

Prof. Dr. Necdet Şen'in
K.T.Ü'ye armağanıdır. (31) 9

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ - ELEKTRİK FAKÜLTESİ

BELİRGİN VE OLASIL
KONTROL SİSTEMLERİNDE
PREDİKSİYON

K. Ü.
Merkez Kütüphane Müdürlüğü
Dem. No. : 2754
Fiatı : 100

İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik Fakültesince
"Doktor"

ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdır.

Yük. Müh. Atillâ Bir

Tezin Dekanlığa verildiği tarih : 9-7-1974

Sözlü imtihan tarihi : 8-5-1975

Doktorayı Yöneten : Prof. M. Münir ÜLGÜR

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Tarık ÖZKER

Prof. Hasan ÖNAL

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
ELEKTRİK FAKÜLTESİ OFSET ATÖLYESİ
1975

Çalışmalarımı her bakımdan destekleyen hocam ve
yöneticim Prof. M. Münir ÜLGÜR'e,
tartışmalarda değerli fikirlerinden yararlandığım
Prof. Dr. Tarık ÖZKER'e
ve tezimi titizlikle inceleyen
Prof. Hasan ÖNAL'a
teşekkür ederim.

Nececi Sen aġbimize gelecekteki
salısmalarımıza isin en iyi
dikketle

1. Ağustos 1975

d.ki

Gönül bilgiyle alçalır

Knowledge breeds humility

Wissen zeugt Bescheidenheit

Ö Z E T

Bu çalışmada kontrol sistemlerinde kullanılması öngörülen prediktörlerin geliştirilmesi için gerekli yöntemler araştırılmıştır.

Önce prediksyon olayının özü araştırılarak özellikleri saptanmış ve sonra basit elemanlar aracıyla kabul edilebilecek derecede doğru bir prediksyonu gerçekleyen ve ekonomik olan bir prediktör yapımına geçilmiştir. Nedensellik ilkesine aykırı düştüğünden prediksyonu tam olarak gerçeklemek imkânsızdır. Ancak belirli bir "nedensellik kaybı" göze alınırsa yaklaşık bir "ideal prediktörü" gerçekleştirme olanağı vardır. Bunun için sonsuz sayıda türevalıcı elemanın kullanılması gerekmektedir. Biz bunun yerine sonlu sayıda türevalıcı eleman kullanarak bir nedensel yaklaşık ideal prediktör yaklaşımının (teknik prediktörün) yapılmasını önermiş bulunuyoruz. Bunun için amaca uygun basit bir analog türevalıcı geliştirerek bunu teknik prediktörümüzün yapımında kullandık.

Çalışmamızda ayrıca belirgin bir işaretin prediksyonunda minimum sayıda türevalıcıyla optimum çözüm veren bir "optimal prediktör" geliştirdik ve bu prediktörün, eğer işaretin özkorelasyonu yerine denkleminde

yararlanılırsa, N. Wiener ve R. Kalman'ın olası işaretler için geliştirdikleri teoriyi uygulayarak hesap ettiğimiz prediktörlere eşdeğer olduğunu gösterdik. Wiener ve Kalman'ın prediksyon teorisinde ileri sürülen gerekli işaret özellikleri bilinmiyorsa bu teorilere göre geliştirilen optimal prediktör tarafımızdan önerilen yaklaşık ideal prediktöre dönüşür. Yukarıda belirtilenlerin ışığı altında olası işaretler için geliştirilmiş olan Wiener ve Kalman'ın prediksyon teorilerinin belirgin işaretler için karşılığı geliştirilmiş ve bunların yaklaşık ideal prediktörle ilişkileri belirtilmiştir. Bunun sonucu olarak kontrol sistemlerinde rastlanan belli başlı belirgin ve olası işaretlere ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonları elde edilmiştir. Çalışmamızda bu işaretlere ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonları bir tablo halinde sunulmuştur.

A B S T R A C T

DETERMINISTIC AND PROBABILISTIC PREDICTION IN
CONTROL SYSTEMS

In this thesis, the necessary methods for the use of predictors in control systems have been developed. First, the essentials of the prediction phenomenon have been analyzed, and their properties are determined. Then, the next step was to construct an accurate and economical predictor with simple electrical elements. Since the prediction contradicts the principle of causality, a complete realization of the phenomenon is impossible. Only when a certain "causality error" is accepted, then an approximate "ideal predictor" can be realized. For this reason one needs an infinite number of differentiators. Therefore, a simple analog differentiator is proposed and developed to be used in the construction of this approximated ideal predictor. An optimal predictor, with a minimum number of differentiators, that gives optimum results to a certain deterministic signal has also been developed. It is proved that this optimal predictor is equivalent

to N. Wiener's and R. Kalman's optimal predictors developed for probabilistic signals. When in Wiener and Kalman predictors the signal property is abandoned, then the optimal predictor becomes equivalent to the above discussed ideal predictor. Thus, the deterministic equivalent to the known probabilistic optimal predictor is found and its relations to the ideal predictor are determined. For the signals, that are frequent in automatic control systems, corresponding transfer functions of optimal predictors are calculated and presented in a chart.

Z U S A M M E N F A S S U N G

DIE DETERMINISTISCHE UND WAHRSCHEINLICHE
VORHERSAGESCHALTUNGEN IN DER REGELUNGSTECHNIK

In dieser Dissertation wird, um die Prediktoren (Vorhersageschaltungen) in der Regelungstechnik einführen zu können, einfache Methoden vorgeschlagen und sie mit den bekannten theoretischen Untersuchungen verglichen.

Zuerst wird das Wesen der Vorhersage analysiert; dann die wesentlichen Eigenschaften in Sätzen formuliert. Danach wird der Schaltung ein genauer und ekonomischer Prediktor angegeben. Die Vorhersage ist unrealisierbar weil sie dem Kausalitätsprinzip widerspricht. Nur, wenn ein bestimmter Fehler in Kauf genommen wird, kann eine angenäherte Nachbildung angegeben werden. Deswegen braucht man unendlich viele Differenzier-Schaltungen. Eine einfache Schaltung ist vorgeschlagen und in der Konstruktion der angenähert idealen Prediktor mit Erfolg angewandt worden.

Für deterministische Signale besteht die Möglichkeit, dass man mit einer minimalen Anzahl von Differenzier-Schaltungen, einen "optimalen Prediktor" angeben kann.

Es wurde gezeigt dass dieser optimale Prediktor, mit den für probabilistische Signale vorgeschlagene N. Wiener und R. Kalman Prediktoren gleichwertig ist. Wenn in den Wiener und Kalman Prediktoren die Signaleigenschaften unberücksichtigt werden, erhält man den oben erwähnten angenähert idealen Prediktor. So ist die Verwandtschaft zwischen optimal deterministischen und optimal stochastischen Prediktoren bewiesen und die Beziehungen zu dem idealen Prediktor gezeigt worden. Für die Signale die oft in der Regelungstechnik vorkommen, sind die den optimalen Prediktoren entsprechende Übertragungsfunktionen berechnet und in einer beigefügten Tabelle angegeben worden.

İ Ç İ N D E K İ L E R

GİRİŞ	1
BÖLÜM I - İDEAL PREDİKTÖR ÖZELLİKLERİ	10
1.1 İdeal prediktörün tanımı	10
1.2 1- Lineerlik	11
2- Zamanla-değişmeme (Teorem 1)	12
1.3 Kararlılık (Teorem 2)	12
1.4 Nedensellik ilkesi	13
1.5 İdeal prediktörü yaklaşık gerçekleştirilme olanağının araştırılması	17
1.6 İdeal prediktörün transfer fonksiyonu	17
1.7 İdeal prediktörün modülü, fazı, Nyquist ve Bode diyagramı	22
1.8 Grup gecikmesi kavramı (Teorem 3)	26
1.9 Tümgeçiren sistemler kavramı (Teorem 4)	27
1.10 Minimumfazlı sistemler (Teorem 5a ve 5b).	30
BÖLÜM II - İDEAL PREDİKTÖRÜN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ	35
2.1 İdeal prediktörün yaklaşık gerçekleştirilmesi (Teorem 6a, 6b, 6c, 6d ve 6e).	35
2.2 Türev alıcı eleman	43
2.3 Değişke türev alıcı	52

2.4	Otomatik kontrol sistemlerinde işaretler ve bu işaretlere prediktörün uygulanması	59
BÖLÜM III- WIENER PREDİKTÖRÜ		64
3.1	N. Wiener'in prediktör modeli	65
3.2	N. Wiener'in optimal çözümü	67
3.3	Optimal Wiener prediktörünün Bode-Shannon yorumu ve çözüm yöntemi	74
3.4	Prediksiyon yanılığısı	76
3.5	Otomatik kontrol sistemlerinde işaretler ve bunlara ilişkin optimal prediktörlerin bulunması	76
	1- Birinci dereceden bir sistemin karşılığına ilişkin optimal prediktör	79
	2- İkinci dereceden bir sistemin karşılığına ilişkin optimal prediktör	86
	3- Genel inceleme (Teorem 7)	90
Çeşitli işaretlere ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonlarını içeren tablolar		93-100
BÖLÜM IV - KALMAN PREDİKTÖRÜ		101
4.1	Sistemlerin durum denklemleriyle belirlenmesi	102
4.2	Kalman prediktörü	106
4.3	Kalman prediktörünün sistem karşılıklarına uygulanması	108
	1- Birinci dereceden bir sistemin karşılığına ilişkin optimal prediktör	108
	2- İkinci dereceden bir sistemin karşılığına ilişkin optimal prediktör	110

G İ R İ Ő

Belirgin ya da olası sistem çıkışlarının gözlemleri sonucundan, bir sistemin gelecekteki çıkışlarını önceden kestirebilmeye prediksyon denir (47, Webster).

Otomatik kontrol sistemlerinde bu terimi ilk kez 1938 yıllarında, Amerika Birleşik Devletlerinde kısaca adı MIT olan, Massachusetts Institute of Technology'den matematikçi Norbert Wiener kullanmıştır. Radar sistemlerinin gelişmesi ile birlikte İkinci Dünya Savaşı başlangıcında ortaya çıkan ünlü "prediksyon sorunu" savaş sırasında birbirlerinden habersiz olarak Rusyada A. Kolmagoroff (21) ve Amerikada N. Wiener (48,49) tarafından çözülmüştü.

Sorunu kısaca şöyle özetleyebiliriz: yaklaşan bir düşman uçağının radarla izlenen geçmişe ilişkin uçuş yolu ve diğer gerekli ölçü değerleri önbilgiler halinde bilinmiş olsun. Bu uçağı vurabilmek için uçaksavar topunu hangi noktaya yöneltmek gerekir? Bu örnekte uçağın olası yolunun saptanması temel problemi yanında, rüzgâr yönünün ve şiddetinin belirlenmesi, merminin hedefe varma süresinin hesaplanması gibi yan problemler de vardır.

Genel olarak N. Wiener geçmişe ilişkin informasyonda geleceğe ilişkin informasyonun ne derece var olduğunu araştırmıştır. Wiener'in kurmuş olduğu teori, predik-siyon sorunu yanında, haberleşme sistemlerinde işa-retin gürültüden süzülmesi gibi çok önemli baş-ka bir soruna da uygulanabilir. Bugün Wiener'in ilk çalışmaları genelleştirilmiş, bu çalışmaları özel hal olarak içine alan daha geniş teoriler kurul-muştur (13,14,15,16).

N. Wiener 1942'de Ulusal Savunma Komisyonuna sunduğu raporda (48) haberleşme tekniği için çok önemli olan düzleştirme (smoothing) ve prediksyon teorisinin mate-matiksel temellerini vermişti. Savaş yıllarının sınırlı haberleşme olanakları ve sonraları teorinin çok geniş bir matematik önbilgiyi gerektirmesi nedeni ile Wiener ve Kolmagoroff'un teorileri uzun bir süre değerlendirile-medi. Mühendislerce, renginden dolayı, "sarı bela" (The yellow peril) adı verilen rapor ancak gizli askeri projelere uygulandı (34). Bu uygulamalara ilişkin çok az bilgi dışarıya sızmıştır: bunlara örnek olarak modern denizaltılarda derinliğin önceden kestirmeli kont-roluna ilişkin Amerikan Deniz Kuvvetlerinin desteklediği projeler verilebilir (19,20). Bu referanslar, uygulamala-üzere çok genel ve yetersiz bilgiler vermektedir.

Prediksyon teorisinde ilk teorik genelleştirmeler, sı-nırlı bellek kavramı ile birlikte Zadeh ve Ragazzini'nin

1950 yılında yayınladığı makale ile başladı (51). Bundan bağımsız olarak Bode ve Shannon bu teoriyi basitçe yorumlayarak, bu teorinin temellerinin anlaşılması ve uygulanması yönünden çok yararlı oldular (2). Zamanla-değişen sistemlere ilişkin denklemleri ilk kez Booton geliştirdi (5). Bütün bu incelemeler, bugün Lanning ve Battin (23), Davenport ve Root (8), Truxal (43), Smith (40) tarafından yazılmış olan otomatik kontrol, rasgele işaret ve gürültü konularına ilişkin kitaplarda bulunur.

Yukarıda adı geçen yazarların ortaya koyduğu temel düşüncenin biraz dışında bir görüş açısını Darlington vermiştir (7). Wiener yönteminin örnek alma sistemlerine uygulanması Lees (25), Tretter ve Steiglitz (42), Robbins (35) ve Booth (4) tarafından geliştirilmiştir.

Teoriyi zamanla-değişen bazı özel işaretlere Davis (9), Booton (5) ve Shinbrot (39) uygulamıştır. Ayrıca teorinin çok değişkenli (multivariable) sistemlere uygulanması Hsieh ve Leondes (11) ve McCracken (27) tarafından yapılmıştır. Burada verilen isimler Amerikan ekolünde teorinin gelişmesinde en çok katkıda bulunanlarıdır.

Klasik Wiener teorisinin tamamen geliştirildiği ve uygulamalar için gerekli matematiksel metodlar olgunlaştırıldığı bir sırada, 1961 yılında Kalman ve Bucky (14, 15,16,41) sistem modelini, giriş ve çıkış büyüklükleri yerine, durum denklemleriyle belirleyerek, klasik teorisinin eriştiği sonuçlara kısa ve güzel çözümlerle var-

miş, bunun ötesinde dualite ilkesini vererek optimum kontrol ve prediksyon sorunlarını bir çatı altında birleştirmeyi başarmıştır. Son yıllarda bu yeni yöntemin her türlü özel soruna uygulanması yönünde çalışılmaktadır.

Bizim çalışmalarımızın amacı, yukarıdaki klasik ve teorik incelemeler yanında, prediksyon sorununu tartışarak, sürekli kontrol sistemlerinde kullanmak üzere, basit bir "teknik prediktör" gerçekleştirmektir. Otomatik kontrol sistemlerinde prediktör, bir işaretin gelecekteki değerlerini önceden kestirebildiğinden, sistemi, işaretin normal değişiminden önce uyarmaktadır. Ayrıca sistemdeki gecikmeler denkleştirildiğinden sistem daha kararlı olmaktadır. Çalışmalarımızda önce ideal prediktörün tanımı yapılarak özellikleri incelenmiş ve bu özellikli bir sistemin gerçekleştirilmesine çalışılmıştır.

Birinci bölümde görülebileceği gibi sorun ideal bir türevalıcının gerçekleştirilmesine dönüşmektedir. Burada ideal prediktörün gerçekleşmesinde, yapımı kolay ve kararlı olan bir "değişke türevalıcı" kullanılmıştır.

İdeal prediktör sonsuz sayıda bu tür türevalıcıdan oluşur ve sürekli, belirgin ya da olası, her tür işaretin prediksyonunda kullanılabilir. Gerçeklenen ideal prediktör, sonlu sayıda yaklaşık türevalıcıdan oluştuğundan, bir "yaklaşık ideal prediktör" dür.

Kontrol sistemlerinde işaretler sistemin özelliklerine bağlıdır. Ele alınan belirli bir sistemde oluşan belirli bir işaretin, ve sadece bu işaretin, gelecekteki değerini doğru olarak kestiren bir "optimal prediktör" verilebilir. Böyle bir optimal prediktörde kullanılan türevalıcıların sayısı sistem derecesine bağlı olduğundan, her tür işarete uygulanabilen ve türevalıcı sayısı sonsuz olan ideal prediktöre göre, sonlu eleman sayısından oluşan optimal prediktörün gerçekleşmesi daha kolaydır.

Yukarıda açıklanan ve gerçekleşen ideal ve optimal prediktörler, olası işaretler için geliştirilmiş N. Wiener ve R. Kalman 'ın prediktörleriyle karşılaştırılmıştır. Belirgin işaretler için geliştirdiğimiz optimal prediktör, gösterdiğimiz gibi, Wiener ve Kalman 'ın olası işaretler için geliştirdikleri teorinin verdiği optimal prediktöre eşdeğerdir. Wiener ve Kalman prediktörlerinde işaretin zamana göre değişimi yerine işaretin güç dağılımı alınmaktadır. Ayrıca eğer Wiener ve Kalman'ın prediksyon teorisinde öngörülen, işaretin bir özelliği olan, güç dağılımı gözönüne alınmazsa, bu teoriler uyarınca geliştirilen optimal prediktör, tarafımızdan önerilen yaklaşık ideal prediktöre dönüşmektedir.

Böylece olası işaretler için geliştirilen Wiener ve Kalman'ın prediksyon teorilerinin belirgin karşılıkları elde edilmiş ve bunların ideal prediktörle ilişkileri saptanmış olmaktadır.

Çalışmamızın birinci bölümünde ideal prediktör özellikleri incelenmiştir. İdeal prediktör lineer, zamanla-değişmeyen ve kararlı bir sistem özelliğidir. Ancak nedensellik ilkesine uymadığı için fiziksel gerçekleşmesi imkânsızdır. Bu bölümde ayrıca ideal prediktörün bir yaklaşımının minimumfazlı bir devre ile frekans bomeninin sınırlı bir bölgesinde yaklaşık gerçekleştirileceği gösterilmiştir.

İkinci bölümde ideal prediktörün lineer, zamanla-değişmeyen, kararlı ve minimumfazlı bir yaklaşımı verilmiştir. İdeal prediktörün transfer fonksiyonu bir seriye açılmakta ve bu seriyi toplu parametrelili elemanlarla gerçekleştirmek için sonsuz sayıda türevalıcı devre gerekmektedir. Serinin bir noktada kesilmesi sonucu bir yaklaşık ideal prediktör elde edilmektedir.

Eğer prediktöre uygulanan işaret belirgin ise, ikinci bölümde önerilen ideal prediktör yaklaşımı yerine, bu işaretin istenen biçimde ötelenmesini sağlayan nedensel optimal prediktörü kullanmak elverişli olur. Belirgin işaretler için optimal prediktöre ilişkin transfer fonksiyonunun bulunması birinci bölümde verilmiştir. İdeal prediktörün incelenen özelliklerini uygun biçimde gerçekleyen ideal prediktör yaklaşımı ve belirgin bir işaret için önerilen optimal prediktör, bu konuya ilişkin yayınlarda yenidir.

Olasıl işaretler için geliştirilmiş olan Wiener ve Kalman prediktörleri işlem kuvvetlendiriciler kullanılarak gerçekleştirilebilir (24,38). Yöntemin uygulanması sonucu elde edilen transfer fonksiyonu Bush, Guillemin, Foster ya da Jordan tarafından verilen yöntemler uyarınca işlem kuvvetlendiriciler kullanılarak gerçekleştirilir (52, 54). Eğer elde edilen transfer fonksiyonunda paydanın derecesi, pay'ın derecesinden büyük ya da eşit ise, sadece işlem kuvvetlendiricilerle oluşturulan integral-alıcılar kullanılarak transfer fonksiyonunu gerçekleştirmek mümkündür.

İşarete karışmış olan gürültünün etkisini azaltmak için başvurulmuş olan filtrelemeli Wiener ve Kalman prediktörlerine ilişkin transfer fonksiyonlarında, genellikle payın derecesi paydanın derecesine eşit çıktığından, bu koşul gerçekleşmektedir (38). Koşulun gerçekleşmediği Wiener ve Kalman prediktörlerinde, bizim bu çalışmada bir üstel seriye açma yöntemiyle elde ettiğimiz ideal prediktör yaklaşımında ve kontrol sistemlerinde karşılaştığımız belirgin işaretlere ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonlarında, payın derecesi paydanın derecesinden daha büyüktür. Bu durumlarda türevalıcı devreler kullanmamız zorunlu olur.

Bilindiği gibi işlem kuvvetlendiricilerle gerçekleştirilen bilinegelen türevalıcı devreler hem kararsız hem de gürültüye duyarlı devrelerdir (57). Ancak bir kontrol

sistemi bir alçak-geçiren sistem özelliğinde olduğundan (22,30), burada karşılaşılan işaretlerin bandgenişliği sıfırdan en çok 30 Hz'e kadar değişir. Bizim bu çalışmamızda işaretin frekans bandı içinde türevalma işlemini ideale yakın derecede gerçekleyen ve gürültüye daha az duyar olan kararlı bir "değişke türevalıcı" kullanılmıştır. Değişke türevalıcı, işlem kuvvetlendirici ile gerçekleşen basit bir devreye ilişkin elemanların, bu amaca uygun biçimde değerlendirilmesi sonucu elde edilir.

Wiener ve Kalman yöntemlerinin uygulanabilmesi, prediktör transfer fonksiyonunun elde edilebilmesi için, işaretin istatistiksel özelliklerinin bilinmesi gereklidir. Eğer işaretin istatistiksel özellikleri bilinmiyorsa, ya da bu özellikler zamanla çok değişken ise, bu tezde önerdiğimiz ideal prediktör yaklaşımının kullanılması zorunlu olur.

Wiener ve Kalman prediktörlerinde, istenen özellik ile elde edilen özellik arasındaki yanılmanın karesinin ortalaması minimum kılınmaktadır. Bu tezde bizim önerdiğimiz yöntemin bir sakıncası yanılmanın belirli bir değerden küçük kılınması için, ideal prediktör yaklaşımında kaç tane türevalıcı kullanılması gerektiğinin önceden bilinmemesidir. Ancak, belirli bir ideal prediktör yaklaşımına ilişkin yanılmanın kabul edilebilir bir yanılma sınırını aşmadığını ve bu yoldan türevalıcı sayısının yeterli olup olmadığını anla-

mak mümkündür. Buna karşılık, Wiener ve Kalman'ın optimal prediktörlerinde devre zaten yanlış karesinin ortalaması minimum kılınarak elde edildiğinden, bu sakınca ortaya çıkmaz.

Üçüncü bölümde olası işaretler için verilmiş olan Wiener yöntemi, birinci ve ikinci bölümde önerdiğimiz ideal ve optimal prediktörlerle karşılaştırılmış ve bunların Wiener yönteminin verdiği prediktörle ilişkileri saptanmıştır. Bu bölümün sonunda kontrol sistemlerinde rastlanan en önemli belirgin ya da olası işaretlere ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonları hesaplanarak bir tablo halinde sunulmuştur. İdeal ve optimal prediktörlerin Wiener ve Kalman prediktörleriyle karşılaştırılması ve tarafımızdan hesaplanarak verilen optimal prediktörlere ilişkin tablo ilk kez bu çalışmada verilmektedir.

Dördüncü bölümde Kalman yöntemi ilk kez burada öz prediksiyon olayına uygulanmış ve elde edilen optimal prediktörün Wiener yönteminin verdiği optimal prediktöre eşdeğer olduğu görülmüştür.

B Ö L Ü M I

İ D E A L P R E D İ K T Ö R Ö Z E L L İ K L E R İ

Bu bölümde ideal prediktörün tanımı verildikten sonra, özellikleri incelenecek ve yaklaşık olarak gerçekleştirilmesine çalışılacaktır. Bir ideal prediktörün tam olarak gerçekleştirilmesi imkânsız olduğundan ve bu özellikli bir sistemin nedensel olmayacağı hemen bilindiğinden, böyle bir sistemin özellikleri literatüre geçmediği görülür. Nedensellik ilkesinin önemini göz önünde bulundurma koşulu ile, ideal prediktörün bir an için gerçekleştirilebileceğini kabul ederek, bir ideal prediktörün önce gerçekleştirilmesi gereken koşulları araştırdık. Böylece, nedensel olmayan ideal prediktörün özellikleri ve çalışma koşullarından, nedensel yaklaşık bir ideal prediktöründe özellikleri elde edilmiş oldu. Çalışmamızda bu özellikler teoremlerle önerilmiştir. Bu teoremler gerek koşulları vermektedir, fiziksel gerçekleştirme bakımından bu koşullar yeterli değildir.

1.1 İ D E A L P R E D İ K T Ö R Ü N T A N I M I

Sistemlerin özelliklerini çoğu zaman transfer modelleri ile belirleme olanağı vardır. Bu modelde etki $x(t)$ girişi ve tepki $y(t)$ çıkışıdır. (Şekil 1).



Şekil 1

Eğer $x(t)$ ile $y(t)$ arasında

$$y(t) = T\{x(t)\} \quad (1-1)$$

biçiminde bir bağıntı verebiliyorsak, sistemi tamamen belirlemiş oluruz. Bu denklemden T , sistemin girişi ile çıkışı arasındaki dönüşüm kuralını belirtmektedir.

İdeal prediktörde girişe $x(t)$ büyüklüğü uygulandığında $y(t)$ çıkışının, girişin τ zamanı kadar sonraki $x(t+\tau)$ değerini alması söz konusudur. Buna göre ideal prediktöre ilişkin dönüşüm kuralı

$$y(t) = x(t+\tau) \quad (1-2)$$

biçimindedir.

2.1 LİNEERLİK

Sistemleri belirtmede hesap kolaylığı sağlayan en önemli özellik lineerliktir. Bir sistemde eğer $x_1(t)$ girişine karşı $y_1(t)$ çıkışı, $x_2(t)$ girişine karşı $y_2(t)$ çıkışı elde ediliyorsa bu sistemin lineer olabilmesi için, herhangi bir reel a_1 ve a_2 sabiti ile

$$y(t) = T\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\}$$

$$= a_1 T\{x_1(t)\} + a_2 T\{x_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \quad (1-3)$$

denkleminin sağlanması gerekir ve yeter. Bu durumda T dönüşüm kuralına L lineer dönüşüm kuralı denir (31).

İdeal prediktörde $y(t) = T\{x(t)\} = x(t+\tau)$ olduğundan, lineerlik koşulu

$$\begin{aligned} y(t) &= T\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 x_1(t+\tau) + a_2 x_2(t+\tau) \\ &= a_1 T\{x_1(t)\} + a_2 T\{x_2(t)\} = x(t+\tau) = L\{x(t)\} \end{aligned} \quad (1-4)$$

denkleminde görüldüğü gibi sağlanmaktadır.

1.2.2 ZAMANLA-DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER

Dönüşüm kuralında zamana bağlı bir katsayı bulunmayan sisteme zamanla-değişmeyen bir sistem denir (31,38).

Buna göre, zamanla-değişmeyen bir sistemin $x(t)$ girişine cevabı $y(t)$ ise, $x(t-\lambda)$ girişine cevabı $y(t-\lambda)$ olmalıdır.

$$y(t-\lambda) = T\{x(t-\lambda)\}. \quad (1-5)$$

İdeal prediktör

$$L\{x(t-\lambda)\} = x(t-\lambda+\tau) = y(t-\lambda) \quad (1-6)$$

eşitliğinden görüldüğü gibi zamanla-değişmeyen bir sistemdir. Böylece vardığımız sonuçları aşağıdaki teoremlerde toplayabiliriz:

T e o r e m 1 Dönüşüm kuralı $y(t) = x(t+\tau)$ olan ideal prediktör lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemdir.

1.3 KARARLILIK

Lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemde, A ve k reel sayı olmak üzere, eğer $|x(t)| < A$ biçiminde sınırlı bir

giriş işaretine karşılık $y(t)$ çıkış işareti $|y(t)| < kA$ biçiminde sınırlı ise, bu sistem kararlıdır denir (22).

Bu tanıma prediktörün (1-2) dönüşüm kuralına uygularsak

$$|x(t+\tau)| \text{ ve } |x(t)| < A \quad (1-7)$$

olacağından, çıkış işaretinin mutlak değeri

$$|y(t)| < A \quad (1-8)$$

biçiminde sınırlıdır.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

T e o r e m 2 İdeal prediktör kararlı bir sistemdir.

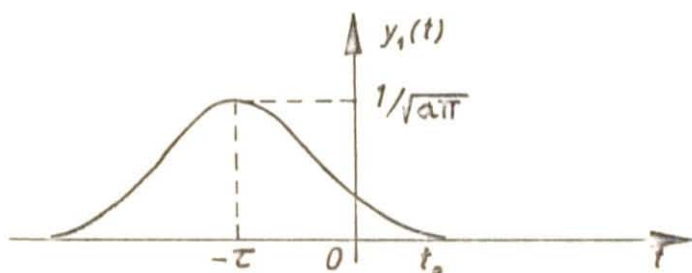
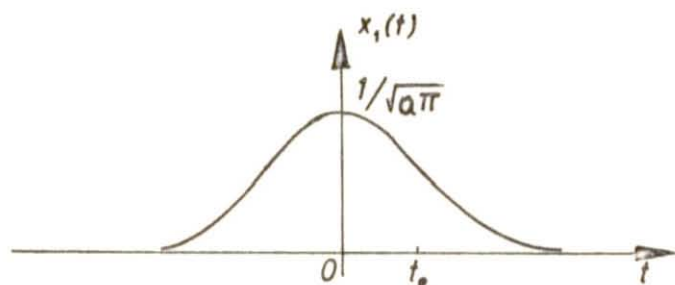
1.4 NEDENSELLİK İLKESİ

Uygulanan herhangi bir giriş işaretine bir sistemin yanıtı, giriş işaretinin gelecekte alabileceği değerlere bağlı değilse, bu sisteme nedensel ya da fiziksel bir sistem denir (38). Buna göre lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeterli koşul, herhangi bir t_0 zamanı ve $x_1(t)$ ile $x_2(t)$ giriş işaretleri için, eğer $t \leq t_0$ zamanında $x_1(t) = x_2(t)$ ise, bunlara ilişkin yanıtlar $t \leq t_0$ zaman aralığında eşit olmalıdır:

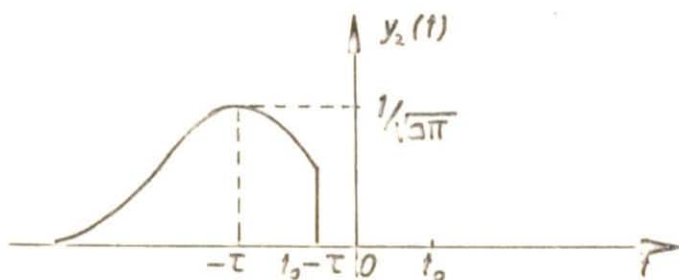
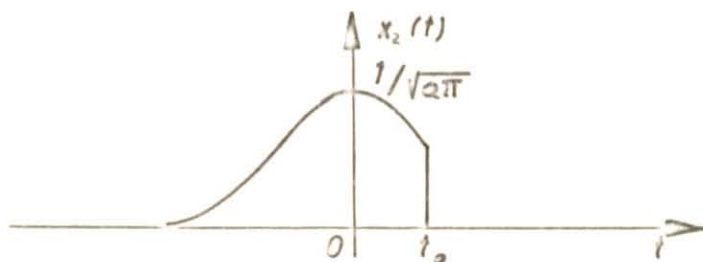
$$y_1(t) = L\{x_1(t)\} = L\{x_2(t)\} = y_2(t), \quad t \leq t_0. \quad (1-9)$$

Prediktör girişine, a reel bir sabit olmak üzere, zamana göre

$$x_1(t) = \frac{e^{-t^2/a}}{\sqrt{a\pi}} \quad (1-10)$$



Şekil 2



Şekil 3

biçiminde değişen bir $x_1(t)$ işaretinin uygulandığını düşünelim. Prediktör çıkışında

$$y_1(t) = x_1(t+\tau) = \frac{e^{-(t+\tau)^2/a}}{\sqrt{a\pi}} \quad (1-11)$$

işareti elde edilecektir (bak Şekil 2). Eğer giriş işareti olarak prediktöre, $l(t)$ birim basamak fonksiyonunu göstermek üzere,

$$x_2(t) = \frac{e^{-t^2/a}}{\sqrt{a\pi}} l(t_0 - t) \quad (1-12)$$

uygulanırsa, (1-2) dönüşüm kuralı gereğince çıkış işareti olarak

$$y_2(t) = x_2(t+\tau) = \frac{e^{-(t+\tau)^2/a}}{\sqrt{a\pi}} l(t_0 - \tau - t) \quad (1-13)$$

elde edilir. Bu çıkış işareti $t \leq t_0$ için, $t_0 - \tau < t \leq t_0$ aralığında sıfır olmaktadır. Buna göre $t \leq t_0$ zamanında

$$y_1(t) \neq y_2(t) \quad (1-14)$$

olduğundan, (1-9) eşitliği gereğince, prediktörün nedensel olmadığı görülür (Şekil 3).

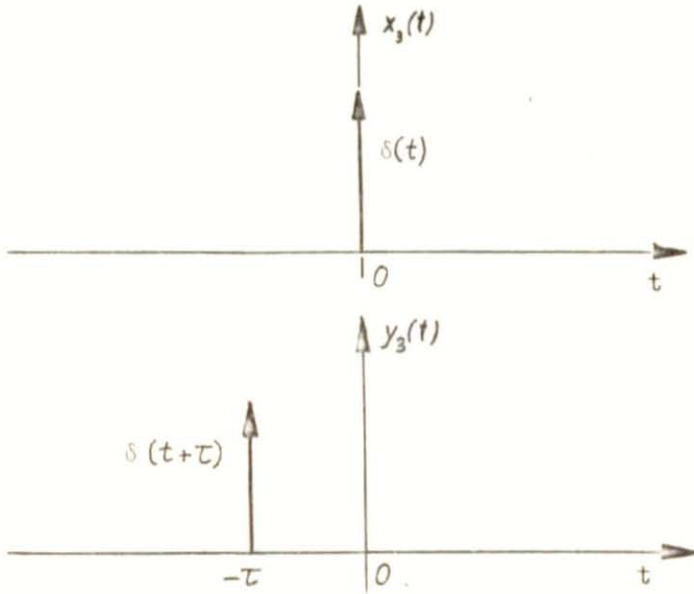
Özel bir durumu saptamak üzere, prediktör girişine $x_1(t)$ işaretinin $a \rightarrow 0$ için elde edilen limitini veren

$$x_3(t) = \lim_{a \rightarrow 0} x_1(t) = \delta(t) \quad (1-15)$$

biçimindeki bir distribüsyon uygulanırsa, buna ideal prediktörün karşılığı

$$y_3(t) = \lim_{a \rightarrow 0} y_1(t) = \delta(t+\tau) \quad (1-16)$$

biçimindedir (Şekil 4).



Şekil 4

kuşkusuzki $t=0$ anında sisteme uygulanacak olan bir distribüstonu τ zamanı kadar önceden haber verecek fiziksel bir sistemin yapılması mümkün değildir. Genel olarak bir sistem cevabının t_1 zamanına ilişkin değeri, ancak giriş işareti bütün t zamanları için verilmişse belirlenebilir. Eğer sistem nedensel ise, $t = t_0$ zamanına ilişkin $y(t)$ çıkışı, $x(t)$ girişinin sadece $-\infty < t < t_1$ aralığındaki değerlerinin bilinmesiyle belirlenir. Bir sistemi fiziksel gerçekleştirebilmenin gerekli koşulu nedensellik ilkesinin sağlanmış olmasıdır. İdeal prediktöre ilişkin dönüşüm kuralı nedensellik ilkesine aykırı olduğundan fiziksel gerçekleştirilemezdir.

İDEAL PREDİKTÖRÜ YAKLAŞIK GERÇEKLEŞTİREBİLMİŞ OLANAĞI-NIN ARAŞTIRILMASI

Bundan önceki paragraflarda ideal prediktörün lineer, zamanla-değişmeyen ve kararlı bir sistem olduğu, ancak nedensellik ilkesine uymadığı için fiziksel olarak gerçekleştirilemeyeceği sonucuna varılmıştı. Bundan sonraki çalışmalarımızda ideal prediktör, lineer, zamanla-değişmeyen, kararlı ve nedensel bir sistemle yaklaşık olarak gerçekleştirilmeye çalışılacaktır. Elde edilen nedensel yaklaşık ideal prediktörün çıkış işareti, giriş işaretinin $t > t_1$ zaman aralığına ilişkin değerlerini kestiremediğinden çıkış işareti $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ zaman aralığında (bak Şekil 2 ve 3) yanlıgılı olacaktır.

İDEAL PREDİKTÖRÜN TRANSFER FONKSİYONU

Dönüşüm kuralı, $\tau \geq 0$ olmak üzere,

$$y(t) = x(t + \tau) \quad (1-2)$$

biçiminde tanımlanan ideal prediktörün lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistem olduğunu, fakat nedensellik ilkesine uymadığını göstermiş bulunuyoruz. Bundan sonraki çalışmalarımıza temel olacağından ideal prediktörün transfer fonksiyonunu bulmamız uygun olacaktır.

Lineer ve zamanla-değişmeyen bir sisteme ilişkin dönüşüm kuralının Laplace transformu alınır ve ilk koşulların sıfır olduğu kabul edilerek, çıkış işaretinin giriş işaretine

oranı bulunursa, sistemin transfer fonksiyonu $G(s)$, $s=\sigma+j\omega$ kompleks değişkeninin bir fonksiyonu olarak elde edilir:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s). \quad (1-16)$$

Bu denklemde $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$ ve $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$ giriş ve çıkış işaretinin Laplace transformudur.

Bilindiği gibi tek ve çift yönlü olmak üzere iki tür Laplace transformu tanımlanmıştır. Tek yönlü Laplace transformunda, transformasyonu aranan işaretin negatif t zamanlarına ilişkin değerleri sıfır'a eşit olduğu kabul edilirken, çift yönlü Laplace transformasyonunda böyle bir sınırlama yoktur. Buna göre, nedensel bir sisteme giriş işareti $t=0$ anında uygulanmaya başlanmış ise, çıkış işareti $t < 0$ zamanlarında sıfır olacağından çıkış işareti tek yönlü Laplace transformu ile tamamiyle belirlenmiş olur.

Şimdi her iki transformasyonu prediktörün dönüşüm kurallarına uygulayalım:

- a) Çift yönlü Laplace transformasyonu, α ve β reel birer sayı ve $\alpha < \text{Re}(s) < \beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{x(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)e^{-s(\lambda-\tau)}d\lambda \\ &= e^{s\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda = e^{s\tau}X(s) \end{aligned} \quad (1-17)$$

biçiminde uygulanır. Buna göre ideal prediktörün

transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = e^{\tau s} \quad (1-18)$$

biçimindedir. Burada $G(s) = e^{\tau s}$, çıkış işaretinin, giriş işaretine göre, τ zamanı kadar negatif t yönünde ötelenmesi işlemini belirtmektedir.

- b) Tek yönlü Laplace transformasyonu uygulanırsa nedensel bir çıkış işaretinin transformu için

$$\begin{aligned} Y_N(s) &= \mathcal{L}_T\{x(t+\tau)\} = \int_0^{\infty} x(t+\tau) e^{-st} dt = \int_{\tau}^{\infty} x(\lambda) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda \\ &= e^{\tau s} \left[\int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda - \int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right] \\ &= e^{\tau s} X(s) - e^{\tau s} \int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \end{aligned} \quad (1-19)$$

elde edilir. (1-19) denkleminde ideal prediktörün nedensel bir yaklaşımının transfer fonksiyonu olan $G_N(s)$

$$\begin{aligned} \frac{Y_N(s)}{X(s)} &= G_N(s) = e^{\tau s} \left[1 - \frac{\int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda}{\int_0^{\infty} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda} \right] \\ &= \frac{\int_0^{\infty} x(\lambda) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda}{X(s)} \end{aligned} \quad (1-20)$$

biçiminde bulunur. (1-20) denklemini

$$\begin{aligned} Y_N(s) &= e^{\tau s} X(s) - e^{\tau s} \int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \\ &= e^{\tau s} X(s) - E_p(s) \end{aligned} \quad (1-21)$$

biçiminde yazalım. Buradan

$$e_p(t) = \mathcal{L}_I^{-1}\{E_p(s)\} = \mathcal{L}_I^{-1}\left\{e^{\tau s} \int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda\right\} \quad (1-22)$$

ile, $t = 0$ anında prediktöre uygulanan bir işaretin, $0 < t < \tau$ zaman aralığında, nedensellik ilkesi uyarınca kaybolan kısmı elde edilir (Şekil 5).

(1-16) denkleminin zaman domeninde karşılığı,

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \text{ olmak üzere,}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda \quad (1-22-1)$$

biçimindedir.

Fiziksel sistemlerde $y(t)$ çıkışı $x(\lambda)$ 'nın $\lambda < t$ değerlerine bağlı olmadığından

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} x(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda \quad (1-22-2)$$

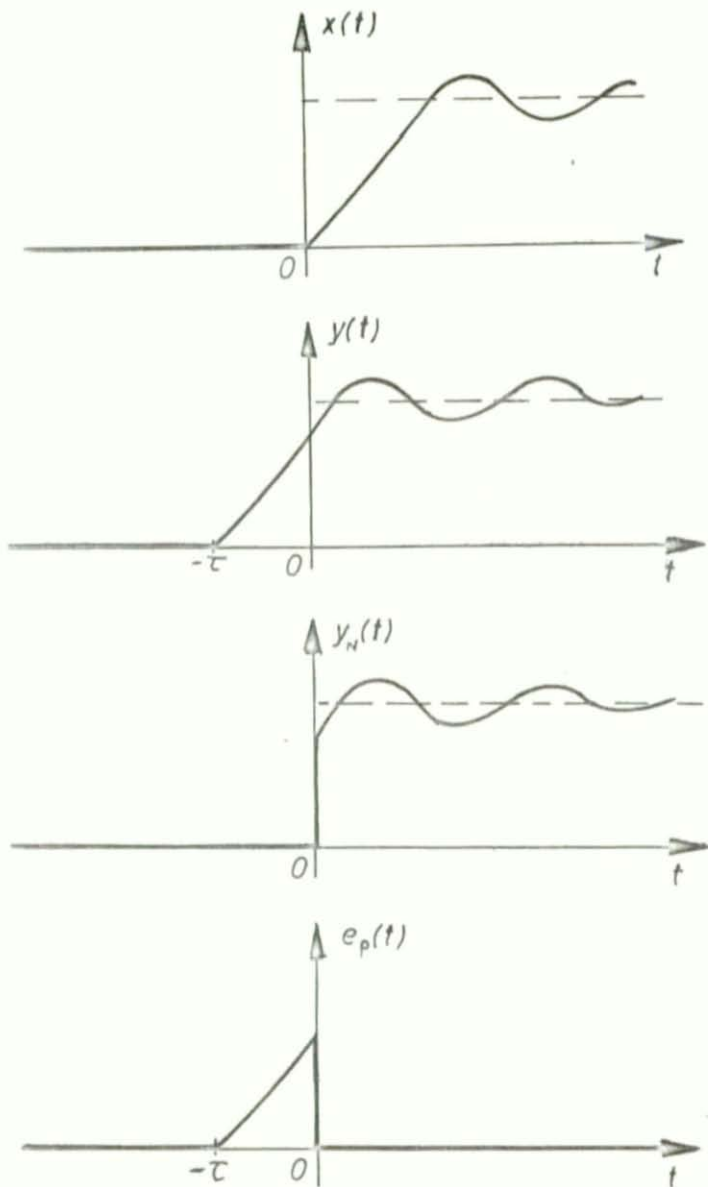
denkleminden görüldüğü gibi

$$t < 0 \text{ için } g(t) = 0 \quad (1-22-3)$$

olmalıdır. Eğer sisteme $x(t) = \delta(t)$ distribüsyonu uygulanırsa (1-22-1) denklemi ve (1-2) dönüşüm kuralı uyarınca

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda = g(t) \\ &= \delta(t+\tau) \end{aligned} \quad (1-22-4)$$

elde edilir. Böylece (1-22-3) koşulu uyarınca ideal prediktörün nedensel olmadığı gene gösterilmiş olmaktadır (Şekil 4).



Şekil 5

1.7 İDEAL PREDİKTÖRÜN MODÜLÜ, FAZİ, NYQUIST VE BODE DİYAGRAMI

İdeal prediktörün nedensel bir yaklaşımını elde etmek için önce ideal prediktörün modülünü, fazını, Nyquist ve Bode diyagramını incelememiz gerekmektedir. Bir sistemin frekans karakteristiği, modül ve faz olarak iki ayrı diyagramda gösterilir. Eğer frekans cevabının kompleks düzlemde yer eğrisi, ω frekansı parametre olmak üzere çizilirse, Nyquist diyagramı elde edilir. Modülün desibel ölçeğinde, fazın derece boyutunda, logaritmik ω diyagramında çizimi sonucu Bode diyagramı elde edilir. İdeal prediktörün transfer fonksiyonu olarak

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = e^{\tau s} \quad (1-18)$$

bulunmuştu. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ biçiminde pozitif ya da negatif bir tam sayı alınırsa

$$G(s + jn \frac{2\pi}{T}) = e^{\tau(s + jn \frac{2\pi}{T})} = e^{\tau s} \cdot e^{jn 2\pi} = e^{\tau s} = G(s) \quad (1-23)$$

olduğundan, prediktör transfer fonksiyonunun $T = 2\pi/\tau$ periyodlu olduğu görülür. (1-18) denkleminde s -kompleks değişkeni yerine $j\omega$ konursa, sinüsoidal sürekli halde

$$G(j\omega) = e^{j\tau\omega} = \cos \tau\omega + j \sin \tau\omega = A(\omega) e^{j\psi(\omega)} \quad (1-24)$$

elde edilir. Buna göre sistemin modülü ve fazı

$$A(\omega) = |e^{j\tau\omega}| = 1, \quad \psi(\omega) = \tau\omega \quad (1-25)$$

biçimindedir. (1-24) ve (1-25) denklemleriyle belirlenen modül ve fazın ω frekansına göre çizimi şekil 6'da görülmektedir.

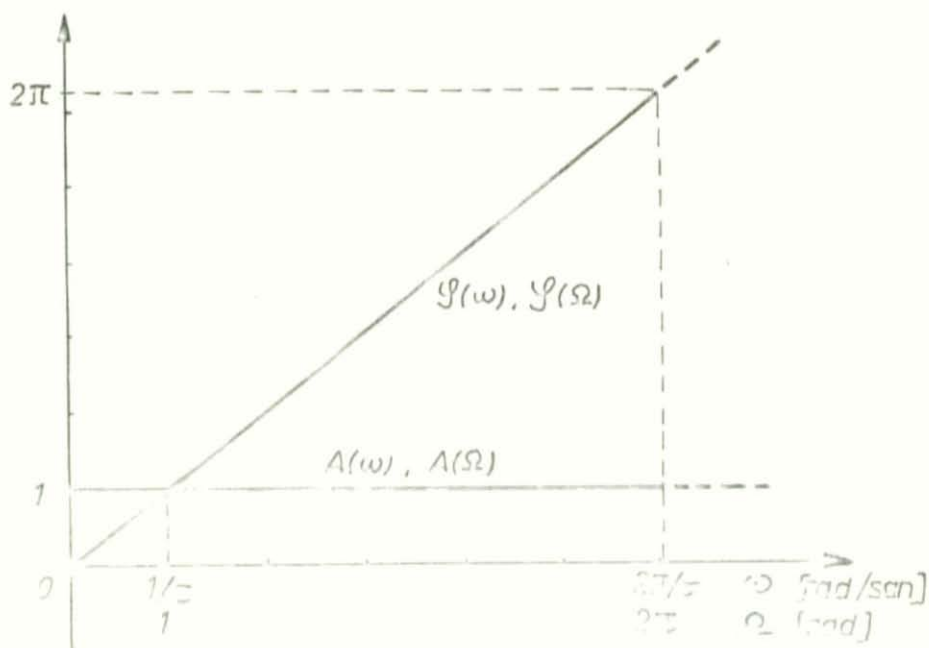
İncelememizi prediktör sabiti τ 'dan bağımsız kılmak üzere frekansı

$$\Omega = \tau\omega \quad (1-26)$$

biçiminde normlarsak, modül ve faza ilişkin ifadeler

$$A(\Omega) = 1 \quad \text{ve} \quad \psi(\Omega) = \Omega \quad (1-27)$$

biçimine girer, bunlara ilişkin çizimler de şekil 6'da görülmektedir.



Şekil 6

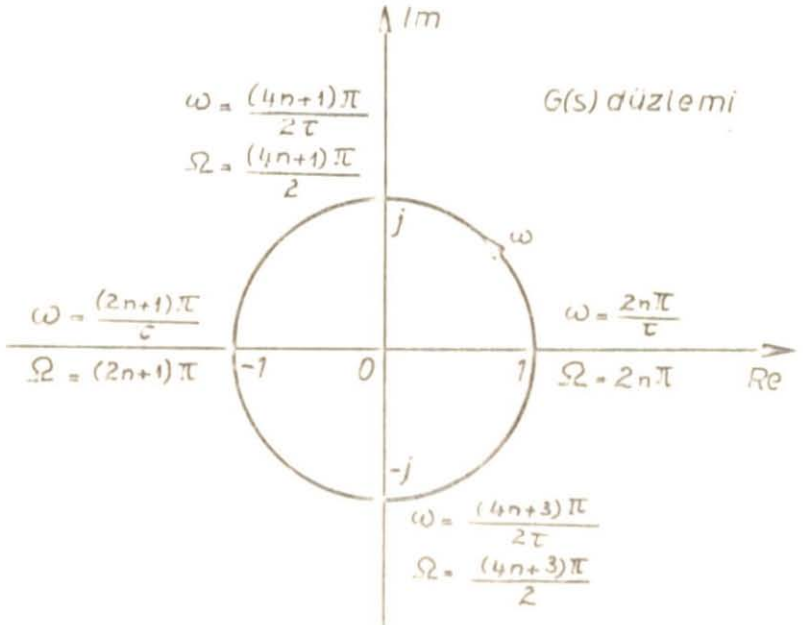
İdeal prediktörün Nyquist diyagramını elde etmek için (1-23) denklemiyle belirlenen frekans cevabının, kompleks $G(j\omega)$ düzlemindeki yer eğrisi çizilmelidir. Şekil 7'de görüldüğü gibi bu yer eğrisi, ω veya Ω artarken, koordinat merkezini pozitif yönde $2\pi/\tau$ veya 2π periyodla çevreleyen birim yarıçaplı bir dairedir.

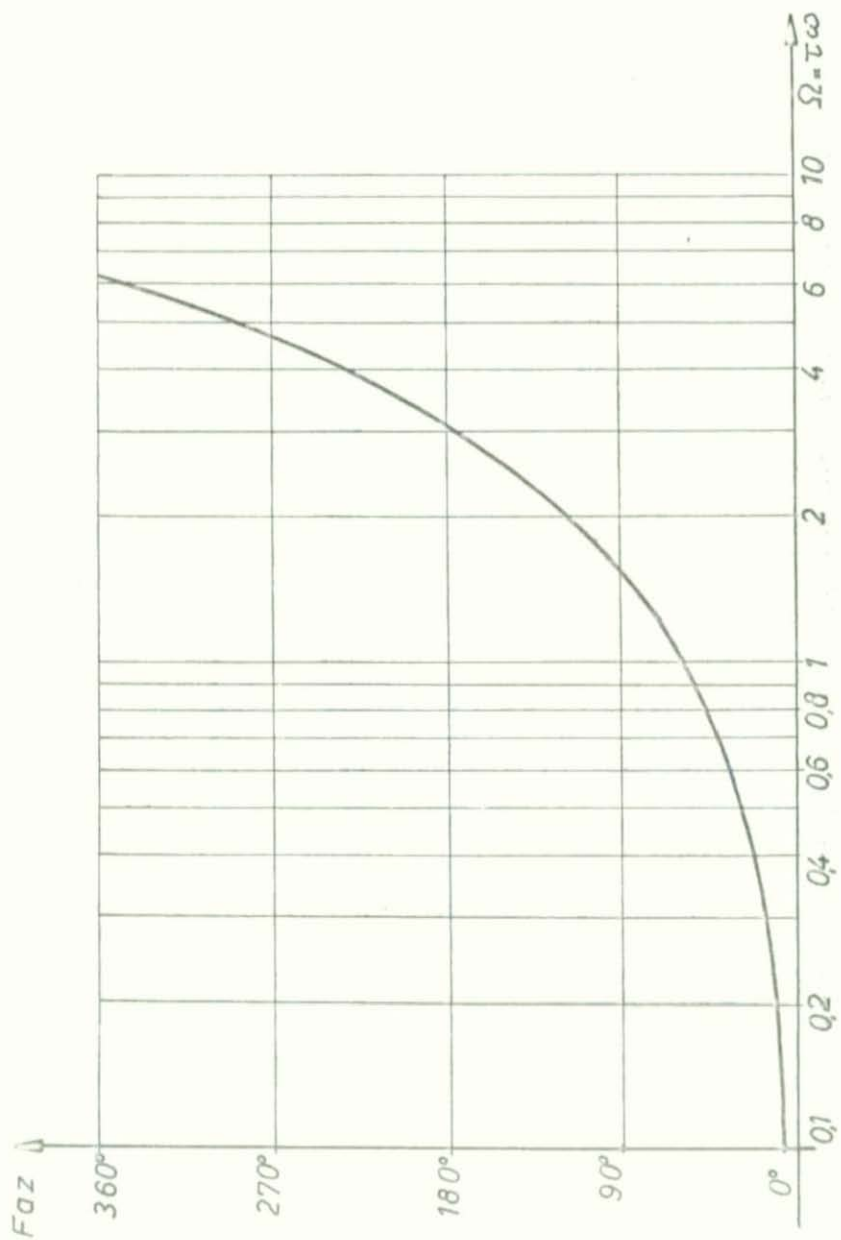
Bode diyagramını elde etmek için modülü desibel ölçeğine, fazı derece boyutuna çevirmek gerekir:

$$20 \log A(\Omega) = 20 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (1-28)$$

$$\psi(\Omega) = \Omega [\text{rad}] = \frac{180\Omega}{\pi} [\text{derece}]. \quad (1-29)$$

İdeal prediktörün fazına ilişkin Bode diyagramı, norm frekans Ω 'ya göre, şekil 8'de görülmektedir.





Şekil 8

1.8 GURUP GECİKMESİ KAVRAMI

Lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemin frekans karakteristiğini

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = A(\omega) e^{j\psi(\omega)} = e^{\gamma(\omega)} = e^{\alpha(\omega) + j\beta(\omega)} \quad (1-30)$$

biçiminde belirliyebilme olanağı vardır. Burada

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad \text{iletme faktörü,} \quad (1-31)$$

$$\alpha(\omega) = \ln A(\omega) \quad \text{zayıflama,} \quad (1-32)$$

$$\beta(\omega) = \psi(\omega) \quad \text{faz değişmesi} \quad (1-33)$$

diye adlandırılır..

Modül $A(\omega) = |G(j\omega)|$ ve zayıflama $\alpha(\omega) = \ln A(\omega)$

ω nın çift fonksiyonlarıdır.

Faz değişmesinin ω frekansına göre türevine grup gecikmesi denir:

$$\tau_{gr} = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \quad (1-34)$$

İdeal prediktörde faz değişmesi $\beta(\omega) = \psi(\omega) = \omega\tau$ olduğuna göre grup gecikmesi

$$\tau_{gr} = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} = \tau \quad (1-35)$$

biçimindedir. τ pozitif bir sabit olduğundan ideal prediktör ancak pozitif grup gecikmeli bir devre ile yaklaşık olarak gerçekleştirilebilir demektir.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

T e o r e m 3 İdeal prediktörün grup gecikmesi, pozitif bir sabit olan, τ prediktör sabiti ile eşittir. Nedeni sel bir ideal prediktörü gerçekleyen devrenin gerekli koşulu, bu devrenin pozitif grup gecikmeli bir devre olmasıdır.

1.9 TÜM-GEÇİREN SİSTEMLER KAVRAMI

Linear sistemlerin $y(t) = L(x(t))$ dönüşüm kuralıyla belirlendiğini 1.2.1 kısmında görmüştük. Buna göre toplu parametrelili elemanlardan oluşan lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemi, $x(t)$ giriş, $y(t)$ çıkış işareti ve a_i, b_i parametreleri pozitif birer sabit ve $n > m$ olmak üzere (3,22,28)

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (1-36)$$

n 'inci dereceden bir diferansiyel denklemlle belirlemek mmkdr. Böyle lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemin transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ = \frac{K(s+s_{01})(s+s_{02}) \dots (s+s_{0m})}{(s+s_{k1})(s+s_{k2}) \dots (s+s_{kn})}, \quad \left(K = \frac{b_m}{a_n}\right) \end{aligned} \quad (1-37)$$

biçimindedir.

Toplu parametrelili elemanlardan oluşan pasif sistemlerde, elemanlara ilişkin katsayılar reel ve pozitif tanımlandıklarından, bu eleman katsayılarının toplamı ve

çarpımından oluşan a_i ve b_i katsayıları da reel ve pozitiftir. Bu nedenle s_{oi} ve s_{ki} sıfır ve kutupları gerçek ya da sanal eşlenektir. Toplu parametrelili dinamik sistemlerde sistemin kararlı olabilmesi için $n > m$ ve bütün s_{ki} kutupları sol yarı s-düzleminde (negatif reel kısımlı) olmalıdır. Transfer fonksiyonundaki s_{oi} sıfırları, $n > m$ olduğu sürece, sistem kararlılığına etkisiz olduklarından, s-düzleminin herhangi bir noktasında bulunabilirler. Kutupları gibi sıfırları da sol yarı s-düzleminde bulunan sistemlere minimumfazlı sistemler, bunların dışında sağ yarı s-düzleminde sıfırları bulunan sistemlere minimumfazlı olmayan sistemler denir.

Minimum fazlı bir sistemin fazı, ω frekansı sıfırla sonsuz arasında değişirken, sıfır ve kutupların sayısı eşit fakat minimumfazlı olmayan bir sistemin fazına göre daha az değişir.

Bir tümgeçiren sistem, modülü

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = 1$$

olan bir sistemdir. Tümgeçiren sistemler minimumfazlı olup sıfır ve kutupları s-düzleminde sanal eksene göre simetridir (2). Buna göre tümgeçiren sistemler

$$G_i(s) = \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} \quad a > 0, b > 0 \quad (1-38)$$

biçimindeki transfer fonksiyonlarının çarpımından oluş-

şur. Böyle bir tüm-geçiren sistem çarpanının frekans cevabı

$$G_i(j\omega) = \frac{b-\omega^2 - ja\omega}{b-\omega^2 + ja\omega} \quad (1-39)$$

biçimindedir. Tüm-geçiren sistem çarpanının modülü

$$A_i(\omega) = |G_i(j\omega)| = 1, \quad (1-40)$$

fazı

$$\psi_i(\omega) = \text{arc tg} \frac{-a\omega}{b-\omega^2} - \text{arc tg} \frac{a\omega}{b-\omega^2} \quad (1-41)$$

ve grup gecikmesi

$$\tau_{gr_i}(\omega) = \frac{d\psi_i(\omega)}{d\omega} = - \frac{2(ab+a\omega^2)}{(b-\omega^2)^2 + (a\omega)^2} \leq 0 \quad (1-42)$$

olarak hesaplanır. Buna göre tümgeçiren çarpanlarına ilişkin grup gecikmesi hep negatiftir. Eğer

$$G(s) = G_{m1}(s) \cdot (s^2 - as + b)$$

biçiminde minimumfazlı olmayan bir sistem, $G_{m1}(s)$ ve $G_{m2}(s)$

$$G_{m2}(s) = G_{m1}(s) \cdot (s^2 + as + b)$$

ilişkisiyle birbirine bağlı iki minimumfazlı sistem ise

$$G(s) = G_{m1}(s) \cdot (s^2 + as + b) \cdot \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} = G_{m2}(s) \cdot G_i(s)$$

denkleminde görüldüğü gibi minimumfazlı olmayan bir sistem her zaman bir minimumfazlı sistem ile bir tüm-

geçiren sistemin çarpımı biçiminde belirlenebilir. Ayrıca (1-42) denklemine göre tümgeçiren sistemin grup gecikmesi negatif olduğundan, minimumfazlı olmayan bir sistem prediktör gerçekleşmesinde kullanılamaz:

T e o r e m 4 İdeal prediktör yaklaşık bile olsa minimumfazlı olmayan bir sistemle gerçekleşemez.

1.10 MİNİMUMFAZLI SİSTEMLER

İdeal prediktör minimumfazlı olmayan bir sistemle gerçekleştirilemeyeceğine göre, şimdi prediktörün minimumfazlı bir sistemle gerçekleştirilebilir olup olmadığını araştıralım.

Minimumfazlı sistemlerde Bode'nin (3) göstermiş olduğu gibi, herhangi bir ω_c frekansında sistem zayıflaması $\alpha(\omega) = \ln A(\omega)$ ile faz değişmesi $\beta(\omega) = \psi(\omega)$ arasında çeşitli bağıntılar vardır (3). Faz değişmesine ilişkin üç bağıntı şu biçimde belirlenir:

$$\beta(\omega_c) = \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega)}{\omega^2 - \omega_c^2} d\omega \quad (\omega \neq \omega_c) \quad (1-43)$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega) - \alpha(\omega_c)}{\omega^2 - \omega_c^2} d\omega \quad (1-44)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} \ln \left| \frac{\omega + \omega_c}{\omega - \omega_c} \right| d\omega \quad (\omega \neq \omega_c). \quad (1-45)$$

(1-43) ile (1-44) denklemlerinin eşitliğini

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} = 0$$

belirli integrale ilişkin değer sağlamaktadır. (1-44)

denklemini, $\omega = \omega_c$ frekansında integral altındaki fonksiyon sonsuza gitmediği için, daha elverişlidir. (1-45)

denklemine diğer ikisinden değişken dönüşümleri yapılarak varılır.

Bu denklemlerden (1-34) tanımı uyarınca ω_c frekansına ilişkin grup gecikmesi hesaplanabilir

$$\tau_{gr}(\omega_c) = \frac{d\beta(\omega_c)}{d\omega_c} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega) (\omega^2 + \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2)^2} d\omega \quad (1-46)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha(\omega) - \alpha(\omega_c)) (\omega^2 + \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2)^2} d\omega \quad (1-47)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega) - \alpha(\omega_c)}{(\omega - \omega_c)^2} d\omega \quad (1-48)$$

($\omega \neq \omega_c$)

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} d\omega \quad (1-49)$$

Bu denklemlerden ilki (1-43) denkleminde, ikincisi (1-44) denkleminde elde edilir. (1-47) denkleminde integral altındaki $(\omega^2 + \omega_c^2)$ ifadesine $2\omega\omega_c$ terimi eklenirse $\alpha(\omega)$ 'nin çift bir fonksiyon olması nedeniyle integralin değeri değişmemekte ve (1-48) denkleminde elde edilmektedir. (1-49) denkleminde ise (1-45) denkleminde türev alma yolu ile elde edilir.

Bu denklemlerden şu sonuçlar çıkarılabilir:

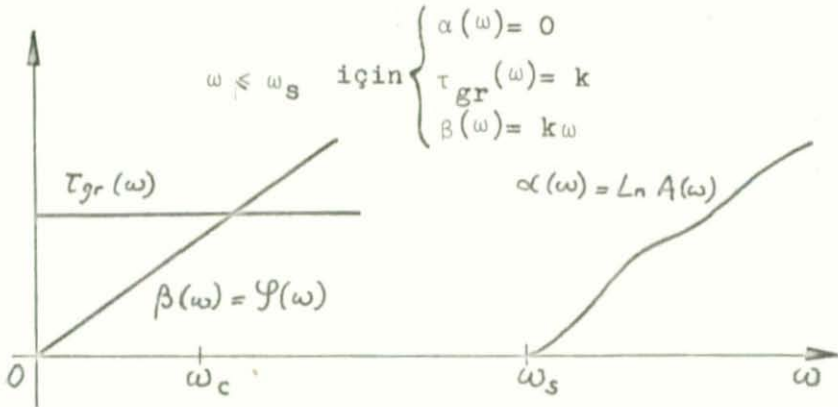
- a) İdeal prediktörde $\alpha(\omega) = \ln A(\omega) = \ln 1 = 0$ ve $d\alpha(\omega)/d\omega = 0$ olduğundan bütün denklemler $\beta(\omega_c)$ ve $\tau_{gr}(\omega_c)$ için sıfır vermektedir. Önceki sonuçlara uygun olarak, ideal prediktörü minimumfazlı devrelerle de bütün ω frekansları için gerçekleştirme olanağı yoktur.
- b) (1-46) denkleminde kolayca görülebileceği gibi, $(\omega^2 + \omega_c^2)/(\omega^2 - \omega_c^2)^2$ ifadesi, $\omega > 0$ için pozitif olduğundan, pozitif bir grup gecikmesi ancak pozitif bir zayıflama ile elde edilir. Bu özellik, ideal prediktördeki $\alpha(\omega)$ zayıflamasının sıfır olma koşuluna aykırıdır.
- c) Eğer bir minimum fazlı sistemde $\alpha(\omega)$ zayıflamasının ancak ω_s frekansından sonra sıfırdan önemli derecede farklı olduğu kabul edilirse, (1-43) denkleminde $\omega_c \ll \omega_s$ frekansları için faz değişimi yaklaşık olarak

$$\beta(\omega_c) \approx \frac{2\omega_c}{\pi} \int_{\omega_s}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega)}{\omega^2} d\omega = k\omega_c \quad k > 0 \quad (1-50)$$

bulunur. Buna göre minimumfazlı sistemelerde, $\omega \ll \omega_s$ frekansları için, zaman sabiti

$$\tau = k = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_s}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega)}{\omega^2} d\omega \quad (1-51)$$

olan bir yaklaşık ideal prediktör gerçeklemek mümkündür (Şekil 9).



(1-46) ve (1-49) denklemlerinden grup gecikmesi $\omega_c \ll \omega_s$ frekansları için

$$\begin{aligned} \tau_{gr} &\approx \frac{2}{\pi} \int_{\omega_s}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega)}{\omega^2} d\omega = k > 0 \\ &\approx \frac{2}{\pi} \int_{\omega_s}^{+\infty} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} d\omega = k > 0 \end{aligned} \quad (1-52)$$

bulunur.

Bunların sonucu olarak aşağıdaki teoremler elde edilir:

T e o r e m 5a Minimumfazlı sistemlerde grup gecikmesinin pozitif olması için zayıflamanın pozitif olması gerekir.

T e o r e m 5b Minimumfazlı sistemlerde, ideal prediktör özelliği, frekans bandının ancak sınırlı bir bölgede gerçekleşebilir.

B Ö L Ü M II

İ D E A L P R E D İ K T Ö R Ü N
G E R Ç E K L E Ş T İ R İ L M E S İ

Bu bölümde tam olarak gerçekleştirilemeyen ideal prediktörün, lineer, zamanla-değişmeyen, kararlı ve nedensel bir yaklaşığı verilecektir. Bu bölümde verilen yaklaşık ideal prediktör türevalıcı elemanlardan oluşmaktadır. Bunun sağlanması için işaretin frekans-bandı içinde, bir ideal türevalıcı gibi davranan, kararlı bir "değişke türevalıcı" devrenin eleman değerleri saptanmıştır. Bölümün sonunda geliştirilen bu ideal prediktör yaklaşığının kontrol sistemlerinde kullanılma yerleri ve bu prediktörlerle çözümlenebilecek kontrol sorunları tartışılmıştır.

İ D E A L P R E D İ K T Ö R Ü N Y A K L A Ş I K G E R Ç E K L E Ş T İ R İ L M E S İ

İdeal prediktörün (1-18) denklemi ile verilen transfer fonksiyonu, kompleks s -düzleminin her noktasında yakınsak olduğundan, $|s| < \infty$ olduğu sürece, bir üstel seriye açılabilir (6):

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = e^{\tau s} = 1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{(\tau s)^2}{2!} + \dots + \frac{(\tau s)^n}{n!} + \dots$$

(2-1)

Bu ifadede, s değişkeni türev işlemini belirttiğinden, (2-1) denkleminin zaman domenindeki karşılığı, $x(t)$ giriş $y(t)$ çıkış işareti olmak üzere, Taylor açılımıdır:

$$y(t) = x(t) + \frac{\tau}{1!} x'(t) + \frac{\tau^2}{2!} x''(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{\tau^n}{n!} x^{(n)}(t) + \dots \quad (2-2)$$

Ancak bu açılımın, istenen τ değerleri için, $x(t+\tau)$ fonksiyonuna yakınsak olup olmadığını incelememiz gerekir. Belirli bir t_0 zamanı için açılım

$$y(t_0) = x(t_0 + \tau) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!} \tau + \frac{x''(t_0)}{2!} \tau^2 + \dots$$

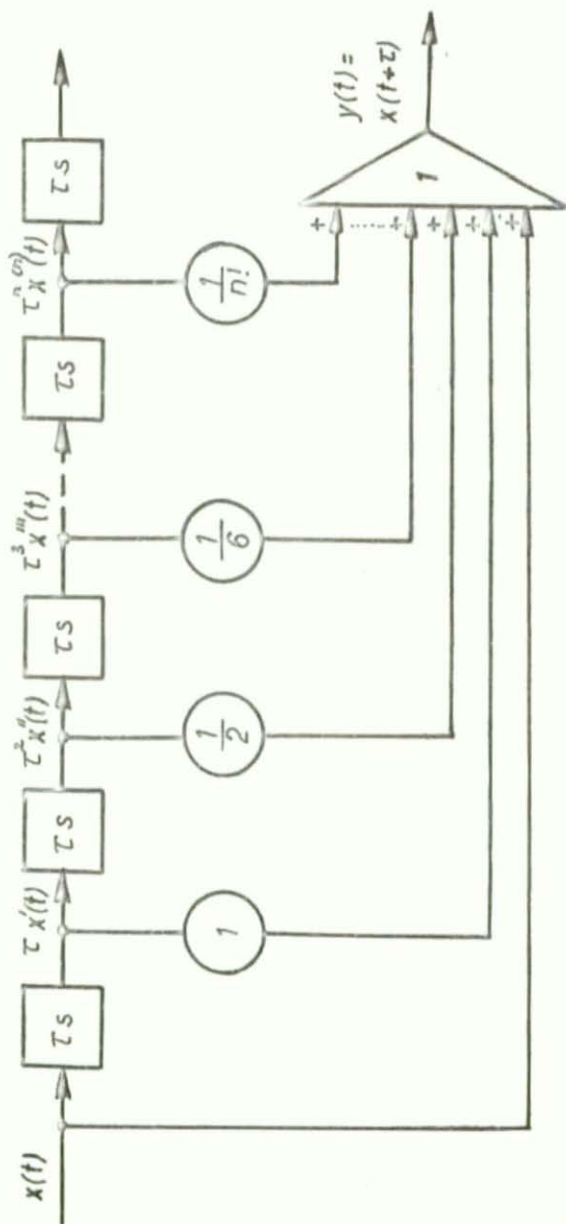
$$\dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!} \tau^n + \dots = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots + a_n \tau^n + \dots \quad (2-3)$$

biçiminde τ 'ya göre üstel bir seri verir. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)}(t_0)/(n+1)!}{x^{(n)}(t_0)/n!} \right|}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)x^{(n)}(t_0)} \right|} \quad (2-4)$$

olarak hesaplanır.



Şekil 10

Laplace transformu rasyonel bir fonksiyon olan sistemlerin basamak biçimi giriş işaretlerine ilişkin çıkış işaretleri, k reel α_i kompleks bir sayı olmak üzere

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s + \alpha_i} \right\} = k e^{-\alpha_i t}$$

biçimi fonksiyonların bileşiminden oluşur. Bu tür fonksiyonların yakınsaklık yarıçapı

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{k(-\alpha_i)^{n+1} e^{-\alpha_i t_0}}{(n+1)k(-\alpha_i)^n e^{-\alpha_i t_0}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)\alpha_i| \rightarrow \infty$$

olduğuna göre, seri bütün τ değerleri için yakınsaktır. (2-1) ya da (2-2) denklemini gerçekleyen ve türev alıcı elemanlardan oluşan analog bir devre şekil 10'da görülmektedir.

n 'inci terime ilişkin katsayı, $n \rightarrow \infty$ için $1/n! \rightarrow 0$ olduğundan, bu seri aşağıda saptanacak olan yeterli derecede küçük bir yanılğı karşılığı, n 'inci terimde kesilebilir:

$$G_n(s) = 1 + \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} + \dots + \frac{(\tau s)^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(\tau s)^i}{i!} \quad (2-5)$$

(2-5) denkleminin zaman domenindeki karşılığı

$$\begin{aligned} y_n(t) &= x_n(t + \tau) = x(t) + \tau x'(t) + \frac{\tau^2}{2!} x''(t) + \dots + \frac{\tau^n}{n!} x^{(n)}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\tau^i}{i!} x^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (2-6)$$

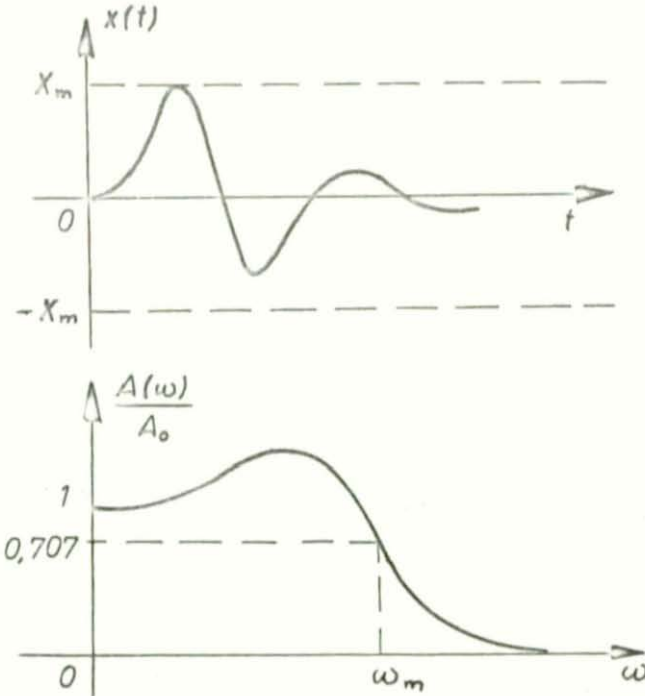
biçimindedir.

Taylor serilerinde, sorinin n'inci terimde kesilmesinden sonra geriye kalan terimler, $0 < \theta < 1$ olmak üzere,

$$R_{n+1} = \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} x^{(n+1)}(t+\theta\tau) \quad (2-7)$$

biçiminde belirlenebilir (6).

Haberleşme mühendisliğinde bilinen Bernstein teoremine göre, frekans bandı ve genliği sınırlı olan bir işaretin türevine ilişkin modül, band genişliği ile maksimum genliğin çarpımına eşit ya da daha küçüktür (1).



Şekil 11

Şekil 11'de görüldüğü gibi $x(t)$ işaretinin genliği X_m 'den küçük ($|x(t)| < X_m$), modülü $A(\omega)$. $0 < \omega < \omega_m$ aralığında, sınırlı olsun. Bunun için işaretin modülü sıfır frekansına göre 3 db azaldığı yada 0,707'ye düştüğü frekans ω_m olarak alınır.

Buna göre Bernstein teoremi gereğince işaretin türevine ilişkin genlik

$$|x'(t)| \leq \omega_m \cdot X_m \quad (2-8)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu teorem genelleştirilirse n'inci türev için

$$|X^{(n)}(t)| \leq \omega_m^n \cdot X_m \quad (2-9)$$

elde edilir.

Serinin n'inci terimde kesilmesi sebebiyle yapılan maksimum bağıl yanılğı, (2-7) denklemi ve (2-9) ilişkisi sonucu

$$e_n = \frac{R_{n+1}}{X_m} = \frac{\tau^{n+1} \cdot X^{(n+1)}(t+\theta\tau)}{(n+1)! X_m} \quad (2-10)$$

$$< \frac{\tau^{n+1} \omega_m^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\Omega_m^{n+1}}{(n+1)!}$$

biçimindedir; burada $\Omega_m = \tau \omega_m$, (1-25) denklemi gereğince normlanmış, norm bandgenişliği frekansıdır.

Örnek: $\tau = 0,1$ san, $\omega_m = 10$ san⁻¹ için $\Omega_m = 1$ ve

$$e_1 \leq \frac{\Omega_m^2}{2} = 0,5, \quad e_2 \leq \frac{\Omega_m^3}{6} = 0,17, \quad e_3 \leq \frac{\Omega_m^4}{24} = 0,04 \text{ vs}$$

bulunur.

(2-10) denklemi istenen doğruluğa erişmek için gerekli türev alıcı sayısı n 'yi bulmada da kullanılabilir. Ancak (2-10) eşitsizliği n 'ye göre çözülemediğinden eşitsizliği sağlayan n 'nin değeri denenerek bulunur. Yukarıdaki örnekte %1'den daha küçük bir yanılgi elde etmek için

$$e_n = 0,01 \leq \frac{\Omega^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ilişkisinden $(n+1)! \geq 100$ ve $n \geq 5$ olması gerektiği çıkar.

Yanılğının küçük olması için kestirilmek istenen zaman aralığının küçük (τ küçük), işaretin yavaş (ω_m küçük) olması gerektiği (2-10) denkleminden görülmektedir. (2-5) denklemine göre yaklaşık ideal prediktörlerin frekans cevapları $\tau\omega = \Omega$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, n$ için aşağıda verilmiştir ($s = j\omega$):

$$G_0(j\Omega) = 1,$$

$$G_1(j\Omega) = 1 + j\Omega,$$

$$G_2(j\Omega) = \left(1 - \frac{\Omega^2}{2!}\right) + j\Omega$$

$$G_3(j\Omega) = \left(1 - \frac{\Omega^2}{2!}\right) + j\left(\Omega - \frac{\Omega^3}{3!}\right)$$

⋮

$$G_n(j\Omega) = \sum_{i=0}^n (j)^i \frac{\Omega^i}{i!}.$$

(2-11)

Bu yaklaşık ideal prediktörlerin $G_1(j\Omega)$, $G_2(j\Omega)$ ve $G_3(j\Omega)$ için Nyquist diyagramları Şekil 12a'da, $G_4(j\Omega)$, $G_5(j\Omega)$, $G_6(j\Omega)$, $G_7(j\Omega)$ ve $G_8(j\Omega)$ için Şekil 12b'de; aynı ideal prediktör yaklaşıklıklarının Bode diyagramlarına ilişkin modül eğrileri Şekil 13a'da faz eğrileri Şekil 13b'de görülebilir. Bu eğrilerden anlaşılacağı gibi $\Omega_m = 1,8$ 'e kadar $G_3(\Omega)$, $\Omega_m = 3,6$ 'ya kadar $G_8(\Omega)$ 'ya ilişkin yer eğrisi, ideal prediktörün yer eğrisine en yakın bir davranış göstermektedir. Yukarıda varılan sonuçlar aşağıdaki teoremlerde toplanmıştır:

T e o r e m 6a İdeal prediktörü gerçeklemek için transfer fonksiyonunu

$$e^{\tau s} = \sum_{i=0}^n \frac{(\tau s)^i}{i!} + R_{n+1} \quad (2-6,2-7)$$

biçiminde bir yakınsak seriye açmak gerekir.

T e o r e m 6b Bu serinin her bir terimi artarda bağlı türevalıcı elemanlarla gerçekleşir.

T e o r e m 6c Seri, $\tau < r$ değerleri için yakınsaktır. Yakınsaklık yarıçapını

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)}(t)}{(n+1)x^{(n)}(t)} \right|} \quad (2-4)$$

limiti belirler.

T e o r e m 6d Laplace transformu rasyonel bir fonksiyon olan $x(t)$ işaretleri bütün τ değerleri için yakınsaktır.

T e o r e m 6 e Serinin n'inci terimde kesilmesi sonucu oluşan yanılmanın en büyük değeri

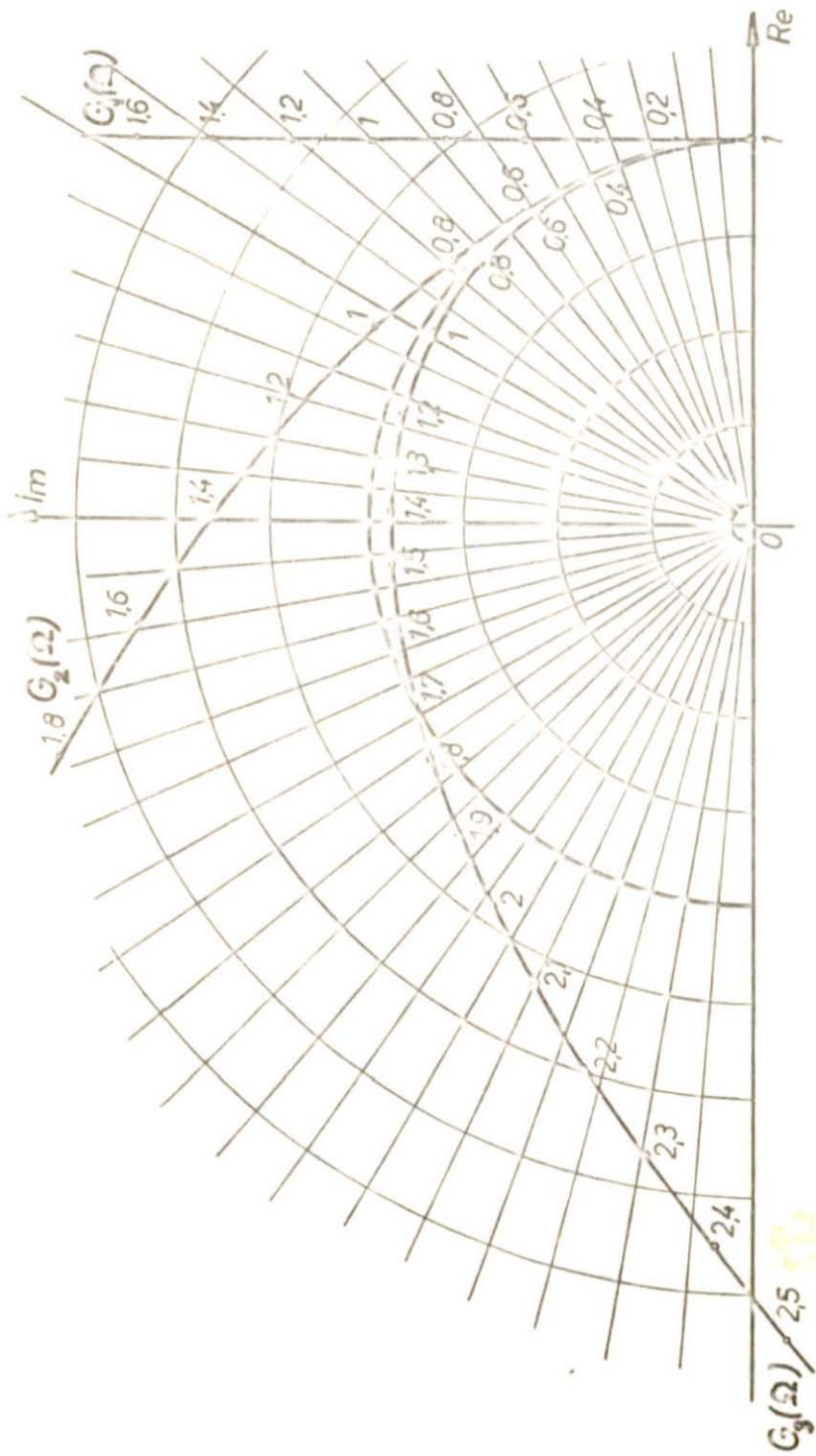
$$e_n = \frac{R_{n+1}}{X_m} \leq \frac{\Omega_m^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2-10)$$

olarak belirlenir. Burada X_m işaretin maksimum genliği Ω_m 'de işarete ilişkin frekans bandıdır.

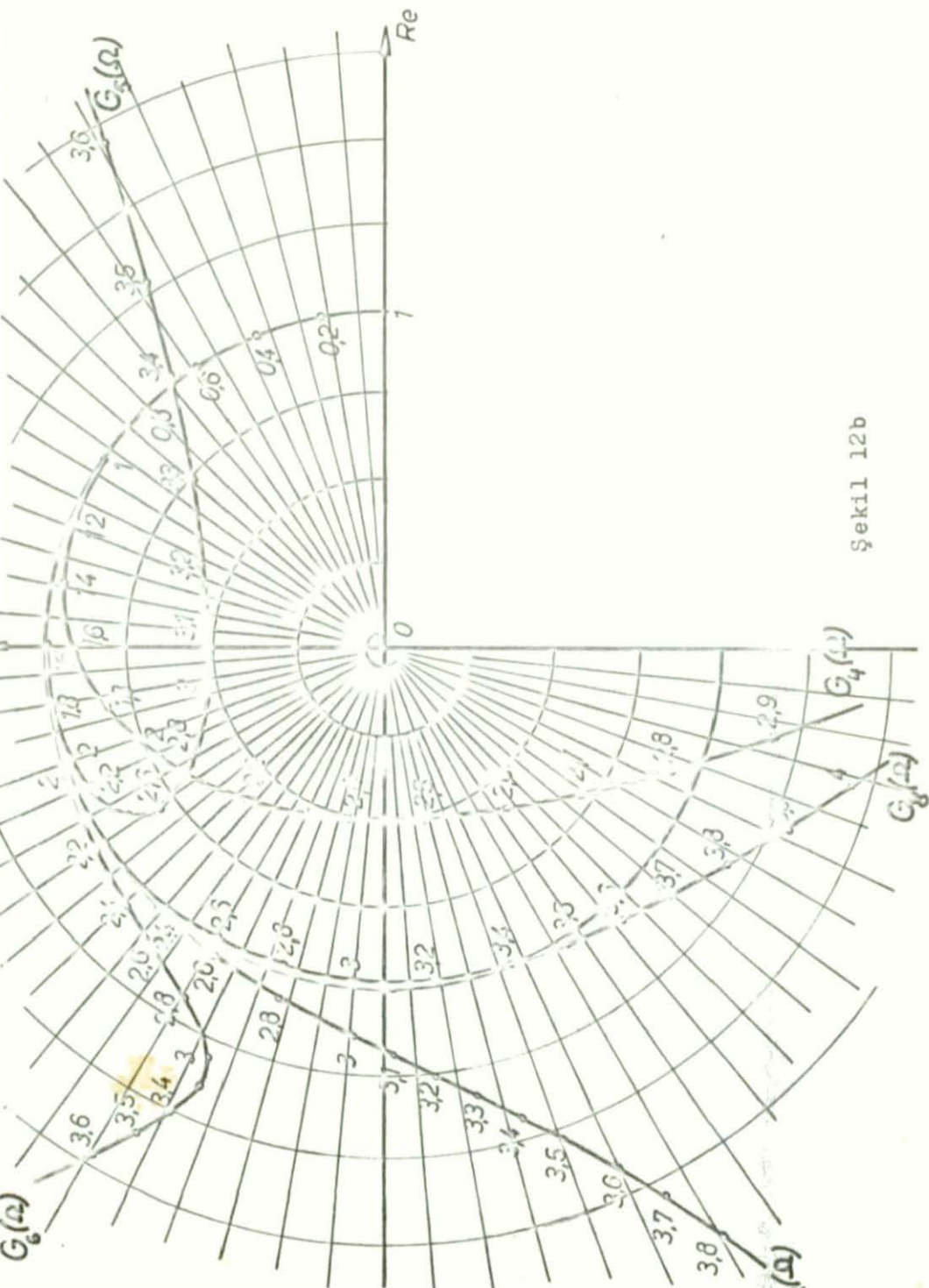
TÜREVALICI ELEMAN

İdeal prediktörün (2-1) denklemine göre seriye açılması sonucu elde edilen $(\tau s)^i/i!$ biçimindeki terimler Şekil 10'da görüldüğü gibi transfer fonksiyonları τs olan türevalıcı elemanların artarda bağlanması sonucu elde edilmektedir.

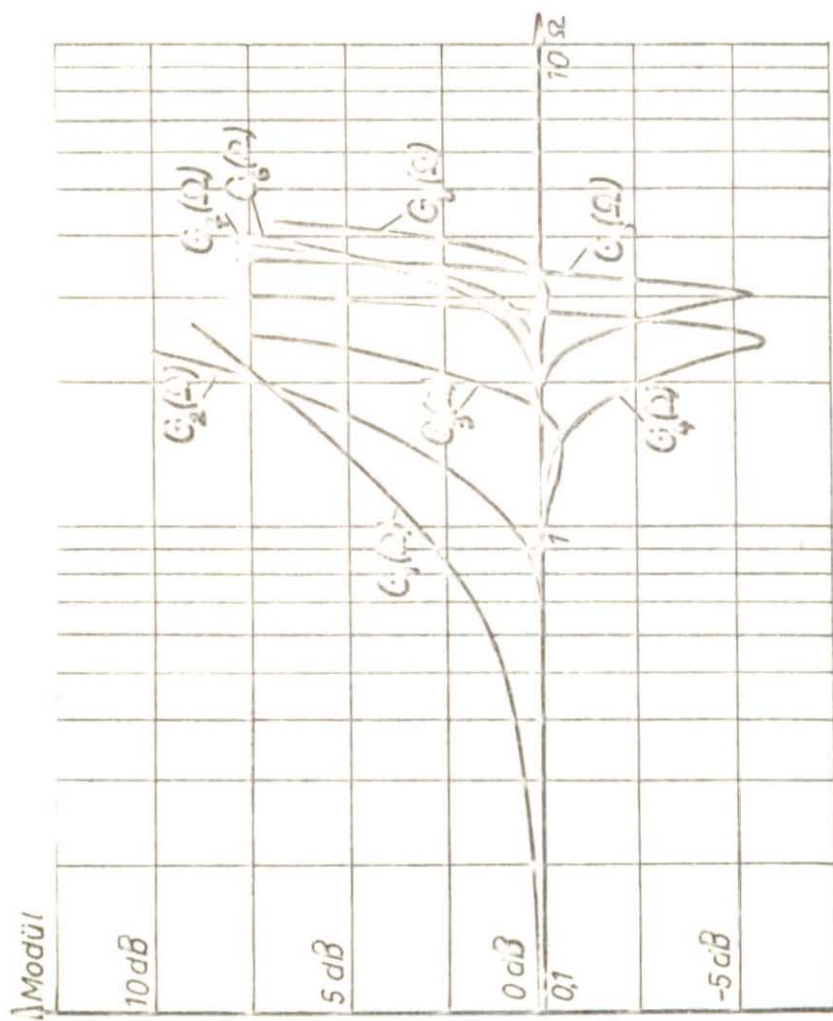
Literatürde frekansbandı geniş, işlem kuvvetlendiricilerle oluşturulan, bilinegelen türevalıcı devreler verilmektedir (53,55,56,57). Bu türevalıcı devreler, yazarların da belirttiği gibi, gürültü etkisinde birden doyuma gittiklerinden uygulamalarda kullanılmaları elverişli olmamaktadır. Biz burada konutu ayrıntılı olarak inceleyerek, bu türevalıcı devrede yapılması gereken değişiklikleri saptadık. İşaretimizin frekansbandı içinde türevalma işlemini ideale yakın biçimde gerçekleyen ve gürültü etkisinde bile çalışabilen bir başka işlem kuvvetlendiricili devrenin amacımıza uygun olduğunu gösterdik. İşlem kuvvetlendiricilerle ilgili ya-



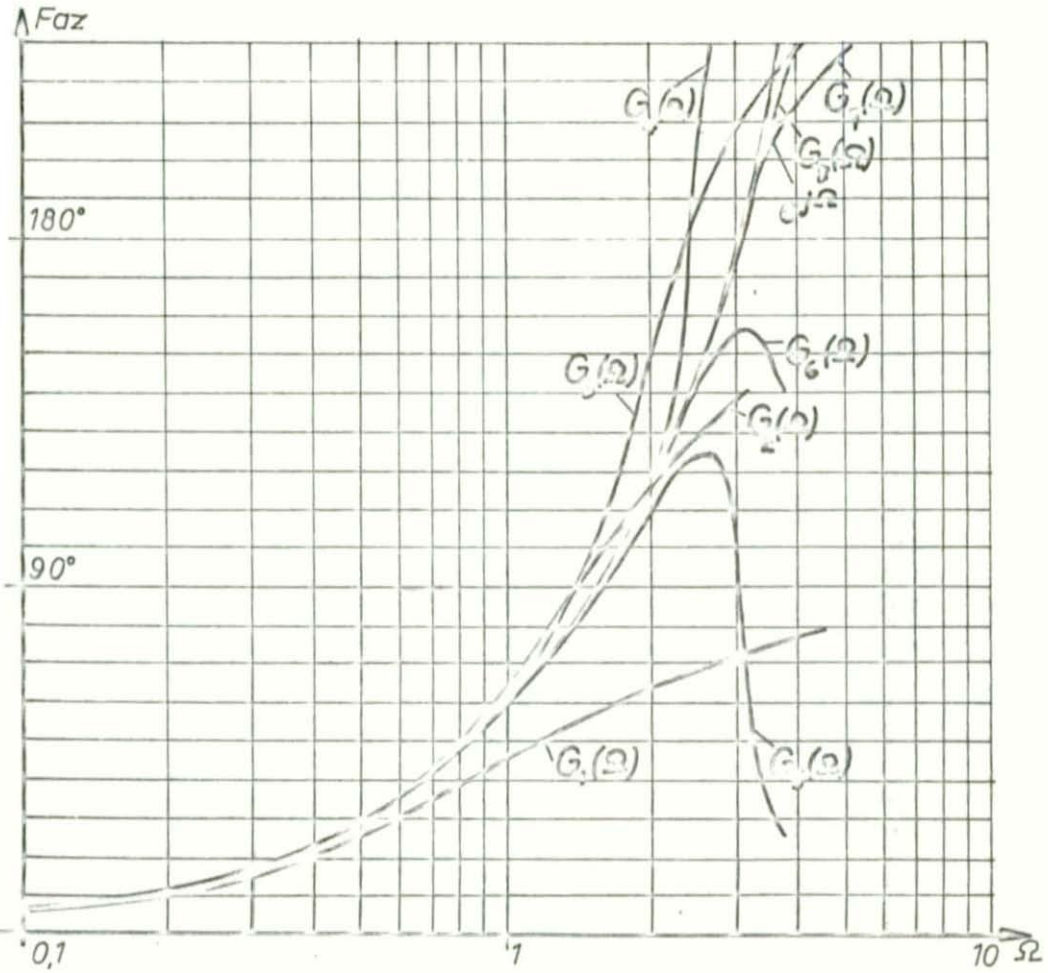
Şekil 12a



Şekil 12b



Şekil 13a



Şekil 13b

yınlarda bilinen (52,57), "değişke türevalıcı" adını verdiğimiz bu devrenin, isteneni gerçeklemesi için elemanlarının nasıl seçilmesi gerektiğini gösterdik.



Şekil 14

Giriş büyüklüğü $u_b(t)$, çıkış büyüklüğü $u_o(t)$ olan (Şekil 14) bir işlem kuvvetlendiricisinin transfer fonksiyonu

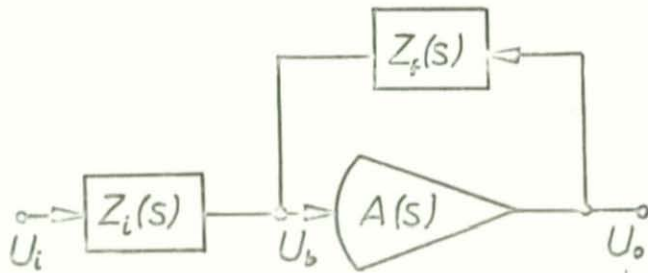
$$A(s) = \frac{U_o(s)}{U_b(s)} = \frac{-A_o}{\tau_c s + 1} \quad (2-12)$$

biçimindedir. Bu transfer fonksiyonunda A_o kuvvetlendirici kazancı, $\omega_c = 1/\tau_c$ 'de kuvvetlendirici kırılma frekansıdır. Bir işlem kuvvetlendiricide $A_o > 10600$ kolaylıkla erişilen bir değerdir. Kırılma frekansı ω_c , işlem kuvvetlendiriciye eklenen ek devrelerle değiştirebildiğimiz bir büyüklüktür ($10 < \omega_c < 10^4$).

İşlem kuvvetlendiricisinin U_b girişine seri olarak $Z_i(s)$, U_b girişi ve U_o çıkışı arasında paralel $Z_f(s)$ transfer fonksiyonlu bir devre bağlanırsa (Şekil 15), işlem kuvvetlendiricisinin giriş direnci çok büyük olduğundan, yeni U_i girişi ile U_o çıkışı arasında transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{A(s)Z_f(s)}{Z_f(s) + Z_i(s) - A(s)Z_i(s)} \\ &= \frac{Z_f(s)}{Z_f(s) + Z_i(s)} \cdot \frac{A(s)}{1 - A(s) \frac{Z_i(s)}{Z_f(s) + Z_i(s)}} \end{aligned} \quad (2-13)$$

olarak elde edilir.



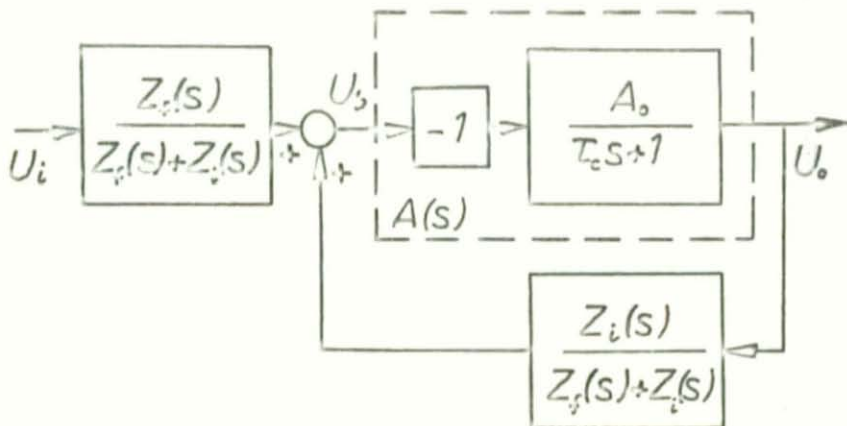
Şekil 15

(2-13) denkleminde görülebileceği gibi, Şekil 15'deki devre Şekil 16'da görülen geribesleme devresine eşdeğerdir.

Türev alıcı eleman elde etmek için giriş seri olarak bir C kondansatörü, kuvvetlendiriciye paralel olarak bir R direnci bağlanır. Bu durumda

$$Z_i(s) = \frac{1}{sC}, \quad Z_f = R \quad (2-14)$$

olduğundan tüm sistemin transfer fonksiyonu (2-13) denk-



Şekil 16

lemine göre

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{A(s)R}{R + \frac{1}{sC} - \frac{A(s)}{sC}} = \frac{-\frac{A_o}{A_o+1} \tau s}{\frac{\tau_c \tau}{A_o+1} s^2 + \frac{\tau_c + \tau}{A_o+1} s + 1} \underset{A_o \rightarrow \infty}{\approx} \frac{-\tau s}{s^2 + \frac{\tau_c + \tau}{A_o+1} s + 1} \quad (2-15)$$

biçimindedir; burada prediktör sabiti $\tau = RC$ 'dir.

Buna göre türevalıcının frekans domeninde karşılığı, $A_o+1 \approx A_o$ olmak üzere (A_o çok büyük),

$$\frac{U_o(j\omega)}{U_i(j\omega)} \approx \frac{-j\tau\omega}{\frac{\tau_c \tau}{A_o} \omega^2 + j \frac{\tau_c + \tau}{A_o} \omega + 1} \quad (2-16)$$

olarak bulunur. $\Omega = \tau\omega$ norm frekansına geçilirse

$$\frac{U_o(\Omega)}{U_i(\Omega)} = \frac{-j\Omega}{\left(1 - \frac{\tau_c}{A_o \tau} \Omega^2\right) + j \left(\frac{\tau_c + \tau}{A_o \tau} \Omega\right)} \quad (2-17)$$

elde edilir.

Norm transfer fonksiyonlarında

$\Omega = \tau\omega$	norm değişken frekans,
$\Omega_c = \tau / \tau_c$	işlem kuvvetlendiricinin norm kırılma frekansı,
$\Omega_s = A_o \Omega_c$	işlem kuvvetlendiricide 0 dB'ye ilişkin norm frekans,

$$\Omega_n = \sqrt{\Omega_s} = \tau \omega_n$$

türev alıcı devrenin norm kırılma frekansı (asemtotların kesişme frekansı),

$$\xi = (1 + \Omega_c) / 2\Omega_n$$

türev alıcı devrenin sönüm oranı,

$$(2-18)$$

tanımları kullanılırsa işlem kuvvetlendirici ve türev alıcı devrenin norm transfer fonksiyonları şu biçime girer:

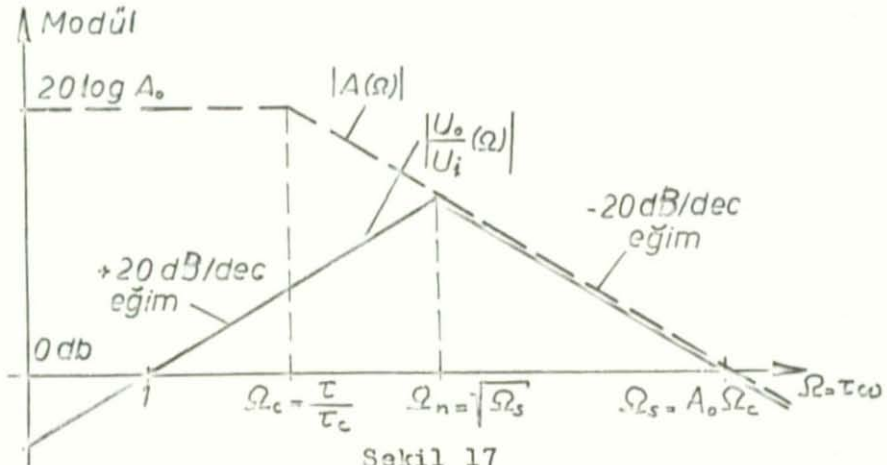
$$A(\Omega) = \frac{-A_o}{1 + j \frac{\Omega}{\Omega_c}}$$

işlem kuvvetlendiricinin norm transfer fonksiyonu, (2-19)

$$\frac{U_o}{U_i}(\Omega) = \frac{-j\Omega}{\left[1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_s^2}\right] + j\left[\frac{\Omega}{\Omega_s}(1 + \Omega_c)\right]}$$

türev alıcı devrenin norm transfer fonksiyonu. (2-20)

İşlem kuvvetlendirici ve türev alıcı devrenin modülüne ilişkin asemptotlar Şekil 17'de çizilmiştir. Türev alıcı devre Ω_n norm kırılma frekansından sonra yaklaşık işlem kuvvetlendiricinin davranışı gibi davranmaktadır.



Örnek: Kazancı $A_0 = 36\ 000$ olan bir işlem kuvvetlendirici kullanılır, zaman sabiti $\tau_c = 0,1$ saniyeye ayarlanır ve $\tau = 1$ saniye için bir türevalıcı hesaplanırsa

$$\Omega_c = \tau / \tau_c = 10$$

$$\Omega_s = A_0 \Omega_c = 360\ 000$$

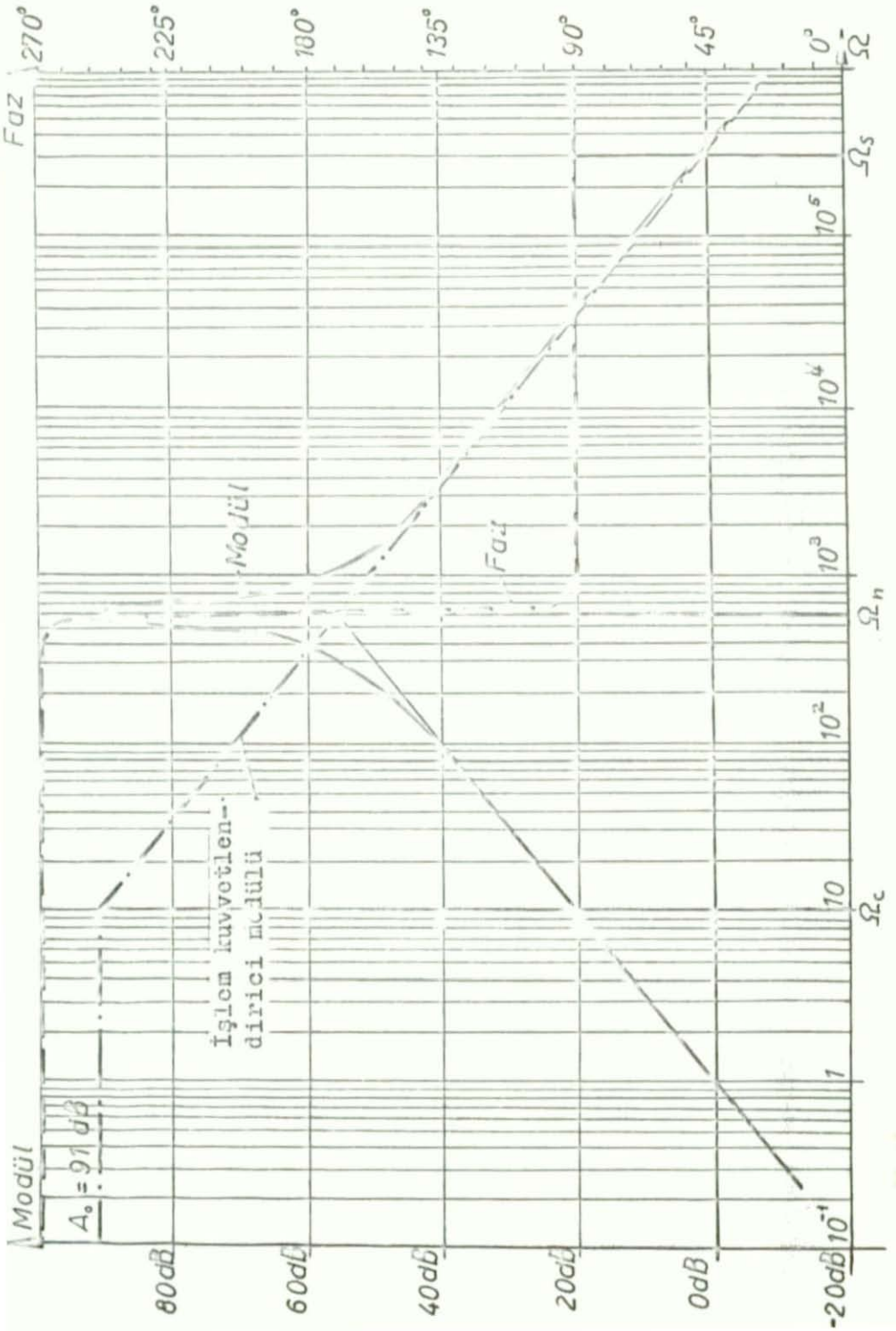
$$\Omega_n = \sqrt{\Omega_s} = 600$$

$$\xi = (1 + \Omega_c) / 2\Omega_n = 0,01$$

bulunur. Bu türevalıcıya ilişkin Bode diagramı Şekil 18'de görülmektedir. Türevalıcının sanal eşlenek kutupları $s_{1,2} = -\xi\Omega_n \pm j\omega \approx -5,5 \pm j600$ 'dir. Böyle bir devre hernekadar kararlı ise de Bode diyagramından görüldüğü gibi Ω_n frekansı civarında modül +90 db kadar arttığınızın, bu frekans civarındaki en küçük bir bozucu işaret işlem kuvvetlendiriciyi doyuma götürmektedir. Bu nedenle uygulamada böyle bir türevalıcı devreyi kullanma olanağı yoktur.

2.3 DEĞİŞKE TÜREVALICI

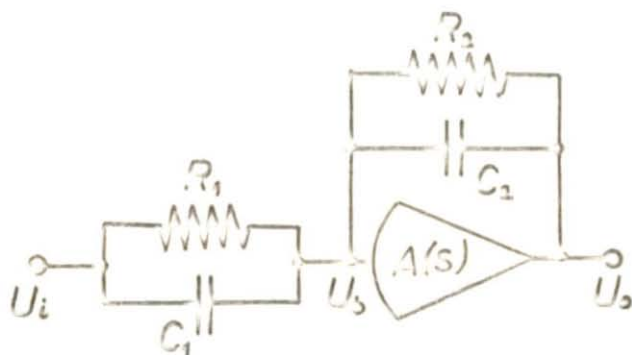
İşlem kuvvetlendiriciyle gerçekleştirilen türevalıcının sönüm oranı $\xi < 0,2$ olması dolayısıyla Ω_n norm kırılma frekansı civarında yüksek tepe değerlerine erişmesi yüzünden kullanışsız olduğunu gördük. Elverişli bir türevalıcı elde etmek için, modülü Ω_n kırılma



Şekil 18

frekansı civarında aşırı arttıran, transfer fonksiyonundaki sanal kutuplar yerine, kırılma frekanslarında sadece 3 dB fark gösteren gerçek kutuplar getirerek, tepe değerinin aşırı büyümesini önlemek gerekir. Ayrıca (2-15) denklemiyle belirlenen transfer fonksiyonunda modül alçak frekanslarda sifara gitmektedir. Alçak frekanslardaki ısı ve gerilim artışı gibi dış etkenlere bağlı kondansatör kayıplarını denetim altına almak amacı ile transfer fonksiyonunu tarafımızdan belirlenen bir sıfırla başlatmak amacımız yönünden daha uygundur.

Bu nitelikler göz önüne alınarak işlem kuvvetlendirici girişine bir paralel R_1C_1 devresi, giriş ile çıkışı arasına bir paralel R_2C_2 devresi eklenir (Şekil 19).



Şekil 19

Bu durumda (2-14) yerine

$$Z_i(s) = \frac{R_1}{1+sC_1R_1} \quad Z_f(s) = \frac{R_2}{1+sC_2R_2} \quad (2-21)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{-A_o R_2 (\tau_1 s + 1)}{A_o R_1 (1 + \tau_2 s) + (1 + \tau_c s) R_2 (\tau_1 s + 1) + R_1 (1 + \tau_2 s)} \\
&= \frac{-A_o R_2 (\tau_1 s + 1)}{\tau_c (R_1 \tau_2 + R_2 \tau_1) s^2 + [\tau_c (R_1 + R_2) + R_1 \tau_2 + R_2 \tau_1 + A_o R_1 \tau_2] s + A_o (1 + R_1) + 1} \\
&\approx \frac{-R_2 (\tau_1 s + 1)}{R_1 (\tau_2 s + 1) \left(\frac{\tau_c (\tau_1 R_2 + \tau_2 R_1)}{A_o R_1 \tau_2} s + 1 \right)} \quad (2-22)
\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad (2-23)$$

olup, $1/\tau_1 < \omega < 1/\tau_2$ aralığında türev işlemini elde etmek için

$$R_1 > R_2 \quad \text{ve} \quad C_1 > C_2 \quad (2-24)$$

seçilmiştir.

Transfer fonksiyonu (2-22) denklemiyle belirlenen, direnç ve kondansatör değerleri (2-24) eşitsizliğini gerçekleştirecek biçimde seçilen bir devrenin davranışı, en kolay, iki kademede incelenir:

a) Alçak frekanslarda ($0 \ll \omega \ll \omega_c$):

İşlem kuvvetlendiriciye ilişkin (2-12) denklemi

$$A(s) = \frac{-A_o}{\tau_c s + 1} \approx -A_o \quad + -\infty$$

olduğundan (2-22) denklemi $\omega \ll \omega_c$ için

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{-R_2(\tau_1 s + 1)}{R_1(\tau_2 s + 1)} \quad (2-25)$$

biçimindedir. Ayrıca (2-24) eşitsizliklerine göre

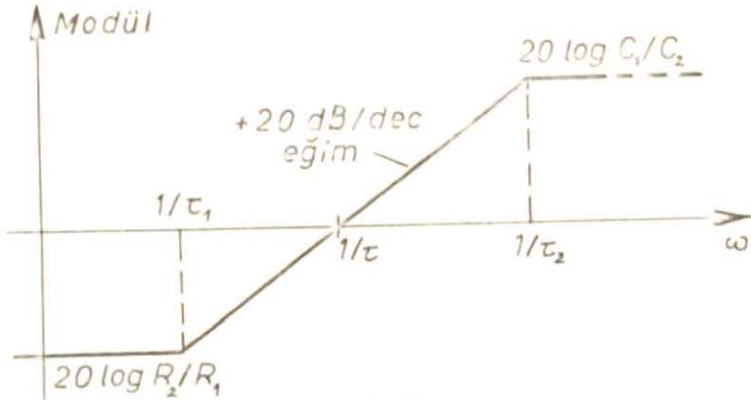
$$\tau_1 = R_1 C_1 > R_2 C_2 = \tau_2 \quad (2-26)$$

oluşundan (2-25) denkleminin modül eğrisi yaklaşık olarak şekil 20a'da görüldüğü gibidir. Modülün 0 dB olduğu değer,

$$(R_2 \sqrt{\tau_1^2 \omega^2 + 1}) / (R_1 \sqrt{\tau_2^2 \omega^2 + 1}) = 1 \text{ koşulundan}$$

$$\omega \approx 1/\tau = 1/(C_1 R_2) \quad (2-27)$$

bulunur. Yeni prediktörün zaman sabiti $\tau = C_1 R_2$ 'dir.



Şekil 20a

b) Yüksek frekanslarda ($\omega_2 \ll \omega$):

Bu durumda (2-22) denklemini

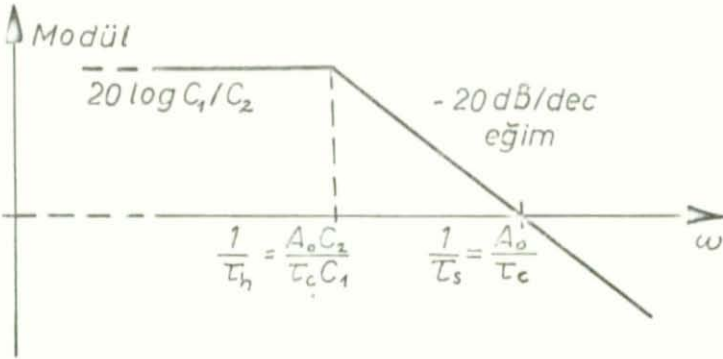
$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} \approx \frac{-A_o R_2 \tau_1}{A_o R_1 \tau_2 + \tau_c s (\tau_1 R_2 + \tau_2 R_1)} = \frac{-C_1/C_2}{1 + \frac{\tau_c (C_1 + C_2)}{A_o C_2} s} \quad (2-28)$$

biçimde yazılabilir. Yüksek frekansda kırılma

$$\omega_h = 1/\tau_h = \frac{A_o C_2}{\tau_c (C_1 + C_2)} \approx \frac{A_o C_2}{\tau_c C_1} \quad (2-29)$$

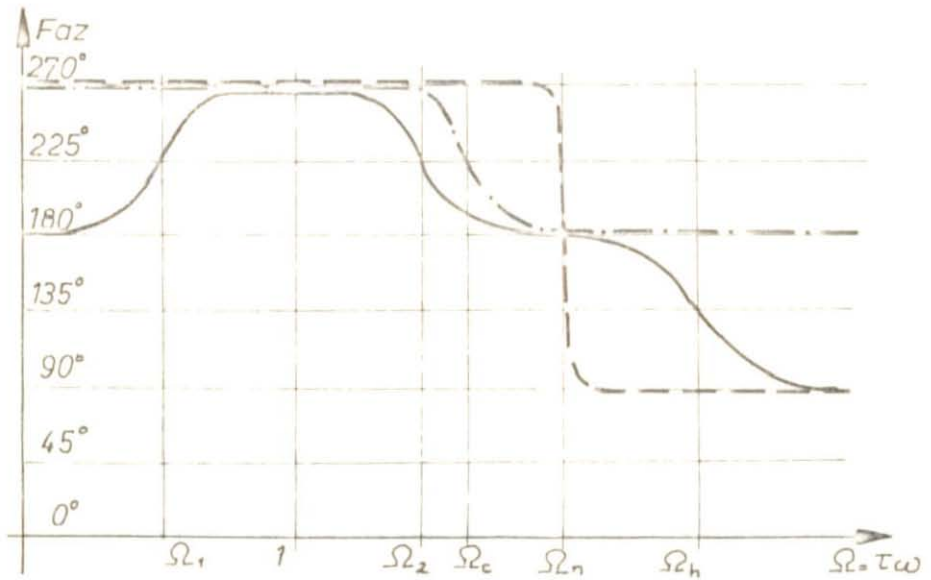
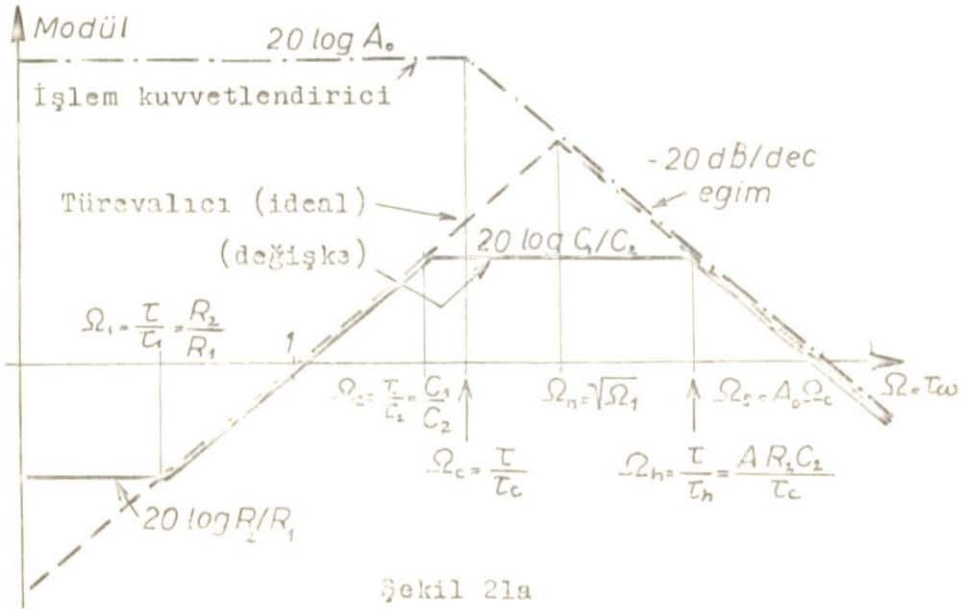
frekansında, modülün 0 dB olduğu frekans

$\omega_s \approx A_o/\tau_c$ 'dir. Yüksek frekanslara ilişkin modül Şekil 20b'de görülmektedir.



Şekil 20b

İki kısım birleştirilir ve $\omega = \tau\omega$ norm frekansına geçilirse, değişke türevalıcıya ilişkin modül ve faz, işlem kuvvetlendirici ve ideal türevalıcıya ilişkin modül ve fazla birlikte Şekil 21a ve 21b'de görülen biçimi alır.



Örnek: 1.12'inci paragrafta örnek olarak verilen kazancı $A_0 = 36\ 000$, norm zaman sabiti $1/\Omega_c = 0,1$ olan işlem kuvvetlendiricinin prediktör sabiti $\tau = 1$ saniye için hesaplırsak

$$\Omega_c = \tau/\tau_c = 10, \quad \Omega_s = A_0 \Omega_c = 360\ 000$$

buluruz. Ω_1, Ω_2 frekansları arasını 4 dekad alalım, bu durumda

$$\Omega_1 = R_2/R_1 = 0,01, \quad \Omega_2 = C_1/C_2 = 100$$

ve

$$\Omega_h = (A_0 R_2 C_2)/\tau_c = (36\ 000 R_2 C_2)/0,1$$

bulunur. Eğer $R_1 = 100 R_2$, $C_1 = 100 C_2$ ve $\Omega_h = 3\ 700$ seçersek elemanların değerleri için $C_1 = 10\ \mu\text{F}$, $C_2 = 0,1\ \mu\text{F}$, $R_1 = 10\ \text{M}\Omega$, $R_2 = 100\ \text{k}\Omega$ elde ederiz.

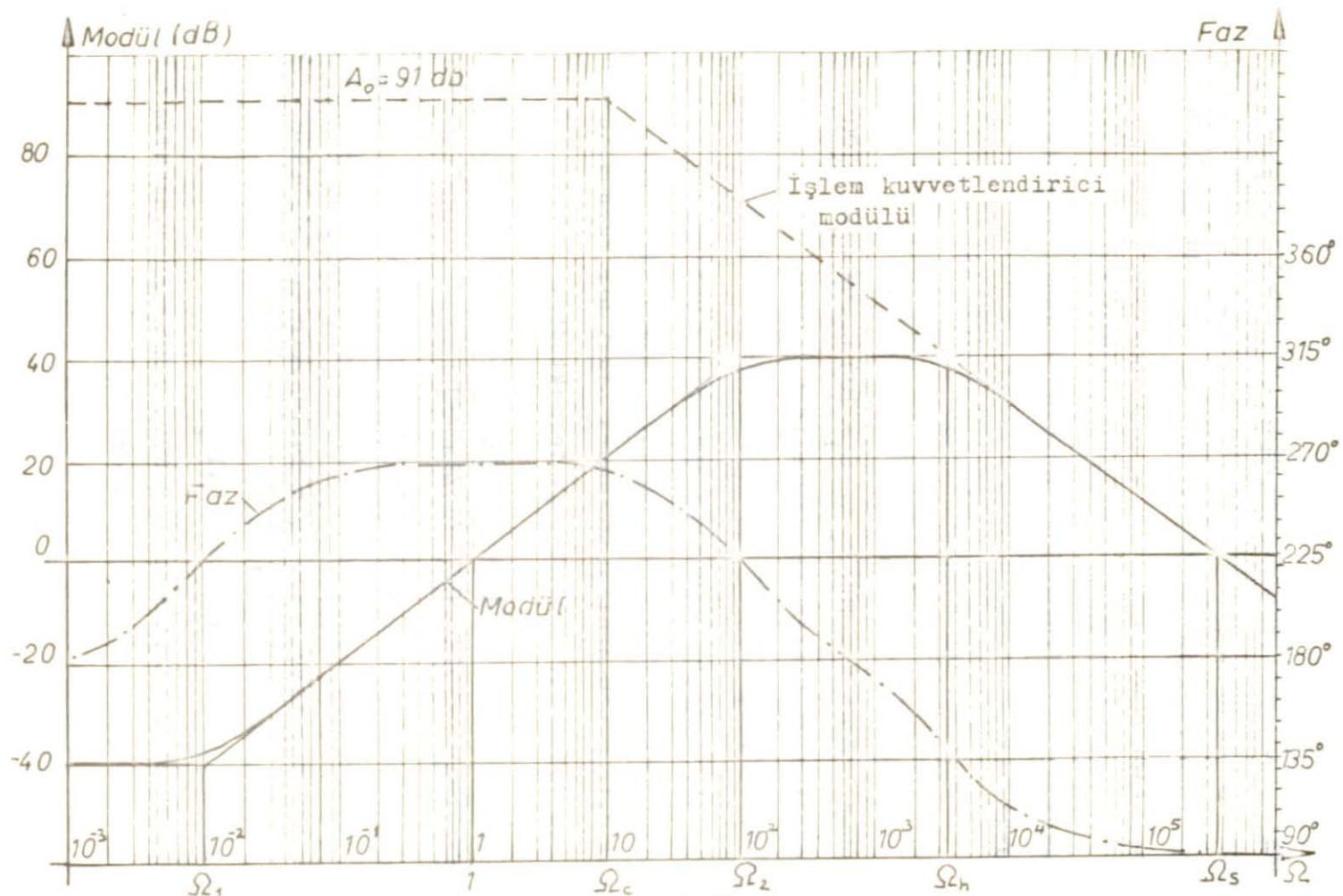
Böyle bir değişke türevalıcının Bode diyagramı Şekil 22'de çizilmiştir. Bu diyagramdan görüldüğü gibi $0,1 < \Omega < 10$ aralığında devre ideal bir türevalıcıya çok yakın bir davranış göstermektedir.

4 OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNDE İSARETLER VE BU İSARETLERE İDEAL PREDİKTÖRÜN UYGULANMASI

Bundan önceki paragrafta geliştirdiğimiz kararlı değişke türevalıcı, Şekil 10'da bloklarda τ_s ile belirttiğimiz her bir türevalıcı için kullanılırsa, $e^{\tau s}$ transfer fonksiyonlu ideal prediktör,

$$10\Omega_1 < \Omega < 0,1\Omega_2$$

norm frekans aralığında yaklaşık olarak gerçekleşmiş olur. Burada $\Omega = \tau\omega$ olmak üzere $\Omega_1 = \tau/\tau_1$ ve $\Omega_2 = \tau/\tau_2$



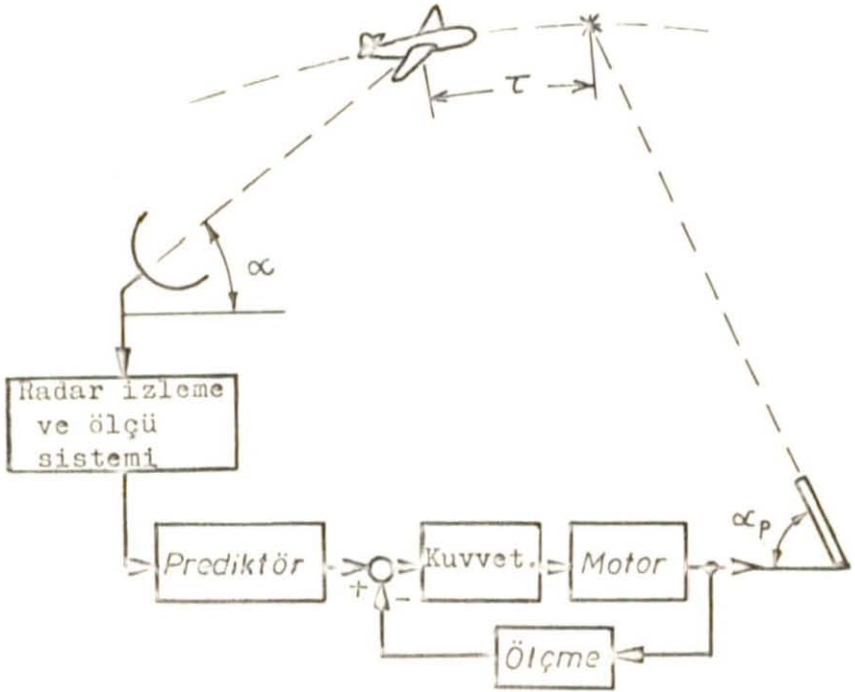
Şekil 22

her değişke türevalıcının, $\omega \ll \omega_c$ için geçerli, (2-25) transfer fonksiyonundaki, sıfır ve kutupların norm kırılma frekanslarıdır.

Bu tür bir yaklaşık ideal prediktörün, bir $x(t)$ işaretinin değerini τ zamanı kadar önceden kestirilmesi için, işaretin ve n 'inci mertebeye kadar işaretin bütün türevlerinin o anda var ve sürekli olması gerekir. Ayrıca ideal prediktör, seriye açma yoluyla elde edildiğinden, (2-4) denklemiyle hesaplanan işarete ilişkin yakınsaklık yarıçapı r , τ zamanından daha büyük olmalıdır. Bu koşulların gerçekleştiği belirgin ya da olası her tür işaretin değerinin önceden kestirilmesinde önerdiğimiz bu ideal prediktör yaklaşımını kullanma olanağı vardır.

Otomatik kontrol sistemlerinde böyle bir prediktörün çeşitli kullanma yerleri olabilir. Kanımızca bu kullanma yerlerini iki temel konuda özetlemek mümkündür. Bunların birincisinde prediktör, amacına uygun olarak bir kontrol işaretinin τ zamanı kadar sonraki değerini bulmaya yarar. İkinci uygulama konusunda ise prediktör sistemde kararlılığı bozan geciktirme elemanlarının denkleştirilmesinde (compensation) kullanılabilir.

Birinci tür uygulamaya örnek olarak giriş bölümünde anlatılan klasik prediktör problemi gösterilebilir. Şekil 23'de görüldüğü gibi böyle bir sistemde radar izleme mekanizması, uçaksavar topu ve bu topun otomatik kont-



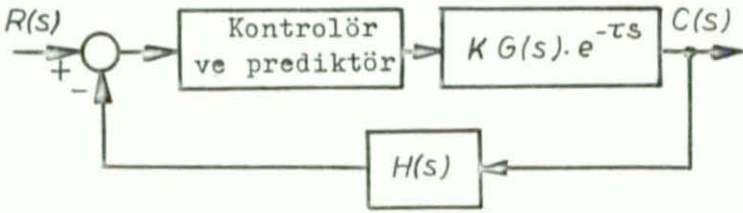
Şekil 23

rol devresi bulunur. Radar izleme sisteminin verdiği açısal koordinatlardaki işaretlerin τ zamanı kadar sonraki değerleri birer prediktör ile ayrı ayrı bulunduktan sonra referans işareti olarak topun kontrol devresine iletilir.

Şekil 23'de yükseklik açısı $\alpha(t)$ 'nin radar izleme sistemiyle ölçüldüğünü, prediktörde $\alpha_p(t) = \alpha(t + \tau)$ değerinin bulunduğunu ve uçaksavar topunun sürekli bu değere getirildiğini görüyoruz. Aynı işlem genişlik açısı ve uzaklık belirleme için yapılırsa, τ zamanı kadar sonra,

atılan mermi ve uçak aynı noktada karşılaşır. Bu tür uygulamalar bütün randevulaşma sistemlerinde kullanılır.

İkinci uygulama alanında ideal prediktör bir denkleştirme devresi olarak kullanılır. Ideal geciktirme elemanının transfer fonksiyonu $e^{-\tau s}$ biçimindedir. Eğer sistemin ileri yolunda böyle bir geciktirici eleman Şekil 24'de olduğu gibi varsa, sistemi kararlı kılmak için denkleştirme devresine geciktirmeyi denkleştiren bir prediktör eklemek gerekir.



Şekil 24

B Ö L Ü M III

W I E N E R P R E D İ K T Ö R Ü

Birinci ve ikinci bölümde e^{Ts} transfer fonksiyonlu ideal prediktörün özellikleri belirtildikten sonra bu prediktörün yaklaşık olarak gerçekleştirilmesine çalışılmıştır. Bu ve bundan sonraki bölümde yaklaşık ideal prediktör, teorileri verilmiş olan diğer prediktörlerle karşılaştırılarak aralarındaki benzerlik ve farklar tartışılacaktır. Üçüncü bölüm Wiener'in, dördüncü bölüm Kalmanın önermiş olduğu prediktör türlerine ayrılmıştır. Her iki prediktör türü ancak özellikleri bilinen işaretler için optimum çözüm vermektedir. Birinci bölümde önermiş olduğumuz ideal prediktör evrensel nitelikte olup, özel işaretler için Wiener ve Kalman prediktörleri kadar uygun sonuç vermiyebilir. Burada, otomatik kontrol sistemlerinde özellikle çok karşılaşılan birinci ve ikinci dereceden sistemlerin, basamak biçimindeki giriş büyüklüklerinin karşılıkları ile ilgili Wiener ve Kalman prediktörleri bulunmuş ve bunlar, önerdiğimiz yaklaşık ideal prediktörle karşılaştırılmıştır.

N. WIENER'İN PREDİKTÖR MODELİ (8,21,23,26,44)

N. Wiener'in prediktör modeli istatistiksel kurallara ve klasik transfer fonksiyonu kavramına dayanmaktadır.

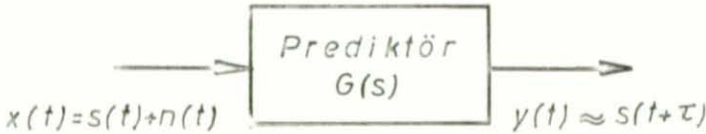
Prediktörün giriş işaretinin

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (3-1)$$

biçiminde bir $s(t)$ işareti ve herhangi bir $n(t)$ gürültüsünün toplamından oluştuğu kabul edilir (Şekil 25), prediktör çıkış işaretinin

$$y(t) \approx s(t+\tau) \quad (3-2)$$

olabilmesi için, prediktör transfer fonksiyonu $G(s)$ 'in ne biçimde olması gerektiği araştırılır.



Şekil 25

Sorunun çözülebilir olması için, t_1 şimdiki zaman olmak üzere, $t < t_1$ zamanlarında bilinen $x(t) = s(t) + n(t)$ giriş işareti ile elde edilmek istenen $s(t_1 + \tau)$ değeri arasında bir ilişki bulunmalıdır. $t < t_1$ zamanında $n(t)$ ile $s(t_1 + \tau)$ arasında bir ilişki gerekmediğinden burada $n(t)$ her türden bir gürültü olabilir.

Eğer prediktör girişine sadece $s(t)$ işareti uygulanmış ise, $x(t) = s(t)$ ve $n(t) = 0$ olacağından, sorun bir "öz prediksyon" sorununa dönüşür.

Bu problemin çözümü Wiener'in verdiği aşağıdaki ön koşulları gerektirmektedir:

- a) $s(t)$ işareti ve $n(t)$ gürültüsüne ilişkin istatistiksel büyüklükler zamanla değişmemelidir. Buna göre belirli bir zamana ilişkin istatistiksel özellik bütün zamanlar için de geçerli olup, bunların korelasyon fonksiyonları, sadece ele alınan iki ayrı zaman farkının bir fonksiyonu olmalıdır.
- b) Optimum çözümü veren prediktör, istenen çıkış işareti ile gerçekte elde edilen çıkış işaretinin farkı $e(t)$ yanlıgisının karesel ortalaması $e^2(t)$ 'nin minimum olma ölçütüne göre hesaplanır:

$$\overline{e^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [s(t+1) - y(t)]^2 dt \quad (3-3)$$

- c) (2-3) kriterine göre bulunan optimum sistem lineer olmalıdır. İntegralalıcı, türevalıcı ve katsayı kuvvetlendirici bileşiminden oluşan lineer bir sistemi gerçeklemek kolaydır. Lineerlik koşulunun uygulanmasından vazgeçilebilir, ancak ideal prediktör de lineer bir sistem olduğundan (bak 1.2.1), bizim çalışmalarımızla karşılaştırmak ve benzerliği belirtmek için lineerlik koşulunu baştan kabul etmek gerekir.
- d) $s(t)$ işareti ve $n(t)$ gürültüsünün öz ve çapraz-ko-

relasyonfonksiyonları önceden bilinmeli ve bunların güç dağılımları kompleks s-değişkeninin rasyonel bir fonksiyonu olmalıdır. Bu koşulun gerçekleşmediği durumlarda güç dağılımı yaklaşık olarak rasyonel bir fonksiyona dönüştürülür.

Genel olarak Wiener'in yöntemi, zamanla-değişmeyen zaman fonksiyonlarının karesel yanılga ortalaması ölçütüne göre lineer prediksyonuna ve filtrelenmesine ilişkindir.

2 N. WIENER'İN OPTİMAL ÇÖZÜMÜ

Problemi yukarıda verilen biçimiyle çözebilmek için işaret ve gürültünün öz ve çapraz korelasyonfonksiyonlarını tanımlamak gerekir. Korelasyon fonksiyonları

$$\psi_{ss}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)s(t+v)dt = \overline{s(t)s(t+v)} \quad (3-4)$$

$$\psi_{nn}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)n(t+v)dt = \overline{n(t)n(t+v)} \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{sn}(v) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)n(t+v)dt = \overline{s(t)n(t+v)} \\ &= \psi_{ns}(-v) \end{aligned} \quad (3-6)$$

biçimde tanımlanır.

Genel olarak bir $\psi_{xx}(v)$ öz korelasyon ve $\psi_{xy}(v)$ çapraz korelasyon fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi

özetlenebilir (32,44):

1. $\psi_{xx}(v)$ ve $\psi_{xy}(v)$ fonksiyonları t değişkenindeki zaman ötelemelerinden bağımsızdır.

2. $\psi_{xx}(v)$ öz korelasyon fonksiyonu bir çift fonksiyon

$$\psi_{xx}(v) = \psi_{xx}(-v);$$

$\psi_{xy}(v)$ çapraz korelasyon fonksiyonu genellikle tek bir fonksiyon değildir, fakat

$$\psi_{xy}(v) = \psi_{yx}(-v)$$

özelliklidir.

3. $\psi_{xx}(v)$ ve $\psi_{xy}(v)$ fonksiyonları, beyaz gürültü gibi özel olasıl fonksiyonlar dışında, pozitif ve negatif değerler alabilen sürekli fonksiyonlardır.

4. $\psi_{xx}(0)$, işaretin ortalama karesel değerine eşit olup negatif değer alamaz. $|v| > 0$ için

$$\psi_{xx}(v) < \psi_{xx}(0)$$

'dir. $\psi_{xy}(0)$ çapraz korelasyon fonksiyonunun maksimum değeri bulunmayabilir ve bu fonksiyon pozitif ya da negatif değerler alabilir.

5. $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının ortalaması sıfır olduğu ve bu fonksiyonların periyodlu bileşmeleri bulunmadığı sürece, $\psi_{xx}(v)$ ve $\psi_{xy}(v)$ fonksiyonları v sonsuza giderken sıfıra gider.

Korelasyon fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerine güç dağılımı adı verilir:

$$\mathcal{L}\{\psi_{ss}(v)\} = \psi_{ss}(s),$$

$$\mathcal{L}\{\psi_{nn}(v)\} = \psi_{nn}(s), \quad (3-7)$$

$$\mathcal{L}\{\psi_{sn}(v)\} = \psi_{sn}(s) = \psi_{ns}(-s).$$

Yukarıdaki özellikleri bulunan bir $\psi(v)$ korelasyon fonksiyonunun güç dağılımı $\phi(s)$ 'in varlığı

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v) e^{-sv} dv$$

integralinin varlığına bağlıdır. Bu integralin yakınsaklığı için şu koşullar sağlanmalıdır: sınırlı bir bölgede $\psi(v)$ ancak sonlu sayıda noktada süreksiz, başka deyişle parça-parça sürekli, herhangi bir

$$-\infty < v_1 < v < v_2 < +\infty$$

aralığında integralin değeri sınırlı olmalıdır. c^+ ve c^- birer sabit, $\sigma^+ < \sigma^-$ olmak üzere, σ^+ ve σ^- pozitif reel iki sayı olduğuna göre

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \psi(v) e^{-\sigma^+ v} = c^+, \quad \lim_{v \rightarrow -\infty} \psi(v) e^{-\sigma^- v} = c^-$$

limitleri varsa, bu integral $\sigma^+ < \sigma^-$ aralığında yakınsaktır (10).

Benzer biçimde $\sigma^+ < \sigma < \sigma^-$ olmak üzere

$$\psi(v) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \phi(s) e^{sv} ds$$

integrali ile güç dağılımının ters Laplace dönüşümü hesaplanabilir (10).

Bir lineer sistemde giriş ve çıkış büyüklüklerinin güç dağılımları arasında Wiener-Khintchine bağıntıları vardır. Bunlar, Şekil 26 uyarınca

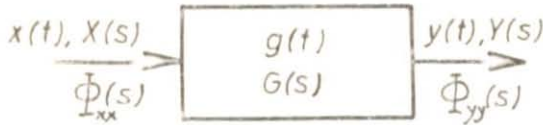
$$\phi_{xy}(s) = G(s) \phi_{xx}(s), \quad (3-8)$$

$$\Phi_{yx}(s) = G(-s)\Phi_{xx}(s), \quad (3-9)$$

$$\Phi_{yy}(s) = G(-s)\Phi_{xy}(s) = G(s)\Phi_{yx}(s) = G(s)G(-s)\Phi_{xx}(s) \quad (3-10)$$

biçimindedir. Ayrıca, güç dağılımlarını, işaretlerin Laplace dönüşümleri cinsinden belirtmek de mümkündür:

$$\Phi_{xx}(s) = X(-s)X(s), \quad \Phi_{xy}(s) = X(-s)Y(s). \quad (3-11)$$



Şekil 26

Bağımsız darbelerden oluşan ve güç dağılımı

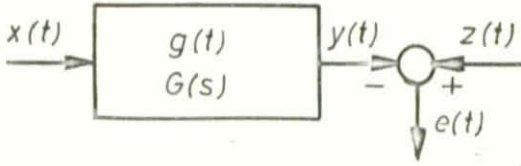
$$\Phi_{xx}(s) = 1$$

olan bir işarete "beyaz gürültü" denir.

(3-10) ve (3-11) denklemleri uyarınca, güç dağılımı

$\Phi_{yy}(s)$ olan bir $y(t)$ işareti, girişine beyaz gürültü uygulanan ve transfer fonksiyonu $G(s) = Y(s)$ olan bir sistemin çıkışında elde edilir. Buna göre, elde edilmek istenen herhangi bir $y(t)$ işareti beyaz gürültüden oluşturulabilir.

Eğer $z(t)$ ile sistem çıkışında elde edilmek istenen işaret anlaşılırsa (prediksiyonda $z(t) = s(t+\tau)$), yanılga $e(t) = z(t) - y(t)$ biçiminde yazılabilir (Şekil 27).



Şekil 27

Ortalama karesel hata

$$\begin{aligned}
 \overline{e^2(t)} &= \overline{\{z(t) - [g(t) * x(t)]\}^2} = \psi_{zz}(0) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{xz}(u) g(u) du \\
 &+ \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_{xx}(u-v) g(u) g(v) du dv \quad (3-12)
 \end{aligned}$$

biçiminde korelasyon fonksiyonları cinsinden belirlenebilir.

İncelediğimiz sorunda giriş işareti $x(t)$ ve istenen işaret $z(t)$ belirlenmiş olduğundan bunlara ilişkin $\psi_{zz}(v)$, $\psi_{xz}(v)$ ve $\psi_{xx}(v)$ öz ve çapraz korelasyon fonksiyonları da belirlidir. (3-12) denkleminde ortalama karesel yanılığdaki bir değişme ancak sistemin $g(t)$ impuls karşılığında ileri gelebilir. Buna göre $\overline{e^2(t)}$ ortalama karesel yanılığın ifadesi $g(t)$ 'nin bir fonksiyoneldir. Fonksiyonellerin optimumlaştırılması varyasyonlar hesabının konusudur. Varyasyonlar hesabını (3-12) denkleminde uygularsak, sisteme ilişkin $g_0(t)$ optimum impuls karşılığının

$$\int_0^{+\infty} \psi_{xx}(u-v) g_0(v) dv = \psi_{xz}(u), \quad u \geq 0 \quad (3-13)$$

Wiener-Hopf denklemini sağlaması gerektiği sonucu çıkar (28,29,33,43,45,48).

$\phi_{xx}(s)$ ve $\phi_{xz}(s)$ güç dağılımları, s 'in rasyonel birer fonksiyonu ise, optimal $y_0(t)$ yanıtı elde edeceğimiz, fiziksel gerçekleştirilebilir bir sisteme ilişkin $G_0(s)$ transfer fonksiyonu, Wiener-Hopf denkleminde

$$G_0(s) = \frac{Y_0(s)}{X(s)} = \frac{1}{\phi_{xx}^+(s)} \left[\frac{\phi_{xz}(s)}{\phi_{xx}^-(s)} \right]_+ \quad (3-14)$$

biçiminde hesaplanır. Bu denklemde $\phi_{xx}^+(s) = X(s)$, $\phi_{xx}^-(s) = X(-s)$ biçiminde sıfır ve kutupları sol ve sağ yarı s -düzleminde bulunan ve güç dağılımından elde edilen iki rasyonel fonksiyondur. Bunun için güç dağılımı

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(s) = X(s)X(-s) &= \frac{k \prod_{i=0}^m (b_i + s)}{\prod_{i=0}^n (a_i + s)} \cdot \frac{k \prod_{i=0}^m (b_i - s)}{\prod_{i=0}^n (a_i - s)} \\ &= \phi_{xx}^+(s) \cdot \phi_{xx}^-(s) \end{aligned} \quad (3-15)$$

biçiminde iki çarpana ayrılır. Ayrıca $\phi_{xz}(s)/\phi_{xx}^-(s)$ oranı

$$\frac{\phi_{xz}(s)}{\phi_{xx}^-(s)} = \left[\frac{\phi_{xz}(s)}{\phi_{xx}^-(s)} \right]_+ + \left[\frac{\phi_{xz}(s)}{\phi_{xx}^-(s)} \right]_- \quad (3-16)$$

biçiminde kutupları sol ve sağ yarı s -düzleminde iki fonksiyonun toplamı biçiminde gösterilebilir. (3-14) denkleminde ikinci çarpan bu ifadenin ilk terimidir.

Wiener'in verdiği (3-14) optimum çözümü öz prediksyon olayına uygularsak, burada $s(t) = x(t)$ ve istenen işaret $z(t) = x(t+\tau)$ olduğundan, çapraz korelasyon

$$\psi_{xz}(u) = \overline{x(t)z(t+u)} = \overline{x(t)x(t+\tau+u)} = \psi_{xx}(u+\tau) \quad (3-17)$$

biçiminde yazılabilir. (3-17) denkleminin Laplace transformu

$$\phi_{xz}(s) = e^{\tau s} \phi_{xx}(s) \quad (3-18)$$

biçimindedir. Bu ilişkiyi optimum (3-14) ifadesine uygularsak

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{Y_o(s)}{X(s)} = \frac{1}{\phi_{xx}^+(s)} \left[\frac{\phi_{xz}(s)}{\phi_{xx}^-(s)} \right]_+ \\ &= \frac{1}{\phi_{xx}^+(s)} \left[\frac{e^{\tau s} \phi_{xx}(s)}{\phi_{xx}^-(s)} \right]_+ \quad (3-19) \\ &= \frac{1}{\phi_{xx}^+(s)} \left[e^{\tau s} \phi_{xx}^+(s) \right]_+ = \left[e^{\tau s} \right]_+ \end{aligned}$$

sonucu

elde edilir. $Y_o(s) = \left[e^{\tau s} \right]_+ \cdot X(s)$ ilişkisinin zaman domenindeki karşılığı

$$y_o(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ x(t+\tau) & t > 0 \end{cases} \quad (3-20)$$

biçimindedir.

Bu sonuç, 1.6 paragrafında (1-19) denklemleri ile verilen nedensel ideal prediktör yaklaşığı ile karşılaştırılırsa

iki ifadenin eşit olduğu görülür. Buna göre (3-19) denkleminde elde edilen optimal prediktör, (1-20) denklemiyle belirlenen nedensel ideal prediktör yaklaşımına ilişkin $G_N(s)$ transfer fonksiyonuna eşittir:

$$\frac{Y_o(s)}{X(s)} = G_o(s) = \left[e^{\tau s} \right]_+ = G_N(s) = \frac{\int_{\tau}^{+\infty} x(\lambda) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda}{X(s)} \quad (3-21)$$

Böylece görülmektedirki Wiener-Hopf denkleminde elde edilen gerçekleştirilebilir optimal prediktör, nedensel ideal prediktör yaklaşımından başka birşey değildir.

3.3 OPTİMAL WIENER PREDİKTÖRÜNÜN BODE-SHANNON YORUMU VE ÇÖZÜM YÖNTEMİ (2,26,28,29,43)

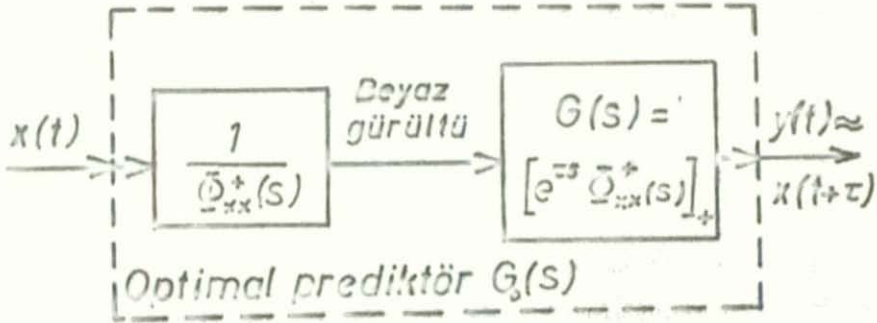
(3-19) denklemiyle verilen, $\Phi_{xx}(s)$ güç dağılımı bilinen bir işarete ilişkin optimal prediktörün fiziksel anlamını Bode ve Shannon 1950 yılında yayınladıkları bir yazıda araştırmış ve optimal prediktörü hesaplarken izlenecek yolu vermişlerdir. Bu yol, özellikle olası işaretlere ilişkin prediktörlerin bulunmasında kolaylık sağlar.

(3-14) Wiener denkleminin prediktöre uygulanması sonucu elde edilen optimal

$$G_o(s) = \frac{1}{\Phi_{xx}^+(s)} \left[e^{\tau s} \Phi_{xx}^+(s) \right]_+ \quad (3-22)$$

transfer fonksiyonundaki $1/\Phi_{xx}^+(s)$ çarpanı, (3-10) iliş-

kisine göre $\phi(s) = \phi_{xx}^+(s) / [\phi_{xx}^+(s)\phi_{xx}^+(-s)] = 1$ olduğundan, $x(t)$ işaretini beyaz gürültüye çevirmektedir (Şekil 28).



Şekil 28

$$G(s) = [e^{-\tau s} \bar{\phi}_{xx}^+(s)]_+ \quad (3-23)$$

biçimindeki ikinci çarpanın görevi beyaz gürültüden prediksyon sabiti τ olan nedensel $x(t+\tau)$ işaretini oluşturmaktır.

Bode-Shannon yorumu uyarınca optimal prediktörün hesaplanmasında tutulacak yol şöyledir:

- Değeri kestirilecek $x(t)$ işaretinin $\phi_{xx}(s)$ güç dağılımı bulunur ve $\phi_{xx}(s) = \phi_{xx}^+(s)\phi_{xx}^-(s)$ biçiminde sıfır ve kutupları sol ve sağ yarı s -düzleminde bulunacak biçimde iki çarpana ayrılır.
- $\phi_{xx}^+(s)$ 'in ters Laplace dönüşümünden $\psi_{xx}^+(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi_{xx}^+(s)\}$ bulunur.
- $t > 0$ değerleri için sıfırdan farklı $g(t) = \psi_{xx}^+(t+\tau)$ hesaplanır.

d) Bulunan sonucun Laplace transformu

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \text{ alınır.}$$

e) Optimal prediktörün transfer fonksiyonu

$$G_o(s) = G(s) / \psi_{xx}^+(s) \text{ 'dır.}$$

3.4 PREDİKSİYON YANILGISI (43)

Burada, (1-22) ile verilen ve doğrudan doğruya nedensellik ilkesinin bir sonucu olarak ortaya çıkan yanılığa eşdeğer bir yanılğı tanımlanabilir.

Bode-Shannon yorumunda, ikinci $G(s)$ blokunda $x(t+\tau)$ işareti oluşturulurken, işaretin $0 \leq t < \tau$ zaman aralığındaki kısmı, nedensellik ilkesi nedeniyle kaybolmaktadır. Wiener'in teorisi karesel ortalama yanılğı yöntemine göre kurulduğundan bu yanılğı genellikle

$$e_{p2} = \int_0^{\tau} [\psi_{xx}^+(t)]^2 dt = \int_0^{\tau} x^2(t) dt \quad (3-24)$$

biçiminde verilmektedir.

3.5. OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNDE İŞARETLER VE BU İŞARETLERE İLİŞKİN OPTİMAL PREDİKTÖRLERİN BULUNMASI

Otomatik kontrol sistemlerini iki bölüme ayırmak mümkündür:

1. Sürekli kontrol sistemleri,
2. Ayırık kontrol sistemleri.

Sürekli kontrol sistemlerinde işaretler bütün t zamanlarında vardır ve süreklidir. Bunlarda işaret bazen,

bir taşıyıcı işarete de modüle edilmiş olabilir. Ayrık kontrol sistemlerinde işaret bir örnek alıcı ile sistemden belirli zaman aralıklarında alınarak bir tutma devresine iletilir. İki örnek alma anı arasındaki zaman aralığında tutma devresi belleğinde işaret bekltilerek sürekli kontrol devresine uygulanır. Bundan dolayı kontrolörün girişinde işaret ve işaretin katlı türevleri örnek alma anlarında süreksizdir.

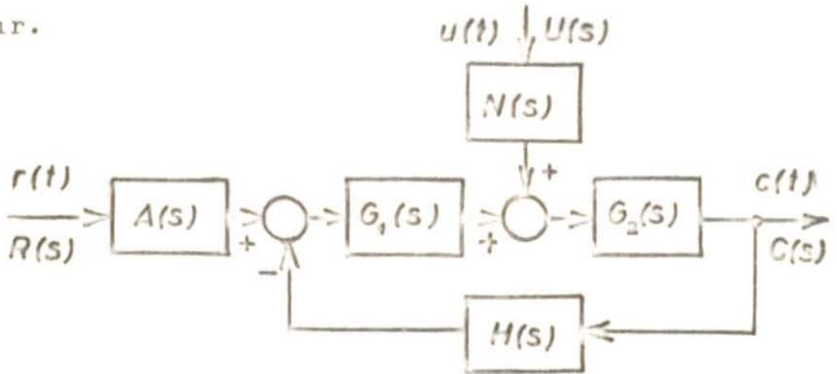
Bu çalışmada incelenen ideal ve optimal prediktörlerin sürekli kontrol sistemlerinde kullanılması öngörülmüştür. Sürekli kontrol sistemlerinde işaretler ve bu işaretlerin katlı türevleri, işaretlerin sisteme ilk uygulanma anları dışında, süreklidir.

Bir sürekli kontrol sisteminde Şekil 29'da görüldüğü gibi $r(t)$ referans (giriş) işareti, $c(t)$ kontrol (çıkış) işareti, $u(t)$ bozucu işaret olmak üzere üç ayrı işaret vardır. Sisteme etkiyen $r(t)$ referans ve $u(t)$ bozucu işaret belirgin ya da olasıl bir işaret olabilir. Eğer işaret belirgin ise bu işarete ilişkin denklem, eğer işaret olasıl ise, istatistiksel bir büyüklük olan işarete ilişkin korelasyon fonksiyonu, bilinmelidir. Korelasyon fonksiyonu bir korelatörle ölçülerek bulunabilir.

Belirgin işaretlerin sisteme $t=0$ zamanında uygulandığı kabul edildiğinde bu işaretler, A reel bir sabit olmak üzere, $A(1(t))$ basamak biçimi fonksiyonlarla belirtilir. Belirgin bir işarete ilişkin optimal prediktör (3-21)

denkleminde ya da işaretin güç dağılımı hesaplanarak (3-22) denkleminde bulunur. Gerek önerdiğimiz yoldan gerekse Wiener-Kalman yönteminin uygulanması sonucu elde edilen optimal prediktörlerin transfer fonksiyonları birbirlerine eşittir.

Olasıl işaretlere ilişkin optimal prediktörler sadece (3-22) denkleminde yararlanılarak belirlenir. Bu tür işaretleri $\phi_{xx}(s)$ güç dağılımları belirlemektedir. Bu bölümün sonunda verilmiş olan "optimal prediktörler" tablosundan yararlanmak istenirse, belirgin işaretlerde işaretin denklemi $x(t)$ ya da bu fonksiyonun $X(s)$ Laplace dönüşümünün karşılığındaki optimal prediktör, olası işaretlerde $X(s)$ sütununda $\phi_{xx}^+(s)$ fonksiyonunun karşılığındaki optimal prediktör transfer fonksiyonu alınmalıdır.



Şekil 29

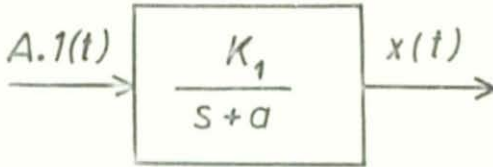
Buradaki incelememizde bu tür işaretlere Bode-Shannon şeması ve (3-21) denkleminde verilen nedensel optimal prediktör ifadesi uygulanarak bunlara ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonları hesaplanmıştır.

5.1 BİRİNCİ DERECEDEDEN BİR SİSTEMİN KARŞILIĞINA İLİŞKİN OPTİMAL PREDİKTÖR

Genel olarak birinci dereceden bir sistemin $A_1(t)$ basamak fonksiyonu biçimindeki giriş işaretine karşılığı s -domeninde, $K = K_1 \cdot A$ olmak üzere,

$$X(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (3-25)$$

biçimindedir (Şekil 30).



Şekil 30

Bu tür bir işarete Bode-Shannon şemasını uygularsak:

a) İşaretin güç dağılımı

$$\begin{aligned} \phi_{xx}^-(s) &= \phi_{xx}^+(s) \cdot \phi_{xx}^-(s) = X(s)X(-s) \\ &= \frac{K}{s(s+a)} \cdot \frac{K}{-s(-s+a)} = \frac{K^2}{s^2(s^2 - a^2)} \end{aligned}$$

biçimindedir.

b) Güç dağılımından ya da $X(s)$ 'den işaretin zaman domenindeki karşılığı şöyle bulunur:

$$\psi_{xx}^+(t) = x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(s+a)}\right\} = \frac{K}{a}(1 - e^{-at}).$$

- c) İşaretin prediksyon zamanı τ kadar ötelenmesi sonucu

$$g(t) = \psi_{xx}^+(t+\tau) = \frac{K}{a}(1-e^{-a(t+\tau)}), \quad t > 0$$

elde edilir.

- d) Laplace transformu

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{K}{a} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-a\tau}}{s+a} \right]$$

biçimindedir.

- e) Buna göre optimal prediktörün transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{G(s)}{\Phi_{xx}^+(s)} = \frac{\frac{K}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-a\tau}}{s+a} \right)}{\frac{K}{s(s+a)}} \\ &= 1 + \frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau})s = 1 + \alpha s \end{aligned} \quad (3-26)$$

biçimindedir; burada $\alpha = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau})$ 'dir.

Eğer Bode-Shannon şeması yerine doğrudan doğruya (3-21) denklemini uygularsak

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{\int_{\tau}^{\infty} x(\lambda) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda}{X(s)} = \frac{s(s+a)}{a} \int_{\tau}^{\infty} \frac{K}{a} (1 - e^{-a\lambda}) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda \\ &= 1 + \frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau})s \end{aligned} \quad (3-27)$$

elde ederiz. Bu, Bode-Shannon şeması ile bulunan sonucun aynıdır.

Elde ettiğimiz sonuçları şöyle yorumlayabiliriz:

1. Bode-Shannon şeması, işaretin güç dağılımı bilindiği ve bu dağılım rasyonel bir fonksiyon olarak ifade edilebildiği hallerde, özellikle olası işaretlerde kullanılır. Buna karşılık belirgin işaretlerin prediksyonunda (3-21) nedensel optimal prediktör formülünü doğrudan doğruya uygulama olanağı vardır.
2. Elde edilen prediktör sadece hesaplanan $x(t)$ işareti için optimal çözüm verir. İstatistiksel özellikleri bilinmeyen işaretlerde ideal prediktör yaklaşığı kullanılmalıdır.
3. Bulunan optimal prediktör, sisteme uygulanan basamak biçimi fonksiyonun genliği A ve sistem kazancı K_1 'den bağımsızdır.
4. Eğer $\tau = 0$ ise optimal prediktörün transfer fonksiyonu $G_0(s) = 1$ 'dir. Bu durumda prediktörün çıkış işareti giriş işaretine eşit olur.
5. Eğer τ çok büyük ise ideal prediktör $G_0(s) = 1 + \frac{s}{a}$ olacağından prediktörün karşılığı

$$Y_0(s) = X(s) \cdot G_0(s) = \frac{K}{s(s+a)} \cdot \frac{s+a}{a} = \frac{K}{as}$$

ve

$$y_0(t) \approx x(t+\tau) = \frac{K}{a}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda prediktör çıkışı işaretin alacağı son değeri vermektedir.

6. (2-24) denklemine göre prediksyon hatası

$$e_{p2} = \int_0^T x^2(t) dt = \int_0^T \frac{K^2}{a^2} (1 - e^{-at})^2 dt \quad (3-28)$$

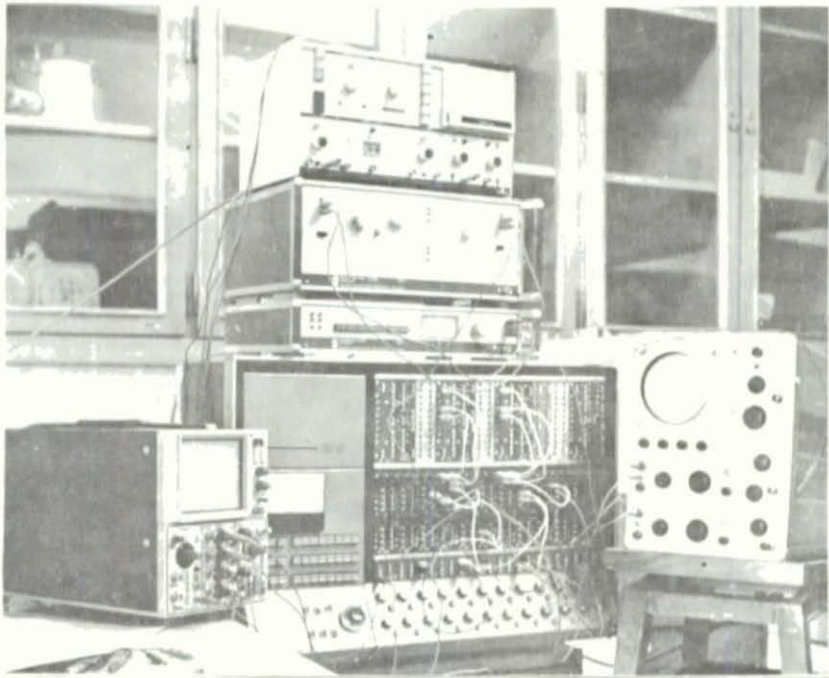
$$= \frac{K^2}{2a^3} (2aT - 3 + 4e^{-aT} - e^{-2aT})$$

olarak hesaplanır.

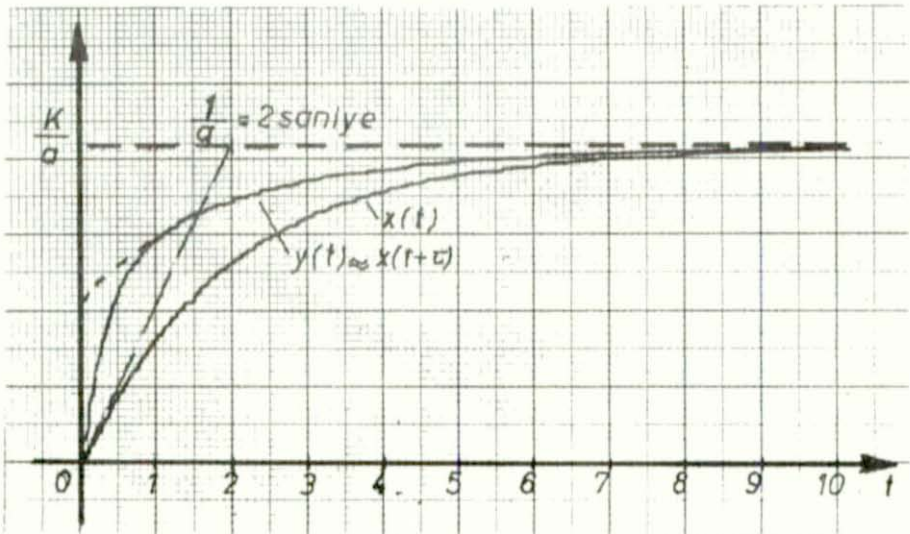
7. Kürsümüz kontrol l aboratuarında yapılan deneylerde Resim 31'de g or len düzen kurulmuştur. Sistem modeli ve türevalıcı elemanlar, resimde görüldüğü gibi, bir analog komputer üzerinde ger ekleştirelmіştir. Analog komputerin hatası ortalama %5 civarındadır. Yazıcı olarak bir bellekli skop ve x-y yazıcısından yararlanılmıştır. Analog komputerin üzerinde bir beyaz gürültü generator , bir pasif filtre ve korelasyon değerini ölçen bir alet görülmektedir. Korelat r n hatası, frekansı 0 ile 1MHz arasındaki bütün işaretler için, %4'd r.

Zaman sabiti $1/a = 2$ saniye olan bir sistemin, basamak biçimi giriş işaretine yanıtı eğer $\tau = 1,5$ saniye kadar değeri kestirilecekse, (3-26) denkleminde bu işarete ilişkin optimal prediktörün transfer fonksiyonu $G_o(s) \approx 1+s$ olarak hesaplanır.

Birinci dereceden bir sistem ve bu sistemin vereceği karşılığa göre geliştirilen optimal prediktörün modeli analog komputer üzerinde kurulduktan sonra, predik



Resim 31



Şekil 32

töre uygulanan $x(t)$ işareti ve prediktörün çıkışında elde edilen $y(t) = x(t+\tau)$ işareti x-y yazıcısında aynı eksen üzerinde çizilmiştir (Şekil 32).

Çıkış işaretinin başlangıcındaki hata türevalıcılardan ideal olmamasından ve x-y yazıcısının ataletinden ileri gelmektedir.

Eğer Şekil 30'daki sisteme güç dağılımı A olan bir beyaz gürültü uygulanırsa, sistem çıkışındaki $x(t)$ işaretinin güç dağılımı (3-10) denklemine göre

$$\phi_{xx}(s) = G(s)G(-s)A = \frac{AK_1^2}{a^2 - s^2} \quad (3-29)$$

olur. Bu işaretin özkorelasyonu

$$\psi_{xx}(v) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{AK_1^2}{a^2 - s^2} \right\} = Ke^{-a|v|}$$

olarak bulunur; burada $K = AK_1^2 / (2a)$ 'dir. Bu özkorelasyonun bağımsız v değişkeninin pozitif değerlerine ilişkin parçası

$$[\psi_{xx}(v)]_+ = Ke^{-av},$$

korelatörden ölçülmüş biçimiyle Şekil 33'de görülmektedir (bu örnekte $1/a = 3$ saniyedir).

Dağılımı (3-29) denkleminde verilen işarete

$$\phi_{xx}^+(s) = \frac{\sqrt{A}K_1}{s+a}$$

olduğuna göre, buna ilişkin optimal prediktör bu

bölümün sonunda verilmiş olan tablodan

$$G_o = e^{-a\tau}$$

olarak bulunur. Buna göre prediktör çıkışındaki $y(t)$ işaretinin güç dağılımı

$$\phi_{yy}(s) = \frac{AK_1^2 e^{-2a\tau}}{a^2 - s^2} = e^{-2a\tau} \phi_{xx}(s)$$

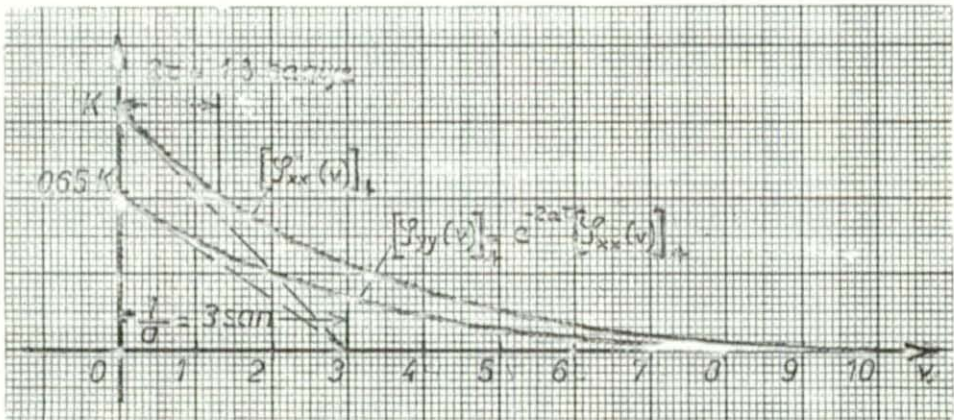
ve özkorelasyonunun $v > 0$ değerlerine ilişkin kısmı

$$[\psi_{yy}(v)]_+ = e^{-2a\tau} [\psi_{xx}(v)]_+$$

olarak bulunur. Eğer $\tau = 0,65$ saniye alınırsa

$$[\psi_{yy}(v)]_+ = 0,65 [\psi_{xx}(v)]_+$$

elde edilir. Prediktör çıkışındaki özkorelasyon giriş işaretinin özkorelasyonuna göre şimdi $v > 0$ için $2\tau = 1,3$ saniye kadar negatif v yönünde ötelenmiştir.



Şekil 33

Eğer $\psi_{yy}^+(v)$ hesaplanırsa $\psi_{xx}^+(v) = \sqrt{K}e^{-av}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\psi_{yy}^+(v) &= \mathcal{L}^{-1}\{\psi_{yy}^+(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\tau}\psi_{xx}^+(s)\} = e^{-a\tau}\psi_{xx}^+(v) \\ &= e^{-a\tau}\sqrt{K}.e^{-av} = \sqrt{K}.e^{-a(v-\tau)}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\psi_{yy}^+(v)$ 'nin $\psi_{xx}^+(v)$ 'ye göre τ kadar negatif v yönünde ötelenmiş olduğu açıkça görülmür. Ancak uygulamada $[\psi_{yy}(v)]_+$ 'nin ölçülmesi $\psi_{yy}^+(v)$ 'nin ölçülmesinden daha kolay olduğundan $[\psi_{yy}(v)]_+$ 'nin ölçülmesi yolunu tuttuk.

3.5.2

İKİNCİ DERECEDEDEN SİSTEMİN KARŞILILIĞINA İLİŞKİN OPTİMA PREDİKTÖR

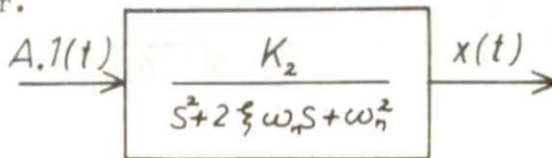
İkinci dereceden bir sistemin transfer fonksiyonu

$$\frac{K_2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-30)$$

olarak belirlenir; burada ξ sistemin sönüm oranı ve ω_n sistemin doğal frekansıdır. Şekil 34'de görüldüğü gibi sisteme basamak biçimi bir $A.1(t)$ işareti uygulanırsa sistemin s -domeninde çözümü

$$X(s) = \frac{K_2 A}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3-31)$$

biçimindedir.



Şekil 34

$\sigma = \xi \omega_n$, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, $k = 1/\sqrt{1 - \xi^2}$, $\phi = \arctan \sqrt{1 - \xi^2}/(-\xi)$
ve $K = K_2 A$ kısaltmaları ile optimal prediktöre ilişkin
transfer fonksiyonu bölümün sonundaki tablodan

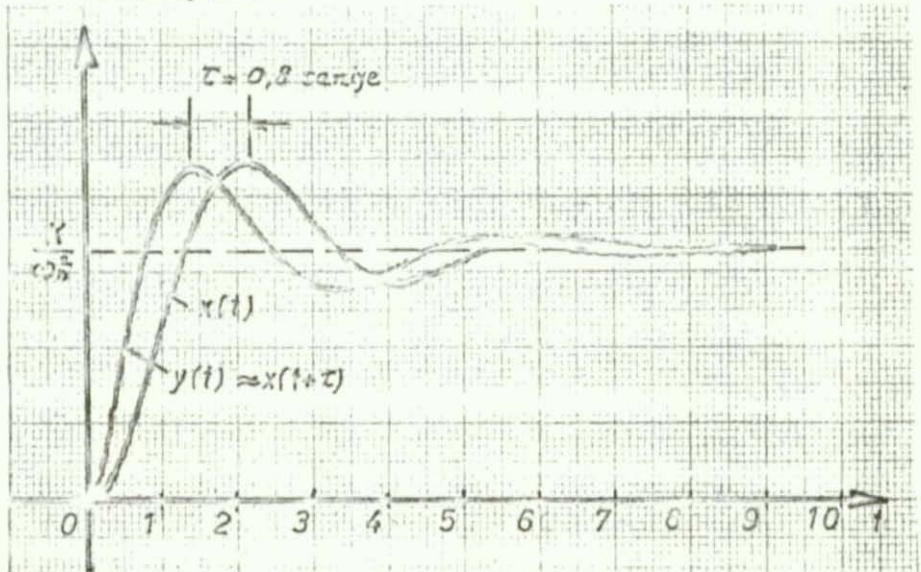
$$G_0(s) = 1 + \alpha s + \beta s^2 \quad (3-32)$$

olarak bulunur; burada

$$\alpha = [2\sigma + \sigma k e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau - \phi) + \omega k e^{-\sigma\tau} \cos(\omega\tau - \phi)] / \omega_n^2$$

$$\beta = [1 + k e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau - \phi)] / \omega_n^2$$

'dır. Eğer ikinci dereceden sistemde $\xi = 0,3$, $\omega_n = 1,74$ ve
teğeri kestirilmek istenen zaman $\tau = 0,3$ saniye ise (3-32)
denkleminde $\alpha = 0,73$ ve $\beta = 0,58$ olarak hesaplanır. Pre-
diktör girişi $x(t)$ ve prediktör çıkışı $y(t) \approx x(t + \tau)$
işaretleri x - y yazıcısında Şekil 35'te görüldüğü biçimde
elde edilmiştir.



Şekil 35

Eğer şekil 34'de ki ikinci dereceden sisteme güç dağılımı A olan bir beyaz gürültü uygulanırsa sistem çıkışındaki olasıl $x(t)$ işaretinin güç dağılımı (2-10) denkleminde göre

$$\phi_{xx}(s) = G(s)G(-s)A = \frac{AK_2^2}{s^4 + 2(\omega_n^2 - 2\sigma^2)s^2 + \omega_n^4}$$

olur. Özkorelasyonun pozitif v değerlerine ilişkin güç dağılımı

$$\left[\phi_{xx}(s) \right]_+ = \frac{AK_2^2}{4\sigma\omega_n^2} \cdot \frac{(s+2\sigma)}{(s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2)}$$

biçimindedir. Eğer güç dağılımını $\phi_{xx}(s) = \phi_{xx}^+(s) \cdot \phi_{xx}^-(s)$ biçimde çarpanlara ayırırsak

$$\phi_{xx}^+(s) = \frac{\sqrt{AK_2}}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2}$$

olduğuna göre, optimal prediktörün transfer fonksiyonu bölümün sonundaki tablodan

$$G_o(s) = \frac{e^{-\sigma T}}{\omega} (s \sin a + \omega \cos a + \sigma \sin a)$$

olarak bulunur. Buna göre $a = \omega \cos a + \sigma \sin a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(s) &= G_o(s)G_o(-s)\phi_{xx}(s) \\ &= \frac{e^{-2\sigma T} AK_2^2 (a^2 - s^2 \sin^2 \omega T)}{\omega^2 [s^4 + 2(\omega_n^2 - 2\sigma^2)s^2 + \omega_n^4]} = \frac{e^{-2\sigma T} (a^2 - s^2 \sin^2 \omega T)}{\omega^2} \phi_{xx}(s) \end{aligned}$$

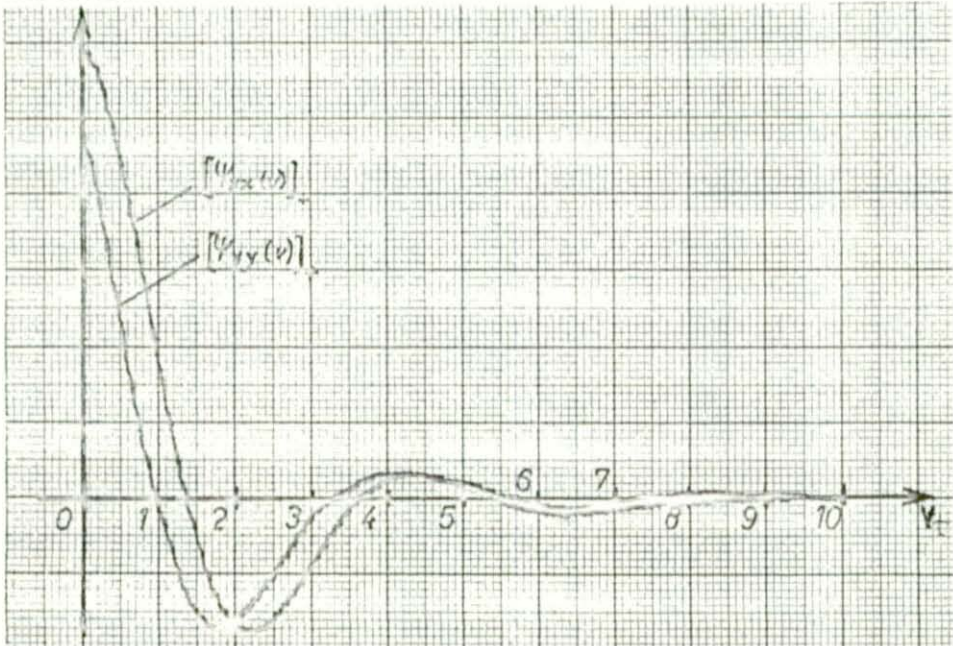
ve

$$[\phi_{yy}(s)]_+ = \frac{e^{-2\sigma\tau}}{\omega^2} \cdot \frac{(\omega_n^2 \sin^2 \omega\tau + a^2)s + 2\sigma a^2}{s+2\sigma} \cdot [\phi_{xx}(s)]_+$$

biçimindedir. Buna karşılık $\phi_{yy}^+(s)$ 'e ilişkin ifade

$$\phi_{yy}^+(s) = \frac{e^{-\sigma\tau}}{\omega} (a+s \sin \omega\tau) \phi_{xx}^+(s)$$

biçimindedir. Korelatörde $\xi = 0,4$, $\omega_n = 3,35 \text{ san}^{-1}$ ($\sigma = 1,34 \text{ san}^{-1}$, $\omega = 3 \text{ san}^{-1}$) sistemi için ve $\tau = 0,2$ saniye olarak ölçdüğümüz $[\psi_{xx}(v)]_+$ ve $[\psi_{yy}(v)]_+$ fonksiyon değerleri Şekil 36'da görülmektedir. Prediktör çıkışına ilişkin özkorelasyon değerleri giriş işaretine ilişkin özkorelasyon değerlerine göre yaklaşık $2\tau = 0,4$ saniye kadar negatif v yönünde ötelenmiş olarak elde edilir.



Şekil 36

3.5.3. GENEL İNCELEME

Kontrol sistemlerinde işaretler, kararlı lineer dinamik kontrol sistemlerinin, sınırlı giriş işaretlerine yanıtı olarak elde edilir. Wiener-Khintchine teoremi uyarınca, Şekil 26'da belirlendiği gibi, sistemin giriş işaretine de, girişine beyaz gürültü uygulanmış, transfer fonksiyonu işaretin Laplace transformuna eşit bir lineer dinamik sistemden elde edilmiş gözüyle bakılabilir. Buna göre kararlı lineer bir dinamik sistemin beyaz gürültüye yanıtı olarak elde edilen $x(t)$ işaretinin Laplace transformu $X(s)$, (1-37) denkleminde göre, $n > m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{K_b [s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \\
 &= \frac{K_b [s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]}{\prod_{i=1}^n (s + \alpha_i)}
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

biçiminde s 'in rasyonel bir fonksiyonudur.

α_i kutupları tek katlı olduğu kabul edilirse işaretin Laplace transformu

$$X(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(s + \alpha_i)}$$

biçiminde belirlenir. Bu tür işaretlerin zaman domenindeki karşılığı

$$x(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-\alpha_i t}$$

biçimindedir; burada α_i katsayıları kompleks olabilir.

Bu tür işaretlere optimal çözümü veren (3-21) denklemine

uygularsak

$$G_o(s) = \frac{\int_{\tau}^{+\infty} x(\lambda) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda}{X(s)} = \frac{\int_{\tau}^{+\infty} \sum_{i=1}^n k_i e^{-\alpha_i \lambda} e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda}{X(s)} \quad (3-34)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n k_i e^{\tau s} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-(s+\alpha_i)\lambda} d\lambda}{X(s)} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \frac{e^{-\tau \alpha_i}}{(s+\alpha_i)}}{X(s)}$$

elde edilir. Bu ifadeyi

$$G_o(s) = \frac{K_b K_{\beta} (s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0)}{\prod_{i=1}^n (s + \alpha_i)} \cdot \frac{1}{K_b (s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)} \cdot \prod_{i=1}^n (s + \alpha_i)$$

$$= K_{\beta} \frac{(s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0)}{(s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)} \quad (3-35)$$

biçiminde kısaltmak mümkündür. Benzer biçimde j katlı α_i kutuplarını da

$$\sum_{i=1}^j \frac{k_i (s^{i-1} + \gamma_{i-2} s^{i-2} + \dots + \gamma_1 s + \gamma_0)}{(s + \alpha_i)^i}$$

biçimine getirmek mümkündür. Sonuçta (3-35) denklemi optimal prediktörü belirlemektedir.

Bu sonucu aşağıdaki teoremle belirleyebiliriz:

T e o r e m 7 Laplace transformu s 'in rasyonel bir fonksiyonu olan

$$X(s) = \frac{K_b (s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3-33)$$

biçimindeki $x(t)$ işaretlerine ilişkin optimal prediktörün transfer fonksiyonu

$$G_o(s) = \frac{K_\beta (s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0)}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (3-35)$$

biçimindedir. Burada:

- İşaretin payındaki ifade, optimal prediktörün paydasındaki ifadeye eşit;
- Optimal prediktörde payın derecesi en çok $n-1$, paydanın derecesi m ;
- Optimal prediktör transfer fonksiyonu, işaret kazancı K_b 'dan bağımsızdır.

Kontrol sistemlerinde rastlanan işaretlere ilişkin optimal prediktörlerin transfer fonksiyonları ilişikteki tabloda verilmiştir.

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_0(s)$
A	$\frac{A}{s}$	1
A t	$\frac{A}{s^2}$	$1+\tau s$
A t^n n yamsayı	$\frac{An!}{s^{n+1}}$	$\sum_{v=0}^n \frac{\tau^v}{v!} s^v = 1+\tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^n s^n}{n!}$ ideal prediktör yaklaşığı
$K e^{-at}$	$\frac{K}{s+a}$	$e^{-a\tau}$ sabit
$\frac{K}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{K}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)} [(e^{-a\tau} - e^{-b\tau})s + be^{-a\tau} - a e^{-b\tau}]$
$\frac{K t e^{-t/\tau}}{T^2}$	$\frac{K}{(1+\tau s)^2}$	$1 + \frac{\tau}{T} + s\tau$
$\frac{1}{2T^3} (K t^2 e^{-t/\tau})$	$\frac{K}{(1+\tau s)^3}$	$\frac{1}{2T^2} (\tau^2 + 2\tau T + 2T^2) + \frac{\tau}{T} (\tau + T)s + \frac{\tau^2}{2} s^2$
$K(1 - e^{-t/\tau})$	$\frac{K}{s(1+\tau s)}$	$1 + T(1 - e^{-T/\tau})s$
$K(1 - \frac{t+T}{T} e^{-t/\tau})$	$\frac{K}{s(1+\tau s)^2}$	$1 + [2T(1 - e^{-T/\tau}) - e^{-T/\tau}]s + T[T - (\tau + T)e^{-T/\tau}]s^2$
$K[t + (a-T)(1 - e^{-t/\tau})]$	$\frac{K(1+aT)}{s^2(1+\tau s)}$	$1 + (a+\tau)s + [T\tau + T(a-T)(1 - e^{-T/\tau})]s^2$

Not: işaretin $t=0$ anında uygulandığı kabul edilir.

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_0(s)$
$K[t-2T+(t+2T)e^{-t/T}]$	$\frac{K}{s^2(1+Ts)^2}$	$1+Ts + [2\tau T - 3T^2 + (3T^2 + \tau T)e^{-\tau/T}]s^2 + T^2[\tau - 2T + (\tau + 2T)e^{-\tau/T}]s^3$
$A \sin \omega_n t$	$\frac{A\omega_n}{(s^2 + \omega_n^2)}$	$\cos \omega_n T - \frac{\sin \omega_n T}{\omega_n} s$
$A \cos \omega_n t$	$\frac{As}{(s^2 + \omega_n^2)}$	$\cos \omega_n T - \frac{\omega_n \sin \omega_n T}{s}$
$A \sin(\omega_n t + \varphi)$	$\frac{A(\omega_n \cos \varphi + \sin \varphi s)}{s^2 + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n \cos(\omega_n T + \varphi) + \sin(\omega_n T + \varphi)s}{\omega_n \cos \varphi + \sin \varphi s}$
$A(1 - \cos \omega_n t)$	$\frac{A\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$	$1 + \frac{\sin \omega_n T}{\omega_n} s + \frac{(1 - \cos \omega_n T)}{\omega_n^2} s^2$
$\frac{A}{2\omega_n} t \sin \omega_n t$	$\frac{As}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n s} \left[\tau \sin \omega_n T s^3 + (\sin \omega_n T + T\omega_n \cos \omega_n T) s^2 + (2\omega_n \cos \omega_n T + T\omega_n^2 \sin \omega_n T) s + T\omega_n^3 \cos \omega_n T - \omega_n^2 \sin \omega_n T \right]$
$\frac{K}{\omega} e^{-\zeta t} \sin \omega t$	$\frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{e^{-\zeta T}}{\omega} (s \sin \omega T + \omega \cos \omega T + \zeta \sin \omega T)$ $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$
Kısaltmalar: $\zeta = \zeta \omega_n$, $\omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$, $K = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$		

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_o(s)$
$\frac{K}{\omega_n^2} \left[1 - k e^{-\sigma t} \sin(\omega t - \varphi) \right]$	$\frac{K}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = 1 + \alpha s + \beta s$ $\alpha = \frac{1}{\omega_n^2} \left[2\sigma + \sigma k e^{-\sigma t} \sin(\omega t - \varphi) + \omega k e^{-\sigma t} \cos(\omega t - \varphi) \right]$ $\beta = \frac{1}{\omega_n^2} \left[1 + k e^{-\sigma t} \sin(\omega t - \varphi) \right]$
$K \left[\frac{T e^{-\varphi/T}}{d^2} + e^{-\sigma t} \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\omega d} \right]$	$\frac{K}{(1+Ts)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = \frac{a + bs + cs^2}{d^2 \omega}$ $a = \omega_n^2 \omega T^2 e^{-\varphi/T} + e^{-\sigma t} d m$ $b = 2\sigma \omega T^2 e^{-\varphi/T} + e^{-\sigma t} d (T m + \sin \varphi)$ $c = \omega T^2 e^{-\varphi/T} + T \sin \varphi e^{-\sigma t} d$ $m = \sigma \sin \varphi + \omega \cos \varphi$ $\varphi = \omega t - \Psi$

Kısaltmalar: $\sigma = \xi \omega_n$, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$

$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi}$, $d = \sqrt{1 - 2\sigma T + T^2 \omega_n^2}$, $\Psi = \arctg \frac{T \omega}{1 - T \sigma}$

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_0(s)$
$K k e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma)$	$\frac{K s}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$	$G_0(s) = \frac{k e^{-\delta t}}{s} (\sin \beta s + \zeta \sin \beta + \omega \cos \beta)$ $\beta = \omega \tau + \gamma$
$\frac{K}{\omega_n^2} [1 + p e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma)]$	$\frac{K(1 + as)}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$	$G_0(s) = \left\{ \omega_n^2 + [2\zeta + p e^{-\delta t} (\zeta \phi^* + \omega \cos \phi)] s \right. \\ \left. + (1 + p e^{-\delta t} \sin \phi) s^2 \right\} \frac{1}{\omega_n^2 (1 + as)}$ $\phi^* = \omega \tau + \gamma$
$\frac{K}{\omega_n^2} [1 + m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi) + n e^{-t/\tau}]$	$\frac{K(1 + as)}{s(1 + Ts)(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$	$G_0(s) = \frac{\omega_n^2 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}{\omega_n^2 (1 + as)}$ $b_1 = T \omega_n^2 + 2\zeta m e^{-\delta t} q + T n e^{-t/\tau} \omega_n^2$ $b_2 = 1 + 2\zeta T + m e^{-\delta t} (T q + \sin \theta) + 2\zeta$ $b_3 = T + T n e^{-\delta t} \sin \theta + T n e^{-t/\tau}$ $m = \sqrt{\frac{P}{1 - 2T\zeta + T^2 \omega_n^2}}, n = \frac{\omega_n^2 T(a - \tau)}{1 - 2T\zeta + T^2 \omega_n^2}$
Kisaltmalar: $\zeta = \frac{\delta}{\omega_n}, \omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, k = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, p = k \sqrt{1 - 2a\zeta + a^2 \omega_n^2}, \theta = \omega \tau + \phi$ $\gamma = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}, \psi = \arctan \frac{a\omega}{1 - a\delta} - \gamma, \phi = \psi - \arctan \frac{T\omega}{1 - T\delta}, q = \zeta \sin \theta + \omega \cos \theta$		

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_o(s)$
$\frac{K}{\omega_n} \cdot n \cdot e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{K(1+as)}{s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2}$	$G_o(s) = \frac{p_1 + p_2 s}{\omega_n^2(1+as)}$, $\theta = \omega T + \varphi$ $p_1 = m e^{-\sigma T} \cdot n$, $p_2 = m e^{-\sigma T} \sin \theta$
$\frac{K}{\omega_n^2} [m^* e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi^*) + n e^{-t/\tau}]$	$\frac{K(1+as)}{(1+Ts)(s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = \frac{a_1 + a_2 s + a_3 s^2}{\omega_n^2(1+as)}$, $\theta^* = \omega T + \varphi^*$ $a_1 = n e^{-\tau/T} \omega_n^2 + m e^{-\sigma T} \cdot q$, $q = \sigma \sin \theta^* + \omega \cos \theta^*$ $a_2 = 2n e^{-\tau/T} \sigma + m e^{-\sigma T} T q + m e^{-\sigma T} \sin \theta^*$ $a_3 = n e^{-\tau/T} + m e^{-\sigma T} \cdot T \cdot \sin \theta^*$
$K \left[\frac{T \omega_n^2 e^{-t/\tau}}{d^2} + \frac{\omega_n}{d} \sin(\omega_n t - \phi) \right]$	$\frac{K}{(1+Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = \frac{b_1 + b_2 s + b_3 s^2}{d^2 \omega_n}$, $d = \sqrt{1 + T^2 \omega_n^2}$ $b_1 = \omega_n^3 T^2 e^{-\tau/T} + d \omega_n \cos \delta$, $\delta = \omega T - \phi$ $b_2 = d(T \omega_n \cos \delta + \sin \delta)$, $\phi = \arctan T \omega_n$ $b_3 = \omega_n T^2 e^{-\tau/T} + T \sin \delta \cdot d$
Kısaltmalar: $\sigma = \xi \omega_n$, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, $\varphi = \arctan \frac{a \omega}{1 - a \sigma}$, $m = \sqrt{\frac{1 - 2a\sigma + a^2 \omega_n^2}{1 - \xi^2}}$ $\varphi^* = \varphi - \arctan \frac{T \omega}{1 - T \omega}$, $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}$, $m^* = \frac{\omega_n \cdot m}{\sqrt{1 - 2T\sigma + T^2 \omega_n^2}}$, $n = \frac{(T - a) \omega_n^2}{1 - 2T\sigma + T^2 \omega_n^2}$		

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_o(s)$
$\frac{K}{\omega_n^2} \left[\frac{1 - T^2 \omega_n^2 e^{-t/\tau}}{1 - 2\zeta T + T^2 \omega_n^2} + \frac{e^{-\zeta t} \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 - \zeta^2 (1 - 2\zeta T + T^2 \omega_n^2)}} \right]$	$\frac{K}{s(1+Ts)(s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3, \quad p = \zeta \sin \varphi + \omega \cos \varphi$ $a_1 = (\omega_n^2 T + 2\zeta - m \omega_n^2 + n p) / \omega_n^2$ $a_2 = (1 + 2\zeta T - 2mT\zeta + n \sin \varphi + n T p) / \omega_n^2$ $a_3 = [T(1 - m + n \sin \varphi)] / \omega_n^2, \quad \varphi = \omega T - \varphi$ $m = \frac{T^2 \omega_n^2}{1 - 2\zeta T + T^2 \omega_n^2} \cdot e^{-\zeta/\tau}, \quad n = \frac{e^{-\zeta/\tau}}{\sqrt{1 - \zeta^2 (1 - 2\zeta T + T^2 \omega_n^2)}}$
$\frac{K}{\omega_n^2} \left[1 + \frac{T \omega_n^2 (a - T)}{1 + T^2 \omega_n^2} e^{-t/\tau} + m \sin(\omega t + \phi) \right]$	$\frac{K(1 + as)}{s(1 + Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = \frac{\omega_n^2 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}{\omega_n^2 (1 + as)}$ $b_1 = T \omega_n^2 + m \omega_n \cos \theta + T e^{-\zeta/\tau} \omega_n^2$ $b_2 = 1 + m T \omega_n \cos \theta + m \sin \theta$ $b_3 = T + T m \sin \theta + T n e^{-\zeta/\tau}, \quad \theta = \omega t + \phi$ $m = \sqrt{\frac{1 + a^2 \omega_n^2}{1 + T^2 \omega_n^2}}, \quad n = \frac{T \omega_n^2 (a - T) e^{-\zeta/\tau}}{1 + T^2 \omega_n^2}$
<p>Kısaltmalar: $\zeta = \zeta \omega_n$, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} + \arctg \frac{T \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 + T\zeta}$ $\phi = \arctg a \omega_n - \arctg T \omega_n$</p>		

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_o(s)$
$\frac{K}{\omega_n^2} \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{c}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t - 2\psi) \right]$	$\frac{K}{s^2(s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = \frac{\omega_n^2 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}{\omega_n^2}$ $a_1 = \left(\tau - \frac{2\zeta}{\omega_n} \right) \omega_n^2 + 2\zeta, \quad \alpha = \omega\tau - 2\psi$ $a_2 = 2\zeta \left(\tau - \frac{2\zeta}{\omega_n} \right) + \frac{c}{\omega} \left(\zeta \sin \alpha + \omega \cos \alpha \right) + 1$ $a_3 = \tau - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{c}{\omega} e^{-\sigma\tau} \sin \alpha$
$K \left[t + (a - T_1 - T_2) + \frac{b - aT_1 + T_1^2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{b - aT_2 + T_2^2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right]$	$\frac{K(1 + as + bs^2)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$	$G_o(s) = \frac{1 + (\tau + a)s + ps^2 + qs^3}{1 + as + bs^2}$ $p = T_1 T_2 + (T_1 + T_2)(\tau + a - T_1 - T_2)$ $+ \frac{1}{T_1 T_2} \left[e^{-\tau/T_1} T_1 (b - aT_1 + T_1^2) - e^{-\tau/T_2} T_2 (b - aT_2 - T_2^2) \right]$ $q = T_1 T_2 (\tau + a - T_1 - T_2) + \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \left[e^{-\tau/T_1} (b - aT_1 + T_1^2) - e^{-\tau/T_2} (b - aT_2 + T_2^2) \right]$
<p>Kısaltmalar: $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n}$, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, $\psi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}$</p>		

İŞARET		PREDİKTÖR
$x(t)$	$X(s)$	$G_o(s)$
$\frac{K}{\omega_n^2} \left[m \sin(\omega_n t + \varphi) + n e^{-t/\tau} \right]$ $\varphi = \arctg a \omega_n - \arctg \tau \omega_n$	$\frac{K(1+as)}{(1+Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$G_o(s) = \frac{p_1 + p_2 s + p_3 s^2}{\omega_n^2 (1+as)}$ $p_1 = n e^{-\tau/T} \cdot T \omega_n^2 + m \omega_n \cos \theta, \quad \theta = \omega \tau + \varphi$ $p_2 = n e^{-\tau/T} (T \omega_n \cos \theta + \sin \theta)$ $p_3 = n e^{-\tau/T} \cdot T + i n T \sin \theta$ $m = \frac{\omega_n \sqrt{1+a^2 \omega_n^2}}{\sqrt{1+T^2 \omega_n^2}}, \quad n = \frac{\omega_n^2 (T-a)}{1+T^2 \omega_n^2}$
$\frac{K}{\omega_n^2} \left[t - T - \frac{2\xi}{\omega_n} + m e^{-t/\tau} + n e^{-\sigma t} \sin(\omega t - \varphi) \right]$ $\varphi = 2 \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} + \arctg \frac{T\omega}{1-T\sigma}$ $m = \frac{T^3 \omega_n^2}{1-2\sigma T + T^2 \omega_n^2}$ $n = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{1-2\sigma T + T^2 \omega_n^2}$	$\frac{K}{s^2(1+Ts)(s^2+2\zeta s+\omega_n^2)}$	$G_o(s) = (\omega_n^2 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4) / \omega_n^2$ $a_1 = T \omega_n^2 + 2\zeta + u \omega_n^2$ $a_2 = 2\zeta T + 1 + u T \omega_n^2 + 2\zeta u + m e^{-\tau/T} \cdot T \cdot \omega_n^2 + n e^{-\sigma T} (\zeta \sin \alpha + \omega \cos \alpha)$ $a_3 = T + 2\zeta u T + u + 2m e^{-\tau/T} + n \sin \alpha \cdot e^{-\sigma T}$ $a_4 = T u + T m e^{-\tau/T} + T n e^{-\sigma T}, \quad \omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ $u = \tau - T - \frac{2\xi}{\omega_n}, \quad \sigma = \xi \omega_n, \quad \alpha = \omega \tau - \varphi$

B Ö L Ü M IV

K A L M A N P R E D İ K T Ö R Ü

Bu dördüncü bölümde Kalman ve Bucy'nin 1960-61 yıllarında geliştirdikleri yeni bir prediktör modeli önceki bölümlerde önerilen prediktörlerle karşılaştırılacaktır. Temeli Wiener'in optimal prediktörüne dayanan bu prediktörde zamanla-değişmeme koşulu gereksiz kalmıştır. Wiener prediktöründe giriş ve çıkış büyüklüklerinin oranı olan transfer fonksiyonu kavramı kullanılırken Kalman prediktöründe sistemin durum değişkenlerinden oluşan durum denklemleri kullanılır (14,15,16). Yöntemin açıklanmasından görülebileceği gibi prediktörün elde edilmesi oldukça kolay olup incelenmiş olan ideal ve optimal prediktörlerin özelliklerine ışık tutacak niteliktedir. Wiener'in elde ettiği sonuçların çoğu Kalman'ın modern metodu ile daha kısa ve kolay bir yoldan tekrar tanıtlanmıştır.

Biz incelememize Kalman'ın metodunu iki nedenden dolayı getirmeyi doğru bulduk:

- a) Kalman'ın yeni modeli sistem teorisinde çok yeni bir aşama olup, konusu prediktörler olan bu doktora

tezinde incelenmemesi eksiklik olurdu.

- b) Biz Kalman modelini uygulayan araştırmaların tersine, metodu ğimdiye kadar uygulanmamış olan saf prediksiyon olayına uyguladık. Birinci ve ikinci dereceden sistem karşılıklarına ilişkin Kalman prediktörlerini hesaplayarak ideal prediktöre ilişkisini ve Wiener optimal prediktörüne eşdeğerliğini göstermiş olduk (12).

4.1 SİSTEMLERİN DURUM DENKLEMLERİYLE BELİRLENMESİ

Bir sistem modeli giriş ve çıkış büyüklükleri arasındaki ilişkiyi belirten transfer bağantısı ile belirlendiği gibi, durum değişkenlerine ilişkin durum denklemleriyle de belirlenebilir. Kalman - Bucky'nin prediktörü bu yeni modele göre geliştirilmiştir (14,15,16,17,18).

Modern Kalman modelinde sistemin, $-\infty < t < +\infty$ olmak üzere,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (4-1)$$

biçiminde bir vektör diferansiyel denklemiyle belirlenir. Serbestlik derecesi n olan bir sistem için (4-1) denklemi, $i = 1, \dots, n$ alınarak,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1(t), \dots, u_m(t), t) \quad (4-2)$$

biğiminden n tane birinci dereceden basit diferansiyel denklem takımına eşdeğerdir. Burada $\vec{x}(t)$ vektörü

sistemin durum vektörü, x_i vektörü bileşenleri sistemin durum değişkenleri, $\vec{u}(t)$ vektörü sistemin kontrol ya da giriş büyüklüğü, $u_i(t)$ bileşenleri ise sistemin kontrol değişkenleridir. (4-1) denklemi durum değişkenlerindeki değişim kuralını bir $\vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$ fonksiyonu ile belirtmektedir.

Eğer bütün t değerleri için $\vec{u}(t) \equiv 0$ ise, (4-1) denklemi

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (4-3)$$

serbest sistem denklemine dönüşür. (4-3) denkleminin çözümü $t \geq 0$ olmak üzere

$$\vec{x}(t) = \vec{\phi}(t; \vec{x}_0, t_0) \quad (4-4)$$

biçimindedir. Burada $\vec{\phi}(t; \vec{x}_0, t_0)$ sistemin geçiş fonksiyonu olup, \vec{x}_0 vektörü, sistemin t_0 başlangıç zamanındaki başlangıç durumunu belirler.

Zamana göre değişimi sürekli olan dinamik bir sisteme ilişkin geçiş fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları gerçekleştirmelidir (Şekil 37):

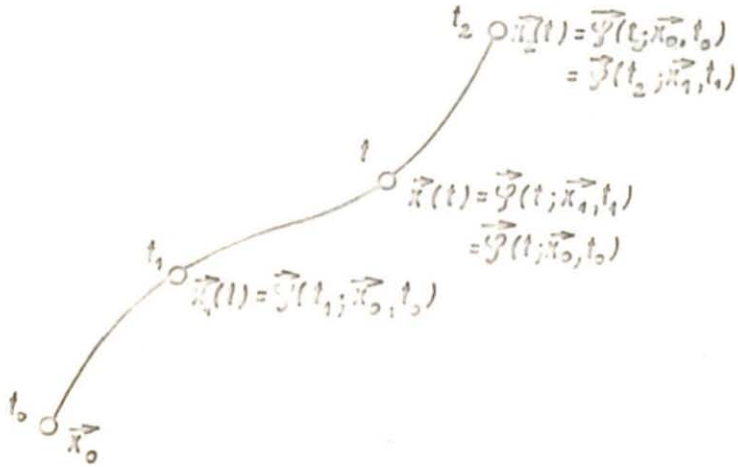
a) Başlangıç koşuluna göre bütün \vec{x}_0 ve t_0 değerleri için

$$\vec{\phi}(t_0; \vec{x}_0, t_0) = \vec{x}_0 \quad \text{'dır.} \quad (4-5)$$

b) Varlık ve teklik koşuluna göre bütün \vec{x}_0 , t_0, t_1 ve t_2 değerleri için

$$\vec{\phi}(t_2; \vec{\phi}(t_1; \vec{x}_0, t_0), t_1) = \vec{\phi}(t_2; \vec{x}_0, t_0) \quad \text{'dır.} \quad (4-6)$$

- c) $\vec{\phi}$ bütün argümanlara göre süreklidir.
 d) $\vec{\phi}$ bütün \vec{x}_0 , t_0 ve t değerleri için tanımlanmıştır.



Şekil 37

Zamana göre değişimi sürekli olan dinamik sistemlerin özel durumları:

- a) Zamanla-değişmeyen sistemler: Zamanla-değişmeyen sistemlerde \vec{f} fonksiyonu bağımsız değişken t 'nin bir fonksiyonu değildir:

$$\vec{f}(\vec{x}(t); \vec{u}(t), t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)). \quad (4-7)$$

Bu durumda geçiş fonksiyonu bütün t_0 ve \vec{x}_0 değerleri için t zaman ötelemelerinden bağımsız olur:

$$\vec{\phi}(t; \vec{x}_0, t_0) = \vec{\phi}(t+\tau; \vec{x}_0, t_0+\tau). \quad (4-8)$$

- b) Lineer sistemler: Lineer sistemlerde \vec{f} fonksiyonu \vec{x} ve \vec{u} değişkenlerinin lineer bir fonksiyonudur.

Bu durumda

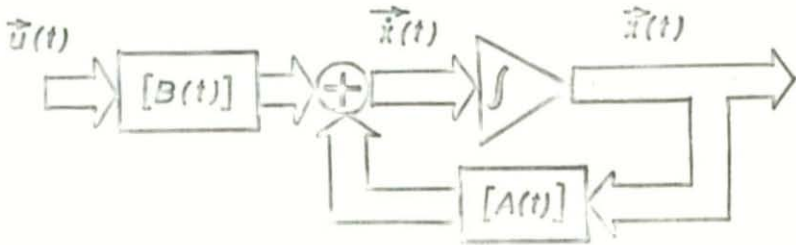
$$[A(t)] = \left[\frac{\delta f_i(t)}{\delta x_j} \right] \quad \text{ve} \quad [B(t)] = \left[\frac{\delta f_i(t)}{\delta u_j} \right]$$

olmak üzere sistemin denklemi (4-9)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A(t)] \vec{x}(t) + [B(t)] \vec{u}(t) \quad (4-10)$$

biçiminde yazılabilir. (4-10) denkleminde $[A(t)]$ bir $(n \times n)$ ve $[B(t)]$ bir $(n \times m)$ boyutlu zamana bağlı matristir.

Linear bir sisteme ilişkin (4-10) denklemi, Şekil 38' de olduğu gibi, çok değişkenli bir blok diyagramında bir toplama elemanı, bir integratör ve iki blokla gösterilebilir.



Şekil 38

- c) Zamanla-değişmeyen lineer sistemler: Zamanla-değişmeyen ve lineer sistemlerde $[A]$ ve $[B]$ zamandan bağımsız birer matristir.

Linear bir sistemin çözümü: (4-10) denklemi ile tanımlanan lineer bir sistemin çözümü

$$\vec{x}(t) = \vec{\phi}(t; \vec{x}_0, t_0) = [\phi(t, t_0)] \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t [\phi(t, v)] [B(v)] \vec{u}(v) dv \quad (4-11)$$

biçiminde belirlenebilir (18,26,30,37); bu denklemdeki

$[\Phi(t, t_0)]$ matrisi sistemin geçiş matrisidir.

Geçiş matrisinin özellikleri şöyle özetlenebilir:

a) Bütün t_0 değerleri için, I birim matrisi olmak üzere

$$[\Phi(t_0, t_0)] = I \text{ 'dir.} \quad (4-12)$$

b) Bütün t_0, t_1 ve t_2 değerleri için

$$[\Phi(t_2, t_0)] = [\Phi(t_2, t_1)] [\Phi(t_1, t_0)] \text{ 'dır.} \quad (4-13)$$

c) Bütün t ve t_0 değerleri için

$$[\Phi(t, t_0)]^{-1} = [\Phi(t_0, t)] \text{ 'dir.} \quad (4-14)$$

d) Bütün t ve t_0 değerleri için

$$\frac{d[\Phi(t, t_0)]}{dt} = [A(t)] [\Phi(t, t_0)] \text{ 'dır.} \quad (4-15)$$

e) Zamanla-değişmeyen bir sistemde geçiş matrisi

$$[\Phi(t, t_0)] = e^{[A](t-t_0)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\{(t-t_0)[A]\}^k}{k!} \quad (4-16)$$

biçiminde ifade edilebilir.

4.2 KALMAN PREDİKTÖRÜ

III'üncü bölümde belirtmiş olduğumuz gibi otomatik kontrol sistemlerinde işaretler, bir elemanın belirli bir giriş işaretine ilişkin karşılığında oluşur. 3.2'de belirtmiş olduğumuz gibi bu elemana giriş olarak uygulanan işaretin de ayrıca bir beyaz gürültü generatörü çıkışının bir de

reye uygulanması sonucu elde edildiği düşünülebilir. Buna göre $\vec{u}(t)$ beyaz gürültü olmak üzere $\vec{x}(t)$ işareti Şekil 38'de ki modelle gösterilebilir. Bu modelde $\vec{x}(t)$ 'nin değeri (4-11) denklemi ile verilmiştir. Eğer t anında bulunuyorsak ve $t_1 = t + \tau$ anındaki $\vec{x}(t_1)$ değerini bulmak istiyosak (4-11) denkleminde

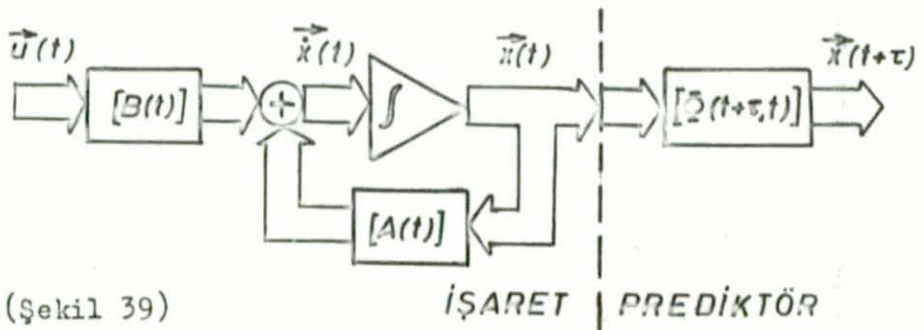
$$\vec{x}(t_1) = [\Phi(t_1, t)] \vec{x}(t) + \int_t^{t_1} [\Phi(t, v)] [B(v)] \vec{u}(v) dv \quad (4-17)$$

elde edilir. Ancak, $\vec{u}(v)$ bir beyaz gürültü olduğundan ve beyaz gürültü de bağımsız darbelerden oluşup, bu darbelerin ortalaması sıfır olduğundan, $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t + \tau)$ değerini verecek olan prediktörün yapımında, (4-17) denklemindeki $t \leq v < t_1$ zaman aralığına ilişkin ikinci terimden yararlanma olanağı yoktur.

Buna göre $t_1 = t + \tau$ zamanına ilişkin $\vec{x}(t + \tau)$ durumunu, $\vec{x}(t)$ durumundan bulunmasını sağlayan, optimal prediktör

$$\vec{x}(t + \tau) = [\Phi(t + \tau, t)] \vec{x}(t) \quad (4-18)$$

denklemi ile belirlenebilir. Kalman modeline göre işaret ve optimal prediktörün blok diyagramı Şekil 39'da görülmektedir.



(Şekil 39)

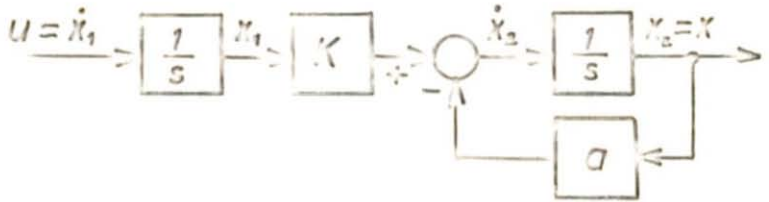
İŞARET | PREDİKTÖR

4.3 KALMAN PREDİKTÖRÜNÜN SİSTEM KARŞILIKLARINA UYGULANMASI

III'üncü bölümde olduğu gibi Kalman'ın metodunu birinci ve ikinci dereceden sistem cevaplarına uygulayarak bunlara ilişkin optimal prediktörleri hesaplayalım.

4.3.1 BİRİNCİ DERECEDEDEN BİR SİSTEMİN KARŞILIKLARINA İLİŞKİN OPTİMAL PREDİKTÖR

Şekil 30'da verilen $x(t)$ işaret modeli, $K = K_1 A$ olmak üzere, $1/s$ ve $1/(s+a)$ gibi birinci dereceden çarpanlardan oluştuğuna göre bu çarpanlar artarda bağlanarak işaret Şekil 40'da görülen biçime getirilir.



Şekil 40

Burada

$$\dot{x}_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = Kx_1 - ax_2$$

$$x = x_2$$

olmak üzere işaret durum denklemleriyle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4-19)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Geçiş matrisi

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -K & s+a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+a)} \begin{bmatrix} s+a & 0 \\ K & s \end{bmatrix}$$

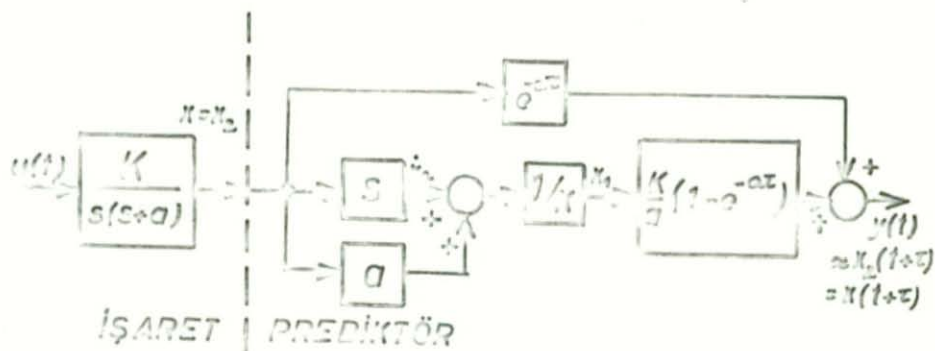
olduğuna göre (4-18) denklemi uyarınca

$$\begin{bmatrix} x_1(t+\tau) \\ x_2(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\tau) & \phi_{12}(\tau) \\ \phi_{21}(\tau) & \phi_{22}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} x_2(t+\tau) &= \phi_{21}(\tau)x_1(t) + \phi_{22}(\tau)x_2(t) \\ &= \frac{K}{a} (e^{-a\tau} - 1)x_1(t) + e^{-a\tau}x_2(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $x_1 = (\dot{x}_2 + ax_2)/K$ olduğundan bu işarete ilişkin prediktör, Şekil 41'de görülen şekli alır.



Şekil 41

Prediktöre ilişkin blok diagramını basitleştirirsek gıkış işaretinin Laplace transformu olarak

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= X(s) \left[e^{-a\tau} + \frac{(s+a)}{K} \cdot \frac{K}{a} (1 - e^{-a\tau}) \right] \\
 &= X(s) \left[1 + \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} s \right] \quad (4-21)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan elde edilen prediktörün transfer fonksiyonu Wiener yöntemi ile elde ettiğimiz prediktörün transfer fonksiyonuna eşittir.

3.3.2 İKİNCİ DEREJEDEN BİR SİSTEMİN KARŞILIĞINA İLİŞKİN OPTİMAL PREDİKTÖR

Yöntemi aynı biçimde ikinci dereceden bir sistemin karşılığına uygularsak (bak Şekil 34) işaretin durum denklemleri (Şekil 42)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u \\
 \dot{x}_2 &= Kx_1 - 2\xi\omega_n x_2 - \omega_n^2 x_3 \\
 \dot{x}_3 &= x_2 \\
 x_3 &= x
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & -2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4-22)$$

biçiminde bulunur.

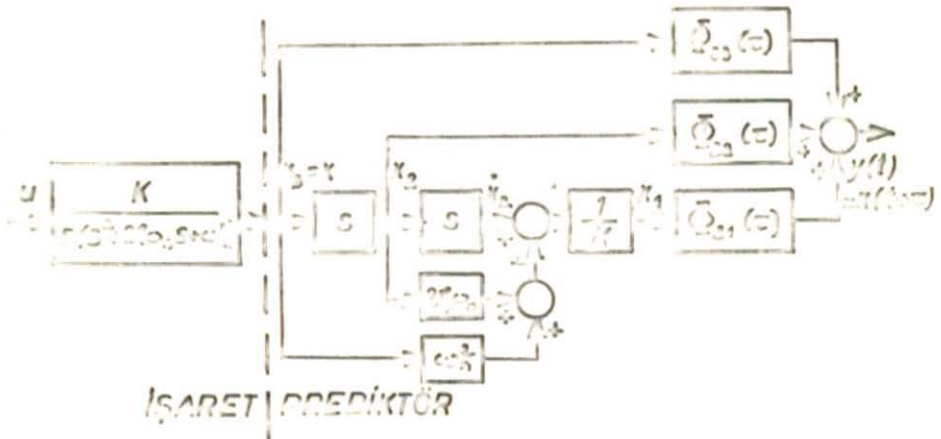
transfer fonksiyonu olarak

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = 1 + \alpha s + \beta s^2$$

$$\alpha = \left[2\sigma + \sigma k e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau - \phi) + k e^{-\sigma} \cos(\omega\tau - \phi) \right] / \omega_n^2$$

$$\beta = \left[1 + k e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau - \phi) \right] / \omega_n^2$$

elde edilir.



Şekil 43

Yukarıdaki sonuçlardan görüldüğü gibi Kalman prediktörü tamamen Wiener prediktörüne eşdeğerdır. Wiener prediktörü için belirtilmiş olan bütün özellikler Kalman prediktörü için de geçerlidir. Ayrıca II'ci bölümde geliştirdiğimiz türevalıcaı bu prediktörün yapımında da kullanmak mümkündür.

S O N U Ç L A R

Kontrol sistemlerinde kullanılması olverişli olan prediktörlere ilişkin özelliklerin incelendiği ve bu prediktörlerin gerçekleştirilmesi için gerekli yöntemlerin araştırıldığı bu çalışmada varılan sonuçlar şöyle özetlenebilir:

1. Girişine $x(t)$ işareti uygulandığında çıkışı girişin τ zamanı kadar sonraki $y(t) = x(t+\tau)$ değerini alan sisteme ideal prediktör denir. Böyle tanımlanan bir sistem kararlı, lineer ve zamanla-değişmeyen bir sistemdir.

Bu tezde yukarıda sayılan özellikler gözönüne alınarak ideal prediktör, lineer, zamanla-değişmeyen, kararlı ve nedensel bir sistemle yaklaşık olarak gerçekleştirilmiştir.

2. Bir sistemi fiziksel gerçekleştirilebilmenin gerekli koşulu bu sistemin nedensellik ilkesini sağlamasıdır. İdeal prediktör nedensellik ilkesine aykırı davranıldığından fiziksel olarak gerçekleştirilmesi olanağı yoktur. Yaklaşık olarak gerçekleştirilen her

ideal prediktörde, nedensellik ilkesinin bir sonucu olarak, $t=0$ anında prediktöre uygulanan bir $x(t)$ işaretinin $0 < t < \tau$ zaman aralığındaki parçasının karşılığı olan

$$e_p(t) = \mathcal{L}_I^{-1} \left\{ e^{\tau s} \int_0^{\tau} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right\} \quad (1-22)$$

yitirilmektedir.

3. Yaklaşık olarak gerçekleştirilen bir ideal prediktör pozitif grup gecikmeli, minimumfazlı bir sistemdir. Minimumfazlı sistemlerde pozitif grup gecikmesi frekans domeninde pozitif bir zayıflama gerektirir. İdeal prediktörde zayıflamanın sıfır olması gerektiğinden, ideal prediktör özelliği, frekans bandının ancak sınırlı bir bölgesinde yaklaşık olarak gerçekleştirilir.
4. Fiziksel gerçekleştirme bakımından varılan koşullar gerçekleştirme için gerek fakat yeter olmayan koşullardır.
5. Transfer fonksiyonu bir rasyonel fonksiyon olması gereği göz önüne alınarak, ideal prediktörün transfer fonksiyonu,

$$e^{\tau s} = \sum_{i=0}^n \frac{(\tau s)^i}{i!} + R_{n+1} \quad (2-6, 2-7)$$

biçiminde bir seriye açılarak yaklaşık olarak gerçekleştirilebilir. Bu seride her bir terim artarda bağıl:

türevlilerden oluşur, Seri $r < r$ değerleri için yakınsaktır. Yakınsaklık yarışepli herhangi bir t zamanı için

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{(n+1)}(t)}{(n+1)x^{(n)}(t)}} \quad (2-4)$$

limitiyle hesaplanır. Laplace transformu nasayenol bir fonksiyon olan bütün $x(t)$ ifadelerinde $n \rightarrow \infty$ olduğundan bu tür ifadeler her r değeri için yakınsaktır. Serinin n 'inci terimde kesilmesi sonucu, ortaya çıkan yanlıgının en büyük değeri

$$\omega_n = \frac{R_{n+1} \Omega_n}{x_n} \leq \frac{R_{n+1} \Omega_n}{(n+1)!} \quad (2-10)$$

kadardır; burada X_n işaretin maksimum genliği, R_{n+1} serinin n 'inci terimde kesilmesi sonucu kalan terim, ω_n işaretin frekans bandında üst sınırı ve $\Omega_n = \tau \omega_n$ norm frekans bandıdır.

6. İdeal prediktör özelliğini seriye açma yöntemi ile gerçekleştirilmek amacı ile, prediktörün işlemini sınırlı bir frekans aralığında gerçekleştirilen, bir "değişke türevler" önerdik. Bu tür türevlilerden oluşan bir yaklaşıklık idealprediktör, kontrol sistemlerinde bir işaretin r zamanı kadar sonraki değerini bulmada, ya da geciktirme olmalarının denkleştirilmesinde kullanılır. Yaklaşıklık ideal pre-

diktörden, frekans bandı ve genliği sınırlı olan her türlü işaretin prediksyonunda yararlanmak mümkündür.

7. N. Wiener'in önerdiği "optimal linear prediktör" $x(t)$ işaretine ilişkin $\phi_{xx}(s)$ güç dağılımının bilinmesine dayanır. Bu prediktör, $e^2(t)$ karesel ortalama yanılmasının minimumlaştırılması sonucu elde edilir. Eğer işaretin bir istatistiksel özelliği olan $\phi_{xx}(s)$ güç dağılımı göz önüne alınmazsa optimal prediktör $G_o(s) = [e^{TS}]_+$ ifadesinin belirttiği gibi nedensel bir ideal prediktör yaklaşımına dönüşür.

8. Belirgin bir $x(t)$ işareti için geliştirilen "nedensel optimal prediktör"ün transfer fonksiyonu

$$G_o(s) = \frac{\int_0^{\infty} x(\lambda) e^{-s(\lambda-\tau)} d\lambda}{X(s)} \quad (1-20)$$

denklemleri ile hesaplanır. Buradan elde edilen prediktör güç dağılımı belli olasılıkla bir işarete göre geliştirilen optimal Wiener prediktörüne tamamen eşdeğerdir. Buna göre belirgin işaretlere ilişkin prediktörler hesaplanırken Bode-Shannon yöntemi yerine burada (1-20) denklemi ile verilen basit yöntem kullanılmalıdır.

9.

$$X(s) = \frac{K_b (s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3-33)$$

biçiminde Laplace transformu s 'in rasyonel bir fonksiyonu olan $x(t)$ işaretlerine ilişkin optimal prediktör

$$G_o(s) = \frac{K_b (s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0)}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (3-35)$$

biçimindedir. Buna göre s -domeninde

- a) işaretin payındaki ifade optimal prediktörün paydasındaki ifadeye eşit;
- b) optimal prediktör transfer fonksiyonunda payın derecesi en çok $n-1$, paydanın derecesi m olup;
- c) optimal prediktör transfer fonksiyonu, işaret kazancı K_b 'dan tamamen bağımsızdır.

10. İdeal prediktör artarda bağlanan sonsuz sayıda türevalıcıdan oluşurken, özel bir $x(t)$ işareti için geliştirilen optimal prediktör, eğer işaretin derecesi (3-33) denkleminde olduğu gibi n ise, payın derecesi $m=0$ olması halinde, (3-35) denklemine göre en çok $n-1$ tane türevalıcıdan oluşur. Optimal prediktörden elde edilen çıkış optimumdur. Ayrıca prediktörde türevalıcıların sayısı ideal prediktördekinden daha az olduğundan, işaret özelliği bilindiğinde optimal prediktör ideal prediktöre tercih edilmelidir.

11. Transfer fonksiyonu e^{Ts} olan ideal prediktör ister belirgin ister olasıl olsun, özelliği bilinen ya da bilinmeyen her tür işaretin değerinin önceden

kestirilmesinde kullanılabilir. Ancak burada önerilen ideal prediktör yaklaşığı, seriye açma yöntemiyle, n tane türev alıcıdan oluştuğundan, $x(t)$ işareti ve n 'inci türevelere kadar bu işaretin bütün türevlerinin var ve bunların sürekli olması gerekir. Ayrıca serinin yakınsak olması için (2-4) denklemiyle hesaplanabilen, işarete ilişkin r yakınsaklık yarıçapının da, τ zamanından daha büyük olması gerekir.

12. R. Kalman modeline göre geliştirilen optimal prediktör H. Wiener modeline göre geliştirilen optimal prediktöre eşdeğerdir. Kalman'ın çözümünü için durum denklemleri kullandığından çözüm analog komputere uygun bir biçimde elde edilir. Wiener optimal prediktörü için belirlenen bütün nitelikler Kalman prediktörü için de geçerlidir.
13. Wiener ve Kalman yöntemine göre geliştirilen optimal prediktörlerde gerekli türevalıcılar yerine, ideal prediktör yapısında önerilen değişik türevalıcılar kullanılabilir.
14. Wiener ve Kalman yöntemlerinin uygulanabilmesi için işaretin istatistiksel özellikleri bilinmelidir. Eğer işaretin istatistiksel özellikleri bilinmiyorsa, ya da bu özellikler zamanla çok değişken ise, bu takdirde önerilen ideal prediktörün kullanılması sorunlu olur.

15. Bu tezde önerilen yöntemin bir sakıncası, (2-10) denkleminde görüldüğü gibi, yanılmanın belirli bir değerden küçük kalması için, ideal prediktörde kaç tane türev alınması kullanılması gerektiğinin önceden bilinmemesidir. Ancak belirli bir ideal prediktör yaklaşımına ilişkin yanılmanın kabul edilebilir bir hata sınırını aşp aşmadığını ve bu yoldan türev alıcı sayısının yeterli olup olmadığını anlamak ve gerekeni yapmak mümkündür. Wiener ve Kalman'ın optimal prediktörlerinde devre zaten yanılma karesinin ortalaması minimum kılınarak elde edildiğinden bu sakınca ortaya çıkmamaktadır.
16. Kontrol sistemlerinde rastlanan işaretlere ilişkin optimal prediktörler bir tablo halinde çözümlenmiş üçüncü bölümünde verilmektedir.

K A Y N A K L A R

- (1) ARSAC, J., "Fourier transforms and the theory of distributions", Prentice Hall, 1966.
- (2) BODE, H.W. and SHANNON, C.E., "A simplified derivation of linear least-squares smoothing and prediction theory", Proceeding IRE, Vol. 38, 1950, pp. 417-425.
- (3) BODE, H.W., "Network analysis and feedback amplifier design", Van Nostrand, New York, 1945.
- (4) BOOTH, T.L., "Estimation, prediction and smoothing in discrete parameter systems", IEEE transactions on computers, Vol. C-19, No 12, December, 1970, pp. 1193-1203.
- (5) BOOTON, R.C., "An optimization theory for the time-varying linear systems with nonstationary statistical inputs", Proceedings IRE, Vol. 40, 1952, pp. 977-981.
- (6) BRONSTEIN, I.N. and SEMENDJAJEV, K.A., "Taschenbuch der mathematik", Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1962.
- (7) DARLINGTON, S., "Linear least-squares smoothing and prediction with applications", Bell system

- Tech. Journal, Vol. 37, 1958, pp. 1221-1294.
- (8) DAVENPORT, W.B. and ROOT, W.L., "An introduction to the theory of random signals and noise", McGraw-Hill, New York, 1958.
- (9) DAVIS, R.C., "On the theory of prediction of non-stationary stochastic processes", Journal of applied physics, Vol. 23, No. 9, September, 1952, pp. 977-981.
- (10) FOCOR, G., "Laplace transforms in engineering", Akademiai Kiado, Budapest 1965.
- (11) HSIEH, H.C. and LEONDES, G.E., "On the optimum synthesis of multiple control systems in the Wiener sense", IRE Transactions on Automatic Control, AC-4, November 1959, pp. 16-29.
- (12) HUTCHINSON, C.E., "An example of the equivalence of the Kalman and Wiener filters", IEEE Transactions on Automatic Control, April 1965.
- (13) KAILATH, T., "A view of three decades of linear filtering theory", IEEE Transactions on Information theory, Vol IT-20, No.2, March 1974, pp.146
- (14) KALMAN, R.E., "A new approach to linear filtering and prediction problems", Trans ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, Vol. 82, 1960, pp.35-45.
- (15) KALMAN, R.E. and BUCY, R.S., "New results in linear filtering and prediction theory", Trans ASME, Series

- D, Journal of Basic Engineering, Vol. 83, 1961, pp. 95-108.
- (16) KALMAN, R.E., "On the general theory of control systems", Proceedings first international conference on automatic control, Moscow, USSR, 1960.
- (17) KALMAN, R.E., "Mathematical description of linear dynamical systems", J.S.I.A.M. Control, Vol.1, No. 2, 1963, pp. 152-192.
- (18) KALMAN, R.E. and BERBERAM, J.E., "Control system analysis and design via the 'second method' of Lyapunov", Journal of Basic Engineering, June 1960, pp. 371-393.
- (19) KELLY, C.R., "Predictor instruments look into the future", Journal of Control Engineering, March 1962, pp. 86-90.
- (20) KELLY, C.R., "Closing the loop with predictive controllers", Journal of control Engineering, May 1968, pp. 75-78.
- (21) KOLMAGOROFF, A., "Interpolation und extrapolation von stationären folgen", Bull. Acad. Sci. (URSS), Ser. Math 5, 1941, pp. "-14.
- (22) KUO, B.C., "Automatic control systems", Prentice-Hall, 1967.
- (23) LANING, J.H. and BATTIN, R.H., "Random processes in automatic control", McGraw-Hill, New York, 1956.
- (24) LEE, Y.W., "Statistical theory of communication", John Wiley, 1967.

- (25) LEES, A.B., "Interpolation and extrapolation of sampled data", Trans IRE Prof. Group on Information, IT-2, 1956, pp. 173-175.
- (26) McCAUSLAND, I., "Introduction to optimal control", John Wiley, 1969.
- (27) McGRAGHEN, L.M., "An extension of Wiener theory to multivariable controls", IRE International Convention Record 9, Part 4, 1961, pp. 56-60.
- (28) NEWTON, G., GOULD, L., and KAISER, J., "Analytical design of linear feedback controls", John Wiley, 1957.
- (29) MIX, D.F., "Random signal analysis", Addison Wesley, 1969.
- (30) OGATA, K., "Modern control engineering", Prentice-Hall, 1970.
- (31) PAPOULIS, A., "The Fourier integral and its applications", McGraw-Hill, 1962.
- (32) PAPOULIS, A., "Probability, random variables and stochastic processes", McGraw-Hill, 1965.
- (33) PETERSON, E.L., "Statistical analysis and optimization of systems", John Wiley, 1961.
- (34) PHILIPS, R.S. and WEISS, P.R., "Theoretical calculation on best smoothing of position data for gunnery prediction", (Report 532) Rad. Lab. MIT. February 1944.
- (35) ROBBINS, H.M., "An extension of Wiener filter

theory to partly sampled systems", IRE transactions on circuit theory, December pp. 362-370, 1959.

- (36) RUPPRECHT, W., "Lineare Netzwerke mit negativer Gruppenlaufzeit", Dissertation T.H. Khe, 1964.
- (37) SAGE, A.P., "Optimum systems control", Prentice-Hall, 1968.
- (38) SCHWARZ, R.J. and FRIEDLAND, B., "Linear systems", McGraw-Hill, 1965.
- (39) SHINBROT, M., "Optimization of time-varying linear systems with nonstationary inputs", Trans ASME, Vol. 80, 1958, pp. 457-462.
- (40) SMITH, O.J.M., "Feedback control systems", McGraw-Hill, 1958.
- (41) SORENSON, H.W., "Kalman filtering techniques", in Advances in Control Systems, Vol. 3, C.T. Leondes ed, Academic Press, 1966, pp.219-297.
- (42) TRETTER, S.A. and STEIGLITZ, K., "Some properties of minimum mean-square-error filters for sampled-data reconstruction", IEEE, 1965, pp. 134-146.
- (43) TRUXAL, J.G., "Automatic feedback control system synthesis", McGraw-Hill, 1955.
- (44) TRUXAL, G.J., "Control engineers handbook", McGraw Hill, 1958. pp.4-64,65.
- (45) WAINSTEIN, L.A. and ZUBAKOV, V.D., "Extraction of signals from noise", Prentice-Hall, 1962.

- (46) WHITTLE, P., "Prediction and regulation", London: E.U.P., 1963.
- (47) WEBSTER new international dictionary of the English language, Second Edition, Merriam Co., 1951.
- (48) WIENER, N., "The interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series", National Research Committee, New York, John Wiley, 1949.
- (49) WIENER, N., "Cybernetics or control and communication in the animal and the machine", New York, John Wiley, 1948.
- (50) YAGLOM, A.M., "Stationary random functions", Prentice-Hall, 1962.
- (51) ZADEH, L.A. and RAGAZZINI, J.R., "An extension of Wiener's theory of prediction," Journal of applied physics, Vol. 21, 1950, pp. 645-655.
- (52) ANDERSON, B. and VONGPANITLERD, S., "A modern system theory approach", Prentice-Hall, 1973.
- (53) BALABANIAN, N., "Fundamentals of circuit theory", Allyn and Bacon, 1961.
- (54) CHEN, C.F. and HAAS, I.J., "Elements of control system analysis", Prentice-Hall, 1968.
- (55) KORN, G.A. and KORN, T.M., "Electronic analog computers", McGraw-Hill, 1956.
- (56) LYNCH, W.A. and TRUXAL, J.G., "Introductory system analysis", McGraw-Hill, 1961.
- (57) TIETZE, U. and SCHENK, CH., "Halbleiter Schaltungstechnik", Springer Verlag, 1969.

KULLANILAN İŞARETLER

$T\{ \}$	dönüşüm kuralı
$L\{ \}$	lineer dönüşüm kuralı
$\mathcal{L}\{ \}$	Laplace dönüşümü (transformu)
t	zaman
t_0	belirli bir zaman, başlangıç zamanı
τ	zaman aralığı, prediktör sabiti
τ_1, τ_2	zaman sabitleri
τ_c	işlem kuvvetlendiricinin zaman sabiti
$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$	doğal frekans
ω_n	rezonans frekansı
ω_c	belirli bir frekans
$\Omega = \tau \omega$	norm frekans
$\Omega_c = \tau / \tau_c$	işlem kuvvetlendiricinin norm kırılma frekansı
$\Omega_s = \Lambda_0 \Omega_c$	işlem kuvvetlendiricide 0 dB'ye ilişkin norm frekans
$\Omega_n = \sqrt{\Omega_s}$	türevalıcı devrenin norm kırılma frekansı
ξ	sönüm oranı
$\sigma = \xi \omega_n$	sönüm
$s = \sigma + j\omega$	kompleks değişken

α, β, γ	katsayılar
k	katsayı, $= 1/\sqrt{1-\xi^2}$ sönüm katsayısı
a, b	sabit reel katsayılar
K	kazanç
A	sabit genlik
A_0	kuvvetlendirici kazancı
$A(\omega), A(\Omega)$	modül
$\psi(\omega), \psi(\Omega)$	faz
$\phi = \arctg \sqrt{1-\xi^2}/-\xi$	ikinci dereceden bir sistemde faz değişmesi
$l(t)$	birim basamak fonksiyonu
$\delta(t)$	Dirac distribüsyonu
$\alpha(\omega) = \ln A(\omega)$	zayıflama
$\beta(\omega) = \psi(\omega)$	faz değişmesi
$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$	iletme faktörü
$\tau_{gr}(\omega) = -d\beta(\omega)/d\omega$	grup gecikmesi
s_{oi}	sistem sıfırları
s_{ki}	sistem kutupları
n	tam sayı, sistem derecesi
r	yakınsaklık yarıçapı
R_{n+1}	kalan terim
X_m	maksimum işaret genliği
R	direnç
C	kondansatör
$x(t), X(s)$	giriş işareti.

$y(t), Y(s)$	çıkış işareti
$z(t)$	istenen işaret
$s(t)$	işaret
$n(t)$	gürültü
$\frac{e(t)}{e^2(t)}$	hata
e_p	ortalama karesel hata
e_{p2}	nedensellik hatası
$r(t)$	prediksiyon hatası
$c(t)$	referans (giriş) işareti
$u(t)$	kontrol (çıkış) işareti
$A(s)$	bozucu işaret
$N(s)$	referansa ilişkin blok, işlem kuvvetlendiricinin transfer fonksiyonu
$G_1(s), G_2(s)$	bozucuya ilişkin blok
$H(s)$	ileri yola ilişkin blok
$u_o(t), U_o(s)$	geribeslemeye ilişkin blok
$u_b(t), U_b(s)$	işlem kuvvettendiricinin çıkış gerilimi
$u_i(t), U_i(s)$	işlem kuvvettendiricinin giriş gerilimi
$Z_i(s)$	türev alıcı devrenin giriş gerilimi
$Z_f(s)$	seri impedans
$y_N(t), Y_N(s)$	paralel impedans
$y_o(t), Y_o(s)$	nedensel çıkış işareti
$G_o(s) = \mathcal{L}\{g_o(t)\}$	optimal cevap
	optimal sistemin transfer fonksiyonu

$\psi_{xx}(v), \phi_{xx}(s)$	giriş işaretinin özkorelasyonu ve güç dağılımı
$\psi_{yy}(v), \phi_{yy}(s)$	çıkış işaretinin özkorelasyonu ve güç dağılımı
$\psi_{zz}(v), \phi_{zz}(s)$	istenen işaretin özkorelasyonu ve güç dağılımı
$\psi_{xz}(v), \phi_{xz}(s)$	giriş işareti ile istenen işaret arasındaki çaprazkorelasyon ve güç dağılımı
$\psi_{xy}(v), \phi_{xy}(s)$	giriş işareti ile çıkış işareti arasındaki çaprazkorelasyon ve güç dağılımı
$\psi_{ss}(v), \phi_{ss}(s)$	işaretin özkorelasyonu ve güç dağılımı
$\psi_{nn}(v), \phi_{nn}(s)$	gürültünün özkorelasyonu ve güç dağılımı
$\psi_{sn}(v), \phi_{sn}(s)$	işaret ile gürültü arasındaki çapraz korelasyon ve güç dağılımı
$\psi_{xx}^+(v), \phi_{xx}^+(s)$	$\phi_{xx}(s)$ 'in minimumfazlı çarpanı
$\psi_{xx}^-(v), \phi_{xx}^-(s)$	$\phi_{xx}(s)$ 'in minimumfazlı olmayan çarpanı
$[\dots]_+$	kutupları sol yarı s-düzleminde bulunan bir ifade (nedensellik ifadesi)
$\vec{x}(t)$	durum vektörü
$x_i(t)$	durum değişkenleri

\vec{x}_0	başlangıç durum vektörü
$\vec{u}(t)$	kontrol ya da giriş vektörü
$u_i(t)$	kontrol değişkenleri
$\vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$	değişim kuralı
$\vec{\phi}(t; \vec{x}_0, t_0)$	geçiş fonksiyonu
I	birim matrisi
$[A(t)]$	geribesleme matrisi
$[B(t)]$	çırtıç matrisi
$[\phi(t, t_0)]$	geçiş matrisi

H A Y A T H İ K A Y E S İ

Atilla Bir 1941 yılında İzmir'de doğdu. İlk öğrenimini aynı şehirde yaptıktan sonra 1959 yılında İstanbul'da Saint-Joseph Fransız kolejinden mezun oldu. Elektrik mühendisliği tahsilini Almanyanın Karlsruhe şehrindeki Yüksek Teknik Okulunda (T.H. Karlsruhe'de) yaparak 1966 yılında Üniversitenin haberleşme tekniği bölümünden mezun oldu. Bir yıl Siemens firmasının Karlsruhe'deki fabrikasında otomatik kontrol sistemlerinin araştırıldığı laboratuarda elektronik kontrolörlerin geliştirilmesinde çalıştı. Yedek subaylığı sırasında Ağrı İnşaat Emlak dairesinde kontrol mühendisliği yapmıştır. 1970 yılından itibaren İstanbul Teknik Üniversitesinde Elektrikliğin Endüstride Tatbiki Kürsüsünde asistan olarak görevlidir. Yabancı dillerden Fransızca, Almanca ve İngilizce bilir.