T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$(\beta, \alpha; n, m)$-LOGARİTMİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Abdullah AÇIKEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
HAZİRAN-2016

T.C.

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$-LOGARİTMİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Abdullah AÇIKEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
HAZİRAN-2016

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(β, α, n, m)- LOGARİTMİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Abdullah AÇIKEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ danışmanlığında hazırlanan bu tez 02/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ
Başkan

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Okan ŞENER
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

02.06.2016

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Abdullah AÇIKEL

ÖZET

$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$-LOGARİTMİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Eşitsizlikler Teorisinde konvekslik ve logaritmik konvekslik kavramları önemli bir yer tutmaktadır. Bu tezde logaritmik konvekslik için yeni tanımlar yapılmıştır. Bu tanımların literatürde iyi bilinen ve henüz var olmayan logaritmik konveks fonksiyon sınıflarını içerdiği gösterilmiştir. Bunun yardımıyla mevcut logaritmik konveks fonksiyon tanımı genelleştirilmiş ve bu genelleştirmelere bağlı olarak klasik integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizliklerin özel durumlarda literatürde mevcut olan çalışmaları desteklediği görülmüştür.

2016, 47 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, $(\beta,\alpha;n,m)$ -log konvekslik, (β,α) -log konvekslik, Hermite-Hadamard eşitsizliği.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES FOR $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$-LOGARITHMICALLY CONVEX FUNCTIONS

The concepts convexity and logarithmically convexity take an important place in Theory of Inequalities. In this thesis new definitions for logarithmically convexity are made. It is shown that these definitions include well-known logarithmically convex functions classes which don't exist in the literature yet. With the aid of this definitions, logarithmically convex function definition is generalized, due to this generalization classical integral inequalities are obtained. It is seen that these obtained inequalities support the studies in the literature for special cases.

2016, 47 Pages

Key Words: Convexity, $(\beta, \alpha; n, m)$ -log convexity, (β, α) -log convexity, Hermite-Hadamard inequality.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, eğitim hayatımın ilk basamaklarını oluşturan, bugüne kadar aldığım kararlarda yüreklendiren ve destekleyen taraf oldukları için, ayrıca duydukları sevgi güvenle bu günlere gelmemi sağlayan

Aileme;

Kendisiyle çalışma imkanı bulduğum için kendimi ayrıcalıklı hissettiren, takıldığım her noktada gece gündüz demeden büyük bir sabırla bana yardımcı olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam

Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ'a;

Tez jürimde olmayı kabul edip kıymetli mesailerini bizlerle paylaşan saygıdeğer hocalarım

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a ve Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ'a

Sonsuz teşekkürler…

İÇİNDEKİLER

ÖZET I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ V
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3
3. MATERYAL ve YÖNTEM 9
3.1. Logaritmik Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikleri 9
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 17
4.1. (β,α)-log konveks Fonksiyon Sınıfı 17
4.2. $(\beta,\alpha;n,m)$-log konveks Fonksiyon Sınıfı 25
5. SONUÇ ve ÖNERİLER 44
KAYNAKLAR 45
ÖZGEÇMİŞ 47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\frac{d^m}{dx^m}$	: $m.$ Mertebeden Türev
f'	: Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f'_+	: Fonksiyonun Birinci Mertebeden Sağ Türevi
f'_-	: Fonksiyonun Birinci Mertebeden Sol Türevi
f''	: Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
I	: $\mathbb{R}$ de Bir Aralık
I°	: I nın İçi
K_s^1	: Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	: m-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_{n,m}(b)$	: (n, m)-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	: (α, m)-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L_1^{\beta,\alpha}(I)$	: Birinci Anlamda (β, α)-log konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L_2^{\beta,\alpha}(I)$	: İkinci Anlamda (β, α)-log konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_1L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$	: Birinci Anlamda $(\beta, \alpha; n, m)$-log konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$	: İkinci Anlamda $(\beta, \alpha; n, m)$-log konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$P(I)$	: P-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_0$	: $\{0\}$ elemanı dışındaki Reel Sayılar Kümesi
$Q(I)$	: Godunova-Levin Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

1. GİRİŞ

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcının 19. yüzyılın sonlarına dayandığı görülmektedir. Günümüzde artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olan konvekslik terimine ilk olarak 1881 de Ch. Hermite (1822-1901), Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır. Sonraki yıllarda literatürde konveks fonksiyonlar hakkındaki ilk sistemli çalışmanın J.L.W.V. Jensen tarafından 1905 ve 1906 yıllarında yapıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir.

Konvekslik matematiğin, fonksiyonel analiz, kompleks analiz, kısmi diferansiyel denklemler, olasılık teorisi, kodlama teorisi, cebirsel geometri vb. bir çok alanında önemli bir yer tutar. Niculescu ve Persson'a (2006) göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında bu kadar geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır: Birincisi, konveks fonksiyonun sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır ve ikincisi, her yerel minimumu aynı zamanda global minimumudur ayrıca kesin konveks bir fonksiyonun en fazla bir minimumu vardır.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve matematik bir bakıma karşılaştırma olduğundan Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Matematiksel eşitsizliklerin amacı değeri tam olarak bilinmeyen fonksiyonları daha iyi bildiğimiz bazı fonksiyonlarla alttan ve üstten sınırlamak veya doğrudan doğruya bu fonksiyonlara sayısal sınırlar belirlemektir. Böylece bu fonksiyonların istenilen noktalardaki yaklaşık değerlerinin bulunması sağlanır.

Matematiksel eşitsizlikler kabaca şu başlıklar altında sınıflandırılabilir: Konveksite eşitsizlikleri, yeniden düzenleme eşitsizlikleri, öz fonksiyon eşitsizlikleri, Sobolev ve spektral eşitsizlikler, majorizasyon eşitsizlikleri, saçılma eşitsizlikleri ve korelasyon eşitsizlikleri. Literatürde bir çok farklı başlık altında eşitsizlikler olmakla birlikte (Sobolev ve spektral eşitsizlikler, saçılma eşitsizlikleri, öz fonksiyon eşitsizlikleri, majorizasyon eşitsizlikleri, konveksite eşitsizlikleri, korelasyon eşitsizlikleri, yeniden düzenleme eşitsizlikleri) bu tezde esas olarak, konveksite eşitsizlikleri hakkında önemli bilgiler verilecek ve üzerinde durulacaktır.

Hermite-Hadamard eşitsizliği, geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonların ilk temel sonucudur. Matematikte, bildiğimiz ve yaygın kullanıma sahip olan eşitsizliklerin çoğu aslında Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir sonucu olan Jensen eşitsizliğinin değişik konveks fonksiyonlarla kullanılmasından elde edilir. Bu durum, konvekslik kavramının ve Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ne kadar temel kavramlar olduğunu işaret eder. Örneğin, aritmetik-geometrik ortalama, Ky-Fan eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği vb. Jensen eşitsizliğinden elde edilebilir. Aynı zamanda Jensen eşitsizliğinin uygulamalarına bilgi (information) teorisinde rastlamak mümkündür.

Günümüzde bir çok matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (log-konveks, (α, m)-konveks, quasi-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin sınıfı, s -konveks fonksiyonlar, preinvex vb.) ve özel ortalamalar (aritmetik, geometrik, harmonik, identric, Stolarsky ortalamalar vb.) için Hermite-Hadamard eşitsizliğini uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

"Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" isimli doktora tezinde Özkan U. M. (2007); bir ve iki boyutlu Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliği elde edilmiştir. Daha sonra Minkowski, Young, Hölder ve Jensen eşitsizlikleri ilk olarak nabla-türev, daha sonra diamond-alfa-türev kullanılarak elde edilmiştir.

Bu tezin amacı, bilinen logaritmik konvekslik sınıflarının birçoğunu içine alan, henüz tanımlanmamış çoğu sınıfın da oluşmasına katkı sağlayan genelleştirilmiş yeni logaritmik konvekslik tanımları oluşturmaktır. Bu yeni tanımların yardımıyla klasik analizde integral eşitsizlikleri elde etmektir. Elde edilen eşitsizliklerin özel seçilen değerler ile literatürdeki mevcut çalışmalara dönüşeceğini göstermektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in S$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, f x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.2. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan $\forall\, x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, f, S de düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.3. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{M}|x - y|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor demektir.

Sonuç 2.1. f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir.

Tanım 2.4. (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan bir alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.5. (İntegrallenebilirlik): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a, b]$ nin $\mathrm{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için

$m_k(f) = m(f, [x_{k-1}, x_k]) = inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$,

$M_k(f) = M(f, [x_{k-1}, x_k]) = sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ $\;k = 1, 2, .. n$

olsun. $A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta x_k$ ve $\text{Ü}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta x_k$ toplamlarına sırası ile, f fonksiyonunun $[a, b]$ nin P parçalanmasına göre alt Darboux toplamı ve üst Darboux toplamı adı verilir. ξ_k, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından alınan herhangi bir nokta olmak üzere $R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ toplamına f fonksiyonunun $[a, b]$ nin P parçalanmasına göre Riemann toplamı (veya Riemann integral toplamı) adı verilir.

Teorem 2.1. (Belirli İntegrallerin Varlığı): Bir sürekli fonksiyonun integrali alınabilir. Yani bir f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ise, $[a, b]$ aralığında belirli integrali vardır.

Tanım 2.6. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x_1, x_2 \in A$ keyfi olmak üzere

$$D = \{z \in L: z = tx_1 + (1-t)x_2, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z = tx_1 + (1-t)x_2$ eşitliğinde $x_1$ve x_2 nin katsayıları için $t + (1-t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, (1-t)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak D kümesi uç noktaları x_1 ve x_2 olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir. Bunların tersine eğer bir küme konveks değil ise konkav küme olarak ifade edilir.

Tanım 2.7. (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir. I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren üzerindeki doğru parçasının f nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır.

Teorem 2.2. (İntegraller için Ortalama Değer Teoremi): f fonksiyonu $[a,b]$ integrali alınabilirse, $[a,b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri

$$ort(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ile verilir.

Teorem 2.3. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu önemli eşitsizlik, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav(konkav olduğu zaman her iki eşitsizlik yön değiştirir) veya konveks olmasına göre değişiklik gösterir. Tez boyunca Hermite-Hadamard Eşitsizliği kısaltılarak H.H. eşitsizliği olarak kullanılacaktır.

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.8. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $\forall\, x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

oluyorsa f ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfından fonksiyon denir (Godunova ve Levin, 1985).

Godunova ve Levin aynı zamanda bütün negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonların bu sınıfa ait olduğunu göstermişlerdir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova ve Levin, 1985).

Tanım 2.9. (log-konveks Fonksiyonlar Sınıfı): $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye logaritmik konveks fonksiyon ya da çarpımsal konveks fonksiyon denir (Pečarić, ve Ark., 1992).

Tanım 2.10. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$ oluyorsa f ye P fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfından fonksiyon denir (Dragomir ve ark., 1995).

Bu tanımlara ek olarak Dragomir, Godunova-Levin fonksiyonlarının bir genelleştirilmesi olarak ikinci anlamda s-Godunova-Levin fonksiyonunu tanımlamıştır. Sonrasında Noor ve ark., birinci anlamda s -Godunova-Levin fonksiyonunu tanıtmışlardır. Tanımlar burada ifade edilmeyecektir, ayrıntılar okuyucuya bırakılmıştır, konu ile ilgili olarak Dragomir, 2014 ve Noor ve ark., 2014 çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 2.11. $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon, $s \in (0,1]$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olsun. Her $x, y \in I$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq [f(x)^{\alpha^s}][f(y)^{\beta^s}]$$

eşitsizliğini sağlayan f ye birinci anlamda s-log konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlikte $s = 1$ alınması durumunda aynı kümede standart logaritmik konveks fonksiyona dönüştüğü açıkça görülür (Akdemir ve Tunç, 2012).

Tanım 2.12. (m-log konveks Fonksiyonlar Sınıfı): $f: [0, y] \to (0, \infty)$ bir fonksiyon, $m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Her $x, y \in [0, y]$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq [f(x)^t][f(y)^{m(1-t)}]$$

eşitsizliğini sağlayan f ye m-log konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlikte $m = 1$ alınması durumunda aynı kümede standart logaritmik konveks fonksiyona dönüştüğü açıkça görülür (Bai ve Ark., 2013).

Tanım 2.13. ((α,m)-log konveks Fonksiyonlar Sınıfı): $f: [0, y] \to (0, \infty)$ bir fonksiyon, $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Her $x, y \in [0, y]$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq [f(x)^{t^\alpha}][f(y)^{m(1-t^\alpha)}]$$

eşitsizliğini sağlayan f ye (α, m)-log konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlikte $\alpha = 1$ alınması durumunda aynı kümede m-log konveks fonksiyona dönüştüğü açıkça görülür (Bai ve Ark., 2013).

Tanım 2.14. $f : I \subset \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Her $x, y \in I$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq [f(x)^{t^s}][f(y)^{(1-t)^s}]$$

eşitsizliğini sağlayan f ye ikinci anlamda s-log konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlikte $s = 1$ alınması durumunda aynı kümede standart logaritmik konveks fonksiyona dönüşeceği açıktır (Xi ve Qi, 2015).

Teorem 2.4. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n −lisi olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

i. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

ii. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 2.5. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-Mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.2. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Reel ve kompleks sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.6. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$|x + y| \leq |x| + |y|,$

$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$

$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

ve tümevarım metoduyla

$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 2.7. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

a, b gibi pozitif iki reel sayı için aşağıda bazı ortalamalar verilecektir.

i. Aritmetik ortalama:

$A = A(a, b) = \frac{a+b}{2},$

ii. Geometrik ortalama:

$G = G(a, b) = \sqrt{ab},$

iii. Harmonik ortalama:

$H = H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$,

iv. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{b-a}{lnb-lna}, & a \neq b \end{cases},$$

v. Identric ortalama:

$$I = I(a,b) = \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases},$$

vi. p- logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \end{cases},$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_o = I,\ L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} & , \quad r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{lnx - lny} & , \quad r = 0, x \neq y \\ xy\frac{lnx - lny}{x-y} & , \quad x = y \\ x & , \quad x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Logaritmik Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikleri

Genel anlamda farklı türden log-konvex fonksiyonlar için literatürde var olan birkaç çalışma aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.1. $f: I \to [0, \infty)$ bir logaritmik konveks fonksiyon ve $a, b \in I,\ a < b$ olsun. Bu durumda

$$f(A(a,b)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G\big(f(x), f(a+b-x)\big)dx \leq G(f(a), f(b))$$

dir (Dragomir ve Mond, 1998).

Teorem 3.1.2. f, I üzerinde $f: I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olacak şekilde bir logaritmik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b lnf(x)dx\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G\big(f(x), f(a+b-x)\big)dx$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq L(f(a), f(b))$$

dır. p, q pozitif reel sayı olmak üzere, $L(p,q)$ nun logaritmik ortalaması,

$$L(p,q) = \frac{p-q}{lnp - lnq}, \text{ p≠q ve } L(p,p) = p$$

dir (Dragomir ve Mond, 1998).

Teorem 3.1.3. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to (0, \infty)$, I üzerinde diferensiyellenebilir logaritmik konveks fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\geq L\left(exp\left[\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(\frac{b-a}{2}\right)\right], exp\left[-\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]\right) \geq 1$$

dir (Dragomir ve Pearce, 2002).

Teorem 3.1.4. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferensiyellenebilir ve log-konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\frac{f(a)+f(b)}{2}}{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx} \geq 1+log\left[\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b f(x)exp\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right]dx}\right]$$

$$\geq 1+log\left[\frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right] \geq 1$$

eşitsizliği vardır (Dragomir ve Pearce, 2002).

Teorem 3.1.5. $f,g,h:[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonları log-konveks olsun. Bu durumda

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x)g(x)+g(x)h(x)+h(x)f(x)]\,dx$$

$$\leq [f(a)f(b)]L(f(a)f(b)) + [g(a)g(b)]L(g(a)g(b)) + [h(a)h(b)]L(h(a)h(b))$$

ve

$$\frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)h(x)[f(x)+g(x)+h(x)]\,dx$$

$$\leq [f(a)+f(b)][f^2(a),f^2(b)]L(f(a),f(b))$$

$$+[g(a)+g(b)][g^2(a),g^2(b)]L(g(a),g(b))$$

$$+[h(a)+h(b)][h^2(a),h^2(b)]L(h(a),h(b))$$

eşitsizlikleri vardır (Özdemir ve Ark., 2010).

Teorem 3.1.6. $f:I\in\mathbb{R}_0\to\mathbb{R}_+$ monoton azalmayan ve birinci anlamda bir s-log konveks bir fonksiyon, $s\in(0,1]$ ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G\big(f(x),f(a+b-x)\big)dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $G(p,q)=\sqrt{pq}$ p ve q pozitif reel sayıları için geometrik anlamı ifade etmektedir (Akdemir ve Tunç, 2012).

Teorem 3.1.7. $f:I\subset\mathbb{R}_0\to\mathbb{R}_+$ birinci anlamda s-log konveks bir fonksiyon, $s\in(0,1]$ ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq K(s,k(\mu))$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$\mu(u,v)=[f(a)]^u[f(b)]^{-v},\ \ u,v>0,$

$$k(\mu)=\begin{cases}1, & \mu=1,\\ \dfrac{\mu-1}{ln\mu}, & \mu\neq 1,\end{cases}$$

ve

$$K\big(s,k(\mu)\big)=[f(b)]^{s}k(\mu(s,s)), \qquad f(a),f(b)\leq 1.$$

dir (Akdemir ve Tunç, 2012).

Lemma 3.1.1. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ olmak üzere I° da diferensiyellenebilir bir fonksiyonu verilsin. Eğer $f'\in L_1([a,b])$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f(a)$$

$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[(1+t)f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+tf'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right]dt$$

ve

$$f(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[(1-t)f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+(2-t)f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right]dt$$

eşitlikleri sağlanır (Xi ve Qi, 2015).

Teorem 3.1.8. $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° da diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olmak üzere; eğer $q\geq 1$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s-log konveks fonksiyon ise $s\in(0,1]$ için

$$\left|f(a)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left\{3^{\frac{q-1}{q}}[L(\mu,q;F_1]^{\frac{1}{q}}+\left[L\left(\frac{1}{q},q;F_2\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$F_1(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{lnu}\left(2u-1-\dfrac{u-1}{lnu}\right), & u\neq 1;\\ \dfrac{3}{2}, & u=1;\end{cases}$$

$$F_2(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{lnu}\left(\dfrac{u-1}{lnu}-1\right), & u\neq 1;\\ \dfrac{1}{2}, & u=1;\end{cases}$$

$$L(\mu,q;\ F_i(\mu)=\begin{cases}|f'(a)f'(b)|^{\frac{sq}{2}}F_i(\mu), & 0<|f'(a)|,|f'(b)|\le 1;\\ |f'(a)f'(b)|^{\left(1-\frac{s}{2}\right)q}F_i(\mu), & 1<|f'(a)|,|f'(b)|;\\ |f'(a)|^{\frac{sq}{2}}f'(b)^{\left(1-\frac{s}{2}\right)q}F_i(\mu), & 0<|f'(a)|\le 1<|f'(b)|;\\ |f'(a)|^{\left(1-\frac{s}{2}\right)q}f'(b)^{\frac{sq}{2}}F_i(\mu), & 0<|f'(b)|\le 1<|f'(a)|;\end{cases}$$

$i=1,2$, ve

$$\mu=\left|\frac{f'(a)}{f'(b)}\right|^{\frac{sq}{2}}$$

dir (Xi ve Qi, 2015).

Teorem 3.1.9. $f: I\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I°da diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olmak üzere; eğer $q\ge 1$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s-log konveks fonksiyon ise $s\in(0,1]$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left\{\left[\mu L\left(\frac{1}{\mu},q;F_2\right)\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{L(\mu,q,F_2)}{\mu}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

dir. Burada $F_2(u)$, $L(\mu,q;F)$ ve μ önceki teoremde tanımlanmıştı (Xi ve Qi, 2015).

Tanım 3.1.1. $f:[a,b]\ \to(0,\infty)$ tanımlı f fonksiyonu her $x,y\in[0,b]$, α∈ $(0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y\le f(y)\left[\frac{f(x)}{f(y)}\right]^{t^{\alpha}}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa α-logaritmik konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Karabayir ve Ark., 2015).

Teorem 3.1.10. $f: I\to\mathbb{R}$ tanımlı olduğu aralıkta iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $0\le a<b<\infty$ olmak üzere $f''\in L(a,b)$ olsun. $(\alpha,\mathrm{m})\in(0,1]^2$ olmak üzere eğer $|f''(x)|$ fonksiyonu $[0,\frac{b}{m}]$ aralığında (α,m)-log konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\le\frac{(b-a)^2}{2}\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m\left(\frac{\varkappa(\alpha,\alpha)+1}{[ln\varkappa(\alpha,\alpha)]^2}+\frac{2(1-\varkappa(\alpha,\alpha))}{[ln\varkappa(\alpha,\alpha)]^3}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\varkappa(u,v)=|f''(a)|^u\left|f''(\tfrac{b}{m})\right|^{-mv},\ u,v\ge 0$$

dır (Karabayir ve Ark., 2015).

Sonuç 3.1.1. $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı olduğu aralıkta iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere $f'' \in L(a,b)$ olsun. $m \in (0,1]$ olmak üzere eğer $|f''(x)|$ fonksiyonu $[0, \frac{b}{m}]$ aralığında m-log konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m \left(\frac{\varkappa+1}{[ln\varkappa]^2} + \frac{2(1-\varkappa)}{[ln\varkappa]^3}\right)$$

dir (Karabayir ve Ark., 2015).

Sonuç 3.1.2. $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı olduğu aralıkta iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere $f'' \in L(a,b)$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere eğer $|f''(x)|$ fonksiyonu $[0, b]$ aralığında α-log konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}|f''(b)|\left(\frac{\varkappa(\alpha,\alpha)+1}{[ln\varkappa(\alpha,\alpha)]^2} + \frac{2(1-\varkappa(\alpha,\alpha))}{[ln\varkappa(\alpha,\alpha)]^3}\right)$$

dir (Karabayir ve Ark., 2015).

Lemma 3.1.2. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ olmak şartıyla $a, b \in I$ olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Lemma 3.1.3. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ olmak şartıyla $a, b \in I$ olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$= (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

eşitliği sağlanır (Bai ve Ark., 2013).

Bai ve arkadaşları Lemma 3.1.2. ve Lemma 3.1.3. ü kullanarak (α, m)-log konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Teorem 3.1.11. $[0,\infty) \subset I$, $f: I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için eğer $|f'(x)|$, $[0, \frac{b}{m}]$ aralığında (α, m)-log konveks fonksiyon ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)^m\right|[E_1(\alpha,m,q)]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $q \ge 1$ seçilmiştir. Ayrıca $u, v > 0$ ve $u \ne 1$ için

$$\mu = \frac{|f'(a)|}{\left|f'(\frac{b}{m})\right|^m}, \quad E_1(\alpha,m,q) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad \mu = 1 \\ F_1(\mu,\alpha q) & , \quad \mu < 1 \\ \mu^{(1-\alpha)q}F_1(\mu,\alpha q) & , \quad \mu > 1 \end{cases}$$

$$F_1(u,v) = \frac{1}{v^2\ln^2 u}\left[v(u^v-1)lnu - 2\left(u^{\frac{v}{2}}-1\right)^2\right]$$

dir (Bai ve Ark., 2013).

Sonuç 3.1.3. . $[0,\infty) \subset I$, $f: I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $0 \le a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. $m \in (0,1]$ için eğer $|f'(x)|$, $[0,\frac{b}{m}]$ aralığında m-log konveks fonksiyon ise;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)^m\right|[E_1(1,m,q)]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $q \ge 1$ seçilmiştir (Bai ve Ark., 2013).

Teorem 3.1.12. $[0,\infty) \subset I$, $f: I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $0 \le a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için eğer $|f'(x)|$, $[0,\frac{b}{m}]$ aralığında (α, m)-log konveks fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{3}{q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)^m\right|E_2(\alpha,m,q)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $q \ge 1$ seçilmiştir. Ayrıca $u, v > 0$ ve $u \ne 1$ için

$$E_2(\alpha,m,q) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}} & , \quad \mu = 1 \\ [F_2(\mu,\alpha q)]^{1/q} + [F_3(\mu,\alpha q)]^{1/q} & , \quad \mu < 1 \\ \mu^{1-\alpha}\{[F_2(\mu,\alpha q)]^{1/q} + [F_3(\mu,\alpha q)]^{1/q}\} & , \quad \mu > 1 \end{cases}$$

burada

$$F_2(u,v) = \frac{1}{v^2\ln^2 u}\left[\frac{v}{2}u^{\frac{v}{2}}lnu - u^{\frac{v}{2}} + 1\right] \quad \text{ve} \quad F_3(u,v) = \frac{1}{v^2\ln^2 u}\left[u^v - \frac{v}{2}u^{\frac{v}{2}}lnu - u^{\frac{v}{2}}\right]$$

dir (Bai ve Ark., 2013).

Sonuç 3.1.4. $[0,\infty) \subset I$, $f: I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $0 \le a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. $m \in (0,1]$ için eğer $|f'(x)|$, $[0,\frac{b}{m}]$ aralığında m-log konveks fonksiyon ise

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{3}{q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)^m\right| E_2(1,m,q)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $q \geq 1$ seçilmiştir (Bai ve Ark., 2013).

Teorem 3.1.13. $f, g: [0,\infty) \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon, $0 \leq a < b < \infty$ için $f, g \in L([a,b])$ olsun. $(\alpha, m_i) \in (0,1]^2$ ve $i = 1,2$, için eğer $[0, \frac{b}{m_i}]$ aralığında $f(x)$, (α, m_1) -log konveks fonksiyon ve $g(x)$, (α, m_2) -log konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2} E_3(\alpha)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\eta = f(a)g(a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{-m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{-m_2} \quad \text{ve} \quad E_3(\alpha) = \begin{cases} 1\,, & \eta = 1 \\ \frac{\eta^{\alpha}-1}{\alpha\ln\eta}, & 0 < \eta < 1 \\ \frac{\eta^{1-\alpha}(\eta^{\alpha}-1)}{\alpha\ln\eta}, & \eta > 1 \end{cases}$$

dir (Bai ve Ark., 2013).

Sonuç 3.1.5. $f, g: [0,\infty) \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon, $0 \leq a < b < \infty$ için $f.g \in L([a,b])$ olsun. $(\alpha, m_i) \in (0,1]^2$ ve $i = 1,2$ için eğer $[0, \frac{b}{m_i}]$ aralığında $f(x)$, m_1-log konveks fonksiyon ve g(x), m_2-log konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2} E_3(1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada kullanılan E_3 önceki teoremde tanımlanmıştı (Bai ve Ark., 2013).

Sonuç 3.1.6. $f, g: [0,\infty) \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon, $0 \leq a < b < \infty$ için $f.g \in L([a,b])$ olsun. $(\alpha, m_i) \in (0,1]^2$ ve $i = 1,2$ için eğer $[0, \frac{b}{m_i}]$ aralığında $f(x)$ ve $g(x)$, (α, m)-log konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} E_3(\alpha)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada kullanılan E_3 önceki teoremde tanımlanmıştı (Bai ve Ark., 2013).

Sonuç 3.1.7. $f, g: [0, \infty) \to (0, \infty)$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon, $0 \leq a < b < \infty$ için $fg \in L([a, b])$ olsun. $(\alpha, m_i) \in (0,1]^2$ ve $i = 1,2$ için eğer $[0, \frac{b}{m_i}]$ aralığında $f(x)$ ve $g(x)$, (α, m)-log konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right]^m E_3(\alpha)$$

dir. Burada kullanılan E_3 önceki teoremde tanımlanmıştı (Bai ve Ark., 2013).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$-log Konveks Fonksiyon Sınıfı

Tanım 4.1.1. $f: I \subset \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon ve $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ olsun. $\forall\, x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^{t^{\beta}}[f(y)]^{(1-t^{\alpha})}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye birinci anlamda (β, α)-log konveks fonksiyon denir. I üzerindeki tüm birinci anlamda (β, α)-log konveks fonksiyon sınıfı $L_1^{\beta,\alpha}(I)$ ile gösterilir.

Uyarı 4.1.1. Tanım 4.1.1. de,

i- $\beta = \alpha = 1$ seçilmesi durumunda standart logaritmik konveks fonksiyona,

ii- $\beta = \alpha = s$ seçilmesi durumunda ise birinci anlamda s-logaritmik konveks fonksiyona dönüştüğü açıkça görülmektedir.

Tanım 4.1.2. $f: I \subset \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon ve $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ olsun. $\forall\, x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^{t^{\beta}}[f(y)]^{(1-t)^{\alpha}}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye ikinci anlamda (β, α)-log konveks fonksiyon denir. I üzerindeki tüm ikinci anlamda (β, α)-log konveks fonksiyon sınıfı $L_2^{\beta,\alpha}(I)$ ile gösterilir.

Uyarı 4.1.2. Tanım 4.1.2. de,

i- $\beta = \alpha = 1$ seçilmesi durumunda standart logaritmik konveks fonksiyona,

ii- $\beta = \alpha = s$ seçilmesi durumunda ise ikinci anlamda s-logaritmik konveks fonksiyona dönüştüğü açıkça görülmektedir.

Tanım 4.1.3. $f : [0, b] = I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ olsun. $\forall\, a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^{\frac{1}{t^{\beta}}}[f(b)]^{\frac{1}{1-t^{\alpha}}}$$

koşulunu sağlayan f ye birinci anlamda (β, α)-Godunova-Levin-log konveks fonksiyonu denir. $(\beta, \alpha) \in \{(1,1), (s, s)\}$ için sırasıyla Godunova-Levin-log-konveks fonksiyon ve birinci anlamda s-Godunova-Levin-log-konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Tanım 4.1.4. $f : [0, b] = I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ olsun. $\forall\, a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^{\frac{1}{t^\beta}}[f(b)]^{\frac{1}{(1-t)^\alpha}}$$

koşulunu sağlayan f ye ikinci anlamda (β, α)-Godunova-Levin-log konveks fonksiyonu denir. $(\beta, \alpha) \in \{(1,1), (s, s)\}$ için sırasıyla Godunova-Levin-log-konveks fonksiyon ve ikinci anlamda s-Godunova-Levin-log-konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Lemma 4.1.1. Eğer $0 < \mu \leq 1 \leq \eta$ ve $0 < \alpha, s \leq 1$ ise $\mu^{\alpha^s} \leq \mu^{s\alpha}$ ve $\eta^{\alpha^s} \leq \eta^{\alpha s + 1 - s}$ eşitsizlikleri sağlanır (Bai, Qi ve Xi, 2013).

Lemma 4.1.2. $\forall t \in [0,1]$ için,

$$\int_0^1 |1-2t| k^t dt = \left[\frac{k-1}{\ln k} - 2\left(\frac{\sqrt{k}-1}{\ln k}\right)^2\right] = M(k; \beta, \alpha)$$

eşitliği sağlanır. Burada $k = \frac{|f'(a)|^\beta}{|f'(b)|^\alpha}$ dır.

Teorem 4.1.1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ I° de diferensiyellenebilir bir fonksiyon $a < b$ için $a, b \in I$, $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ için ikinci anlamda (β, α)-logaritmik konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \begin{cases} L\left([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\right) & , \quad 0 < f(a), f(b) \leq 1 \\ [f(b)]^{1-\alpha} L\left([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\right) & , \quad 0 < f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ [f(a)]^{1-\beta} L\left([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\right) & , \quad 0 \leq f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ [f(a)]^{1-\beta}[f(b)]^{1-\alpha} L\left([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\right) & , \quad 1 \leq f(a), f(b). \end{cases}$$

Burada L logaritmik ortalama olarak kullanılmıştır.

İspat. Eğer $f \in L_2^{\beta,\alpha}(I)$ ise $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^{t^\beta}[f(b)]^{(1-t)^\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $[0,1]$ aralığında integral alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \int_0^1 [f(a)]^{t^\beta}[f(b)]^{(1-t)^\alpha} dt$$

elde edilir. Burada Lemma 4.1.1. den,

i. $0 < f(a), f(b) \leq 1$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(b)]^\alpha \int_0^1 \left(\frac{[f(a)]^\beta}{[f(b)]^\alpha}\right)^t dt$$

$$= [f(b)]^{\alpha}\left[\frac{\frac{[f(a)]^{\beta}}{[f(b)]^{\alpha}}-1}{\ln\left(\frac{[f(a)]^{\beta}}{[f(b)]^{\alpha}}\right)}\right] = \frac{[f(a)]^{\beta}-[f(b)]^{\alpha}}{\ln[f(a)]^{\beta}-\ln[f(b)]^{\alpha}} = L\big([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\big).$$

ii. $0 < f(a) \leq 1 \leq f(b)$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(b)]\int_0^1 \left(\frac{[f(a)]^{\beta}}{[f(b)]^{\alpha}}\right)^t dt$$
$$= [f(b)]^{1-\alpha}L\big([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\big).$$

iii. $0 < f(b) \leq 1 \leq f(a)$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a)]^{1-\beta}[f(b)]^{\alpha}\int_0^1 \left(\frac{[f(a)]^{\beta}}{[f(b)]^{\alpha}}\right)^t dt$$
$$= [f(a)]^{1-\beta}L\big([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\big).$$

iv. $1 \leq f(a), f(b)$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a)]^{1-\beta}[f(b)]\quad\int_0^1 \left(\frac{[f(a)]^{\beta}}{[f(b)]^{\alpha}}\right)^t dt$$
$$= [f(a)]^{1-\beta}[f(b)]^{1-\alpha}L\big([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\big).$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu dört eşitsizliğin elde edilmesi ile ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.3. Teorem 4.1.1. de $\beta = \alpha = 1$ alınması durumunda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L([f(a)],[f(b)]).$$

eşitsizliğine dönüştüğü görülür. $\beta = \alpha = s$ seçilmesi durumunda ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$\leq \begin{cases} L([f(a)]^s,[f(b)]^s) & , \quad 0 < f(a), f(b) \leq 1 \\ [f(b)]^{1-s}L([f(a)]^s,[f(b)]^s) & , \quad 0 < f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ [f(a)]^{1-s}L([f(a)]^s,[f(b)]^s) & , \quad 0 \leq f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ [f(a)]^{1-s}[f(b)]^{1-s}L([f(a)]^s,[f(b)]^s) & , \quad 1 \leq f(a), f(b) \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ I°de diferensiyellenebilir bir fonksiyon $a < b$ için $a, b \in I$, $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ için $|f'| \in L_2^{\beta,\alpha}(I)$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \begin{cases} |f'(b)|^{\alpha} M(k;\beta,\alpha) & , \quad 0 < f'(a), f'(b) \leq 1 \\ |f'(b)| M(k;\beta,\alpha) & , \quad 0 < f'(a) \leq 1 \leq f'(b) \\ |f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)|^{\alpha} M(k;\beta,\alpha) & , \quad 0 \leq f'(b) \leq 1 \leq f'(a) \\ |f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)| M(k;\beta,\alpha) & , \quad 1 \leq f'(a), f'(b) \end{cases}$$

Burada $M(k;\beta,\alpha)$ ve k Lemma 4.1.2. de verilmiştir.

İspat. $|f'| \in L_2^{\beta,\alpha}(I)$, Lemma 4.1.1. ve Lemma 4.1.2. sırasıyla kullanılır ise

i. $0 < f'(a), f'(b) \leq 1$ için,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{t^{\beta}} |f'(b)|^{(1-t)^{\alpha}}\, dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{\beta t} |f'(b)|^{\alpha(1-t)}\, dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha} \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{|f'(a)|^{\beta}}{|f'(b)|^{\alpha}}\right]^t dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha} \int_0^1 |1-2t| k^t dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha} M(k;\beta,\alpha).$$

ii. $0 < f'(a) \leq 1 \leq f'(b)$ için,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{t^{\beta}} |f'(b)|^{(1-t)\alpha} dt$$

$$= \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{\beta t} |f'(b)|^{\alpha(1-t)+1-\alpha} dt$$

$$= \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{\beta t} |f'(b)|^{\alpha(1-t)+1-\alpha} dt$$

$$= |f'(b)| \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{|f'(a)|^{\beta}}{|f'(b)|^{\alpha}}\right]^t dt$$

$$= |f'(b)| M(k;\beta,\alpha).$$

iii. $0 \leq f'(b) \leq 1 \leq f'(a)$ için,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{t^{\beta}} |f'(b)|^{(1-t)^{\alpha}}\, dt$$

$$= \int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^{\beta t+1-\beta} |f'(b)|^{\alpha(1-t)}\, dt$$

$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha}\int_0^1 |1-2t|\left[\frac{|f'(a)|^{\beta}}{|f'(b)|^{\alpha}}\right]^t dt$

$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha}M(k;\beta,\alpha)$.

iv. Son olarak $1 \leq f'(a), f'(b)$ için,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t|f'(ta+(1-t)b)dt$$

$\leq \int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{t^{\beta}}|f'(b)|^{(1-t)\alpha}\,dt$

$\leq \int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{\beta t+1-\beta}|f'(b)|^{\alpha(1-t)+1-\alpha}dt$

$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|\int_0^1 |1-2t|\left[\frac{|f'(a)|^{\beta}}{|f'(b)|^{\alpha}}\right]^t dt$

$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|M(k;\beta,\alpha)$.

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.4. Yukarıdaki teoreminde

i. $\beta=\alpha=1$ alınması durumunda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq |f'(b)|M(k;1,1),$$

ii. $\beta=\alpha=s$ seçilmesi durumunda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \begin{cases} |f'(b)|^s M(k;s,s) & , \quad 0<f'(a),f'(b)\leq 1 \\ |f'(b)|M(k;s,s) & , \quad 0<f'(a)\leq 1\leq f'(b) \\ |f'(a)|^{1-s}|f'(b)|^s M(k;s,s) & , \quad 0\leq f'(b)\leq 1\leq f'(a) \\ |f'(a)|^{1-s}|f'(b)|M(k;s,s) & , \quad 1\leq f'(a),f'(b) \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada kullanılan $M(k;\beta,\alpha)$ Lemma 4.1.2. deki gibidir.

Teorem 4.1.3. Teorem 4.1.2. nin şartları altında eğer $|f'|^q \in L_2^{\beta,\alpha}(I)$, $(\beta,\alpha)\in(0,1]^2$, ayrıca $p,q>1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şartı ile aşağıda verilen eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}$$

$$\times\begin{cases}\left[L\left([f'(a)]^{\beta q},[f'(b)]^{\alpha q}\right)\right]^{1/q} & , \quad 0<f'(a),f'(b)\le 1\\ \left[|f'(b)|^{1-\alpha}L\left([f'(a)]^{\beta q},[f'(b)]^{\alpha q}\right)\right]^{1/q} & , \quad 0<f'(a)\le 1\le f'(b)\\ \left[|f'(a)|^{1-\beta}L\left([f'(a)]^{\beta q},[f'(b)]^{\alpha q}\right)\right]^{1/q} & , \quad 0\le f'(b)\le 1\le f'(a)\\ \left[|f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{1-\alpha}L\left([f'(a)]^{\beta q},[f'(b)]^{\alpha q}\right)\right]^{1/q} & , \quad 1\le f'(a),f'(b)\end{cases}$$

Burada kullanılan $M(k;\beta,\alpha)$ ve k, Lemma 4.1.2. de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 3.1.1. ve Hölder Eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_0^1|1-2t||f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$

$$\le\left(\int_0^1|1-2t|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

$$\le\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\int_0^1|f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt\right)^{1/q}$$

yazılır. Burada

i. $0<f'(a),f'(b)\le 1$ için,

$$\int_0^1|f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt\ \le\int_0^1|f'(a)|^{\beta qt}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)}\,dt$$

$$=|f'(b)|^{\alpha q}\int_0^1\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt=|f'(b)|^{\alpha q}\left[\frac{\frac{[f'(a)]^{\beta q}}{[f'(b)]^{\alpha q}}-1}{\ln\left(\frac{[f'(a)]^{\beta q}}{[f'(b)]^{\alpha q}}\right)}\right]$$

$$=\frac{[f'(a)]^{\beta q}-[f'(b)]^{\alpha q}}{\ln[f'(a)]^{\beta q}-\ln[f'(b)]^{\alpha q}}=L\left([f'(a)]^{\beta q},[f'(b)]^{\alpha q}\right).$$

ii. $0<f'(a)\le 1\le f'(b)$ için,

$$\int_0^1|f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt\ \le\int_0^1|f'(a)|^{\beta qt}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)+1-\alpha}\,dt$$

$$=|f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}\int_0^1\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt=|f'(b)|^{1-\alpha}\frac{[f'(a)]^{\beta q}-[f'(b)]^{\alpha q}}{\ln[f'(a)]^{\beta q}-\ln[f'(b)]^{\alpha q}}$$

$$=|f'(b)|^{1-\alpha}L\left([f'(a)]^{\beta q},[f'(b)]^{\alpha q}\right),$$

iii. $0\le f'(b)\le 1\le f'(a)$ için,

$$\int_0^1|f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt\ \le\int_0^1|f'(a)|^{\beta qt+1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)}\,dt$$

$$=|f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q}\int_0^1\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt$$

$= |f'(a)|^{1-\beta} \frac{[f'(a)]^{\beta q} - [f'(b)]^{\alpha q}}{\ln[f'(a)]^{\beta q} - \ln[f'(b)]^{\alpha q}}$

$= |f'(a)|^{1-\beta} L\left([f'(a)]^{\beta q}, [f'(b)]^{\alpha q}\right),$

iv. $1 \leq f'(a), f'(b)$ için,

$$\int_0^1 |f'(a)|^{qt^\beta} |f'(b)|^{q(1-t)^\alpha} \, dt \quad \leq \int_0^1 |f'(a)|^{\beta qt+1-\beta} |f'(b)|^{\alpha q(1-t)+1-\alpha} \, dt$$

$= |f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha} \int_0^1 \left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt$

$= |f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)|^{1-\alpha} \frac{[f'(a)]^{\beta q} - [f'(b)]^{\alpha q}}{\ln[f'(a)]^{\beta q} - \ln[f'(b)]^{\alpha q}}$

$= |f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)|^{1-\alpha} L\left([f'(a)]^{\beta q}, [f'(b)]^{\alpha q}\right)$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. Teorem 4.1.2. nin şartları altında eğer $q \geq 1$ için $|f'|^q \in L_2^{\beta,\alpha}(I)$ ve $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq$$

$$\frac{1}{2^{(q-1)/q}} \begin{cases} [|f'(b)|^{\alpha q} M(k^q; \beta q, \alpha q)]^{1/q} & , \quad 0 < f'(a), f'(b) \leq 1 \\ [|f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha} M(k^q; \beta q, \alpha q)]^{1/q} & , \quad 0 < f'(a) \leq 1 \leq f'(b) \\ \left[|f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)|^{\alpha q} M(k^q; \beta q, \alpha q)\right]^{1/q} & , \quad 0 \leq f'(b) \leq 1 \leq f'(a) \\ \left[|f'(a)|^{1-\beta} |f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha} M(k^q; \beta q, \alpha q)\right]^{1/q} & , \quad 1 \leq f'(a), f'(b) \end{cases}$$

eşitsizliği vardır. Burada kullanılan $M(k; \beta, \alpha)$ ve k Lemma 4.1.2. de tanımlanmıştır.

İspat. Tanım 4.1.2., Lemma 4.1.1, Lemma 4.1.2. kullanılır ve Hölder Eşitsizliği uygulanırsa, $q \geq 1 \; için$

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)| \, dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 |1-2t| \, dt\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{2^{\frac{q-1}{q}}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{qt^\beta} |f'(b)|^{q(1-t)^\alpha} \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır. Bu aşamadan sonra

i. $0 < f'(a), f'(b) \leq 1$ için

$$\int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt \ \leq \int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{\beta qt}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)}\ dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha q}\int_0^1 |1-2t|\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha q}\int_0^1 |1-2t|k^{qt}\,dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha q}M(k^q;\beta q,\alpha q).$$

ii. $0 < f'(a) \leq 1 \leq f'(b)$ için

$$\int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt \ \leq \int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{\beta qt}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)+1-\alpha}\ dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}\int_0^1 |1-2t|\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}\int_0^1 |1-2t|k^{qt}\,dt$$

$$= |f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}M(k^q;\beta q,\alpha q).$$

iii. $0 \leq f'(b) \leq 1 \leq f'(a)$ için

$$\int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt \ \leq \int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{\beta qt+1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)}\ dt$$

$$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q}\int_0^1 |1-2t|\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt$$

$$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q}\int_0^1 |1-2t|k^{qt}\,dt$$

$$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q}M(k^q;\beta q,\alpha q).$$

iv. $1 \leq f'(a), f'(b)$ için

$$\int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{qt^\beta}|f'(b)|^{q(1-t)^\alpha}\,dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{\beta qt+1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q(1-t)+1-\alpha}\ dt$$

$$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}\int_0^1 |1-2t|\left[\frac{|f'(a)|^{\beta q}}{|f'(b)|^{\alpha q}}\right]^t dt$$

$$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}\int_0^1 |1-2t|k^{qt}\,dt$$

$$= |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha q+1-\alpha}M(k^q;\beta q,\alpha q),$$

elde edilir ve istenilen sonuca ulaşılır.

4.2. $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$-log Konveks Fonksiyon Sınıfı

Tanım 4.2.1. $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n,m) \in [0,1]^2$ olsun. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(ntx + m(1-t)y) \leq [f(x)]^{nt^{\beta}}[f(y)]^{m(1-t^{\alpha})}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye birinci anlamda $(\beta,\alpha;n,m)$-log konveks fonksiyon denir. I üzerindeki tüm birinci anlamda $(\beta,\alpha;n,m)$-log konveks fonksiyon sınıfı ${}_1L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ile gösterilir.

Uyarı 4.2.1. Tanım 4.2.1. de

$\beta = \alpha = n = m = 1$ için standart logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha = s, n = m = 1$ için birinci anlamda s-logaritmik konveks fonksiyon,

$n = m = 1$ için birinci anlamda (β,α)-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha = n = 1$ için birinci anlamda m-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha, n = 1$ için ise birinci anlamda (α,m)-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha, m = 1$ için birinci anlamda (α,n)-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha = 1$ için (n,m)-logaritmik konveks fonksiyona dönüştüğü görülmektedir.

Tanım 4.2.2. $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n,m) \in [0,1]^2$ olsun. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(ntx + m(1-t)y) \leq [f(x)]^{nt^{\beta}}[f(y)]^{m(1-t)^{\alpha}}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye ikinci anlamda $(\beta,\alpha;n,m)$-log konveks fonksiyon denir. I üzerindeki tüm ikinci anlamda $(\beta,\alpha;n,m)$-log konveks fonksiyon sınıfı ${}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ile gösterilir.

Uyarı 4.2.2. Yapılan tanımda,

$\beta = \alpha = n = m = 1$ için standart logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha = s, n = m = 1$ için ikinci anlamda s-logaritmik konveks fonksiyon,

$n = m = 1$ için ikinci anlamda (β,α)-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha = n = 1$ için ikinci anlamda m-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha, n = 1$ için ikinci anlamda (α,m)-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha, m = 1$ için ikinci anlamda (α,n)-logaritmik konveks fonksiyon,

$\beta = \alpha = 1$ için (n,m)-logaritmik konveks fonksiyona dönüştüğü görülmektedir.

Lemma 4.2.1. $t \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 |1-2t| k^t \, dt = \frac{k-1}{\ln k} - 2\left(\frac{\sqrt{k}-1}{\ln k}\right)^2 = M(k;\beta,\alpha;n,m)$$

$$\int_0^1 t k^t \, dt = \frac{\sqrt{k}}{2\ln k} - \frac{\sqrt{k}-1}{(\ln k)^2} = N(k;\beta,\alpha;n,m)$$

$$\int_0^1 (1-t) k^t \, dt = \frac{k-\sqrt{k}}{(\ln k)^2} - \frac{\sqrt{k}}{2\ln k} = P(k;\beta,\alpha;n,m)$$

$$\int_0^{1/2} t k^t dt + \int_{1/2}^1 (1-t) k^t dt = \left(\frac{\sqrt{k}-1}{\ln k}\right)^2 = A(k;\beta,\alpha;n,m)$$

dir. Burada $k = \frac{|f'(a/n)|^{n\beta}}{|f'(b/m)|^{m\alpha}}$ olarak alınmıştır.

İspat. Lemmanın ispatı kısmi integrasyon yardımıyla kolayca görülmektedir.

Tanım 4.2.3. $f: [0,b] = I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n,m) \in [0,1]^2$ olsun. $a,b \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(nta + m(1-t)b) \le [f(a)]^{\frac{n}{t^\beta}} [f(b)]^{\frac{m}{1-t^\alpha}}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye birinci anlamda $(\beta,\alpha;n,m)$-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon denir.

Uyarı 4.2.3. $(\beta,\alpha;n,m) \in \{(1,1;1,1),(s,s;1,1),(\beta,\alpha;1,1),(\beta,\beta;n,m)\}$ değerleri için sırasıyla, Godunova-Levin-log konveks fonksiyon, birinci anlamda s-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon, birinci anlamda (β,α)-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon, birinci anlamda $(\beta;\mathrm{n},\mathrm{m})$-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon elde edilir.

Tanım 4.2.4. $f: [0,b] = I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n,m) \in [0,1]^2$ olsun. $a,b \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(nta + m(1-t)b) \le [f(a)]^{\frac{n}{t^\beta}} [f(b)]^{\frac{m}{(1-t)^\alpha}}$$

eşitsizliğini sağlayan f ye ikinci anlamda $(\beta,\alpha;n,m)$-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon denir.

Uyarı 4.2.4. $(\beta,\alpha;n,m) \in \{(1,1;1,1),(s,s;1,1),(\beta,\alpha;1,1),(\beta,\beta;n,m)\}$ değerleri için sırasıyla, Godunova-Levin-log konveks fonksiyon, ikinci anlamda s-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon, ikinci anlamda (β,α)-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon, ikinci anlamda $(\beta;\mathrm{n},\mathrm{m})$-Godunova-Levin-log konveks fonksiyon elde edilir.

Teorem 4.2.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon, $a < b$ için $a, b \in I$, $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n,m) \in (0,1]^2$ için $f \in {}_1L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \begin{cases} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 0 < f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \\ L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 0 < f\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{b}{m}\right) \\ \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 0 \leq f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{a}{n}\right) \\ \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 1 \leq f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f \in {}_1L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{nt^{\beta}} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-t^{\alpha})}$$

yazılır. Daha sonra Lemma 4.1.1. den

i. $0 < f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^m \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^m \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} \left[\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}{\ln\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \ln\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right).$$

ii. $0 < f\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right).$$

iii. $0 \le f\left(\frac{b}{m}\right) \le 1 \le f\left(\frac{a}{n}\right)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right).$$

iv. $1 \le f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right).$$

Bu eşitsizliklerin kombinasyonundan ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.2.5. Teorem 4.2.1. de

i. $\beta = \alpha = n = m = 1$ seçilmesi durumunda log-konveks fonksiyon için

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L\big(f(a), f(b)\big),$

ii. $\beta = \alpha = s$, $n = m = 1$ seçilirse birinci anlamda s-log konveks fonksiyon için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \begin{cases} [f(b)]^{1-s}L([f(a)]^s, [f(b)]^s) & , \quad 0 < f(a), f(b) \leq 1 \\ L([f(a)]^s, [f(b)]^s) & , \quad 0 < f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ [f(a)]^{1-s}[f(b)]^{1-s}L([f(a)]^s, [f(b)]^s) & , \quad 0 \leq f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ [f(a)]^{(1-s)}L([f(a)]^s, [f(b)]^s) & , \quad 1 \leq f(a), f(b), \end{cases}$$

iii. $\beta = \alpha = n = 1$ seçilirse m-log konveks fonksiyon için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L\left(f(a), \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^m\right)$$

iv. $\beta = \alpha = 1$ seçilirse,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^n, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^m\right)$$

v. $n = m = 1$ seçilirse,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \begin{cases} [f(b)]^{1-\alpha}L\big([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\big) & , \quad 0 < f(a), f(b) \leq 1 \\ L\big([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\big) & , \quad 0 < f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ [f(a)]^{(1-\beta)}[f(b)]^{1-\alpha}L\big([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\big) & , \quad 0 \leq f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ [f(a)]^{1-\beta}L\big([f(a)]^\beta, [f(b)]^\alpha\big) & , \quad 1 \leq f(a), f(b) \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 4.2.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon, $a < b$ için $a, b \in I$, $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $(\beta, \alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n, m) \in (0,1]^2$ için $f \in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \begin{cases} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 0 < f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \\ \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 0 < f\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{b}{m}\right) \\ \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 0 \leq f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{a}{n}\right) \\ \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right) & , \quad 1 \leq f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f \in {}_2L^{\beta,\alpha}_{n,m}(I)$ olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{nt^{\beta}} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-t^{\alpha})}$$

yazılır. Daha sonra Lemma 4.1.1. den

i. $0 < f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}{\ln\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \ln\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right]$$

$$= L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right)$$

ii. $0 < f\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} \left[\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}{\ln\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \ln\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right)$$

iii. $0 \leq f\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f\left(\frac{a}{n}\right)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}{\ln\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \ln\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right)$$

iv. $1 \leq f\left(\frac{a}{n}\right), f\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} \int_0^1 \left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)^t dt$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} \left[\frac{\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}} - 1}{\ln\left(\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}}{\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} \left[\frac{\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}{\ln\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta} - \ln\left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}}\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n(1-\beta)} \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m(1-\alpha)} L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n\beta}, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m\alpha}\right).$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliklerin kombinasyonu ile ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.2.5. Teorem 4.2.2. deki eşitsizlikte

i. $\beta = \alpha = 1$ seçilmesi durumunda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \begin{cases} L\left([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\right) & , \quad 0 < f(a), f(b) \leq 1 \\ [f(b)]^{1-\alpha} L\left([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\right) & , \quad 0 < f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ [f(a)]^{1-\beta} L\left([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\right) & , \quad 0 \leq f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ [f(a)]^{1-\beta}[f(b)]^{1-\alpha} L\left([f(a)]^{\beta},[f(b)]^{\alpha}\right) & , \quad 1 \leq f(a), f(b). \end{cases}$$

ii. $n = m = 1$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L\left(\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^n, \left[f\left(\frac{b}{m}\right)\right]^m\right)$$

iii. $\beta = \alpha = n = m = 1$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L\left(f(a), f(b)\right)$$

eşitsizliklerinin elde edileceği kolayca görülmektedir.

Teorem 4.2.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ I° de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ için $a, b \in I$, $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $(\beta,\alpha) \in (0,1]^2$ ve $(n,m) \in (0,1]^2$ için $|f'| \in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \begin{cases} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} M(k;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 0 < f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \\ \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M(k;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 0 < f'\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right) \\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} M(k;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 0 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right) \\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M(k;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. $M(k;\beta,\alpha;n,m)$ ve k, Lemma 4.2.1. de tanımlanmıştır.

İspat. $|f'| \in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ olduğundan, Lemma 4.1.1. ve Lemma 4.2.1. den,

i. $0 < f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)\, dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^{\beta}} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^{\alpha}} dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta t} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha(1-t)} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta}}{\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}}\right]^t dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} \int_0^1 |1-2t| k^t\, dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} M(k;\beta,\alpha;n,m).$$

ii . $0 < f'\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)\, dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha} dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta t} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m[\alpha(1-t)+(1-\alpha)]} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta}}{\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}}\right]^t dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} M(k;\beta,\alpha;n,m).$$

iii. $0 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right)$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)\, dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha} dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n[\beta t+1-\beta]} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha(1-t)} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{\left|f'(\frac{a}{n})\right|^{n\beta}}{\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}}\right]^t dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} M(k;\beta,\alpha;n,m).$$

iv. $1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_0^1 |1-2t| f'(ta+(1-t)b)\, dt$$

$$\le \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^{\beta}} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^{\alpha}} dt$$

$$\le \int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n[\beta t+1-\beta]} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m[\alpha(1-t)+1-\alpha]} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta}}{\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}}\right]^t dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M(k;\beta,\alpha;n,m).$$

İspat tamamlanır.

Uyarı 4.2.6. Teorem 4.2.3. de

i. $\beta=\alpha=1$ seçilmesi durumunda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M(k;1,1;n,m),$$

ii. $n=m=1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \begin{cases} |f'(b)|^{\alpha} M(k;\beta,\alpha;1,1) & , \quad 0<f'(a),f'(b)\le 1 \\ |f'(b)| M(k;\beta,\alpha;1,1) & , \quad 0<f'(a)\le 1\le f'(b) \\ |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)|^{\alpha} M(k;\beta,\alpha;1,1) & , \quad 0\le f'(b)\le 1\le f'(a) \\ |f'(a)|^{1-\beta}|f'(b)| M(k;\beta,\alpha;1,1) & , \quad 1\le f'(a),f'(b) \end{cases}$$

iii. $\beta=\alpha=n=m=1$ seçilmesi durumunda ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le |f'(b)| M(k;1,1;1,1)$$

eşitsizliklerine dönüştüğü görülür.

Teorem 4.2.4. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ I° de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ için $a,b\in I$, $f\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q\ge 1$, $(\beta,\alpha)\in(0,1]^2$ ve $(n,m)\in(0,1]^2$ için $|f'|\in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2^{(q-1)/q}}$$

$$\times\begin{cases}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 0 < f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right) \le 1 \\ \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 0 < f'\left(\frac{a}{n}\right) \le 1 \le f'\left(\frac{b}{m}\right) \\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} M^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 0 \le f'\left(\frac{b}{m}\right) \le 1 \le f'\left(\frac{a}{n}\right) \\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} M^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m) & , \quad 1 \le f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)\end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. $M(k;\beta,\alpha;n,m)$ ve k, Lemma 4.2.1. de tanımlanmıştır.

İspat. $|f'| \in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ olması ve Lemma 4.1.1., Lemma 4.2.1. ile birlikte Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$

$$\le \left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{(q-1)/q} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

$$\le \frac{1}{2^{(q-1)/q}}\left(\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{qt^{n\beta}} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{q(1-t)^{m\alpha}} dt\right)^{1/q}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

i. $0 < f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right) \le 1$ için

$$\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nqt^{\beta}} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t)^{\alpha}} dt$$

$$\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta qt} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha q(1-t)} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha q} \int_0^1 |1-2t|\left[\frac{\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta q}}{\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha q}}\right]^t dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha q} \int_0^1 |1-2t|k^{qt}\,dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha q} M(k^q;\beta,\alpha;n,m).$$

ii. $0 < f'\left(\frac{a}{n}\right) \le 1 \le f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için,

$$\int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nqt^\beta} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t)^\alpha} dt$$

$$\int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta qt} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq[\alpha(1-t)+1-\alpha]} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq} \int_0^1 |1-2t| \left[\frac{\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta q}}{\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha q}}\right]^t dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq} \int_0^1 |1-2t| k^{qt}\, dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq} M(k^q;\beta,\alpha;n,m).$$

iii. $0 \le f'\left(\frac{b}{m}\right) \le 1 \le f'\left(\frac{a}{n}\right)$ için,

$$\int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nqt^\beta} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t)^\alpha} dt$$

$$\int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(\beta t+1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha(1-t)} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha} \int_0^1 |1-2t| k^{qt}\, dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha} M(k^q;\beta,\alpha;n,m).$$

iv. $1 \le f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için,

$$\int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nqt^\beta} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t)^\alpha} dt$$

$$\int_0^1 |1-2t| \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(\beta t+1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq[\alpha(1-t)+1-\alpha]} dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq} \int_0^1 |1-2t| k^{qt}\, dt$$

$$= \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(1-\beta)} \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq} M(k^q;\beta,\alpha;n,m).$$

İspat tamamlanır.

Uyarı 4.2.7. Teorem 4.2.4. de

i. $\beta = \alpha = 1$ seçilmesi durumunda,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m M^{1/q}(k^q;1,1;n,m)$$

ii. $\beta=\alpha=m=n=1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2^{(q-1)/q}}|f'(b)|M^{1/q}(k^q;1,1;1,1)$$

olduğu görülecektir.

Teorem 4.2.5. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ $I°$ de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ için $a,b\in I$, $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer, $(\beta,\alpha)\in(0,1]^2$ ve $(n,m)\in[0,1]^2$ için $|f'|\in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le (b-a)A(k;\beta,\alpha;n,m)$$

$$\times\begin{cases}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} & , \quad 0<f'\left(\frac{a}{n}\right),f'\left(\frac{b}{m}\right)\le 1\\ \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} & , \quad 0<f'\left(\frac{a}{n}\right)\le 1\le f'\left(\frac{b}{m}\right)\\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} & , \quad 0\le f'\left(\frac{b}{m}\right)\le 1\le f'\left(\frac{a}{n}\right)\\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} & , \quad 1\le f'\left(\frac{a}{n}\right),f'\left(\frac{b}{m}\right)\end{cases}$$

$A(k;\beta,\alpha;n,m)$ ve k, Lemma 4.2.1. de tanımlanmıştır.

İspat. $|f'|\in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ olduğundan ve Lemma 3.1.1. den,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le (b-a)\left[\int_0^{1/2} t|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{1/2}^1(1-t)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]$$

$$\le (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha}dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha}dt\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Lemma 4.1.1. ve Lemma 4.2.1. kullanılarak

i. $0<f'\left(\frac{a}{n}\right),f'\left(\frac{b}{m}\right)\le 1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha(1-t)} dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha(1-t)} dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}\left[\int_0^{1/2} tk^t dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)k^t dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} A(k;\beta,\alpha;n,m)$$

ii. $0 < f'\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m-m\alpha t} dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m-m\alpha t} dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m}\left[\int_0^{1/2} tk^t dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)k^t dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} A(k;\beta,\alpha;n,m)$$

iii. $0 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right)$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha(1-t)} dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha(1-t)} dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}\left[\int_0^{1/2} tk^t dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)k^t dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} A(k;\beta,\alpha;n,m)$$

iv. $1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m-m\alpha t} dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m-m\alpha t} dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m}\left[\int_0^{1/2} tk^t dt+\int_{1/2}^1 (1-t)k^t dt\right]$$

$$=(b-a)\left|f'\left(\tfrac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{m} A(k;\beta,\alpha;n,m)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Uyarı 4.2.8. Teorem 4.2.5. de

i. $\beta=\alpha=1$ seçilmesi durumunda

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq (b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} A(k;1,1;n,m)$$

ii. $n=m=1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)A(k;\beta,\alpha;1,1)$$

$$\times\begin{cases}|f'(b)|^{\alpha} & , \quad 0<f'(a),f'(b)\leq 1\\ |f'(b)| & , \quad 0<f'(a)\leq 1\leq f'(b)\\ |f'(a)|^{(1-\beta)}|f'(b)|^{\alpha} & , \quad 0\leq f'(b)\leq 1\leq f'(a)\\ |f'(a)|^{(1-\beta)}|f'(b)| & , \quad 1\leq f'(a),f'(b)\end{cases}$$

iii. $\beta=\alpha=n=m=1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)}{4}L^2\left(\sqrt{f'(a)},\sqrt{f'(b)}\right)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 4.2.6. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ I° de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ için $a,b \in I$, $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer, $(\beta,\alpha)\in(0,1]^2$ ve $(n,m)\in(0,1]^2$ için $|f'|\in {}_2L_{n,m}^{\beta,\alpha}(I)$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left[N^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)+P^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)\right]$$

$$\times\begin{cases}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} & , \quad 0<f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)\leq 1\\ \left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} & , \quad 0<f'\left(\frac{a}{n}\right)\leq 1\leq f'\left(\frac{b}{m}\right)\\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha} & , \quad 0\leq f'\left(\frac{b}{m}\right)\leq 1\leq f'\left(\frac{a}{n}\right)\\ \left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m} & , \quad 1\leq f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right).\end{cases}$$

İspat. Lemma 3.1.1. den ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{1/2}^1 (1-t)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha}dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha}dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^{1/2} tdt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nqt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t)^\alpha}\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^1 (1-t)dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nqt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t)^\alpha}dt\right)^{1/q}\right]$$

elde edilir. Lemma 4.1.1. ve Lemma 4.2.1. in kullanılması ile

i. $0<f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)\leq 1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{1/2}^1 (1-t)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha}dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha}dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^{1/2} t dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta q t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha(1-t)} dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^1 (1-t)dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta q t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha(1-t)} dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}\left[\left(\int_0^{1/2} t k^{qt} dt\right)^{1/q}+\left(\int_{1/2}^1 (1-t)k^{qt} dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}\left[N^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)+P^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)\right]$$

ii. $0 < f'\left(\frac{a}{n}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha} dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha} dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^{1/2} t dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta q t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-\alpha t)} dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^1 (1-t)dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_{1/2}^1 (1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n\beta q t}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-\alpha t)} dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m}\left[\left(\int_0^{1/2} t k^{qt} dt\right)^{1/q}+\left(\int_{1/2}^1 (1-t)k^{qt} dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m}\left[N^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)+P^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)\right]$$

iii. $0 \leq f'\left(\frac{b}{m}\right) \leq 1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right)$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^\beta}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^\alpha} dt\right.$$

$$+\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^{\beta}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^{\alpha}}dt\Bigg]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^{1/2}tdt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_0^{1/2}t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha(1-t)}dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^{1}(1-t)dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq\alpha(1-t)}dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}\left[\left(\int_0^{1/2}tk^{qt}dt\right)^{1/q}+\left(\int_{1/2}^{1}(1-t)k^{qt}dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m\alpha}\left[N^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)+P^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)\right]$$

iv. $1 \leq f'\left(\frac{a}{n}\right), f'\left(\frac{b}{m}\right)$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\Bigg[\int_0^{1/2}t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^{\beta}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^{\alpha}}dt$$

$$+\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nt^{\beta}}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t)^{\alpha}}dt\Bigg]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^{1/2}tdt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_0^{1/2}t\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-\alpha t)}dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^{1}(1-t)dt\right)^{(q-1)/q}\left(\int_{1/2}^{1}(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{nq(\beta t+1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-\alpha t)}dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m}\left[\left(\int_0^{1/2}tk^{qt}dt\right)^{1/q}+\left(\int_{1/2}^{1}(1-t)k^{qt}dt\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left|f'\left(\frac{a}{n}\right)\right|^{n(1-\beta)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m}\left[N^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)+P^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;n,m)\right]$$

Bu dört eşitsizliğin birleştirilmesi ile ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.9. Teorem 4.2.6. da

i. $\beta=\alpha=1$ seçilmesi durumunda,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left[N^{1/q}(k^q;1,1;n,m)+P^{1/q}(k^q;1,1;n,m)\right]\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m$$

ii. $n=m=1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left[N^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;1,1)+P^{1/q}(k^q;\beta,\alpha;1,1)\right]$$

$$\times\begin{cases}|f'(b)|^{\alpha} & , \quad 0<f'(a),f'(b)\leq 1\\ |f'(b)| & , \quad 0<f'(a)\leq 1\leq f'(b)\\ |f'(a)|^{(1-\beta)}|f'(b)|^{\alpha} & , \quad 0\leq f'(b)\leq 1\leq f'(a)\\ |f'(a)|^{(1-\beta)}|f'(b)| & , \quad 1\leq f'(a),f'(b)\end{cases}$$

iii. $\beta=\alpha=n=m=1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8^{(q-1)/q}}\left[N^{1/q}(k^q;1,1;1,1)+P^{1/q}(k^q;1,1;1,1)\right]|f'(b)|$$

eşitsizliklerinin elde edileceği kolayca görülür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle var olan çoğu logaritmik konveks fonksiyon türünü içine alan yeni genelleştirilmiş yeni iki logaritmik konveks fonksiyon sınıfları elde edilmiştir. Bu yeni logaritmik konvekslik tanımları bilinen çoğu logaritmik konvekslik kavramlarını içermesinin yanında literatüre birçok yeni logaritmik konveks fonksiyon sınıfları kazandırmıştır. Bu logaritmik konvekslik tanımlarını kullanarak klasik analizde integral tanımı yardımıyla yeni Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizliklerin özel durumlarla daha önce yapılan çalışmaları desteklediği görülmüştür.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, öncelikle elde edilen yeni logaritmik konvekslik tanımlarını inceleyerek teze konulmayan ve literatürde henüz bulunmayan daha birçok logaritmik konvekslik sınıfları oluşturabilirler. Burada elde edilen genelleştirilmiş logaritmik konveks fonksiyonlarla ve yeni elde edilebilecek logaritmik konveks fonksiyonları kullanarak, özdeşlikler yardımıyla hem klasik analizde hem de kesirli analizde Midpoint, Trapezoid, Simpson, Ostrowski tipli birçok yeni eşitsizlik elde edebilirler. Bu eşitsizliklerin literatürde bilinen çalışmaları destekleyeceği kolaylıkla görülecektir. Bu eşitsizliklere özel ortalamalar uygulayarak, özel ortalamalar teorisine katkı sağlayabilirler. Ek olarak bu eşitsizliklerin optimizasyon, varyasyonel eşitsizlikler ve denge problemlerinde uygulamalarını yapabilirler.

Belki de en önemlisi, bu tez çalışmasında elde edilen yeni kavramların Konveks Fonksiyonlar Teorisine ve bunun kullanıldığı alanlara büyük katkı sağlayacağı açıktır.

KAYNAKLAR

Akdemir, A.O., Tunç, M., 2012. On some integral inequalities for s-logarithmically convex functions and their applications, http://arxiv.org/abs/1212.1584, Erişim Tarihi: 01.06.2016.

Ambrosio, A., 2007. Proof of Hermite-Hadamard integral inequality (version4).PlanetMath.org.http://planetmath.org/ProofOfHermiteHadamardIntegralInequality.html.Added: 26.04.2007, Erişim Tarihi: 20.06.2015.

Bai, R.F., Qi, F., Xi, B.Y., 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for the m- and (α, m)-logarithmically convex functions, **Filomat** 27:1, 1–7.

Bayraktar, M., 2000. **Fonksiyonel Analiz. ISBN**, 975-442-035-1, Gazi Kitabevi, s.320, Ankara.

Bayraktar, M., 2010. **Analiz. ISBN**, 978-605-395-412-5, Nobel Yayınevi, s.582, Türkiye.

Bullen, P.S., 2003. **Handbook of Means and Their Inequalities**. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.

Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., 1988. **Means and Their Inequalities**. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Dragomir, S.S, 2002. On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m-convex functions. **Tamkang Journal of Mathematics**, 33 (1): 45-55.

Dragomir, S.S., 2014. Integral inequalities of Jensen type for λ-convex functions. **Proceedings of Research Group in Mathematical Inequalities and Applications** Art. 17.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, **Applied Mathematics Letter** 11: 91–95.

Dragomir, S.S., and Mond, B., 1998. Integral inequalities of Hadamard's type for log−convex functions, **Demonstratio Mathematics**, 31 (2): 354-364.

Dragomir, S.S., Pearce, C., 2002. Selected Topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications. URL:http://www. maths. adelaide. edu. au/ Applied /staff/ cpearce. html., p.357. Erişim Tarihi: 01.06.2016.

Dragomir, S.S., Pečarić, J., Persson, L. E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. **Soochow Journal Mathematics**, 21: 335-341.

Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985 Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii. **In: Vyčislitel. Mathematics i. Mathematics Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč Trudov,** pp. 138-142. MGPI, Moscow.

Hadamard, J., 1893. Étude sur les propriétés des fonctions entières en particulier d'une fonction considérée par Riemann. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, 58: 171-215.

Hermite, C., 1883. Sur deux limites d'une intégrale définie, **Mathesis** 3, p.82.

Jensen, J., 1905. Om konvexe funktioner og uligheder mellem middelvaerdier. **Nyt Tidsskrift Mathematics**, 16B: 49-69.

Jensen, J., 1906. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les voleurs mogernmes. **Acta Math.,** 30: 175-193.

Karabayır, İ., Tunç, M., Yüksel, E., 2015. On some inequalities for functions whose absolute values of the second derivatives are α-, m-, (α, m)-logarithmically convex, **Georgian Math. J.** 22 (2): 251–257.

Mitrinović, D., 1970. **Analytic Inequalities. Springer-Verlag**, p. 404, Berlin.

Mitrinović, D., Pečarić, J., Fink, A., 1993. **Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic**, p.725, Dordrecht.

Musayev B., Alp M., Mustafayev N., 2003. **Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 2. Tekağaç Eylül**, 1199 s., Kütahya.

Niculescu, C., Persson, L., 2006. **Convex Functions and Their Applications a Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc.**, p. 253. Berlin.

Noor, M.A., Noor, K.I., Awan, M.U., Khan, S. 2014. Fractional Hermite-Hadamard inequalities for some new classes of Godunova-Levin functions, **Appl. Math. Inf. Sci.** 6 (8): 2865-2872.

Özdemir, M., Avcı, M., Set, E., 2010. On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m-convexity. **Appl. Math. Lett.**, 23: 1065-1070.

Özdemir, M.E., Sarıkaya, M.Z., Set, E., 2010, **Eşitsizlik Teorisi Üzerine Ders Notları**, Atatürk Üniversitesi. Basılmamış Ders Notu.

Özkan, U. M., 2007. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.

Pečarić, J., Proschan, F., Tong, Y., 1992. **Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press**, p. 484, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Yazar, 1980 yılında Hatay'ın Antakya ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 1999 yılında lisans eğitimine başladığı Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Matematik Eğitimi alanında 1,5 yıl süreyle tezsiz yüksek lisans yaptı. Eğitim sektöründe 8 yıllık bir deneyimin ardından 2012 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi'nde Öğretim Görevlisi ünvanı ile çalışmaya başladı. Halen kurumdaki görevine devam etmektedir. 2013 yılında Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisansa başlayan yazar Analiz alanında çalışmalarını sürdürmektedir.