T.C.

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KARMAŞIK YAMUK TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

**Ümmügülsüm ŞANAL**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HATAY**
**ŞUBAT-2015**

T.C.

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KARMAŞIK YAMUK TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ümmügülsüm ŞANAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
ŞUBAT-2015

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KARMAŞIK YAMUK TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

**Ümmügülsüm ŞANAL**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ** danışmanlığında hazırlanan bu tez 03/02/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ
Başkan

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Üye

Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU
Üye

**Kod No:**

**Prof. Dr. İsmail Hakkı KARAHAN**
**Enstitü Müdürü**

**Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.**

**03/02/2015**

# TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

İmza

Ümmügülsüm ŞANAL

# ÖZET

## BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN

## KARMAŞIK YAMUK TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Sunulan bu tezde konveks, s-konveks, tgs-konveks, m-konveks ve (α,m)-konveks fonksiyonları için eşitsizlikler incelenerek Hermite-Hadamard tipli yeni karmaşık yamuk eşitsizliklerine yer verilmiştir. Tezin birinci bölümünde eşitsizliğin, konveksliğin tarihine ve literatürde yer alan çalışmalara yer verilmiş, ikinci bölümde daha önce tanımlanan çeşitli konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili kavramlar ve teoremler, son olarak pozitif reel sayıların özel ortalamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde ise farklı türden konveks fonksiyonlar için bazı temel Hermite-Hadamard ve yamuk ile karmaşık yamuk tipli eşitsizlikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon, tgs-konveks fonksiyon, m-konveks fonksiyon, (α,m)-konveks fonksiyon tanımlarından faydalanarak bu konveks fonksiyonlar için karmaşık yamuk tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiş ve her alt konu için yeni uygulamalar verilmiştir.

2015, 60 sayfa



**Anahtar Kelimeler:** Eşitsizlikler, Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyon, özel ortalamalar, karmaşık yamuk eşitsizliği.

# ABSTRACT

## PERTURBED TRAPOZEID TYPE INEQUALITIES

## FOR SOME CONVEX FUNCTIONS

In this thesis, new Hermite-Hadamard type perturbed trapezoid inequalities are obtained for convex, s-convex, tgs-convex, m-convex and (α, m)-convex functions. In the first part of the thesis, the history of the convexity, inequality and the studies in the literature are given, in the second part, definitions, propositions and theorems related to the various classes of convex functions and the average of the positive real numbers are given. In the third part, some basic Hermite- Hadamard inequalities for different types of convex functions and trapezoid and perturbed trapezoid type inequalities are given. In the last part, by using the definitions of convex, s-convex, tgs-convex, m-convex and (α, m)-convex functions, new perturbed trapezoid type inequalities are obtained for these convex functions anda re established new applications for each sub-topic.

2015, 60 pages



**Key Words**: Inequalities, Hermite-Hadamard inequality, convex functions, special means, perturbed trapezoid inequality.

**TEŞEKKÜR**

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ’a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana karşı göstermiş oldukları sabır ve maddi-manevi destekten dolayı annem Serpil ŞANAL, babam Süleyman ŞANAL ve amcam Osman ŞANAL’a çok teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

**ŞEKİLLER DİZİNİ**

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $A$ | : Aritmetik Ortalama |
| $\beta(x,y)$ | : Euler-Beta Fonksiyonu |
| $f''$ | : $f$ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi |
| $f'$ | : $f$ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi |
| $G$ | : Geometrik Ortalama |
| $\Gamma(x)$ | : Euler-Gamma Fonksiyonu |
| $H$ | : Harmonik Ortalama |
| $I$ | : $\mathbb{R}$ de Bir Aralık |
| $I^{\circ}$ | : $I$ ' nın İçi |
| I | : İdentrik Ortalama |
| $K_s^1$ | : Birinci Anlamda $s$–konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $K_s^2$ | : İkinci Anlamda $s$–konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $K_m(b)$ | : $m$–konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $K_m^{\alpha}(b)$ | : $(\alpha,m)$–konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $K$ | : Kuadratik Ortalama |
| $L[a,b]$ | : $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi |
| $L$ | : Logaritmik Ortalama |
| $L_p$ | : Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama |
| $M$ | : Genel Ortalama |
| $P(I)$ | : $P$–konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $\mathbb{R}_+$ | : Pozitif reel sayılar |
| $Q(I)$ | : Godunova-Levin Konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $SX(h,I)$ | : $h$–konveks Fonksiyonlar Sınıfı |
| $SV(h,I)$ | : $h$–konkav Fonksiyonlar Sınıfı |

# 1 GİRİŞ ve AMAÇ

"Konveksliğin basit ve doğal tanımı Archimedes'in yaklaşık olarak M.Ö.250 de düzgün çokgenleri çevreleyerek ve kazıyarak onun çok ünlü olan $\pi$(pi) değerini hesaplamasına kadar uzanır. Archimedes, konveks bir eğrinin çevre uzunluğunun onu çevreleyen başka bir konveks eğrinin çevre uzunluğundan daha küçük olmasına dikkat çekmiştir. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

"Aslında biz konveksliği sürekli olarak ve birçok yolla yaşamaktayız. Ayakta duruş pozisyonumuz, ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içine ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktadır. Aynı zamanda konveksliğin günlük yaşantımız üzerinde de büyük etkisi vardır. Bu kavram endüstri, ekonomi, mühendislik, veri analizi, fizik, bankacılık, iş alanları, tıp, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Öyle ki bu tür fonksiyonlar kaynakların dağılımının optimumlaştırılması problemlerinin çözümü ve şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında dahi kullanılmaktadır.

"Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy et al. 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla

1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (Mitrinović et al. 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinović et al. 1993), "Mathematical Inequalities" (Pachpatte 2005b) ve "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu and Perssons 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

"Konveks fonksiyonlar teorisi, konvekslik genel konusunun bir parçasıdır, yani bir konveks kümenin bir epigrapfisidir. Bir diğer ifadeyle fonksiyonun grafiğinin üstündeki veya üzerindeki noktaların kümesidir. Bununla beraber matematiğin bütün dalları ile yakın ilişki içerisinde olan bu teori kendi başına önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi de çizgisel analizdir. Değişkenler hesabı ikinci türev testi ile konveksliğin tanınmasında kuvvetli bir araçtır. Mucize eseri olarak bu Hessian testi birkaç değişken durumu için doğal bir genelleştirmedir. Optimizasyon ve kontrol teorisinin bazı derin problemlerinden hareketle konveks fonksiyonlar teorisi sonsuz boyutlu Banach uzaylarının çalışma alanını genişletmektedir.

"Konveks fonksiyonların çarpımı üzerine eşitsizlikler ile ilgili önemli çalışmalar yapmış olan B.G. Pachpatte, çok sayıda çalışmasıyla literatüre büyük katkıda bulunmuştur. Son yıllardaki çalışmalardan bazıları; 2006'da Jornal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics dergisinde yayınlanan "A Note on Integral Inequalities Involving the Product of Two Functions", 2003'te Tamkang Journal of Mathematics'te yayınlanan "On Trapezoid and Grüss Like Integral Inequalities", 2002'de Jornal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics dergisinde yayınlanan "On Grüss Type Integral Inequalities" gibi sıralanabilir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine yoğun çalışan diğer matematikçiler M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, R. Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg, N.S. Barnett, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, P. Cerone, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M. Darus, M.K. Bakula, J. Pečarić şeklinde sıralanabilir.

Bu konu hakkında yazılan kitapların dışında literatürde doktora ve yüksek lisans çalışmalarına da rastlanmaktadır.

"Bazı Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları" adlı doktora tezinde Tunç M. (2010); konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiş ve daha sonra elde ettiği bu eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar vermiştir.

"Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri" adlı doktora tezinde Kavurmacı H. (2012); bazı farklı türden konveks fonksiyonları kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve bazı konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

"Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" adlı doktara tezinde Gürbüz M. (2013); bazı farklı türden konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve bazı konveks fonksiyonların çarpımı üzerine integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

"$s$-Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri" adlı yüksek lisans tezinde Yüksel E. (2014); $s$-geometrik konveks fonksiyonları detaylı olarak incelemiş ve bu fonksiyonlarla ilgili yeni eşitsizlikler bulup, yeni üst sınırlar elde etmiştir.

"Inequalities and Applications" başlıklı yüksek lisans tezinde ortalamalar üzerine yeni eşitsizlikler elde edilmiş, yeni fonksiyon sınıfları ortaya atılmıştır (Bagdasar 2006).

"Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı doktora tezinde $E$-konveks ve $E$-$m$-konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden $E$-konveks ve $E$-$m$-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan $m$-konveks, $(\alpha, m)$-konveks, log-konveks, quasi-konveks, $s$-konveks, $r$-konveks ve $h$-konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

"Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski And Simpson Type For $s$-Convex, Quasi-Convex And $r$-Convex Mappings And Applications" başlıklı doktora tezinde $s$-konveks, quasi-konveks ve $r$-konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

"Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları" başlıklı yüksek lisans tezinde quasi-konveks fonksiyonlar için yapılan geniş bir literatür taramasının yanısıra, quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar verilmiştir (Yıldız 2011).

"Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler" adlı doktora tezinde Akdemir (2012); farklı tip konveks fonksiyon sınıflarını dikdörtgensel bölge üzerinde inceleyerek, koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikleri elde etmiştir. Daha sonra $m$-konveks, $(\alpha, m)$-konveks, $s$-konveks, quasi-konveks, $P$-konveks ve $h$-konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri, bazı genelleştirmeler ve çarpımlara ilişkin sonuçlar vermiştir.

Neden Matematiksel Eşitsizlikler?

1978 yılında Richard Bellman, Almanya'da 2. Uluslararası Matematik Eşitsizlikler Konferansı'nda bu soruya şu şekilde cevap vermiştir:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1. Pratik Nedenler
2. Teorik Nedenler
3. Estetik Nedenler

dir. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

"Bugün en önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hadamard (veya Hermite-Hadamard) integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), Ekim 1881 de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) aşağıdaki gibi basıldı.

**"Sur deux limites d'une integrale definie.** Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, $\acute{a}x = b$. On aura les relations

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)\, dx < (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

ou bien

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)\, dx > (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses.

En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x)$, $a = 0$, $b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}."$$

Şurası önemlidir ki Hermite'in bu kısa notu matematiksel literatürde daha önce hiç düşünülmemişti. (1.1) eşitsizliğinin

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.2}$$

için bir ara değer eşitsizliği olduğu açıktır.

Hermite'in çalışmasının yayınlanmasından yaklaşık yirmi yıl sonra J.L.W.V. Jensen, (1.2) eşitsizliğini kullanarak $J$-konveks fonksiyonları tanımladı (1905-1906).

Bu tezde konveks fonksiyon, $s$-konveks fonksiyon, $tgs$-konveks fonksiyon, $m$-konveks fonksiyon ve $(\alpha, m)$-konveks fonksiyon tanımları ile karmaşık yamuk tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak hem klasik matematikteki temel tanım ve kavramlar hem de konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci olarak, daha önce tanımlanan çeşitli konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili kavramlar ve teoremler, son olarak pozitif reel sayıların özel ortalamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde ise farklı türden konveks fonksiyonlar için bazı temel Hermite-Hadamard ve yamuk ile karmaşık yamuk tipli eşitsizlikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde konveks fonksiyon, $s$-konveks fonksiyon, $tgs$-konveks fonksiyon, $m$-konveks fonksiyon, $(\alpha, m)$-konveks fonksiyon tanımlarından faydalanarak bu konveks fonksiyonlar için karmaşık yamuk tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son olarak da çalışma ile ilgili sonuçlar yazılmıştır.

# 2 KURAMSAL TEMELLER

## 2.1 Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

**Tanım 2.1 (Lineer Uzay):** $L$ boş olmayan bir küme ve $K$ bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : K \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $L$' ye $K$ cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzayı denir.

**A)** $L$, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in L$ vardır,

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır,

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

**B)** $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1. $a.x \in L$ dir,

L2. $a.(x + y) = a.x + a.y$ dir,

L3. $(a + b).x = a.x + b.x$ dir,

L4. $(ab).x = a.(b.x)$ dir,

L5. $1.x = x$ dir ( 1, $K$ nın birim elemanıdır).

$K = \mathbb{R}$ ise $L$ ye reel vektör uzayı denir (Anton 1994).

**Tanım 2.2** Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir (Bayraktar 2000).

**Tanım 2.3** Lineer uzaydan reel (kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

**Tanım 2.4** $F$ bir cisim, $V$ ve $W$, $F$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,

**(a)** $T(u + v) = T(u) + T(v)$

**(b)** $T(cu) = cT(u)$

şartlarını sağlıyorsa $T$ ye $V$ üzerinde lineer dönüşüm denir (Anton 1994).

**Tanım 2.5 (Artan Fonksiyon):** $A$ sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0$ oluyorsa $f$ fonksiyonuna monoton artan fonksiyon, $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$ oluyorsa $f$ fonksiyonuna kesin artan fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

**Tanım 2.6 (Azalan Fonksiyon):** $A$ sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \leq 0$ oluyorsa $f$ fonksiyonuna monoton azalan fonksiyon, $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ oluyorsa $f$ fonksiyonuna kesin azalan fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

**Tanım 2.7 (Artan ve Azalan Fonsiyonların Özellikleri):**

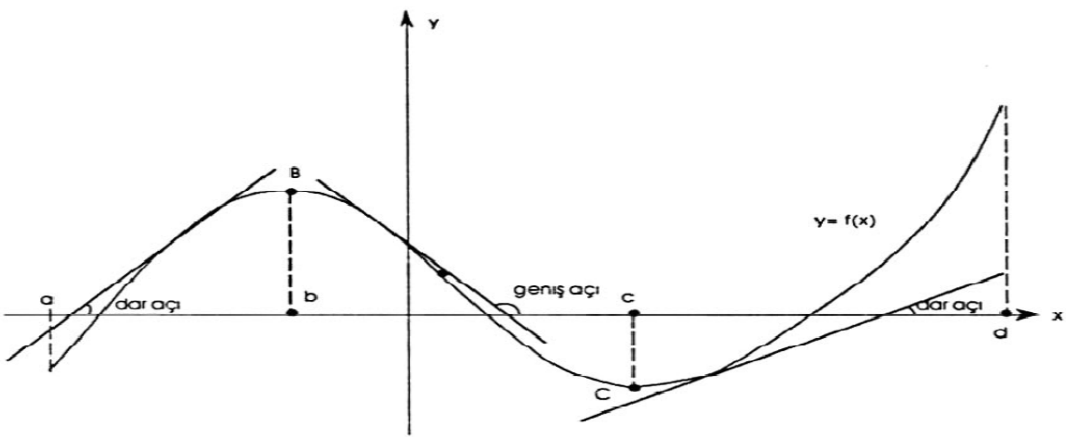
1) $f$ ve $g$ , $I$ üzerinde azalmayan fonksiyonlar ise $f + g$ aynı özelliğe sahiptir.

2) $f$ azalmayan ve $\lambda$ negatif olmayan bir reel sayı ise $\lambda f$ de azalmayandır.

3) $f$ ve $g$ negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon ise $f.g$ de azalmayandır.

4) $f$ pozitif ve azalmayan ise $\frac{1}{f}$ artmayan fonksiyondur.

5) $f$ ve $g$ monoton ise $f + g$ nin monoton olduğu sonucu her zaman çıkarılamaz. Çünkü $f$ monoton artan, $g$ monoton azalan iken $f + g$ için bir şey söylenemez (Mitrinović 1970).




**Şekil 2.1.** $f$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar

Şekil 2.1'deki gibi verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonu $(a, b)$ ve $(c, d)$ aralıklarında kesin artan, $(b, c)$ aralığında ise kesin azalandır. $(a, b)$ aralığında diferansiyellenebilen $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde; Eğer bir aralığın tüm $x$ noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton artan, eğer $f'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur. Eğer bir aralığın tüm $x$ noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton azalan, eğer $f'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

Genel anlamıyla artan veya azalan fonksiyonlar için aşağıdaki teoremler vardır.

**Teorem 2.1 (Chebyshev Eşitsizliği):** $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel sayıların azalmayan (veya artmayan) iki dizisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} &\geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \\ &\geq \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1}{n} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

yada $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$ reel sayıların negatif olmayan bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu sadece $a$ veya $b$ dizilerinden en az birinin sabit olması ile sağlanır. Özel olarak $p_1 = p_2 = ... = p_n$ seçilirse

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$$

eşitsizliği elde edilir (Mitrinović, Pečarić, Fink 1993).

**Teorem 2.2 (Chebyshev İntegral Eşitsizliği):** $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a, b)$ aralığında aynı anda artan yada aynı anda azalan, integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Bundan başka $p : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, $(a, b)$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Böylece

$$\int_a^b p(x)\,dx \int_a^b p(x) f(x) g(x)\,dx \geq \int_a^b p(x) f(x)\,dx \int_a^b p(x) g(x)\,dx \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović, Pečarić, 1990 ve Mitrinović, Vasić, 1974).

Eğer $f$ ve $g$ fonksiyonlarından birisi artmayan ve diğeri azalmayan birer fonksiyon ise (2.1.2) eşitsizliği yön değiştirir. Bu eşitsizliğin aşağıdaki özel durumları mevcuttur.

Özel olarak $p(x) = 1$ seçilirse

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \tag{2.1.3}$$

ve

$$\int_0^1 f(x) g(x)\,dx \geq \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx$$

yazılır.

**Tanım 2.8 (Gamma Fonksiyonu)** Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \tag{2.1.4}$$

ile tanımlanr. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\text{i. } \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \\
&\text{ii.} \Gamma(0) = 1 \\
&\text{iii.} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\
&\text{iv.} \int_0^\infty \tfrac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \tfrac{\pi}{\sin px}, \quad 0 < p < 1 \\
&\text{v.} 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

**Tanım 2.9 (Beta Fonksiyonu)** Beta fonksiyonu

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x,y > 0 \tag{2.1.6}$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tip Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Kannappan 2009).

**Tanım 2.10** $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (birinci çeyrek düzlemde tanımlı reel değerli fonksiyon) bir $y$ değişkenine bağlı olarak $x$ değişkeni için monoton ($x$ in değeri için monotonluk şartı yeterli) olsun,

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y), \quad x,y \in (0,\infty) \tag{2.1.7}$$

$$\beta(1,y) = \frac{1}{y} \tag{2.1.8}$$

şartları ile birlikte $\beta$ ya Euler tip Beta fonksiyonu denir (Kannappan 2009). Beta fonksiyonunun

$$\begin{aligned}
&\text{i- } \beta(x,y) = \int_0^\infty \tfrac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad x,y > 0 \\
&\text{ii- } \beta(x,y) = \tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y > 0 \\
&\text{iii- } \beta(x,y) = \beta(y,x) \\
&\text{iv-} \beta(x,x) = 2^{1-2x}\beta\left(x,\tfrac{1}{2}\right), \quad x > 0
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

özellikleri vardır (Jeffrey, Dai, 2008).

**Tanım 2.11** $A$, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olsun. $M$, $A$ nın bir üst sınırı ve $A$ nın diğer bütün $M'$ üst sınırları için $M \leq M'$ oluyorsa $M$ sayısına supremum, en küçük üst sınır denir ve $supA$ ile gösterilir. Ayrıca $M \in A$ ise $M$ sayısına $A$'nın maksimum elemanı denir. $m$, $A$ nın bir alt sınırı ve $A$ nın diğer bütün $m'$ alt sınırları için $m \geq m'$ oluyorsa $m$ sayısına infimum, en büyük alt sınır denir ve $infA$ ile gösterilir. Eğer $m \in A$ ise $m$ sayısına $A$'nın minimum elemanı denir (Hunter., Nachtergaele 2000).

**Tanım 2.12 (Süreklilik):** $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in S$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f$, $x_0$ da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

**Tanım 2.13 (Düzgün Süreklilik):** $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f$, $S$ de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

**Tanım 2.14 (Lipschitz Şartı):** $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \tag{2.1.10}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f$, $S$ 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

**Sonuç 2.1** $f$, $S$ de Lipschitz şartını sağlıyorsa $f$, $S$ de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

**Tanım 2.15 (Mutlak Süreklilik):** $I$, $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $I$ nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall\varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise $f$ fonksiyonu $I$ kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter, Brunt 2000).

**Teorem 2.3 (İntegraller için Ortalama Değer Teoremi):** $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.1.11}$$

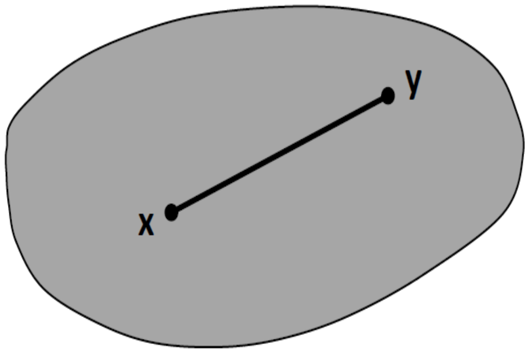
olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır (Thomas, Finney 1992).

## 2.2 Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

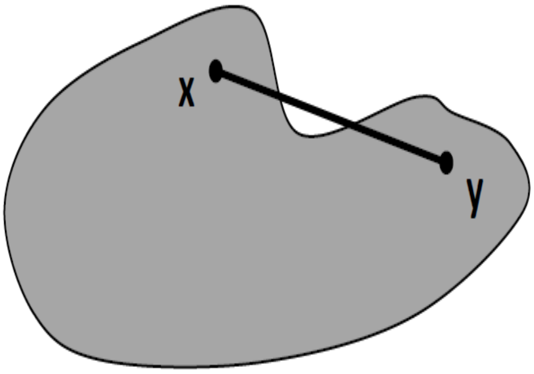
**Tanım 2.16 (Konveks Küme):** $L$ bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)\, y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \tag{2.2.1}$$

ise $A$ kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)\, y$ eşitliğindeki $x$ ve $y$'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan $\alpha, \beta$ reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak $B$ kümesi uç noktaları $x$ ve $y$ olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).

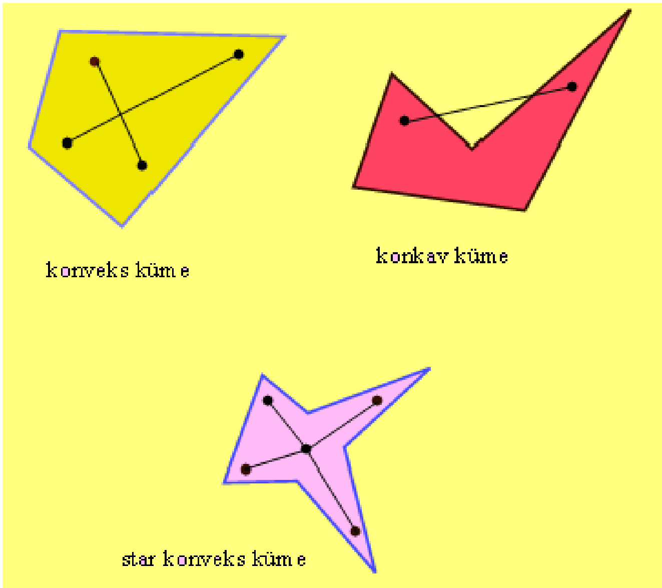



**Şekil 2.2.** Konveks küme




**Şekil 2.3.** Konveks olmayan küme(konkav)

**Tanım 2.17** Örneğin aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir. Boş küme konveks küme olarak düşünülür. Bunların tersine eğer bir küme konveks değil ise konkav küme olarak ifade edilir. Bu tanımların yanı sıra, $A$ reel veya kompleks lineer uzayın bir altkümesi olmak üzere, eğer bir $x_0 \in A$ noktasından herhangi bir $x \in A$ noktasına çizilen bütün doğrular yine bu $A$ kümesinin içerisinde kalıyorsa bu kümeye star-konveks küme denir (Tunç 2010).

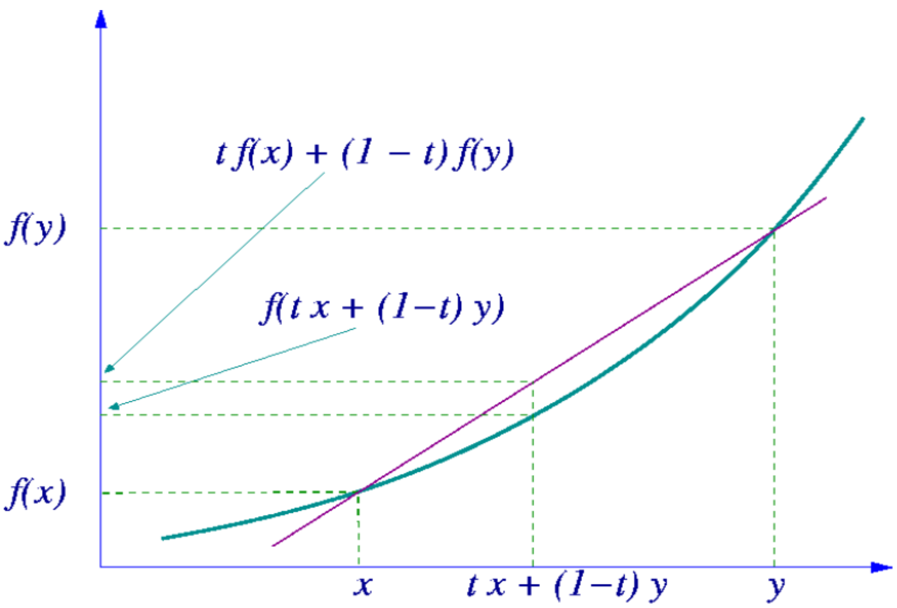



**Şekil 2.4.** Konveks, konkav ve star konveks küme

**Tanım 2.18** $f : I \to \mathbb{R}$ , $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için $f$ fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.2.2}$$

şartını sağlıyorsa $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $t \in (0, 1)$ için kesin ise bu durumda $f$ fonksiyonuna kesin konvekstir denir. $-f$ konveks (kesin konveks) ise o zaman $f$ ye konkav (kesin konkav) denir (Pečarić, et al. 1992).




**Şekil 2.5.** Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Geometrik olarak $tx+(1-t)\,y$ noktasında, $f$ nin eğri üzerinde aldığı değer, $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. Şekil 2.5. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(x) \leq f(x)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)\,f(y) \leq f(y)$ dir. Yani $(1-t)\,f(y)$ de $f(y)$ nin altındadır. Dolayısıyla $tf\,(x) + (1-t)\,f\,(y)$ , $f(x)$ ile $f(y)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş $f$ 'nin grafiğinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Eğer $f$ fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında sınırlı ve her $x, y \in [a, b]$ için (2.2.2) eşitsizliği sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonu $(a, b)$ aralığında sürekli olur. Burada $f$ fonksiyonunun sınırlılık şartı çok önemlidir. Konveks fonksiyonlar için iyi bilinen Jensen eşitsizliği aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir.

**Teorem 2.4 (Jensen Eşitsizliği):** $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\lambda_i \geq 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$ sayıları $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda $x_i \in [a, b]$ için

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \lambda_2 f\left(x_2\right) + ... + \lambda_n f\left(x_n\right) \qquad (2.2.3)$$

eşitsizliği vardır (Jensen 1905 ve Jensen 1906).

**Sonuç 2.2** $f : U \subseteq L \to \mathbb{R}$ , $L$ reel lineer uzayın bir $U$ konveks kümesi üzerinde konveks bir dönüşüm, $x_i \in U$ , $i = 1, ..., n$ ve $p_i \geq 0$ olmak üzere $P_i = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ olsun, bu durumda

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right) \leq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + ... + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + ... + p_n} \tag{2.2.4}$$

yazılabilir (Pachpatte 2005).

**Tanım 2.19 ( J-Konveks Fonksiyon):** $I$ , $\mathbb{R}$ de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{2.2.5}$$

şartını sağlayan $f$ fonksiyonuna $I$ üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J$-konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

**Tanım 2.20 (Kesin J-Konveks Fonksiyon):** Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{2.2.6}$$

oluyorsa $f$ fonksiyonuna $I$ üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

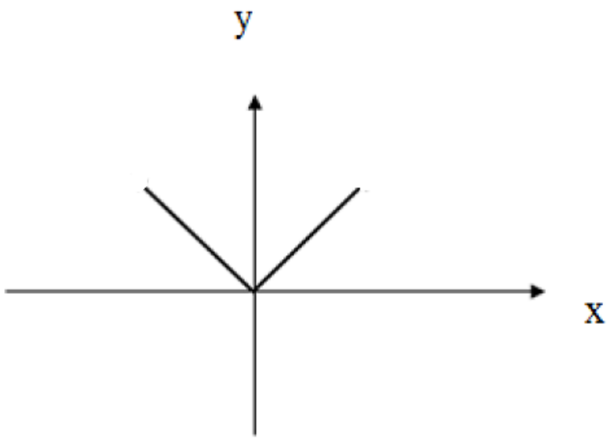
**Sonuç 2.3** $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $f$ fonksiyonunun $I$'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p+q} \tag{2.2.7}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

**Sonuç 2.4** Her konveks fonksiyon $J$-konveks fonksiyondur. $I$ üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren $I$ üzerideki doğru parçasının $f$ nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır.

Örneğin, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu $I$ üzerinde konveks fonksiyondur.




**Şekil 2.6.** Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon $(f(x) = |x|)$

Eğer $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve konveks(konkav) ve $x_0$ noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.2.8}$$

eşitsizliği yazılır. Yani $(a, b)$ aralığında diferensiyellenebilen konveks(konkav) fonksiyon (2.2.8) eşitsizliğini sağlar (Roberts, Varberg 1973).

**Önerme 2.1 i-**İki konveks fonksiyonun toplamı (aynı aralık üzerinde tanımlı) yine bir konveks fonksiyondur. Bu toplamda fonksiyonlardan birisi kesin konveks ise toplamda kesin konvekstir.

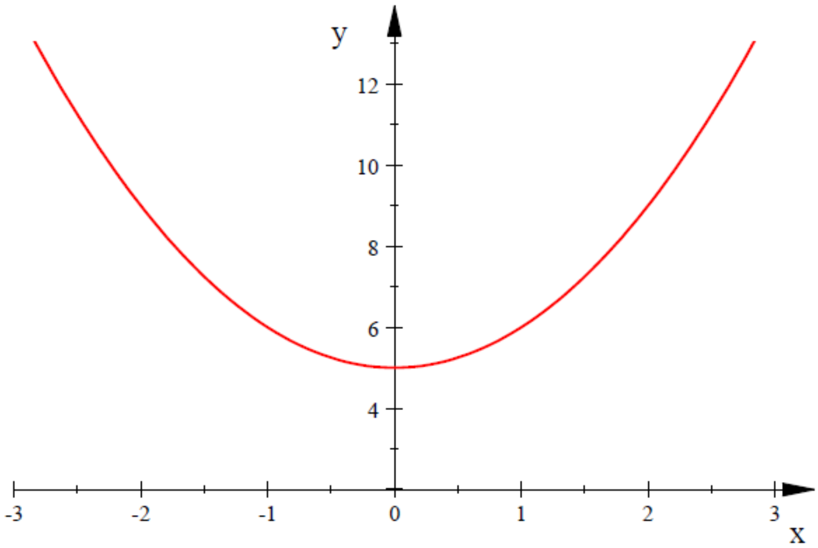
**ii-**Bir (kesin) konveks fonksiyonun pozitif bir skalerle çarpımı da (kesin) konveks fonksiyondur.

**iii-**Tanımlandığı aralığın bir alt aralığına kısıtlanmış olan (kesin) konveks fonksiyon yine bu aralıkta (kesin) konveks fonksiyondur.

**iv-**Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ bir (kesin) konveks fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan (artan) bir konveks fonksiyon ise böylece $gof$ bileşkesi de (kesin) konveks fonksiyondur

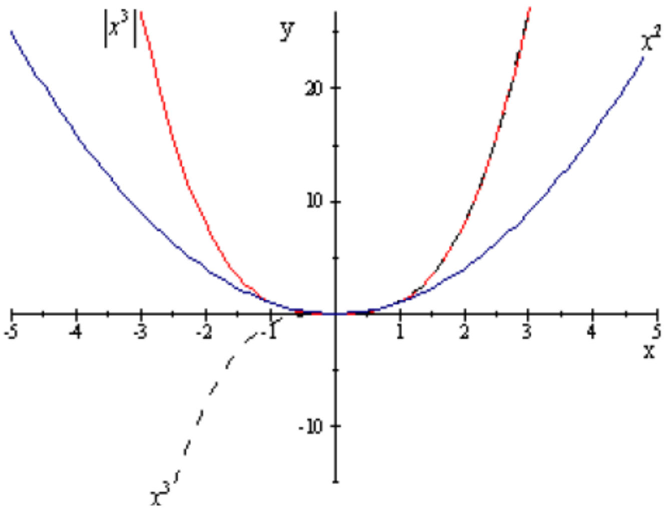
**v-** $f$, $I$ ve $J$ aralıkları arasında tam bir eşleme olsun. Eğer $f$ artan ise $f$ nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}$ in (kesin) konkav olmasıdır. Eğer $f$ azalan bir eşleme ise $f$ ve $f^{-1}$ aynı tür konvekstir (Niculescu, Persson 2006).

**Örnek 2.1 a)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + a$ fonksiyonu konvekstir.




**Şekil 2.7.** Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x^2 + a$)

**b)** $1 \leq p$ için, $f(x) = |x|^p$ fonksiyonu konvekstir.




**Şekil 2.8.** Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|^p$)

**Teorem 2.5** $[a, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f : I \to R$ tanımlı konveks bir fonksiyon ise $f$ Lipschitz şartını(Tanım 2.14) sağlar. Sonuç olarak, $f$, $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve $I^\circ$ de süreklidir (Pečarić et al. 1992).

**Teorem 2.6** $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

**a)** $f$, $(a, b)$ aralığında süreklidir ve

**b)** $f$, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

**Teorem 2.7** Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon $I^\circ$ de artandır (kesin artandır) (Pečarić et al. 1992).

**Teorem 2.8** $f$ fonksiyonu $(a, b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonunun konveks(kesin) olması için gerek ve yeter şart $f$ nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

**Teorem 2.9** $f$ fonksiyonunun $I$ açık aralığında ikinci türevi varsa, $f$ fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır (Mitrinović 1970).

Üçgen eşitsizliği reel ve kompleks sayılar için sıklıkla kullanılan temel bir eşitsizliktir.

**Teorem 2.10** Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

ve tümevarımla

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \tag{2.2.10}$$

eşitsizlikleri vardır (Mitrinović et al. 1993).

Bu eşitsizliğin integral versiyonu şu şekildedir.

**Teorem 2.11** $f$, $[a, b]$ aralığında sürekli, reel (yada kompleks) değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx, \qquad (a < b) \tag{2.2.11}$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović et al. 1993).

**Tanım 2.21 (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar):** $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \to \infty$ iken şartlarını sağlasın. Bu durumda $g^{-1}$ vardır ve $g$ ile aynı şartları sağlar. Eğer $f$ ve $f^*$ fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(s)\, ds \quad \text{ve} \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(t)\, dt \tag{2.2.12}$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olur ve $f$ ve $f^*$ fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir (Roberts, Varberg 1973).

**Teorem 2.12 (Young Eşitsizliği):** $a, b > 0$ ve $p$,$q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sadece $a^p = b^q$ durumunda sağlanır (Mitrinović 1970).

Aşağıdaki teorem konveks eşlenik çiftlerle ilgili önemli bir sonuçtur.

**Teorem 2.13 (İntegraller İçin Young Eşitsizliği ):** $f$, $[0, c]$ üzerinde $(c > 0)$ reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0$ , $a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise,

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx \geq ab \tag{2.2.13}$$

eşitsizliği sağlanır (Young 1912).

## 2.3 Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar

### 2.3.1 Logaritmik Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

**Tanım 2.22** $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise $f$ fonksiyonuna logaritmik konveks (log-konveks) yada çarpımsal konveks fonksiyon denir. Veya denk olarak, eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)\,f^{1-t}(y) \tag{2.3.1}$$

şartını sağlıyorsa, $f$ fonksiyonuna logaritmik konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlik ters çevrilirse $f$ ye log-konkav fonksiyon denir (Pečarić et al. 1992).

**Uyarı 2.1** $f$ ve $g$ konveks ve $g$ artan bir fonksiyon ise $gof$ de konvekstir, üstelik $f = \exp \log f$ olarak yazılabileceğinden log-konveks fonksiyon bir konveks fonksiyondur, bunun tersi her zaman doğru değildir. Bu tabi ki (2.3.1) den ve doğal olarak aritmetik ortalama – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$f^t(x)\,f^{1-t}(y) \leq tf(x) + (1-t)\,f(y) \tag{2.3.2}$$

dir (Roberts, Varberg 1973).

Bu uyarı sonucunda açıkça görülmektedir ki;

$$f(tx+(1-t)y) \le f^{t}(x) f^{1-t}(y) \le tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.3.3}$$

eşitsizliği yazılabilir.

### 2.3.2 $m$-Konveks Fonksiyon

**Tanım 2.23** $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $t\in[0,1]$ ve $m\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \le tf(x)+m(1-t)f(y) \tag{2.3.4}$$

şartı sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna $m$-konvekstir denir. $-f$ fonksiyonu $m$-konveks ise bu takdirde $f$ fonksiyonu $m$-konkavdır. Ayrıca $f(0)\le 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $m$-konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir (Toader 1984, 1988).

**Tanım 2.24** $b>0$ olmak üzere $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tx) \le tf(x) \tag{2.3.5}$$

şartını sağlıyorsa starshaped fonksiyon denir. Burada $x\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ dir (Toader, G.H., 1984). Eğer (2.3.4) eşitsizliğinde $m=1$ alınırsa $[0,b]$ üzerindeki $m$-konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona, $m=0$ için ise starshaped tanımına dönüşür.

### 2.3.3 $(\alpha,m)$- Konveks Fonksiyon

**Tanım 2.25** $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $t\in[0,1]$ ve $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \le t^{\alpha}f(x)+m(1-t^{\alpha})f(y) \tag{2.3.6}$$

şartı sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna $(\alpha,m)$-konvekstir denir (Bakula et al. 2006).

Burada $(\alpha,m)\in\{(0,0),(\alpha,0),(1,0),(1,m),(1,1),(\alpha,1)\}$ seçilirse, sırasıyla artan, $\alpha$-starshaped, starshaped, $m$-konveks, konveks ve $\alpha$-konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

### 2.3.4 $s$-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

**Tanım 2.26 (Birinci Anlamda $s$-Konveks Fonksiyon):** $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$için $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \qquad (2.3.7.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ ye birinci anlamda $s$-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $K_s^1$ ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse $f$ fonksiyonu birinci anlamda $s$-konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Orlicz 1961).

**Tanım 2.27 (İkinci Anlamda $s$-Konveks Fonksiyon):** $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$için $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \qquad (2.3.7.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ ye ikinci anlamda $s$-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $K_s^2$ ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse $f$ fonksiyonu ikinci anlamda $s$-konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki $s$-konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

**Örnek 2.3** $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

**(i)**$b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

**(ii)**$b > 0$ ve $0 < c$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik, Maligranda 1994).

**Önerme 2.2** Eğer $f \in K_s^2$ ise $f$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan değerler alır (Hudzik, Maligranda 1994).

### 2.3.5 Godunova-Levin Fonksiyonu

**Tanım 2.28** $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} \qquad (2.3.8)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten bu eşitsizlik yukarıdaki tanım ile eşdeğerdir ve tanımın yerinede kullanılabilir. Eğer bu eşitsizlikte $f = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ kullanılırsa ifade literatürde iyi bilinen Schur eşitsizliği ile çakışmaktadır (Gill et al. 1997).

### 2.3.6 $P(I)$Fonksiyonu

**Tanım 2.29** $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq f(x) + f(y) \tag{2.3.9}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ ye $P$-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir et al. 1995).

Tanımlardan açıkça görüleceği üzere, tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi konveks fonksiyonlardan meydana gelmektedir.

### 2.3.7 $h$-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

Varošanec, $h$-konveks fonksiyonlar sınıfı adını verdiği negatif olmayan fonksiyonlar için yeni ve büyük bir sınıf tanımladı. Öyle ki bu sınıf literatürde iyi bilinen negatif olmayan konveks fonksiyonlar, ikinci anlamda $s$-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin fonksiyonlar ve $P$- fonksiyonları içerisine katmıştır.

**Tanım 2.30** $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq h(\alpha) f(x) + h(1-\alpha) f(y) \tag{2.3.10}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ ye $h$-konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda $f$ ye $h$-konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\alpha) = 1$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\alpha) = \alpha^s$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olacağı açıktır.

**Uyarı 2.2** $h$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $\forall\lambda \in (0, 1)$ için

$$h(\lambda) \geq \lambda$$

dır. Örneğin $h_k(x) = x^k$ fonksiyonu burada $k \leq 1$ ve $x > 0$ için bu sonucu verir(Varošanec 2007).

Eğer $f$, $I$ üzerinde $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için negatif olmayan bir konveks fonksiyon ise

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq h(\lambda) f(x) + h(1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $f \in SX(h, I)$ olur. Benzer şekilde $h$ fonksiyonu $\forall\lambda \in (0, 1)$ için $h(\lambda) \leq \lambda$ özelliğine sahip ise o zaman herhangi bir negatif olmayan $f$ konkav fonksiyonu $SV(h, I)$ sınıfına dâhil olur (Varošanec 2007).

### 2.3.8 $tgs-$Konveks Fonksiyon

**Tanım 2.31** $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I$ üzerinde her $u$,$v \in I$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$f(tu + (1-t) v) \leq t(1-t) [f(u) + f(v)] \tag{2.3.11}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ ye $tgs$-konveks fonksiyon denir. Eğer $(-f)$, $tgs$-konveks fonksiyon ise $f$, $tgs$-konkav fonksiyon olur (Tunç et al. 2015).

## 2.4 Literatürde Sık Kullanılan Ortalamalar

$a$, $b$ iki pozitif reel sayı olmak üzere;

i) Genel Ortalama:

$$M = M_p(x_1, ..., x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad x_i \geq 0$$

ii) Aritmetik Ortalama:

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad a,b \geq 0$$

iii) Geometik Ortalama:

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad a,b \geq 0$$

iv) Harmonik Ortalama:

$$H = H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}, \quad a,b \geq 0$$

v) Logaritmik Ortalama:

$$L = L(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \quad a,b \geq 0 \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \end{cases}$$

vi) İdentrik Ortalama:

$$I = I(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \quad a,b \geq 0 \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases}$$

vii) Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \quad a,b \geq 0 \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases}$$

viii) Kuadratik Ortalama:

$$K = K(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad a,b \geq 0$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L_p$ nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$ , $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde, aşağıdaki gibi yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A \leq K$$

**Tanım 2.32 (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama)** $x_i \in [a,b]$ , $p_i > 0$ ve $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ olmak üzere,

$$A_n(x,p) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklindeyi ifadeye $x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ sayılarının $p_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ağırlıklı aritmetik ortalaması denir (Dragomir, Pearce 2000).

### 2.5 Bazı Klasik Eşitsizlikler

**Önerme 2.3 (Jensen Eşitsizliğinin Ayrık Durumu):** $I$ üzerinde reel değerli $f$ fonksiyonu, eğer $x_1, ..., x_n \in I$ ve $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ için $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa konvekstir (Pachpatte 2005).

**Teorem 2.14 (Hölder Eşitsizliği):** $a = (a_1, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n$-lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

**(a)** $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

**(b)** $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

**Teorem 2.15 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği):** $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović et al. 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

**Teorem 2.16 (Power Mean Eşitsizliği):** $q \geq 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^q$ ve $|g|^q$ , $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Teorem 2.17 (Simpson Eşitsizliği):** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a,b)$ üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|f^4\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} \left|f^{(4)}(x)\right| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\, dx\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|f^4\right\|_\infty (b-a)^4 \tag{2.3.12}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari 2011).

**Teorem 2.18 (Grüss Eşitsizliği):**$f$ ve $g$ , $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ ve $k$,$l$,$m$,$n \in \mathbb{R}$ sabitleri için $k \leq f(x) \leq l$ ve $m \leq g(x) \leq n$ oluyorsa,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx\right| \\ &\leq \frac{1}{4}(l-k)(n-m)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir (Mitrinović, Pečarić 1993).

# 3 MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1 Hermite-Hadamard Eşitsizliği

**Teorem 3.1** $I$, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a$,$b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić et al. 1992).

**İspat:** Teorem 2.6 den dolayı $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani $x = (1-t)\,a + tb$ , $0 \leq t \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_0^1 f\left((1-t)\,a + tb\right) dt \\
&\leq f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 tdt \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

olur ve bu (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafın ispatını verelim.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right] \tag{3.2}$$

biçiminde yazıp (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimde $x = a+t\,(b-a)\,/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t\,(b-a)}{2}\right) dt$$

biçiminde ve (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimde $x = b-t\,(b-a)\,/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx &= -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t\,(b-a)}{2}\right) dt \\
&= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t\,(b-a)}{2}\right) dt
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (3.2) de bu sonuçlar kullanılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt\\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Azpeitia 1994). ■

**Teorem 3.2** $a, b \in [0,\infty)$, $a < b$, $s \in (0,1]$ olmak üzere $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ikinci anlamda $s$-konveks fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3) de ikinci eşitsizlikteki $k = 1/(s+1)$ olabilecek en iyi sabittir. (3.3) eşitsizliğinde $f$ fonksiyonu $s$-konkav fonksiyon ise bu durumda eşitsizlik yön değiştirir (Dragomir, Fitzpatrick 1999).

Konvekslik, $s$-konvekslik ve Hadamard eşitsizliğini içeren güncel sonuçlar ve genelleştirmeler için Alomari *et al.* 2011, Burai *et al.* 2009, Burai *et al.* 2011, Dragomir *et al.* 1990, Dragomir 1992, Dragomir, Fitzpatrick 1999, Hadamard 1893, Hudzik, Maligranda1994, Mitrinović *et al.* 1993, Pečarić *et al.* 1991, Tunç *et al.* 2014, Yang *et al.* 2004 referanslarına bakın.

## 3.2 Yamuk ve Karmaşık Yamuk Eşitsizliği

**Teorem 3.3 Yamuk (Trapezoid) Eşitsizliği**: $f : [u,v] \to \mathbb{R}$, $(u,v)$ aralığında ikinci dereceden difereransiyellenebilir ve ikinci türevi $(u,v)$ aralığında sınırlı bir fonksiyon ve $M_2 = \sup_{x\in(u,v)} |f''(x)| < +\infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\int_u^v f(x)\,dx - \frac{1}{2}(v-u)(f(u)+f(v))\right| \leq \frac{1}{12}M_2(v-u)^3 \tag{3.4}$$

elde edilir (Cerone 2002, Dragomir et al. 2000, Dragomir et al. 2000, Dragomir, Wang 1997, Dragomir, Wang 1998).

**Teorem 3.4 Karmaşık Yamuk (*Perturbed trapezoid*) Eşitsizliği:** $f : [u,v] \to \mathbb{R}$, $(u,v)$ aralığında ikinci dereceden difereransiyellenebilir ve ikinci türevi $(u,v)$ aralığında sınırlı bir fonksiyon, $K_2 = \sup_{x\in(u,v)} f''(x) < +\infty$ ve $k_2 = \inf f''(x) > -\infty$

olsun. Bu durumda

$$\left| \int_u^v f(x)\,dx - \frac{1}{2}(v-u)(f(u)+f(v)) + \frac{1}{12}(v-u)^2(f'(v)-f'(u)) \right| \tag{3.5}$$
$$\leq \frac{1}{32}(K_2-k_2)(v-u)^3$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir et al. 2000).

**Lemma 3.1** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ ise bu durumda

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)\,b)\,dt \tag{3.6}$$

dir (Dragomir, Agarwal 1998).

**Teorem 3.5** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ olsun. Bu durumda $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq (b-a)\,\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{8} \tag{3.7}$$

dir (Dragomir, Agarwal 1998).

**Teorem 3.6** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I^\circ$, $a < b$, $f' \in L([a,b])$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.8}$$

dir (Dragomir, Agarwal 1998).

**Teorem 3.7** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $p \geq 1$ olmak üzere $|f'|^p$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|f'(a)|^p+|f'(b)|^p}{2}\right)^{1/p} \tag{3.9}$$

dir (Pearce, Pečarić 2000).

**Lemma 3.2** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L([a,b])$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ & \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1\int_0^1 \left[f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)\right](s-t)\,dtds \end{aligned} \tag{3.10}$$

dir (Sarıkaya et al. 2010).

**Teorem 3.8** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ & \leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \end{aligned} \tag{3.11}$$

dir (Sarıkaya et al. 2010).

**Teorem 3.9** $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}$ üzerinde diferensiiyellenebilir bir dönüşüm, $a$,$b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. $p \geq 1$ olmak üzere $|f'|^p$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{3}\left(\frac{|f'(a)|^p + |f'(b)|^p}{2}\right)^{1/p} \tag{3.12}$$

dir (Sarıkaya et al. 2010).

**Teorem 3.10** $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a$,$b \in I$, $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilir, $f''$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\begin{aligned} & \left|(\lambda-1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ & \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2}\left[\frac{\lambda^3}{3} + \frac{1-3\lambda}{24}\right]^{\frac{q-1}{q}} \\ \times\left\{\left[\left(\frac{\lambda^4}{6} + \frac{3-8\lambda}{3.2^6}\right)|f''(a)|^q + \left(\frac{(2-\lambda)\lambda^3}{6} + \frac{5-16\lambda}{3.2^6}\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\ \left. + \left[\left(\frac{(1+\lambda)(1-\lambda)^3}{6} + \frac{48\lambda-27}{3.2^6}\right)|f''(a)|^q + \left(\frac{\lambda^4}{6} + \frac{3-8\lambda}{3.2^6}\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}, & \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{3\lambda-1}{24}\right)^{\frac{q-1}{q}} \times \left\{\left[\frac{8\lambda-3}{3.2^6}|f''(a)|^q + \frac{16\lambda-5}{3.2^6}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\ \left. + \left[\frac{16\lambda-5}{3.2^6}|f''(a)|^q + \frac{8\lambda-3}{3.2^6}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}, & \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned} \tag{3.13}$$

dir (Sarıkaya, Aktan 2011).

**Sonuç 3.1** Eşitsizlik (3.13) de,

i) $\lambda = 0$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{48} \left[ \left( \frac{3\,|f''(a)|^q + 5\,|f''(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{5\,|f''(a)|^q + 3\,|f''(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

ii) $\lambda = 1$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[ \left( \frac{5\,|f''(a)|^q + 11\,|f''(b)|^q}{16} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{11\,|f''(a)|^q + 5\,|f''(b)|^q}{16} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

iii) $\lambda = \frac{1}{3}$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{162} \left[ \left( \frac{59\,|f''(a)|^q + 133\,|f''(b)|^q}{3.2^6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \frac{133\,|f''(a)|^q + 59\,|f''(b)|^q}{3.2^6} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir.

Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizlikle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlardan bazılarını (Dragomir, Toader 1993; Dragomir, Agarwal, 1998; Pearce, Pečarić 2000; Özdemir 2003; Kırmacı, Özdemir 2004; Pachpatte 2004; Yang et al. 2004; Kırmacı, 2000; Bombardelli, Varošanec 2009; Ngoc et al. 2009; Özdemir et al. 2010; Sarıkaya et al. 2010; Set 2010; Set et al. 2010; Tunç 2010; Alomari 2011; Yıldız 2011; Sarıkaya et al. 2012) çalışma referanslarına bakılarak bulunabilir.

# 4 ARAŞTIRMA BULGULARI

Ana teoremleri ifade etmek için aşağıdaki lemma verilecektir.

**Lemma 4.1** $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I^{\circ}$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a$,$b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a)) \\ &= \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left[f''(ta+(1-t)b)+f''(tb+(1-t)a)\right]dt \end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** Eşitliğin sağ tarafındaki ifade için iki defa kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (t+1)^2 f''(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= (t+1)^2 \left.\frac{f'(ta+(1-t)b)}{a-b}\right|_0^1 - \frac{2}{a-b}\int_0^1 (t+1)f'(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= \frac{4f'(a)-f'(b)}{a-b} - \frac{2}{a-b}\int_0^1 (t+1)f'(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= \frac{4f'(a)-f'(b)}{a-b} - \frac{2}{a-b}\left[(t+1)\left.\frac{f\ \ (ta+(1-t)b)}{a-b}\right|_0^1\right. \\ &\left.-\frac{1}{a-b}\int_0^1 f\ \ (ta+(1-t)b)\,dt\right] \\ &= \frac{4f'(a)-f'(b)}{a-b} - \frac{2}{a-b}\left[\frac{2f(a)-f(b)}{a-b} - \frac{1}{a-b}\int_0^1 f\ \ (ta+(1-t)b)\,dt\right] \\ &= \frac{4f'(a)-f'(b)}{a-b} - \frac{4f(a)-2f(b)}{(b-a)^2} + \frac{2}{(b-a)^2}\int_0^1 f\ \ (ta+(1-t)b)\,dt \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (t+1)^2 f''(tb+(1-t)a)\,dt \\
&= (t+1)^2 \frac{f'(tb+(1-t)a)}{b-a}\Big|_0^1 - \frac{2}{b-a}\int_0^1 (t+1) f'(tb+(1-t)a)\,dt \\
&= \frac{4f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_0^1 (t+1) f'(tb+(1-t)a)\,dt \\
&= \frac{4f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\Bigg[(t+1)\frac{f\ (tb+(1-t)a)}{b-a}\Big|_0^1 \\
&-\frac{1}{b-a}\int_0^1 f\ (tb+(1-t)a)\,dt\Bigg] \\
&= \frac{4f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\left[\frac{2f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_0^1 f\ (tb+(1-t)a)\,dt\right] \\
&= \frac{4f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{4f(b)-2f(a)}{(b-a)^2} + \frac{2}{(b-a)^2}\int_0^1 f\ (tb+(1-t)a)\,dt.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $I_1$ ve $I_2$ yi toplanırsa

$$
\begin{aligned}
I_1+I_2 &= \int_0^1 (t+1)^2 \left[f''(ta+(1-t)b) + f''(tb+(1-t)a)\right] dt \\
&= -\frac{4f'(a)-f'(b)}{b-a} + \frac{4f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{4f(a)-2f(b)+4f(b)-2f(a)}{(b-a)^2} \\
&+ \frac{2}{(b-a)^2}\int_0^1 f\ (ta+(1-t)b)\,dt + \frac{2}{(b-a)^2}\int_0^1 f\ (tb+(1-t)a)\,dt \\
&= \frac{5(f'(b)-f'(a))}{b-a} - \frac{2(f(a)+f(b))}{(b-a)^2} + \frac{2}{(b-a)^2}\cdot\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx \\
&+ \frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{5(f'(b)-f'(a))}{b-a} - \frac{2(f(a)+f(b))}{(b-a)^2} + \frac{4}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

olur, yani

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a)) \\
&= \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left[f''(ta+(1-t)b) + f''(tb+(1-t)a)\right] dt
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.1** $t \in [0,1]$ için $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılır ve eşitlik

(4.1) yeniden yazılırsa

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a)) \tag{4.2}$$
$$= \frac{b-a}{4}\int_a^b (x+a-2b)^2 (f''(x)+f''(a+b-x))\,dx.$$

elde edilir.

**Teorem 4.1** $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a$,$b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ de konveks bir fonksiyon ise,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \tag{4.3}$$
$$\leq \frac{7}{12}(b-a)^3(|f''(a)|+|f''(b)|)$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** $|f''|$, $[a,b]$ de konveks bir fonksiyon olması ve Lemma 4.1 kullanılırsa,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right|$$
$$= \left|\frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2 [f''(ta+(1-t)b) + f''(tb+(1-t)a)]\,dt\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2 (|f''(ta+(1-t)b)| + |f''(tb+(1-t)a)|)\,dt$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2 (t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|$$
$$+t|f''(b)| + (1-t)|f''(a)|)\,dt$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}[|f''(a)|+|f''(b)|]\int_0^1 (t+1)^2\,dt$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\frac{7}{3}[|f''(a)|+|f''(b)|].$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.2** $s \in (0,1]$ ve $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ da ikinci anlamda $s$-konveks fonksiyon ise,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \le \frac{(b-a)^3}{4}\frac{5s^2+23s+28}{(s+1)(s+2)(s+3)}(|f''(a)|+|f''(b)|) \tag{4.4}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** $|f''|$ nin ikinci anlamda $s$-konveks fonksiyon olması, Lemma 4.1 ve Tanım 2.27 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left(|f''(ta+(1-t)b)| + |f''(tb+(1-t)a)|\right)dt \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left(t^s|f''(a)| + (1-t)^s|f''(b)|\right. \\
&\left.+t^s|f''(b)| + (1-t)^s|f''(a)|\right)dt \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}(|f''(a)|+|f''(b)|)\left[\int_0^1 (t+1)^2 t^s dt + \int_0^1 (t+1)^2(1-t)^s dt\right] \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}(|f''(a)|+|f''(b)|)\left[\frac{4s^2+16s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{s^2+7s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right] \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{5s^2+23s+28}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right)(|f''(a)|+|f''(b)|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (t+1)^2 t^s dt = \frac{2(2s^2+8s+7)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{4.5}$$

$$\int_0^1 (t+1)^2(1-t)^s dt = \frac{s^2+7s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{4.6}$$

dir. ■

**Uyarı 4.2** (4.4) eşitsizliğinde, eğer $s = 1$ olarak alınırsa, (4.4) eşitsizliği (4.3) eşitsizliğine dönüşür.

**Teorem 4.3** $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$

ve $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ aralığında $tgs$-konveks ise,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2 (f'(b)-f'(a)) \right| \tag{4.7}$$
$$\leq \frac{23(b-a)^3}{120}\left[|f''(a)| + |f''(b)|\right]$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Yukarıdaki ispatlara benzer şekilde, Lemma 4.1 ve Tanım 2.31 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2 (f'(b)-f'(a)) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2 \left(|f''(ta+(1-t)b)| + |f''(tb+(1-t)a)|\right) dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2 \left((t(1-t)|f''(a)| + t(1-t)|f''(b)|)\right. \\
&\left.+ (t(1-t)|f''(b)| + t(1-t)|f''(a)|)\right) dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 2(t+1)^2 t(1-t)\left[|f''(a)| + |f''(b)|\right] dt \\
&= \frac{(b-a)^3\left[|f''(a)| + |f''(b)|\right]}{2}\int_0^1 (t+1)^2 t(1-t)\,dt \\
&= \frac{23(b-a)^3}{120}\left[|f''(a)| + |f''(b)|\right]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.4** $f : [0,u] \to \mathbb{R}$, $(0,u)$ aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $a$,$b \in (0,u)$, $u > 0$, $m \in [0,1]$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ aralığında $m$-konveks ise,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2 (f'(b)-f'(a)) \right| \tag{4.8}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left\{ \frac{17\left[|f''(a)| + |f''(b)|\right]}{12} + m\frac{11\left[\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right| + \left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]}{12} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat:** $|f''|$ nin $m$-konveks fonksiyon olması, Lemma 4.1 ve Tanım 2.23 kulanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left(|f''(ta+(1-t)b)|+|f''(tb+(1-t)a)|\right)dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left(t|f''(a)|+m(1-t)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right. \\
&\left.+t|f''(b)|+m(1-t)\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|\right)dt \\
&=\frac{(b-a)^3}{4}\left\{\left([|f''(a)|+|f''(b)|]\int_0^1 t(t+1)^2\,dt\right)\right. \\
&\left. m\left[\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]\int_0^1 (t+1)^2(1-t)\,dt\right\} \\
&=\frac{(b-a)^3}{4}\left\{\frac{17\left[|f''(a)|+|f''(b)|\right]}{12}+m\frac{11\left[\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]}{12}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.5** $f:[0,u]\to\mathbb{R}$, $(0,u)$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,u)$, $u>0$, $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ aralığında $(\alpha,m)$-konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left\{\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[|f''(a)|+|f''(b)|\right]\right. \\
&\left.+\left(\frac{7}{3}-\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\right)m\left[\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** $|f''|$ nin $(\alpha,m)$-konveks fonksiyon oluşu, Lemma 4.1 ve Tanım 2.25 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2\left(f'(b)-f'(a)\right)\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left(\left|f''(ta+(1-t)b)\right|+\left|f''(tb+(1-t)a)\right|\right)dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 (t+1)^2\left(t^\alpha\left|f''(a)\right|+t^\alpha\left|f''(b)\right|\right. \\
&\left.+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|\right)dt \\
&=\frac{(b-a)^3}{4}\left\{\left(\left[\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right]\int_0^1 t^\alpha(t+1)^2\,dt\right)\right. \\
&\left.+m\left[\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]\int_0^1 (t+1)^2(1-t^\alpha)\,dt\right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left\{\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right]\right. \\
&\left.+m\left(\frac{7}{3}-\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)\left[\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.3** i) (4.9) eşitsizliğinde eğer $\alpha = 1$ olarak seçilirse, (4.9) eşitsizliği (4.8) eşitsizliğine dönüşür.

ii) (4.9) eşitsizliğinde eğer $\alpha = 1$, $m = 1$ olarak seçilirse, (4.9) eşitsizliği (4.3) eşitsizliğine dönüşür.

**Teorem 4.6** $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a < b$ ve $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2\left(f'(b)-f'(a)\right)\right| \qquad (4.10)\\
&\leq \frac{(b-a)^3}{2}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Lemma 4.1 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \tag{4.11}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left[\int_0^1 |t+1|^2\,|f''(ta+(1-t)b)|\,dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 |t+1|^2\,|f''(tb+(1-t)a)|\,dt\right]$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left[\left(\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(tb+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{2}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

elde edilir, burada $1/p+1/q=1$ ile $|f''|^q$ konveksliği kullanılıp,

$$\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt \tag{4.12}$$
$$\leq \int_0^1 \left[t\,|f''(a)|^q+(1-t)\,|f''(b)|^q\right]dt=\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}$$
$$\int_0^1 |f''(tb+(1-t)a)|^q\,dt$$
$$\leq \int_0^1 \left[t\,|f''(b)|^q+(1-t)\,|f''(a)|^q\right]dt=\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt=\int_0^1 (t+1)^{2p}\,dt=\int_1^2 u^{2p}du=\left.\frac{u^{2p+1}}{2p+1}\right|_1^2=\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1} \tag{4.13}$$

dir. (4.11) ve (4.12) deki ifadeler (4.13) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.10) eşitsizliği elde edilmiş olur, böylece ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.7** $s\in(0,1]$ ve $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a$,$b\in I^\circ$, $a<b$ ve $p>1$, $1/p+1/q=1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda $s$-konveks ise,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2\left(f'(b)-f'(a)\right)\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{\left(\frac{|f''(a)|^q}{s+1}+\frac{|f''(b)|^q\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f''(b)|^q}{s+1}+\frac{|f''(a)|^q\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.27 ve Hölder's integral eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2\left(f'(b)-f'(a)\right)\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left[\int_0^1 |t+1|^2\,|f''(ta+(1-t)b)|\,dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 |t+1|^2\,|f''(tb+(1-t)a)|\,dt\right] \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left[\left(\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(tb+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 \left(t^s|f''(a)|^q+(1-t)^s|f''(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left(t^s|f''(b)|^q+(1-t)^s|f''(a)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&= \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f''(a)|^q\int_0^1 t^s dt+|f''(b)|^q\int_0^1 (1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(|f''(b)|^q\int_0^1 t^s dt+|f''(a)|^q\int_0^1 (1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&= \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f''(a)|^q}{s+1}+\frac{|f''(b)|^q\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{|f''(b)|^q}{s+1}+\frac{|f''(a)|^q\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 t^s dt = \frac{1}{s+1} \tag{4.15}$$
$$\int_0^1 (1-t)^s \, dt = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}$$

dir. İspat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.4** (4.14) eşitsizliğinde, eğer $s = 1$ olarak seçilirse (4.10) eşitsizliğinin elde edileceği görülür.

**Teorem 4.8** $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, ve $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a, b]$ aralığında $tgs$-konveks ise,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2 (f'(b) - f'(a)) \right| \tag{4.16}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.31 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2 (f'(b) - f'(a)) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4} \left[ \int_0^1 |t+1|^2 |f''(ta+(1-t)b)|\,dt \right. \\
&\left. + \int_0^1 |t+1|^2 |f''(tb+(1-t)a)|\,dt \right] \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4} \left[ \left(\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 |t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(tb+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left(\int_0^1 \left(t(1-t)|f''(a)|^q + t(1-t)|f''(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left(t(1-t)|f''(b)|^q + t(1-t)|f''(a)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= \frac{(b-a)^3}{2} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{(b-a)^3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

yazılır, böylece ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.9** $f:[0,u]\to\mathbb{R}$, $(0,u)$ aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,u)$, $u>0$, $m\in[0,1]$ ve $a<b$ olsun. $p>1$ için $1/p+1/q=1$ iken, eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında $m$-konveks ise;

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \qquad (4.17)\\&\leq\frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\\&\times\left\{\left[\frac{|f''(a)|^q+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{|f''(b)|^q+m\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.23 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right|\\&\leq\frac{(b-a)^3}{4}\left[\int_0^1|t+1|^2\,|f''(ta+(1-t)b)|\,dt\right.\\&\left.+\int_0^1|t+1|^2\,|f''(tb+(1-t)a)|\,dt\right]\\&\leq\frac{(b-a)^3}{4}\left[\left(\int_0^1|t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\&\left.+\left(\int_0^1|t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f''(tb+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\&\leq\frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1\left(t\,|f''(a)|^q+m(1-t)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\&\left.+\left(\int_0^1\left(t\,|f''(b)|^q+m(1-t)\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\&\leq\frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\frac{|f''(a)|^q+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{|f''(b)|^q+m\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.10** $f:[0,u]\to\mathbb{R}$, $(0,u)$ aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,u)$ ve $u>0$, $(\alpha,m)\in[0,1]^2$, $a<b$ olsun. $p>1$ için $1/p+1/q=1$ iken eğer

$|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında $(\alpha,m)$-convex ise:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \tag{4.18}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\left[\frac{|f''(a)|^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{|f''(b)|^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.25 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left[\int_0^1|t+1|^2|f''(ta+(1-t)b)|\,dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1|t+1|^2|f''(tb+(1-t)a)|\,dt\right]$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left[\left(\int_0^1|t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1|t+1|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f''(tb+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1\left(t^\alpha|f''(a)|^q+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1\left(t^\alpha|f''(b)|^q+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$= \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\left[\frac{|f''(a)|^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{|f''(b)|^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.5** i) (4.18) eşitsizliğinde, eğer $\alpha=1$ olarak seçersek (4.17) eşitsizliğinin elde edileceği görülür.

ii) Teorem 4.10, de, eğer $\alpha=m=1$ olarak seçersek (4.10) eşitsizliğinin elde edileceği görülür.

**Sonuç 4.1** i) Teorem 4.9 için, eğer $p = m = 1$ olduğu kabul edilirse;

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right|$$
$$\leq \frac{7(b-a)^3}{6}\left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Teorem 4.10 için, eğer $p = m = 1$ olduğu kabul edilirse;

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right|$$
$$\leq \frac{7(b-a)^3}{6}\left\{\left[\frac{|f''(a)|^q}{\alpha+1} + \frac{\alpha|f''(b)|^q}{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f''(b)|^q}{\alpha+1} + \frac{\alpha|f''(a)|^q}{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.11** $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a < b$, $p > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \tag{4.19}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{17|f''(a)|^p + 11|f''(b)|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{17|f''(b)|^p + 11|f''(a)|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon oluşundan, Lemma 4.1 ve power mean integral eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 |t+1|^2\,|f''(ta+(1-t)b)+f''(tb+(1-t)a)|\,dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\int_0^1 |t+1|^2\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\left\{\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t\,|f''(a)|^p+(1-t)\,|f''(b)|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t\,|f''(b)|^p+(1-t)\,|f''(a)|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&=\frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{17\,|f''(a)|^p+11\,|f''(b)|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{17\,|f''(b)|^p+11\,|f''(a)|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.12** $s\in(0,1]$ ve $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a$,$b\in I^\circ$, $a<b$, ve $p>1$, $1/p+1/q=1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda $s$-konveks ise,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\times\left\{\left(\frac{4s^2+16s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,|f''(a)|^p+\frac{s^2+7s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,|f''(b)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{4s^2+16s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,|f''(b)|^p+\frac{s^2+7s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,|f''(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

elde edilir.

**İspat:** $|f''|^q$ nin $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda $s$-konveks oluşu, Lemma 4.1, Tanım

2.27 ve power mean integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 |t+1|^2 |f''(ta+(1-t)b) + f''(tb+(1-t)a)|\,dt$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\int_0^1 |t+1|^2\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\left\{\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t^s|f''(a)|^p + (1-t)^s|f''(b)|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t^s|f''(b)|^p + (1-t)^s|f''(a)|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(|f''(a)|^p\int_0^1 (t+1)^2 t^s dt + |f''(b)|^p\int_0^1 (t+1)^2(1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left(|f''(b)|^p\int_0^1 (t+1)^2 t^s dt + |f''(a)|^p\int_0^1 (t+1)^2(1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{4s^2+16s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(a)|^p + \frac{s^2+7s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(b)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4s^2+16s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(b)|^p + \frac{s^2+7s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.6** (4.20) de, eğer $s=1$ seçilirse (4.19) deki eşitsizlik elde edilir.

**Teorem 4.13** $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a<b$ ve $p>1$, $1/p+1/q=1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında $tgs$-konveks ise

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \tag{4.21}$$
$$\leq \frac{7(b-a)^3}{6}\left(\frac{23}{140}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^p + |f''(b)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.31 ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 |t+1|^2\left|f''(ta+(1-t)b)+f''(tb+(1-t)a)\right|dt \\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}\left(\int_0^1 |t+1|^2\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\left\{\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t(1-t)|f''(a)|^p+t(1-t)|f''(b)|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t(1-t)|f''(b)|^p+t(1-t)|f''(a)|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&\le \frac{(b-a)^3}{2}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^p+|f''(b)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (t+1)^2 t(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{7(b-a)^3}{6}\left(\frac{23}{140}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^p+|f''(b)|^p\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

olur, bu ispatı tamamlar. ■

**Teorem 4.14** $f:[0,u]\to\mathbb{R}$, $(0,u)$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun, $a,b\in(0,u)$ ve $u>0$, $m\in[0,1]$, $a<b$ ve $p>1$ iken $1/p+1/q=1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında $m$-convex ise;

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \qquad (4.22)\\
&\le \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{17|f''(a)|^p+m11\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{17|f''(b)|^p+m11\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.23 ve power mean integral eşitliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 |t+1|^2\left|f''(ta+(1-t)b)+f''(tb+(1-t)a)\right|dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\int_0^1 |t+1|^2\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\times \\
&\left\{\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t\left|f''(a)\right|^p+m(1-t)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t\left|f''(b)\right|^p+m(1-t)\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{17\left|f''(a)\right|^p+m11\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{17\left|f''(b)\right|^p+m11\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^p}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.15** $f:[0,u]\to\mathbb{R}$, $(0,u)$ aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,u)$ ve $u>0$, $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ ve $a<b$, $p>1$ iken $1/p+1/q=1$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında $(\alpha,m)$-convex ise;

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{\left[\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|f''(a)\right|^p+\frac{m\alpha(7\alpha^2+30\alpha+29)}{3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left[\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|f''(b)\right|^p+\frac{m\alpha(7\alpha^2+30\alpha+29)}{3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Lemma 4.1, Tanım 2.25 ve power mean integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\int_0^1 |t+1|^2\left|f''(ta+(1-t)b)+f''(tb+(1-t)a)\right|dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\int_0^1 |t+1|^2\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t^\alpha|f''(a)|^p+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (t+1)^2\left(t^\alpha|f''(b)|^p+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^p\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{\left[\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}|f''(a)|^p+\frac{m\alpha(7\alpha^2+30\alpha+29)}{3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left[\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}|f''(b)|^p+\frac{m\alpha(7\alpha^2+30\alpha+29)}{3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.2** i) (4.23) de, eğer $\alpha=1$ olarak seçilirse (4.22) eşitsizliği elde edilir.

ii) (4.23) de, eğer $\alpha=m=1$ olarak seçilirse (4.19) eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.2** i) Teorem 4.14 için, eğer $p=m=1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{2}\left(\frac{17|f''(a)|+11|f''(b)|}{12}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Teorem 4.15 için, eğer $p=m=1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+\frac{5}{4}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{4}\frac{7\alpha^3+34\alpha^2+45\alpha+14}{3(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}\left[|f''(a)|+|f''(b)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

### 4.1 Bazı Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

Bu başlık altında bir önceki bölümde elde edilen farklı tipten konveks fonksiyon türleri için yazılan karmaşık yamuk eşitsizliklerinin pozitif sayılar için özel ortalamalarına ilişkin sonuçları verilecektir.

**Önerme 4.1** $a, b \in \mathbb{R}_+$, $0 < a < b$, ve $n \geq 2$ için

$$\left|(b-a) L_n(a,b) - \frac{b-a}{2} A(a^n, b^n) - \frac{5n}{4}(b-a)^2 \left(b^{n-1} - a^{n-1}\right)\right|$$
$$\leq \frac{7}{6}(b-a)^3 n(n-1) A\left(a^{n-2}, b^{n-2}\right).$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.1 de $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}_+$ ve $n \geq 2$ konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.2** $a, b \in \mathbb{R}_+$, $0 < a < b$, $s \in (0,1]$ için

$$\left|(b-a) L_s(a,b) - \frac{b-a}{2} A(a^s, b^s) - \frac{5s}{4}(b-a)^2 \left(b^{s-1} - a^{s-1}\right)\right|$$
$$\leq s(1-s) \frac{(b-a)^3}{2} \frac{(5s^2+23s+28)}{s^3+6s^2+11s+6} A\left(a^{s-2}, b^{s-2}\right).$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.2 de, $f(x) = x^s$, $x \in \mathbb{R}_+$ ve $s \in (0,1]$ ikinci anlamda $s$-konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.3** $a, b \in (0, u)$ ve $u > 0$, $m \in [0,1]$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left|-\ln I(a,b) + A(\ln a, \ln b) + \frac{5}{4} \frac{(b-a)^2}{G^2(a,b)}\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \frac{(17+11m^3)}{12} \frac{A(a^2, b^2)}{G^4(a,b)}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.4 de $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}$ $m$-konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.4** $a, b \in (0, u)$ ve $u > 0$, $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left|-\ln I(a,b) + A(\ln a, \ln b) + \frac{5}{4} \frac{(b-a)^2}{G^2(a,b)}\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{4\alpha^2+16\alpha+14}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left(1-m^3\right) + \frac{7m^3}{3}\right) \frac{A(a^2, b^2)}{G^4(a,b)}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.5 de $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}$ $(\alpha, m)$-konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.5** $a$, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, ve $n \in N$, $n > 2$ olsun. Burada her $p > 1$ için,

$$\left|(b-a) L_n(a,b) - \frac{b-a}{2} A(a^n, b^n) - \frac{5n}{4}(b-a)^2 \left(b^{n-1} - a^{n-1}\right)\right|$$
$$\leq n(n-1) \frac{(b-a)^3}{2} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{1/p} A^{(p-1)/p} \left(a^{\frac{(n-2)p}{p-1}}, b^{\frac{(n-2)p}{p-1}}\right).$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.6 de $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ için uygulanırsa doğrudan ispatlanır. ■

**Önerme 4.6** $a$, $b \in \mathbb{R}$, $s \in (0,1)$, $0 < a < b$ olsun. Burada her $p > 1$ için,

$$\left|(b-a) L_s(a,b) - \frac{b-a}{2} A(a^s, b^s) - \frac{5s}{4}(b-a)^2 \left(b^{s-1} - a^{s-1}\right)\right|$$
$$\leq s(1-s) \frac{(b-a)^2}{4} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{1/p} \left\{ \left(\frac{a^{q(s-2)}}{s+1} + b^{q(s-2)} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{b^{q(s-2)}}{s+1} + a^{q(s-2)} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.7 de $f(x) = x^s$, $x \in \mathbb{R}$ ve $s \in (0,1)$ için uygulanırsa doğrudan ispatlanır. ■

**Önerme 4.7** $a, b \in (0, x)$ ve $x > 0$, $m \in [0,1]$, $p > 1$ ve $a < b$ olsun.

$$\left| -\ln I(a,b) + A(\ln a, \ln b) + \frac{5}{4} \frac{(b-a)^2}{G^2(a,b)} \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{2^{2+\frac{1}{q}} G^4(a,b)} \left(\frac{2^{2p+1}-1}{2p+1}\right)^{1/p} \left\{ \left[b^{2q} + a^{2q} m^{1+q}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[a^{2q} + b^{2q} m^{1+q}\right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

**İspat:** Teorem 4.9 de $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.8** $a, b \in (0, x)$ ve $x > 0$, $(\alpha, m) \in [0,1]^2$, $p > 1$ ve $a < b$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\left| -\ln I(a,b) + A(\ln a, \ln b) + \frac{5}{4}\frac{(b-a)^2}{G^2(a,b)} \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{4G^4(a,b)} \left( \frac{2^{2p+1}-1}{2p+1} \right)^{1/p} \frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{q}}} \left\{ \left[ b^{2q} + a^{2q} m^{1+q} \alpha \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left[ a^{2q} + b^{2q} m^{1+q} \alpha \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

**İspat:** Teorem 4.10 de $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.9** $a$, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, ve $0 \neq [a, b]$ olsun. Burada her $p > 1$ için,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{5}{2}(b-a)^2 \frac{A(a,b)}{G^4(a,b)} - H^{-1}(a,b) + L^{-1}(a,b) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2 .7^{\frac{p-1}{p}}}{4^{\frac{p+1}{p}} .3} \left\{ \left( 17 \left( \frac{2}{a^3} \right)^p + 11 \left( \frac{2}{b^3} \right)^p \right)^{1/p} + \left( 17 \left( \frac{2}{b^3} \right)^p + 11 \left( \frac{2}{a^3} \right)^p \right)^{1/p} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.11 de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, b]$ fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.10** $a$, $b \in \mathbb{R}$, $s \in (0, 1)$, $0 < a < b$, ve $[a, b] \neq 0$ olsun. Burada her $p > 1$ için,

$$\begin{aligned}
&\left| L^{-1}(a,b) - H^{-1}(a^s, b^s) + \frac{5s(b-a)(b^{s+1}-a^{s+1})}{4G^{2(s+1)}(a,b)} \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2 s(s+1)}{4} \left( \frac{7}{3} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\times \left\{ \left( \frac{4s^2+16s+14}{s^3+6s^2+11s+6} \left( \frac{1}{a^{s+2}} \right)^p + \frac{s^2+7s+14}{s^3+6s^2+11s+6} \left( \frac{1}{b^{s+2}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\left. + \left( \frac{4s^2+16s+14}{s^3+6s^2+11s+6} \left( \frac{1}{b^{s+2}} \right)^p + \frac{s^2+7s+14}{s^3+6s^2+11s+6} \left( \frac{1}{a^{s+2}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.12 de $f(x) = \frac{1}{x^s}$, $x \in R$ ve $s \in (0, 1)$ için uygulanırsa doğrudan ispatlanır. ■

**Önerme 4.11** $a, b \in (0, u)$ ve $u > 0$, $m \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left| -\ln I(a,b) + A(\ln a, \ln b) + \frac{5}{4}\frac{(b-a)^2}{G^2(a,b)} \right|$$
$$\leq \frac{7(b-a)^2}{12G^4(a,b)} \left(\frac{3}{84}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(17b^{2p} + 11m^{p+1}a^{2p}\right)^{1/p} \right.$$
$$\left. + \left(17a^{2p} + 11m^{p+1}b^{2p}\right)^{1/p} \right\}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

**İspat:** Teorem 4.14 de $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 4.12** $a, b \in (0, u)$ ve $u > 0$, $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, $p > 1$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left| -\ln I(a,b) + A(\ln a, \ln b) + \frac{5}{4}\frac{(b-a)^2}{G^2(a,b)} \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{4G^4(a,b)} \left(\frac{7}{3}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\times \left\{ \left( \frac{(4\alpha^2 + 16\alpha + 14)\, b^{2p}}{(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)} + \frac{m^{p+1}a^{2p}(7\alpha^3 + 30\alpha^2 + 29\alpha)}{3(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)} \right)^{\frac{1}{p}} \right.$$
$$\left. + \left( \frac{(4\alpha^2 + 16\alpha + 14)\, a^{2p}}{(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)} + \frac{m^{p+1}b^{2p}(7\alpha^3 + 30\alpha^2 + 29\alpha)}{3(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Teorem 4.15 de $f(x) = -\ln x$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

# 5 SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER

Bu çalışma, karmaşık yamuk eşitsizliği konusunda yazılan makalelerde verilen teoremlerin ve sonuçların kullanılmasını ve bazı fonksiyonların Hadamard tipli karmaşık yamuk eşitsizliğinin elde edilmesini sağlamaktadır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler literatüründe bulunmayan yeni bağıntıların elde edilmesi bu konudaki çalışmaların sürdürülebileceğini ortaya koymaktadır. Ayrıca Cerone ve Dragomir tipli yamuk ve karmaşık yamuk eşitsizlikleri kullanılarak farklı tipten konveks fonksiyon sınıfları için yeni bağıntıların elde edildiği görülmektedir. Uygun konveks fonksiyon sınıflarındaki fonksiyonlar için yamuk ve karmaşık yamuk eşitsizlikleri ile pozitif reel sayıların özel ortalamalarına ilişkin yeni bağlantıların kolay bir şekilde yapılabileceğini bizlere sunmaktadır. Bu da özel ortalamalar teorisinde yamuk ve karmaşık yamuk tipli eşitsizliklerin kullanılabileceğini ifade etmektedir. Bunun da özel ortalamalar teorisine büyük katkı sağlayacağı açıktır.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda, yamuk ve karmaşık yamuk tipli eşitsizliklerin genelleştirilmesi üzerinde durularak yeni bağıntıların elde edilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca Hadamard, Cerone ve Dragomir tipli karmaşık yamuk eşitsizliklerinin var olan bu dönüşümlerle olan ilişkisinin araştırılması amaçlanmaktadır. Bu tür çalışmaların yapılması ile konveks fonksiyonların uygulama alanlarının artırılmasına yönelik özel bir çalışma yapılabilir. Ayrıca konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler teorisine başka bir boyut getirebilir ve özel ortalamalara ilişkin daha iyi alt ve üst sınırların bulunmasında ve etkili bir şekilde kullanılmasında yeni bir yöntem olarak kullanılabilir.

## KAYNAKLAR


Alomari, M., 2011. Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For s-Convex, Quasi-Convex And r-Convex Mappings And Applications. **Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology**, University Kebangsaan, Bangi, Malsysia.

Alomari, M., Darus, M., Kırmacı, U.S., 2011. Some Inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex Functions, **Acta Math. Sci**. 31B(4), 1643-1652.

Alzer, H., 2009. A superadditive property of Hadamard's gamma function, **Abh. Math. Semin. Univ. Hambg**, 79, 11-23.

Anton, H., 1994. Elementary Linear Algebra, **Jhon Wiley & Sons, Inc**

Azpeitia, A. G., 1994. Convex Functions and the Hadamard Inequality, **Rev. Colombiana Mat.**, 28, 7-12.

Bakula, M., Pečarić, J., Ribicic, M., 2006. Companion inequalities to Jensen's inequality for m-convex and (α,m)-convex functions, **J Inequal Pure Appl Math.**, 7(5), Art. (194).

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, **ISBN**, 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, **ISBN**, 978-605-395-412-5.

Bombardelli, M. and Varošanec, S., 2009. Properties of convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities. **Computers and Mathematics with Applications**, 58, 1869-1877.

Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagenf¨ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen, **Pupl. Inst. Math.**, 23, 13-20.

Burai, P., Házy, A., and Juhász, T., 2009. Bernstein-Doetsch type results for s-convex functions, **Publ. Math. Debrecen**, 75, no. 1-2, 23-31.

Burai, P., Házy, A., and Juhász, T., 2011. On approximately Breckner s-convex functions, **Control Cybernet**, 40, no. 1, 91-99.

Carter, M. and Brunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. **Springer-Verlag**, 228, New York.

Cerone, P., 2002. On perturbed trapezoidal and midpoint rules, **Korean J. Comput. Appl. Math.**, 2, 423-435

Dragomir, S., 2002. On Some New Inequalities of Hermite-Hadamard type for m-Convex Functions. **Tamkang J. of Math.**, 33 (1), Spring, 45-55.

Dragomir, S., Agarwal R., Cerone, P., 2000. On Simpson.s inequality and applications, **J. of Ineq. and Appl.**, 5 , 533-579.

Dragomir, S., Agarwal R., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, **Appl Math Lett, Vol.** 11 No:5, 91.95.

Dragomir, S., Cerone, P. and Sofo, A., 2000. Some remarks on the trapezoid rule in numerical integration, **Indian J. Pure Appl. Math.**, 31(5), 475-494.

Dragomir, S., Cho, Y. and Kim, S., 2000. Inequalities of Hadamard's type for Lipschitizian mappings and their applications, **J. Math. Anal. Appl.**, 245, 489-501.

Dragomir, S. and Fitzpatrick, S., 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, **Demonstration Math.**, 32 (4), 687-696.

Dragomir, S. and Ionescu N., 1990. On some inequalities for convex-dominated functions. **Anal. Num. Theor. Approx.**, 19, 21-28. MR 936: 26014 ZBL No.733: 26010.

Dragomir, S. and Pearce, C., 2000. Selected Topic on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, **URL:http:// www. maths. adelaide. edu.au/ Applied/staff/ cpearce.html**

Dragomir, S., Pečarić, J. and Persson, L., 1995. Some inequalities of Hadamard type, **SoochowJournal of Mathematics**, 21 (3), 335-341.

Dragomir, S., Pečarić, J. and Sǎndor, J., 1990. A note on the Jensen-Hadamard's inequality, **Anal. Num. Ther. Approx.**, 19, 29-34.

Dragomir, S. and Toader, G., 1993. Some inequalities for m-convex functions. **Studia Univ. Babes-Bolyai. Mathematica**, 38(1), 21-28.

Dragomir, S., 1992. Two mappings in connection to Hadamard's inequality, **J. Math. Anal. Appl.,** 167, 49-56.

Dragomir, S. and Wang, S., 1997. An inequality of Ostrowski-Grüss' type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules, **Computers Math. Appl.**, 33(11), 15-20.

Dragomir, S. and Wang, S., 1988. Applications of Ostrowski' inequality to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules, **Appl. Math. Lett.**, 11(1), 105-109.

Gill, P., Pearce, C. and Pečarić, J., 1997. Hadamard's inequality for r-convex functions, **J. Math. Anal. and Appl.**, 215, 461-470.

Godunova, E. and Levin, V., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel.

Hadamard, J., 1893. Étude sur les propriétés des fonctions entières en particulier d'une fonction considérée par Riemann, **J. Math. Pures Appl.**, 58 171-215.

Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions, **Aequationes Math.**, 48, 100-111.

Hunter, J., Nachtergaele, B., 2000. Applied Analysis, Department of Mathematics, **University of California at Davis**, 446, California.

Jeffrey, A. and Dai, H., 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, **Elsevier Inc. 4. Edition**, 589, UK.

Jensen, J., 1905. Om konvexe funktioner og uligheder mellem Middelvaerdier. **Nyt. Tidsskrift for Mathematik**, 16B, 49-69.

Jensen, J., 1906. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes. **Acta Math.,** 30, 175-193.

Kadıoğlu, E., Kamali, M., 2011, Genel Matematik, **Erzurum:Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi**.

Kannappan, P., 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications, **Springer**, 817,

Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, **Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum**.

Kırmacı, U., 2008. Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications. **Computers and Mathematics with Applications**, 55, 485-493.

Kırmacı, U. and Özdemir, M., 2004. On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint fomula. **Applied Mathematics and Computation**, 153, 361-368.

Miheşan, V., 1993. A generalization of the convexity. **Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca**, Romania.

Mitrinović, D., 1970. Analytic Inequalities, **Springer-Verlag**, Berlin, 404, New York

Mitrinović, D., Pečarić, J., 1990. History, variations and generalisations of the Čebyčev inequality and the question of some priorities II, **Rad JAZU (Zagreb)**, 450, fasc. 9, 139-156.

Mitrinović, D., Vasić, P., 1974. History, variations and generalisations of the Čebyčev inequality and the question of some priorities, **Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.**, No. 461-497, 1-30.

Mitrinović, D., Pečarić, J. and Fink, A., 1993. Classical and new inequalities in analysis, **KluwerAcademic**, Dordrecht.

Niculescu, C., Persson, L., 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, **Springer Science+Business Media,Inc.**, 253 .

Ngoc, N., Vinh, N. and Hien, P., 2009. Integral inequalities of Hadamard type for r-convex functions, **International Mathematical Forum**, 4(35), 1723-1728.

Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces **I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy.**, 9, 157-162.

Özdemir, M., 2003. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means. **Applied Mathematics and Computation**, 138, 425-434.

Özdemir, M., Akdemir, A. and Set, E., 2011. On (h,m)-convexity and Hadamard-type inequalities. **arXiv:1103.6163v1 [math.CA]** 31 Mar 20.

Özdemir, M., Avcı, M. and Set, E., 2010. On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m-convexity. **Appl. Math. Lett.**, 23, 1065-1070.

Pachpatte, B., 2003. On some inequalities for convex functions, **RGMIA Res. Rep. Coll.**, 6(1), 1--9.

Pachpatte, B., 2004. A note on integral inequalities involving two log-convex functions. **Mathematical Inequalities & Applications**, 7(4), 511-515.

Pachpatte, B., 2005. Mathematical Inequalities, **Volume 67, Elsevier B.V.**, 606.

Pachpatte, B., 2005b. Mathematical Inequalities. **Elsevier B.V.**, 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.

Park, J., 2010. Hermite-Hadamard-type inequalıtıes for real α-star s-convex mappings, **J. Appl. Math. & Informatics**, 28, No. 5 - 6, pp. 1507-1518.

Pearce, C. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, **Appl. Math. Lett.**, 13(2), 51-55.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y., 1991. Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications**, Academic Press**, New York.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications**, Academic Press**, Inc.

Roberts, A. and Varberg, D., 1973. Convex Functions, **Academic Press**, 300pp, New York.

Sarıkaya, M. and Aktan, N., 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications. **Mathematical and Computer Modelling**, 54, 2175-2182.

Sarıkaya, M., Sağlam, A. and Yıldırım, H., 2012. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex. **International Journal of Open Problems in Computer Sciences and Mathematics(IJOPCM)**, 5(3).

Sarıkaya, M., Set, E. and Özdemir, M., 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard's type, **submitted**.

Sarıkaya, M., Set, E. and Özdemir M., 2010. On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions. **Acta Math. Univ. Comenianae**, Vol. LXXIX(2), 265-272.

Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. **Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi**, Erzurum.

Set, E., Özdemir, M. and Dragomir, S., 2010. On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions, **Journal of Inequalities and Applications, Article ID** 148102, 9pp.

Thomas, B., Finney, R., 1992. Calculus, **Addison-Wesley Pub. Comp. 11. Edt.**

Toader, G., 1984. Some Generalisations of the Convexity, **Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca**, 329-338, Romanya.

Toader, G., 1988. On a generalization of the convexity, **Mathematica**, 30(53), 83-87.

Tunç, M., 2010. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları, **Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi**, Erzurum.

Tunç, M. and Şanal, Ü., 2015. Some perturbed trapezoid inequalities for convex and s-convex functions and applications, **preprint**,

Tunç, M., Göv, E. and Şanal, Ü., 2015. On tgs-convex function and their inequalities, **submitted**.

Varošanec, S., 2007. On h-convexity, **J. Math. Anal. and Appl.**, 326, 303-311.

Wright, E., 1954. An inequality for convex functions, **Amer. Math. Monthly**, 61, 620-622.

Xi, B. and Qi, F., 2012. Some Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions with Applications to Means, **Journal of Function Spaces and Appl., Volume, Article ID** 980438, 14 p., doi:10.1155/2012/980438.

Yang, G., Hwang, D. and Tseng, K., 2004. Some inequalities for differentiable convex and concave mappings, **Comput. Math. Appl.**, 47 207-216

Yıldız, Ç., 2011. Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları, **Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi**, Erzurum.

Young, W., 1912. On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series, **Proc. Roy. Soc. London** A 87, 225-229.

Zhang, T., Ji, A. and Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions, **Abstract and Applied Analysis**, doi:10.1155/2012/560586.

# ÖZGEÇMİŞ

Yazar, 1988 yılında Hatay'da doğdu. 2002 yılında Gaziantep Mahmut Hümayun Özhelvacı İlköğretim Okulu'nda, 2005 yılında Gaziantep Abdülkadir Konukoğlu Lisesi'ni okul birinciliği ile tamamladı. Erzurum Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2005 yılında kazandı. Üniversiteden 2010 yılında (Lisansla birleştirilmiş tezsiz yüksek lisans derecesinde) mezun oldu.