T.C.
MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEÇİŞ KOŞULLU DİSSİPATİF DİRAC OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Abdullah KENDÜZLER

BURDUR, 2017

T.C.
MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEÇİŞ KOŞULLU DİSSİPATİF DİRAC OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Abdullah KENDÜZLER

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2017

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Abdullah KENDÜZLER tarafından **Doç. Dr. Hüseyin TUNA** yönetiminde hazırlanan **"Geçiş Koşullu Dissipatif Dirac Operatörlerinin Spektral Özellikleri"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 27/07/2017

Doç. Dr. İsmail Onur KIYMAZ (Başkan)
Ahi Evran Üniversitesi………………………………………………………………..........

Doç. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN (Jüri Üyesi)
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi………………………………………..………..........

Doç. Dr. Hüseyin TUNA (Jüri Üyesi)
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi …………………………… …………………….........

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

....
Prof. Dr. İskender GÜLLE

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Geçiş Koşullu Dissipatif Dirac Operatörlerinin Spektral Özellikleri"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11 / 07 / 2017

Abdullah KENDÜZLER

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Hüseyin TUNA'ya teşekkürlerimi sunarım.

0303-YL-16 No`lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Temmuz, 2017 **Abdullah KENDÜZLER**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{A^*}$	: *A* operatörünün eş (adjoint) operatörü
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert$	: *A* sınırlı operatörünün normu
$\tilde{A}$	: *A* operatörünün genişlemesi
$\boldsymbol{A_h}$	: Maksimal dissipatif operatör
$\mathbb{C}$	**:** Kompleks sayılar kümesi
D(A)	: *A* operatörünün tanım kümesi
$\overline{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})}$	: D(*A*) kümesinin kapanışı
def $\boldsymbol{L_0}$	: L_0 operatörünün defekt sayısı
dim $\boldsymbol{N_\lambda}$	: *A* operatörünün defekt uzayının boyutu
H	: Hilbert uzayı
I	: Birim operatör
Imλ	: λ karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı
L	: Maksimal operatör
$\boldsymbol{L_0}$	: Minimal simetrik operatör
$\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{y})$	: Diferansiyel ifade
$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{N_\lambda}$	: *A* operatörünün defekt uzayı
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
R(A)	: *A* operatörünün değer kümesi
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	**:** n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{R}_\lambda$	: $(A-\lambda I)^{-1}$ operatörü
$\bar{\boldsymbol{z}}$	**:** *z* karmaşık sayısının eşleniği
$\boldsymbol{W_n(U,V)}$	: *U* ile *V* çözümlerinin Wronskian'ı
$\Vert\boldsymbol{x}\Vert$	: *x* vektörünün normu
$\forall$	: Evrensel niceleyici

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Geçiş Koşullu Dissipatif Dirac Operatörlerinin Spektral Özellikleri

Abdullah KENDÜZLER

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Temmuz, 2017

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Daha sonra, singüler durumda bir boyutlu Dirac operatörlerin temel özellikleri verildi.

Son olarak sınır koşullarında spektral parametre bulunduran geçiş koşullu dissipatif Dirac sisteminin spektral özellikleri araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: kendine eş olmayan Dirac operatörü, dissipatif operatör, geçiş koşulları, Green fonksiyonu.

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü (BAP) tarafından 0303-YL-16 proje numarası ile desteklenmiştir.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Spektral Properties of Dissipative Dirac Operators with Transmission Conditions

Abdullah KENDÜZLER

Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin TUNA

July, 2017

In this work, firstly, the historical development of the topic is mentioned, and some definitions and main results used in the work are given.

Later, basic properties of one dimensonal Dirac operator in the singular case are given.

Finally, spectral properties of dissipative Dirac systems which contain a spectral parameter in the boundary conditions and transmission conditions are investigated.

Keywords: non self-adjoint Dirac operator, dissipative operator, transmission conditions, Green function.

The present M.Sc.Thesis was supported by Mehmet Akif Ersoy University BAP under the Project number of 0303-YL-16.

1. GİRİŞ

Dirac denklemi fizik tarihinin dönüm noktalarından birisidir. Temel fizikteki rölatif kuantum mekaniği Dirac denklemi kullanılarak formülleştirilir. Bu denklem bir elektronun yarım spinini gösterir. Bir karşıt parçacığın varlığını tahmin eder. Hidrojen atomunun açık spektrumunu üretebilir. Dirac denklemi ve uygulamaları hakkında daha fazla bilgi için Levitan ve Sargsjan'ın (1991), Weidmann'ın (1987) ve Thaller (1992)'in monografilerine bakılabilir.

Geçiş koşullu sınır değer problemlerine; matematiğin çeşitli alanlarında, radyo biliminde, elektronikte, jeofizikte ve mekanikte rastlanmaktadır. Geçiş koşullu sınır değer problemleri Allahverdiev, Bairamov ve Uğurlu (2013), Uğurlu ve Allahverdiev (2013), Bairamov ve Uğurlu (2012), Tuna ve Eryılmaz (2013, 2014), Kadakal ve Mukhtarov (2006) tarafından çalışılmıştır.

Parametre bağımlı sistemlerle, fizikteki ve mühendislikteki pek çok problemlerde karşılaşılmaktadır. Bu konudaki çalışmalardan bazıları Allahverdiev (2005), Behrndt (2009), Fulton (1977), Hinton (1979), Eryılmaz (2012), Schkalikov (1983), Tretter (2000), Tuna (2013), Walter (1973), Kadakal ve Mukhtarov (2006)'dır.

Dissipatif operatörler kendine eş olmayan operatörlerin önemli bir sınıfıdır. Dissipatif sınır koşullu, homojen olmayan sicimin tamlık özelliği ile ilgili ilk genel sonuçlar Krein ve Nudelman (1989) tarafından elde edilmiştir.

Tam olmayan 2 x 2 dissipatif Dirac operatörüne bir örnek Malamud ve Oridoroga (2012) tarafından verilmiştir. Keyfî tam dissipatif Dirac operatörünün resolventinin spektral senteze izin verdiği, Lunyov ve Malamud (2014) tarafından ifade edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, bir H Hilbert uzayında, sınır koşullarında spektral parametre bulunduran geçiş koşullu Dirac operatörü ele alındı. Bu operatörün dissipatifliği verildi. Öz değerlerinin reel olmadığı ve üst yarı kompleks düzlemde olduğu gösterildi.

Green fonksiyonu kuruldu. Green fonksiyonu yardımıyla resolvent operatörünün kompaktlığı gösterildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Tanımlar

Tanım 2.1.1. $V \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V'ye K üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

a) $(V,+)$ cebirsel yapısı değişmeli gruptur. Yani,

1. $\forall x,y \in V$ $x+y \in V$ dir.
2. $\forall x,y,z \in V$ $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir.
3. $\forall x \in V$ $x+0=0+x= x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ $x+(-x)=(-x)+x=0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x,y \in V$ $x+y=y+x$ dir.

b) $x,y, \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

1. $\alpha x \in K$ dir.
2. $\alpha(x+y) = \alpha\, x + \alpha y$ dir.
3. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

$\forall x \in V$ için $1\,x = x$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada 1, K cisminin birim elemanıdır.

$K=\mathbb{R}$ olması halinde V' ye reel lineer uzay, $K=\mathbb{C}$ olması halinde V 'ye kompleks lineer uzay denir (Bozkurt ve Türen, 2000).

Tanım 2.1.2. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir **(**Kreyszig, 1978**).**

Tanım 2.1.3. X, bir kompleks lineer uzay olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan ve (x,y) ile gösterilen kompleks sayısına, x ve y elemanlarının *iç çarpımı* ve X lineer uzayına da *iç çarpım uzayı* denir:

1. $\forall x \in X$ $(x,x) \geq 0; (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x,y \in X$ $(x,y) = \overline{(y,x)}$
3. $\forall \lambda \in C$ $\forall x,y \in X$ $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
4. $\forall x,y,z \in X$ $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$

Ayrıca, verilen bu özellikler göz önünde bulundurularak $(x,\lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$ ve $(x,y+z) = (x,y)+(x,z)$ yazılabilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.4. $(X,(.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. X vektörünün normu,

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.5. Bir $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}$$

normuna göre tam ise, yani $(X,(.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi *X'*in bir x_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.6. *D*, bir *H* Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı olsun. $A: D \subseteq H \to H$ dönüşümü, her $\alpha, \beta \epsilon$ K ve her $x, y\ \epsilon D$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlıyorsa *A* dönüşümüne lineer operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.7. Bir *H* Hilbert uzayının bir alt kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir *F* lineer operatörünün değer kümesi K ise *F*, *H* üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir. Tüm *H* uzayında tanımlanıp aşağıdaki koşulları sağlayan bir *F* fonksiyoneline, sınırlı - lineer fonksiyonel denir:

1. Her $x, y \in H\ ve$ her $\lambda, \mu\ \in K$ için
   $$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y) \text{ dir.} \tag{2.3}$$

2. Her $x \in H$ ve bir c sabiti için
   $$|F(x)| \leq c\|x\| \text{ dir.} \tag{2.4}$$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.8. *A: H* → *H* olmak üzere bir *A* lineer operatörü verilsin. Her $x \in H$ için

$$\|Ax\| \leq c\ \|x\| \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir c sayısı varsa *A* ya sınırlı operatör denir. Bu c sayılarının infimumuna *A* sınırlı operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.9. H bir Hilbert uzayı ve A bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, A nın tanım kümesi *D(A), H* Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $f \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, A^*g) \tag{2.6}$$

eşitliğini saplayan A^* operatörüne A operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in$ H vektörler kümesine A^* ın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir. A^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

i. $(A^*)^* = \mathrm{A}$

ii. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

iii. $(A + \mathrm{B})^* = A^* + B^*$

iv. $(A\,\mathrm{B})^* = B^* A^*$

v. $\|A^*\| = \|A\|$ (A sınırlı iken) (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.10. $A^* = A$ ise, A ya kendine eş operatör adı verilir. (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.11. A lineer operatörünün $D(A)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $f \in D(A)$ için,

$$\mathrm{lm}(Af, f) \geq 0 \tag{2.7}$$

ise, A lineer operatörüne dissipatif (dissipative) operatör denir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.1.12. A, $D(A)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ay = \lambda y \tag{2.8}$$

eşitliğini sağlayan bir $y \neq 0$ vektörü mevcut ise, λ sayısına A operatörünün özdeğeri, y vektörüne ise A operatörünün özvektörü denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.13. Bir X vektör uzayındaki, $x_1, x_2, \dots, x_m$ vektörlerinden oluşan bir M kümesini ele alalım. $a_1, a_2, \dots, a_m$ skalerler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = 0 \tag{2.9}$$

eşitliği, ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa, $x_1, x_2, \dots, x_m$ vektörleri, diğer bir deyimle, M kümesi, lineer bağımsız, aksi halde, lineer bağımlıdır denir.

X uzayının keyfi bir M altkümesini göz önüne alalım. Eğer M'nin, boş olmayan her sonlu altkümesi lineer bağımsız ise, M'ye lineer bağımsızdır denir (Çakar, 2007) .

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ kümesinin lineer bağımlı olması halinde, M'nin vektörlerinden en az bir tanesi diğerlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Örneğin, (2.9) eşitliği, $a_m \neq 0$ olmak üzere gerçekleniyorsa, M kümesi lineer bağımlı olup a_m'i (2.9) eşitliğinden faydalanarak çözebiliriz:

$$x_m = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{m-1} x_{m-1} \tag{2.10}$$

(Çakar, 2007)

Tanım 2.1.14. Adi diferansiyel denklemler $\mathrm{L}u = f$ operatör şeklinde yazılabilir. Verilen sınır şartları ile birlikte bu eşitliği sağlayan bir u çözümü araştırılır. $D(L)$, sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların uzayı olarak tanımlanırsa, bu takdirde problem, $D(L)$'deki $\mathrm{L}u = f$ denkleminin bir çözümü olmaya indirgenir. Problemi çözmek için bir yol L^{-1} ters operatörünü aramaktır. L^{-1} bulunabiliyorsa $\mathrm{L}u = f$'in çözümü $u = L^{-1}(f)$ olarak ifade edilir.

$$u = (L^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x,t) f(t) dt \tag{2.11}$$

şeklinde bir integral operatörüdür. G fonksiyonuna L operatörünün Green fonksiyonu denir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.15. $f: [a,b] \to R$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı varsa ki,

$$\sum_{k=1}^{n} |h_k| < \delta \tag{2.12}$$

şartını sağlayan her sonlu sayıda $[x_k, x_k + h_k]$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon \tag{2.13}$$

oluyorsa f fonksiyonun α $[a, b]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir denir (Balcı, 2010).

3. BİR BOYUTLU DİRAC SİSTEMİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sisteminin Kanonik Biçime İndirgenmesi

$p_{ik}: [0,\pi] \longrightarrow R \ (i,k = 1,2)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki matris denklemi ele alalım:

$$B\frac{dy}{dx} + P(x)y = \lambda y, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x), p_{ik}(x), i,k = 1,2 \tag{3.1}$$

gerçek değerli fonksiyon olarak tanımlansın ve bu fonksiyonlar $[0,\pi]$ aralığında sürekli olsun, ve λ bir parametre olsun.

Bu sistem iki birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemine eşit olur:

$$\begin{aligned} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 = \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 = \lambda y_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$p_{11}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$, $p_{11}(x)$ = V(x) + m, $p_{22}(x)$ = V(x) – m durumunda (3.2) denklem sistemi, rölatif kuantum teorisinde 'Bir Boyutlu Durağan Dirac Sistemi' olarak bilinir. Burada V(x) potansiyel fonksiyonu ve m parçacığın kütlesidir.

H = H(x) iki boyutlu uzayın düzgün ortogonal dönüşümü olsun. İki boyutlu bir uzayın sabit ortogonal ve normal bir baz yardımı ile ortogonal dönüşümü,

$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$ matris formunda olduğu bilinmektedir.

Kolayca görülüyor ki B ve H matrisleri değişme özelliğine sahiptir: *BH = HB*. (3.1) denkleminde değişken dönüşümü yapar $y = Hz$ ve eşitliğin her iki tarafını H^{1} ile çarparsak, şunu elde ederiz:

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}PHz = H^{-1}\lambda Hz,$$

veya

$$B\frac{dz}{dx} + \left(H^{-1}B\frac{d}{dx}\mathrm{H} + H^{-1}PH\right)\mathrm{z} = \lambda z \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$Q(x) \equiv H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}PH$$

matrisini hesaplamak için, elimizde şu eşitlik vardır:

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H \equiv \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$H^{-1}PH = \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

Bu nedenle, Q matrisinin

$$Q(x) \equiv \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{12}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi' + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & \varphi' + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

formunda olduğu elde edilir. $\varphi\,(x)$ fonksiyonu öyle seçelim ki, $q_{12}\,(x) \equiv 0$ olsun.

O halde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0$$

olur. $p_{11}(x) \neq p_{22}(x)$ ise o zaman

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{22}(x) - p_{11}(x)}$$

bulunur ve Q(x) matrisi şu formu alır:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

Buradan (3.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} -p(x) & 0 \\ 0 & -r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \qquad (3.4)$$

formunda yazılabilir. Şimdi $\varphi(x)$ fonksiyonunu $q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olacak biçimde seçelim. Yani $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$ olsun. O halde $\varphi\,(x)$'i çekersek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$\varphi\,(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(s) + p_{22}(s)\}\,ds$ olur.

Buradan (3.3) teki denklem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \qquad (3.5)$$

formunda olduğu bulunur.

Sonrasında (3.4) ve (3.5) denklemlerine, (3.1) denkleminin kanonik formu denir. (3.1) denkleminin çeşitli spektral özellikleri araştırılırken bu kanonik formlardan uygun olanı kullanılır. Örneğin, (3.1) denkleminin özdeğerlerinin ve öz fonksiyonlarının asimptotik davranışlarını araştırırken veya keyfi bir vektör fonksiyonunun (3.1) denkleminin öz vektör fonksiyonlarına göre açılım formüllerini incelerken (3.4) kanonik formunu kullanmak uygundur. Buna karşılık (3.1) denkleminin öz değerlerinin sayısının asimptotik davranışları ile ilgili problemlerde ve sonsuz aralıklar üzerindeki ters problemlerde , (3.5)'teki kanonik denklemlerini kullanmak daha uygun olur (Levitan ve Sargsyan, 1991).

3.2. Sınır Koşulları ile Verilen Dirac Operatörünün Öz Değerleri ve Öz Vektör Fonksiyonlarının Bazı Temel Özellikleri

p(x) ve r(x), $[0,\pi]$ aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlar ve $\alpha,\beta \in R$ olmak üzere (3.2) denklemler sistemi için (3.4) kanonik formunun kullanıldığı aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\}y_1 = 0, \quad y_1' - \{\lambda + r(x)\}y_2 = 0, \tag{3.6}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0, \tag{3.7}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0. \tag{3.8}$$

Varsayalım ki $\lambda = \lambda_0$ sayısı için (3.6) - (3.8) sınır değer problemi, aşikardan farklı

$$y(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_0) \\ y_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}$$

çözümüne sahiptir. Bu durumda λ_0 sayısına özdeğer ve $y(x,\lambda_0)$ vektör fonksiyonuna da λ_0 öz değerine karşılık gelen öz vektör fonksiyonu denir (Levitan ve Sargsyan, 1991).

Önerme 3.2.1. (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin farklı λ_1 , λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ öz vektör fonksiyonları birbirine ortogonaldir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ vektör fonksiyonları (3.6)'daki sistemin çözümü oldukları için,

$$y_2'(x,\lambda_1) - \{\lambda_1 + p(x)\}y_1(x,\lambda_1) = 0, \quad z_2'(x,\lambda_2) - \{\lambda_2 + p(x)\}z_1(x,\lambda_2) = 0$$
$$y_1'(x,\lambda_1) - \{\lambda_1 + r(x)\}y_2(x,\lambda_1) = 0, \quad z_1'(x,\lambda_2) - \{\lambda_2 + r(x)\}z_2(x,\lambda_2) = 0$$

yazılabilir. Sırasıyla $z_1(x,\lambda_2), -z_2(x,\lambda_2), -y_1(x,\lambda_1), y_2(x,\lambda_1)$ fonksiyonları ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_1) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_1)\}$$
$$= (\lambda_1-\lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının 0'dan π'ye integrali alınırsa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx =$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}_0^x$$

eşitliğinin sağ tarafı, (3.7) - (3.8) sınır koşullarından dolayı sıfır olur. O halde

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0 \qquad (3.9)$$

dır. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan üstteki eşitliğin her iki tarafı $(\lambda_1-\lambda_2)$ sayısına bölünürse

$$\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2. (3.6) - (3.8) deki sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir (Levitan ve Sargsyan, 1991).

İspat: λ_0 sayısı (3.6) - (3.8) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $y(x,\lambda_0)$ bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu olsun. O halde $y(x,\lambda_0) \not\equiv 0$ dır. Kolayca gösterilebilir ki, $\overline{\lambda_0}$ sayısı da (3.6) - (3.8) sınır değer probleminin bir özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu $\overline{y(x,\lambda_0)}$ dır. Buna göre (3.9) denklemi

$$\left(\lambda-\overline{\lambda_0}\right)\int_0^{\pi}\{|y_1(x,\lambda_0)|^2 + |y_2(x,\lambda_0)|^2\}\,dx = 0$$

halini alır. $y(x,\lambda_0) \not\equiv 0$ olduğundan

$$\int_0^{\pi}\{|y_1(x,\lambda_0)|^2 + |y_2(x,\lambda_0)|^2\}\,dx > 0$$

dır. O halde $\lambda - \overline{\lambda_0} = 0$ yani $\lambda = \overline{\lambda_0}$ dir. Buradan $\lambda \in R$ elde edilir (Levitan ve Sargsyan, 1991).

3.3 Yarı Eksen Üzerinde Parseval Eşitliğinin İspatı

$q_1(x)$ ve $q_2(x)$ katsayılarının her sonlu $[0,b]$ aralığı için sürekli olduğu aşağıdaki probleme bakalım:
$(0 \leq x < \infty)$

$$y'_2 - \{\lambda + q_1(x)\}y_1 = 0, \tag{3.10}$$

$$y'_1 + \{\lambda + q_2(x)\}y_2 = 0, \tag{3.11}$$

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.10) - (3.11) sisteminin aşağıdaki koşulları sağlayan çözümü olsun.

$$\varphi_1(0,\lambda) = \cos\alpha, \varphi_2(0, \lambda) = -\sin\alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun,

$$y_1(0, \lambda)\sin\alpha + y_2(0, \lambda)\cos\alpha = 0 \tag{3.13}$$

koşulunu sağladığı açıktır.

Ayrıca (3.10), (3.11) ve (3.13) problemlerinin sınır koşuluna ek olarak b herhangi bir pozitif sayı ve β herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$y_1(b, \lambda)\sin\beta + y_2(b,\lambda)\cos\beta = 0 \text{ sınır koşulları verilsin.} \tag{3.14}$$

(3.10), (3.11), (3.13) ve (3.14)'teki problem regülerdir. $\lambda_{n,b}$ problemin (3.12) koşulunu sağlayan özdeğeri (eigen değer) ve $\varphi_{n,b}(x) = \varphi(x, \lambda_{n,b})$ de vektör değerli öz fonksiyon (eigen fonksiyonu) olsun.

Eğer $f(x) \in L^2(0,\infty)$ve $a^2_{n,b} = \int_0^b\{\varphi_1^2(x, \lambda_{\mathrm{n,b}}) + \varphi_2^2(x, \lambda_{\mathrm{n,b}})\}\mathrm{d}x$ ise Parseval denklemi olarak bilinen aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\int_0^b \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2_{\mathrm{n,b}}}\left\{\int_0^{\mathrm{b}} f^T(x)\varphi_{n,b}(x)dx\right\}^2 \tag{3.15}$$

Monoton artan $\mathrm{p}_b(\lambda)$ basamak fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mathrm{p}_b(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0\le\lambda_{n,b}<\lambda} \frac{1}{a_{n,b}^2}, & \lambda \ge 0 \\ -p_b(-\lambda), & \lambda < 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

O zaman (3.15) ifadesini $F(\lambda) = \int_0^b f^T(x)\varphi(x,\lambda)dx$ olmak üzere şu şekilde yazabiliriz:

$$\int_0^b \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)dp_b(\lambda). \tag{3.17}$$

Daha sonra (3.10), (3.11) ve (3.13) problemi için Parseval eşitliğinin (3.17) de $b \to \infty$ iken limit alınarak elde edildiğini görmekteyiz.

Yardımcı Teorem 3.3.1. Keyfi bir N pozitif sayısı için, b'ye bağlı olmayan bir A = A(N) pozitif sabiti vardır. Öyleki;

$$\bigvee_{-N}^{N}\{p_b(\lambda)\} = \sum_{-N\le\lambda_{n,b}\le N} \frac{1}{a_{n,b}^2} = p_b(N) - p_b(-N) < A \text{ dır.}$$

İspat: İlk olarak, $f_n(x)$ vektör değerli fonksiyonu [0, n], n < b, aralığının dışında sıfır olsun, birinci türevi olsun ve (3.13)'teki sınır koşullarını sağlasın. (3.17)'deki Parseval eşitliğini $\mathrm{f}_n(x)$ e uyguladığımızda

$$\int_0^b \{f_{1n}^2(x) + f_{2n}^2(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\lambda)dp_b(\lambda) \tag{3.18}$$

elde ederiz ve

$$F_n(\lambda) = \int_0^b f_n^T(x)\varphi(x,\lambda)dx \tag{3.19}$$

olmaktadır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.10) , (3.11) sistemini sağladığı için

$\varphi_1(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}[\varphi'_2 - q_1(x)\varphi_1]$,

$\varphi_2(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}[-\varphi'_1 - q_2(x)\varphi_2]$ olur. O zaman

$F_n\lambda = \frac{1}{\lambda}\int_0^b f_{1n}(x)\left[\varphi'_2(x,\lambda) - q_1(x)\varphi_1(x,\lambda)\right]dx + \frac{1}{\lambda}\int_0^b f_{2n}(x)\left[-\varphi'_1(x,\lambda) - q_2(x)\varphi_2(x,\lambda)\right]dx$

dir. Ayrıca $f_n(x)$ve $\varphi_2(x,\lambda)$'nın her ikisi de (3.13)'teki sınır koşullarını sağladığı için, $f(x)$, b noktası civarında sıfır olduğundan, şunu elde ederiz:

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^b \{\varphi_1(x,\lambda)[f'_{2n}(x) - q_1(x)f_{1n}(x)] + \varphi_2(x,\lambda)[-f_{1n}(x) - q_2(x)f_{2n}(x)]\}dx\ .$$

Dolayısıyla, keyfi bir sonlu N > 0 için, (3.17)'deki Parseval eşitliğiyle aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{|\lambda|>N} F_n^2(\lambda)dp_b(\lambda)$$

$$\leq \frac{1}{N^2}\int_{|\lambda|>N}\left\{\int_0^b [\varphi_1(x,\lambda)\{f'_{2n} - q_1(x)f_{1n}\}\right.$$

$$\left. + \varphi_2(x,\lambda)\{-f'_{1n} - q_2(x)f_{2n}\}]\,dx\right\}^2 \ dp_b(\lambda)$$

$$\leq \frac{1}{N^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^b [\varphi_1(x,\lambda)\{f'_{2n} - q_1(x)f_{1n}\}\right.$$

$$\left. + \varphi_2(x,\lambda)\{-f'_{1n} - q_2(x)f_{2n}\}]\,dx\right\}^2 \ dp_b(\lambda)$$

$$= \frac{1}{N^2}\int_0^n \left\{[f'_{2n} - q_1(x)f_{1n}]^2 + [f'_{1n} + q_2(x)f_{2n}]^2\right\}dx.$$

(3.18) eşitliğinden

$$\left|\int_0^n \{f_{1n}^2(x) + f_{2n}^2(x)\}dx - \int_{-N}^N F_n^2(\lambda)dp_b(\lambda)\right| < \frac{1}{N^2}\int_0^n \left\{\begin{matrix}[f'_{2n} - q_1(x)f_{1n}]^2 + \\ [f'_{1n} + q_2(x)f_{2n}]^2\end{matrix}\right\}dx \qquad (3.20)$$

elde edilir. Teorem 3.3.1 ile monoton fonksiyon kümesi $\{P_b(\lambda)\}, -N \leq \lambda \leq N$ sınırlandırılır. Bu nedenle, $P_{b_k}(\lambda)$ fonksiyonunun bir monoton fonksiyon olan $p(\lambda)$fonksiyonuna yakınsak olan bir Σb_k serisini seçebiliriz. (3.20) eşitliğinde b_k'ya göre limiti geçersek, şunu elde ederiz:

$$\left|\int_0^n \{f_{1n}^2(x) + f_{2n}^2(x)\}dx - \int_{-N}^N F_n^2(\lambda)dp_b(\lambda)\right| \leq \frac{1}{N^2}\int_0^n \left\{\begin{matrix}[f'_{2n} - q_1(x)f_{1n}]^2 + \\ [f'_{1n} + q_2(x)f_{2n}]^2\end{matrix}\right\}dx.$$

Sonuç olarak $N \longrightarrow \infty$ olursa $\int_0^n \{f_{1n}^2(x) + f_{2n}^2(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\lambda)dp(\lambda)$, elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.3.1. $f(x) \in L^2(0,\infty)$ bir vektör değerli fonksiyon olsun. $f(x)$ ve $F(\lambda)$'ya bağlı olmayan bir monoton artan $p(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$ fonksiyonu vardır. (3.10), (3.11) ve (3.13) problemleri aşağıdaki eşitlikle geçerlidir:

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)dp(\lambda). \tag{3.21}$$

$F_n(\lambda) = \int_0^n \{f_1(x)\varphi_1(x,\lambda) + f_2(x)\varphi_2(x,\lambda)\}dx,$

$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2\, dp(\lambda) = 0.$

İki vektör değerli fonksiyon olan $f(x)$ ve $g(x)$, $L^2(0, \infty)$ sınıfında olsun ve $F(\lambda)$ ve $G(\lambda)$ da bunların Fourier dönüşümleri olsun. $f(x) \pm g(x)$ ifadesinin Fourier dönüşümleri olarak $F(\lambda) \pm G(\lambda)$ ifadesine sahip olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle (3.12) den,

$\int_0^\infty \{[f_1 + g_1]^2(x) + [f_2 + g_2]^2(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F + G\}^2\,(\lambda)dp(\lambda),$

$\int_0^\infty \{[f_1 - g_1]^2(x) + [f_2 - g_2]^2(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F - G\}^2\,(\lambda)dp(\lambda)$ elde edilir.

Buradaki birinci eşitliği ikinciden çıkardığımızda

$$\int_0^\infty \{f_1.g_1 + f_2 + g_2\}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\lambda)dp(\lambda) \tag{3.22}$$

Genelleştirilmiş Parseval Eşitliği elde ederiz.

Teorem 3.3.2. $f(x) \in L^2(0,\infty), 0 \le x < \infty$, regüler vektör değerli fonksiyon olsun. $\varphi(x,\lambda)$ *ve* $F(\lambda)$ daha önce tanımladığımız gibi olsun ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)dp(\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)dp(\lambda) \tag{3.23}$$

integralleri x e göre sonlu her aralıkta mutlak ve düzgün yakınsak olsun. O zaman

$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)dp(\lambda),$

$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)dp(\lambda)$ dir.

İspat: g(x), [0, n] sonlu aralığının dışında sıfır olan bir vektör değerli fonksiyon olsun. O halde (3.12) den

$\int_0^n \{f_1 g_1 + f_2 g_2\}\,(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\left\{\int_0^n [g_1\varphi_1 + g_2\varphi_2](x)dx\right\}dp(\lambda)$ elde edilir.

Mutlak yakınsama, en son integraldeki integralin sırasını değiştirmemize izin verir ve tüm eşitliği şu şekilde yeniden yazarız:

$$\int_0^n \left\{ \begin{array}{l} \left[f_1(x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)dp(\lambda)\right] g_1(x) \\ + \left[f_2(x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)dp(\lambda)\right] g_2(x) \end{array} \right\} dx = 0.$$

$g(x)$ keyfi olduğu ve $f(x)$ ile (3.23)'teki fonksiyonlar sürekli olduğu için, en son integrandda $g_1(x)$ ve $g_2(x)$'in katsayıları sıfırdır. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

3.4. Limit Çember ve Limit Nokta Durumları

Bu kısımda yine [0, ∞) aralığını ele alıyoruz ve $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ fonksiyonlarının her sonlu aralıkta regüler olsun.

$L_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix} q_1(x) & 0 \\ 0 & q_2(x) \end{pmatrix} y = \lambda_0 y$ denkleminin her $\varphi(x,\lambda_0)$ çözümü

$$\int_0^{\infty} |\varphi(x,\lambda_0)|^2 dx \equiv \int_0^{\infty} \{|\varphi_1(x,\lambda)|^2 + |\varphi_2(x,\lambda_0)|^2\} dx < \infty$$

koşulunu belli bir λ_0 karmaşık değeri için sağlıyorsa, sonsuzdaki limit çember durumundayız diyeceğiz; diğer türlü ise, L operatörü için sonsuzdaki limit nokta durumundayız diyeceğiz. Tanımı doğrulamak için, bu sınıflandırmanın sadece L'ye bağlı olduğunu, seçilen λ_0 değerine bağlı olmadığını göstermek gerekmektedir.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu yukarıdaki gibi olsun ve $\vartheta(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\vartheta_1(0,x) = \sin a \,, \vartheta_2(0,\lambda) = \cos a \tag{3.24}$$

koşullarını sağlayan (3.10) , (3.11) sisteminin çözümü olsun. $F(x)$ ve $G(x)$, $\lambda \; ve \; \lambda'$ ye karşılık gelen (3.10) ve (3.11)'in iki çözümü olursa,

$$(\lambda' - \lambda) \int_{x_1}^{x_2} F^T(x)G(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \{F_1(x)[G'_2 + q_1(x)G_1] + F_2(x)[-G'_1 + q_2(x)G_2] + G_1(x)[-F'_2 - q_1(x)F_1] + G_2[F'_1 - q_2(x)G_2]\}dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} W\{F,G\}(x)dx = W_{x=x_2}\{F,G\} - W_{x=x_1}\{F,G\}. \tag{3.25}$$

elde edilir. Özel olarak $\lambda = \lambda'$ olursa,(3.25) den $W_x\{F,G\} \equiv F_1(x)G_2(x) - F_2(x)G_1(x) =$ sabit olur. Bu durumda, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\vartheta(x,\lambda)$ (3.10) (3.11)'sisteminin iki lineer bağımsız çözümü olmak üzere $W\{\varphi,\vartheta\} \equiv 1$ ve sistemin genel çözümü $\vartheta(x,\lambda) + \ell\varphi(x,\lambda)$ şeklindedir. Şimdi $x = b$ noktasında

$$\{\vartheta_1(b,\lambda) + l\varphi_1(b,\lambda)\}\cos\beta + \{\vartheta_2(b,\lambda) + l\varphi_2(b,\lambda)\}\sin\beta = 0 \tag{3.26}$$

sınır koşulunu sağlayan çözümleri göz önüne alalım. O zaman şunu yazalım:

$$l = -\frac{\vartheta_1(b,\lambda)\cot\beta + \vartheta_2(b,\lambda)}{\varphi_1(b,\beta)\cot\beta + \varphi_2(b,\lambda)}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ için, elde edilen regüler problemin özdeğerleri reel olduğunda payda sıfır olamaz. Buradan, cot β kompleks bir sayı olan z ile yer değiştirirse $l = l(\lambda, z)$ λ'nın meromorf fonksiyondur. Alt ve üst yarı düzlemde regülerdir. Bu durumda,

$$l = l(\lambda, z) = -\frac{\vartheta_1(b,\lambda)z + \vartheta_2(b,\lambda)}{\varphi_1(b,\lambda)z + \varphi_2(b,\lambda)}$$

(3.27)

z düzlemindeki reel eksen l düzlemindeki bir C_b çemberiyle eşleştirelim. Bu durumda

$z = -\frac{\varphi_2(b,\lambda)}{\varphi_1(b,\lambda)}$ $l = \infty$ ile eşleşirken, çemberin merkezi aşağıdakiyle eşleşir.

$\bar{z} = -\bar{\varphi}_2(b,\lambda)/\bar{\varphi}_1(b,\lambda)$ ile eşleşir.

Bu nedenle, merkez şu noktadır:

$$-\frac{\vartheta_1(b,\lambda)\varphi_2(b,\bar{\lambda}) - \vartheta_2(b,\lambda)\varphi_1(b,\bar{\lambda})}{\varphi_1(b,\lambda)\varphi_2(b,\bar{\lambda}) - \varphi_2(b,\lambda)\varphi_1(b,\bar{\lambda})} \tag{3.28}$$

Ayrıca,

$$\mathrm{Im}\left\{-\frac{\varphi_2(b,\lambda)}{\varphi_1(b,\lambda)}\right\} = \frac{1}{2}i\left\{\frac{\varphi_2(b,\lambda)}{\varphi_1(b,\lambda)} - \frac{\varphi_2(b,\bar{\lambda})}{\varphi_1(b,\bar{\lambda})}\right\} = \frac{1}{2}i\frac{\varphi_2(b,\lambda)\varphi_1(b,\bar{\lambda}) - \varphi_2(b,\bar{\lambda})\varphi_1(b,\lambda)}{|\varphi_1(b,\lambda)|^2}.$$

Eğer $\lambda' = \bar{\lambda}$, $\lambda = u + iv$ olursa (3.25) den, aşağıdaki son eşitlik meydana gelir:

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\varphi_2(b,\lambda)}{\varphi_1(b,\lambda)}\right\} = v\frac{\int_0^b\{\varphi_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\bar{\lambda}) + \varphi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\bar{\lambda})\}dx}{|\varphi_1(b,\lambda)|^2}$$

Bu eşitlik, v> 0 olursa, üst yarı düzlemin C_b'nin dışıyla eşleştiğini gösterir. Şimdi bu çemberin yarıçapını hesaplayalım.

$$T_b = \left|\frac{\vartheta_1(b,\lambda)\varphi_2(b,\bar{\lambda}) - \vartheta_2(b,\lambda)\varphi_1(b,\bar{\lambda})}{\varphi_1(b,\lambda)\varphi_2(b,\bar{\lambda}) - \varphi_2(b,\lambda)\varphi_2(b,\bar{\lambda})} - \frac{\vartheta_2(b,\lambda)}{\varphi_2(b,\lambda)}\right|.$$

Dolayısıyla, (3.25)'yi ve $W\{\varphi,\vartheta\} \equiv 1$'i kullanarak aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$T_b = \frac{1}{2|v|}\left(\int_0^b|\varphi(x,\lambda)|^2\,dx\right)^{-1} \tag{3.29}$$

Ayrıca, Imz < 0 yani $i(z-\bar{z}) > 0$ olursa, v > 0 için l, C_b 'nin içindedir. Bu nedenle z için (3.27)'ü çözerek aşağıda verilen denklemi elde ederiz:

$$i\left\{-\frac{l\varphi_2(b,\lambda)+\vartheta_2(b,\lambda)}{l\varphi_1(b,\lambda)+\vartheta_1(b,\lambda)}+\frac{\bar{l}\bar{\varphi}_2(b,\lambda)+\bar{\vartheta}_2(b,\lambda)}{\bar{l}\bar{\varphi}_1(b,\lambda)+\bar{\vartheta}_1(b,\lambda)}\right\} > 0.$$

Buradan,

$$i\{[l\varphi_1(b,\lambda)+\vartheta_1(b,\lambda)][\bar{l}\bar{\varphi}_2(b,\lambda)+\bar{\vartheta}_2(b,\lambda)] - [\bar{l}\bar{\varphi}_1(b,\lambda)+\bar{\vartheta}_1(b,\lambda)][l\varphi_2(b,\lambda)+\vartheta_2(b,\lambda)]\} > 0 \quad (3.30)$$

olup, (3.25) ifadesinde $\lambda = u+iv,\ \lambda' = u-iv, G(x) = \bar{F}(x)$ koyduğumuzda,

$$2v\int_0^b |F(x)|^2dx = i\{F_1(0)\bar{F}_2(0)-F_2(0)\bar{F}_1(0)\} - i\{F_1(b)\bar{F}_2(b)-F_2(b)\bar{F}_1(b)\} \quad (3.31)$$

ifadesini buluruz. Bu nedenle eğer $F(x) = \vartheta(x,\lambda)+l\varphi(x,\lambda)$ ise, (3.31)'den şunu elde ederiz:

$$2v\int_0^b |\vartheta(x,\lambda)+l\varphi(x,\lambda)|^2dx = iW\{\vartheta+l\varphi,\bar{\vartheta}+\bar{l}\bar{\varphi}\}|_0\ ,$$
(3.32)

ve (3.30)'a bağlı olarak,

$2v\int_0^b |\vartheta(x,\lambda)+l\varphi(x,\lambda)|^2dx < iW\{\vartheta+l\varphi,\bar{\vartheta}+\bar{l}\bar{\varphi}\}_x = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, (3.11) ve (3.10) ile kullanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$W\{\vartheta,\bar{\vartheta}\}_{x=0} = W\{\varphi,\bar{\varphi}\}_{x=0} = 0,\quad W\{\varphi,\bar{\vartheta}\}_{x=0} = W\{\vartheta,\bar{\varphi}\}_{x=0} = 1$ yani,

$$\mathrm{W}\{\vartheta+l\varphi,\bar{\vartheta}+\bar{l}\bar{\varphi}\} = l-\bar{l} = 2iIm\,l. \quad (3.33)$$

(3.32) ifadesinde

$$\int_0^b |\vartheta(x,\lambda)+l\varphi(x,\lambda)|^2dx < -\frac{Im\,l}{v} \quad \text{elde edilir.} \quad (3.34)$$

Aynı sonuç v < 0 (Imz > 0 eşitsizliğini kullanarak) durumunda da elde edilir. Her iki durumda da, Imz'nin ve v'nin işaretleri zıttır. Açıkça görüldüğü gibi l, C_b nin üzerindedir ancak ve ancak

$\int_0^b |\vartheta(x,\lambda) + l\varphi(x,\lambda)|^2\, dx = -\ \dfrac{Im\, l}{v}.$ (3.35)

Ayrıca l, C_b'nin içindeyse ve $0 < b' <$ b ise,

$\int_0^{b'} |\vartheta + l\varphi|^2\, dx < \int_0^b |\vartheta + l\varphi|^2\, dx < -\ \dfrac{Im\, l}{v}$ dir.

Bu durumda l, C_b'nin içindedir. Eğer b < b ise, $C_{b'}$ ifadesi $C_{b'}$ yi içerir. Sonuç olarak $b \to \infty$ olursa, C_b çemberi ya C_∞ limit çemberine ya da m_∞ limit noktasına yakınsak olur. C_b çembere yakınsak olursa, yarıçapı $\tau_\infty = \lim \tau_b$ pozitiftir. (3.29) eşitliğinden $\varphi(x,\lambda) \in L^2(0,\infty)$. Eğer $m = m(\lambda) C_\infty$ üzerinde herhangi bir noktaysa, b > 0 için m herhangi bir C_b'nin içindedir. Bu nedenle, (3.34) ile aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^b |\vartheta(x,\lambda) + m\varphi(x,\lambda)|^2\, dx \le -\frac{Im\, m}{v}.$$

$b \to \infty$ olursa, $\vartheta + \ell\varphi \in L^2(0,\infty)$ elde ederiz. C_b , m_∞'e yakınsak olursa aynı sonuç geçerlidir. Eğer, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ ise, (3.10) ve (3.11)'in daima bir çözümü vardır ve $L^2(0,1)$ sınıfındadır. $\mathrm{lm}\lambda \neq 0$ için $C_b \to m_\infty$ durumunda bütün çözümler $L^2(0, \infty)$'a aittir.

$C_b \to m_\infty$ durumunda $\lim \tau_b = 0$'dır ve (3.29)'dan $\varphi(x,\lambda) \notin L^2(0,\infty)$ elde edilir. Dolayısıyla, $L^2(0,\infty)$ sınıfından tek bir çözümü vardır. Limit çemberinin durumunda l, C_b'nin üzerindedir ancak ve ancak (3.35) eşitliği sağlanır. Bu nedenle, l, C_b'nin üzerindedir ancak ve ancak $\int_0^\infty |\vartheta + l\varphi|^2 dx = -Im\, l$ olursa ve (3.32), (3.33) ve (3.34)'e dayanarak l, C_b'nin üzerindedir ancak ve ancak $\lim_{x\to\infty} W\{\vartheta(x,\lambda) + l\varphi(x,\lambda), \bar{\vartheta}(x,\lambda) + \bar{l}\bar{\varphi}(x,\lambda)\} = 0$.

Böylece, aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 3.4.1. $Im\lambda \neq 0$ ve $\varphi(x,\lambda), \vartheta(x,\lambda)$, $y'_2 - \{\lambda + q_1(x)\} y_1 = 0,\ y'_1 - \{\lambda + q_2(x)\} y_2 = 0,$ sisteminin iki lineer bağımsız çözümüyse ve $\varphi_1(0,\lambda) = \cos\, a, \varphi_2(0,\lambda) = -\sin\, a,\ \vartheta_1(0,\lambda) = \sin\, a,\ \vartheta_2(0,\lambda) = \cos\, a$ başlangıç koşullarını sağlıyorsa, $\varphi(x,\lambda) = \vartheta(x,\lambda) + \ell(x,\lambda)$ $\{\vartheta_1(b,\lambda) + l\varphi_1(b,\lambda)\} \cos\, \beta + \{\vartheta_2(b,\lambda) + l\varphi_2(b,\lambda)\} \sin\, \beta = 0$ sınır koşulunu sağlar ancak ve ancak kompleks l düzleminde, $\ell\ C_b$ üzerindedir ve $W\{\varphi, \bar{\varphi}\}_{x=b} = 0$ dır. Eğer $b \to \infty$ ise C_b ya, C_∞ limit çemberine ya da m_∞ limit noktasına yakınsar. Birinci durumda sistemin bütün çözümleri $L^2(0, \infty)$ sınıfındadır. İkinci durumda $Im\lambda \neq 0$ için sadece bir lineer bağımsız çözüm $L^2(0, \infty)$ sınıfındadır. Ayrıca limit çember durumunda bir nokta C_∞ üzerindedir ancak ve ancak $\lim_{x\to\infty} W_x\{\psi, \bar{\psi}\} = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 3.4.1. $\psi_b(x,\lambda) = \vartheta(x,\lambda) + l_b\varphi(x,\lambda)$ olsun. $Im\lambda \neq 0$ için ve $b \to \infty$ durumunda, $\psi_b(x,\lambda) \to \psi(x,\lambda)$, $\int_0^b \left|\psi_b(x,\lambda)\right|^2 dx \to \int_0^\infty \left|\psi(x,\lambda)\right|^2 dx$ dir.

İspat: $\psi(x,\lambda) \in L^2(0,\infty)$ ve $m(\lambda)$ limit çember üzerinde bir nokta olduğundan $\psi_b(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + \{l(\lambda,b) - m(\lambda)\}\varphi(x,\lambda)$ olduğu açıktır. (3.29) formülünden aşağıdaki denklemi elde edilir:

$|l(x,b) - m(\lambda)| \leq 2r_b = \left(|v| \int_0^b \left|\varphi(x,\lambda)\right|^2 dx\right)^{-1}$. b → ∞ iken $r_b \to 0$ olduğu için $\psi_b(x,\lambda) \to \psi(x,\lambda)$ dir. Ayrıca,

$$\int_0^b \left|\{l(\lambda,b) - m(\lambda)\}\varphi(x,\lambda)\right|^2 dx = \left|l(\lambda,b) - m(\lambda)\right|^2 \int_0^b \left|\varphi(x,\lambda)\right|^2 dx$$

$$\leq \left(v^2 \int_0^b \left|\varphi(x,\lambda)\right|^2 dx\right)^{-1} dir.$$

Buradan $v = \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ için b → ∞ iken, $\int_0^b \left|\psi_b(x,\lambda)\right|^2 dx \to \int_0^\infty \left|\psi(x,\lambda)\right|^2 dx$ elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde sınır koşullarında spektral parametre bulunduran geçiş koşullu Dirac sistemlerinin spektral özelliklerini inceleyeceğiz. Dirac sistemlerinin, V(x) elektrostatik alanında rölativistik elektronunu belirtti bilinmektedir. Eğer V küresel simetrik ise küresel harmonik dönüşümü kullanarak değişkenlere ayırma yöntemi ile bu problem,

$$l := -c\hbar J\,\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} V(x)-mc^2 & c\hbar k x^{-1} \\ c\hbar k x^{-1} & V(x)+mc^2 \end{pmatrix},\ x \in I := I_1 \cup I_2, I_1 := (0,a), I_2 := (a,1] \quad (4.1)$$

iki boyutlu sistem formuna dönüşür. Burada 0 singuler nokta, c > 0 ışık hızı , $k \in \mathbb{Z}\{0\}$, V(x) küresel simetrik potansiyeli, m > 0 parçacığın kütlesi ve $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

L diferansiyel ifadesinden operatörlere geçmek için, $\mathbb{C}^2$deki vektör değeri fonksiyonların uzayını göz önüne alalım. Bu uzay $(y,z) = \int_0^1 (y(x), z(x))_E dx$ $(E \coloneqq \mathbb{C}^2)$ iç çarpımı ile Hilbert uzayı olur. Bu uzayı $H_1 := L^2(I; E^2)$ ile gösterelim.

D=$\left\{ y(x) = \begin{pmatrix} y_{1}(x) \\ y_{2}(x) \end{pmatrix} \in H_1, y_1 \text{ ve } y_2, I \text{ üzerinde mutlak sürekli ve } l(y) \in H_1 \right\}$ olsun.

D üzerinde L operatörünü $L_y = l_y$ ile tanımlayalım. L limit çember durumunda olsun.

Keyfi y,z ∈ D nin Green formülü

$$(Ly,z) - (y,Lz) = [y,z]_{a-} - [y,z]_0 + [y,z]_1 - [y,z]_{a+} \quad (4.2)$$

ile verilir. Burada $[y,z]_x = W_x[y,\bar{z}] = y_1(x)\overline{z_2(x)} - y_2(x)\overline{z_1(x)}$ ve $\lim_{x\to 0^+}[y,z]_x$ limiti vardır ve sonludur.

$$u(x,\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(x,\lambda) \\ u_2(x,\lambda) \end{pmatrix},\ v(x,\lambda) = \begin{pmatrix} v_1(x,\lambda) \\ v_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$u_1(x,\lambda) = \begin{cases} u_{11}(x,\lambda), & x \in I_1 \\ u_{12}(x,\lambda), & x \in I_2 \end{cases}, \quad u_2(x,\lambda) = \begin{cases} u_{21}(x,\lambda), x \in I_1 \\ u_{22}(x,\lambda), x \in I_2 \end{cases}$$

$$v_1(x,\lambda) = \begin{cases} v_{11}(x,\lambda), & x \in I_1 \\ v_{12}(x,\lambda), & x \in I_2 \end{cases}, \quad v_2(x,\lambda) = \begin{cases} v_{21}(x,\lambda), x \in I_1 \\ v_{22}(x,\lambda), x \in I_2 \end{cases}$$

$l(y) = \lambda_y$, x ∈ I denkleminin

$u_{12}(1,\lambda) = 1, u_{22}(1,\lambda) = 0,$
$u_{12}(1,\lambda) = 0, u_{22}(1,\lambda) = 1,$

başlangıç ve

$u_{11}(a-,\lambda) = \delta u_{12}(a+,\lambda), u_{21}(a-,\lambda) = \frac{1}{\delta} u_{22}(a+,\lambda),$

$u_{11}(a-,\lambda) = \delta u_{12}(a+,\lambda), u_{21}(a-,\lambda) = \frac{1}{\delta} u_{22}(a+,\lambda),$

δ , $\frac{1}{\delta}$ $\in \mathbb{R}$ geçiş koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar.

(4.1) denkleminin iki çözümünün Wronskian'ı x'e bağlı değildir ve bu denklemin iki çözümünün Wronskian'ı sıfırdan farklı olduğu sürece, bunlar lineer bağımsızdırlar. Bu Wronskian'ın sıfır olmadığı açıktır. L limit çember durumunda olduğundan, $u, v \in H_1$ ve ayrıca $u, v \in D$ dir. $u(x,\lambda)$ ve $v(x,\lambda)$ çözümleri (4.1) denkleminin temel sistemi formundadır ve λ nın tam fonksiyonudurlar.

$u(x) = u(x,0)$ ve $v(x) = v(x,0)$, l(y) = 0 denkleminin

$u_{12}(1) = 1, u_{22}(1) = 0$

$v_{12}(1) = 0, v_{22}(1) = 1,$

başlangıç koşulunun çözümleri olsunlar.

Yardımcı Teorem 4.1. l(y) = 0 denkleminin u(x) ve v(x) gerçek çözümleri için $[u,v]_x = 1$ $(x \in I)$ olsun. $y, s \in D$ için,

$[y,s]_x = ([y,u]_x[\bar{s},v]_x - [y,v]_x[\bar{s},u]_x)$ $(x \in I)$dir. (4.3)

İspat: $y_i(x)$ ve $z_i(x)(i = 1{,}2)$ fonksiyonları reel değerli ve $[u,v]_x = 1$ $(a \le x \le b)$ olduğundan $[y,u]_x[z,v]_x - [y,v]_x[z,u]_x$

$=(y_1(x)u_2(x) - y_2(x)u_1(x))(\bar{z}_1(x)u_2(x) - \bar{z}_2(x)v_1(x))$

$-(y_1(x)v_2(x) - y_2(x)v_1(x))(\bar{z}_1(x)u_2(x) - \bar{z}_2(x)v_1(x))$

$=y_1(x)u_2(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) - y_1(x)u_2(x)\bar{z}_2(x)v_1(x) - y_2(x)u_1(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) +$

$y_2(x)u_1(x)\bar{z}_2(x)v_1(x) - y_1(x)u_2(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) + y_1(x)u_2(x)\bar{z}_2(x)v_1(x)$

$+y_2(x)u_2(x)\bar{z}_1(x)v_1(x) - y_2(x)u_1(x)\bar{z}_2(x)v_1(x)$

$=$

$-y_1(x)u_2(x)\bar{z}_2(x)v_1(x) - y_2(x)u_1(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) - y_1(x)u_2(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) +$

$y_1(x)u_1(x)\bar{z}_2(x)v_2(x) + y_2(x)u_2(x)\bar{z}_1(x)v_1(x) = (-y_1(x)\bar{z}_2(x) + y_2(x)\bar{z}_1(x))(u_2(x)v_1(x) -$

$u_1(x)v_2(x))$

$= [y,z]_x$

elde edilir.

Şimdi λ karmaşık spektral parametre, $\beta_1, \beta_2, \beta'_1, \beta'_2 \in \mathbb{R}$ ve $\beta := \begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta_1 \\ \beta'_2 & \beta_2 \end{vmatrix} > 0$ olmak üzere

$l(y) = \lambda y, \quad y \in D, x \in I,$ (4.4)

$$-(\beta_1 y_1(1) - \beta_2 y_2(1) = \lambda\left(\beta'_1 y_1(1) - \beta'_2 y_2(1)\right), \tag{4.5}$$

$$[y,u]_0 + h[y,v]_0 = 0, Im\, h > 0, \tag{4.6}$$

$$y_1(a-) = \delta y_1(a+) \tag{4.7}$$

$$y_2(a-) = \frac{1}{\delta} y_2(a+) \tag{4.8}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Kolaylık için aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

$R_1(y) := \beta_1 y_1(1) - \beta_2 y_2(1), \quad R'_1(y) := \beta'_1 y_1(1) - \beta'_2 y_2(1),$

$N_0^{-1}(y) := [y,u]_0, N_0^2(y) := [y,v]_0, \quad R_0(y) := N_0^1(y) + hN_0^2(y)$

$N_1(y) := y_1(a-) - \delta y_1(a+), \quad N_2(y) := y_2(a-) - \frac{1}{\delta} y_2(a+)$

Yardımcı Teorem 4.2. Her $y,z \in D$ için aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$R_1(\bar{z}) = \overline{R_1(z)}, R'_1(\bar{z}) = \overline{R'_1(z)} \tag{4.9}$$

$$[y,z]_1 = \frac{1}{\beta} R_1(y)\left[\overline{R'_1(z)} - R'_1(y)\overline{R_1(z)}\right]$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\left[R_1(y)\overline{R'_1(z)} - R'_1(y)\overline{R_1(z)}\right] &= \frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} (\beta_1 y_1(1) - \beta_2 y_2(1))\overline{\beta'_1 z_1(1) - \beta'_2 z_2(1)} \\ -(\beta'_1 y_1(1) - \beta'_2 y_2(1))\overline{\beta_1 z_1(1) - \beta_2 z_2(1)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\beta}\left[(\beta'_1\beta_2 - \beta'_1\beta_2)\left(y_1(1)\overline{z_2(1)} - y_2(1)\overline{z_1(1)}\right]\right. \\
&= [y,z]_1.
\end{aligned}$$

Şimdi

$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, Z(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, z(x) =$ $\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$, $y_i(.), z_i(.) \in H_1, i = 1,2, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{C}$ olmak üzere; $H = H_1 \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayını $< Y, Z >_H = \int_0^a (y(x), z(x))_E dx + \int_a^1 (y(x), z(x))_E dx + \frac{1}{\beta}\widetilde{y\bar{z}}$ iç çarpımı ile tanımlayalım.

D(A)= $\{Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \in H$ ifadesinin $y(x) \in D, R_0(y) = 0,\ \tilde{y} = R'_1(y)\, y\,(a\pm)$ tek yönlü limitleri var ve sonlu ,$N_1(y) = 0,\ N_2(y) = 0\}$ ile tanımlayalım.

D(A) üzerinde A operatörünü $AY = \tilde{l}(Y) := \begin{pmatrix} l\,(y) \\ -R_1(y) \end{pmatrix}$ ile tanımlayalım.

Bu nedenle, H'den (4.2)-(4.6) sınır değer problemlerini $AY = \lambda Y, Y \in \mathrm{D}\,(A)$ olarak oluştururuz. A'nın özdeğerleri ile uzayı üzerinde ve (4.2)-(4.6) deki sınır değer probleminin özdeğerlerinin çakıştığı açıkça görülmektedir. Şimdi A operatörünün dissipatif operatör olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 4.3. A operatörü H uzayı üzerinde dissipatiftir.

İspat: $Y \in D(A)$ olsun. Lagrange özdeşliğiyle

$$(Y, AY) = [y,y]_{a-} - [y,y]_0 + [y,y]_1 - [y,y]_{a+} + \frac{1}{\beta}\left[R'_1(y)\overline{R_1(y)} - R_1(y)\overline{R'_1(y)}\right] \qquad (4.10)$$

elde edilir. $Y \in D(A)$ olduğu için,

$$[y,y]_{a-} = [y,y]_{a+} \quad \text{dir. Yardımcı Teorem } (4.1)'\text{den} \qquad (4.11)$$

$$[y,y]_0 = ([y,u]_0[\bar{y},v]_0 - [y,v]_0[\bar{y},u]_0 = -2i\, Im\, h\, ([y,v]_0)^2 \quad \text{bulunur.} \qquad (4.12)$$

(4.11), (4.9), (4.12)'dan

$$Im\,(AY, Y)) = Im\, h\, ([y,v]_0)^2 \quad \text{elde edilir.} \qquad (4.13)$$

Burada A operatörü H uzayı üzerinde dissipatif operatördür.

Sonuç 4.4 . A'nın bütün öz değerleri $Im\,\lambda \geq 0$ kapalı üst yarı düzlemdedir.

Teorem 4.5. A operatörünün reel öz değeri yoktur.

İspat: A operatörünün reel öz değerinin λ_0 olduğunu farz edersek, $\eta_0(x) = v(x, \lambda_0)$ da λ_0'a karşılık gelen öz fonksiyon olsun. $\mathrm{Im}\,(A\eta_0, \eta_0)) = \mathrm{Im}\left(\lambda_0 \|\eta_0\|^2\right)$ olduğu için, (4.13)'ten $[\eta_{0,}v]_0 = 0$ elde edilir. (4.6) sınır koşulundan $[\eta_{0,}u]_0 = 0$ elde edilir. Bu nedenle,

$$[\eta_0\,(x,\lambda_0)\,, u]_0 = [\eta_0\,(x,\lambda_0)\,, v]_0 = 0 \quad \text{dır.} \qquad (4.14)$$

Yardımcı Teorem 4.1. den $\xi_0(x) = u(x, \lambda_0)$ yazarsak $1 = [\eta_0, \xi_0]_0 = [\eta_0, u]_0[\xi_0, v]_0 - [\eta_0, v]_0[\xi_0, u]_0$ elde edilir. (4.14) ifadesinden yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0'a eşittir. Bu çelişki teoremi ispatlamaktadır. Özellikle A'nın öz değerinin 0 olmadığına dikkat edilmelidir. Şimdi (4.4) denkleminin

$\varphi_{12}(1,\lambda) = \beta'_2\lambda + \beta_2, \varphi_{22}(1,\lambda) = \beta'_1\lambda + \beta_1,$

$N_0^1(X) = -h, N_0^2(X) = 1$ ve

$$\varphi_{11}(a-,\lambda) = \delta\varphi_{12}(a+,\lambda), \varphi_{21}(a-,\lambda) = \frac{1}{\delta}\varphi_{22}(a+,\lambda),$$

$$X_{11}(a-,\lambda) = \delta X_{12}(a+,\lambda), X_{21}(a-,\lambda) = \frac{1}{\delta}X_{22}(a+,\lambda)$$

başlangıç ve geçiş koşullarını sağlayan

$$\varphi_1(x,\lambda) = \begin{cases}\varphi_{11}(x,\lambda), & x \in I_1\\ \varphi_{12}(x,\lambda), & x \in I_2\end{cases}, \qquad \varphi_2(x,\lambda) = \begin{cases}\varphi_{21}(x,\lambda), & x \in I_1\\ \varphi_{22}(x,\lambda), & x \in I_2\end{cases}$$

$$X_1(x,\lambda) = \begin{cases}X_{11}(x,\lambda), & x \in I_1\\ X_{12}(x,\lambda), & x \in I_2\end{cases}, \qquad X_2(x,\lambda) = \begin{cases}X_{21}(x,\lambda), & x \in I_1\\ X_{22}(x,\lambda), & x \in I_2\end{cases}$$

$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ve $X(x,\lambda) = \begin{pmatrix}X_1(x,\lambda)\\ X_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ çözümünü tanımlayalım.

$\omega_1(\lambda) := W_x[\varphi, \overline{X}](x \in I_1)$ ve $\omega_2(\lambda) := W_x[\varphi, \overline{X}](x \in I_2)$ olsun. Açıkça görülmektedir ki $\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda), \forall\lambda \in \mathbb{C}$. Bu nedenle, $\omega_1(\lambda)$ve $\omega_2(\lambda)$ sıfırları çakışıktır.

$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$ olarak tanımlandığında, ω tam fonksiyon olur. (4.9) denkleminden $\omega(\lambda) = W_x[\varphi, \overline{X}] = W_1[\varphi, \overline{X}] = \frac{1}{\beta}(R_1(\varphi)R'_1(x) - R'_1(\varphi)R_1(x)) = R_1(x) + \lambda R'_1(x)$ elde edilir.

(4.3) denklemini kullanarak

$\omega(\lambda) = W_x[\varphi, \overline{X}] = W_0[\varphi, \overline{X}] = N_0^1(\varphi)N_0^2(X) - N_0^2(\varphi)N_0^1(X) = R_0(\varphi)$ elde edilir.

$\omega(\lambda) = 0$ denkleminin sıfırlarının (4.4)-(4.8) deki sınır değer problemlerinin spektrumuyla çakıştığı açıkça görülmektedir. $\omega(\lambda)$ fonksiyonu sıfır değildir. Sayılabilir sayıda sonlu katlı izole sıfır yerlere sahiptir.

Şimdi ^{T} devrik matrisi göstermek üzere,

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases}\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)X^T(t)}{\omega(\lambda)}, & 0 \le t \le x \le 1, x \ne a, t \ne 0\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{\varphi(t)X^T(x)}{\omega(\lambda)}, & 0 \le x \le t \le 1, x \ne a, t \ne 0\end{cases}\end{cases} \tag{4.15}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

O zaman $\overline{F(x)} = \begin{cases}\overline{f_1(x)}, & x \in I_1\\ \overline{f_2(x)}, & x \in I_2\end{cases}$ olmak üzere $AY - \lambda Y = F$ denkleminin genel çözümü

$Y = (A - \lambda I)^{-1}F = \begin{pmatrix}(\widetilde{G}_{x,\lambda}, \overline{F})\\ R:[(\widetilde{G}_{x,\lambda}, \overline{F})]\end{pmatrix}, \widetilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix}G(x,t,\lambda)\\ R:[G(x,t,\lambda)]\end{pmatrix}$ dir.

$\mathrm{K} := (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^{-1}$ ile gösterelim.

Teorem 4.6. K rezolvent operatörü H uzayında kompakt lineer operatördür.

İspat: L operartörünün indis defekti (2,2) olduğundan $\varphi, X \in H$ dir. Buradan, $G(x,t,\lambda)$ Hilbert-Schmidth çekirdektir. K operatörünün çekirdeği Hilbert-Schmidth çekirdek olduğundan K operatörünün kompaktlığı elde edilir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında Hilbert uzayında sınır koşullarında spektral parametre bulunduran geçiş koşullu Dirac operatörü ele alındı. Bu operatörün dissipatifliği verildi. Öz değerlerinin reel olmadığı ve üst yarı kompleks düzlemde olduğu gösterildi.

Green fonksiyonu kuruldu. Green fonksiyonu yardımıyla resolvent operatörünün kompaktlığı gösterildi.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*, Volume I. Frederick Ungar, New York.

Allahverdiev, B.P., 2003. Spectral analysis of dissipative Dirac operators with general boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 287-303.

Allahverdiev, B.P., 2004. Dissipative eigenvalue problems for a singular Dirac system. *Applied Mathematics and Computation*, 152, 127-139.

Allahverdiev, B.P., 2005. Extensions, dilations and functional models of Dirac operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 51, 459-475.

Allahverdiev, B.P., 2005. Extensions, dilations and functional models of dirac operators in limit circle case. *Forum Mathematicum.*, 17, 591-611.

Allahverdiev, B.P., 2013. A Nonself-Adjoint 1D Singular Hamiltonian System with an Eigenparameter in the Boundary Condition. *Potential Analysis*, 38, 1031-1045.

Allahverdiev, B.P., 2013. Spectral problems of non-self adjoint 1D singular Hamiltonian systems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17, 1487-1502.

Allahverdiev, B.P., Bairamov, E., Uğurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401, 388-396.

Allahverdiev, B. P., Uğurlu, E., 2015. On dilation, scattering and spectral theory for two-interval singular differential operators. *Bulletin Math`Ematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie*, 58, 383-392.

Amirov, R.Kh., 2004. On a representation of solution of Dirac differential equation systems which have discontinuity in interval. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3, 297-308.

Anderson, C.D., 1933. The positive electron. *Physical Review*, 43, 491-494.

Bairamov, E., Uğurlu, E., 2012. On the characteristic value softhereal component of a dissipative boundary value transmission problem. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 9657-9663.

Balcı, M., 2010. *Matematik Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara.

Baskakov, A.G., Derbushev, A.V., Shcherbakov, A.O., 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izvestiya: Mathematics*, 75, 445-469.

Behrndt, J., 2009. Boundary value problems with eigenvalue depending boundary conditions. *Mathematische Nachrichten,* 282, 659-689.

Bozkurt, D., Türen, B., 2000. *Lineer Cebir*, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya.

Çakar, Ö., 2007. *Fonksiyonel Analize Giriş*, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No. 13, Ankara.

Demirci, I.A, 2015. Sınır Koşulunda Spektral Parametre Bulunduran Kendine Eş Olmayan Dirac Sistemleri, Doktora Tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, Türkiye.

Djakov, P., Mityagin, B., 2012. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions. *Indiana University Mathematics Journal,* 61, 359-398.

Djakov, P. Mityagin, B., 2012. Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions. *Journal of Approximation Theory,* 164, 879-927.

Djakov, P., Mityagin, B., 2012. Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators. *Journal of Functional Analysis,* 263, 2300-2332.

Djakov, P., Mityagin, B., 2013. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 141, 1361-1375.

Eryılmaz, A., 2012. Spectral analysis of q−sturm-liouville problem with the spectral parameter in the boundary condition, journal of function spaces and applications. Article ID 736437, 17. doi:10.1155/2012/736437

Everitt, W.N., Hinton, D.B., Shaw, J.K., 1983. The asymtotic form of the Titchmarsh-Weyl coefficient for Dirac systems. *Journal of the London Mathematical Society,* 2, 465-467.

Fulton, C.T., 1977. Two-point boundary value problems with eigenparameter contained in the boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 77A, 293-308.

Gerritsma, R., Kirchmair, G., Zahringer, F., Solano, E., Blatt1, R., Roos, C. F., 2010. Quantum simulation of the Dirac equation. *Nature*, 463, 68-71.

Gorbachuk, V.I., Gorbachuk M.L., 1991. *Boundary Value Problems for Operator Di§erential Eguations,* Kluwer Academic Publishers, London.

Hinton, D.B., 1979. An expansions theorem for an eigenvalue problem with eigenparameter in the boundary condition. *Quarterly Journal of Mathematics Oxf Ser II*, 30, 33-42.

Kablan, A., Özden, T., 2013. A Dirac system with transmission condition and eigenparameter in the boundary condition. *Abstract and Applied Analysy*, ID. 395457.

Kadakal, M., Mukhtarov, O.Sh., 2006. Discontinuous Sturm-Liouville problems containing eigenparameter in the boundary condition. *Acta Mathematical Sinic*, 22, 1519-1528.

Krein, M.G., Nudelman, A.A., 1989. On some spectral properties of an ınhomogeneous string with dissipative boundary condition. *Journal of Operator Theory*, 22, 369-395.

Kryszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Sons, New York.

Levitan, B.M., Sargsjan, I. S., 1991. *Sturm-Liouville and Dirac Operators. Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (translated from the Russian).

Lunyov, A.A., Malamud, M.M., 2013. On the completeness of the root vectors for first order systems. *Doklady Mathematics*, 3, 678-683.

Lunyov, A.A., Malamud, M.M. (Submitted on 11 Jan 2014). On the completeness and Rieszbasis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems. *Application to the Timoshenko beam model*. arXiv:1401.2574.

Lunyov, A.A., Malamud, M.M., 2014. On Spectral Synthesis for Dissipative Dirac Type Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, DOI 10.1007/s00020-014-2154-9.

Malamud, M.M., Oridoroga, L.L., 2012. On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 263, 1939-1980.

Naimark M. A., 1968. *Linear Di§erental Operators*, Second ed. Nauka, Moscow English transl. of Örst ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.

Prugovecki, E., 1981. *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2nd ed. Academic Press, New York.

Thaller, B. 1992. *The Dirac Equation*, Springer, New York.

Tretter, C., 2000. Spectral problems for systems of differential equations with λ-polynomial boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, 214, 129-172.

Tuna, H., 2013. On spectral properties of dissipative fourth order boundary-value problem with a spectral parameter in the boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 9377-9387

Tuna, H., Eryılmaz, A., 2013. Completeness Theorem for Discontinuous Dirac Systems. *Differential Equations and Dynamical Systems*, DOI: 10.1007/s12591-013-0194-2.

Tuna, H., Eryılmaz, A., 2014. On the completeness of the root vectors of dissipative Dirac operators with transmission conditions. *African Diaspora Journal of Mathematics*, 17, 47-58.

Tunc, E., Mukhtarov, O. Sh., 2004. Fundamental solutions and eigenvalues of one boundary-value problem with transmission conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 157, 347-355.

Uğurlu, E., Allahverdiev, B.P., 2013. Onself adjoint dilation of the dissipative extension of a directsum differential operatör. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 7, 194-207.

Weidmann, J., 1987. *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in Mathematics*. Vol 1258, Springer, Berlin.

Weidmann, J.. 2003. *Lineare Operatoren in Hilbert aumen*, Teil 2: Anwendungen, B.G. Teubner, Stuttgart.

Walter, J., 1973. Regular eigenvalue problems with eigenparameter in the boundary condition. *Mathematische Zeitschrift*, 133, 301-312.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Abdullah KENDÜZLER
Doğum Yeri ve Yılı	: Ankara 1981

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	:Ankara Lisesi	1999
Lisans	:Kırıkkale Üniversitesi	2005

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl
1- Açı Dershanesi (Öğretmen)	2003
2- Ak Dershane (Kurucu Ortak)	2007
3- Sınav Akademi (Öğretmen)	2011
4- İhtiyaç Akademi(Öğretmen)	2014
5- İzmir Sınav Koleji (Kurucu Ortak)	2016

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

Tuna, H., Kendüzler A., 2016. Spectral Properties of an Eigenparameter Dependent Singular Dirac Operator. ICMME International Conference on Mathematics and Mathematics Education Abstract Book, Elazığ, Turkey.