



**T.C.  
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Gizem BAYASLI**

**ENFORMATİK BÖLÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HATAY  
ARALIK-2017**



T.C.  
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Gizem BAYASLI**

**ENFORMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HATAY  
ARALIK-2017**

**T.C.**  
**MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN**  
**NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Gizem BAYASLI**

**ENFORMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Yrd. Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN** danışmanlığında hazırlanan bu tez 01/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN  
Başkan

Yrd. Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN  
Üye

Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN  
Üye

**Kod No:**

**Prof. Dr. Erdal SERTKAYA**  
Enstitü Müdürü

**Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.**

01.12.2017

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

**Gizem BAYASLI**

## ÖZET

### KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Dört bölümden oluşan bu tezin, giriş bölümünde literatür özeti verildi.

İkinci bölümde ise bazı özel fonksiyonlar ile birlikte literatürde sıklıkla kullanılan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve conformable kesirli türev yaklaşımlarına yer verildi.

Üçüncü bölümde ise Homotopi Analiz yönteminin sistematik olarak bir diferansiyel denkleme uygulanması verildi.

Tezin esas kısmı olan dördüncü bölümde ise Homotopi Analiz yönteminin, ele alınan conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sistemine ve conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denklemine uygulanmasıyla nümerik çözümler elde edildi. Elde edilen nümerik çözümler tam çözümler ile karşılaştırıldı.

2017, 48 Sayfa

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler, Homotopi Analiz Yöntemi, Conformable Kesirli Mertebeden Wu-Zhang Sistemi, Conformable Kesirli Mertebeden Birleştirilmiş KdV-mKdV Denklemi.

## ABSTRACT

### NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

A summary of literature is given in the beginning of the four part thesis.

In the second part, used frequently in literature, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo and Conformable fractional derivative approaches take part including some special functions.

It is given to systematic application of a differential equation of homotopy analysis method.

Numerical solutions were obtained by applying the Homotopy Analysis method to the Wu-Zhang system of the conformable fractional order discussed and conformable fractional order to unified equation KdV-mKdV in the fourth section, which is the main part of the thesis. The numerical solutions obtained were compared with full solutions.

2017, 48 Pages

**Key Words:** Fractional Order Differential Equation, Homotopy Analysis Method, Conformable Fractional Order Wu-Zhang System, Conformable Fractional Order Combined KdV-mKdV Equation.

## TEŞEKKÜR

Öncelikle, eğitim hayatımda bana destek olan, okumamı destekleyen, yol gösteren, hayatımın her evresinde bana destek olan, güvenen, başarılı olacağıma inanan

*Anneme ve Babama,*

Kendisiyle çalışma imkânı bulduğuma çok memnun olduğum, tezimin her noktasında bana yardımcı olan, bilgilerini benimle paylaşmaktan hiç çekinmeyen, her zaman sıcak ve samimi davranan değerli danışman hocam

*Yrd. Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN'a*

Sonsuz teşekkürler...

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	I
ABSTRACT .....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER .....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	VII
SİMGELER DİZİNİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
2.1. Özel Fonksiyonlar .....	3
2.2. Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımları .....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Homotopi Analiz Yöntemi .....	13
3.2. Sıfırıncı-Derece Deformasyon Denklemi .....	13
3.3. Homotopi Türevinin Özellikleri.....	16
3.4. Yüksek-Derece Deformasyon Denklemi .....	16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	19
4.1. Conformable Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri .....	19
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR .....	46
ÖZGEÇMİŞ .....	48



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. $\alpha = 0.5$ için $u(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	23
Şekil 4.2. $\alpha = 0.5$ için $v(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi .....	23
Şekil 4.3. $\alpha = 0.6$ için $u(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi .....	23
Şekil 4.4. $\alpha = 0.6$ için $v(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi .....	24
Şekil 4.5. $\alpha = 0.75$ için $u(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi .....	24
Şekil 4.6. $\alpha = 0.75$ için $v(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	24
Şekil 4.7. $\alpha = 0.9$ için $u(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi .....	25
Şekil 4.8. $\alpha = 0.9$ için $v(0.2,0.1)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	25
Şekil 4.9. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü .....	25
Şekil 4.10. $\alpha = 0.5$ için $u_{tam}(x, t)$ analitik çözümü .....	26
Şekil 4.11. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü .....	26
Şekil 4.12. $\alpha = 0.5$ için $v_{tam}(x, t)$ analitik çözümü .....	26
Şekil 4.13. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü .....	27
Şekil 4.14. $\alpha = 0.9$ için $u_{tam}(x, t)$ analitik çözümü .....	27
Şekil 4.15. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü .....	27
Şekil 4.16. $\alpha = 0.9$ için $v_{tam}(x, t)$ analitik çözümü .....	28
Şekil 4.17. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	28
Şekil 4.18. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	29
Şekil 4.19. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.6$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	29
Şekil 4.20. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.6$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	29
Şekil 4.21. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün hata grafiği.....	30
Şekil 4.22. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümünün hata grafiği.....	30
Şekil 4.23. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün hata grafiği.....	30
Şekil 4.24. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümünün hata grafiği.....	31
Şekil 4.25. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması .....	31
Şekil 4.26. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması .....	31
Şekil 4.27. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	32
Şekil 4.28. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $v(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $v_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması .....	32
Şekil 4.29. $\alpha = 0.6$ için $u(0.2,0.001)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	37
Şekil 4.30. $\alpha = 0.6$ için $u(0.2,0.001)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	37
Şekil 4.31. $\alpha = 0.75$ için $u(0.2,0.001)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	38
Şekil 4.32. $\alpha = 0.9$ için $u(0.2,0.001)$ yaklaşık çözümünün $\hbar$ eğrisi.....	38
Şekil 4.33. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü .....	38

Şekil 4.34. $\alpha = 0.9$ için $u_{tam}(x, t)$ analitik çözümü.....	39
Şekil 4.35. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü.....	39
Şekil 4.36. $\alpha = 0.9$ için $u_{tam}(x, t)$ analitik çözümü.....	39
Şekil 4.37. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	40
Şekil 4.38. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.6$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	40
Şekil 4.39. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	41
Şekil 4.40. $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümünün mutlak hata grafiği.....	41
Şekil 4.41. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması .....	42
Şekil 4.42. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümü ile $u_{tam}(x, t)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması .....	42

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	33
Çizelge 4.2. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.6$ için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	33
Çizelge 4.3. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	34
Çizelge 4.4. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $u_{tam}(x, t)$ ve $v_{tam}(x, t)$ tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	34
Çizelge 4.5. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.5$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	43
Çizelge 4.6. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.6$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	43
Çizelge 4.7. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.75$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	44
Çizelge 4.8. $t = 0.01$ , $\hbar = -1$ ve $\alpha = 0.9$ için $u(x, t)$ yaklaşık çözümünün $u_{tam}(x, t)$ tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar .....	44

## SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(x)$	: Gama Fonksiyonu
$\beta(x, y)$	: Beta Fonksiyonu
$D_m(\Phi)$	: $\Phi$ 'nin $m$ –inci dereceden homotopi türevi
${}_a D_t^p f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $p$ –inci mertebeden Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi
${}_a D_t^{-p} f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $p$ –inci mertebeden Grünwald-Letnikov İntegrali
${}_a \mathcal{D}_t^p f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $p$ –inci mertebeden Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}_a \mathcal{D}_t^{-p} f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $p$ –inci mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}^c D_t^\alpha f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $\alpha$ –inci mertebeden Caputo Kesirli Türevi
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	: $f(t)$ Fonksiyonunun $n$ –inci Mertebeden Türevi
$f^{(k)}(t)$	: $k$ –ıncı Mertebeden Türevlenebilir Fonksiyon
$H(x, t)$	: Yardımcı Fonksiyon
$\hbar$	: Yardımcı Parametre
$\mathcal{L}$	: Yardımcı Lineer Operatör
$\max(n, m)$	: $n$ ile $m$ tamsayılarından büyük olanı
$\mathcal{N}$	: Lineer Olmayan Operatör
$q$	: Gömme Parametresi
$u_0^{[m]}(x, t)$	: $m$ –inci derece deformasyon türevi

## 1. GİRİŞ

1695 yılında G.W. Leibnitz, L' Hospital'a "Tamsayı mertebeli  $\frac{d^n y}{dx^n}$  türevi tamsayı mertebeli olmayan türev için genellenebilir mi?" şeklinde soru sormuştur. Böylece ilk defa kesirli türev kavramı ortaya çıkmıştır. Daha sonra G.W. Leibnitz bu sorusunu "n herhangi bir sayı olabilir mi?" olarak değiştirmiştir. L' Hospital ise bu soruyu biraz daha özele indirgeyerek "n, 1/2 olduğu zaman türev ne olacak?" sorusuyla G.W. Leibnitz'in sorusuna yanıt vermiştir (Oldham ve ark., 1974). 17. yüzyıldan beri keyfi mertebeden diferansiyel ve integrasyon kavramı bir çok matematikçinin çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır (Hilfer,2000).

Uygulamalı matematiğin önemli bir alanı olan kesirli hesaplamalar bilim adamlarında büyük ilgi uyandırdı. Ünlü matematikçi olan Liouville, 1832-1837 yılları arasında bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır. Bir diğer ünlü matematikçi Riemann ise 1847 yılında bu kavram ile ilgili bir tanım vermiştir. Riemann'ın verdiği bu tanım ile Liouville tarafından verilen tanım birleştirilerek, günümüzde de sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı tanımı ortaya çıkmıştır (Kilbas ve ark. 2006). Sonlu fark yaklaşımı yardımı ile tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımı Grünwald ve Letnikov tarafından 1967 yılında literatüre kazandırılmıştır. Daha sonraki yıllarda ise Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımının Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımına denk olduğu gösterilmiştir (Debnath ve ark., 2007).

Kesirli mertebeden türev yaklaşımının bir diğer tanımı ise 1967 yılında M. Caputo tarafından verilmiştir. Bu tanım sayesinde, fiziksel yorumu mevcut olan  $y'(a), y''(a), \dots$  gibi yan şartları içeren kesirli türevlere sahip diferansiyel denklemler Caputo yaklaşımı ile çözülebilmektedir (Podlubny, 1999).

R. Khalil ve arkadaşları ise conformable kesirli türev ve integral yaklaşımlarının tanımını 2014 yılında vermişlerdir. Bu tanımın, yukarıda verilen türev yaklaşımlarına göre bazı avantajları bulunmaktadır (Khalil ve ark., 2014). Bu kesirli mertebeden türev yaklaşımı kullanılarak, birçok conformable kesirli türev içeren diferansiyel denklemler nümerik ve analitik olarak çözülmüştür (Khodadad ve ark., 2016; Çenesiz ve ark., 2016; Hosseini ve ark., 2017; Kurt ve ark., 2016; Yavuz, 2017; Kumar ve ark., 2017; Hosseini

ve ark., 2017; Kaplan ve ark., 2017; Kaplan, 2017; Çenesiz ve ark., 2017; Iyiola ve ark., 2017; Eslami ve ark., 2017; Kurt ve ark., 2017).

Fen ve mühendislikte ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde etkili bir yöntem olan Homotopi Analiz yöntemi 1992 yılında S.J. Liao tarafından literatüre kazandırılmıştır. Homotopi analiz yönteminde mevcut olan yardımcı parametreler sayesinde elde edilen seri çözümlerin yakınsaklık bölgesi kontrol edilebilmektedir (Liao, 1992).



## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu kısımda, kesirli türev ve integral teorisinde kullanılan Gama ve Beta özel fonksiyonları verildikten sonra bazı kesirli türev yaklaşımları ve bunlar arasındaki ilişkiler verildi.

### 2.1 Özel Fonksiyonlar

#### 2.1.1 Gama Fonksiyonu

Genelleştirilmiş integral yardımı ile tanımlanan Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0 \quad (2.1.1)$$

eşitliği ile tanımlıdır. (2.1.1) ile verilen eşitlikten, Gama fonksiyonunun

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

$$\Gamma(x) = (x - 1)!, \quad x \in \mathbb{N}^+$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

gibi özellikleri kolayca gösterilebilir (Miller; Ross, 1993).

#### 2.1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (2.1.2)$$

integrali ile tanımlıdır. Ayrıca  $\beta(x, y)$  ile gösterilen Beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

şeklinde Gama fonksiyonu ile ifade edilebilir. (Miller; Ross, 1993).

## 2.2 Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımları

Bu kısımda, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve conformable kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımları ile birlikte bu yaklaşımlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

### 2.2.1. Grünwald-Letnikov Yaklaşımı

$f(t)$  fonksiyonu sürekli ve  $m, m \leq p < m + 1$  şartını sağlayan bir tamsayı olmak üzere  $k = 1, 2, \dots, m + 1$  için  $f^{(k)}(t)$  türevleri de  $[a, t]$  aralığında sürekli olsun. Bu şartlar altında  $f(t)$  fonksiyonunun  $p$  – inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-r+1)}{r!}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\square \rightarrow 0} \square^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - r\square) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlıdır (Podlubny, 1999).

$[a, t]$  kapalı aralığında sürekli olan bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $p$  – inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali

$$\left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)(p+2) \dots (p+r+1)}{r!}$$

olmak üzere

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t - rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2.2)$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

$[a, t]$  kapalı aralığında  $f(t)$  fonksiyonunun  $f'(t)$  türevi sürekli olduğundan (2.2.2) eşitliğinin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanabilir. (2.2.2) eşitliğinin sağ tarafına bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau$$



eşitliği bulunur. Eğer  $[a, t]$  kapalı aralığında  $f(t)$  fonksiyonu  $m + 1$  defa sürekli diferansiyellenebilir ise (2.2.2) denkleminde

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

yazılabilir (Podlubny, 1999).

### 2.2.2. Grünwald-Letnikov Yaklaşımının Özellikleri

(2.2.1) ve (2.2.2) ile tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımlarının aşağıdaki özellikleri mevcuttur (Podlubny, 1999).

**a.** Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev operatörü lineerdir.

**b.**  $n$  tamsayı ve  $p > 0$  olsun. Eğer  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  için  $f^{(k)}(a) = 0$  oluyorsa

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_aD_t^{p+n} f(t)$$

eşitliği geçerlidir.

**c.**  $0 \leq m < p < m + 1$  ve  $0 \leq n < q < n + 1$  olsun. Eğer  $r = \max(n, m)$  olmak üzere  $k = 0, 1, 2, \dots, r - 1$  için  $f^{(k)}(a) = 0$  oluyorsa

$${}_aD_t^q ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p ({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

eşitliği geçerlidir.

**d.**  $0 \leq m < p < m + 1$  ve  $q < 0$  olsun. Eğer  $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$  için  $f^{(k)}(a) = 0$  ise

$${}_aD_t^q ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

eşitliği sağlanır.

**e.**  $p < 0$  ve  $q$  herhangi bir reel sayı olmak üzere

$${}_aD_t^q ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

ifadesi geçerlidir.

### 2.2.3. Riemann-Liouville Yaklaşımı

Her  $(a, t)$  sonlu aralığında  $f(t)$  fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu durumda  $p > 0$  olmak üzere  $p$  -inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).

$k - \alpha > 0$  şartını sağlayan bir  $\alpha$  sayısı için  $(k - \alpha)$  -ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_a D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.2.3)$$

şeklindedir. Eğer  $\alpha > 0$  şartı sağlanıyor ise (2.2.3) ile verilen integral yakınsaktır. (2.2.3) eşitliğinde  $p = k - \alpha$  alınırsa,  $k - 1 \leq p < k$  olmak üzere

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-p)} f(t)) \quad (2.2.4)$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

#### 2.2.4. Riemann-Liouville Yaklaşımının Özellikleri

Yukarıda tanımlanan, Riemann-Liouville yaklaşımının aşağıdaki özellikleri mevcuttur (Podlubny, 1999).

a. Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev operatörü lineerdir.

b.  $p > 0$  ve  $q > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^{-q} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t)$$

eşitliği geçerlidir.

c.  $p > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t)$$

eşitliği sağlanır.  $k - 1 \leq p < k$  şartını sağlayan bir  $p$  sayısı için

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (2.2.5)$$

eşitliği geçerlidir. Özel olarak  $k = 1$  alınırsa, (2.2.5) eşitliği

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

olarak yazılır.

d.  $p > 0$  ve  $q > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{p-q} f(t) \quad (2.2.6)$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca  $0 \leq k - 1 \leq q < k$  için

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

olarak yazılabilir.

- e.  $n$  tam sayı olmak üzere  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  için  $f^{(k)}(a) = 0$  ise

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t)$$

ifadesi geçerlidir..

- f.  $m-1 \leq p < m$  ve  $n-1 \leq q < n$  olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(-p-j+1)}, \quad (2.2.7)$$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(-q-j+1)} \quad (2.2.8)$$

eşitlikleri geçerlidir. (2.2.7) ve (2.2.8) denklemlerinin eşit olabilmesi için

$$[{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$[{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

koşullarının sağlanması gerekir.

### 2.2.5. Riemann-Liouville Yaklaşımının Grünwald-Letnikov Yaklaşımı ile İlişkisi

$[a, b]$  kapalı aralığında sürekli olan  $f(t)$  fonksiyonu  $m+1$  defa sürekli diferansiyellenebilir ise o zaman  $0 \leq m \leq p < m+1$  şartını sağlayan her  $p$  için  ${}_a D_t^p f(t)$  Riemann-Liouville kesirli türevi mevcuttur ve Grünwald-Letnikov kesirli türevine eşittir. Bu durumu görmek için Riemann-Liouville kesirli türev tanımında  $m+1$  defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \left( \frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad (2.2.9)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{m+1}(\tau) d\tau, \quad (2.2.10)$$

$$= {}_a D_t^p f(t)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Sonuç olarak,  $f(t)$  fonksiyonu  $t \geq a$  için  $m + 1$  kez sürekli türevlere sahip ise (2.2.1) ile verilen Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımı ile (2.2.9) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı birbirine denk olur. Bir  $f(t)$  fonksiyonunun (2.2.9) integrali ile Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplamak için  $f(t)$  fonksiyonunun integrallenebilir olması yeterlidir. Bu durum ise (2.2.9) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımının  $f(t)$  fonksiyonu üzerinde zayıf koşullar gerektirdiğini göstermektedir (Podlubny, 1999).

### 2.2.6. Caputo Yaklaşımı

Riemann-Liouville yaklaşımı,  $t = a$  noktasında  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

şeklindeki Riemann-Liouville kesirli türevlerin limit değerlerini içeren başlangıç şartlarını içermektedir. (2.2.11) başlangıç şartları ile birlikte ele alınan başlangıç değer problemi ancak Riemann-Liouville yaklaşımı kullanılarak çözülebilir. Yukarıda verilen başlangıç koşullarının herhangi bir fiziksel anlamı yoktur. Riemann-Liouville yaklaşımı için meydana gelen bu eksiklik, Caputo tarafından verilen tanım ile çözüme ulaşmıştır. Caputo'nun verdiği tanımda ise  $t = a$  noktasındaki limit değerlerinde  $y'(a), y''(a), \dots$  gibi tamsayı mertebeden türevler meydana gelmektedir. Fiziksel yorumu mevcut olan  $y'(a), y''(a), \dots$  değerlerini içeren kesirli türevlere sahip diferansiyel denklemler Caputo yaklaşımı ile çözülebilmektedir (Podlubny, 1999).

$f(t)$  fonksiyonu  $n$  defa sürekli diferansiyellenebilir ve  $n - 1 < \alpha < n$  olmak üzere Caputo anlamında kesirli mertebeden türev tanımı,

$${}^c D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \quad (2.2.12)$$

şeklinde, Caputo tarafından tanımlanmıştır (Podlubny, 1999). (2.2.12) eşitliğinde  $n - 1 < \alpha < n$  şartını sağlayan bir  $\alpha$  sayısı için tanımlanan  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ -inci mertebeden Caputo anlamındaki kesirli türevi, tamsayı olan bir  $n$  sayısı için de geçerlidir. Bunu göstermek için,  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$  olmak üzere  $[a, T]$  kapalı

aralığında  $f(t)$  fonksiyonunun  $n + 1$  mertebeden sürekli türeve sahip olduğu kabul edilsin. Böylece (2.2.12) eşitliğinden  $n = 1, 2, 3, \dots$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left( \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n}} \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

bulunur (Podlubny, 1999).

$t = 0$  olmak üzere Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin Laplace dönüşümleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} \{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} dt &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t) |_{t=0}, & n-1 \leq \alpha < n \\ \int_0^\infty e^{-pt} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} dt &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), & n-1 < \alpha \leq n \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Riemann-Liouville kesirli türev tanımı yardımı ile elde edilen yukarıdaki ilk Laplace dönüşümünde, (2.2.11) tipinde yani fiziksel anlamı olmayan başlangıç koşulları mevcuttur. Ancak Caputo kesirli türevinin tanımı ile elde edilen ikinci Laplace dönüşümünde ise fiziksel yorumu mevcut olan tamsayı mertebeli türevler vardır (Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville türev yaklaşımı ile Caputo türev yaklaşımı arasındaki diğer bir fark ise sabitin Caputo türevi sıfır iken Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır olmamasıdır. Yani  $A$  sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_0 D_t^\alpha A = \frac{At^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

$f(t)$  fonksiyonu  $(a, t)$  aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Ayrıca  $m - 1 < \alpha < m$  şartını sağlayan pozitif bir  $m$  tamsayısı için  $k = 1, 2, \dots, m + 1$  olmak üzere  $f^{(k)}(t)$  türevleri  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu şartlar altında  $f^{(k)}(a) = 0$  koşulları sağlanırsa

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t)$$

eşitliği mevcuttur (Podlubny, 1999).

Caputo kesirli türevinin

$$D^\alpha D^{-\alpha} f(t) = f(t)$$

$$D^{-\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

özellikleri (2.2.12) eşitliği yardımı ile kolayca gösterilebilir (Podlubny, 1999).

### 2.2.7. Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı

Yukarıda verdiğimiz tüm kesirli türev tanımları lineerlik özelliğini sağlamaktadır. Bu özellik, kesirli türev tanımlarında ortak olarak sağlanan tek özelliktir. Bununla birlikte aşağıdaki özellikler yukarıda verilen türev tanımların dezavantajlarından bazılarıdır (Khalil ve ark., 2014).

- i. Yukarıda verilen kesirli türev yaklaşımları, iki fonksiyonun çarpımının türevi için verilen

$$D_a^{\alpha}(fg) = fD_a^{\alpha}(g) + gD_a^{\alpha}(f)$$

formülü sağlamaz.

- ii. Yukarıda verilen kesirli türev yaklaşımları, iki fonksiyonun bölümünün türevi için verilen

$$D_a^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_a^{\alpha}(f) + fD_a^{\alpha}(g)}{g^2}$$

şeklindeki formülü sağlamaz.

- iii. Yukarıda verilen kesirli türev yaklaşımları

$$D_a^{\alpha}(f \circ g) = f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t)$$

şeklindeki zincir kuralını sağlamaz.

- iv. Yukarıda verilen kesirli türev yaklaşımları

$$D^{\alpha} D^{\beta} f = D^{\alpha+\beta} f$$

şeklindeki eşitliği sağlamaz.

**Tanım 2.2.1.**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $t > 0$  ve  $\alpha \in (0,1)$  için  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$  –inci mertebeden conformable kesirli türevi,

$$T_{\alpha}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer  $f$  fonksiyonu  $a > 0$  için  $(0, a)$  aralığında  $\alpha$  –inci mertebeden diferansiyellenebilir ve  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$  limiti mevcut ise, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

eşitliği geçerlidir (Khalil ve ark., 2014; Kurt ve ark., 2015).

Tez içerisinde  $\alpha$  –inci mertebeden conformable kesirli türevi göstermek için bazı yerlerde  $T_\alpha(f)(t)$  yerine  $f^{(\alpha)}(t)$  ifadeside kullanıldı. Bununla birlikte eğer  $\alpha$  mertebeden conformable kesirli türevi mevcut ise, o zaman  $f$  fonksiyonu  $\alpha$  mertebeden diferansiyellenebilir denir (Khalil ve ark., 2014).

$\alpha$  mertebeden conformable kesirli türevinin en önemli özelliklerinden biri  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$  eşitliğidir (Khalil ve ark., 2014).

**Teorem 2.2.1.** Eğer  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $t_0 > 0$  noktasında  $\alpha \in (0,1]$  olmak üzere  $\alpha$  –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ise o zaman  $f$  fonksiyonu  $t_0$  noktasında sürekli bir fonksiyondur (Khalil ve ark., 2014).

**Teorem 2.2.2.**  $\alpha \in (0,1]$  ve  $t > 0$  için  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $\alpha$  mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

- a. Her  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ ,
- b. Her  $p \in \mathbb{R}$  için  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ ,
- c. Her  $f(t) = \lambda$  sabit fonksiyonu için  $T_\alpha(\lambda) = 0$ ,
- d.  $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ ,
- e.  $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ ,
- f.  $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ .

Bazı elementer fonksiyonların  $\alpha \in (0,1]$  olmak üzere  $\alpha$  mertebeden conformable kesirli türevleri

- a.  $T_\alpha(1) = 0$ ,
- b.  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\alpha(e^{ct}) = ct^{1-\alpha}e^{ct}$ ,
- c.  $b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\alpha(\sin(bt)) = bt^{1-\alpha}\cos(bt)$ ,
- d.  $d \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\alpha(\cos(dt)) = -dt^{1-\alpha}\sin(dt)$ ,
- e.  $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ ,
- f.  $T_\alpha\left(\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$ ,
- g.  $T_\alpha\left(\cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha$ ,
- h.  $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ .

**Tanım 2.2.2.**  $\alpha \in (0,1)$  olmak üzere  $\alpha$  mertebeden conformable kesirli integral

$$I_{\alpha}^{\alpha}(f)(t) = I_1^{\alpha}(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

genelleştirilmiş Riemann integrali ile tanımlanır (Khalil ve ark., 2014).

Yukarıda verilen tanımın kullanılmasıyla

$$I_{\frac{1}{2}}^0(\sqrt{t} \cos t) = \sin t,$$

$$I_{\frac{1}{2}}^0(\cos(2\sqrt{t})) = \sin 2\sqrt{t}$$

eşitlikleri kolayca gösterilir.

**Teorem 2.2.3.**  $f$  sürekli fonksiyonu için  $t \geq a$  olmak üzere

$$T_{\alpha}(I_{\alpha}^{\alpha}(f))(t) = f(t)$$

eşitliği sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

**İspat.**  $f$  fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan  $I_{\alpha}^{\alpha}(f)(t)$  fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan

$$T_{\alpha}(I_{\alpha}^{\alpha}(f))(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_{\alpha}^{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx = t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t)$$

eşitliği elde edilir.



### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1 Homotopi Analiz Yöntemi

Bu kısımda, Homotopi Analiz yönteminin genel bir lineer olmayan diferansiyel denkleme uygulanmasına yer verildi.

Lineer olmayan denklemlerin tam çözümünü bulmak bazı durumlarda imkansızdır. 1992 yılında, lineer ve lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunmasına yardımcı olan ve Homotopi kavramına dayanan Homotopi Analiz yöntemi Shijun Liao tarafından literatüre kazandırıldı. Doğada meydana gelen olayların matematiksel modellenmesiyle meydana gelen cebirsel denklemler, diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler gibi birçok lineer olmayan denklemlerin Homotopi Analiz yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir (Abbasbandy, 2006; Zhang ve ark., 2011; Tasbozan ve ark., 2012; Esen ve ark., 2012; Esen ve ark., 2013; Abbasbandy ve ark., 2013).

Bu yöntemde kullanılan, yardımcı parametreler sayesinde elde edilen seri çözümlerinin yakınsaklık bölgesi kontrol edilebilir. Ayrıca, bir yardımcı lineer operatör yardımıyla problemin başlangıç yaklaşımından tam çözümüne götüren sürekli bir dönüşüm tanımlanır. Sonuç olarak, ele alınan lineer olmayan denklemler Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak sonsuz sayıda lineer probleme dönüşmüş olur (Liao, 2003).

**Tanım 3.1.1.**  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar olsun. Her  $x \in X$  için  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X \rightarrow Y$  sürekli dönüşümleri arasında  $h(x, 0) = f(x)$  ve  $h(x, 1) = g(x)$  olacak şekilde  $h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  sürekli dönüşümü varsa  $f$  ve  $g$  sürekli dönüşümlerine homotopiktir denir ve  $f \simeq g$  ile gösterilir.  $h$  dönüşümüne  $f$  ve  $g$  sürekli dönüşümleri arasında homotopidir denir (Klaus, 1980). Böylece,

$$h(x, q) = (1 - q)f(x) + qg(x)$$

olarak tanımlanırsa  $h(x, q)$ ,  $f(x)$  ve  $g(x)$  dönüşümleri arasında bir homotopi oluşturur. Burada  $q$  parametresine homotopi parametresi veya gömme parametresi denir (Klaus, 1980).

#### 3.2. Sıfırıncı-Derece Deformasyon Denklemi

$x$  konum,  $t$  zaman değişkenleri olmak üzere  $u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyon ve  $\mathcal{N}$  lineer olmayan bir operatör olmak üzere

$$\mathcal{N}[u(x, t)] = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklindeki lineer olmayan genel bir diferansiyel denklemi ele alınsın.  $u_0(x, t)$  bir başlangıç yaklaşımı,  $\hbar$  sıfırdan farklı bir yardımcı parametre,  $H(x, t)$  sıfırdan farklı bir yardımcı fonksiyon ve  $\mathcal{L}$  ise

$$f(x, t) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f(x, t)] = 0 \quad (3.2.2)$$

koşulunu sağlayan bir yardımcı lineer operatör olsun. Bu şartlar altında

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi(x, t; q); u_0(x, t), H(x, t), \hbar, q] = \\ (1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} - q\hbar H(x, t)\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

homotopisi kurulabilir. Burada  $q \in [0, 1]$  gömme parametresidir. Sıfırdan farklı olan  $\hbar$  yardımcı parametresinin ve  $H(x, t)$  fonksiyonunun Homotopi Analiz yönteminde önemli katkıları vardır. Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen seri çözümlerin yakınsaklığı için  $\hbar$  yardımcı parametresi çok büyük öneme sahiptir. Ayrıca yöntemin en büyük avantajlarından birisi de,  $u_0(x, t)$  başlangıç tahmininin,  $\mathcal{L}$  yardımcı lineer operatörünün,  $\hbar$  yardımcı parametresinin ve  $H(x, t)$  fonksiyonunun ele alınan lineer olmayan problemlere uygun olarak seçilebilmesidir (Liao, 2003).

(3.2.3) homotopisinin

$$\mathcal{H}[\Phi(x, t; q); u_0(x, t), H(x, t), \hbar, q] = 0$$

seçilmesiyle, sıfırncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} = q\hbar H(x, t)\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] \quad (3.2.4)$$

olarak elde edilir.

(3.2.4) sıfırncı-derece deformasyon denkleminde  $q = 0$  seçilirse, sıfırncı-derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[\Phi(x, t; 0) - u_0(x, t)] = 0 \quad (3.2.5)$$

şekline dönüşür. (3.2.5) eşitliğinde  $\mathcal{L}$  yardımcı lineer operatörünün (3.2.2) ile verilen özelliğinin kullanılmasıyla

$$\Phi(x, t; 0) = u_0(x, t) \quad (3.2.6)$$

bulunur.

Eğer (3.2.4) sıfırncı-derece deformasyon denkleminde  $q = 1$  seçilir ve  $\hbar \neq 0$ ,  $H(x, t) \neq 0$  olduğu dikkate alınırsa, (3.2.4) sıfırncı-derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{N}[\Phi(x, t; 1)] = 0 \quad (3.2.7)$$

olur. Böylece (3.2.7) ve (3.2.1) eşitliklerinden

$$\Phi(x, t; 1) = u(x, t) \quad (3.2.8)$$

bulunur. (3.2.6) ve (3.2.8) ile verilen denklemlerden,  $q$  parametresi 0 dan 1 e artarken  $\Phi(x, t; q)$  fonksiyonunun,  $u_0(x, t)$  başlangıç koşulundan  $u(x, t)$  tam çözümüne değiştiği anlaşılır. Homotopi konusunda böyle bir değişime deformasyon adı verilir (Liao, 2003).

$u_0^{[m]}(x, t)$  ile gösterilen

$$u_0^{[m]}(x, t) = \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

ifadesine  $m$  –inci derece deformasyon türevi adı verilir. Eğer  $\Phi(x, t; q)$  fonksiyonu  $q$  gömme parametresine göre Taylor serisine açılırsa

$$\Phi(x, t; q) = \Phi(x, t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_0^{[m]}(x, t)}{m!} q^m \quad (3.2.9)$$

eşitliği bulunur. Burada (3.2.6) özelliğinin ve

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = D_m(\Phi) \quad (3.2.10)$$

eşitliğinin kullanılması ile  $\Phi(x, t; q)$  fonksiyonunun (3.2.9) Taylor serisi

$$\Phi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) q^m \quad (3.2.11)$$

olarak yeniden yazılır. (3.2.10) eşitliğinde tanımlanan  $D_m(\Phi)$  ifadesine,  $\Phi$  fonksiyonunun  $m$  –inci dereceden homotopi türevi ve (3.2.11) serisi de homotopi serisi denir (Liao, 2009).

(3.1.4) ile verilen sıfırncı-derece deformasyon denkleminde;  $u_0(x, t)$  başlangıç koşulunun,  $\mathcal{L}$  yardımcı lineer operatörünün,  $H(x, t)$  fonksiyonunun ve  $\hbar$  yardımcı parametresinin belirlenmesinde aşağıdaki hususlara dikkat edilmelidir (Liao, 2009):

1. Her  $q \in [0,1]$  için  $\Phi(x, t; q)$  fonksiyonu (3.2.4) ile verilen sıfırncı-derece deformasyon denkleminin bir çözümüdür.
2.  $m = 1,2,3, \dots$  olmak üzere  $u_0^{[m]}(x, t)$  deformasyon türevleri mevcuttur.
3.  $\Phi(x, t; q)$  fonksiyonunun (3.2.11) ile verilen kuvvet serisi  $q = 1$  gömme parametresi değerinde yakınsaktır.

$u_0(x, t)$  başlangıç koşulu,  $\mathcal{L}$  yardımcı lineer operatörü,  $H(x, t)$  fonksiyonu ve  $\hbar$  yardımcı parametresinin yukarıdaki varsayımlar altındaki seçimleri ile birlikte (3.2.8) ve (3.2.11) ile verilen eşitliklerden Homotopi Analiz yönteminin lineer olmayan bir probleme uygulanmasıyla elde edilecek seri çözüm

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) \quad (3.2.12)$$

şeklinde bulunur (Liao, 2003).

### 3.3. Homotopi Türevinin Özellikleri

**Teorem 3.3.1.**  $m \geq 0$  ve  $k \geq 1$  koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$$

homotopi serisi için

$$D_m(\phi^k) = \sum_{r_1=0}^m u_{m-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1} u_{r_1-r_2} \sum_{r_3=0}^{r_2} u_{r_2-r_3} \cdots \sum_{r_{k-2}=0}^{r_{k-3}} u_{r_{k-3}-r_{k-2}} \sum_{r_{k-1}=0}^{r_{k-2}} u_{r_{k-2}-r_{k-1}} u_{r_{k-1}}$$

ve

$$D_m(\phi^{k+1}) = \sum_{j=0}^m u_{m-j} D_j(\phi^k) = \sum_{j=0}^m u_j D_{m-j}(\phi^k)$$

şeklindedir (Molabahrami; Khani, 2009).

**Sonuç 3.3.1.** Açık olarak, teorem 3.3.1. den

$$\begin{aligned} & D_m(\phi^{k-1} \phi_x) \\ &= \sum_{r_1=0}^m u_{m-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1} u_{r_1-r_2} \sum_{r_3=0}^{r_2} u_{r_2-r_3} \cdots \sum_{r_{k-2}=0}^{r_{k-3}} u_{r_{k-3}-r_{k-2}} \sum_{r_{k-1}=0}^{r_{k-2}} u_{r_{k-2}-r_{k-1}} u_{r_{k-1}} (u_{r_{k-1}})_x \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Molabahrami ve ark., 2009).

### 3.4. Yüksek-Derece Deformasyon Denklemi

$\vec{u}_n$  vektörü  $\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$  olarak tanımlansın. (3.2.10) ile verilen eşitliğe göre,  $u_m(x, t)$  fonksiyonları (3.2.4) ile verilen sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde elde edilebilir. (3.2.4) ile verilen sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde  $q$  gömme parametresine göre  $m$  kez türev alındıktan sonra, elde edilecek ifade  $m!$  ile bölünür ve son olarak da gömme parametre değeri  $q = 0$  olarak seçilirse  $m$  –inci derece deformasyon denklemi olan

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (3.4.1)$$

eşitliği bulunur. Burada  $\mathcal{X}_m$  değeri

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

olarak ve  $R_m(\vec{u}_{m-1})$  ifadeside

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.4.3)$$

şeklinde tanımlıdır. (3.4.3) ile verilen denklemde (3.2.11) eşitliği kullanılırsa, (3.4.3) denklemi

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) q^n \right] \right\} \Big|_{q=0}$$

şeklinde yeniden yazılır.

(3.4.1) ile verilen yüksek-derece deformasyon denklemi, lineer olmayan bir  $\mathcal{N}$  operatörünün (3.4.3) ile verilen eşitlikte kullanılmasıyla elde edilecek olan  $R_m(u_{m-1}^{\vec{u}})$  teriminden ve  $\mathcal{L}$  yardımcı lineer operatöründen meydana gelmektedir. (3.4.1) ile verilen yüksek-derece deformasyon denkleminin sağ tarafı yalnızca  $u_{m-1}(x, t)$  fonksiyonuna bağlıdır. Böylece  $u_0(x, t)$  başlangıç koşulu (3.4.1) ile verilen yüksek-derece deformasyon denkleminde kullanılarak, bu denklemin iteratif olarak çözülmesiyle  $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots$  değerleri bulunabilir. Sonuç olarak,  $u(x, t)$  fonksiyonunun  $m$  –inci yaklaşımı

$$\sum_{k=0}^m u_k(x, t) \quad (3.4.4)$$

serisi ile bulunur (Liao, 2003).

Homotopi Analiz yönteminde büyük öneme sahip olan ve elde edilen seri çözümlerin yakınsak olmasını sağlayan  $\hbar$  yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığı  $\hbar$  – eğrileri olarak adlandırılan eğriler çizilerek bulunur. Bu eğrileri çizmek için

(3.2.12) ile verilen seri çözümünde  $\hbar$  yardımcı parametresi bağımsız bir değişkenmiş gibi düşünülür. Örneğin,

$$\gamma = u_{tt}(x, t)|_{x=0, t=0}$$

eşitliği düşünülün. Burada  $\gamma$ ,  $\hbar$  değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğundan  $\gamma \sim \hbar$  eğrisi çizilebilir. Alınan terim sayısına göre farklı  $\hbar$  yardımcı parametrelerinde  $\gamma$  için verilen bütün yakınsak seriler tam çözüme yakınsar. Bu nedenle  $\gamma \sim \hbar$  eğrisinin bir kısmında  $\hbar$  eksenine paralel bir doğru parçası oluşur. Bu paralel doğru parçasına karşılık gelen  $\hbar$  değerlerini içeren aralık serinin yakınsak olduğu bölgedir. Bu bölgeye  $\hbar$  yardımcı parametresinin geçerlilik bölgesi denir ve  $R_{\hbar}$  ile gösterilir. Seri çözümünden elde edilen  $\hbar$  yardımcı parametresine bağlı bir fonksiyon, alınan türevin mertebesi ve değişkenine göre değişiklik gösterir. Eğer  $\hbar$  yerine  $\hbar$  yardımcı parametresinin geçerli olduğu bölgeden herhangi bir değer konulursa Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen seri çözümü yakınsak olur (Liao, 2003).

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

### 4.1. Conformable Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri

Bu bölümde conformable kesirli mertebeden zaman parametresine göre türevli Wu-Zhang sisteminin ve birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin yaklaşık çözümleri Homotopi Analiz yöntemi yardımı ile elde edildi.

#### 4.1.1. Conformable Kesirli Mertebeden Wu-Zhang Sistemi

İlk örnek olarak,  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $t > 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= -v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\end{aligned}\quad (4.1.1)$$

conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sistemi

$$u(x, 0) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad (4.1.2)$$

$$v(x, 0) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]^2$$

başlangıç koşulları ile ele alınsın. Problemin tam çözümü

$$u_{tam}(x, t) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right), \quad (4.1.3)$$

$$v_{tam}(x, t) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right) - \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right)\right]^2$$

şeklindedir (Eslami and Rezazadeh, 2016).

(4.1.2) başlangıç koşulları ile verilen (4.1.1) conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin yaklaşık çözümlerini bulmak için  $c_1, c_2$  integral sabitleri için  $\mathcal{L}[c_1] = 0$  ve  $\mathcal{L}[c_2] = 0$  şartları sağlanmak üzere lineer operatörler

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\phi_1(x, t; q)] &= D_t^\alpha[\phi_1(x, t; q)], \\ \mathcal{L}[\phi_2(x, t; q)] &= D_t^\alpha[\phi_2(x, t; q)]\end{aligned}$$

olarak seçilsin.  $\mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)]$  ve  $\mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)]$  lineer olmayan operatörleri ise (4.1.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminden

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= \frac{\partial^\alpha \phi_1(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x}, \\ \mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= \frac{\partial^\alpha \phi_2(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + \phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} \\ &+ \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t; q)}{\partial x^3}\end{aligned}$$

olarak yazılır. Teorem 2.2.2.-(f) özelliğinin kullanılmasıyla, yukarıda elde edilen lineer olmayan operatörler

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial t} + \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x}, \\ \mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)] &= t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial t} + \phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} + \phi_1(x, t; q) \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t; q)}{\partial x^3}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Sıfırncı-derece deformasyon denklemleri  $H_1(x, t) = 1$  ve  $H_2(x, t) = 1$  seçilmesiyle

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi_1(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar_1 \mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)],$$

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi_2(x, t; q) - v_0(x, t)] = q\hbar_2 \mathcal{N}_2[\phi_1(x, t; q), \phi_2(x, t; q)]$$

olarak yazılır. Yukarıda elde edilen sıfırncı-derece deformasyon denklemlerinde  $q = 0$  ve  $q = 1$  değerlerinin seçimiyle

$$\phi_1(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0),$$

$$\phi_2(x, t; 0) = v_0(x, t) = v(x, 0),$$

$$\phi_1(x, t; 1) = u(x, t),$$

$$\phi_2(x, t; 1) = v(x, t)$$

eşitlikleri bulunur. Yukarıda elde edilen sıfırncı-derece deformasyon denklemleri  $q$  gömme parametresine göre  $m$  defa türevi alındıktan sonra  $m!$  ile bölünürse ve elde edilen denklemlerde  $q = 0$  alınırsa,  $m$ -inci dereceden deformasyon denklemleri

$$\vec{u}_{m-1} = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_{m-1}(x, t)\},$$

$$\vec{v}_{m-1} = \{v_0(x, t), v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_{m-1}(x, t)\}$$

ve



$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar_1 R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}),$$

$$\mathcal{L}[v_m(x, t) - \mathcal{X}_m v_{m-1}(x, t)] = \hbar_2 R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})$$

olarak bulunur. Burada  $R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})$  ve  $R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})$  eşitlikleri

$$R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}) = t^{1-\alpha} \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} + \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_{m-1}(x, t)}{\partial x},$$

$$R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}) = t^{1-\alpha} \frac{\partial v_{m-1}(x, t)}{\partial t} + \sum_{n=0}^{m-1} v_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x}$$

$$+ \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial v_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^3}$$

biçimindedir.  $m \geq 1$  olmak üzere, yukarıda elde edilen  $m$  - inci dereceden deformasyon denklemlerinin kullanılmasıyla

$$u_m(x, t) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t) + \hbar_1 \mathcal{L}^{-1}[R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})], \quad (4.1.4)$$

$$v_m(x, t) = \mathcal{X}_m v_{m-1}(x, t) + \hbar_2 \mathcal{L}^{-1}[R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})] \quad (4.1.5)$$

iterasyon formülleri bulunur. Kolaylık olması için  $\hbar_1 = \hbar_2 = \hbar$  olarak alınırsa,  $m \geq 1$  için (4.1.2) ile verilen başlangıç koşullarının yardımıyla (4.1.4) ve (4.1.5) iterasyon formüllerinden

$$u_0(x, t) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right),$$

$$u_1(x, t) = \frac{\sqrt{3} \hbar t^\alpha}{\alpha(1 + \cosh(\sqrt{3}x))},$$

$$u_2(x, t) = \frac{\sqrt{3} \hbar t^\alpha}{\alpha(1 + \cosh(\sqrt{3}x))} + \frac{h^2 t^\alpha \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)^2 \left(2\sqrt{3}\alpha - 3t^\alpha \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right)}{4\alpha^2},$$

⋮  
⋮  
⋮

ve

$$v_0(x, t) = 1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) - \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right]^2,$$

$$v_1(x, t) = -\frac{4\sqrt{3}\hbar t^\alpha \operatorname{csch}(\sqrt{3}x)^3 \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^4}{\alpha},$$

$$v_2(x, t) = -\frac{4\sqrt{3}\hbar t^\alpha \operatorname{csch}(\sqrt{3}x)^3 \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^4}{\alpha}$$

$$+ \frac{\hbar^2 t^\alpha \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^4 \left(3t^\alpha(-2 + \cosh(\sqrt{3}x)) - 2\sqrt{3}a \sinh(\sqrt{3}x)\right)}{8\alpha^2},$$

.

.

.

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak, Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak elde edilen seri çözümler

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t) + \dots,$$

$$v(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t) + v_4(x, t) + \dots$$

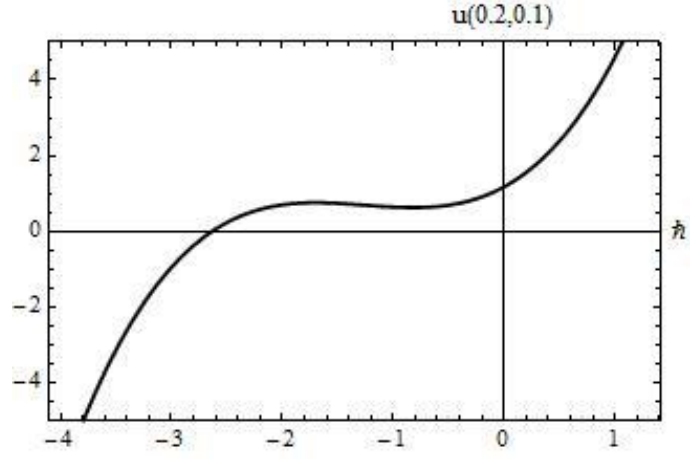
olarak yazılabilir. Mathematica yardımıyla,  $u_0(x, t)$  ve  $v_0(x, t)$  başlangıç değerleri kullanılarak (4.1.4) ve (4.1.5) iterasyon formüllerinin yardımı ile ilk üç terimlerin hesaplanmasıyla  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümleri

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t),$$

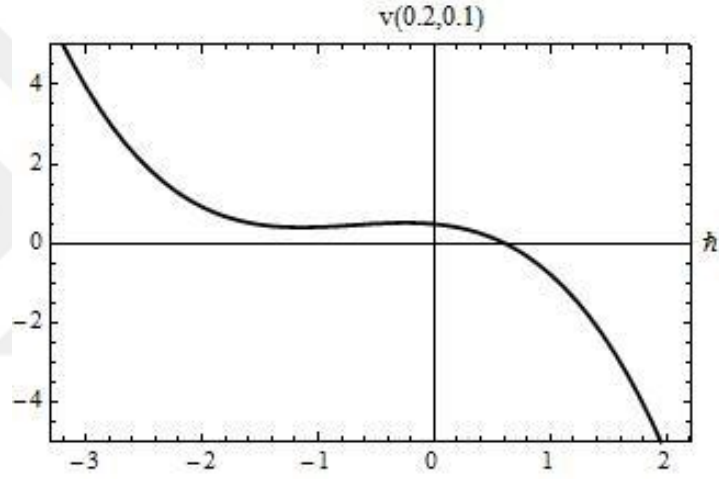
$$v(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t)$$

şeklinde belirlenir.

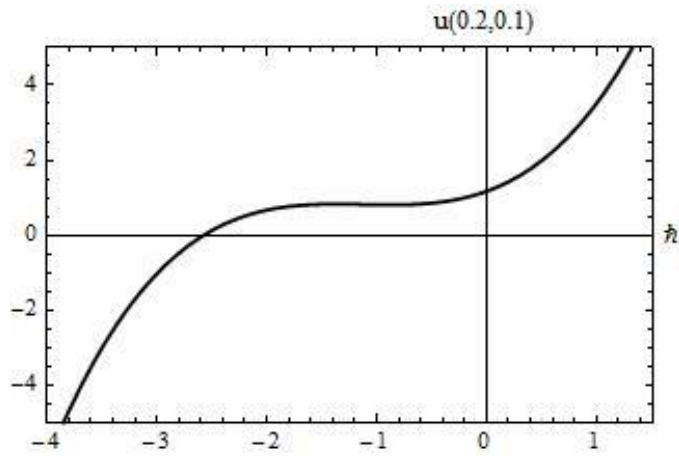
(4.1.2) başlangıç koşulları ile verilen (4.1.1) conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin yakınsaklığını araştırmak için  $x = 0.2$ ,  $t = 0.1$  ve farklı  $\alpha$  değerlerindeki  $\hbar$  – eğrileri Şekil 4.1.-Şekil 4.8. de verildi. Tüm  $\alpha$  değerlerindeki  $\hbar$  – eğrileri incelendiğinde;  $\hbar$  yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığı, yani  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin yakınsak olacağı aralık yaklaşık olarak  $-1.5 \leq \hbar \leq -0.25$  aralığıdır. Bu aralık içerisinde seçilen  $\hbar$  yardımcı parametresi için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin yakınsak olacağı görülür.



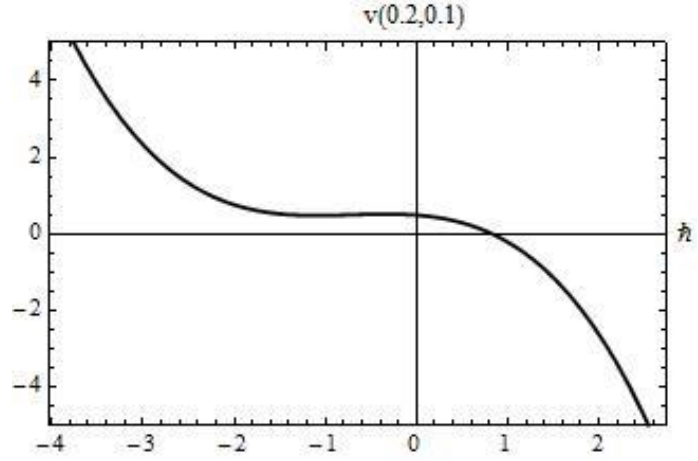
Şekil 4.1.  $\alpha = 0.5$  için  $u(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi



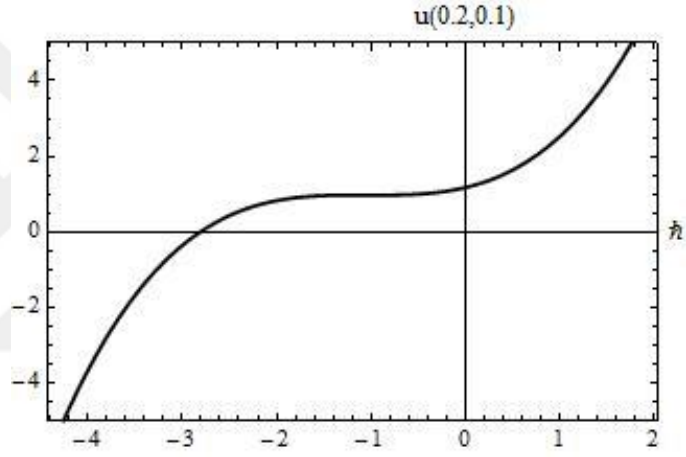
Şekil 4.2.  $\alpha = 0.5$  için  $v(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi



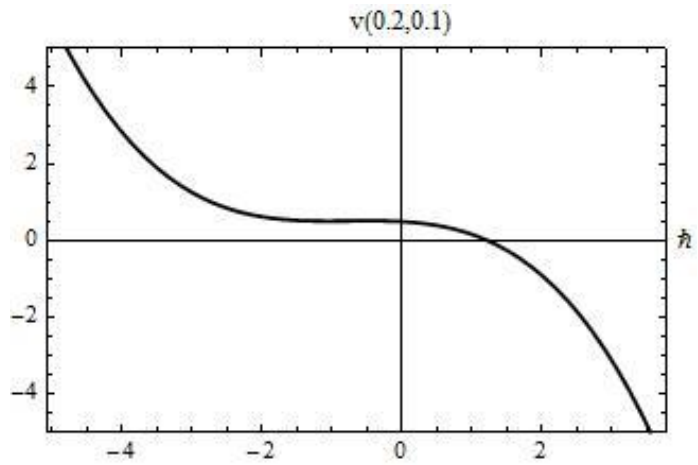
Şekil 4.3.  $\alpha = 0.6$  için  $u(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi



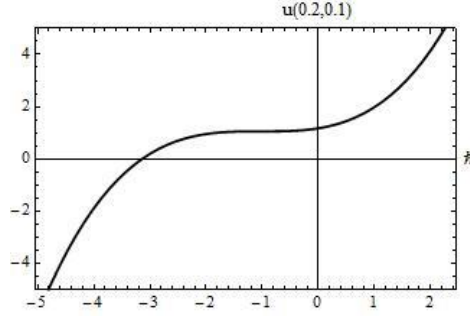
Şekil 4.4.  $\alpha = 0.6$  için  $v(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi



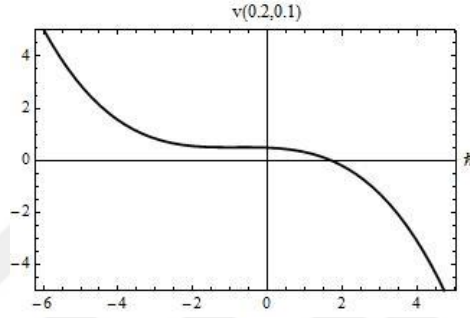
Şekil 4.5.  $\alpha = 0.75$  için  $u(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi



Şekil 4.6.  $\alpha = 0.75$  için  $v(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi

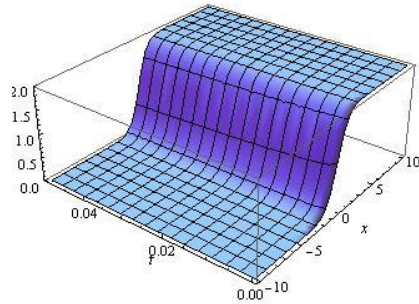


Şekil 4.7.  $\alpha = 0.9$  için  $u(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $\hbar$  eğrisi

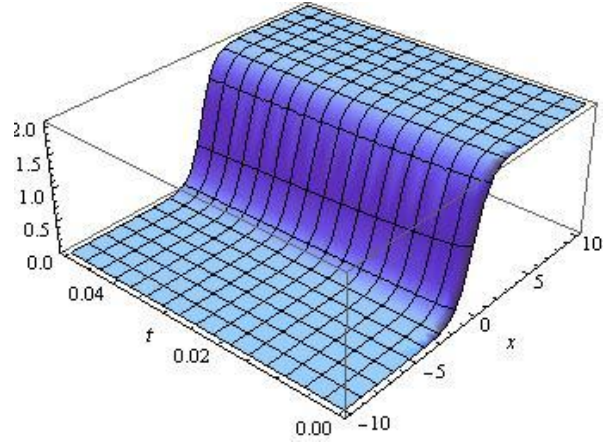


Şekil 4.8.  $\alpha = 0.9$  için  $v(0.2,0.1)$  yaklaşık çözümünün  $\hbar$  eğrisi

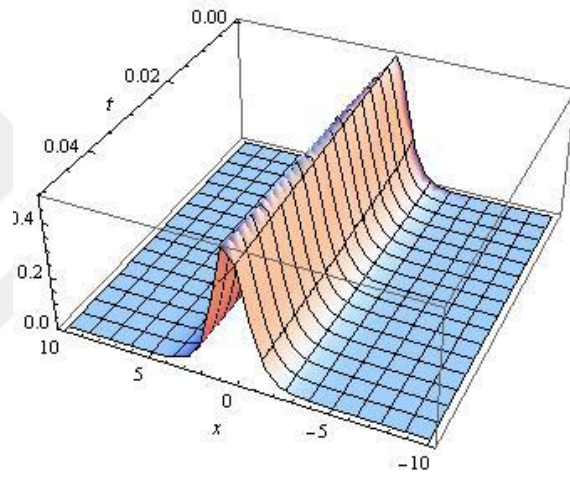
Şekil 4.9.-Şekil 4.16. da conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin,  $\alpha = 0.5$  ve  $\alpha = 0.9$  değerlerinde  $\hbar = -1$  değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin ve  $u_{tam}(x, t)$ ,  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümlerinin  $-10 \leq x \leq 10$  ve  $0 \leq t \leq 0.05$  aralıklarında yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde,  $\hbar = -1$  için Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak elde edilen  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin yüzeyleri ile  $u_{tam}(x, t)$ ,  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümlerinin yüzeyleri uyumlu olduğu görülmektedir.



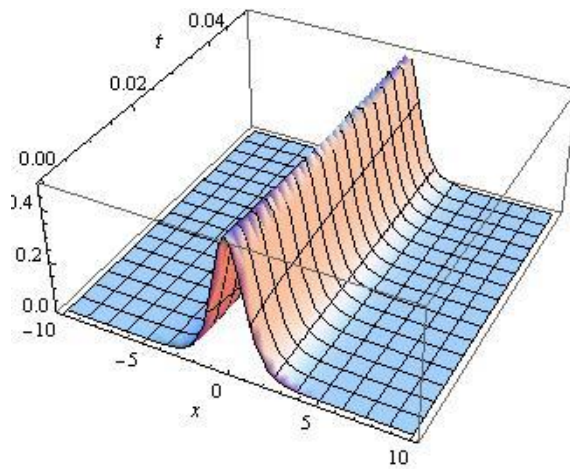
Şekil 4.9.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü



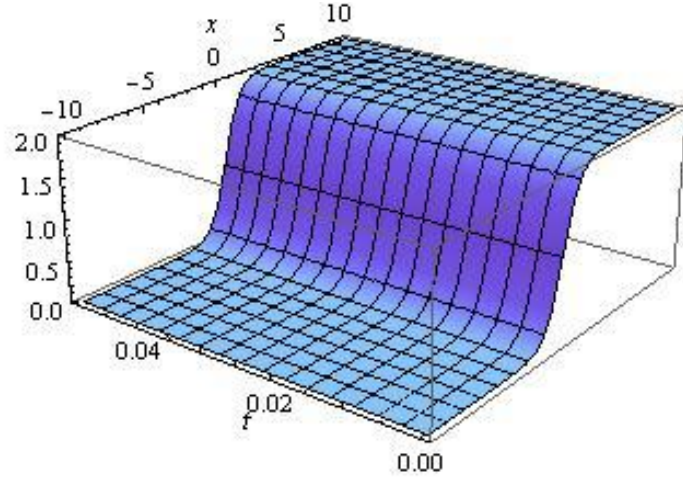
Şekil 4.10.  $\alpha = 0.5$  için  $u_{tam}(x, t)$  analitik çözümü



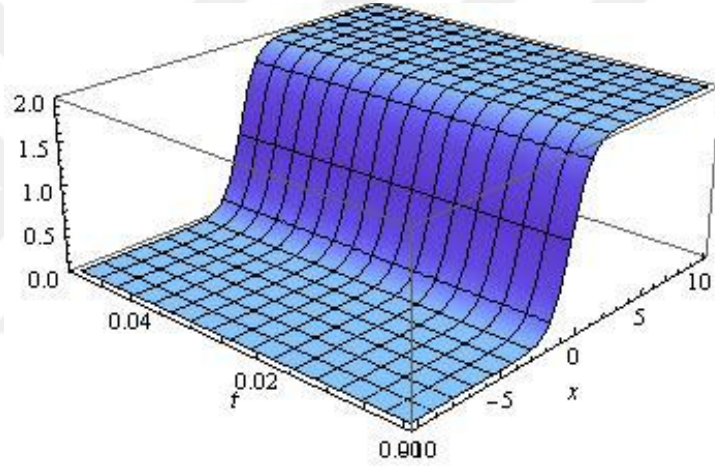
Şekil 4.11.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü



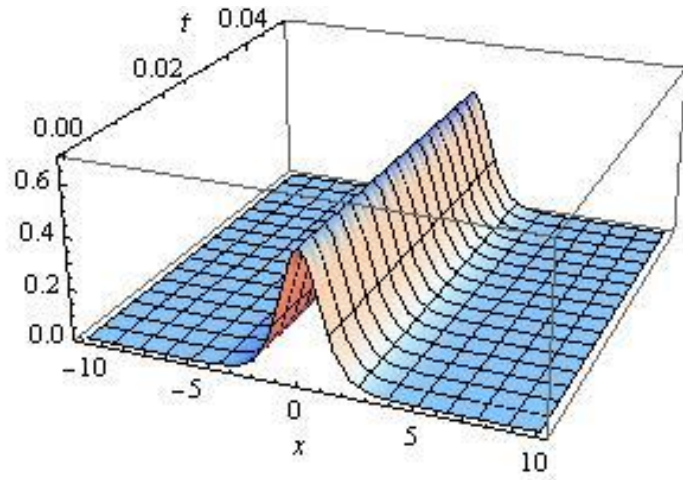
Şekil 4.12.  $\alpha = 0.5$  için  $v_{tam}(x, t)$  analitik çözümü



Şekil 4.13.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü

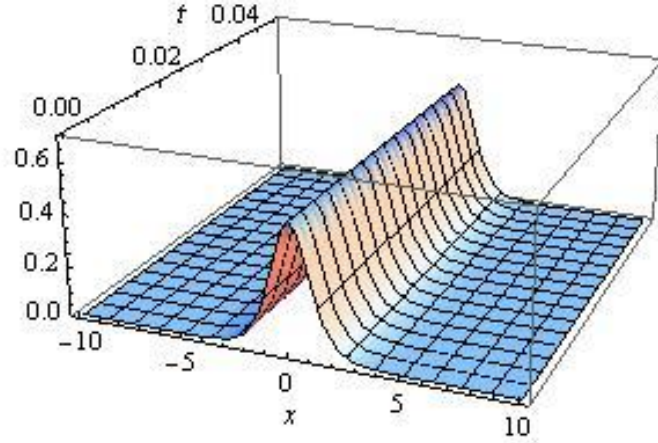


Şekil 4.14.  $\alpha = 0.9$  için  $u_{tam}(x, t)$  analitik çözümü



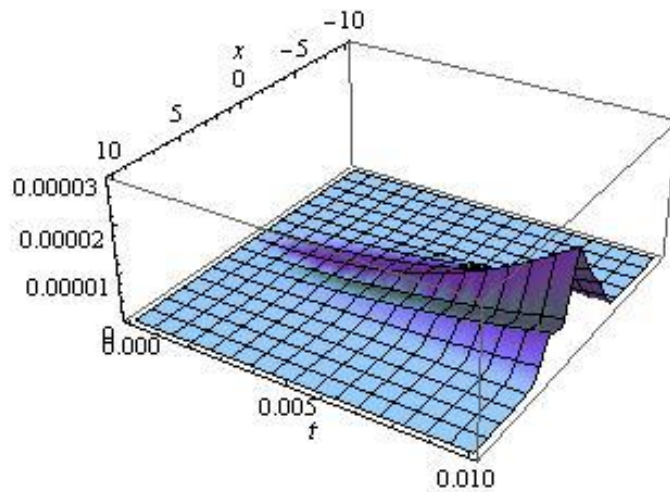
Şekil 4.15.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü





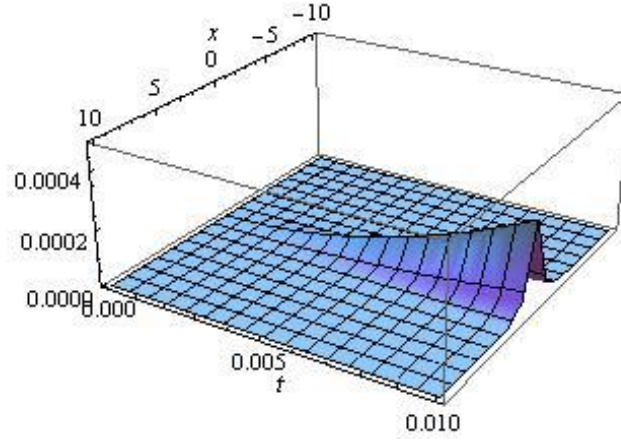
Şekil 4.16.  $\alpha = 0.9$  için  $v_{tam}(x, t)$  analitik çözümü

Conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin,  $-10 \leq x \leq 10$  ve  $0 \leq t \leq 0.01$  aralıklarında farklı  $\alpha$  değerlerinde  $\hbar = -1$  değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümleri ile  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümleri arasındaki mutlak hata yüzeyleri Şekil 4.17.-Şekil 4.24. de verildi. Yüzeyler incelendiğinde,  $\hbar = -1$  için elde edilen  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  Homotopi Analiz yönteminin yaklaşık çözümleri ile  $u_{tam}(x, t)$ ,  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümleri arasındaki mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca  $\alpha$  değeri arttıkça hataların azaldığı mutlak hata grafiklerinden açıkça görülmektedir.

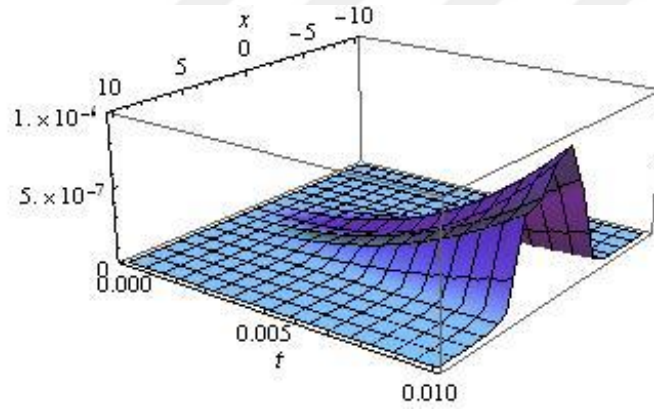


Şekil 4.17.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

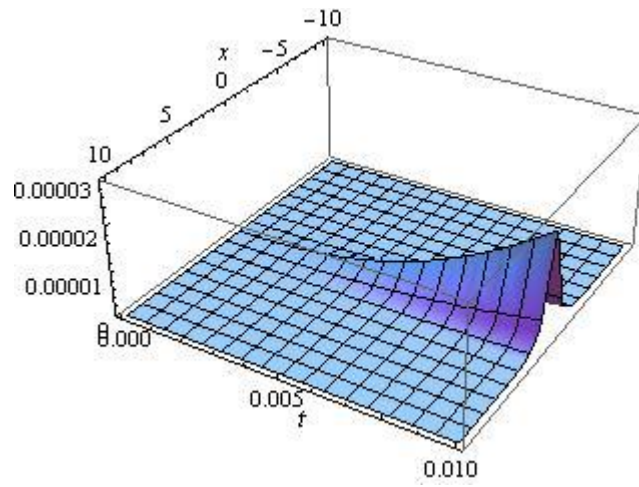




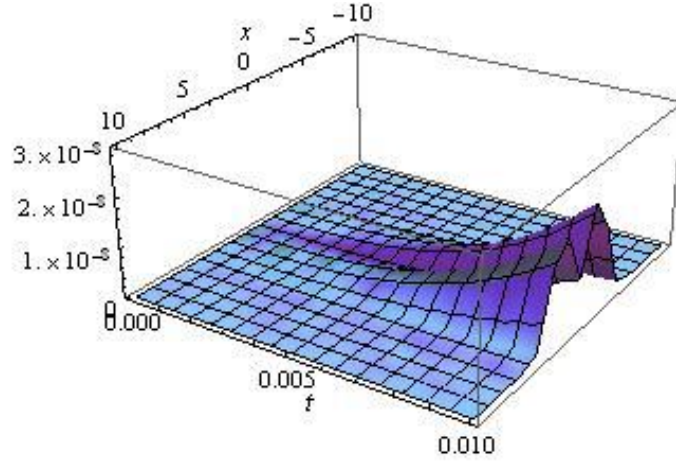
Şekil 4.18.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği



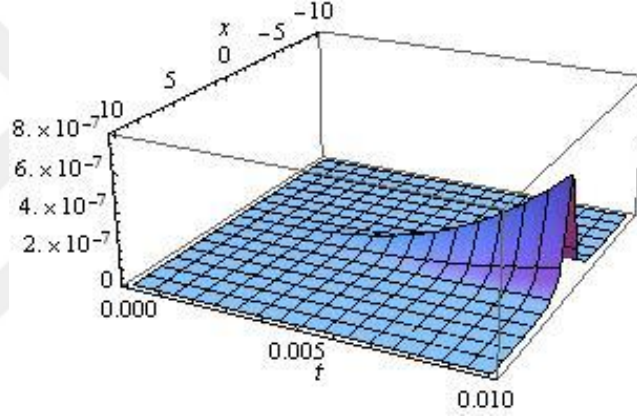
Şekil 4.19.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.6$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği



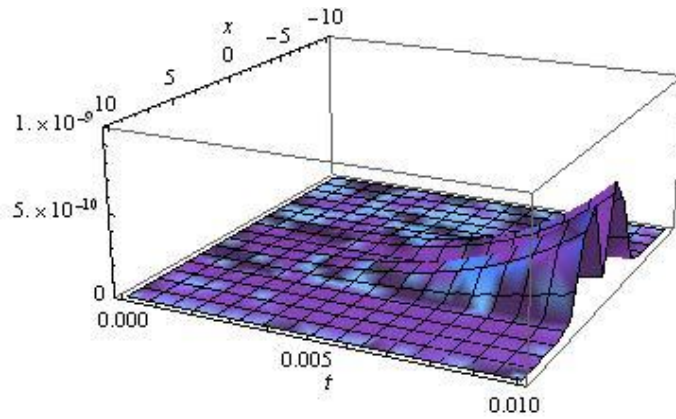
Şekil 4.20.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.6$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği



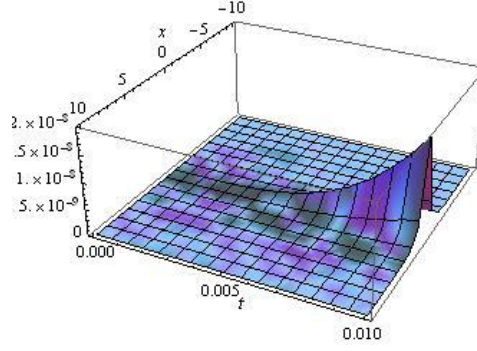
Şekil 4.21.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği



Şekil 4.22.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

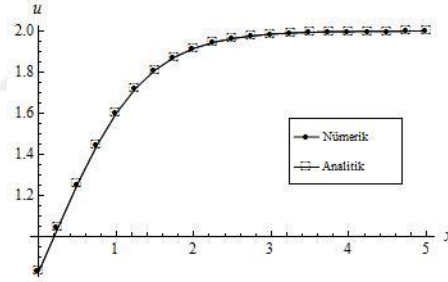


Şekil 4.23.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

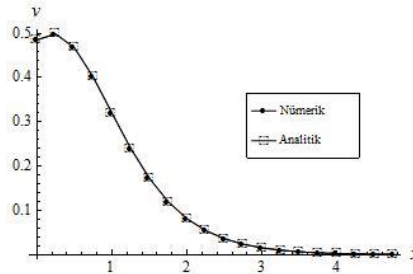


Şekil 4.24.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

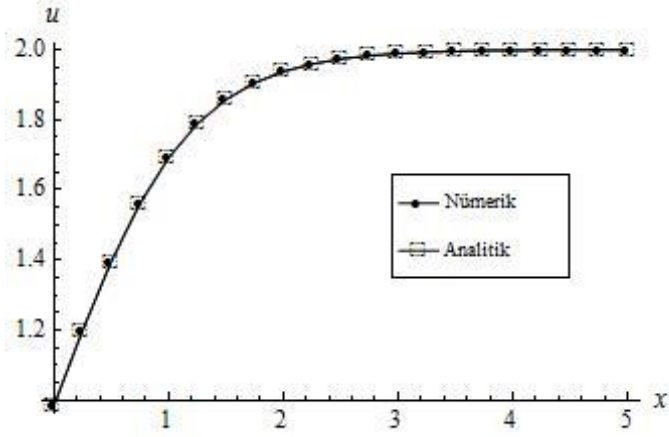
Şekil 4.25.-Şekil 4.28. de ele alınan problemin  $t = 0.01$  zamanında,  $0 \leq x \leq 5$  aralığında,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 0.9$  değerleri kullanılarak  $\hbar = -1$  değeri için elde edilen  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  nümerik çözümleri ile  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümlerinin eğrileri verildi. Eğriler incelendiğinde, göz önüne alınan değerlerde yaklaşık çözüm eğrileri ile tam çözüm eğrilerinin uyumlu olduğu görülmektedir.



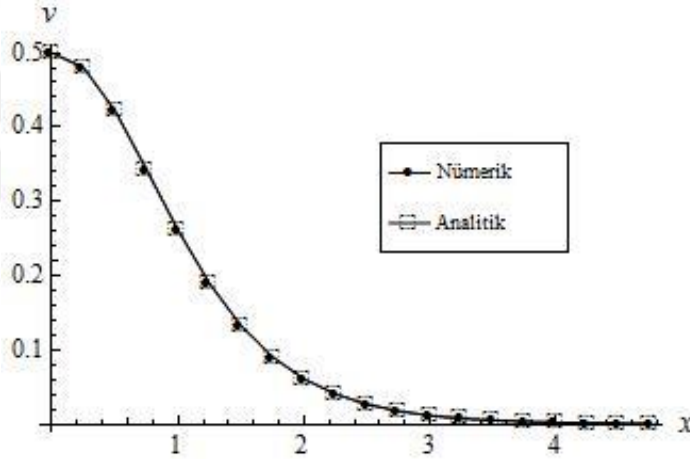
Şekil 4.25.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.26.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.27.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.28.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $v(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümünün karşılaştırılması

Conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin,  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve farklı  $\alpha$  değerlerindeki göz önüne alınan yöntem yardımı ile elde edilen  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hataları Çizelge 4.1.-Çizelge 4.4. de verildi. Çizelgeler incelendiğinde, ele alınan değerlerde yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yakın olduğu ve mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu görülür. Ayrıca  $\alpha$  değeri arttıkça hataların azaldığı tablolardan açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.1.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$			$v(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	0.91358	0.91361	$3.077 \times 10^{-5}$	0.49598	0.49627	$2.912 \times 10^{-4}$
0.2	0.99992	1.00000	$7.826 \times 10^{-5}$	0.49975	0.50000	$2.517 \times 10^{-4}$
0.3	1.08627	1.08639	$1.163 \times 10^{-4}$	0.49608	0.49627	$1.846 \times 10^{-4}$
0.4	1.17135	1.17149	$1.414 \times 10^{-4}$	0.48519	0.48530	$1.030 \times 10^{-4}$
0.5	1.25396	1.25412	$1.520 \times 10^{-4}$	0.46769	0.46771	$2.094 \times 10^{-5}$
0.6	1.33304	1.33319	$1.493 \times 10^{-4}$	0.44454	0.44449	$4.973 \times 10^{-5}$
0.7	1.40770	1.40784	$1.359 \times 10^{-4}$	0.41694	0.41684	$1.016 \times 10^{-4}$
0.8	1.47729	1.47740	$1.153 \times 10^{-4}$	0.38618	0.38604	$1.322 \times 10^{-4}$
0.9	1.54137	1.54146	$9.124 \times 10^{-5}$	0.35355	0.35341	$1.431 \times 10^{-4}$
1.0	1.59972	1.59979	$6.666 \times 10^{-5}$	0.32026	0.32013	$1.386 \times 10^{-4}$

Çizelge 4.2.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.6$  için  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$			$v(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	0.99553	0.99553	$3.090 \times 10^{-6}$	0.49997	0.49999	$2.199 \times 10^{-5}$
0.2	1.08194	1.08190	$6.629 \times 10^{-6}$	0.49662	0.49664	$1.848 \times 10^{-5}$
0.3	1.16714	1.16715	$9.378 \times 10^{-6}$	0.48602	0.48603	$1.302 \times 10^{-5}$
0.4	1.24992	1.24993	$1.109 \times 10^{-5}$	0.46876	0.46877	$6.653 \times 10^{-6}$
0.5	1.32920	1.32921	$1.169 \times 10^{-5}$	0.44581	0.44581	$4.498 \times 10^{-7}$
0.6	1.40409	1.40410	$1.130 \times 10^{-5}$	0.41836	0.41835	$4.732 \times 10^{-6}$
0.7	1.47394	1.47395	$1.014 \times 10^{-5}$	0.38770	0.38769	$8.397 \times 10^{-6}$
0.8	1.53828	1.53829	$8.489 \times 10^{-6}$	0.35513	0.35512	$1.043 \times 10^{-5}$
0.9	1.59692	1.59692	$6.615 \times 10^{-6}$	0.32185	0.32184	$1.100 \times 10^{-5}$
1.0	1.64980	1.64980	$4.744 \times 10^{-6}$	0.28889	0.28888	$1.045 \times 10^{-5}$

Çizelge 4.3.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$			$v(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	1.05005	1.05005	$9.230 \times 10^{-8}$	0.49875	0.49875	$5.612 \times 10^{-7}$
0.2	1.13585	1.13585	$1.818 \times 10^{-7}$	0.49077	0.49077	$4.628 \times 10^{-7}$
0.3	1.21965	1.21965	$2.498 \times 10^{-7}$	0.47588	0.47588	$3.168 \times 10^{-7}$
0.4	1.30034	1.30034	$2.904 \times 10^{-7}$	0.45490	0.45490	$1.509 \times 10^{-7}$
0.5	1.37695	1.37695	$3.026 \times 10^{-7}$	0.42896	0.428956	$7.414 \times 10^{-9}$
0.6	1.44872	1.44872	$2.895 \times 10^{-7}$	0.39932	0.39932	$1.370 \times 10^{-7}$
0.7	1.51514	1.51514	$2.574 \times 10^{-7}$	0.36732	0.36732	$2.264 \times 10^{-7}$
0.8	1.57590	1.57590	$2.135 \times 10^{-7}$	0.33417	0.33417	$2.737 \times 10^{-7}$
0.9	1.63090	1.63090	$1.648 \times 10^{-7}$	0.30098	0.30098	$2.842 \times 10^{-7}$
1.0	1.68021	1.68021	$1.167 \times 10^{-7}$	0.26866	0.26866	$2.670 \times 10^{-7}$

Çizelge 4.4.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $u_{tam}(x, t)$  ve  $v_{tam}(x, t)$  tam çözümler ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$			$v(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	1.07123	1.07123	$2.954 \times 10^{-9}$	0.49746	0.49746	$1.698 \times 10^{-8}$
0.2	1.15665	1.15665	$5.653 \times 10^{-9}$	0.48773	0.48773	$1.389 \times 10^{-8}$
0.3	1.23980	1.23980	$7.685 \times 10^{-9}$	0.47125	0.47125	$9.399 \times 10^{-9}$
0.4	1.31956	1.31956	$8.877 \times 10^{-9}$	0.44894	0.44894	$4.343 \times 10^{-9}$
0.5	1.39504	1.39504	$9.205 \times 10^{-9}$	0.42197	0.42197	$4.455 \times 10^{-10}$
0.6	1.46554	1.46554	$8.775 \times 10^{-9}$	0.39164	0.39164	$4.336 \times 10^{-9}$
0.7	1.53059	1.53059	$7.775 \times 10^{-9}$	0.35924	0.35924	$6.993 \times 10^{-9}$
0.8	1.58994	1.58994	$6.427 \times 10^{-9}$	0.32599	0.32599	$8.371 \times 10^{-9}$
0.9	1.64353	1.64353	$4.939 \times 10^{-9}$	0.29294	0.29294	$8.640 \times 10^{-9}$
1.0	1.69147	1.69147	$3.482 \times 10^{-9}$	0.26093	0.26093	$8.083 \times 10^{-9}$

#### 4.1.2. Conformable Kesirli Mertebeden Birleştirilmiş KdV-mKdV Denklemi

İkinci örnek olarak ise  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $t > 0$  olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (4.1.6)$$

conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi

$$u(x, 0) = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \tanh(x) \quad (4.1.7)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alınsın. (4.1.6) – (4.1.7) ile verilen problemin tam çözümü

$$u_{tam}(x, t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \tanh\left(x - \frac{7t^\alpha}{4\alpha}\right) \quad (4.1.8)$$

olarak verilmiştir (Taşbozan ve ark., 2016).

(4.1.7) başlangıç koşulu ile verilen (4.1.6) conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için  $c$  integral sabiti olmak üzere  $\mathcal{L}[c] = 0$  özelliğinin kullanılmasıyla

$$\mathcal{L}[\phi(x, t; q)] = D_t^\alpha[\phi(x, t; q)]$$

olacak şekilde lineer operatör belirlensin. (4.1.6) conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin yardımıyla, lineer olmayan  $\mathcal{N}[\phi(x, t; q)]$  operatör

$$\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + \phi(x, t; q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} + (\phi(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi(x, t; q)}{\partial x^3}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen lineer olmayan operatör, Teorem 2.2.2.-(f) özelliğinin yardımıyla yeniden düzenlenirse

$$\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = t^{1-\alpha} \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} + \phi(x, t; q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} + (\phi(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi(x, t; q)}{\partial x^3}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar\mathcal{N}[\phi(x, t; q)]$$

şeklinde sıfırncı-derece deformasyon denklemi elde edilmiş olur. Elde edilen sıfırncı-derece deformasyon denkleminde  $q$  değerinin yerine sırasıyla  $q = 0$  ve  $q = 1$  değerlerinin yazılmasıyla  $\phi(x, t; 0)$  ve  $\phi(x, t; 1)$  değerleri

$$\phi(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0),$$

$$\phi(x, t; 1) = u(x, t)$$

şeklinde bulunur. Sıfırcı-derece deformasyon denkleminde gerekli işlemler yapılarak  $m$  –inci dereceden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (4.1.9)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\vec{u}_{m-1} = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, \vec{u}_{m-1}(x, t)\},$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = t^{1-\alpha} \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} + \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^3 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} \\ + \sum_{n=0}^{m-1} \left( \sum_{k=0}^n u_k(x, t) u_{n-k}(x, t) \right) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x}$$

ve

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

şeklinindedir. Böylece, (4.1.9) ile verilen  $m$  –inci dereceden deformasyon denkleminden

$$u_m(x, t) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})], \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.10)$$

yazılabilir.  $m \geq 1$  olmak üzere (4.1.7) ile verilen başlangıç koşulunun kullanılmasıyla (4.1.10) iterasyon formülünden

$$u_0(x, 0) = -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \tanh(x)$$

$$u_1(x, t) = \frac{\sqrt{3} \hbar t^\alpha}{\alpha(1 + \cosh(\sqrt{3}x))},$$

$$u_2(x, t) = \frac{\sqrt{3} \hbar t^\alpha}{\alpha(1 + \cosh(\sqrt{3}x))} + \frac{h^2 t^\alpha \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 \left(2\sqrt{3}\alpha - 3t^\alpha \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}{4\alpha^2}$$

·  
·  
·

değerleri elde edilir. Bu değerler yardımıyla

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots,$$

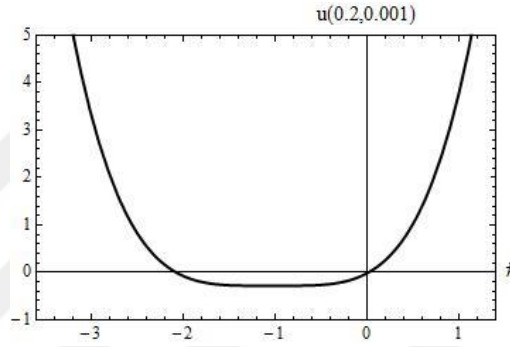
şeklinde seri çözümünü bulunmuş olur. Homotopi Analiz yöntemi yardımıyla elde edilen iterasyon formülünden ilk 4 terimin Mathematica yardımıyla hesaplanmasıyla

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t)$$

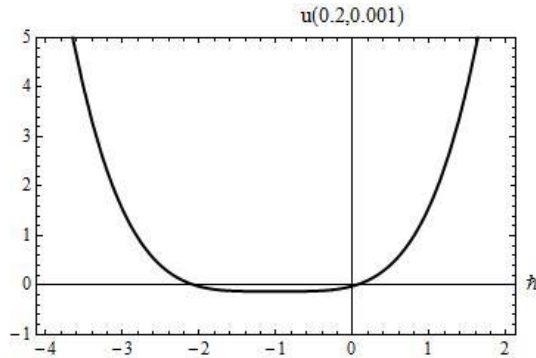


Homotopi Analiz yaklaşık çözümü bulunur.

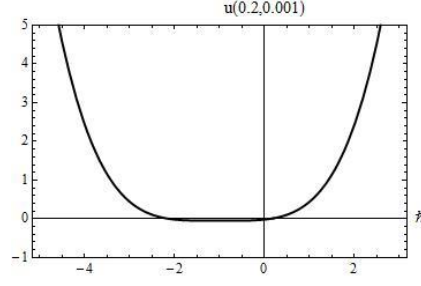
Şekil 4.29.-Şekil 4.32. de (4.1.7) başlangıç koşulu ile verilen (4.1.6) conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV probleminin, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$  çözümünün yakınsaklığını araştırmak için  $x = 0.2$ ,  $t = 0.001$  ve farklı  $\alpha$  değerlerindeki  $\hbar$  – eğrileri verildi. Farklı  $\alpha$  değerleri için verilen  $\hbar$  – eğrileri incelendiğinde,  $\hbar$  yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak  $-1.75 \leq \hbar \leq -0.25$  aralığıdır.  $\hbar$  yardımcı parametresinin,  $-1.75 \leq \hbar \leq -0.25$  aralığından seçilen herhangi bir değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün yakınsak olacağı görülür.



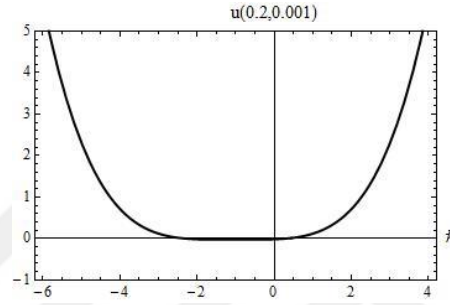
Şekil 4.29.  $\alpha = 0.5$  için  $u(0.2,0.001)$  yaklaşık çözümünün  $\hbar$  eğrisi



Şekil 4.30.  $\alpha = 0.6$  için  $u(0.2,0.001)$  yaklaşık çözümünün  $\hbar$  eğrisi

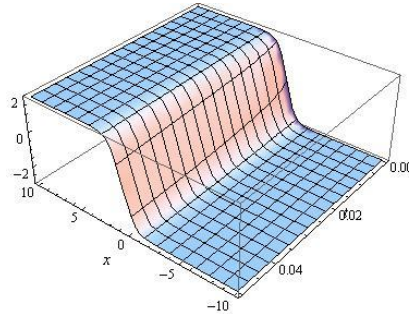


Şekil 4.31.  $\alpha = 0.75$  için  $u(0.2,0.001)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi

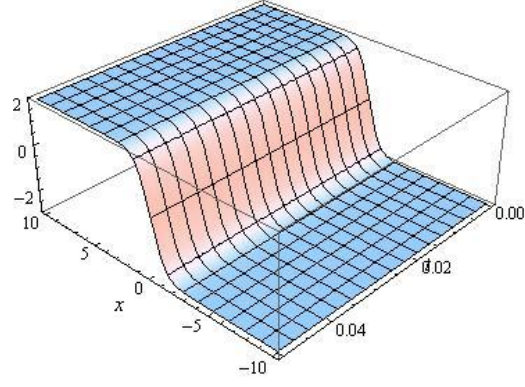


Şekil 4.32.  $\alpha = 0.9$  için  $u(0.2,0.001)$  yaklaşık çözümünün  $h$  eğrisi

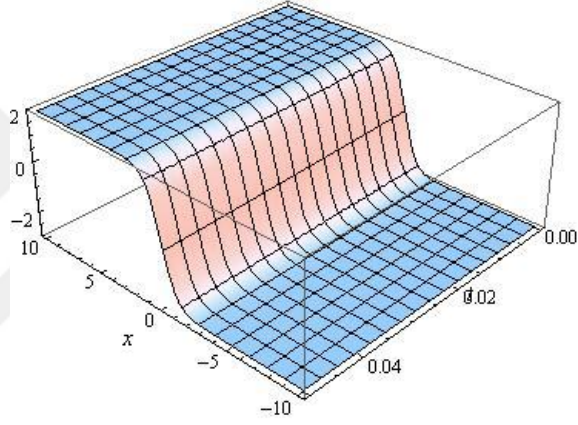
Conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV probleminin,  $-10 \leq x \leq 10$  ve  $0 \leq t \leq 0.05$  aralıklarında  $\alpha = 0.5$  ve  $\alpha = 0.9$  değerlerinde  $h = -1$  değeri için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün ve  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün yüzeyleri Şekil 4.33.-Şekil 4.36. da verildi. Yüzeyler incelendiğinde,  $h = -1$  seçimi için elde edilen  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün yüzeyi ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün yüzeyleri uyumlu olduğu görülmektedir.



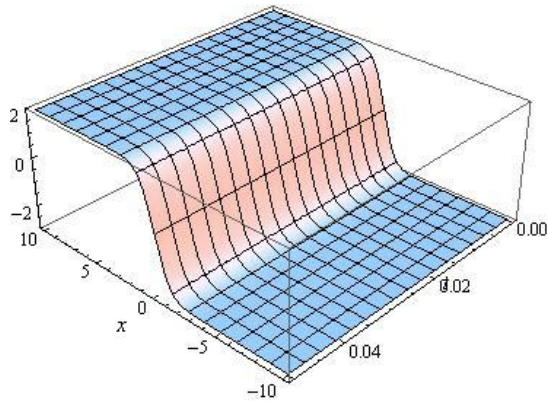
Şekil 4.33.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü



Şekil 4.34.  $\alpha = 0.9$  için  $u_{tam}(x, t)$  analitik çözümü

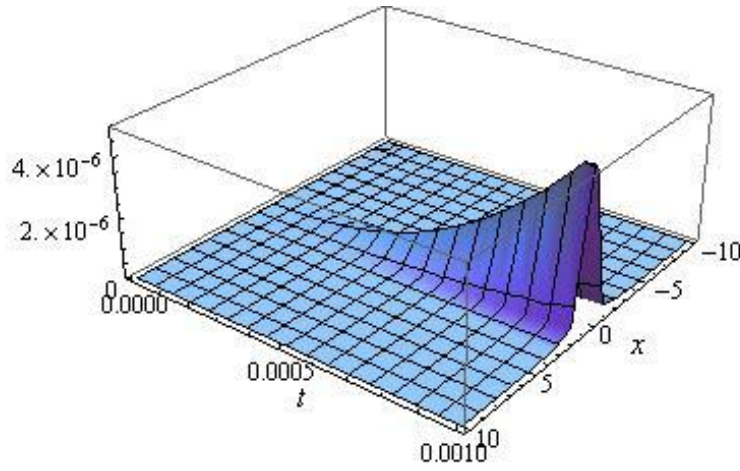


Şekil 4.35.  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü

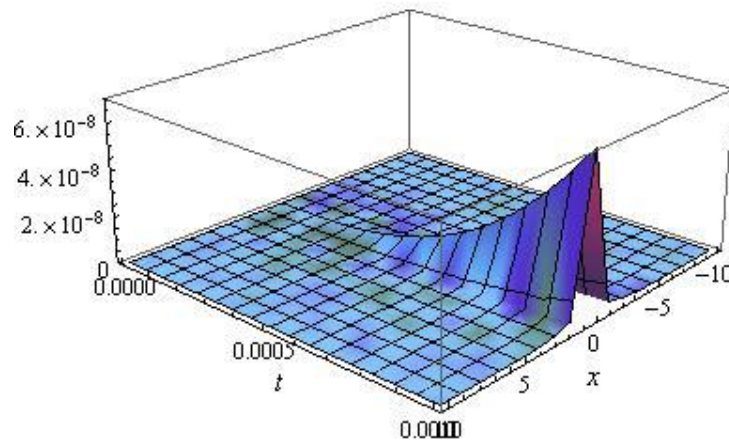


Şekil 4.36.  $\alpha = 0.9$  için  $u_{tam}(x, t)$  analitik çözümü

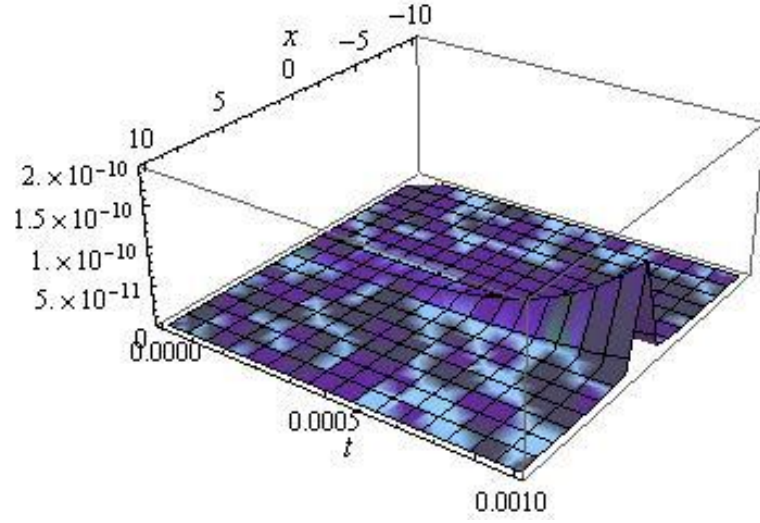
Şekil 4.37.-Şekil 4.40. da  $-10 \leq x \leq 10$  ve  $0 \leq t \leq 0.001$  aralıklarında farklı  $\alpha$  değerlerinde conformable kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV probleminin,  $\hbar = -1$  değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümü arasındaki mutlak hatalar verildi. Şekiller incelendiğinde,  $\hbar = -1$  için elde edilen  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümü arasındaki mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca  $\alpha$  değeri arttıkça hataların azaldığı mutlak hata grafiklerinden açıkça görülmektedir.



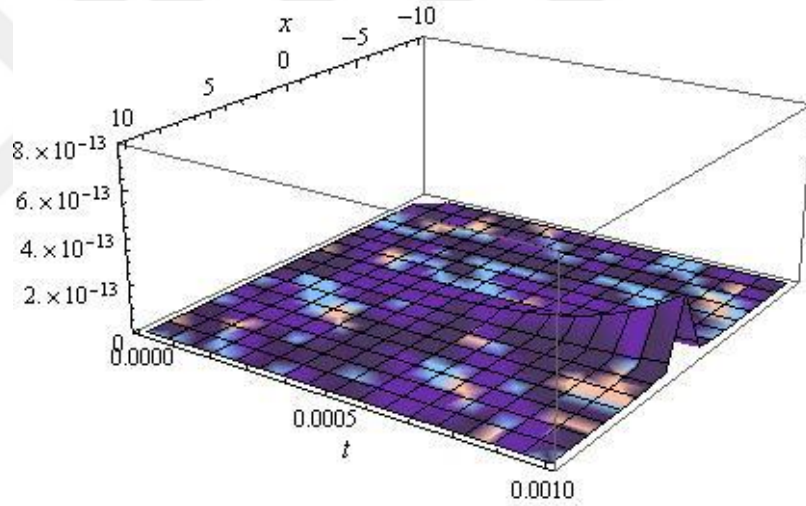
Şekil 4.37.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği



Şekil 4.38.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.6$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

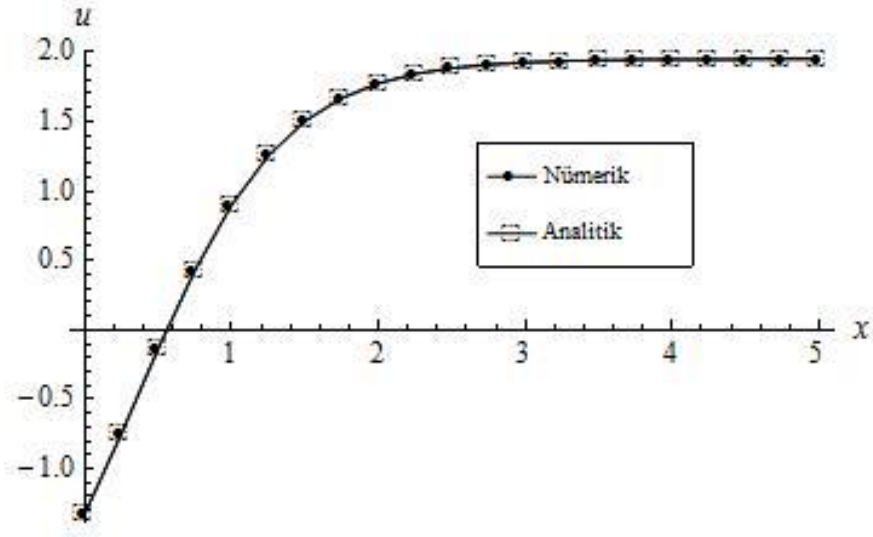


Şekil 4.39.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

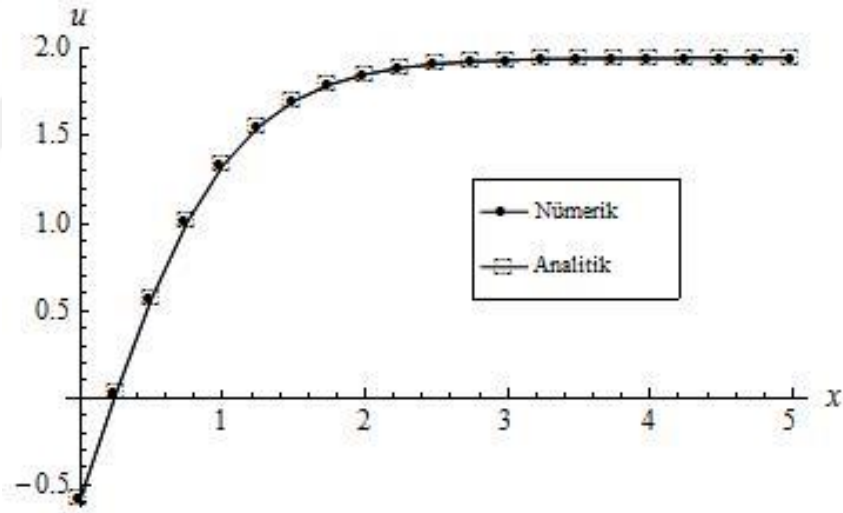


Şekil 4.40.  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün mutlak hata grafiği

$0 \leq x \leq 5$  aralığında,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 0.9$  değerlerinin seçimiyle göz önüne alınan problemin  $t = 0.01$  zamanında,  $\hbar = -1$  değeri için elde edilen  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün eğrileri Şekil 4.41. ve Şekil 4.42. de verildi. Eğriler incelendiğinde,  $t = 0.01$  zamanında,  $\hbar = -1$  değeri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözüm eğrileri ile tam çözüm eğrilerinin uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 4.41.  $t = 0.01$ ,  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.42.  $t = 0.01$ ,  $h = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümü ile  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümünün karşılaştırılması

Çizelge 4.5.-Çizelge 4.8. de (4.1.6) – (4.1.7) ile verilen problemin,  $t = 0.01$ ,  $h = -1$  ve farklı  $\alpha$  değerlerindeki  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün  $u_{tam}(x, t)$  tam çözümü ile karşılaştırılması ve mutlak hataları verildi. Göz önüne alınan değerlerde yaklaşık çözüm ile tam çözümün uyumlu olduğu ve mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu çizelgelerden açıkça görülür.



Çizelge 4.5.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün  $u_{tam}(x, t)$  tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	-0.64845	-0.64845	$5.368 \times 10^{-6}$
0.2	-0.52615	-0.52616	$5.112 \times 10^{-6}$
0.3	-0.40373	-0.40374	$4.651 \times 10^{-6}$
0.4	-0.28179	-0.28179	$4.014 \times 10^{-6}$
0.5	-0.16092	-0.16093	$3.246 \times 10^{-6}$
0.6	-0.04172	-0.04172	$2.396 \times 10^{-6}$
0.7	0.07527	0.07527	$1.515 \times 10^{-6}$
0.8	0.18955	0.18955	$6.507 \times 10^{-7}$
0.9	0.30067	0.30067	$1.542 \times 10^{-7}$
1.0	0.40821	0.40821	$8.669 \times 10^{-7}$

Çizelge 4.6.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.6$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün  $u_{tam}(x, t)$  tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	-0.36841	-0.36841	$6.403 \times 10^{-8}$
0.2	-0.12627	-0.12627	$4.910 \times 10^{-8}$
0.3	0.10861	0.10861	$2.807 \times 10^{-8}$
0.4	0.33214	0.33214	$5.961 \times 10^{-9}$
0.5	0.54102	0.54102	$1.284 \times 10^{-8}$
0.6	0.73293	0.73293	$2.572 \times 10^{-8}$
0.7	0.90651	0.90651	$3.208 \times 10^{-8}$
0.8	1.06129	1.06129	$3.283 \times 10^{-8}$
0.9	1.19758	1.19758	$2.968 \times 10^{-8}$
1.0	1.31626	1.31626	$2.439 \times 10^{-8}$

Çizelge 4.7.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün  $u_{tam}(x, t)$  tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	-0.43580	-0.43580	$6.679 \times 10^{-7}$
0.2	-0.19247	-0.19247	$5.174 \times 10^{-7}$
0.3	0.04485	0.04485	$3.015 \times 10^{-7}$
0.4	0.27187	0.27187	$7.193 \times 10^{-8}$
0.5	0.48507	0.48507	$1.251 \times 10^{-7}$
0.6	0.68183	0.68183	$2.617 \times 10^{-7}$
0.7	0.86054	0.86054	$3.306 \times 10^{-7}$
0.8	1.02050	1.02050	$3.408 \times 10^{-7}$
0.9	1.16183	1.16183	$3.096 \times 10^{-7}$
1.0	1.28525	1.28525	$2.555 \times 10^{-7}$

Çizelge 4.8.  $t = 0.01$ ,  $\hbar = -1$  ve  $\alpha = 0.9$  için  $u(x, t)$  yaklaşık çözümünün  $u_{tam}(x, t)$  tam çözüm ile karşılaştırılması ve mutlak hatalar

$x$	$u(x, t)$		
	Nümerik	Analitik	Mutlak Hata
0.1	-0.33081	-0.33081	$8.397 \times 10^{-9}$
0.2	-0.08940	-0.08940	$6.403 \times 10^{-9}$
0.3	0.14388	0.14388	$3.621 \times 10^{-9}$
0.4	0.36535	0.36535	$7.133 \times 10^{-10}$
0.5	0.57175	0.57175	$1.746 \times 10^{-9}$
0.6	0.76090	0.76090	$3.420 \times 10^{-9}$
0.7	0.93159	0.93159	$4.236 \times 10^{-9}$
0.8	1.08348	1.08348	$4.320 \times 10^{-9}$
0.9	1.21699	1.21699	$3.893 \times 10^{-9}$
1.0	1.33306	1.33306	$3.192 \times 10^{-9}$



## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin ve kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin Homotopi Analiz yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edildi.

Yaklaşık çözümlerde bulunan  $\hbar$  yardımcı parametresinin yakınsaklık aralığını belirlemek için farklı  $\alpha$  değerlerinde  $\hbar$  –eğrileri çizildi. Her iki problem için çizilen bu  $\hbar$  –eğrilerinden, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümleri yakınsak yapacak şekilde  $\hbar$  yardımcı parametresinin birer aralığı tespit edildi. Daha sonra bu aralıktan seçilen  $\hbar = -1$  yardımcı parametre değeri ile elde edilen yaklaşık çözümlerin ve tam çözümlerin farklı  $\alpha$  değerlerinde yüzey eğrileri verildi. Ele alınan problemler için çizilen yüzey eğrilerinden, Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümlerin uyumlu olduğu görüldü. Ayrıca zaman ve konum dağılımındaki hatayı görmek için yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki mutlak hata yüzeyleri verildi. Sabit bir zamandaki yaklaşık çözüm ve tam çözüm eğrileri verildi. Bu eğrilerden, her iki problem için de ele alınan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin eğrileri tam çözümlerinin eğrileri ile ayırt edilemeyecek şekilde aynı olduğu görüldü. Son olarak, ele alınan problemler için elde edilen nümerik çözümler, tam çözümler ile karşılaştırılarak mutlak hatalar tablolar halinde verildi. Mutlak hataların kabul edilebilir derecede küçük olduğu tablolardan görüldü.

Sonuç olarak, bu tezde ele alınan zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren kesirli mertebeden Wu-Zhang sisteminin ve kesirli mertebeden birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlarından, yöntemin zaman değişkenine göre conformable kesirli türev içeren kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine alternatif bir yöntem olarak kullanılabileceği ifade edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Abbasbandy S., 2006. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. **Physics Letters A**, 360: 109–113.
- Abbasbandy S., Hashemi M.S., Hashim I., 2013. On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations. **Quaestiones Mathematicae**, 36:1, 93-105.
- Çenesiz Y., Baleanu D., Kurt A., Tasbozan O., 2016. New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative. **Waves in Random and Complex Media**, 27:1, 103-116.
- Çenesiz Y., Tasbozan O., Kurt A., 2016. Functional Variable Method for conformable fractional modified KdV-ZK equation and Maccari system. **Tbilisi Mathematical Journal** 10(1) (2017):117-125.
- Çenesiz Y., Tasbozan O., Kurt A., 2017. On the New Solutions of the Conformable Time Fractional Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV System. **Analele Universitatii de Vest, Timișoara Seria Matematica-Informatica LV**, 1, (2017), 37- 49 .
- Debnath L., Bhatta D., 2007. Integral Transforms and Their Applications, **Chapman-Hall/CRC**, 33487-2742, 143 s, USA.
- Esen A., Tasbozan O., Yagmurlu N. M., 2012. Approximate Analytical Solutions of the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation Using Homotopy Analysis Method and a Comparison with Other Methods. **Çankaya University Journal of Science and Engineering Volume 9**, No. 2, 139-147.
- Esen A., Yagmurlu N. M., Tasbozan O., 2013. Approximate Analytical Solution to Time-Fractional Damped Burger and Cahn-Allen Equations. **Applied Mathematics & Information Sciences**, 7, No. 5, 1951-1956.
- Eslami, M., Rezazadeh, H., 2016. The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative. **Calcolo**, 53:475–485.
- Eslami M., Rezazadeh H., Rezazadeh M., Mosavi S. S., 2017. Exact solutions to the space–time fractional Schrödinger–Hirota equation and the space–time modified KDV- Zakharov–Kuznetsov equation. **Optical and Quantum Electronics**, (2017):49:279.
- Hilfer P., 2000. Various Approaches to the Fractional Calculus. (R Hilfer, Editör). **Applications of Fractional Calculus In Physics**. **World Scientific**, 99-088745, 3 s, Germany.
- Hosseini K., Bekir A., Ansari R., 2017. New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method. **Optik**, 132(2017):203-209.
- Hosseini K., Bejarbaneh E. Y., Bekir A., Kaplan M., 2017. New exact solutions of some nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type. **Optical and Quantum Electronics**, (2017):49:241.
- Iyiola O.S., Tasbozan O., Kurt A., Çenesiz Y., 2017. On the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1-D diffusion. **Chaos, Solitons and Fractals**, 94(2017):1-7.
- Kaplan M., 2017. Applications of two reliable methods for solving a nonlinear conformable time-fractional equation. **Optical and Quantum Electronics**, (2017):49:312.

- Kaplan M., Bekir A., Ozer M. N., 2017. A simple technique for constructing exact **Optical and Quantum Electronics**, (2017):49:266.
- Khalil, R., Horani, M.A., 2014. A new definition of fractional derivative. **Journal of Computation and Applied Mathematics**, 264: 65-70.
- Khodadad F. S., Nazari F., Eslami M. Rezazadeh H., 2017. Soliton solutions of the conformable fractional Zakharov–Kuznetsov equation with dual-power law Nonlinearity. **Optical and Quantum Electronics**, (2017):49:384.
- Klaus, J., 1980. Topologie. **Springer-Verlag**, New York.
- Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, **Elsevier**, 0304-0208, vii s., New York.
- Kumar D., Hosseini K., Samadani F., 2017. The Sine-Gordon Expansion Method to Look For The Traveling Wave Solutions of The Tzitzeica Type Equations in Nonlinear Optics. **Optik**, 0030-4026(17):31127-0.
- Kurt, A., Çenesiz, Y., Taşbozan, O., 2015. On the Solution of Burger's equation with the new fractional derivative. **Open Physics**, 13: 355-360.
- Kurt A., Tasbozan O., Baleanu D., 2017. New solutions for conformable fractional Nizhnik–Novikov–Veselov system via  $G'/G$  expansion method and homotopy analysis methods. **Optical and Quantum Electronics**, (2017):49:333.
- Kurt, A., Taşbozan, O., Çenesiz, Y., 2016. Homotopy Analysis Method for Conformable Burgers-Korteweg-de Vries Equation. **Bulletin of Mathematical Sciences and Applications**, ISSN: 2278-9634:17-23.
- Liao, S.J., 2003. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. **CRC Press, Chapman & Hall**, Boca Raton.
- Liao, S.J., 2009. Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.**, 14(2009): 983-997.
- Miller, K.S., Ross, B., 1993. An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. **J. Wiley-Sons**, Canada.
- Molabahrami A., Khani F., 2009. The homotopy analysis method to solve the Burgers-Huxley equation. **Nonlinear Anal. B: Real World Appl.**, 10: 589-600.
- Oldham K.B., Spanier J., 1974. The Fractional Calculus, **Academic Press**, 73-5304, 1 s, New York.
- Podlubny, L., 1999. Fractional Differential Equations. **Academic Press**, London.
- Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., 1993. Fractional Integrals and Derivative Theory and Applications, **Gordon and Breach**, 160 s, Longhorne.
- Taşbozan, O., Çenesiz, Y., Kurt, A., 2016. New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV-mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method. **The European Physical Journal Plus**, 131: 244.
- Taşbozan O., Esen A., Yağmurlu N. M., 2012. Approximate Analytical Solutions of Fractional Coupled mKdV Equation by Homotopy Analysis Method. **Open Journal of Applied Sciences**, 2, 193-197.
- Yavuz M., 2017. Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation. **An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications**, ISSN: 2146-0957: 1-7.
- Zhang X., Tang B., He Y., 2011. Homotopy analysis method for higher-order fractional integro-differential equations. **Computers and Mathematics with Applications**, 3194-3203.

## ÖZGEÇMİŞ

Yazar, 1989 yılında Hatay'ın Antakya ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 2006 yılında kazandığı Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi Pedagojik Formasyon eğitime başladı ve 2011 yılında eğitimini tamamladı. 2014 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.

