 2.10.1. Varsayalım ki $f\ ve\ \chi$ fonksiyonları $G\subset E^n$ açık kümesinde yerel toplanabilir fonksiyonlardır. Eğer G - açık kümesinde keyfi sonsuz diferansiyellenen ve sonlu φ - fonksiyonu için

$$\int_G \chi(x)\varphi(x)\,dx=(-1)^{|k|}\int_G f(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx \qquad (2.10.1)$$

eşitliği doğru ise o halde χ – fonksiyonuna G - açık kümesinde f - fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi denir ve aşağıdaki ifade ile belirlenir

$$f^{(k)}=D^k f=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1},\dots,\partial x_n^{k_n}} \qquad (2.10.2)$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu G 'de $|k|$ mertebe sürekli türevlere sahip ise kısmi integrasyon formülü uygulanarak $f(x)$ için (2.10.1) denklemini elde ederiz. Bu demektir ki $f(x)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş ve sürekli türevleri çakışır. Tanım gereğince, (2.10.1) ifadesinde sürekli türevlere sahip φ fonksiyonu için diferansiyelleme işleminin isteğe bağlı olarak yerdeğiştire bilmesinin mümkün olabilirliği dolayısıyla, genelleştirilmiş türev $f^{(k)}$

diferansiyel işleminin yazılış sırasına bağlı değildir. [Alisoy ve ark.(2005) , Resetnyak, (19719]

Genelleştirilmiş türevin bir sıra özellikleri vardır. Bu özelliklerden bazıları şöyledir.

i) Eğer, f_1 ve f_2 fonksiyonları uygun olarak $f_1^{(k)}$ ve $f_2^{(k)}$ genelleştirilmiş türevlerine sahip ise o halde c_1 ve c_2 sabitleri için $c_1 f_1 + c_2 f_2$ lineer bileşeninin $c_1 f_1^{(k)} + c_2 f_2^{(k)}$ genelleştirilmiş türevi vardır.

ii) Eğer, f fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \chi$ ve χ 'in genelleştirilmiş türevi ise $\frac{\partial \chi}{\partial x_2}$ biçiminde ifade edilirse, o zaman f fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}$$

ifadesi ile tanımlanan genelleştirilmiş türeve sahiptir.

iii) Eğer, f fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ ise o halde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ ifadesi $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ifadesinin x_1 'e göre genelleştirilmiş türevidir.

iv) Eğer, f fonksiyonunu G üzerinde $f^{(k)}$ genelleştirilmiş türevine sahip ise o halde, f fonksiyonunun her hangi $G' \subset G$ açık kümesi üzerindeki genelleştirilmiş türevi de $f^{(k)}$ olacaktır.

Şimdi ise f fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi ile ortalama arasındaki ilişki ifadesini belirleyelim. Açık bir G kümesinde tanımlı $f \in L^{loc}(E_n)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi $f^{(k)}$ olsun. Bu fonksiyonun ortalamaması

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E_n} f(y) K((y-x) : v^\lambda) dy$$

şeklindedir.

$f_{v^\lambda}(x) \in C^\infty(E_n)$ olmak üzere, $D_x^k f_{v^\lambda}(x)$ 'i belirleyelim.

$$D_x^k f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E_n} f(y) D_x^k K((y-x) : v^\lambda) dy = ¿$$

$$¿ (-1)^{|k|} v^{-|\lambda|} \int_{E_n} f(y) D_y^k K((y-x) : v^\lambda) dy$$

Burada $K\left(\left(y-x\right):v^{\lambda}\right)$ fonksiyonu y fonksiyonu gibi davranır öyleki, $x+S_{v^{\lambda}}\left(K\right)$ kapalı kümesi dışında sıfır olur. Eğer, bu kapalı küme G 'in bir alt kümesi ise o halde $K\left(\left(y-x\right):v^{\lambda}\right)$ fonksiyonu (2.10.1) formülündeki G 'de finite bir φ fonksiyonu olarak alınabilir. Bu durumda $f^{(k)}$ genelleştirilmiş türevine sahip f fonksiyonu için

$$D_x^k f_{v^{\lambda}}\left(x\right)=v^{-|\lambda|}\int_{E_n} D^k f\left(y\right)\cdot K\left(\left(y-x\right):v^{\lambda}\right)dy$$

yazıla bilir. Başka bir deyişle

$$D^k\left(f_{v^{\lambda}}\left(x\right)\right)=\left(D^k f\right)_{v^{\lambda}}\left(x\right)$$

olur. Bu ifadeden de görüldüğü üzere, genelleştirilmiş türevin ortalama fonksiyonu ile ortalama fonksiyonun genelleştirilmiş türevi

$$U=\left\{x:x\in G,x+S_{v^{\lambda}}\left(K\right)\subset G\right\}$$

kümesi üzerinde çakışır.

Hatırlayalım ki (2.10.1) ifadesiyle tanımlanan genelleştirilmiş türeve denk farklı tanımlar da mevcuttur. Burada sadece Sobolev anlamında fonksiyonun genelleştirilmiş türevi ile bu fonksiyonun mutlak sürekliliği arasındaki ilişkinin olduğu önemlidir[Nik9].

Eğer, f fonksiyonu açık bir G kümesi üzerinde $D_{x_i}^{k_i} f=\dfrac{\partial^{k_i} f}{\partial x_i^{k_i}}$ biçiminde genelleştirilmiş türeve sahip ise, G kümesi üzerinde f fonksiyonuna denk bir ψ fonksiyonu oluşur. Bu ψ fonksiyonu x_i 'ye göre, G kümesi üzerinde hemen her yerde (h.h.y) k_i mertebeye kadar adi türevlere sahiptir. Başka bir deyişle $\psi,\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i},\cdots,\dfrac{\partial^{k_i-1}\psi}{\partial x_i^{k_i-1}}$ ifadeleri, tüm sabit $x^{(i)}=\left(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n\right)\in G^{(i)}$ için ($G^{(i)},x_i=0$ hiperdüzlem üzerinde G 'nin dik izdüşümünü gsterir) G ‘de tanımlı x_i değişkenlerinin kapalı $\left[a,b\right]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlardır

Özel durumda,eğer;

i) $D_{x_i}^{k_i} f$ mevcut ise;

ii) $\varphi\in C_0^{\infty}\left(G\right)$

iii) $x^{(i)}=sabit$ doğrusunun φ fonksiyonunun taşıyıcıları ile kesişimleri $\left[a,b\right]$ 'nın içinde ise o halde

$$\int_a^b f D_{x_i}^{k_i} \varphi d x_i = (-1)^{k_i} \int_a^b \left(D_{x_i}^{k_i} f \right) \varphi d x_i$$

ifadesi doğrudur.

$\left[x_i, x_i + k_i t \right] \times x^{(i)} \subset G$ ise, o halde $0 \le s \le k_i - 1$ olmak üzere s_i 'nin her mertebeden türevleri için

$$\Delta_i(t) D_i^{s_i} f(x) = D_i^{s_i} f(x + t e_i) - D_i^{s_i} f(x) = \int_0^t D_i^{s_i+1} f(x + \tau e_i) d\tau$$

eşitliği doğrudur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, çok boyutlu G - alt uzayında tanımlanmış *B* –fonksiyonel uzay tipine ait çok değişkenli $f \in ¿ ¿ B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonların diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla, $G \in E_n$ bölgesinin ötesine genişletilmesinin incelenmesinde kullanılacak bazı tanımlar ve işaretlemeler ve daha sonra ise , $G \in E_n$ bölgesinde tanımlanmış ” σ - yarım boynuz “ ve ” kuvvetli σ - yarım boynuz “ koşulunu sağlayan $f \in ¿ ¿$ $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla, $G \in E_n$ bölgesinin ötesine genişletilmesine ilişkin sonuçlar dört teorem biçiminde verilmiştir.

3.1.Temel tanımlar ve gerekli işaretlemeler

$G \in E_n$ bölgesinde (alt uzayında) tanımlanmış ve σ -yarım boynuz koşulunu sağlayan çok değişkenli $f(x)$ fonksiyon verilmiş olsun. Öyle ki her *k=1,2,…,s* için $x=(x_1,x_2,\ldots,x_s) \in E_n = E_{n_1} \times \ldots \times E_{n_s}$ ve $x_k = (x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k})$ ¿ E_{n_k} .

Varsayalım ki $f(x)$ fonksiyonunun $G \in E_n$ alt uzayı üzerinde tanımlandığı norm $1 \leq p < \infty$ durumu için,

$$\|f\|_{p,G} = \left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.1.1)$$

ve $p=\infty$ durumu için,

$$\|f\|_{\infty,G} = vrai \sup_{x \in G} |f(x)| \ . \qquad (3.1.2)$$

Varsayalım ki $m=(m_1,\ldots,m_s)$, bileşenleri $m_k=(m_{k,1},\ldots,m_{k,n_k})$ olan tam sayılı negatif olmayan bir vektördür. Başka bir değişle tüm $k=1,2,\dots,s$ için $m_{k,j} \geq 0$ $(j=1,2,\dots,n_k)$. Tüm *k=1,2,…,s* için, $t=(t_1,\dots,t_s) \in E^n$ vektör adımı olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun m - mertebeden sonlu karışık farkı

$$\Delta^m(t)f = \Delta_1^{m_1}(t_1)\dots\Delta_s^{m_s}(t_s)f(x)$$

$$\Delta_k^{m_k}(t_k)\varphi(\dots;x_k;\dots) = \Delta_{k,1}^{m_{k,1}}(t_{k,1})\dots\Delta_{k,n_k}^{m_{k,n_k}}(t_{k,n_k})\varphi(\dots;x_k;\dots) \qquad 3.1.3)$$

olsun. Burada $\Delta_{k,j}^{m_{k,j}}(t_{k,j})f$, tüm *k=(1,2,…,s)* için $x_{k,j}$ yönünde $t_{k,j}$ adımlı $(j=1,2,\dots,n_k)$, $m_{k,j}$ mertebe sonlu karışık farkı ifade etmektedir. Öyle ki tüm *k={1,2, …,s}= e*$_s$ için

(3.1.4)

Bu durumda

$$\Delta_{k,j}^{m_{k,j}}(t_{k,j})\,g(\dots;x_{k,j};\dots) = \Delta_{k,j}^{m_{k,j}-1}(t_{k,j})\left(\Delta_{k,j}^{1}(t_{k,j})\,g(\dots;x_{k,j};\dots)\right) \quad ; \qquad (3.1.5)$$

$$\Delta_{k,j}^{0}(t_{k,j})\,g(\dots;x_{k,j};\dots) = g(\dots;x_{k,j};\dots) \quad ;$$

$$\Delta_{k,j}^{1}(t_{k,j})\,g(\dots;x_{k,j};\dots) = g(\dots;x_{k,j}+t_{k,j};\dots) - g(\dots;x_{k,j};\dots)$$ ve

Burada (3.1.5) ifadesi $g(\dots;x_{k,j};\dots)$ $x_{k,j}$ fonksiyonunun tüm *k={1,2,…,s}= e*$_s$ için yönünde $t_{k,j}$ adımlı $(j=1,2,\cdots,n_k)$ $m_{k,j}$, mertebe sonlu karışık farkını ifade etmektedir.

$f=f(x)$ fonksiyonunun $m=(m_1,\dots,m_s)$ vektörüne karşılık gelen, baskın karışık türevleri

$D^m f = D_1^{m_1} \ldots D_s^{m_s} f(x)$ olsun. Bu durumda $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k}) \in E^{n_k}$ *(k=1,2,…,s)* toplu değişkenleri için Sobolev anlamında karışık türev $D_k^{m_k} f = D_{k,1}^{m_{k,1}} \ldots D_{k,n_k}^{m_{k,n_k}} f$ olacaktır.

Eğer fark, tamamen G -bölgesinde bulunan çokgenin tepe noktalarına göre oluşturulursa, o zaman $\Delta^m(t,G) f = \Delta^m(t) f(x)$, aksi durumda ise $\Delta^m(t,G) f(x) = 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

Bu varsayımlar doğrultusunda, $1 \le \theta < \infty$ durumu için, yarım normu sırasıyla

$$\|f\|_{\Lambda_{p,\theta}^{\langle m+\alpha;\,\beta\rangle}(G;s)} = \left\{ \int_{E^{|e_\alpha|}} \left\| \frac{\Delta^\beta(t;G) D^m f(x)}{\psi(t)} \right\|_{p,G}^{\theta} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.1.6}$$

ve $\theta = \infty$ durumu için ise

$$\|f\|_{\Lambda_{p,\theta}^{\langle m+\alpha;\,\beta\rangle}(G;s)} = \underset{t \in E^{|e_\alpha|}}{vrai\ sup} \left\| \frac{\Delta^\beta(t;G) D^m f(x)}{\psi(t)} \right\|_{p,G} \tag{3.1.7}$$

şeklinde tanımlayalım [Alisoy G & Alisoy H., (2002)]. Burada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ tüm için, koordinat vektörleri $\alpha_k = (\alpha_{k,1}, \cdots, \alpha_k)$ olan negatif olmayan bir vektördür.

Bu durumda

$$\psi(t) = \prod_{k \in e_\alpha} \prod_{j \in e_{\alpha_k}} |t_{k,j}|^{\alpha_{k,j}}$$

Varsayalım ki $\alpha_k = (\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n_k})$ vektörünün taşıyıcıları $e_{\alpha_k} = \text{supp}\ \alpha_k$ ‘dir.

Bir başka değişle $\alpha_k = (\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n_k})$ vektörünün ikinci indislerinin sıfırdan farklı kümesi $e_{\alpha_k} = \text{supp}\ \alpha_k$ ‘dir. Bu varsayımlar doğrultusunda $k = 1, 2, \ldots, s$

$$E_{|\varepsilon_{N_k}|} = \{ t_k \in E_{n_k},\ t_{k,j} = 0 \ (j \in (1, 2, \cdots, n_k)_k) \} \quad ,$$

$$E_{|\varepsilon_N|} = E_{|\varepsilon_{N_1}|} \times \cdots \times E_{|\varepsilon_{N_s}|} \qquad \text{ve} \qquad \frac{dt}{t} = \prod_{k \in e_\alpha} \prod_{j \in e_{\alpha_k}} \frac{dt_{k,j}}{t_{k,j}}$$

Tüm *k=1,2,…,s* için supp $m_k \subseteq$ supp N_k durumunda $\|f\|_{\Lambda_{p,\infty}^{\langle m+\alpha;N\rangle}}$ yarım normu

$$\|f\|_{L_{p,\theta}^{\langle m+\alpha;N\rangle}(G)} \qquad (3.1.8)$$

biçiminde tanımlayacağız.

Varsayalım ki tüm *k=1,2,…,s* için, $r = (r_1, \ldots, r_s)$, koordinat vektörleri $r_k = (r_{k,1}, \ldots, r_{k,n_k})$ olan negatif olmayan bir vektördür. Bir başka değişle tüm *k*=1,2,…,*s* ve *j* = 1,2,…, n_k için $r_{k,j} \geq 0$. $r_{k,j} > 0$ durumuna karşılık gelen en büyük tam sayı $\bar{r}_{k,j}$ olsun ve $r_{k,j} = 0$ durumunda ise $\bar{r}_{k,j} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu varsayımlar doğrultusunda tüm *k=1,2,…,s* için her bir $r = (r_1, \ldots, r_s)$ vektörü, koordinat vektörleri $\bar{r}_k = (\bar{r}_{k,1}, \ldots, \bar{r}_{k,n_k})$ olan tek bir $\bar{r} = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_s)$ vektörünü belirleyecektir. O halde, tüm $j \in e_{r_k} = supp\, r_k$ $(k = 1, \ldots, s)$ için $0 < r_{k,j} - r'_{k,j} \leq 1$ olacaktır.

Varsayalım ki tüm *k=1,2,…,s* için, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$, koordinat vektörleri $\omega_k = (\omega_{k,1}, \ldots, \omega_{k,n_k})$ olan bir vektördür. Öyle ki $\omega_{k,j} = 1$ veya $\omega_{k,j} = 0$ $(j = 1,2,\ldots,n_k)$. Tüm $(k = 1,2,\ldots,s)$ için $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ vektörleri arasından öyle bir ω_r vektörü seçelim ki $supp\, \omega_k = supp\, r_k$ olsun.

(3.1.8) denklemiyle tanımlanan yarım norm ifadesinde

$$m = \bar{r} = \left(\bar{r}_1;\cdots;\bar{r}_s\right)$$

$$\alpha = r - \bar{r} = \left(r_1 - \bar{r}_1;\cdots;r_s - \bar{r}_s\right) \qquad (3.1.9)$$

$$\beta = 2\omega_r$$

Bu işaretlemeler doğrultusunda (3.1.9) koşulunun dikkate alınmasıyla (3.1.8) ifadesiyle tanımlanan yarım norm $\|f\|_{L_{p,\theta}^{\langle \bar{r}+(r-\bar{r});\, 2\omega_r\rangle}(G;s)} = \|f\|_{L_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(G)}$ olacaktır.

3.2. $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ - Dzhabrailov-Alisoy Fonksiyon Uzayı

Varsayalım ki, tüm (k=1,2,…,s) için, koordinat- vektörleri $i_k = \left(0,1,\ldots,n_k\right)$ değerler alan, $i = \left(i_1,\ldots,i_s\right) \in Q$ verilmiştir. O zaman, Q cümlesinin eleman sayısı $mesQ = |Q| = \prod_{k=1}^{s}\left(1+n_k\right)$ olacaktır. s=1 için, $|Q| = n+1$ ve $s = n$ için $|Q| = 2^n$. Genel durumda $(n+1) \leq |Q| \leq 2^n$ olacaktır.

Varsayalım ki, $r = \left(r_1,\ldots,r_s\right)$ tüm (k=1,2,…,s) için koordinat-vektörleri $r_k = \left(r_{k,1},\ldots,r_{k,nk}\right)$ olan pozitif bir vektördür. Bir başka deyişle tüm $\left(k = 1,2,\ldots,s;\, j = 1,2,\ldots,n_k\right)$ için $r_{kj} > 0$. Her bir $r = \left(r_1,\ldots,r_s\right)$ pozitif vektörüne karşılık, $i \in Q$ olmak üzere, $r^i = \left(r_1^{i_1},\ldots,r_s^{i_s}\right)$ vektörleri dizini düzenlenir. Düzenlenmiş bu vektörlerin tüm $k \in \operatorname{supp}\left(i_1,\cdots,i_s\right)$ için, bir başka değişle $i_k \neq 0$ için, koordinat-vektörleri uygun olarak $r_k^{i_k}=\left(0,\ldots,0,r_{k,i_k},0,\ldots,0\right)$ ve $k\in\{1,2,\cdots,s\}\setminus\operatorname{supp}\left(i_1,\cdots,i_s\right)$

olması durumunda ise, yani $i_k=0$ için, olacaktır.

Bu varsayımlar doğrultusunda , $1\le p\le\theta<\infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(G;s)}=\sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q}\|f\|_{L_{p,\theta}^{\langle r^i\rangle}(G;s)}<\infty \tag{3.2.1}$$

normu tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1.

$G\in E_n$ alt uzayında Sobolev anlamında tüm $i\in Q$ için genelleştirilmiş $D^{\bar{r}^i}f\in L_p(G)$ türevleri mevcut ve (3.2.1) ifadesiyle tanımlanan normu sonlu olan ölçülü ($G\in E_n$ bölgesinde) fonksiyonlar kümesine, $B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(s,G)$ fonksiyon uzayı denir. $B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(s,G)$ fonksiyon uzayı tam normlu uzaydır [Kerimova (Alisoy), 1997].

Not: $B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(s,G)$ fonksiyon uzayının $G\in E_n$ alt uzayında yeterince sonlu fonksiyonlar için kapanması $\widetilde{B}_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(s,G)$ biçiminde tanımlanmıştır [Kerimova (Alisoy), 1997].

3.3. Bölgeler sınıfı

Burada ” yarım boynuz “ koşulunu sağlayan bölgeler sınıfı tanımlanmıştır.

Varsayalım ki tüm *k*=(1,2,…,*s*) ve *j*=(1,2,…, n_k) için $H=\left(H_1,\ldots,H_s\right)$, $H_k>0$,

$\sigma=\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_s\right)$, $\sigma_k=\left(\sigma_{k,1},\ldots,\sigma_{k,n_k}\right)$ ve $\sigma_{k,j}>0$.

Ayrıca tüm *k*=(1,2,…,*s*) ve *j*=(1,2,…, n_k) için koordinat-vektörleri sırasıyla

$H_k^{\sigma_k}=\left(H_k^{\sigma_{k,1}},\ldots,H_k^{\sigma_{k,n_k}}\right)$ ve $\delta_k=\left(\delta_{k,1},\ldots,\delta_{k,n_k}\right)$ olan $H^{\sigma}=\left(H_1^{\sigma_1},\ldots,H_s^{\sigma_s}\right)$ ve $\delta=\left(\delta_1,\ldots,\delta_s\right)$ vektörleri verilmiş olsun.

Bunların yanı sıra

$$R_{\delta_k}\left(H_k^{\sigma_k}\right) = \sum \bigcup_{0<\nu_k \in H_k} \left\{ y \in E_n ;\ c_k \le \frac{y_{k,j}\,\delta_{k,j}}{H_k^{\sigma_{k,j}}} \le c_k^* \right\} \qquad (3.3.1)$$

işaretlemesini yapalım. Burada c_k ve c_k^* birer sabitlerdir.

Varsayalım ki $R_\delta\left(H_k^{\sigma_k}\right) = R_{\delta_1}\left(H_1^{\sigma_1}\right) \times \dots \times R_{\delta_s}\left(H_s^{\sigma_s}\right)$ olsun. Bu durumda $x + R_\delta\left(H^\sigma\right)$ ifadesine tepe noktası $x \in E_n$, de bulunan " $\sigma -$ yarım boynuz " denir.

Tanım 3.3.1 Eğer $\forall x \in \Omega$, $\exists \delta = (\delta_1, \dots, \delta_s)$ öyle ki tüm $x + R_\delta\left(H^\sigma\right) \subset G$ olsun, o zaman $\Omega \subset G \subset E_n$ alt bölgesi " σ - yarım boynuz" koşulunu sağlayacaktır ve

$$\bigcup_{j=1}^{M} \Omega_j = G \qquad (3.3.2)$$

Not: " σ - yarım boynuz" koşulunu sağlayan $G \subset E_n$ bölgeler sınıfı $C\left(H^\theta\right) = C(\sigma; H)$ ile gösterilmiştir.

Eğer $\bigcup_{j=1}^{N} \Omega_{j,\varepsilon}$ koşuluna ek olarak $\bigcup_{j=1}^{N} \Omega_{j,\varepsilon} = G$ koşulu da sağlanıyorsa o halde $G \in C(\sigma; H)$ bölgesinin kuvvetli "σ- yarım boynuz" koşulunu sağladığı varsayılır.

Burada $\Omega_{j,\varepsilon} = \left\{ y \in \Omega_j ;\ \rho\left(y; G \setminus \Omega_j\right) > \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon > 0)$

Not: "kuvvetli σ - yarım boynuz" koşulunu sağlayan $G \subset E_n$ bölgeler sınıfı $C_\varepsilon(\sigma; H)$ ile gösterilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Çok Değişkenli Fonksiyonların Diferansiyel Fark Özelliklerinin Korunması Koşuluyla Bölgesinin ötesine Genişletilmesine İlişkin Teoremler

Çalışmanın temel sonuçları, çok boyutlu bölgede belirlenmiş B –fonksiyon uzay tipine ait çok değişkenli $f \in B_{p,\theta}^{\langle r \rangle}(s,G)$ fonksiyonların diferansiyel fark özelliklerinin (başka bir değişle fonksiyon sınıfının) korunması şartıyla $G \subset E_n$ bölgesinin dışına genişletilmesinin mümkün olabilirliği aşağıda tanımlanan teoremlerle ifade edilmiştir.

4.1.1 Teorem 4.1

i). Varsayalım ki $f \in B_{p,\theta}^{\langle r \rangle}(G,s)$, $1 \le p \le \theta \le \infty$, (4.1.1)

ve her (k=1,2,…,s) için $r = (r_1, \dots, r_s)$, bileşenleri $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$ olan pozitif bir vektördür. Başka bir değişle, her (k=1,2,…,s) $r_{k,j} > 0 \quad (j = 1, 2, ..., n_k)$

ii). Varsayalım ki $G \in C(\sigma; H)$ (4.1.2)

öyle ki $H = (H_1, ..., H_s)$, $H_k > 0$ (k=1,2,…,s) . Her (k=1,2,…,s) için $\sigma = (\sigma_1; ...; \sigma_s)$, koordinat vektörleri $\sigma_k = (\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,n_k})$ olan, pozitif sabit bir vektördür. Başka bir deyişle tüm (k=1,2,…,s ve j=1,2,…, n_k) için $\sigma_{k,j} > 0$ ve $H = (H_1, \dots, H_s)$, $H_k > 0$;

iii). Tüm k=1,2,…,s için $v = (v_1, \dots, v_s)$ koordinat- vektörleri $v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k})$ olan ve

$$\chi_{k,i_k} = r_{k,i_k}\sigma_{k,i_k} - (v_k, \sigma_k) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)|\sigma_k| > 0 \quad , \quad 1 \le p \le q \le \infty \quad (4.1.3)$$

koşulunu sağlayan tam sayılı negatif olmayan bir vektör olsun. Ayrıca,

$$(v_k, \sigma_k) = \sum_{j=1}^{n_k} v_{k,j}\sigma_{k,j}, \ |\sigma_k| = |\sigma_{k,1}| + \dots + |\sigma_{k,n_k}| \quad (4.1.4) \quad \text{olsun.}$$

Bu durumda $$D^{v} f \in L_q(G;s) \tag{4.1.5}$$

olmak üzere tüm E_n ’de tanımlı ve $G \subset E_n$ bölgesinde $D^{v} f(x)$ fonksiyonu ile çakışan bir $\tilde{f}_v = \tilde{f}_v(x)$ inşa edilir ve bu fonksiyon için

$$\|\tilde{f}_v\|_{L_q(E_n,s)} \le c \|f\|_{B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)} \tag{4.1.6}$$

İntegral eşitsizliği doğrudur. Burada c- bir sabit olup, $f = f(x)$ fonksiyonundan bağımsızdır.

4.1.2 Teorem 4.2

Varsayalım ki **Teorem 4.1’in** tüm koşulları sağlanmaktadır.

Ayrıca, $G \subset E_n$ bölgesi “ kuvvetli $\sigma -$ yarım boynuz (half horn condition) koşulunu sağlamış olsun. Başka bir değişle $\varepsilon > 0$ olmak üzere $G \in C_{\varepsilon}(\sigma; H)$ olsun.

Her $k = 1, \dots, s$ için, $\rho = (\rho_1; \dots; \rho_s)$ vektörünün bileşenleri $\rho_k = (\rho_{k,1}, \dots, \rho_{k,n_k})$ olsun ve her $i_k = 1,2,\dots,n_k$ için

$$(\rho_k, \sigma_k) = \sum_{j=1}^{n_k} \rho_{k,j} \sigma_{k,j} \le \chi_{k,i_k} \tag{4.2.1}$$

olsun. Bu durumda

$$D^{v} f \in L^{<\rho>}_{q,\theta}(G;s) \tag{4.2.2}$$

olmak üzere her E_n ’de tanımlı ve $G \subset E_n$ bölgesinde $D^{v} f(x)$ fonksiyonu ile çakışan bir $\tilde{f}_v = \tilde{f}_v(x)$ inşa edilir ve bu fonksiyon için

$$\|\tilde{f}_v\|_{L^{<\rho>}_{q,\theta}(E_n;s)} \le c \|f\|_{B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)} \tag{4.2.3}$$

integral eşitsizliği doğrudur. Burada c, $f(x)$ fonksiyonundan bağımsız bir sabittir.

4.2.3 Teorem 4.3

Varsayalım ki **Teorem 4.1** ve **Teorem 4.2'nin** tüm koşulları sağlanmaktadır.
Bu durumda

$$\begin{array}{c} \text{¿}\rho>\text{¿}(G;s) \\ D^{\nu} f \in B^{\text{¿}}_{q,\theta^{\text{¿}}} \end{array} \qquad (4.3.1)$$

genelleştirilmiş türevleri mevcut olmak üzere, tüm E_n 'de tanımlı ve $G \subset E_n$ bölgesinde $D^{\nu} f(x)$ fonksiyonu ile çakışan bir $\widetilde{f}_{\nu} = \widetilde{f}_{\nu}(x)$ inşa edilir ve bu fonksiyon için

$$\begin{array}{c} B^{\text{¿}r>\text{¿}(G,s)}_{p,\theta} \\ B^{\text{¿}\rho>\text{¿}(E_n;s)}_{q,\theta^{\text{¿}}} \leq c\|f\|_{\text{¿}} \\ \|\widetilde{f}_{\nu}\|_{\text{¿}} \end{array} \qquad (4.3.2)$$

integral eşitsizliği doğrudur. Burada c, $f(x)$ fonksiyonundan bağımsız bir sabittir.

4.2.4 Teorem 4.4

i). Varsayalım ki $\begin{array}{c} \text{¿}r>\text{¿}(G;s) \\ f \in B^{\text{¿}}_{q,\theta} \end{array}$, $1 \leq p \leq \theta \leq \infty$, (4.4.1)

ve tüm (k=1,2,…,s) için $r = (r_1, \dots, r_s)$, koordinat vektörleri $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$ olan pozitif bir vektördür. Bir başka değişle, tüm (k=1,2,…,s) $r_{k,j} > 0$ $(j = 1, 2, \dots, n_k)$

ii). Varsayalım ki $G \in C_{\varepsilon}\left(\frac{1}{r}; H\right)$ (4.4.2) öyle ki $H=(H_1,...,H_s)$, $H_k>0$ (k=1,2,…,s) . Tüm (k=1,2,…,s) için $\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{r_1};...;\frac{1}{r_s}\right)$,

koordinat vektörleri $\frac{1}{r_k}=\left(\frac{1}{r_{k,1}},...,\frac{1}{r_{k,n_k}}\right)$ olan, pozitif sabit (fix) bir vektördür. Başka bir deyişle tüm (k=1,2,…,s ve j=1,2,…, n_k) için $r_{k,j}>0$ ve $H=(H_1,\dots,H_s)$, $H_k>0$;

O halde, $G\subset E_n$ bölgesinde

$$B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \quad B_{q,\theta}^{<r>}(E_n;s) \leq c\|f\| \quad \|\tilde{f}\| \tag{4.4.3}$$

koşulunu sağlayan ve $f(x)$ fonksiyonu ile çakışan ve bir $\tilde{f}(x)=f(x)$ inşa edilir. Burada c- bir sabit olup, $f=f(x)$ fonksiyonundan bağımsızdır.

Teorem 4.4 $1<p\leq\theta<\infty$ durumu için, $\varepsilon>0$ olmak üzere $G\in C_\varepsilon\left(\frac{1}{r};H\right)$ bölgesinin dışında $f\in B_{q,\theta}^{<r>}(G;s)$ fonksiyonunun diferansiyel-fark özelliklerinin korunması şartıyla genişletile bilir olmasını ifade etmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu bölümde çalışmada hedeflenen amaç doğrultusunda elde edilen integral eşitsizlikleri biçimindeki gömülme teoremlerinin ispatı verilmiştir.

5.1. Düzgün fonksiyonların (Smooth functions) integral gösterimi

Varsayalım ki

$$\begin{aligned} &¿r>¿(G;s) \\ &f(x)\in B^{¿}_{q,\theta} \end{aligned} \qquad (5.1.1)$$

Burada $1<p\leq\theta<\infty$, $r=(r_1;\ldots;r_s)$ ise tüm $k=1,\ldots,s$ için koordinat vektörleri $r_k=(r_{k,1},\ldots r_{k,n_k})$ olan pozitif bir vektördür. Bir başka deyişle tüm $(k=1,\ldots,s;\, j=1,2,\ldots,n_k)$ için $r_{k,j}>0$. Genelliği bozmadan $f=f(x)$ fonksiyonunun $x\in E_n$ noktasında düzgün olduğu varsayılır.

Özel durumda, düzgün fonksiyonun $x\in E_n$ noktasındaki integral gösterimi aşağıdaki biçimde belirlenmiştir [G.Alisoy ve ark., 2005]

$$D^{v}f(x)=\sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q}A_{i,\delta}f(x) \qquad (5.1.2)$$

(5.1.2) ifadesinin sağ tarafındaki integral operatörü aşağıdaki ifade ile belirlenir [Alisoy G & Alisoy H(2002)]

$$A_{i,\delta}f(x)=c_i\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i}h_k^{-\beta_{k,0}}\right)\int_{\vec{0}}^{\vec{h}}\prod_{k\in e^i}\frac{d\,v_k}{v_k^{1+\beta_{k,i_k}}}\times$$

$$\times\int_{E_{|\omega^i|}}dz\int_{E_n}\left\{\Delta^{2\omega^i}\left(\frac{z}{2\omega^i}\right)D^{\acute{r}^i}f(x+y)\right\}\phi_{i,\delta}(\cdots)\,dy \qquad (5.1.3)$$

Burada $\vec{0}=(0,\ldots,0)$, $\vec{h}=(h_1,\ldots,h_s)$ ve tüm $k=1,\ldots,s$ için $h_k>0$. Yukarıdaki (5.1.3) ifadesinde tüm $k=1,\ldots,s$ için tam sayı negatif olmayan $v=(v_1;\ldots;v_s)$ vektörünün koordinat vektörleri $v_k=(v_{k,1},\ldots v_{k,n_k})$ ve tüm $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için $\acute{r}^i=(\acute{r}_1^{i_1};\ldots;\acute{r}_s^{i_s})$ vektörünün koordinat vektörleri $\acute{r}_k^{i_k}=(0,\ldots,0,\acute{r}_{k,i_k},0,\ldots,0)$, aşağıda tanımlı uzlaşma koşulunu sağlamaktadır

Ayrıca, hatırlayalım ki tüm $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için $\omega^i=\omega_{r^i}$ ve (5.1.3) denklemiyle tanımlanan integral operatör ifadesinde tüm $i_k=0,1,\ldots,n_k$ için β_{k,i_k} sayıları aşağıdaki eşitlikten hareketle belirlenir

$$\begin{cases} \beta_{k,0}=|\sigma_k|+(v_k,\sigma_k), & (i_k=0) \\ \beta_{k,i_k}=|\sigma_k|+(v_k,\sigma_k)-\acute{r}_{k,i_k}\sigma_{k,i_k}+\sigma_{k,i_k} & (j=i_k) \end{cases} \qquad (5.1.4)$$

Burada $|\sigma_k|=\sigma_{k,1}+\ldots+\sigma_{k,n_k}$, $(k=1,\ldots,s)$ ve $(v_k,\sigma_k)=\sum_{j=1}^{n_k} v_{k,j}\sigma_{k,j}$.

Hatırlayalım ki $(i\in Q)$ olmak üzere $e^i=supp\, i$ ifadesi $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ vektörünün taşıyıcısıdır. Bir başka değişle $e^i=supp\, i$, $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ vektörünün sıfırdan farklı koordinatlarının indis kümesidir. e^s - ise $\{1,2,\ldots,s\}$ kümesini ifade etmektedir.

Her bir $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için $E_n\times E_{|\omega^i|}$ ‘de yeterince düzgün ve finite olan çekirdek fonksiyonu aşağıdaki ifade ile belirlenir

$$\Phi_{i,\delta}(\cdots)=\prod_{k\in e^i}\Phi_{k,\delta_k}\left(\frac{y_k}{\upsilon_k^{\sigma_k}};\frac{z_{k,i_k}}{\upsilon_k^{\sigma_{k,i_k}}}\right)\prod_{k\in e_s\setminus e^i}\Phi_{k,\delta_k}\left(\frac{y_k}{\upsilon_k^{\sigma_k}}\right) \qquad (5.1.5)$$

Bu durumda her bir $\Phi_{k,\delta_k}=\Phi_{k,\delta}(y_k;z_{k,i_k})$ $(k\in e^i)$ fonksiyonunun $E_{n_k}\times E_1$ ’de yeterince düzgün ve finite bir fonksiyon olduğu ve (n_k+1) ölçülü

$$\left\{(y_k;z_{k,i_k});\ \begin{matrix} 0<y_k\delta_k\le 1 \\ 0<z_{k,i_k}\delta_{k,i_k}\le 1 \end{matrix}\right\}$$

dikdörtgen bölgeden olan $supp\,\Phi_{k,i_k}(y_k;z_{k,i_k})$ taşıyıcılarına sahip olduğu varsayılır.

Ayrıca $\Phi_{k,i_k}=\Phi_{k,i_k}(y_k)$ $(k\in e_s\setminus e^i)$ fonksiyonunun E_{n_k} ’de yeterince düzgün ve finit bir fonksiyon olduğu ve (n_k) - ölçülü $\{y_k\in E_{n_k};0<y_k\delta_k\le 1\}$ dikdörtgen bölgeden olan $supp\,\Phi_{k,i_k}(y_k)$ taşıyıcılara sahip olduğu varsayılır.

(5.1.2) ifadesi ile tanımlanan integral gösteriminin $G \subset E_n$ bölgesindeki taşıyıcısı, tepesi $x \in G$ noktasında bulunan $x+R_\delta(\vec{\sigma};H)$ σ yarım boynuz (half horn) ” olarak adlandırılır.

5.2. Yardımcı fonksiyonlar dizisinin inşası

Varsayalım ki $G \subset E_n$ bölgesi , $C(\sigma;H)$ bölgeler sınıfına aittir. Bu durumda tanıma göre σ yarım boynuz (half horn) ” koşulunu sağlayan alt $G_1, G_2, \ldots, G_N \subset G$ bölgeleri mevcuttur. Bir başka değişle

$$G = ¿\, \mu=1 ¿\, N\, G_\mu \qquad (5.2.1)$$

Bu durumda tüm $(\mu=1,2,\ldots,N)$ için koordinat vektörleri $\delta_{k,j}^{\mu} = \left(\delta_{k,1}^{\mu}; \ldots; \delta_{k,n_k}^{\mu}\right)$ olan

$$\delta^\mu = \left(\delta_1^\mu; \ldots; \delta^\mu\right) \qquad (5.2.2)$$

vektörler dizini vardır. Öyle ki tüm $(j=1,2,\ldots,n_k)$ için $\delta_{k,j}^{\mu}=1$ veya $\delta_{k,j}^{\mu}=-1$. Bu varsayımlarda tüm $\mu=1,2,\ldots,N$ için

$$G_\mu + R_{\delta^\mu}(\sigma;H) \subset G \qquad (5.2.3)$$

olacaktır.

(5.2.3) koşulu ile tanımlanan bölgede (5.1.2) ifadesiyle belirlenmiş $D^v f(x)$ fonksiyonu ile çakışan $\tilde{f}_{v,\mu} = \tilde{f}_{v,\mu}(x)$ yardımcı fonksiyonlar dizisini belirleyelim.

Buna göre tüm $(\mu=1,2,\ldots,N)$ için

$$\tilde{f}_{v,\mu}(x) = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} A_{i,\delta^\mu}^{¿} f(x) \qquad (5.2.4)$$

olacaktır. Burada integral operatörleri aşağıdaki biçimde belirlenecektir.

$$A_{i,\delta^\mu}^{¿} f(x) = c_i \left(\prod_{k\in e_s \setminus e^i} h_k^{-\beta_{k,0}} \right) \int_{\vec{0}}^{\dot{h}} \prod_{k\in e^i} \frac{d v_k}{v_k^{1+\beta_{k,i_k}}} \times$$

$$\times \int_{E_{|\omega^i|}} dz \int_{E_n} \left\{ \Delta^{2\omega^i}\left(z; G_\mu + R_{\delta^\mu}\right) D^{\acute{r}^i} f(x+y) \right\} \phi_{i,\delta^\mu}(\cdots)\, dy \qquad (5.2.5)$$

Hatırlayalım ki (5.2.5) ifadesinde $i=(0,\ldots,0)$ sıfır vektör olursa o halde, $D^{\acute{r}^i} f(x+y)=f(x+y)$ olacağından dolayı integralaltı fonksiyon $K(G_\mu+R_{\delta^\mu}) f(x+y)$ biçiminde olacaktır. Burada $K(G_\mu+R_{\delta^\mu})$ işaretlemesi $G_\mu+R_{\delta^\mu}$ karakteristik fonksiyonunu ifade etmektedir.

5.3. Yardımcı fonksiyonların değerlendirilmesi

Lemma 5.3.1

i). Varsayalım ki

$$
\begin{aligned}
&¿ r > ¿ (G;s) \\
&f(x) \in B^{¿}_{p,\theta}
\end{aligned}
\qquad (5.3.1)
$$

Burada $1<p\le q<\infty$, $r=(r_1;\ldots;r_s)$ ise tüm $k=1,\ldots,s$ için koordinat vektörleri $r_k=(r_{k,1},\ldots r_{k,n_k})$ olan pozitif bir vektördür. Bir başka değişle tüm $(k=1,\ldots,s;\, j=1,2,\ldots,n_k)$ için $r_{k,j}>0$.

ii). Varsayalım ki $G\in C_\varepsilon(\sigma;H)$ (5.3.2)

öyle ki $H=(H_1,\ldots,H_s),\quad H_k>0$ (k=1,2,…,s) . Tüm (k=1,2,…,s) için $\sigma=(\sigma_1;\ldots;\sigma_s), koordinat\, vektörleri\, \sigma_k=(\sigma_{k,1},\ldots\sigma_{k,n_k})$ olan, pozitif bir vektördür.

iii). Varsayalım ki tüm k=1,2,…,s için $v=(v_1,\ldots,v_s)$, koordinat- vektörleri $v_k=(v_{k,1},\ldots,v_{k,n_k})$ olan ve tüm $i_k=0,1,\ldots,n_k$ için $1<p\le q<\infty$ olmak üzere

$$
\chi_{k,i_k}=r_{k,i_k}\sigma_{k,i_k}-(v_k,\sigma_k)-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|\sigma_k|>0 \qquad (5.3.3)
$$

koşulunu sağlayan tam sayılı negatif olmayan bir vektördür. O halde (5.2.4) ve (5.2.5) ifadeleri ile tanımlanan yardımcı fonksiyonlar değerlendirilmesi tüm $(k=1,\ldots,s)$ için $0<h_k\le H_k$ olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanacaktır.

$$
L^{¿ r^i > ¿ (G_\mu+R_{\delta^\mu};s)}_{p,\theta}
$$

$$
\|\tilde{f}_{v,\mu}\|_{L_q(E_n;s)}\le c\sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q}\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\|f\|_{¿} \qquad (5.3.4)
$$

Burada c- bir sabit olup, $f = f(x)$ fonksiyonundan ve $h=(h_1,\ldots,h_s)$ vektöründen bağımsızdır. (5.3.4) ifadesinin sağ tarafındaki χ_{k,i_k} büyüklüğü tüm $i_k=1,2,\ldots,n_k$ için
(5.3.3) ifadesiyle, fakat $i_k=0$ durumunda ise tüm $(k=1,\ldots,s)$ için aşağıdaki gibi belirlenecektir.

$$\chi_{k,0}=-(v_k,\sigma_k)-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|\sigma_k|>0 \qquad (5.3.5)$$

(5.2.4) eşitliğinden hareketle

$$\|\tilde{f}_{v,\mu}\|_{L_q(E_n;s)} \le c \sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} \frac{\|A_{i,\delta^\mu}^{¿} f(x)\|_{L_{p,\theta}^{¿r^i>¿(E_n;s)}}}{¿} \qquad (5.3.6)$$

yazıla bilir. Bu durumda (5.3.4) ifadesinin ispatı, tüm $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için (5.2.5) ifadesiyle tanımlanan integral operatörünün değerlendirilmesine dönüşecektir.

Lemma 5.3.2

Lemma 5.3.1'ün tüm koşullarının geçerli olması durumunda tüm $(\mu=1,2,\ldots,N)$ ve $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için aşağıdaki integral eşitsizliği geçerlidir

$$\|A_{i,\delta^\mu}^{¿} f(x)\|_{L_q(E_n;s)} \le c\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\|f\|_{¿} \qquad L_{p,\theta}^{¿r^i>¿(G_\mu+R_{\delta^\mu};s)} \qquad (5.3.7)$$

5.4. İntegral operatörlerin değerlendirilmesi

$x\in E_n$ noktasında fonksiyonun integral gösterimleriyle üretilen integral operatörlerinin değerlendirilmesi' ne bakalım.

Varsayalım ki her bir $(\mu=1,2,\ldots,N)$ ve $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için

$$\Omega_i^{¿}=\left\{z\in E_{|\omega^i|}=E_{e^i};0<\frac{z_{k,i_k}\delta_{k,i_k}^{\mu}}{v_k^{\sigma_{k,i_k}}}\le 1;(k\in e^i)\right\} \qquad (5.4.1)$$

Burada $e^i=supp\, i$ ifadesi $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ vektörünün taşıyıcısıdır.

Açıktır ki

$$mes\,\Omega_i^{¿} = \prod_{k\in e^i} \upsilon_k^{\sigma_{k,i_k}} \qquad (5.4.2).$$

Şimdi ise tüm $(j=1,2,\dots,n_k)$ ve $e_s=\{1,2,\dots,s\}$ için

$$\Omega_i = \left\{ y\in E_n;\ \begin{array}{c} 0<\dfrac{z_{k,j}\delta_{k,j}^{\mu}}{v_k^{\sigma_{k,j}}}\le 1; (k\in e^i = supp\, i) \\ 0<\dfrac{z_{k,j}\delta_{k,j}^{\mu}}{h_k^{\sigma_{k,j}}}\le 1; (k\in e_s\setminus e^i) \end{array} \right\} \qquad (5.4.3)$$

olduğunu varsayalım.

Hatırlayalım ki tüm $(k=1,\dots,s)$ ve $|\sigma_k| = \sigma_{k,1}+\dots+\sigma_{k,n_k}$ için aşağıdaki eşitlik geçerli olacaktır

$$mes\,\Omega_i = \left(\prod_{k\in e^i} \upsilon_k^{|\sigma_k|}\right)\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i} h_k^{|\sigma_k|}\right) \qquad (5.4.4)$$

(5.2.5) integral operatör ifadesinde $R_{\delta^\mu}(\sigma;H)$ σ-yarım boynuz bölgesinin birinci koordinat bölgesinde olduğunu düşünürsek o halde tüm $(k=1,\dots,s)$ için $\delta^\mu = (\delta_1^\mu;\dots;\delta_s^\mu)$ vektörünün koordinat vektörleri $\delta_k^\mu = (1,\dots,1)$ olacaktır. Bu durumda tüm $(k=1,\dots,s)$ için $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$, $(1<p\le q<\infty)$ olmak üzere

$$1+\beta_{k,i_k} = 1-\chi_{k,i_k} + \left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)|\sigma_k| + \sigma_k + \left(r_{k,i_k} - \acute{r}_{k,i_k}\right) + \xi\,\sigma_{k,i_k} \qquad (5.4.5)$$

eşitliğinden hareketle aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left|A_{i,\delta^\mu}^{¿} f(x)\right| \le c\, Y_{i,\delta^\mu}(f) \qquad (5.4.6)$$

Burada $Y_{i,\delta^\mu}(f)$ integral operatörünün açık ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$Y_{i,\delta^\mu}(f) = c_i \left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i} h_k^{\chi_{k,0}}\right) \int_0^{h} \prod_{k\in e^i} \frac{d v_k}{v_k^{1-\chi_{k,i_k}+\xi\sigma_{k,i_k}}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i^{¿}}\right)^{\frac{1}{p'}}\int_{\Omega_i^{¿}}\prod_{k\in e^i}\frac{d z_{k,i_k}}{z_k^{\frac{1}{p}-\xi}}\times\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}\int_{\Omega_i}\left|F_{i,\delta^\mu}(x+y;z)\right|dy \qquad (5.4.7)$$

Burada $\xi>0$ yeterince küçük olduğundan $\chi_{k,i_k}-\xi\,\sigma_{k,i_k}>0$ olacaktır. (5.4.7) ifadesindeki $F_{i,\delta^\mu}(x+y;z)$ integral altı fonksiyon tüm $\mu=1,2,\ldots,N$ ve her bir $i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q$ için aşağıdaki eşitlikle belirlenir

$$\left|F_{i,\delta^\mu}(x+y;z)\right|=\left|\frac{\Delta^{2\omega^i}\left(\frac{z}{2\omega^i};G_\mu+R_{\delta^\mu}\right)D^{\acute{r}^i}f(x+y)}{\prod_{k\in e^i} z_{k,i_k}^{\left(r_{k,i_k}-\acute{r}_{k,i_k}\right)}}\right| \qquad (5.4.8)$$

(5.4.6) ifadesiyle tanımlanan integral gösteriminden hareketle

$$\left\|A_{i,\delta^\mu}^{¿}f(\cdot)\right\|_{q,E_n}\le c\left\|Y_{i,\delta^\mu}(f)\right\|_{q,E_n} \qquad (5.4.9)$$

Elde ederiz. Dolayısıyla Lemma 5.3.2 ‘de tanımlanan (5.3.7) integral eşitsizliğinin doğruluğunun ispatı, $\left\|Y_{i,\delta^\mu}(f)\right\|_{q,E_n}$ integral operatörlerin değerlendirilmesine indirgenir.

Lemma 5.4.2

Lemma 5.3.1’ün tüm koşullarının geçerli olması durumunda

$$\left\|Y_{i,\delta^\mu}(f)\right\|_{q,E_n}\le c\left(\prod_{k=1}^{s}h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\left\{\int_{E_{|\omega|}}\left\|F_{i,\delta^\alpha}(\cdot;z)\right\|_{p,E_n}^{\theta}\prod_{k\in e^i}\frac{d z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \qquad (5.4.10)$$

Burada $F_{i,\delta^\alpha}(\cdot;z)$ fonksiyonu (5.4.8) ifadesiyle tanımlanmaktadır. Lemma5.4.2 ‘nin bir sonucu olarak

$$\left\|Y_{i,\delta^\mu}(f)\right\|_{L_{q(E_n,s)}}\le c\left(\prod_{k=1}^{s}h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\|f\|_{¿} \qquad L_{p,\theta}^{¿\,r^i>¿(G_\mu+R_{\delta^\mu};s)} \qquad (5.4.11)$$

elde ederiz. Sonuç olarak, (5.4.9) ve (5.4.11) ifadelerinden hareketle, (5.3.7) integral eşitsizliği ispatlanmış olur.

Lemma 5.4.2'nin ispatı

Burada üç özel duruma bakılacaktır.

i). Öncelikle varsayalım ki, $1<p=q<\infty$.

Bu durumda (5.4.7) ifadesiyle tanımlanan $Y_{i,\delta^{\mu}}(f)$ integral operatörüne genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğini uygularsak ve tüm $(k=1,\dots,s)$ için $\chi_k^{¿}=\chi_k+y_k$ değişken değiştirmesi yaparak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\left\|Y_{i,\delta^{\mu}}(f)\right\|_{p,E_n}\le c_i\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i} h_k^{\chi_{k,0}}\right)\int_0^{h}\prod_{k\in e^i}\frac{d v_k}{v_k^{1-\chi_{k,i_k}+\xi\sigma_{k,i_k}}}\times$$

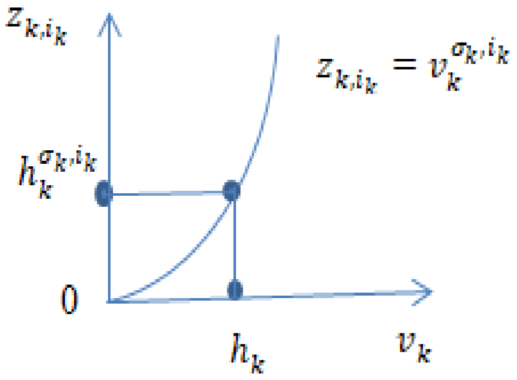
$$\times\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i^{¿}}\right)^{\frac{1}{p'}}\int_{\Omega_i^{¿}}\left\|F_{i,\delta^{\mu}}(\cdot;z)\right\|_{p,E_n}\prod_{k\in e^i}\frac{d z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{\frac{1}{p}-\xi}} \qquad (5.4.12)$$

Burada $\xi>0$ yeterince küçük keyfi bir sayıdır. Eğer (5.4.12) ifadesinin sağ tarafına $1<p<\infty$ $\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1\right)$ göstergeli Hölder eşitsizliği uygularsak ve bazı basit dönüşümler yaparsak, o halde

$$\left\|Y_{i,\delta^{\mu}}(f(\cdot))\right\|_{p,E_n}\le c_i\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\vec{h}}\prod_{k\in e^i}\frac{d v_k}{v_k^{1+\xi\sigma_{k,i_k}p}}\int_{\Omega_i^{¿}}\left\|F_{i,\delta^{\mu}}(\cdot;z)\right\|_p^p\prod_{k\in e^i}\frac{d z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (5.4.13)$$

elde ederiz. Hatırlayalım ki



Şekil 1.İntegrasyon sıralamasının değişim gösterimi

Şekil 1 ‘den görüldüğü üzere her bir $k\in e^i = supp\, i$ $\left(i=\left(i_1,\ldots,i_s\right)\in Q\right)$ için integrasyon sırasını değiştirerek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\int_0^{h_k} \frac{dv_k}{v_k^{1+\xi\sigma_{k,i_k}p}} \int_0^{v_k^{\sigma_{k,i_k}}} (\cdots) \frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}} \le$$

$$\le \int_0^{h_k^{\sigma_{k,i_k}}} (\cdots) \frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}} \int_{z_{k,i_k}^{\frac{1}{\sigma_{k,i_k}}}}^{\infty} \frac{dv_k}{v_k^{1+\xi\sigma_{k,i_k}p}} \le \int_0^{h_k^{\sigma_{k,i_k}}} (\cdots) \frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}} \qquad (5.4.14)$$

Bir başka değişle (5.4.13) integral eşitsizliğinin sağ tarafında tüm $k\in e^i = supp\, i$ için yukarıdaki işlemi devam ettirirsek o halde aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz.

$$\left\|Y_{i,\delta^\mu}\left(f(\cdot)\right)\right\|_{p,E_n} \le c\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\left\{\int_{\vec{0}}^{\vec{h}} \left\|F_{i,\delta^\mu}(\cdot;z)\right\|_{p,E_n}^{p} \prod_{k\in e^i} \frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (5.4.15)$$

Dolayısıyla, $1<p=q=\theta<\infty$ durumu için Lemma 5.4.2 ispatlanmış oldu.

ii). Şimdi ise varsayalım ki $1<p=q<\theta<\infty$.

Bu durumda $\chi_{k,i_k}>0\left(k\in e^i\right)$ olduğu dikkate alınarak keyfi $\xi>0$ sayısı öyle seçile bilir ki her bir $k\in e^i = supp\, i$ $\left(i=\left(i_1,\ldots,i_s\right)\in Q\right)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olsun.

$$\chi_{k,i_k} - \frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k} > 0 \qquad (5.4.16)$$

Daha sonra ise (5.4.15) eşitsizliğinden hareketle ve (5.4.15) eşitsizliğinin ispatında kullanılan benzer yorumlarla

$$\left\| Y_{i,\delta^\mu}\left(f(\cdot)\right)\right\|_{p,E_n} \le c\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i}^{s} h_k^{\chi_{k,0}}\right)\left(\prod_{k\in e^i} h_k^{\chi_{k,i_k}-\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_{\vec{0}}^{\acute{h}^\sigma} \left\|F_{i,\delta^\mu}(\cdot;z)\right\|_{p,E_n}^{p} \prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\frac{1}{2}\xi p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (5.4.17)$$

Eğer bu eşitsizliğin sağ tarafında figürlü parantez kısmına $\lambda_1 = \dfrac{\theta}{p} > 1$ ve $\lambda_2 = \dfrac{\theta}{\theta - p}$ $\left(\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} = 1\right)$ göstergeli Hölder eşitsizliği uygularsak ve bazı basit dönüşümler yaparsak, o halde

$$\left\{\int_{\vec{0}}^{\acute{h}^\sigma} \left\|F_{i,\delta^\mu}(\cdot;z)\right\|_{p,E_n}^{p} \prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\frac{1}{2}\xi p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \le \quad c\left(\prod_{k\in e^i} h_k^{\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_{\vec{0}}^{\vec{h}} \|\cdot\|_{p,E_n}^{p\lambda_1} \prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}}\right\}^{\frac{1}{p\lambda_1}} \qquad (5.4.18)$$

Böylece (5.4.17) ve (5.4.18) eşitsizliklerinden hareketle,

$$\left\| Y_{i,\delta^\mu}\left(f(\cdot)\right)\right\|_{p,E_n} \le c\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\left\{\int_{\vec{0}}^{\acute{h}^\sigma} \left\|F_{i,\delta}(\cdot;z)\right\|_{p,E_n}^{\theta} \prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \qquad (5.4.19)$$

sonucuna varırız. Dolayısıyla $1<p=q<\theta<\infty$ durumu için Lemma 5.4.2 ispatlanmış oldu. Ayrıca, (5.4.15) ve (5.4.19) eşitsizliklerinden hareketle $1<p=q\leq\theta<\infty$ durumu için (5.4.10) eşitsizliği ispatlanmış olacaktır.

iii). Varsayalım ki $1<p<q<\infty$.

Varsayalım ki $\lambda_1=\dfrac{q-p}{pq}$, $\lambda_2=q$, $\lambda_3=p^{'}=\dfrac{p}{p-1}$. Ayrıca $\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}+\dfrac{1}{\lambda_3}=1$

ve $p\left(\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}\right)=1$ olduğu dikkate alınırsa o halde

$$1-\chi_{k,i_k}+\xi\sigma_{k,i_k}=¿$$

$$¿\left\{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}p\right\}\frac{1}{\lambda_1}+\left\{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}p\right\}\frac{1}{\lambda_2}+\left\{1-\left(\chi_{k,i_k}-\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}\right)\lambda_3\right\}\frac{1}{\lambda_3} \qquad (5.4.20)$$

yazılabilir. Bu varsayımlar doğrultusunda, (5.4.7) ifadesiyle tanımlanmış $Y_{i,\delta^\mu}(f)$ integral operatöründe yer alan integral altı fonksiyonu aşağıda tanımlı (5.4.21) eşitliği

$$\left|F_{i,\delta^\mu}(x+y;z)\right|\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i^{¿}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}\prod_{k\in e^i}\frac{1}{v_k^{1-\chi_{k,i_k}+\xi\sigma_{k,i_k}}}\frac{1}{z_{k,i_k}^{\frac{1}{p}-\xi}}=¿$$

$$¿\left\{|\cdot|^p\prod_{k\in e^i}\frac{1}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}p}}\frac{1}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}}\right\}^{\frac{1}{\lambda_1}}\left\{|\cdot|^p\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i}\right)\prod_{k\in e^i}\frac{1}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}p}}\frac{1}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}}\right\}^{\frac{1}{\lambda_2}}\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i^{¿}}\right)\left(\frac{1}{mes\,\Omega_i}\right)\prod_{k\in e^i}\frac{1}{v_k^{1-\left(\chi_{k,i_k}-\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}\right)\lambda_3}}\frac{1}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}}\right\}^{\frac{1}{\lambda_3}} \qquad (5.4.21)$$

ve $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ göstergeli Hölder eşitsizliği kullanılarak (5.4.22) eşitsizliğini elde ederiz.

$$\left|Y_{i,\delta^\mu}(f(x))\right|\leq c\left(\prod_{k\in e_s\backslash e^i}h_k^{\chi_{k,0}}\right)J_1\times J_2\times J_3 \qquad (5.4.22)$$

(5.4.16) ifadesiyle tanımlı $\chi_{k,i_k} - \frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k} > 0$ koşulunun dikkate alınmasıyla aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$J_3 = \left\{ \int_{\vec{0}}^{\acute{h}^\sigma} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,v_k}{v_k^{1-\left(\chi_{k,i_k} - \frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}\right)\lambda_3}} \left(\frac{1}{mes\,\Omega_i^{¿}} \right) \int_{\Omega_i^{¿}}^{\square} dz \left(\frac{1}{mes\,\Omega_i} \right) \int_{\Omega_i}^{\square} dy \right\}^{\frac{1}{\lambda_3}} \le$$

$$\le c \left(\prod_{k\in e^i} h_k^{\chi_{k,i_k} - \frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}} \right) \tag{5.4.23}$$

Eğer

$$\|J_2\|_{L_q(E_n;s)} = ¿$$

$$¿ \left\{ \int_{E_n}^{\square} dx \int_{\vec{0}}^{\vec{h}} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,v_k}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k} p}} \int_{\Omega_i^{¿}}^{\square} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}} \left(\frac{1}{mes\,\Omega_i} \right) \int_{\Omega_i}^{\square} \left| F_{i,\delta^\mu}(x+y;z) \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{5.4.24}$$

ifadesiyle tanımlanan bu integral operatörde $x_k + y_k = x_k^{¿}$ $(k=1,\dots,s)$ değişken değiştirmesi ve bazı basit dönüşümler yapılırsa, o halde aşağıdaki değerlendirme eşitsizliğini elde ederiz.

$$\|J_2\|_{L_q(E_n;s)} \le c \left\{ \int_{\vec{0}}^{\vec{h}} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,v_k}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k} p}} \int_{\Omega_i^{¿}}^{\square} \left\| F_{i,\delta^\mu}(\cdot;z) \right\|_{p,E_n}^p \prod_{k\in e^i} \frac{d\,z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}} \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{5.4.25}$$

Ayrıca J_1 integral operatörünün açık ifadesi

$$J_1 = \left\{ \int_{\vec{0}}^{\acute{h}^\sigma} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,v_k}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k} p}} \int_{\Omega_i^{¿}}^{\square} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}} \int_{\Omega_i}^{\square} \left| F_{i,\delta^\mu}(x+y;z) \right| dy \right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{5.4.26}$$

biçiminde olup, aşağıda tanımlı (5.4.27) değerlendirme eşitsizliği ile temsil edilir.

$$J_1 \le \left\{ \int_{\vec{0}}^{\acute{h}^\sigma} \prod_{k\in e^i} \frac{d\,v_k}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k} p}} \int_{\Omega_i^{¿}}^{\square} \left\| F_{i,\delta^\mu}(\cdot;z) \right\|_{p,E_n}^p \prod_{k\in e^i} \frac{d\,z_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}} \right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{5.4.27}$$

(5.4.23), (5.4.25) ve (5.4.27) integral eşitsizliklerinin (5.4.22) eşitsizliğinde dikkate alınmasıyla aşağıda verilen sonuca ulaşırız.

$$\left\|Y_{i,\delta^{\mu}}(f(\cdot))\right\|_{q,E_n} \le c\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i} h_k^{\chi_{k,0}}\right)\left(\prod_{k\in e^i} h_k^{\chi_{k,i_k}-\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^{h^{\sigma}}\prod_{k\in e^i}\frac{dv_k}{v_k^{1+\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}p}}\int_{\Omega_i}\left\|F_{i,\delta^{\mu}}(\cdot\,;z)\right\|_{p,E_n}^{p}\prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\xi p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (5.4.28)$$

Bu ifadenin sağ tarafındaki figürlü parantezinde integrasyon sırası değiştirilirse ve bazı basit dönüşümler yapılırsa o halde aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\left\|Y_{i,\delta^{\mu}}(f)\right\|_{q,E_n} \le c\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i} h_k^{\chi_{k,0}}\right)\left(\prod_{k\in e^i} h_k^{\chi_{k,i_k}-\frac{1}{2}\xi\sigma_{k,i_k}}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\sigma_{k,i_k}}\left\|F_{i,\delta^{\mu}}(\cdot\,;z)\right\|_{p,E_n}^{p}\prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k}^{1-\frac{1}{2}\xi p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (5.4.29)$$

Böylece tüm $1<p<q<\infty$ ve $1<p\le\theta<\infty$ için aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\left\|Y_{i,\delta^{\mu}}(f(\cdot))\right\|_{q,E_n} \le c\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\sigma_{k,i_k}}\left\|F_{i,\delta^{\mu}}(\cdot\,;z)\right\|_{p,E_n}^{p}\prod_{k\in e^i}\frac{dz_{k,i_k}}{z_{k,i_k},}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \qquad (5.4.30)$$

(5.4.15) (5.4.19) ve (5.4.29) değerlendirme eşitsizliklerinden hareketle tüm $1<p\le q<\infty$ ve $1<p\le\theta<\infty$ durumları için (5.4.10) ifadesiyle tanımlı Lemma 5.4.2 ispat olundu.

5.5 Teorem 4.1'in ispatı

Varsayalım ki $G \subset E_n$ bölgesinin $\{G_{\mu,\varepsilon}\}$ örtüsü boyunca birim ayrılışı sonsuz diferansiyellenen fonksiyonlar sınıfı $\eta_\mu = \eta_\mu(x)$ $(\mu = 1,2,\ldots,N)$ ile tanımlanır. Bir başka değişle,

$$\begin{cases} 0 \le \eta_\mu(x) \le 1, & x \in E_n \\ \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu(x) = 1, & x \in G \\ \eta_\mu(x) = 0, & G_{\mu,\varepsilon}\, bölgesinin\, \varepsilon - civarı\, dışında \end{cases} \qquad (5.5.1)$$

Ayrıca, varsayalım ki

$$\left| D^\alpha \eta_\mu(x) \right| \le Const \qquad (5.5.2)$$

Burada $\alpha = (\alpha_1; \ldots; \alpha_s)$ tüm $(k = 1,2,\ldots,s)$ için koordinat vektörleri $\alpha_k = (\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n_k})$ olan negatif olmayan tam sayı vektörüdür. Bu durumda
$|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_s| \le |\acute{r}| + 2\omega$
$\tilde{f} = \tilde{f}_v(x)$ devam fonksiyonunu aşağıdaki ifade ile inşa edilir

$$\tilde{f}_v(x) = \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu(x) \tilde{f}_{v,\mu}(x) \qquad (5.5.\ 3)$$

Bu ifade de $\tilde{f}_{v,\mu}(x)$ fonksiyonu (5.2.4) ifadesiyle belirlenir ve tüm E_n ' de tanımlı olup, $G \subset E_n$ bölgesinde $D^v f(x)$ fonksiyonu ile çakışır.
(5.4.33) ifadesinden hareketle

$$\left\| \tilde{f}_v \right\|_{L_q(E_n)} \le c \sum_{\mu=1}^{N} \left\| \tilde{f}_{v,\mu} \right\|_{q,E_n} \qquad (5.5.4)$$

yazılabilir. Lemma 5.3.1 ‘de tanımlanan (5.3.4) ve (5.5.4) ifadesiyle tanımlanan eşitsizliklerden hareketle, $0 < h_i \le H_k$ $(k = 1,2,..,s)$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q}\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\|f\|_{L_{p,\theta}^{\langle r'\rangle}(G_\mu + R_{\delta^\mu};s)}$$

$$\|\tilde{f}_v\|_{L_q(E_n;s)} \le c\sum_{\mu=1}^{N} \quad (5.5.5)$$

Böylece sonuç olarak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|\tilde{f}_v\|_{q,E_n} \le c \sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q}\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}}\right)\|f\|_{L_{p,\theta}^{\langle r^i\rangle}(G;s)} \quad (5.5.6)$$

Bu eşitsizlik ise

$$\|\tilde{f}_v\|_{q,E_n} \le c\|f\|_{B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(G,S)}$$

ifadesinin ve dolayısıyla **Theorem 4.1'in** doğruluğunu ispatlar.

5.6 Teorem 4.2'in ispatı

Teorem 4.2'de (4.2.3) ifadesi ile verilen $\|\tilde{f}_v\|_{L_{q,\theta}^{\langle\rho\rangle}(E_n;s)} \le c\|f\|_{B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(G,s)}$ eşitsizlikte tüm $k=1,\ldots,s$ için, koordinat vektörleri $\rho_k=(\rho_{k,1},\ldots,\rho_{k,n_k})$ olan $\rho=(\rho_1;\ldots;\rho_s)$ vektörünün sıfır vektör olması durumunda aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\|\tilde{f}_v\|_{L_q(E_n;s)} \le c\|f\|_{B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(G,s)} \quad (5.6.1)$$

Bu eşitsizliğin doğruluğu Theorem 4.1 'den gözükmektedir.

İnşa edilen $\tilde{f}_v(x)=\sum_{\mu=1}^{N}\eta_\mu(x)\tilde{f}_{v,\mu}(x)$ devam fonksiyonunun fark özellikleri $\tilde{f}_{v,\mu}(x)=\sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} A_{i,\delta^\mu}^{\langle\cdot\rangle} f(x)$ formülü ile belirlenir. Bu ifadedeki $A_{i,\delta^\mu}^{\langle\cdot\rangle} f(x)$ integral operatörü (5.2.5) ifadesiyle belirlenir. Böylece belirlenen $\tilde{f}_v=\tilde{f}_v(x)$ fonksiyonu tüm

E_n 'de ve G bölgesinde $D^{\nu} f(x)$ fonksiyonu ile çakışır. (5.2.4) ve (5.2.5) ifadelerinden hareketle

$$L_{q,\theta}^{¿\rho>¿(E_n;S)} \leq \|\tilde{f}\|_{¿}$$

$$L_{q,\theta}^{¿\rho>¿(E_n;S)} \leq c \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} \|\eta_\mu A_{i,\delta^\mu}^{¿}(f)\|_{L_{q,\theta}^{¿\rho>¿(E_n;S)}} \quad \|\eta_\mu \tilde{f}_{\nu,\mu}\|_{¿} \leq c \sum_{\mu=1}^{N} ¿ \tag{5.6.2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu demektir ki **Theorem 4.2'nin** ispatı (5.6.2) eşitsizliğindeki $L_{q,\theta}^{¿\rho>¿(E_n;S)}$ $\|\eta_\mu A_{i,\delta^\mu}^{¿}(f)\|_{¿}$ integral operatörlerinin her bir $i\in Q$ ve tüm $\mu=1,2,\ldots,N$ için değerlendirilmesi ile verilecektir.

Lemma 5.6.1

Her bir $i\in Q$ ve tüm $\mu=1,2,\ldots,N$ için Theorem 4.2'nin koşullarının geçerli olması durumunda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur

$$L_{p,\theta}^{¿r^i>¿(G_\mu+R_{\delta^\mu};S)} \quad L_{q,\theta}^{¿\rho>¿(E_n;S)} \leq c\left(\prod_{k=1}^{S} h_k^{\chi_{k,i_k}-(\rho_k,\sigma_k)}\right)\|f\|_{¿} \quad \|\eta_\mu A_{i,\delta^\mu}^{¿}(f)\|_{¿} \tag{5.6.3}$$

Hatırlayalım ki bu eşitsizlikteki $A_{i,\delta^\mu}^{¿}(f)$ integral operatörü her bir $i\in Q$ ve tüm $\mu=1,2,\ldots,N$ için (5.2.5) ifadesiyle tanımlanır.

Lemma 5.6.1 'in ispatı

Hatırlayalım ki $x\in E_1$ için

$$\Delta^1(t)(f(x)g(x)) = f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x) = (\Delta^1(t)f(x))g(x+t) + f(x)(\Delta^1(t)g(x))$$

(5.6.4)

O halde ;

$$\Delta^2(t)(f(x)g(x))=(\Delta^2(t)f(x))g(x+2t)+2(\Delta^1(t)f(x))(\Delta^1(t)g(x+t))+f(x)(\Delta^2(t)g(x))$$
(5.6.5)

Varsayalım ki tüm $(k=1,2,\ldots,s)$ için koordinat vektörleri $\rho_k=(\rho_{k_1},\ldots,\rho_{k,n_k})$ olan $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_s)$ negatif olmayan bir vektördür. Bu durumda tüm $(k=1,2,\ldots,s)$ için $e_\rho=Supp\,\rho_k$ ilgili koordinat vektörlerinin taşıyıcısını ifade etmek üzere $e_{\rho_k}=\varnothing$ olsun. Ardışık olarak ilgili koordinatlara göre bir ölçülü (5.6.4) ve (5.6.5) ifadelerinden ve iki fonksiyon çarpımının türevi için Leibnitz formüllüden hareketle aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\left|\Delta^{2\omega_\rho}(t)\,D^{\acute{\rho}}\left(\eta_\mu(x)\cdot A^{¿}_{i,\delta^\mu}(f(x))\right)\right|\leq$$

$$\leq c\sum_{0\leq\gamma\leq 2\omega_\rho}\cdots\sum_{0\leq\beta\leq\acute{\rho}}\left|\Delta^{\gamma}(t)\,D^{\beta}\left(A^{¿}_{i,\delta^\mu}f(x)\right)\right|\left\{¿\left|\Delta^{2\omega_\rho-\gamma}(t)\,D^{\acute{\rho}-\beta}\eta_\mu(x+\gamma t)\right|\right\} \qquad (5.6.6)$$

Burada toplam, tüm $(k=1,2,\ldots,s)$ için koordinat vektörleri uygun olarak

$$\gamma_k=(\gamma_{k,1};\ldots;\gamma_{k,n_k})$$
$$\beta_k=(\beta_{k,1};\ldots;\beta_{k,n_k})$$

olan ve $(j\in e_{\rho_k})$ için $0\leq\gamma_{k,j}\leq 2$ ve $0\leq\beta_{k,j}\leq\acute{\rho}_{k,j}$ koşullarını sağlayan

$$\gamma=(\gamma_1;\ldots;\gamma_s)$$
$$\beta=(\beta_1;\ldots;\beta_s)$$

vektörlerine göre yapılır.

Hatırlayalım ki (5.6.6) ifadesinde tüm $(k=1,2,\ldots,s)\,ve$ $(j=1,2,\ldots,)$ için ; $\acute{\rho}=(\acute{\rho}_1;\cdots;\acute{\rho}_s)$ bileşenleri uygun olarak $\acute{\rho}_k=(\acute{\rho}_{k,1};\cdots;\acute{\rho}_{k,n_k})$ olan bir vektördür.

Öyle ki $\acute{\rho}_{k,j}$:

i) $\rho_{k,j}>0$ durumu için $\rho_{k,j}$ ’ den küçük en büyük tamsayı ve

ii) $\rho_{k,j}=0$ durumu için ise $\acute{\rho}_{k,j}=0$ olur.

ω_ρ - vektörü ise, koordinat- vektörleri $\omega_k=\left(\omega_{k,1},...,\omega_{k,n_k}\right)$ olan $\omega=\left(\omega_1,...,\omega_s\right)$ vektörlerinden $\omega_{k,j}=1$ veya $\omega_{k,j}=0$ durumları için $supp\,\omega_k=supp\,\rho_k$ koşulunu sağlayan vektörü ifade etmektedir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R.A.**:** Sobolev spaces, Akademik Pres, edition (july 2003)

Alisoy G.T, Alisoy H.Z.,(2002),On integral representations of multi package variable functions, International Journal of Applied Mathematics, pp. 371-386.

Alisoy G.T, Dzhabrailov A.D. , Alisoy H.Z, (2005), Properties of functions in some weighted spaces, Applicable Analysis, vol. 84, pp. 405-417.

Alisoy G.T.,Aktaş S., (2018),“Diferansiyel Fark Özelliklerinin Korunması ile Çok Katlı Değişkenlere Bağımlı $f\in$¿ ¿ $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ Fonksiyonların $G\in E_n$ Bölgesi Dışına Genişletilmesi”Mus Alparslan University Journal of Science, DOI:10.18586/msufbd.398376

Amanov T. I.,(1965), Representation and imbedding theorems for the function spaces $S_{p,\theta}^{r}B\left(R_n\right)$ and S (r)*p,θ B, (0 ≥ xj ≥ 2π, j = 1,..., n), Trudy Mat. Inst. Steklov, 7, 5–34 (in Russian).

Besov O.V., Ilyin V.P (1968), “Natural extension of the class of regions in embedding theorems”, Math. Sb. 75(117):4 pp. 483–495.

Besov O.V, Dzhabrailov A.D.,, Classes of functions with generalized mixed Hölder condition, // Steklov Mathematical Institute, 1969, том 105, 15–20 (in Russian)

Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolskii S.M., Integral Representations of Functions and Embedding Theorems (Nauka, Moscow, 1996).

Burenkov V. I., Fayn B.L.(1979), Extension of functions from anisotropic spaces with preservation of class // Steklov Mathematical Institute, 150, 52–66. (in Russian)

Brudnyi, Yu. A. Extension Theorem for a Family of Functional spaces, Notes of the LOMI Scientific Seminar, 1976, v. 56, pp.170–173 (in Russian)

Brudnyi Yu, PA Shvartsman,(1987), Extension of functions with preservation of smoothness Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences,, v.180, pp.60–61 (in Russian)

Dzhabrailov A.D.,(1974) ,Theorems on the extension of functions from the spaces $S_p^r W$, $S_p^r B$ for limits of the region, Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences, v. 131, pp.81–93 (in Russian)

Dzhabrailov A.D., Kerimova (Alisoy) G.T.,(1988) On a new integral representation by Multiple differential-difference characteristic. Proceedings news of the Academy of Sciences of Azerbaijan, SSR, FTMN, 4,pp.23-27, (in Russian)

Dzhabrailov, A.D.and R.S. Mamedov, Integrated representations for functions rom weight spaces parameter diffential – difference which properties are given by free vektors. Dok Az. SSR V.37, No: 10,1981 (in Russian)

Dzhabrailov, A.D.. The properties of functions on the boundary surfaces. Freie Uni Berlin. Berlin, Germany. 3rd Internat. ISAAC Congr. August 20–25, 2001

Il’in V.P.,(1965), On some properties of classes of differentiable functions defined in a domain, Trudy Mat. Inst. Steklov., 84 93-143.Transl. Proc. Steklov Inst. Math., 84 pp.103-160 (in Russian)

Dzhafarov A.S. (1964), Imbedding theorems for generalized classes of SM Nikol'skii. G9-63, No. 2, pp.45-49 (RZhMat,)

Kerimova (Alisoy) G.T. (1997), “Properties of differential functions with repeated difference-differential characteristic depending on multi-package variables” PhD Thesis , Baku,p127. (in Russian)

Kerimova (Alisoy) G.T., Dzhabrailov A.D. , Alisoy H.Z., Doğushan Ş.,(1998), Dahilolma(Gömme) teoremleri biçimindeki eşitsizlikler, CBÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, Fen Bil., Seri(Matematik), ISSN1301-2428, Cilt4, s.31-37

Kolmogorov A.N., Fomin S.V., (2012).Elements of the Theory of Functions and Functional

Analysis Martino Publishing, 280

Kudryavtsev LD, Nikol'skii SM, Spaces of differentiable functions of several variables and imbedding theorems, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. probl.mat. Funds. direction 1988,v.26, 5–157 (in Russian)

Kudryavtsev S.N., (2017) Extension of functions from non-isotropic Nikol'skii-Besov spaces and the approximation of their derivatives (in Russian). https://arxiv.org/pdf/1703.09734,

Lizorkin P.I. (1964) A function of Hirschman type and the relation between spaces $B^r_p(E_n)$ and $L^r_p(E_n)$. Mat. sb., 63, No. 4, 505-535 (RZhMat,1964, 12B62)

Mashiyev, R.A.,An integral representation of functions and embedding theorems for some families of functional spaces диссертация -Baku, 1988,139 p (in Russian)

Mashiyev Rabil, Yucedag Zehra and Ogras Sezgin, (2011) Existence and multiplicity of solutions for a Dirichlet problem involving the discrete p(x)-Laplacian operatör Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 67, 1-10; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/.

Mashiyev R. A., Cekic B., Avci M. And Yucedag Z., Existence and multiplicity of weak solutions for nonuniformly elliptic equations with nonstandard growth condition, Complex Variables and Elliptic Equations, 57(2012), No. 5, 579–595

Muramatu Tosinobu, (1971/72), On Imbedding Theorems for Besov Spaces ofFunctions Defined in General Regions Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7, 261-285

Musayev B. ve M. Alf, Fonksiyonel Analiz, Kütahya (Kasım 2000)

Nikolskii S. M., Functions with dominant mixed derivative, satisfying a multiple Hölder condition, Sibirsk. Mat. Zh., 4(1963), 1342–1364 (in Russian)

Nikol’skii, S.M.**:** Approximation of Functions of several variables and imbedding Theorems. Nauka, Moscow 1969. Transl. Grundlehren der Math. Wiss. in Einzeldarstell. Band 205, Springer- Verlsg, New York,1975

Resetnyak, Yu. G.: Some Integral representations of differentiable functions, Sibirsk. Mat. Z., 12, No. 2, 420-432 (1971). Transl.: Siberian Math. J., 12(1971), 299-307

Slobodeckii, L.N. (1958). Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations, Leningrad. Gos. Ped. Inst.Ucen. Zap., 197, 54-112 Transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Ser2, 57(1966), 207–276.

Slobodeckii, L.N. (1958) Sobolev’s spaces of fractional order and their application to boundary problems for partial differential equations, Dokl. Akad Nauk SSSR, 118, No. 2, pp.243–246 (in Russian) (M.R. 21, 5059).

Sobolev S. L. (1991), Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics: Third Edition, American Mathematical Society, 1991, 286

S. A. Stasyuk and S. Ya. Yanchenko, (2015) Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness, Analysis Mathematica, 41311–334 DOI: 10.1007/s10476-015-0305-0

Shvartsman P.A., (1981), Extension theorems with preservation of locally approximating properties of functions in the nonisotropic case .LOMI, v.113 pp.247-252

ÖZGEÇMİŞ

Sadiye AKTAŞ 15.02.1987 tarihinde Midyat'da doğdu. Lisans eğitimini Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde tamamlayarak 2012 yılında mezun oldu. Aynı yıl Dumlupınar Üniversitesi Rektörlüğünden Pedagojik Formasyon Sertifikası aldı. Eskişehir'deki MAT-FKB, Atayurt Reel Grup, Birey ve Aden Dershanelerinde Matematik Öğretmenliği yaptı. Tezden üretilen bir adet makalesi bulunmaktadır.