İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

MERKEZÎ ve SFERO–STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM PRENSİBİ

İstanbul Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesince

" Doktor "

unvanının verilmesi için kabul edilen tezdir.

Servettin BİLİR

Tezin Dekanlığa verildiği tarih	:	22 Aralık 1975
Tezin müdafaa edildiği tarih	:	7 Mayıs 1976
Doktorayı Yöneten Profesör	:	Prof. Dr. Faruk AYKAN
Diğer Jüri Üyeleri	:	Prof. Dr. Asaf V.GÜNHAN
	:	Prof. Dr. Suat AKIN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Matbaası
TRABZON 1976

Çalışmalarımda değerli yardımlarını esirgemeyen sayın Prof.Dr.Faruk AYKAN'a, Leoben "Montanistische Hochschule" den sayın o.Prof.Dr.H.HORNINGER'e ve çalışmalarımın her devresinde önder olan sayın Dr.K.Naci DUMAN'a teşekkürlerimi sunmayı görev sayarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö Z E T

Bu çalışmada, iki izdüşüm prensibinin (Zweibilderprinzip) yeni bir tipi incelenmiştir. Söyleki, izdüşüm yüzeylerinden biri olarak π izdüşüm düzlemi ve diğeri de bu düzleme bir E noktasında teğet olan bir Φ küre yüzeyi seçilmiştir. π ye karşılık gelen izdüşüm merkezi kürenin E değme noktasında π ye dik olan eksenin küreyi deldiği E den farklı M noktası ve Φ ye karşılık gelen izdüşüm merkezi de Φ üzerinde M ve E den farklı keyfî sabit bir M_1 noktası alınmıştır. M noktası aynı zamanda esas izdüşüm merkezi, π de esas izdüşüm düzlemi olarak alınmıştır.

Bu şekilde tarif edilen izdüşüm sistemi, yukarki özeliğinden dolayı "Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm prensibi" olarak isimlendirilmiştir. Bu sistemde uzayın her P noktası, P^m Merkezî izdüşümü ve P^s_1 Sfero-Stereografik izdüşümünden ibaret (P^m,P^s_1) nokta çifti ile gösterilmiştir. (P^m,P^s_1) izdüşüm çifti verilen M,M_1 merkezlerini birleştiren i çekirdek ekseninin π deki I iz (çekirdek) noktasından geçen tanzim doğrusu üzerinde bir nokta çifti olarak elde edilmiştir.

Uzayın her d doğrusunun izdüşüm olarak bir doğru ve I çekirdek noktasından geçen çember (doğru-çember çifti) bulunmuştur. Düzlemler, perspektif ve kuadratik bir bağıntı ile gösterilmiştir. Bu bağıntı ε ile Φ nin arakesit çemberinin izdüşümü olan $c^m=c^s_1$ çakışma çemberi ile belirlenmiştir.

Nokta, doğru ve düzlemin özel durumları ve ayrıca insidens bağıntıları da tetkik edilmiştir. Nokta ve doğrunun insidens durumu için aynı adlı izdüşümlerinin insidens olması,doğru ve düzlemin insidens durumu için de doğrunun çakışma noktalarının düzlemin çakışma çemberi ile insidens olması koşulu bulunmuştur.Nokta ve düzlemin insidensliği yukarki özelikten kolayca elde edi-

lebileceği gibi P^m yi merkez kabul eden ve $\dagger P_1^s$ çaplı çemberi dik kesen ve P nin karakteristik çemberi olarak isimlendirilen çemberin, düzlemin çakışma çemberini dik kesmesi koşulu olarak elde edilmiştir.

Projektif temel şekillerin gösterilmesi yapılmıştır. Doğrular demetinin, taşıyıcı düzlemin çakışma çemberi ve demet tepesinin karakteristik çemberinin dik kesişmesi koşulu ile ve doğrular destesinin de deste tepesinin karakteristik çemberinin verilmesiyle belirlenebileceği gösterilmiştir. Düzlemler demeti, demet ekseninin çakışma noktalarını temel noktalar kabul eden bir çemberler demetiyle ve düzlemler destesinin de, deste tepesinin karakteristik çemberini dik kesen çemberler destesi ile belirtilebileceği açıklanmıştır.

Durum problemleri incelenmiş, doğruların kesişme koşulu olarak Sfero-Stereografik izdüşüm çemberlerinin kesişme kirişinin, doğruların Merkezî izdüşümlerinin kesişme noktasından geçmesi elde edilmiş ve özelikle paralellik durumunda kesişme noktasının karakteristik çemberinin M nin c_M distans çemberini çapı boyunca keseceği gösterilmiştir. Bu son özelik aynı zamanda bir doğru ile düzlemin paralellik koşulunu vermiştir. İki düzlemin paralellik koşulu olarak, çakışma çemberlerinin belirteceği çemberler demetinin hiperbolik olması ve bu demetin sıfır çemberlerini çapuçları alan çemberin c_M çemberini çapı boyunca keseceği bulunmuştur.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird ein neuer Typ des Zweibilderprinzips untersucht. Dabei wird eine der beiden Bildflächen als Bildebene π und die andere als eine Kugel Φ gewählt, die π in einem Punkt E berührt. Das zu π gehörige Abbildungszentrum wird in dem von E verschiedenen Endpunkt M des durch E laufenden Kugeldurchmessers angenommen, das zu Φ gehörige in einem belibigen, von E und M verschiedenen Punkt M_1 der Kugel. Der Punkt M ist das Hauptabbildungszentrum, π die Hauptbildebene.

Das so definierte Abbildungsprinzip wird wegen der genannten Eigenschaften als "Abbildung mittels Zentralriss und sphäro-stereographischen Riss" bezeichnet. Bei dieser Abbildunsart wird jeder Punkt P des Raumes durch das Punktepaar (P^m, P_1^s) dargestellt, das aus dem Zentralriss P^m und dem sphäro-stereografischen Riss P_1^s von P besteht. Das Punktepaar gehört einer Geraden von π an, die den Spurpunkt I der Geraden $i = MM_1$ enthält; die Gerade i wird als Kernachse bezeichnet, I als Kernpunkt und jede durch I laufende Gerade von π als Ordner.

Als Bild jeder Geraden d des Raumes ergibt sich eine Gerade und ein durch I laufender Kreis, also ein Geraden-Kreis-Paar. Jede Ebene ε wird durch eine perspektive quadratische Verwandtschaft dargestellt. Die Verwandtschaft ist durch ihren Koinzidenzkreis $c^m = c_1^s$, d.h. das Bild des Schnittkreises c von ε und Φ, bestimmt.

In der Arbeit werden ferner die Punkte, Geraden und Ebenen besonderer Lage und die Inzidenzbeziehungen untersucht. Die Bedingung für die Inzidenz von Punkten und Geraden ist die Inzidenz ihrer gleichnamigen Risse; die Bedingung für die Inzidenz von Geraden und Ebenen ist die Inzidenz der Koinzidenzpunkte der Geraden mit dem Koinzidenzkreis der Ebene. Als Bedingung für die

Inzidenz eines Punktes P mit einer Ebene ergibt sich die Tatsache, dass der aus dem Bildpaar (P^m, P_1^s) von P ableitbare "charakteristische Kreis" dieses Punktes, d.h. der Kreis mit der Mitte P^m und dem Radius IP_1^s, den Koinzidenzkreis der Ebene normal schneidet.

Die Darstellung der projektiven Grundgebilde ergibt als Bild eines Strahlbüschels den Koinzidenzkreis seiner Trägerebene und den diesen Kreis normal schneidenden charakteristischen Kreis seines Scheitels; als Bild eines Strahlbündels den charakteristischen Kreis des Bündelscheitels; als Bild eines Ebenenbüschels das Kreisbüschel, dessen Grundpunkte die Koinzidenzpunkte der Büschelachse darstellen und als Bild eines Ebenenbündels das Kreisbündel, dessen Orthogonalkreis der charakteristische Kreis des Bündelscheitels ist.

Die Untersuchung der Lagenbeziehungen ergibt als Schnittbedingung von Geraden die Beziehung, dass die Schnittsehne ihrer Bildkreise durch den Schnittpunkt ihrer Bildgeraden läuft; insbesondere ergibt sich als Bedingung für die Parallelität zweier Geraden, dass der charakteristische Kreis des Schnittpunktes den Distanzkreis c_M von M nach einem Durchmesser schneidet. Die letztgenannte Eigenschaft charakterisiert auch die Parallelität von Geraden und Ebenen. Als Bedingung für die Parallelität zweier Ebenen ergibt sich, dass das durch die Koinzidenzkreise der Ebenen bestimmte Kreisbüschel hyperbolisch ist und der Kreis, der die Nullkreise des Büschels zu Endpunkten eines Durchmessers besitzt, den Kreis c_M nach einem Durchmesser schneidet.

GİRİŞ: "MERKEZÎ VE SFERO-STEREOĞRAFİK İZDÜŞÜM PRENSİBİ"NİN TANIMI

Bu çalışma, uzay şekillerinin " Özel iki izdüşüm prensibi" ne[1] analog " Merkezî izdüşüm " ve " Sfero-Stereoğrafik izdüşüm" prensipleri yardımıyle gösterilmesi ana fikrine dayanılarak hazırlanmıştır.

İki izdüşüm (İki resim) prensibinde uzayda alınan iki π_1, π_2 izdüşüm düzlemi yerine burada π_2 düzlemi ve Φ küre yüzeyi alınmıştır. M esas izdüşüm merkezi olarak π_2 ye tekabül eden M_2 izdüşüm merkezi ile çakışan nokta ve π esas izdüşüm düzlemi de π_2 ile çakışan düzlem seçilmiştir. Φ küresi,uzayda yatay durumda düşünülen sabit π esas izdüşüm düzlemine teğet durumunda alınmıştır. $M = M_2$ esas izdüşüm merkezi Φ nin π ye değdiği noktasından geçen düşey z ekseninin küreyi deldiği diğer nokta olarak kabul edilmiştir. Φ izdüşüm küresine ait M_1 tali izdüşüm merkezi ise, Φ üzerinde M den ve π ye değme noktasından farklı olan keyfi sabit bir nokta alınmıştır.

Burada iki izdüşüm prensibinde olduğu gibi $MM_1=i$ sabit doğrusuna çekirdek ekseni ve bunun π deki İ izine de çekirdek noktası diyeceğiz. i den geçen düzlemler çekirdek düzlemleri ve İ den geçen π nin doğruları da çekirdek ışınları olarak isimlendirilecektir.

Uzayın noktaları bir taraftan M_2 izdüşüm merkezinden $\pi_2=\pi$ izdüşüm düzlemi üzerine, diğer taraftan M_1 den Φ izdüşüm küresi üzerine izdüşürülmektedir. Elde edilen izdüşüm noktaları $M=M_2$ esas izdüşüm merkezinden $\pi=\pi_2$ resim düzlemi üzerine izdüşürülerek uzay noktasının π deki izdüşüm çifti tayin edilmektedir. $M=M_2$ ve $\pi=\pi_2$ olduğundan birinci izdüşüm doğrudan

---

1) MÜLLER, E.- KRUPPA, J. : Vorlesungen Über Darstellende Geometrie. Band.I. Die Linearen Abbildungen Wien (1923) Seite:124.

doğruya uzay noktalarının $\pi=\pi_2$ deki P^m merkezî izdüşümünü verir. İkinci izdüşümde uzay noktasının önce Φ üzerindeki P_1 Sferik izdüşümü bulunmakta ve elde edilen P_1 Sferik izdüşümü $M=M_2$ den $\pi=\pi_2$ üzerine P_1^s Stereografik[2] izdüşümü olarak izdüşürülmektedir.

Böylece her uzay noktası, $\pi=\pi_2$ esas izdüşüm düzleminde P^m " Merkezi izdüşüm " ve P_1^s " Sfero-Stereografik izdüşüm " çifti ile gösterilmektedir. Bu şekilde belirtilen gösterme prensibine " Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm prensibi" adını veriyoruz.

Uzaydaki doğru, düzlem, temel projektif şekiller ve diğer bütün uzay şekilleri noktaların geometrik yeri olarak düşünülecek ve " Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümleri ", bunlara ait noktaların izdüşüm çiftleri olarak araştırılacaktır.

---

2) HORNINGER, H. : Tasarı Geometri Prensipleri. Sayfa:112.

I- NOKTALARIN GÖSTERİLMESİ

Nr.1- GENEL DURUMDAKİ NOKTALAR

Uzayın her P noktası, yukarıda tanımlanan izdüşüm sisteminde bir taraftan M esas izdüşüm merkezinden $\pi=\pi_2$ resim düzlemine izdüşürülerek P^m Merkezî izdüşümü bulunur. Diğer taraftan aynı P noktası M_1 tali izdüşüm merkezinden Φ izdüşüm küresi üzerine izdüşürülür ve P_1 Sferik izdüşümü elde edilir.

Böylece uzayın her P noktası yerine bir (P^m,P_1) nokta çifti tarif edilmiş olur. Bu çiftin bir noktası P uzay noktasının P^m merkezi izdüşümü ile çakışır, ikinci nokta ise sabit Φ küresi üzerinde bulunur ve P nin M_1 tarafından izdüşürülen P_1 noktasından ibarettir. (P^m,P_1) nokta çifti M esas izdüşüm merkezinden $\pi=\pi_2$ üzerine izdüşürülürse (P^m,P_1) uzay çiftinin izdüşümü olarak π deki (P^m,P_1^s) nokta çifti elde edilir. Bu çiftin P^m noktası P nin Merkezî izdüşümüdür, P_1^s noktası ise P ye tekabül eden P_1 noktasının P_1^s Stereografik izdüşümünü teşkil eder. P_1^s noktasına P nin Sfero-Stereografik izdüşümü adını veriyoruz*).

P yi M ve M_1 merkezine birleştiren ışınlar muayyen bir ε düzlemini belirler. ε düzlemi $MM_1=i$ den geçtiğinden bu düzlem çekirdek düzlemidir. P_1 noktası PM_1 ışını üzerinde olduğundan aynı zamanda ε düzlemine aittir. Dolayısıyla MP_1 ışını da bu düzlemin içindedir. ε düzlemi i çekirdek ekseninden geçtiğinden ε un π resim düzlemindeki e izi, i nin İ izinden geçer. ε düzlemindeki her doğrunun π deki iz noktası e üzerinde olacağından PM ve P_1M ışınlarının π yi deldiği P^m

---

*) (P^m,P_1) noktaları aynı $M=M_2$ izdüşüm merkezi tarafından $\pi=\pi_2$ izdüşürülmüş olduklarından bunun izdüşüm çifti için (P^m,P_1^m) notasiyonunun kullanılması uygun olacaktı. Fakat Φ küresi üzerindeki P_1,... noktaları $M=M_2$ merkezli Stereografik izdüşümde gösterilmiş bulunduklarından bu özeliğin harflenmesinde kolayca görülebilmesi için yukarıda belirtilen (P^m,P_1^s) notasiyonu seçtim.

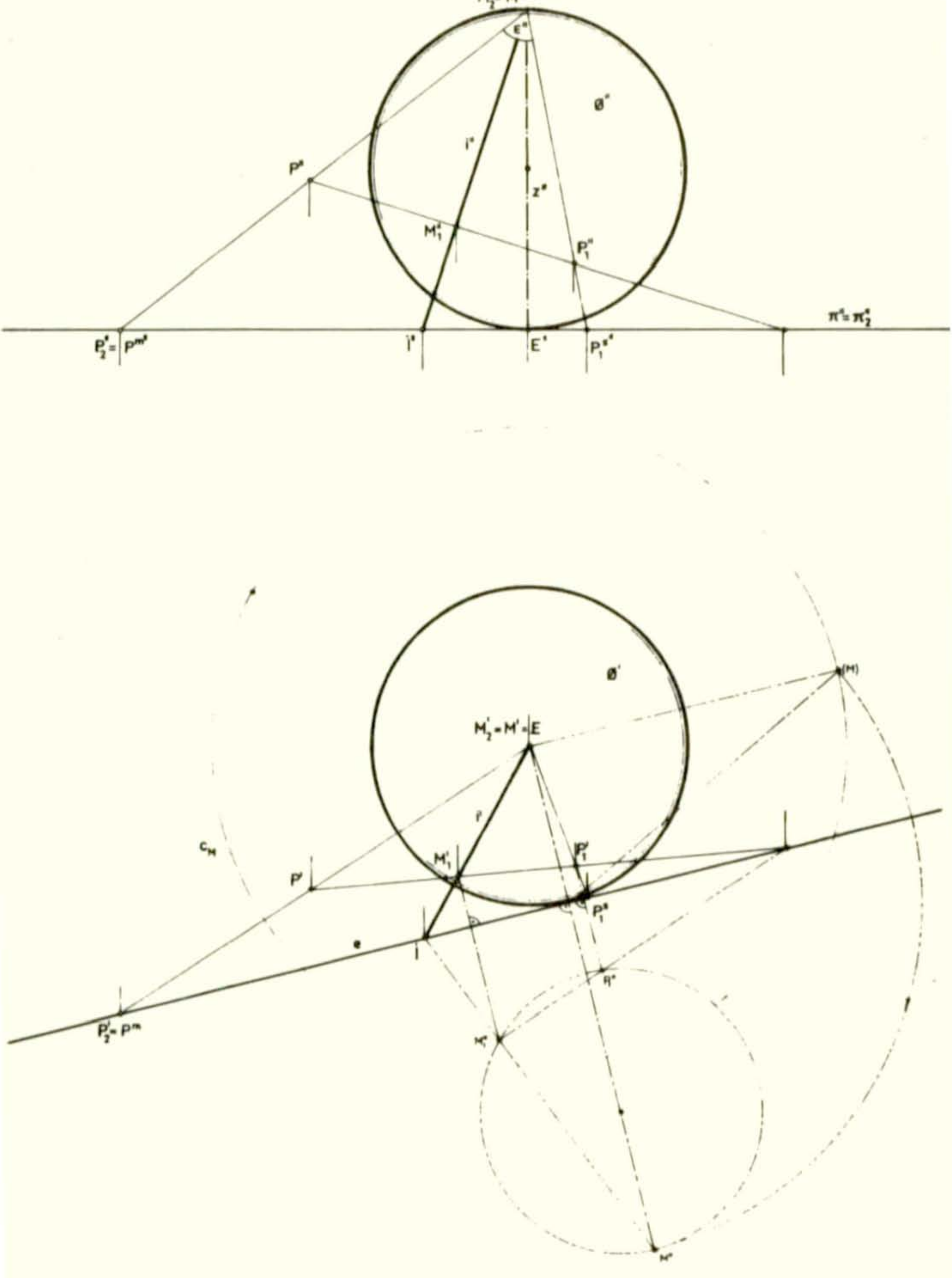
ve P_1^s noktaları da e iz doğrusu üzerinde olacaklardır (Şekil : 1).

Uzay, Φ küresi tarafından iç ve dış bölgeye ayrılır. Bu uzay bölgelerine ait olan P,... noktalarını Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren (P^m, P_1^s) nokta çiftleri İ çekirdek noktası ile birlikte daima karakteristik bir sırada bulunur. P noktası Φ nin iç bölgesinde bulunursa P yi M_1 tarafından küre üzerine izdüşüren P_1 noktası daima M_1-P-P_1 sırasındadır. Bu sebepten adı geçen üç noktanın izdüşümleri olan İ-P^m-P_1^s noktaları aynı sırada bulunurlar. Yani Merkezî izdüşümünü gösteren P^m noktası İ ile P_1^s nin ortasındadır. P^m noktasının İ-P_1^s nın dışında olması hallerinde ise nokta kürenin dış bölgesinde bulunur.

Bu suretle uzayın her P noktasının "Merkezî ve Sfero-Stereoğrafik izdüşüm " çifti, bu noktadan geçen çekirdek düzleminin π deki izi üzerinde, yani çekirdek ışını üzerinde olacağı koşulu ortaya çıkar. Çekirdek ışınları bu özelliğinden dolayı tanzim şartını haizdirler. Bu doğrular İ tepeli bir demet teşkil ederler.

Bu özeliklerin sonucu olarak şu ifadeyi verebiliriz :

TEOREM.1: Uzayın herhangi bir P noktasının (P^m, P_1^s)"Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm" çifti, bu noktadan geçen çekirdek düzleminin izi üzerinde yani İ çekirdek noktasından geçen tanzim doğrusu üzerindedir.


$M_2'' = M''$
E''
$\emptyset''$
l''
P''
z''
M_1''
P_1''
$\pi'' = \pi_2''$
$P_2'' = P'''''$
l''
E''
$P_1^{x''}$
$\emptyset'$
(M)
$M_2' = M' = E$
l'
c_M
M_1'
P_1'
P'
P_1^x
e
l
$P_2' = P^m$
P_1^o
M^o

Şekil: 1

Nr.2- İZDÜŞÜMÜN KARŞILIKLI BİRE-BİRLİĞİ

Uzayın noktaları bilindiği gibi üçparametreli bir sistem teşkil ederler. π resim düzlemindeki nokta çiftlerinin sayısı ise dörtparametreli çokluk meydana getirirler. Fakat uzayın noktalarına π üzerinde tekabül edecek noktalar çifti için bir şart koşulduğunda, parametre sayısı bir düşürülerek üçe indirilmiş olur. Bu şart (Nr.1) de belirtildiği gibi tanzim şartıdır. Yani π düzleminde I çekirdek noktasını tepe olarak kabul eden tanzim doğrular demetinin aynı doğrusu üzerinde alınan nokta çiftlerinin teşkil ettiği aile ikiparametreli olduğundan, demetle birlikte üçparametreli bir sistem meydana getirirler.

π resim düzleminde bu şartlar altında teşkil edilen(P^m,P_1^s) nokta çiftleri ile uzay noktalarının parametre sayısı aynı olduğundan uzayın her P noktasına π de bir tek nokta çifti tekabül ettirilmiş olur (Şekil : 1).

Ohalde π de aynı tanzim doğrusu üzerinde alınan (P^m,P_1^s) nokta çifti uzayda muayyen bir P noktasını belirler. P^m noktasını M esas izdüşüm merkezine birleştiren izdüşüm ışını P den geçen ε çekirdek düzlemi içindedir. P_1^s yi M yė birleştiren ışın da ε düzlemine aittir ve Φ yi M den farklı muayyen bir P_1 noktasında keser. M,M_1,P_1^s ve P^m aynı ε düzleminde bulunduklarından M_1P_1 ile MP^m ışınları bir ve yalnız bir P noktasında kesişirler. Aynı bir ε çekirdek düzleminde bulunan bütün noktaların izdüşüm çiftleri ε un e izi üzerindeki noktalar çiftlerini teşkil ederler. Ters olarak e nin keyfî (P^m,P_1^s) nokta çifti e den geçen ε çekirdek düzleminde yukarda belirtildiği gibi bir tek P noktasının izdüşüm çiftidir. Böylece her çekirdek düzlemindeki noktalar ve bunun izi üzerindeki nokta çiftleri arasında bire-bir bir bağıntı mevcuttur.

Elde edilen bu sonucu şu şekilde ifade edebiliriz :

TEOREM.2: Uzayın noktaları ve bunların π resim düzlemindeki " Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm " çiftleri arasındaki bağıntı karşılıklı bire-birdir.

Nr.3- İZDÜŞÜM SİSTEMİNE GÖRE ÖZEL DURUMDAKİ NOKTALAR

a) Φ Küresinin noktaları (Çakışma noktaları)

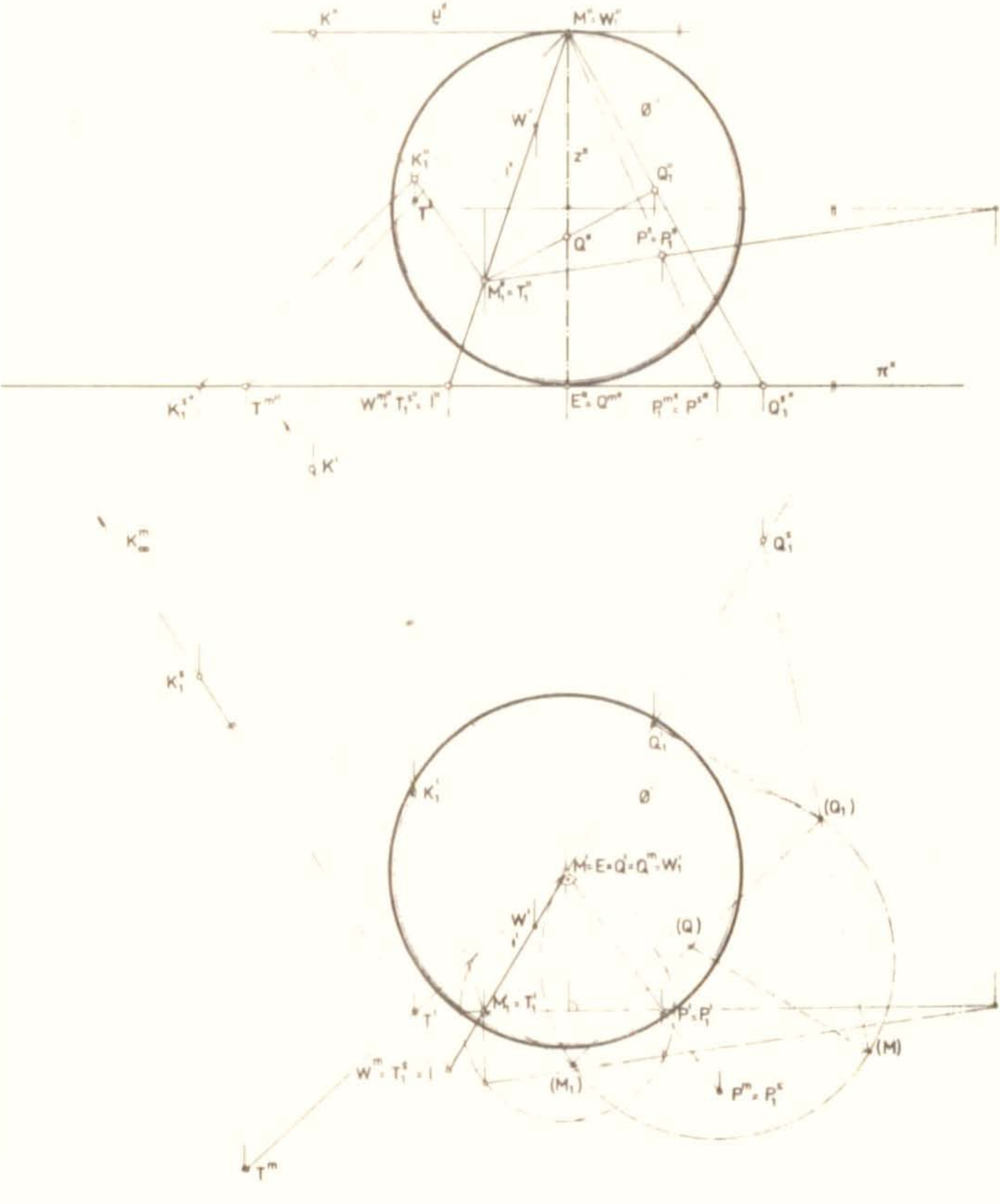
Φ izdüşüm küresi üzerinde M ve M_1 den farklı her P noktasını M_1 tali izdüşüm merkezine birleştiren izdüşüm ışınının küreyi deldiği M_1 den farklı olan P_1 noktası P ile çakıştığından bu durumdaki her noktanın P_1 Sferik izdüşümü kendisi ile identikdir, yani izdüşüm sisteminin bir çakışma noktasını teşkil eder. $P=P_1$ noktasının M esas izdüşüm merkezinden π resim düzlemindeki Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm çifti de bir noktada çakışır, yani $P^m=P_1^s$ dir (Şekil: 2).

Bu nedenle Φ küresi üzerinde bulunan bütün noktalar sözü edilen izdüşüm sisteminin çakışma noktaları olduklarından Φ küresi bu izdüşüm sisteminin çakışma yüzeyini teşkil eder. Küre üzerindeki noktaların parametre sayısı π resim düzlemindeki noktaların parametre sayısına eşit olduğundan, π de her noktayı Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümü olarak kabul eden nokta uzayda Φ küresine aittir.

b) μ Kaybolma düzlemindeki noktalar

Φ izdüşüm küresine M esas izdüşüm merkezinde teğet olan düzleme Merkezî izdüşümdeki özeliğinden dolayı kaybolma düzlemi diyecek ve μ ile göstereceğiz.

μ deki M den farklı her K noktasının Merkezî izdüşümü K_∞^m noktası ve Sfero-Stereografik izdüşümü ise K_∞^m noktasından geçen tanzim doğrusu üzerindeki π nin öz bir K_1^s noktasıdır.



Sekil: 2

M nin her iki izdüşümü her perspektif izdüşümde olduğu gibi belirsizdir (Şekil: 2).

c) π Resim düzlemindeki noktalar

π de bulunan her P noktası M izdüşüm merkezi tarafından π üzerine izdüşürülürse P nin P^m Merkezî izdüşümü olarak P noktası elde edilir. P nin P_1^s Sfero-Stereoğrafik izdüşümü ise genel hallerde olduğu gibi P yi M_1 ile birleştiren s_1 doğrusunun Φ üzerindeki M_1 den farklı P_1 kesişme noktasını verir. Bu noktayı M tarafından π üzerine izdüşüren s_2 doğrusu π yi P nin P_1^s Sfero-Stereoğrafik izdüşümünde keser (Şekil: 3). s_1, s_2 doğruları P den geçen ε çekirdek düzleminde bulunduklarından (P^m, P_1^s) nokta çifti bu düzlemin π deki e izi üzerindedir. Yani genel hallerde olduğu gibi $\dagger$ den geçen e tanzim doğrusuna aittir. Bu münasebet gösterir ki π deki her P noktasını temsil eden (P^m, P_1^s) nokta çifti bir taraftan genel hallerdeki gibi tanzim doğrusu şartına bağlıdır. Fakat bu şartın yeterli olmadığı açıktır. Çünkü π nin her $P=P^m$ noktasına Sfero-Stereoğrafik izdüşümde tekabül eden nokta, böyle bir tanzim doğrusu üzerinde bulunan ve muayyen bir şarta bağlı olan π nin bir ve yalnız bir P_1^s noktasıdır. Bu şartı tayin edelim.

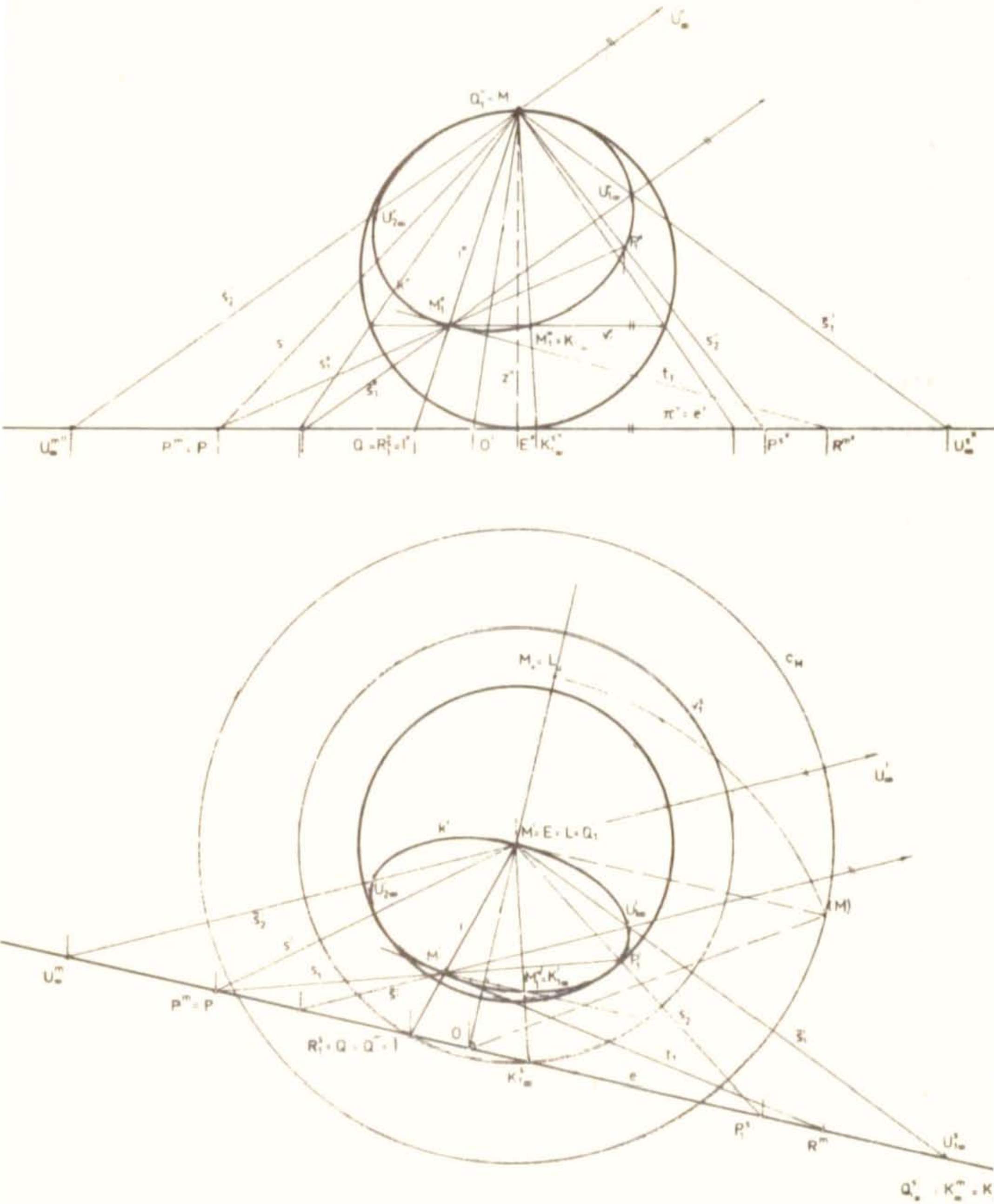
P den geçen e tanzim doğrusu üzerinde bulunan bütün P,.. noktalarının (P^m, P_1^s) izdüşüm çiftleri gözönüne alınırsa, bunlar adı geçen münasebete göre e üzerinde muayyen bir bağıntı meydana getirirler. Bu bağıntıda her P^m noktasına bir tek P_1^s noktası tekabül ettiğini gösterdik. Ters olarak e nin keyfî bir P_1^s noktası e üzerinde bulunan muayyen bir P noktasının Sfero-Stereografik izdüşümü olarak alınırsa bu noktayı M tarafından küre üzerine izdüşüren s_2 izdüşüm doğrusunun Φ üzerindeki M den farklı P_1 noktasını M_1 ile birleştiren s_1 doğrusunun e üzerindeki izi P^m noktasıdır ve bu nokta P ile çakışır. Bu sebepten e üzerindeki (P^m, P_1^s) nokta çiftleri bir projektivite teşkil ederler. Her çift ile küre üzerinde belirtilen P_1 noktası e den geçen ε çekirdek düzleminde bulunduğundan bu düzlemle Φ nin k kesit çemberinin noktalar dizisine aittir. Bu dizinin her P_1 noktası M_1 tarafından izdüşürülerek e üzerindeki P^m noktası elde edilir ve M den π resim düzlemine izdüşürülürse e üzerinde bu noktaya tekabül eden P_1^s noktası meydana çıkar.

Böylece görülürki k çemberi üzerindeki $k(P_1, \ldots)$ noktalar dizisi k nın M_1 ve M noktaları tarafından izdüşürülmüş düşünülürse $M_1(s_1, \ldots)$, $M(s_2, \ldots)$ demetleri arasında bir projektivite meydana gelir. Şöyleki bu projektivitenin hasılası k dır ve aynı projektivitenin e üzerindeki kesit projektivitesi (P^m, P_1^s) çiftleri arasında mevcut olan izdüşüm bağıntısı ile identikdir.

Bu projektivitenin karakteristik elemanları, yani esas noktaları ve karşıt noktaları şu şekilde tayin edilebilir: Projektivitenin her esas noktasında e nin muayyen bir P noktasını gösteren çift çakışık durumda bulunduğundan bu nokta a) ya göre Φ çakışma küresi üzerinde bulunmalıdır. Dolayısıyle e üzerindeki projektivitenin esas noktaları Φ ile e nin kesişme noktalarıdır. Bu iki nokta Φ ile e den geçen her düzlemin kesişme çemberi üzerinde bulunduklarından, bilhassa Φ nin π deki sıfır çemberi üzerindedir. Bu sıfır çemberi bilindiği gibi M nin π deki dik izdüşümü, yani Merkezî izdüşümün E esas noktasından geçen minimal doğrularıdır. Bu doğrular e yi öyle iki imaginer noktada keserki bunların (L) Laguerre noktası E ile çakışır. Bu şekilde, adı geçen projektivitenin esas noktaları tayin edilmiş olur. Projektivitenin her karşıt noktası e nin sonsuzdaki noktası ile intibak eden birinci ve ikinci dizinin noktalarına tekabül eden noktalardır. Adı geçen sonsuzdaki nokta $e(P_1^s,\ldots)$ dizisinin $Q_{1\infty}^s$ elemanı olarak düşünülürse bu noktaya bilinen temel çizime göre $\dagger$ çekirdek noktası tekabül eder. Sonsuzdaki aynı $Q_{1\infty}^s$ noktası, $e(P^m,\ldots)$ dizisinin elemanı olarak kabul edilirse bu noktaya tekabül eden $K_{1\infty}^s$ noktası $M_1 /\!/ e$ doğrusu ile k nın $K_{1\infty}$ kesişme noktasının izdüşümü olarak elde edilir. $K_{1\infty}$ noktası, e doğrusuna dik ve M izdüşüm merkezinden geçen düzleme nazaran M_1 ile simetriktir. Dolayısıyle bu iki noktanın e üzerindeki $\dagger$ çekirdek noktası ve $K_{1\infty}^s$ karşıt noktası bu Σ simetri düzleminin e üzerindeki O noktasına göre de simetriktir.

Aynı fikir π nin her P noktası için tatbik edilirse bu noktaları gösteren nokta çiftleri her tanzim doğrusu üzerinde bu tipten bir projektivite teşkil ederler. Bu projektivitelerin $K_{1\infty}^s$ karşıt noktalarının geometrik yeri olarak $\dagger$ den geçen, merkezi E olan v_1^s çemberi elde edilir ve bu çember Φ nin M_1 den geçen v_1 paralel çemberinin Merkezî izdüşümüdür. Bu münasebetlere göre v_1 çemberine karşıt çemberi ve v_1^s izdüşümüne çekirdek çemberi adını veriyoruz.

Yukarıda ispat edildiği gibi $\dagger$ çekirdek noktası $\dagger$ den geçen her e doğrusu üzerindeki projektivitenin $e(P^m,\ldots)$ dizisinin elemanı olarak düşünülürse bu noktaya $e(P_1^s,\ldots)$ dizisinin sonsuzdaki noktası tekabül eder, yani $\dagger=\dagger^m$ noktasına π deki bütün noktaları gösteren bağıntıda π nin sonsuzdaki doğrusu üzerindeki bütün noktalar tekabül ederler. $\dagger=\dagger^m$ noktası öyle singüler bir noktadır ki bu noktaya adı geçen anlamda bir tek nokta değil, bir doğru karşılık gelir. $\dagger$ noktası e üzerindeki $e(P_1^s,\ldots)$ dizisinin bir R_1^s elemanı olarak düşünülürse bu



$Q_1'' = M$
$U_{1\infty}''$
$U_{2\infty}''$
M_1''
$M_1'' = K$
$\pi'' = e''$
$U_\infty^{m''}$
$P^{m''} = P''$
$Q'' = R_1^{s''} = 1''$
O''
E''
$P^{s''}$
$R^{m''}$
$U_\infty^{s''}$
c_M
$M' = E' = L' = Q_1'$
$U_{2\infty}'$
$U_{1\infty}'$
(M)
U_∞^m
$P^m = P'$
$R_1^s = Q = Q'' = 1$
O
e
P_1^s
R^m
$U_{1\infty}^s$
$Q_\infty^s = K_\infty^m = K$

noktaya diğer dizide tekabül eden R^m noktasının k çemberinin M_1 deki t_1 teğeti ile e nin kesisme noktası olduğu, esas prensibe göre ispat edilebilir. Bu fikir yine $\dagger$ den geçen bütün tanzim doğruları için tatbik edilmiş düşünülürse $\dagger$ ye bu anlamda tekabül eden noktalar M_1 deki μ_1 tali teğet düzleminin π deki t_0 izi üzerinde bulunan bütün noktalar karşılık gelirler.

Eilhassa $\dagger$ noktasını izdüşüm sisteminin E esas noktasına birleştiren doğru üzerindeki projektivite tetkik edilirse bu projektivitenin esas noktaları M den geçen minimal doğrular ile doğrunun kesim noktaları olduğundan her iki esas noktası E noktasında çakışmıştır. Dolayısıyle bu doğru üzerindeki projektivite paraboliktir. Diğer özelikleri; örneğin v_1^s üzerindeki karşıt noktalar genel hale göre değişmez kalır.

d) Sonsuzdaki Ω düzlemindeki noktalar

Uzayın keyfî istikamette bulunan sonsuzdaki bir U_∞ noktası " Merkezî ve Sfero-Stereoğrafik izdüşüm " sistemine tabi tutulursa U_∞ un Merkezî izdüşümü olarak MU_∞ doğrusunun π deki U_∞^m noktası ve Sfero-Stereografik izdüşümü olarak da U_∞ noktasını M_1 ile birleştiren doğrunun Φ üzerindeki M_1 den farklı $U_{1\infty}$ noktasını M ye birleştiren ışının π yi deldiği $U_{1\infty}^s$ noktası elde edilir. $(U_\infty^m, U_{1\infty}^s)$ nokta çifti U_∞ dan geçen ε çekirdek düzleminin e izi üzerindedir. Bu düzlem Φ yi M ve M_1 den geçen k çemberi boyunca keser. U_∞^m noktası e üzerinde keyfî bir nokta olarak alınırsa, bu noktayı Merkezî izdüşümü olarak kabul eden sonsuzdaki U_∞ noktasını Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren $U_{1\infty}^s$ noktası e nin muayyen bir noktasında bulunur (Şekil : 3).

Ters olarak, e nin bir $U_{1\infty}^s$ noktası bir U_∞ noktasının

Sfero-Stereografik izdüşümü olarak alınırsa bu noktanın U^m_∞ Merkezî izdüşümü aynı çizime göre e nin bir tek noktası olarak elde edilir. Böylece ϵ düzleminin sonsuzdaki doğrusu üzerinde bulunan noktaları Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gös - teren $(U^m_\infty, U^s_{1\infty})$ nokta çiftleri e üzerinde bir projektivite teşkil ederler. Bu projektivitenin esas özeliklerini tayin etmek için U_∞ noktasını M ye birleştiren doğrunun k çemberi üzerindeki $U_{2\infty}$ noktası gözönüne alınır. Kolayca görülürki sonsuzdaki her U_∞ noktasını M_1 ve M noktaları tarafından k üzerine izdüşürülmüş düşünülürse M_1 ve M den geçen, birbirine paralel $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ doğruları elde edilir. Bunların k üzerindeki ikinci kesişme noktaları $U_{1\infty}, U_{2\infty}$ dir. Bu münasebet ϵ un bütün sonsuzdaki noktaları için tatbik edilmiş düşünülürse ϵ un sonsuzdaki doğrusu üzerindeki noktalar dizisi k nın sabit durumdaki M_1,M noktaları tarafından birer doğrular demeti ile izdüşürülür. Aynı sonsuzdaki noktayı izdüşüren demet doğruları birbirine paraleldir. Her iki demet k çemberi ile kestirilirse çember üzerinde iki $k(U_{1\infty},\ldots)$, $k(U_{2\infty},\ldots)$ dizileri elde edilir. Her iki dizi sonsuzdaki noktalar dizisi ile perspektif durumda bulunduğundan k üzerindeki nokta dizileri arasında bir projektivite mevcuttur. Bu projektivitenin esas noktaları Projektif Geometri'nin temel özeliklerine göre k çemberi ile düzlemin sonsuzdaki doğrusunun kesişme noktaları, yani k yi taşıyan ϵ düzleminin mutlak noktalarıdır. k üzerindeki $k(U_{1\infty},\ldots)$, $k(U_{2\infty},\ldots)$ dizileri k nın M noktası tarafından ϵ un e izi üzerine izdüşürülürse birinci dizinin izdüşümü olarak e üzerindeki $e(U^s_{1\infty},\ldots)$ dizisi ve ikinci dizinin izdüşümü olarak da $e(U^m_\infty,\ldots)$ dizisi elde edilir.

Çember üzerindeki diziler arasındaki projektivite bu izdüşümde $e(U^s_{1\infty},\ldots)$ $e(U^m_\infty,\ldots)$ nokta dizileri arasında bir projektivite meydana getirir. Bu projektivitenin esas noktaları k üzerindeki projektivitenin esas noktaları, yani k nın mutlak noktalarının e üzerindeki izdüşümleridir.

Kürenin bütün sonsuzdaki noktaları sonsuzdaki i_∞ mutlak koniği üzerinde bulunduğundan bu noktaları M noktası tarafından izdüşüren minimal doğrular M tepeli minimal koni verirler ve bu koninin π deki iz çemberi bilindiği gibi öyle sıfır parçalı bir i^m çemberidirki bu i^m çemberinin reel mümessili M nin c_M distans çemberinden ibarettir. Bu sebepten e üzerindeki sonsuzdaki noktaları temsil eden nokta çiftleri arasındaki projektivitenin esas noktaları e ile i^m çemberinin kesişme noktalarıdır. Bu iki imaginer noktanın L_u Laquerre noktası bilindiği gibi M nin M_d dönmüş izdüşümünde bulunur.

Adı geçen projektivitenin iki çifti daha doğrudan doğruya verilebilir. Çünkü ε un sonsuzdaki doğrusu π düzlemini aynı düzlemin e resim izine ait olan sonsuzdaki noktada keser. Bu noktayı π deki noktaların izdüşüm çiftleri arasındaki bağıntıda temsil eden $\bar{I}$ ve $K^s_{1\infty}$ noktaları c) ye göre çekirdek çemberi üzerinde tesbit edilmiş bulunduğundan bu iki nokta çifti aynı zamanda sonsuzdaki noktaları temsil eden projektivitenin iki çiftidir.

Aynı fikir, Ω nın bütün noktaları için tatbik edilmiş düşünülürse bu U_∞ noktalarının $(U^m_\infty, U^s_{1\infty})$ çiftleri arasındaki bağıntı yukarıda belirtilmiştir. Sözü geçen bağıntı her tanzim doğrusu üzerinde bir projektivite meydana getirir. Projektivitenin esas noktaları M nin distans çemberini reel temsilcisi kabul eden imaginer çembere aittir. Projektivitenin karşıt noktaları çekirdek çemberi üzerindedir.

e) μ_1 Teğet düzlemindeki noktalar

Φ küresinin M_1 tali izdüşüm merkezindeki teğet düzlemini μ_1 ile gösterelim. μ_1 de bulunan M_1 den farklı her T noktasını M_1 merkezine birleştiren ışın μ_1 düzleminde olacağından küreye M_1 de teğet olur. Dolayısıyle bu ışının küreyi deldiği ikinci nokta, yani T_1 noktası da M_1 ile identikdir. Başka kelimelerle, μ_1 deki bütün noktaların Sferik izdüşümleri M_1 tali izdüşüm merkezi ile çakışırlar. M_1 merkezini M esas izdüşüm merkezine birleştiren ışın i çekirdek ekseni olduğundan bu doğrunun π deki izi İ çekirdek noktası ile intibak eder. Yani μ_1 de bulunan her T noktasının T_1^S Sfero-Stereografik izdüşümü İ çekirdek noktası ile identikdir, Merkezî izdüşümü ise π resim düzleminde bulunan muayyen bir T^m noktasıdır. M_1 noktasının Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümleri İ noktası ile çakışır (Şekil : 2).

Ters olarak, π deki bir noktalar çifti π nin keyfi bir T^m noktası ve $İ = T_1^S$ noktasından ibaret olursa, bu şekilde tarif edilen çift μ_1 düzleminin muayyen bir T noktasını temsil eder. T noktası MT^m izdüşüm ışını ile μ_1 in kesişme noktasıdır.

f) i Çekirdek ekseni üzerindeki noktalar

i çekirdek ekseni üzerinde bulunan M ve M_1 den farklı her W noktasının W^m Merkezî izdüşümü İ çekirdek noktası ile çakışır. Aynı noktanın Sferik izdüşümü M esas izdüşüm merkezi ile identik olduğundan Sfero-Stereografik izdüşümü belirsizdir (Şekil : 2).

i nin noktaları arasında şu noktalar özel rol oynarlar :

1^0) M esas izdüşüm merkezi : Bu noktanın hem Merkezî ve hem de Sfero-Stereografik izdüşümü belirsizdir.

2^0) M_1 tali izdüşüm merkezi : Bunun Merkezî izdüşümü İ çekirdek noktası ile çakışır. Sfero-Stereografik izdüşümü ise M_1 deki μ_1 teğet düzleminin izi üzerinde belirsizdir.

3) İ çekirdek noktası : Merkezî izdüşümü kendisi ile çakışır. Bu nokta π nin bir noktası olarak düşünülürse c) ve göre bu noktaya π nin sonsuzdaki u_∞ doğrusu tekabül eder.

4) Sonsuzdaki noktasının Merkezî izdüşümü, i nin her noktasında olduğu gibi İ çekirdek noktası ile çakışır. Bu nokta Ω nın bir noktası olarak alınırsa bu noktaya Sfero-Stereografik izüdşümde d) ye göre π nin sonsuzdaki doğrusu üzerindeki bütün noktalar tekabül ederler.

II- DOĞRULARIN GÖSTERİLMESİ

Nr.1- GENEL DURUMDAKİ DOĞRULAR

İzdüşüm sistemimizde temel eleman nokta olduğundan her şekil noktalar yeri olarak düşünülecektir. Dolayısıyle doğruyu da noktaların geometrik veri olarak birparametreli bir noktalar dizisinin taşıyıcısı olarak alabiliriz.

d(P,...) doğrusal noktalar dizisinin Merkezî izdüşümü bilindiği gibi bu dizi ile perspektif durumda bulunan $d^m(P^m,...)$ noktalar dizisidir. Aynı dizinin Sfero-Stereografik izdüşümü ise, diziye ait her P noktasının π deki P^s_1 izdüşümlerinin geometrik yeridir. Bu geometrik yeri bulmak için d(P,...) dizisinin noktalarını M_1 den Σ üzerine izdüşüren ışınların teşkil ettiği $\alpha = [dM_1]$ düzlemini gözönüne alalım. İzdüşüm ışınlarının Σ yi deldiği noktaların teşkil ettiği dizi, α ile Σ nin d_1 arakesit çemberini taşıyıcı olarak kabul ederler. Dolayısiyle d(P,...) doğrusal noktalar dizisinin Sferik izdüşümü olarak $d_1(P_1,...)$ çembersel noktalar dizisi elde edilir. Taşıyıcı d_1 çemberi M_1 den geçer. Bu iki dizinin elemanları karşılıklı bire-bir olarak tekabül ettiklerinden, diziler arasındaki bağıntı projektivitedir.

$d_1(P_1,\ldots)$ dizisi M esas izdüşüm merkezi tarafından π resim düzlemine izdüşürülürse, $d(P,\ldots)$ nin Sfero-Stereografik izdüşümü olarak $d_1^s(P_1^s,\ldots)$ çembersel noktalar dizisi elde edilir. $d_1(P_1,\ldots)$ çembersel noktalar dizisine ait M_1 noktasının izdüşümü $\dot{I}$ çekirdek noktası olduğundan d_1^s taşıyıcı çemberi, de $\dot{I}$ den geçer.

Böylece görülür ki uzayın her d doğrusunun Merkezî izdüşümü π nin muayyen bir d^m doğrusu ve Sfero-Stereografik izdüşümü ise $\dot{I}$ çekirdek noktasından geçen bir d_1^s çemberidir (Şekil : 4). d üzerindeki $d(P,\ldots)$ noktalar dizisinin izdüşümleri d^m üzerindeki $d^m(P^m,\ldots)$ dizisi ve d_1^s çemberi üzerinde bulunan $d_1^s(P_1^s,\ldots)$ dizisinden ibarettir. Bu iki dizi arasındaki bağıntı tanzim doğrusu şartına bağlıdır. Yani $\dot{I}$ den geçen keyfî bir tanzim doğrusu d^m doğrusunu bir P^m noktasında ve d_1^s çemberini P^m ye tekabül eden $\dot{I}$ den farklı bir P_1^s noktasında keser.

Ohalde sonuç olarak şunu söyliyebiliriz :

TEOREM.3: Uzayda genel durumda bulunan bir d doğrusunun π resim düzlemindeki Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm çifti bir d^m doğrusu ile $\dot{I}$ çekirdek noktasından geçen bir d_1^s çemberidir.

d doğrusu üzerindeki noktalar arasında (I-Nr.1) e göre bir taraftan Φ çakışma küresi, ω kaybolma düzlemindeki, ω_1 tali teğet düzlemindeki, π deki noktası ve sonsuzda bulunan nokta önemli rol oynar. Bu noktaların izdüşüm çiftleri şu şekilde tayin edilebibir :

a) d doğrusu Φ küresini iki E,F noktasında keser.

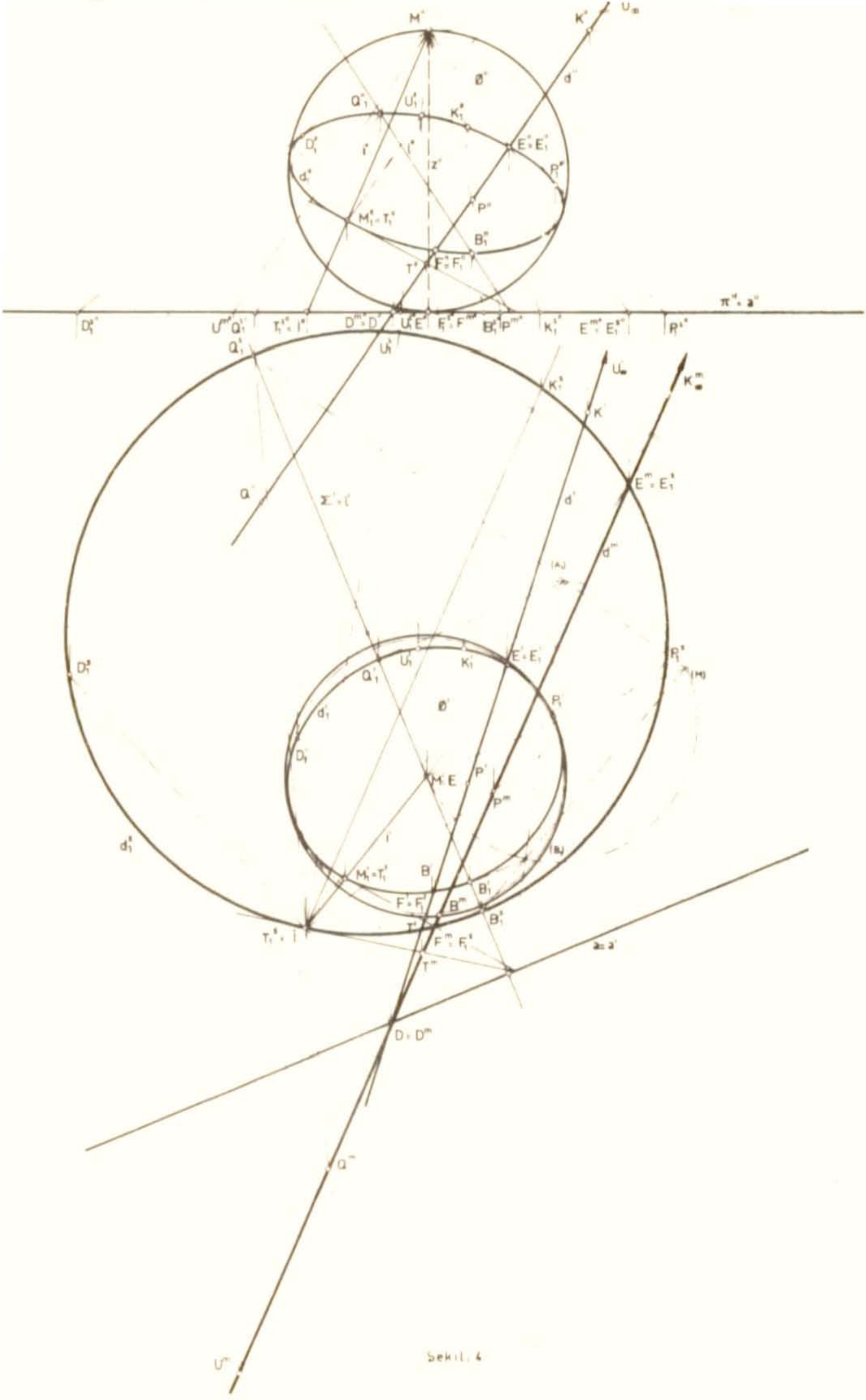
Bu noktalar (I-Nr.3,a) ya göre E_1, F_1 Sferik izdüşümleriyle çakıştıklarından E^m, F^m merkezî izdüşümleri sırasiyle E_1^S, F_1^S Sfero-Stereografik izdüşümleriyle çakışırlar, yani d nin d^m Merkezî izdüşüm doğrusu ile d_1^S Sfero-Stereografik izdüşüm çemberinin kesişme noktalarıdır. Bu iki nokta $d^m(P^m,\ldots)$ve $d_1^S(P_1^S\ldots)$ dizileri arasındaki projektivitede kendikendine tekabül eden noktalardır. Yani bu projektivitenin esas noktalarını teşkil ederler. Ohalde adı geçen projektivitenin esas noktaları d ile Φ nin durumuna göre reel farklı,eşlenik imaginer veya çakışık olabilir.

b) d nin K kaybolma noktası d ile μ kaybolma düzleminin kesişme noktasıdır. Bu noktanın Merkezî izdüşümü(I-Nr.3,b) ye göre d^m doğrusunun sonsuzdaki noktasından ibarettir.K_1^S Sfero-Stereografik izdüşümü ise bu noktayı $\dagger$ ye birleştiren tanzim doğrusu ile d_1^S çemberinin ikinci kesişme noktasıdır.

c) d nin μ_1 tali teğet düzlemindeki T noktası(I-Nr.3,e) ye göre Sfero-Stereografik izdüşümde $\dagger$ çekirdek noktası olarak görülür. Bu sebepten aynı noktayı Merkezî izdüşümde gösteren T^m noktası d_1^S çemberinin $\dagger$ deki teğeti ile d^m doğrusunun kesişme noktasıdır.

d) d doğrusunun π deki D iz noktası bilindiği gibi D^m merkezî izdüşümü ile çakışır. D_1^S Sfero-Stereografik izdüşümü ise π deki noktaların izdüşüm çiftleri arasında mevcut olan bağıntı yardımı ile belirtilen noktadır. Bu nokta d üzerindeki noktalar dizisini gösteren izdüşüm dizileri arasındaki projektivitede D^m noktasına tekabül ettiğinden $\dagger D^m$ tanzim doğrusu ile d_1^S çemberinin ikinci kesişme noktasıdır.

e) d nin sonsuzdaki Ω düzlemindeki U_∞ noktasının Merkezî izdüşümü bilindiği gibi M merkezli izdüşümde d nin U^m kaçma noktası olarak elde edilir. U_∞ un U_1^S Sfero-Stereogra-



Şekil: 4

fik izdüşümü Ω daki noktaları gösteren nokta çiftleri arasındaki (I-Nr.3,d) de izah edilen bağıntıda U^m_∞ noktasına tekabül eden noktadır. U_∞ noktası d üzerindeki noktalar dizisinin elemanı olarak alınırsa $U^s_{1\infty}$ izdüşüm noktası U^m_∞ den geçen tanzim doğrusu ile d^s_1 çemberinin ikinci kesişme noktası olarak elde edilir.

Nr.2- İZDÜŞÜMÜN KARŞILIKLI BİRE-BİRLİĞİ

(Nr. 1)de ispat edildiği gibi uzayın her d doğrusu Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösterilirse, d nin Merkezî izdüşümü olarak π resim düzleminin muayyen bir d^m doğrusu ve Sfero-Stereografik izdüşümü olarak da İ çekirdek noktasından geçen belli bir d^s_1 çemberi elde edilir.

Ters olarak, π resim düzleminde herhangi bir d^m doğrusu bir uzay doğrusunun Merkezî izdüşümü ve İ noktasından geçen herhangi bir d^s_1 çemberi aynı doğrunun Sfero-Stereografik izdüşümü olarak alınırsa bu d doğrusunun uzay durumu şu şekilde düşünülebilir: d^m doğrusunu Merkezî izdüşümü olarak kabul eden bütün uzay doğruları d^m yi M izdüşüm merkezine birleştiren ε düzleminde bulunmalıdır. Yani ε un herhangi bir doğrusu olabilir. Buna mukabil d^s_1 çemberi bir doğrunun Sfero-Stereografik izdüşümü olarak düşünülürse bu doğru adı geçen çemberi Stereografik izdüşümü olarak kabul eden Φ üzerinde bulunan d_1 çemberini taşıyan α düzleminde bulunmalıdır. Bu nedenle hem d^m doğrusunu Merkezî izdüşümü ve hem de d^s_1 çemberini Sfero-Stereografik izdüşümü olarak kabul eden doğru ε,α düzlemlerinin d arakesit doğrusu olmalıdır ve bu özelikten dolayı tek bir doğrusu olarak belirlidir (Şekil : 4).

Böylece görülürki π de keyfî bir doğru ve İ den geçen herhangi bir çember daima uzayın muayyen bir doğrusunun Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümdeki izdüşüm çifti olarak düşünülebilir.

Ohalde uzayın doğruları ve bu şekilde tarif edilen π deki doğru-çember çiftleri arasında bire-bir bir bağıntı mevcuttur . Uzay doğruları bilindiği gibi dörtparametreli bir çokluk teşkil ederler. π deki doğrular ve sabit $\dagger$ noktasından geçen çemberler de birer ikiparametreli çokluk teşkil ettiklerinden bu iki çokluğun çarpımı yine uzay çokluklarının teşkil ettiği çokluğun parametre sayısına eşittir, yani dörtparametreli bir aile kurarlar.

Bu özelik gösterirki, aynı d^m doğrusunu Merkezî izdüşümü olarak kabul eden doğrular M den geçen, yani Merkezî izdüşümde izdüşüren bir düzlemdedir. Bütün bu doğruları Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren çemberler ise π düzleminde tepesi $\dagger$ olan ikiparametreli çemberler destesini teşkil ederler. Ters olarak bu destenin her d_1^s çemberi M_1 tali izdüşüm merkezinden geçen bir α düzleminde bulunan bütün doğruların ortak Sfero-Stereografik izdüşümünü teşkil eder, aynı doğruların Merkezî izdüşümleri π deki doğrular alanını doldururlar.

Bu neticelere göre π resim düzleminde herhangi bir d^m doğrusu ve $\dagger$ den geçen keyfî bir d_1^s çemberi bir d doğrusunun izdüşüm çiftini teşkil ettiğinden d üzerindeki d(P,...) noktalar dizisini izdüşümlerinde gösteren, $d^m(P^m,...)$ ve $d_1^s(P_1^s,...)$ nokta dizileri arasındaki, tepesi $\dagger$ olan perspektif projektivite doğrudan doğruya tayin edilmiş olur. Çünkü $\dagger$ den geçen her doğru, yani izdüşüm sistemimizin bir tanzim doğrusu, d^m ve d_1^s çizgilerini bu projektivitenin bir (P^m, P_1^s) noktalar çiftinde keser ki bu çift d üzerinde bulunan P noktasının Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümüdür.

Adı geçen projektivitede d üzerinde özel durumda bulunan noktalar da önceki paragrafta izah edilen neticelere göre doğrudan doğruya belirtilebilir :

a) d nin Φ çakışma küresi üzerindeki E,F noktalarını gösteren $E^m=E_1^s$, $F^m=F_1^s$ izdüşüm noktaları d^m ile d_1^s çemberinin (d nin uzay durumuna göre) kesişme noktalarının reel,eşlenik imaginer veya çakışık olmasına göre reel farklı,eşlenik imaginer veya çakışık olabilir.

b) d^m,d_1^s izdüşüm çifti ile belirtilen d doğrusunun K kaybolma noktası yukarıda izah edildiği gibi d nin öyle bir noktasıdır ki bunun Merkezî izdüşümü d^m doğrusunun sonsuzdaki K_∞^m noktasındadır. Bu sebepten K yı Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren K_1^s noktası doğrudan doğruya d^m doğrusuna paralel tanzim doğrusu yardımıyle bulunabilir. K_1^s noktası bu tanzim doğrusu ile d_1^s çemberinin ikinci kesişme noktasıdır. Bu şekilde elde edilen çizimde açıkca görülürki K nın uzay durumu gösterilmeksizin doğrudan doğruya izdüşüm çifti ile belirtilmiş olur.

c) d nin tali teğet düzlemindeki T noktasını gösteren izdüşüm çifti yine direkt olarak gösterilebilir. Çünkü yukarıda açıklandığı gibi bu noktanın T_1^s Sfero-Stereografik izdüşümü $\dot{I}$ çekirdek noktası ile çakışır, T^m Merkezî izdüşümü ise d_1^s çemberinin $\dot{I}$ deki teğeti ile d^m doğrusunun kesişme noktasıdır .

d) d nin π deki iz noktası bir taraftan d nin uzay durumunun gösterilmesinden sonra d^m doğrusu üzerinde belirtilebilir, diğer taraftan π nin noktası olarak farzedilirse π deki noktaları gösteren izdüşüm çiftleri arasındaki bağıntı yardımıyle tayin edilebilir. Bu yol aşağıdaki kesişme problemleri bahsinde izah edilecektir. D iz noktasının D^m Merkezî izdüşümü D ile çakışır, D_1^s Sfero-Stereografik izdüşümü D den geçen tanzim doğrusu üzerindedir.

e) d nin sonsuzdaki U_∞ noktası benzer şekilde ya d nin uzay durumunun gösterilmesinden sonra d nin U^m_∞ noktası olarak veya sonsuzdaki noktaları gösteren (I-Nr.3,d) de açıklanan bağıntı yardımiyle tesbit edilebilir. U^m_∞ kaçma noktası belirtilmiş ise U_∞ nun $U^s_{1\infty}$ Sfero-Stereografik izdüşümü U^m_∞ den geçen tanzim doğrusu üzerinde elde edilir.

Nr.3- İZDÜŞÜM SİSTEMİNE GÖRE ÖZEL DURUMDAKİ DOĞRULAR

a) Φ Küresinin teğetleri

Φ küresinin her d teğeti küreye muayyen bir noktada teğettir. Bu noktada Φ ile d nin ortak E,F noktaları çakışmıştır. E,F noktalarının Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümleri (I-Nr.3,a) da açıklandığı gibi d nin (d^m, d^s_1) izdüşüm çiftinin ortak noktaları olduklarından sözü edilen teğet halinde he iki noktada çakışmışlardır, yani d^m doğrusu d^s_1 çemberine $E^m = E^s_1$ ve aynı zamanda $F^m = F^s_1$ noktasını gösteren noktada te ğettir. Φ nin teğetleri üçparametreli bir çokluk teşkil ederler. π deki doğrular ve bunlara teğet olan ve $\dagger$ çekirdek noktasından geçen çemberlerin teşkil ettiği aile üçparametreli bir çokluk meydana getirdiklerinden Φ nin teğetleri ve onları temsil eden doğru-çember izdüşüm çiftleri arasında bire-bir bir bağıntı mevcuttur.

b) π Resim düzlemine paralel, özellikle bunlar arasında μ kaybolma düzlemindeki doğrular

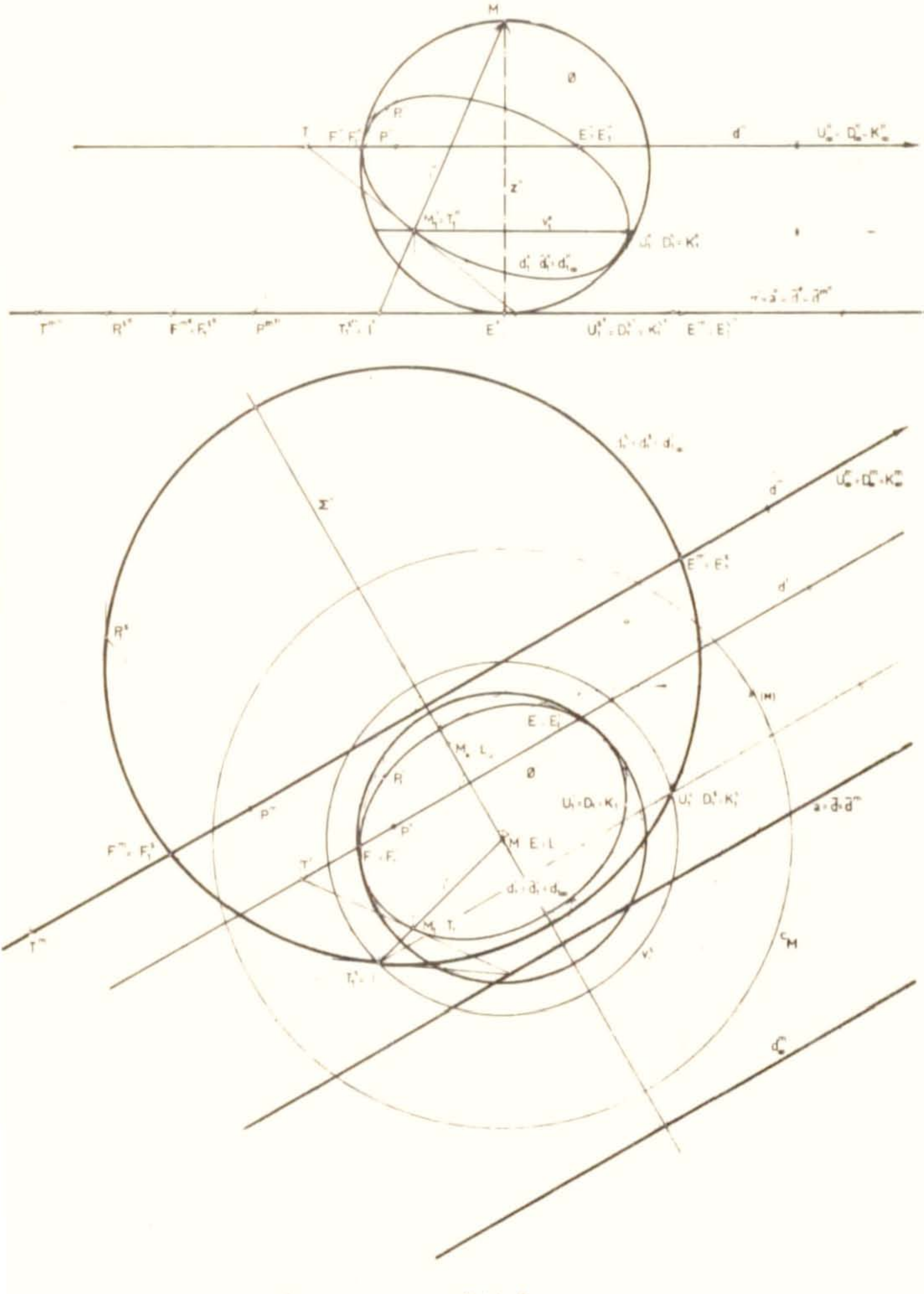
π resim düzlemine paralel her d doğrusu Merkezî izdüşümde d ye paralel bir d^m doğrusu ile gösterilir. d nin sonsuzdaki U_∞ noktası aynı zamanda d doğrusunun π deki D iz noktası ve μ kaybolma düzlemindeki K kaybolma noktasını teşkil eder. Bu $U_\infty = D_\infty = K_\infty$ noktasının Merkezî izdüşümü d^m doğrusunun sonsuzdaki noktasında bulunduğundan aynı noktayı Sfero

Stereografik izdüşümde gösteren $U^s_{1\infty} = D^s_1 = K^s_1$ noktası (I-Nr.3,d) de açıklanan münasebetlere göre $\dagger$ den geçen d^m doğrusuna paralel olan tanzim doğrusu ile izdüşüm sistemimizin v^s_1 çekirdek çemberinin $\dagger$ den farklı kesişme noktasıdır. v^s_1 çemberi ilgili paragrafta izah edildiği gibi Φ küresinin M_1 den geçen v_1 karşıt çemberinin Merkezî izdüşümünü teşkil ettiğinden E esas noktasını merkez olarak kabul eden ve $\dagger$ çekirdek noktasından geçen çemberdir (Şekil : 5).

Ohalde d doğrusunu Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren d^s_1 çemberi $\dagger$ ve $U^s_{1\infty}$ noktasından geçer ve d^m doğrusunu genel halde olduğu gibi d nin E,F çakışma noktalarının izdüşümlerinde keser. Bu durumdaki bir doğrunun gösterilmesi için karakteristik olan $\dagger$ ve K^s_1 noktaları, $E^m=E^s_1$ ve $F^m=F^s_1$ noktaları gibi d ye dik aynı bir Σ düzlemine nazaran simetriktir.

π ye paralel doğrular uzayda üçparametreli bir çokluk teşkil ederler. π deki doğrular ikiparametreli aile kurarlar ve bu ailenin her doğrusuna yukarıda ispat edilen $\dagger K^s_1 /\!/ d^m$ şartına göre birparametreli bir çemberler çokluğu tekabül eder. Bu çokluk temel noktaları $\dagger$ ve K^s_1 olan çemberler demetidir. Böylece adı geçen doğrular ve çemberlerden meydana gelen izdüşüm çiftleri yine üçparametreli bir çokluk teşkil ettiklerinden π ye paralel uzay doğruları ve bunları temsil eden Doğru-Çember çiftleri arasında bire-bir bir bağıntının bulunduğu gösterilmiş olur. Bu özeliklerden kolayca görülürki uzayda aynı yatay doğrultuda geçen bütün doğruların Merkezî izdüşümleri bir paralel doğrular demetini, Sfero-Stereografik izdüşümleri ise çemberler demetini teşkil ederler.

π ye paralel doğrular arasında izdüşüm sistemimizin μ kaybolma düzlemindeki doğrular özel rol oynarlar. Böyle bir doğru-



Sekil 5

runun Merkezî izdüşümü bilindiği gibi π nin sonsuzdaki doğrusudur. Sfero-Stereografik izdüşümü ise $\bar{t}$ çekirdek noktasından geçen bütün çemberlerdir. Her tanzim doğrusu sonsuzdaki doğruyu ve çemberi, sonsuzda bulunan ve öz birer noktada keser. Elde edilen bu iki nokta d nin muayyen bir noktasını izdüşüm sistemimizde temsil eder (I-Nr.3,b ye bakınız).

c) π - Resim düzlemindeki doğrular

π de bulunan her $\bar{d}$ doğrusu $\bar{d}^m$ Merkezî izdüşümü ile çakışır. Böyle bir doğru, keyfî yatay doğrularda olduğu gibi π nin sonsuzdaki u_∞ doğrusunu bir $U_\infty = K_\infty$ noktasında kestiğinden b) de yatay doğrular için ispat edilen özelikler π deki her doğru için de mevcuttur. Yani $\bar{d}$ nin Sfero-Stereografik izdüşümünü teşkil eden $\bar{d}^s_1$ çemberi $\bar{t}$ çekirdek noktasından ve $\bar{t} /\!/ \bar{d}$ doğrusu ile v^s_1 çekirdek çemberinin K^s_1 kesişme noktasından da geçer. Ayrıca π düzleminde bulunan her doğru üzerindeki bütün noktalar π ye ait olduklarından bunları izdüşüm sistemimizde temsil eden nokta çiftleri (I-Nr.3,c) de ispat edilen şarta bağlıdır. Buna göre π deki her doğrunun izdüşüm çifti arasındaki projektivitenin esas noktaları, Merkezî izdüşüm sisteminin E esas noktasından geçen minimal doğrular üzerindedir. Yani bu iki imaginer nokta E yi Laguerre noktası olarak kabul ederler. Bu sebepten π deki her $\bar{d}$ doğrusunu gösteren izdüşüm çifti için ikinci karakteristik özelik şu şekilde ifade edilebilir : $\bar{d}$ yi gösteren $\bar{d}^s_1$ çemberi bir taraftan $\bar{t}$ ve K^s_1 reel noktalarından geçer, diğer taraftan $\bar{d} = \bar{d}^m$ doğrusu üzerinde bulunan ve bir Laguerre noktası E olan eşlenik imaginer noktaları taşır . $\bar{t}, K^s_1$ ve adı geçen eşlenik imaginer noktalar aynı Σ düzlemine göre simetrik olduklarından $\bar{d}^m$ doğrusuna tekabül eden $\bar{d}^s_1$ çemberi $\bar{t}$ noktası ve iki imaginer noktadan geçen çember olarak belirlidir (Şekil : 5).

Böylece π deki her $\bar{d}$ doğrusu ($\bar{d}^m, \bar{d}_1^s$) izdüşüm çifti ile belirtilmiştir. $\bar{d}^m$ doğrusu π de keyfî seçilmiş ise bu doğruya tekabül eden $\bar{d}_1^s$ çemberi yukarıda açıklandığı gibi bellidir. Yani birparametre sayısını verir. Dolayısıyle π deki doğrular ve bunları temsil eden doğru-çember çiftleri arasında bi - re-bir bir bağıntı mevcuttur.

d) Sonsuzdaki Ω düzlemindeki doğrular

Sonsuzdaki Ω düzleminde bulunan her d_∞ doğrusunun Merkezî izdüşümü, bilindiği gibi öz bir d_∞^m doğrusudur. Bu doğru aynı zamanda M izdüşüm merkezine göre, d_∞ dan geçen her düzlemin kaçma izidir.

Aynı d_∞ doğrusunun Sfero-Stereografik izdüşümünü gösteren $d_{1\infty}^s$ çemberi ise, c) de ispat edilen, π ye paralel doğruların izdüşüm çiftleri arasındaki bağıntılara göre, $\dagger$ çekirdek noktası ve $\dagger \mathbin{/\!/} d_\infty^m$ doğrusu ile v_1^s çekirdek çemberinin $\dagger$ den farklı K_1^s kesişme noktasından geçer. Ayrıca Ω da bulunan bütün nokta dizilerini gösteren projektivitelerin esas noktaları (I-Nr.3,d) ye göre M izdüşüm merkezinin π deki c_M distans çemberini reel temsilcisi olarak kabul eden sıfır parçalı çember üzerinde bulunduklarından sonsuzdaki her d_∞ doğrusunu gösteren (d_∞^m , $d_{1\infty}^s$) izdüşüm çiftinin çakışma noktaları d_∞^m ile adı geçen sıfır parçalı çemberin kesişme noktalarında bulunur. d_∞^m doğrusu verilmiş kabul edilirse, bu imaginer çakışma noktaları (I-Nr.3,d) de açıklandığı gibi M_0 Laguerre noktası ile belirtilebilir (Şekil : 5).

Ohalde, π de alınan her d_∞^m doğrusu sonsuzdaki Ω düzleminde bulunan bir d_∞ doğrusunun Merkezî izdüşümü olarak alınırsa, buna Sfero-Stereografik izdüşümde tekabül eden $d_{1\infty}^s$ çemberi, $\dagger$ çekirdek noktasından ve M nin c_M distans çemberini reel temsilcisi olarak kabul eden imaginer çember ile d_∞^m nin kesişme noktalarından geçen çember olarak belirlidir. Bu çember aynı zamanda simetri özeliklerinden dolayı v_1^s üzerinde bulunan K_1^s karşıt noktasından da geçer.

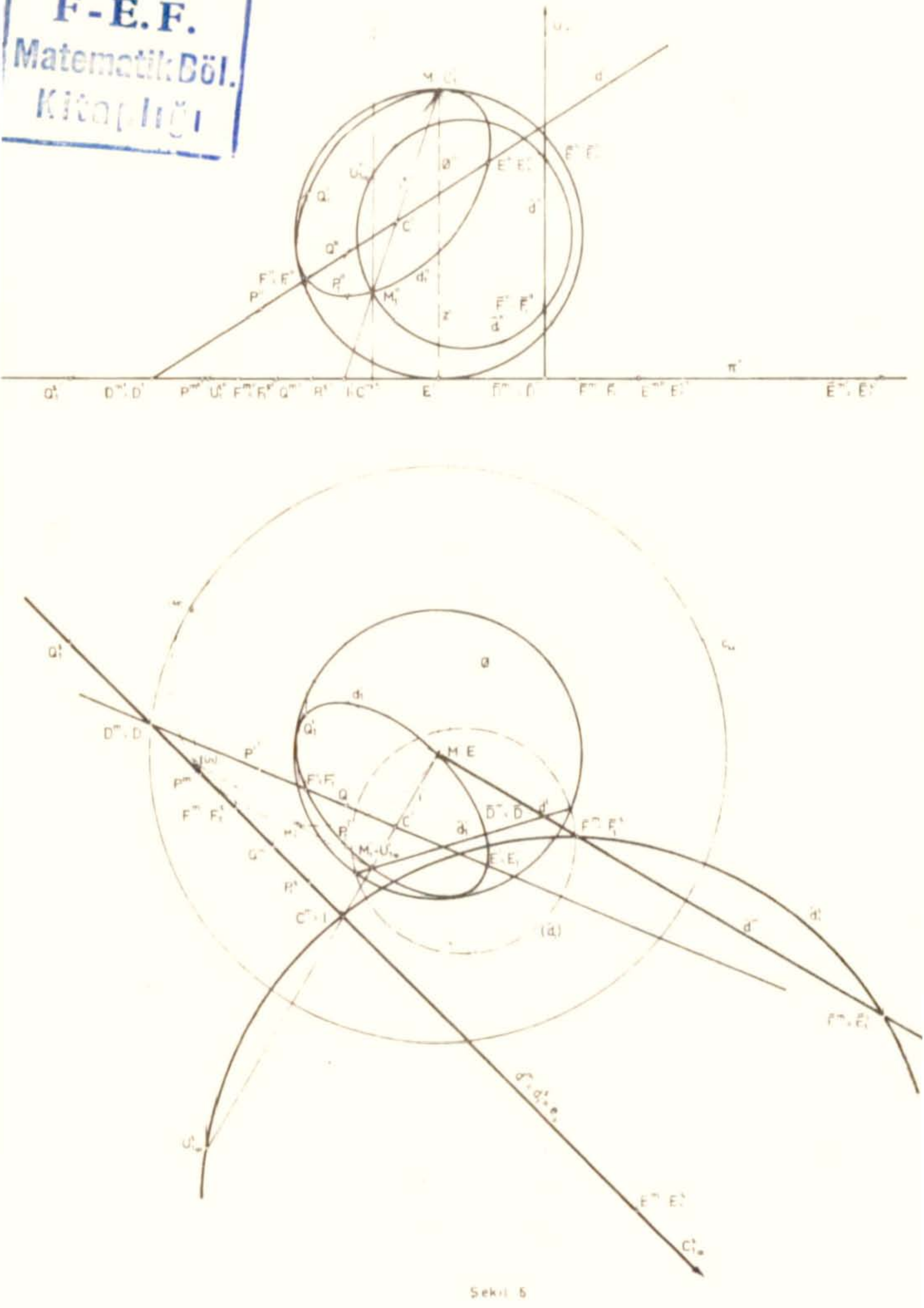
e) π Resim düzlemine dik doğrular

π ye dik her $\bar{d}$ doğrusunun Merkezî izdüşümü bilindiği gibi bu izdüşümün E esas noktasından geçen bir $\bar{d}^m$ doğrusudur. Yani adı geçen doğruların Merkezî izdüşümleri $E(\pi)$ doğrular demetini teşkil ederler.

π ye dik durumda olan herhangi bir $\bar{d}$ doğrusunu Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren $\bar{d}_1^s$ çemberi, genel tariflere göre M_1 noktasını $\bar{d}$ ile birleştiren α düzlemi ile Φ nin $\bar{d}_1$ kesit çemberinin izdüşümüdür. α düzlemi M_1 den geçen ve $\bar{d}$ ye paralel olan doğruyu da ihtiva ettiğinden α daki $\bar{d}_1$ çemberi, M_1 den farklı $U_{1\infty}$ kesişme noktasından geçer. $U_{1\infty}$ noktası verilen $\bar{d}$ doğrusunun sonsuzdaki U_∞ noktasının M_1 merkezine göre Φ üzerindeki Sferik izdüşümüdür. $\bar{d}_1$ çemberi $U_{1\infty}$ den geçtiğinden $\bar{d}_1^s$ Sfero-Stereografik izdüşüm çemberi $U_{1\infty}$ in $U_{1\infty}^s$ Sfero-Stereografik izdüşüm noktasından geçer (Şekil : 6).

π ye dik bütün doğruların sonsuzdaki noktası aynı bir U_∞ noktası olduğundan bu durumdaki bütün doğruların Sfero-Stereografik izdüşüm çemberleri $U_{1\infty}^s$ den geçerler. Yani İ çekirdek noktası ve $U_{1\infty}^s$ noktasını temel noktaları olarak kabul eden çemberler demetini meydana getirirler.

Böylece ikiparametreli bir çokluk olan π ye dik doğruların izdüşüm çiftleri, π de yine ikiparametreli olan doğru-çember çiftlerinden oluşan bir çokluk ile gösterilmiş olur. İzdüşüm doğruları, tepesi E olan doğrular demetini, izdüşüm çemberleri ise temel noktaları İ ve $U_{1\infty}^s$ olan çemberler demetini teşkil ederler.



Şekil 6

f) μ_1 Düzlemindeki doğrular

Bu düzlemde bulunan bütün noktaların Merkezî izdüşümleri π deki noktalar alanını doldurur, Sfero-Stereografik izdüşümleri ise $\dagger$ çekirdek noktasında çakışmışlardır. Tepesi $\dagger$ olan minimal doğrular aynı zamanda Stereografik izdüşümün esas prensiplerine göre $M_1(\mu_1)$ demetinin minimal doğrularının Merkezî izdüşümleridir, dolayısıyle bu düzlemdeki çakışma noktalarını temsil ederler. Bu özelikler nedeniyle μ_1 deki bütün d doğrularının Merkezî izdüşümleri π deki doğrular alanını, Sfero-Stereografik izdüşümleri ise $\dagger(\pi)$ doğrular demetindeki minimal doğrularını teşkil ederler.

g) i yi kesen doğrular

i çekirdek eksenini M ve M_1 den farklı herhangi bir C noktasında kesen her d doğrusu i den geçen bir ε düzlemine ait olduğundan d nin d^m Merkezî izdüşümü bu düzlemin e_0 izi yani $\dagger$ çekirdek noktasından geçen muayyen bir tanzim doğrusu üzerindedir. d üzerindeki d(P,...) noktalar dizisinin Merkezî izdüşümü $e_0(P^m,...)$ dizisidir. Aynı uzay dizisini M_1 den izdüşüren ışınlar da ε düzleminde bulunduklarından bu ışınların Φ küresi üzerindeki M_1 den farklı $P_1,...$ noktalarını taşıyan d_1 çemberi de ε düzleminde bulunur. Bu nedenle $d_1(P_1,...)$ dizisinin Sfero-Stereografik izdüşümü e_0 üzerinde bulunan $e_0(P_1^s,...)$ noktalar dizisidir. Böylece görülürki bu durumdaki her d doğrusunun (d^m, d_1^s) izdüşümleri bir tanzim doğrusu üzerinde çakışmışlardır ve d üzerinde bulunan d(P,...) dizisi her iki izdüşümde e_0 üzerindeki $e_0(P^m,...)$ve $e_0(P_1^s,...)$ dizileri arasındaki bir projektivite yardımıyle gösterilir. d doğrusu keyfi iki P,Q noktası ile verilmiş ise d nin durumu ε düzleminde bellidir. Dolayısıyle d(P,...) dizisini π de gösteren projektivite de belli olmalıdır. Bu projektivitenin iki çifti P,Q noktalarının (P^m, P_1^s) ve (Q^m, Q_1^s) izdüşüm çiftleridir. Projektivitenin üçüncü çifti d ile i çekirdek ekseninin C kesişme noktasını izdüşümde temsil eden nokta çiftidir. Bu izdüşüm çifti (I-Nr.3,f) ye göre Ī çekirdek noktası ve e_0 in sonsuzdaki noktasından ibarettir. Böylece adı geçen projektivite belirlidir. Projektivitenin esas noktaları d ile d_1 çemberinin E,F kesişme noktalarının izdüşümleridir (Şekil : 6).

Ohalde, i yi kesen doğrular π deki tanzim doğruları üzerinde birer projektivite yardımıyle gösterilebilir. Adı geçen uzay doğruları i yi doğrultman doğrusu olarak kabul eden kompleks, yani üçparametreli bir çokluk teşkil ederler. Bu doğruları resim düzleminde gösteren projektiviteler izah edilen özeliklere göre de üçparametreli bir çokluk kurarlar. Çünkü her tanzim doğrusu üzerindeki projektiviteler iki parametreli çokluk, tanzim doğruları ise tepesi Ī olan doğrular demetini teşkil ederler.

M esas izdüşüm merkezinden geçen doğrular Merkezî izdüşümde izdüşüren olduklarından π nin bir noktası olarak görülür Sfero-Stereografik izdüşümü ise bu noktadan geçen tanzim doğrusu ile çakışır.

M_1 den geçen doğrular için benzer münasebetler mevcuttur. Bu durumdaki her doğrunun Sfero-Stereografik izdüşümü π nin muayyen bir noktasını tepe olarak kabul eden minimal doğrular çiftinden ibarettir, Merkezî izdüşümü bu noktadan geçen tanzim doğrusu ile çakışır.

III- DÜZLEMLERİN GÖSTERİLMESİ

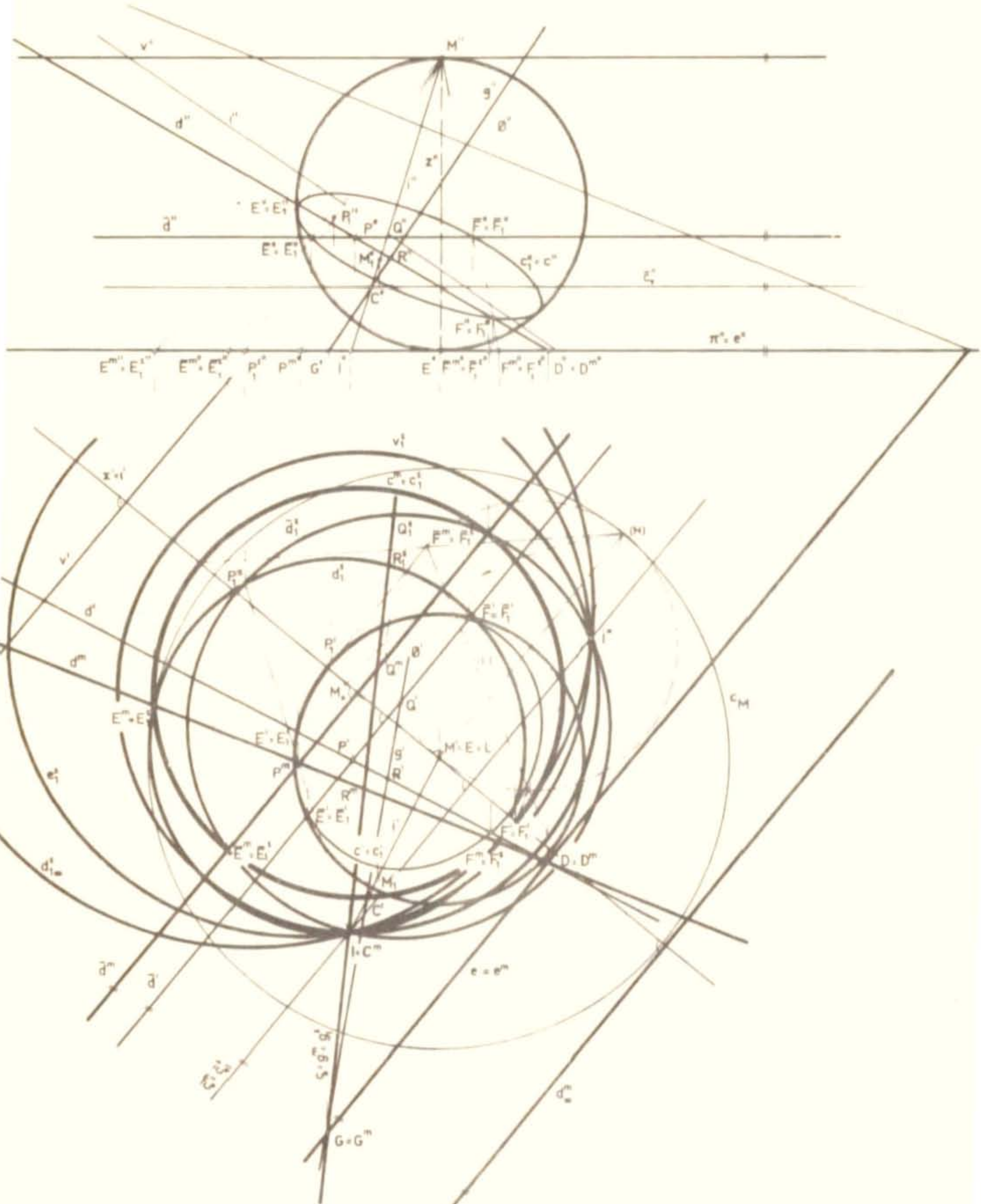
Nr.1- GENEL DURUMDAKİ DÜZLEMLER

Bilindiği gibi uzayın her ε düzlemi, hem noktaların ve hem de doğruların geometrik yeri olarak ikiparametreli noktalar ve doğrular alanını teşkil ederler.

ε düzlemini ilk olarak noktalar alanı olarak düşünelim. $\varepsilon = \varepsilon(P,\ldots)$ alanı M esas izdüşüm merkezinden π resim düzlemine izdüşürülürse $\varepsilon(P,\ldots)$ alanı ile perspektif kolinear olan $\pi(P^m,\ldots)$ alanı elde edilir.

Aynı $\varepsilon(P,\ldots)$ alanı Sfero-Stereografik izdüşüme tabi tutulursa, ilk olarak bu alan M_1 merkezinden Φ üzerine izdüşürülerek bu alan ile perspektif durumda bulunan $\Phi(P_1,\ldots)$ Sferik alanı elde edilir. Bu iki alan arasındaki perspektif uzay bağıntısının merkezi M_1 dir. M_1 den geçen bütün deste doğrularından her biri Φ izdüşüm küresini ve ε düzlemini birer noktada keser. Bu nedenle bağıntı perspektif ve bire-birdir. $\Phi(P_1,\ldots)$alanı M den π resim düzlemi üzerine izdüşürülürse $\varepsilon(P,\ldots)$ alanının Sfero-Stereografik izdüşümü olarak $\pi(P_1^s,\ldots)$alanı elde edilir (Şekil : 7).

Böylece resim düzleminde ε düzleminin Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümünü tayin eden kolokal iki $\pi(P^m,\ldots)$ ve $\pi(P_1^s,\ldots)$ alanı gösterilmiş olur. Bu alanlar arasındaki bağıntıyı tayin edelim. Bunun için ilk olarak $\pi(P^m,\ldots)$ alanının bir P^m noktasına ikinci alanda tekabül edecek şekli arayalım. P^m noktasını M ye birleştiren ışın ε düzlemini belli bir P noktasında keser. Bu noktayı M_1 den Φ üzerine izdüşüren PM_1 ışını Φ yi M_1 den farklı bir tek P_1 noktasında keser. Bu nokta M den π üzerine izdüşürülürse MP_1 izdüşüm ışını π yi bir ve yalnız bir P_1^s noktasında keser.



Şekil 7

Ters olarak $\pi(P_1^s,\ldots)$ alanında keyfî bir P_1^s noktasını alalım. Bu noktayı M ye birleştiren ışın Φ yi M den farklı belli bir P_1 noktasında deler. P_1^s noktası ε düzlemine ait muayyen bir P noktasının Sfero-Stereografik izdüşümü olarak düşünüldüğünden P_1 noktasını M_1 e birleştiren doğru ε düzlemini adı geçen P noktasında keser. P noktasının M ye göre Merkezî izdüşümü MP ışınının π yi deldiği P^m noktası olarak bulunur.

Ohalde $\pi(P^m,\ldots)$ alanının keyfî bir P^m noktasına $\pi(P_1^s,\ldots)$ alanında belli bir P_1^s noktası tekabül eder ve tersi. P^m ve P_1^s arasında (I-Nr.1) e göre tanzim şartı mevcuttur. Dolayısıyla bu iki alan arasındaki bağıntı, merkezi $\bar{I}$ çekirdek noktası olan bir perspektivitedir.

Bağıntının ikinci özeliği mertebesidir. Bu gaye için ε düzlemini doğrular alanı olarak düşünelim. Ohalde π resim düzleminde birinci alanda herhangi bir d^m doğrusunu alalım. d^m doğrusu $\varepsilon(d,\ldots)$ alanının belli bir d doğrusunun Merkezî izdüşümünü teşkil eder. Bu doğru, d^m yi M esas izdüşüm merkezine birleştiren görme düzlemi ile ε un arakesitidir. d doğrusu M_1 den Φ üzerine izdüşürülürse küre üzerinde M_1 den geçen bir d_1 çemberi elde edilir. Bu çember M den π resim düzlemi üzerine izdüşürülürse d nin Sfero-Stereografik izdüşümü olarak $\bar{I}$ çekirdek noktasından geçen muayyen bir d_1^s çemberi tayin edilmiş olur (II-Nr.1 e bakınız). Bu çember π deki iki izdüşüm alanı arasındaki bağıntıda, birinci alanda verilen bir d^m doğrusuna ikinci alanda tekabül eden şeklidir. Bu şekil bir çember, yani ikinci mertebeden bir eğri olduğundan bağıntı kuadratikdir.

Şimdi ikinci alanda bir d_1^s doğrusunu alalım. Bu doğru ε düzlemindeki muayyen bir şeklin Sfero-Stereografik izdüşümünü teşkil eder. d_1^s doğrusunu M ile birleştiren görme düzlemi Φ yi bir d_1 çemberi boyunca keser. Bu çemberi M_1 e birleştiren koni ile ε düzlemi bir konik boyunca kesişirler. Dolayisiyle Sfero-Stereografik izdüşümde doğru olarak görülen ve ε düzleminde bulunan şekil bir koniktir. Bu koniği M ye birleştiren koninin π resim düzlemindeki izi yine ikinci mertebeden bir koniktir.

Böylece görülürki ikinci alanın doğrularına da birinci alanda yine ikinci mertebeden eğriler tekabül etmektedir. Ohalde herhangi bir ε düzlemindeki alanı Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren izdüşüm alanları arasında perspektif,bire-bir ve kuadratik bir bağıntı mevcuttur.

ε düzleminde bulunan noktalar ve doğrular arasında Φ çakışma küresi üzerindeki noktalar, ε un yatay doğruları, bunlar arasında bilhassa düzlemin μ deki v kaybolma izi, π deki e izi, sonsuzdaki d_∞ doğrusu ve μ_1 tali teğet düzlemindeki doğrusu ile ε un çekirdek düzlemlerindeki doğruları ve çekirdek ekseni üzerindeki noktası önemli rol oynarlar. Bu nokta ve doğrular izdüşüm çiftleri ile şu şekilde karakterize edilebilir:

a) ε düzlemi Φ küresini bir c çemberi boyunca keser. Bu çember reel, sıfır parçalı veya sıfır yarıçaplı olabilir.c nin sıfır yarıçaplı olması halinde ε düzlemi Φ nin bir teğet düzlemi olur (II-Nr.3,a). Kürenin bütün noktaları izdüşüm prensibimizin çakışma noktaları olduğundan (I-Nr.3,a), c çemberi ε daki çakışma noktalarının geometrik yerini teşkil eder. Bu özelikten c çemberine ε un çakışma çemberi diyeceğiz. c nin c^m Merkezî ve c_1^s Sfero-Stereografik izdüşümü çakışık olduğundan, $c^m = c_1^s$ çemberinin bütün noktalarında $\varepsilon(P,\ldots)$ alanındaki noktaların izdüşüm çiftleri arasında mevcut olan bağıntıda birbirine tekabül eden iki nokta çakışmış durumda bulunur. Bu nedenle adı geçen $c^m = c_1^s$ çemberi bu bağıntının çakışma çemberi olarak isimlendirilir. ε da bulunan her d doğrusu Φ yi c çakışma çemberi üzerinde bulunan iki E,F noktasında kestiğinden bu noktaların $E^m = E_1^s$ ve $F^m = F_1^s$ izdüşümleri d yi izdüşümde gösteren d^m doğrusu ile d_1^s çemberinin kesişme noktaları olarak aynı zamanda π deki B_ε[4] bağıntısının $c^m = c_1^s$ çakışma çemberine aittir.

Böylece adı geçen çakışma çemberi verilmiş ise ε daki $d,\ldots$ doğrularının izdüşüm çiftleri arasındaki bağıntı basit bir şekilde tamamlanabilir : Örneğin ; bir d^m doğrusu π de verilmiş farzedilirse bu doğruya B_ε bağıntısında tekabül eden d_1^s çemberi bir taraftan d^m ile çakışma çemberinin $E^m = E_1^s$ ve $F^m = F_1^s$ kesişme noktalarından ve diğer taraftan sabit İ çekirdek noktasından geçer. Dolayısıyle d_1^s çemberi bu üç noktası ile tamamen belirlidir. d^m doğrusu ile çakışma çemberinin kesişme noktaları eşlenik imaginer ise İ den ve bu iki imaginer noktadan geçen d_1^s çemberi bilinen şekilde çizilebilir.

ε deki $d,\ldots$ doğrularını gösteren $(d^m, d_1^s),\ldots$ çiftleri arasındaki bağıntı, $c^m = c_1^s$ çakışma çemberi kullanılarak yukarıda belirtilen basit yol yardımıyle tamamlanabildiğinden, bu bağıntıda birbirine tekabül eden nokta çiftleri de, adı geçen çakışma çemberinden faydalanılarak tesbit edilebilir : Örneğin;, π de herhangi bir P^m noktası ε daki muayyen bir P noktasının Merkezî izdüşümü olarak alınırsa, P^m noktasına B_ε bağıntısında tekabül eden P_1^s noktasının, yani P nin Sfero-Stereografik izdüşümünün bir geometrik yeri P^m den geçen İP^m tanzim doğrusudur. İkinci geometrik yer ise (Linear gösterme metodlarında yapıldığı gibi), $P(\varepsilon)$ doğrular demetinde bulunan herhangi bir d taşıyıcı doğrusunun d_1^s izdüşümüdür. Bu nedenle d

---

4) $\varepsilon(P,\ldots)$ alanındaki noktaların izdüşüm çiftleri arasında mevcut olan bağıntıyı kısaca B_ε olarak ifade edeceğiz.

nin Merkezî izdüşümü olarak P^m den geçen keyfî bir d^m doğrusu alınır. Bu doğruya B_ε bağıntısında tekabül eden d_1^s çemberi yukarıda açıklandığı şekilde çizilir. Bu çember P_1^s noktasının ikinci geometrik yeri olduğundan $\dagger P^m$ tanzim doğrusu d_1^s yi $\dagger$ den farklı, aranan P_1^s noktasında keser.

ε düzlemi Φ küresini sıfır parçalı bir çember boyunca keserse ε daki alanı izdüşüm sistemimizde gösteren B_ε bağıntısının çakışma çemberi de sıfır parçalı olup Projektif Geometrinin esas özeliklerine göre belirtilebilir.

b) ε un yatay doğruları ve özelikle v kaybolma izi: Yatay durumda bulunan her $\bar{d}$ doğrusunun $(\bar{d}^m, \bar{d}_1^s)$ izdüşüm çifti (II-Nr.3,b) ye göre π nin $\bar{d}$ ye paralel bir doğrusu ve $\dagger$ den $\bar{d}$ ye paralel geçen tanzim doğrusu üzerinde bulunan v_1^s çekirdek çemberinin $\dagger^*$ noktasından geçen bir çemberden ibarettir. Bu prensip ε daki bütün yatay doğrular için uygulanırsa $\varepsilon(\bar{d}, \ldots)$ paralel doğrular demetinin Merkezî izdüşümü olarak ε un π deki e izinin doğrultusunda geçen $\pi(\bar{d}^m, \ldots)$ paralel doğrular demeti ve Sfero-Stereografik izdüşümü olarak da v_1^s çekirdek çemberinin e ye paralel kirişin $\dagger, \dagger^*$ uç noktalarını temel noktalar kabul eden çemberler demeti elde edilir. Adı geçen paralel doğrular demeti ve çemberler demeti arasında projektif bir bağıntı mevcuttur. Şöyleki, doğrular demetinin bir $\bar{d}^m$ doğrusu muayyen bir P^m noktasından geçerse, bu doğruya tekabül eden d_1^s çemberi, P^m ye B_ε bağıntısında tekabül eden P_1^s noktasından geçer.

ε daki yatay doğrular arasında μ kaybolma düzlemindeki v doğrusu da bulunur. Böyle bir doğrunun izdüşüm çifti (II-Nr.3,b) ye göre π nin sonsuzdaki doğrusu ve $\dagger, \dagger^*$ noktalarından geçen v_1^s çekirdek çemberi olduğundan bu (doğru-çember) çifti ε daki v kaybolma doğrusunun izdüşüm çiftini de verir.

ε un i çekirdek ekseni üzerindeki C noktasından geçen yatay doğru da önemli rol oynar. Bu doğru M ve M_1 ile birlikte muayyen bir çekirdek düzlemine ait olduğundan bu doğrunun Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümü, adı geçen çekirdek düzleminin π deki izi, yani II^* doğrusu olarak elde edilir.

c) ε daki yatay doğrular arasında ε un π deki e izi önemli rol oynar. Bu doğrunun e^m Merkezî izdüşümü bilindiği gibi e ile çakışır. e_1^s Sfero-Stereografik izdüşümü ise,yukarıda belirtilen, temel noktaları I,I^* olan çemberler demetine aittir ve e^m ile $c^m = c_1^s$ çakışma çemberinin kesişme noktalarından geçer. Bu noktalar daima eşlenik imaginerdir ve(II-Nr.3,c) ye göre Merkezî izdüşümün E esas noktasını Laguerre noktası olarak kabul ederler. Ohalde e_1^s çemberi bu koşullara göre bilinen şekilde çizilebilir. ε düzlemi $c^m{=}c_1^s$ ile verilmiş ise ε belli olduğundan e izi de bellidir. Bu iz $c^m{=}c_1^s$ çemberinin merkezini E ye birleştiren doğru üzerindeki $c^m{=}c_1^s$ nin çapucu noktalarına göre E nin harmonik eşleniği ile E nin orta doğrusu, yani L Laguerre noktalarının orta noktasından merkezler doğrusuna dik geçer[5].

d) ε un sonsuzdaki d_∞ doğrusu Merkezî izdüşümde ε un d_∞^m kaçma izi olarak görülür. Aynı doğruyu Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren $d_{1\infty}^s$ çemberi bir taraftan yine I,I^* temel noktaları ile belirtilen çemberler demetine aittir, diğer taraftan d_∞^m kaçma izi ile $c^m{=}c_1^s$ çakışma çemberinin daima eşlenik imaginer olan kesişme noktalarından geçer. Bu noktalar (II-Nr.3,d) ye göre aynı zamanda M izdüşüm merkezinin distans çemberini reel temsilcisi olarak kabul eden sıfır parçalı çemberin d_∞^m üze-

5) Bu metod yardımıyle, izdüşüm çiftleri ile verilen herhangi bir doğrunun π deki iz noktası bulunabilir.

rindeki noktaları olduğundan bu noktaları temsil eden $M_0=L$ noktası yardımıyle $d^s_{1\infty}$ çemberi bilinen prensiplere göre tamamlanabilir.

Bir ε düzlemi $c^m=c^s_1$ çakışma çemberi ile verilirse bu düzlemin d_∞ doğrusunun d^m_∞ Merkezi izdüşümü ve $d^s_{1\infty}$ Sfero - Stereografik izdüşümü kolayca bulunabilir[6].

e) ε düzlemi Φ küresini M_1 tali izdüşüm merkezindeki μ_1 teğet düzlemini muayyen bir doğru boyunca keser. Bu doğrunun Merkezî izdüşümü (II-Nr.3,f) ye göre π nin belli bir doğrusudur. Aynı doğrunun Sfero-Stereografik izdüşümü ise tepesi $\dot{I}$ olan π deki doğrular demetinin minimal doğrularından ibarettir. ε düzlemi $c^m = c^s_1$ ile verilmiş ise bu düzlemin μ_1 deki doğrusunun Sfero-Stereografik izdüşümü yukarıda belirtildiği gibi otomatikman $\dot{I}$ çekirdek noktasıdır. Adı geçen doğrunun Merkezî izdüşümü ise, $\dot{I}$ noktası (sıfır çemberi) ile $c^m = c^s_1$ nin kuvvet eksenidir.

f) ε düzlemi i çekirdek eksenini muayyen bir C noktasında keser. ε da bulunan ve C den geçen her g doğrusu i çekirdek ekseni ile birlikte bir γ çekirdek düzlemini belirler. Bu nedenle g yi Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren (g^m,g^s_1) çifti, (II-Nr.3,g) ye göre γ nın π deki c_0 izi ile çakışırlar. g üzerindeki g(Q,...) noktalar dizisi c_0 üzerinde bulunan bir projektivite yardımıyle gösterilir. Projektivitenin her çifti, g nin bir noktasını izdüşümde temsil eden nokta çiftidir. Projektivitenin esas noktaları $c_0=g^m=g^s_1$ doğrusunun $c^m = c^s_1$ çakışma çemberi üzerindeki noktalarıdır.

Ohalde, ε düzlemini π de gösteren B_ε bağıntısı tara-

---

6) $c^m=c^s_1$ ile c_M nin kuvvet ekseni d^m_∞ yi verir vb.

fından her çekirdek ışını, yani tanzim doğrusu, üzerinde teşkil edilen Projektivite, bu anlamda aynı çekirdek ışınından geçen çekirdek düzlemi ile ε un arakesit doğrusu üzerindeki dizinin izdüşümüdür.

g) ε düzlemi, izdüşüm sistemimizin i çekirdek eksenini yukarıda açıklandığı gibi muayyen bir C noktasında keser. Bu nokta, ε ile bütün çekirdek düzlemlerinin arakesit doğrularının teşkil ettiği doğrular demetinin tepesidir. C noktasının C^m Merkezî izdüşümü $\hat{I}$ çekirdek noktası ile identikdir. Sfero-Stereografik izdüşümü ise (I-Nr.3,f) ye göre π nin sonsuzdaki u_∞ doğrusu üzerindeki bütün noktalardan ibarettir. Yani i çekirdek ekseninin Sfero-Stereografik izdüşümü u_∞ doğrusu ile çakışır.

Ohalde, $\hat{I}$ çekirdek noktası ve π nin sonsuzdaki u_∞ doğrusu izdüşüm sistemimizde sabit kaldığından $(\hat{I}, u_\infty)$ eleman çifti ε un i üzerindeki C noktasını temsil eder ve ε daki alanı π de gösteren B_ε bağıntısının sabit bir çiftini verir.

Böylece adı geçen B_ε bağıntısı tüm olarak şu şekilde karakterize edilebilir :

1- Bağıntı perspektiftir. Perspektivin merkezi $\hat{I}$ çekirdek noktasıdır. Dolayısiyle bağıntıda birbirine tekabül eden (P^m, P^s_1) noktaları $\hat{I}$ den geçen bir tanzim doğrusu üzerindedir ve bir projektivite teşkil ederler.

2- Bağıntı kuadratikdir. Çünkü her d^m doğrusuna $\hat{I}$ den geçen bir d^s_1 çemberi tekabül eder.

3- Bu bağıntıda kendikendine tekabül eden noktalar, bağıntının $c^m = c^s_1$ çakışma çemberini teşkil ederler.

4- Aynı bağıntının sabit bir eleman çifti $\hat{I}$ çekirdek noktası ve π nin sonsuzdaki u_∞ doğrusudur.

Açıklanan bu özelikler B_ε bağıntısı için karakteristiktir. B_ε bağıntısının bu özelikleri, geometride bilinen " İnversiyon " a benzediğini gösterir, fakat elde edilen bağıntı "İnversiyon" değildir. Çünkü inversiyon halinde her tanzim doğrusu uzerindeki birbirine tekabül eden nokta çiftleri bir İnvolusiyon teşkil ederler. B_ε bağıntısında ise her c_0 tanzim doğrusu üzerindeki $(Q^m, Q_1^s), \ldots$ nokta çiftleri genel tipten bir projektivite meydana getirirler. Bu projektivite, keyfî nokta çiftleri gösterilmeden, c_0 ın verilmesiyle doğrudan doğruya bellidir. Çünkü projektivitenin esas noktaları sabit durumdaki çakışma çemberinin üzerindedir. Projektivitenin üçüncü çifti ise İ çekirdek noktası ve c_0 ın sonsuzdaki u_∞ doğrusu üzerinde bulunan U_∞ noktasıdır. Buradan İ çekirdek noktasının projektivitenin bir karşıt noktası olduğu görülür. Ohalde bağıntı, $c^m = c_1^s$ çakışma çemberi ve İ çekirdek noktası (Temel elemanlar olarak) ile belirlidir.

Nr.2- İZDÜŞÜMÜN KARŞILIKLI BİRE-BİRLİĞİ

(Nr.1) de ispat edildiği gibi, uzayın her ε düzlemi Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösterilirse, bu düzlemdeki nokta ve doğrular alanı π resim düzleminde perspektif kuadratik bir B_ε bağıntısı ile gösterilir. Bu bağıntının çakışma eğrisi bir çemberdir. Perspektivitenin merkezi olan İ çekirdek noktası bu bağıntıda π nin u_∞ doğrusuna tekabül eder.

Bu nedenle π de bu tipten bir B_ε bağıntısı keyfî seçilmiş düşünülürse bu bağıntıyı izdüşüm bağıntısı olarak kabul eden ε düzleminin uzay durumu tayin edilebilir. B_ε bağıntısı π nin keyfî bir $c^m = c_1^s$ çakışma çemberi ile verilmiş düşünülürse bu bağıntı tamamen belirlidir. Çünkü sabit durumdaki İ çekirdek noktası tanzim doğrularının ortak noktası olduğundan bu doğrular üzerinde bulunan ε da muayyen bir doğru üzerindeki noktalar dizisini gösteren projektivite bellidir. Projektivitenin esas noktaları $c^m = c_1^s$ çakışma çemberi üzerindedir. $\dagger$ noktası projektivitenin bir karşıt noktasıdır.

Bu bağıntı ile belirtilen ε düzleminin uzay durumu Stereografik izdüşümün esas özeliklerine göre belirlidir. Çünkü $c^m = c_1^s$ çakışma çemberi, M merkezli Stereografik izdüşümde Φ küresine ait olan c çemberi, M yi $c^m = c_1^s$ çemberine birleştiren çember konisi ile Φ nin kesişme çemberidir. Bu koni ile Φ nin tam arakesiti, bilindiği gibi dördüncü mertebedendir. Bu arakesitin bir kısmı μ kaybolma düzleminde bulunan M den geçen minimal doğrular olduklarından arakesitin diğer kısmı ikinci mertebeden bir eğri, yani Φ küresinin düzlemsel kesiti olarak bir c çemberidir. c yi taşıyan ε düzlemindeki alan π de verilen B_ε bağıntısını izdüşüm bağıntısı olarak kabul ettiğinden uzayın bütün düzlemleri ve π deki B_ε bağıntıları arasında bire-bir karşılığı mevcuttur. Çünkü B_ε bağıntısı π nin keyfî bir çemberi ile belirtilebildiğinden üçparametreli bir çokluk kurarlar. Uzayın düzlemleri de bilindiği gibi üçparametreli bir aile teşkil ederler.

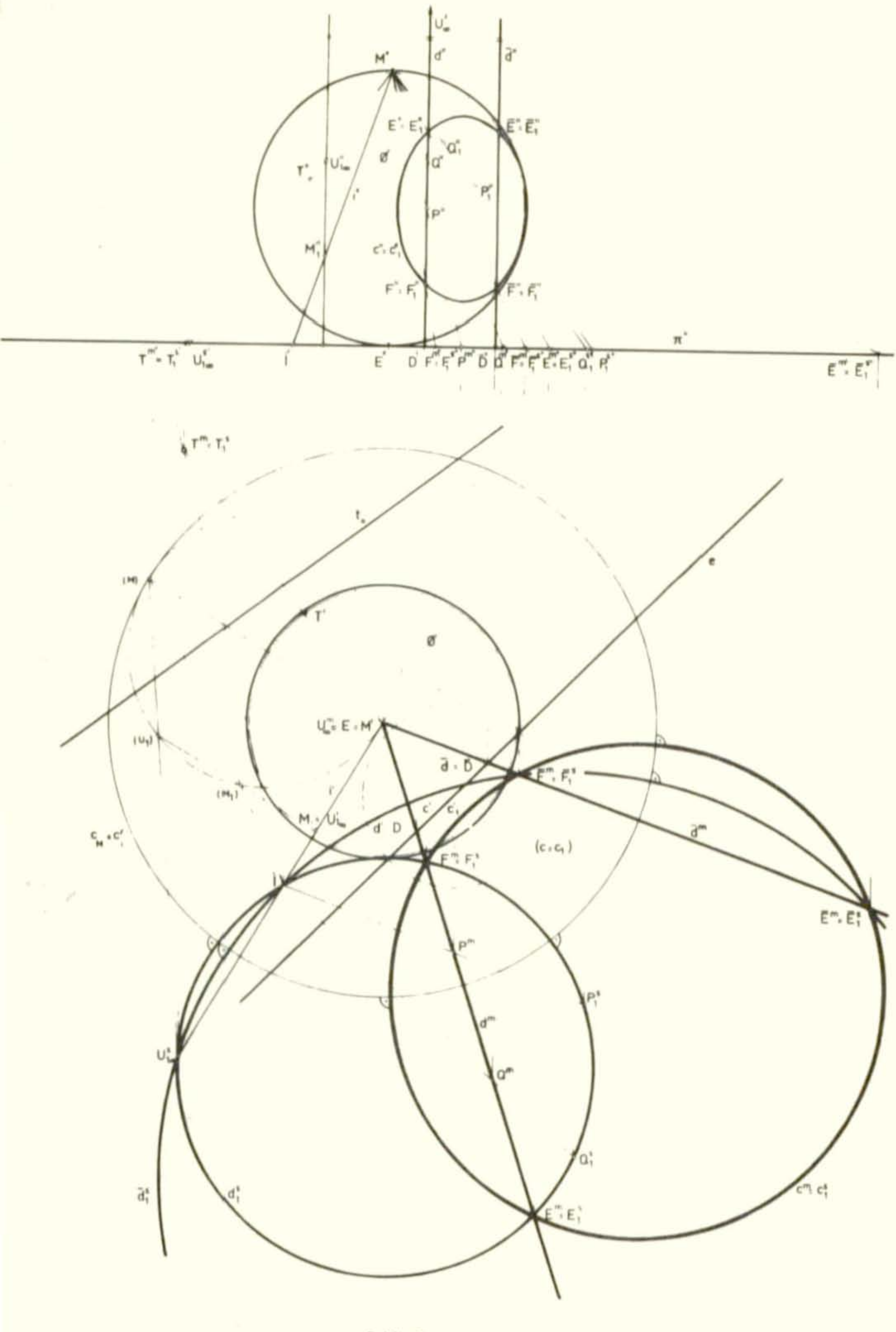
ε düzlemi uzayda bir üçgen ile verilmiş düşünülürse bu üçgenin P,Q,R köşelerini π de temsil eden (P^m, P_1^s) , (Q^m, Q_1^s), (R^m, R_1^s) nokta çiftleri $\dagger$ den geçen birer tanzim doğrusu üzerinde keyfî durumda alınabilir. ε düzlemi P,Q,R noktaları ile belirtilmiş olduğundan bu düzlemi π de gösteren B_ε bağıntısı da adı geçen üç nokta çifti ile belirtilmelidir. B_ε bağıntısı bu şekilde üç nokta çifti ile verilmiş farzedilirse, doğrudan doğruya PQR üçgeninin kenarları Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösterilebilir : Örneğin ; P,R noktalarını birleştiren d doğrusu Merkezî izdüşümde $d^m = P^mR^m$ doğrusu ve Sfero-Stereografik izdüşümde de P_1^s, R_1^s ve İ noktalarından geçen d_1^s çemberi olarak elde edilir. Bu çemberin d^m üzerindeki $E^m = E_1^s$, $F^m = F_1^s$ noktaları $c^m = c_1^s$ çakışma çemberine aittir. Analog işlem PQR üçgeninin diğer bir kenarı için tatbik edilirse bu çakışma çemberinin diğer noktaları bulunabilir. Böylece B_ε bağıntısının çakışma çemberi tayin edilmiş olur ve ε düzleminin uzay durumu yukarıda açıklanan yolla belirtilebilir. Bu düzlem aynı zamanda çakışma münasebetlerini kullanmadan da belirtilebilir. Çünkü (P^m, P_1^s) izdüşüm çifti ile verilen P noktasının uzay durumu (I-Nr.2) ye göre belirlidir. Bu şekilde tesbit edilen P,Q,R noktalarını taşıyan düzlem ε düzlemidir.

Nr.3- İZDÜŞÜM SİSTEMİNE GÖRE ÖZEL DURUMDAKİ DÜZLEMLER

a) Φ Küresinin teğet düzlemleri

Φ küresinin her τ teğet düzlemi küreye belli bir T noktasında teğettir. Dolayısıyle küreyi T(τ) demetindeki minimal doğrular boyunca keser. Başka kelimelerle, Φ nin τ daki c kesit çemberi sıfır çemberidir. Bu nedenle τ daki nokta ve doğrular alanını π de gösteren B_τ bağıntısının çakışma çemberi de bir sıfır çemberinden ibarettir. Bu çemberin merkezi, τ nun T değme noktasını Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren $T^m = T_1^s$ noktasıdır (Şekil : 8).

Böylece $c^m = c_1^s$ çemberi yerine $T^m = T_1^s$ noktasını tepe olarak kabul eden ve π de bulunan doğrular demetindeki minimal doğrular elde edilir. Adı geçen çemberin bozulmuş olmasına rağmen B_τ bozulmuş olmayan perspektif, kuadratik ve merkezi İ olan bir bağıntıdır. Dolayısıyle bu bağıntının tamamlanması genel metoda göre yapılabilir. Örneğin π nin keyfî bir P^m noktası τ daki bir P noktasının Merkezî izdüşümü olarak düşünülürse P^m ye B_τ bağıntısında tekabül eden nokta, P^m



Şekil: 8

den geçen $\dot{I}P^m$ çekirdek ışını üzerinde bulunur ve bu doğru üzerinde B_τ bağıntısı tarafından meydana getirilen projektivitede P^m noktasına tekabül eder. Projektivitenin esas noktaları genel halde olduğu gibi bu doğru üzerinde bulunan çakışma noktaların - dan ibaret olduğu için bu iki nokta şimdiki halde T^m noktasından geçen minimal doğrulara aittir. Yani bu iki eşlenik imaginer nokta, T^m noktasını bir Laguerre noktası olarak kabul eder. Projektivitenin bir karşıt noktası $\dot{I}$ çekirdek noktası olduğundan bu bağıntı bellidir ve aynı şekilde π nin keyfi bir doğrusuna B_τ bağıntısında tekabül eden çember belirtilebilir.

Φ nin teğet düzlemleri arasında μ kaybolma düzlemi, M_1 deki μ_1 teğet düzlemi ve ayrıca π resim düzlemi de bulunur. μ kaybolma düzleminin bütün noktaları Merkezî izdüşümde π nin u_∞ doğrusu üzerinde bulunur. Sfero-Stereografik izdüşümleri ise π deki alanı doldurur. Bu nedenle μ deki alanı gösteren bağıntı bozulmuştur.

μ_1 deki alanı gösteren bağıntının çakışma çemberi $\dot{I}$ çekirdek noktasından geçen minimal doğrulardır. π deki alanı gösteren B_π bağıntısı Φ nin keyfî teğet düzlemlerindeki alanların gösterilmesine eşittir. Bağıntının çakışma çemberi E esas noktasından geçen minimal doğrulardır. Bu bağıntı (I-Nr.3,c) de ispat edilmiştir.

b) π Resim düzlemine paralel düzlemler

Bu durumdaki her düzlem Φ küresini bir c paralel çemberi boyunca keser. c nin $c^m = c_1^s$ izdüşümü E esas noktasını merkez olarak kabul eder. Bu özelik π ye paralel her düzlemdeki alanı gösteren bağıntı için karakteristikdir.

c) π Resim düzlemi

π resim düzlemindeki alanı gösteren B_π bağıntısı a) da tarif edilmiştir. Bu bağıntının çakışma noktaları ilgili yerde açıklandığı gibi E esas noktasından geçen minimal doğrular üzerindedir.

d) Sonsuzdaki Ω düzlemi

Uzayın sonsuzdaki Ω düzlemi Φ küresini $c_{i\infty}$ mutlak koniği boyunca kestiğinden bu koniğin M merkezli Merkezî izdüşümü bilindiği gibi M nin distans çemberini reel temsilcisi olarak kabul eden sıfır parçalı c_i^r çemberidir. Bu çember genel özeliklere göre sonsuzdaki düzlemde bulunan alanı izdüşüm sistemimizde gösteren B_Ω bağıntısının çakışma çemberidir. Adı geçen bağıntı bu şekilde keyfî bir düzlemi gösteren bağıntıda olduğu gibi belirtilmiş olduğundan sonsuzdaki alanın izdüşüm çifti bilinen şekilde tamamlanabilir.

e) π Resim düzlemine dik düzlemler

π ye dik durumda bulunan her ε düzlemi π ye dik doğruların sonsuzdaki U_∞ noktasını ihtiva eder. Bu nedenle adı geçen noktanın izdüşüm çifti bu düzlemlerdeki alanları gösteren bağıntıların ortak bir çiftidir. (II-Nr.3,e) de açıklandığı gibi bu U_∞ noktasının Merkezî izdüşümü E esas noktasında bulunur. U_∞ un Φ küresi üzerindeki $U_{1\infty}$ Sferik izdüşümü bu küre ile M_1 den geçen düşey doğrunun M_1 den farklı kesişme noktasıdır. Bu noktanın Merkezî izdüşümü E den geçen çekirdek ışını üzerinde bulunan muayyen bir $U_{1\infty}^s$ noktasıdır. π ye dik her ε düzlemindeki alanı gösteren B_ε bağıntısı $U_\infty^m = E$, $U_{1\infty}^s$ noktalarını ortak çift olarak kabul eder ve bu ilişki adı geçen durumda bulunan bütün düzlemler için karakteristikdir. π ye dik düzlemler ikiparemetreli bir çokluk teşkil ettiklerinden bunları gösteren B_ε bağıntıları π de ikiparemetreli çokluk kurarlar.

Yani böyle bir bağıntı,herhangi bir d doğrusunun (d^m,d_1^s)izdüşüm çiftinin seçilmesi ile belirtilebilir. Bu çift ile belirtilen keyfî iki P,Q noktasının (P^m,P_1^s) ve (Q^m,Q_1^s) izdüşüm çiftleri tanzim doğruları şartına uygun şekilde alınırsa bu iki çift sabit $(E,U_{1\infty}^s)$ çifti ile birlikte ε düzlemini gösteren $B_\varepsilon$bağıntısı için üç nokta çiftini verir (Şekil : 8).

Her düşey düzlem M deki düşey doğrunun sonsuzdaki noktasını ihtiva eder. Bu noktanın Merkezî izdüşümü sabit $U_\infty^m = E = M'$ ve Sfero-Stereografik izdüşümü sabit $U_{1\infty}^s$ noktasıdır.

Her düşey düzlemin sonsuzdaki doğrusunun mutlak koniği kestiği noktalar, düzlemin çakışma çemberine ait olacağından bu mutlak noktaların Merkezî izdüşümleri M nin distans çemberi ile temsil edilen imaginer çember ile çakışma çemberinin Merkezî izdüşümünün ortak noktaları olacaktır. Düşey düzlemin sonsuzdaki doğrusunun Merkezî izdüşümü $U_\infty^m = E = M'$ noktasından geçen ve düzlemin e izine paralel bir doğru olduğundan çakışma çemberinin merkezini M' noktasına birleştiren merkezler doğrusuna dik olan doğrudur. Ohalde mutlak noktaların izdüşümleri merkezler doğrusuna distans çemberinin M' merkezinde dik olan doğru ile distans çemberinin kesişme noktaları olan çapucu noktaları ile temsil edilen noktalardır. Ohalde çakışma çemberi mutlak koniğin Merkezî izdüşümünü çapı boyunca keseceğinden bunun reel temsilcisi olan distans çemberini dik keser. Bu özelik bütün düşey düzlemler için karakteristik koşul verir.

Benzer ispatla görülürki, bütün düşey doğruların Sfero-Stereografik izdüşüm çemberlerinin meydana getirceği $\hat{I},U_{1\infty}^s$temel noktalı çemberler demetinin her çemberi de adı geçen distans çemberini dik keserler. Yani distans çemberi kuvvet çemberi özeliğini taşır. Bu da yukarıdaki özeliği bir defa daha kanıtlar.

Ohalde düşey düzlemin çakışma çemberi için karakteristik özelik " Distans çemberini dik kesme koşuludur " şeklinde daha kısa olarak ifade edilebilir.

f) İzdüşüm sisteminin çekirdek düzlemleri

i ekseninden geçen her γ düzlemi bir çekirdek düzlemidir. Bu düzlemin c_0 izi İ den geçen bir çekirdek ışınından ibarettir. γ daki noktalar alanının Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümleri c_0 üzerinde bulunduğundan γ daki her P noktasının (P^m, P_1^s) izdüşüm noktaları c_0 doğrusuna aittir. Ters olarak bu iz üzerinde bulunan keyfî bir (P^m, P_1^s) çifti (I-Nr.1)de açıklandığı gibi γ da bulunan muayyen bir P noktasını tespit eder. Böylece γ daki noktalar alanı c_0 üzerindeki kolokal iki noktalar dizisinden ibarettir. γ daki her g doğrusu üzerindeki noktalar dizisini Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde gösteren noktalar dizileri (II-Nr.3,g) de gösterildiği gibi bir projektiviteyi teşkil ederler. Projektivitenin bir karşıt noktası İ dir. Projektivitenin esas noktaları genel hallerde olduğu gibi g ile Φ küresinin kesişme noktalarını izdüşümlerde gösteren noktalardır.

IV- NOKTA, DOĞRU VE DÜZLEMLERİN İNSİDENS MÜNASEBETLERİ

Nr.1- NOKTA VE DOĞRUNUN İNSİDENS DURUMU

Bir P noktası, bir d doğrusu ile insidens durumunda ise, (II-Nr.1) de açıklandığı gibi, P nin P^m Merkezî izdüşümü d nin d^m Merkezî izdüşümü üzerinde ve P_1^s Sfero-Stereografik izdüşümü de P^m den geçen tanzim doğrusu ile d_1^s nin kesişme noktasında bulunur, yani P_1^s noktası d_1^s çemberine aittir.

Ters olarak, π resim düzleminde d doğrusu (d^m, d_1^s) izdüşüm çifti ile verilmiş ise, İ den geçen bir tanzim doğrusunun d^m

yi kestiği P^m noktasını Merkezî izdüşümü ve d_1^s yi kestiği P_1^s noktasını da Sfero-Stereografik izdüşümü olarak kabul eden P noktası uzayda d doğrusu ile insidens durumunda bulunur (Şekil:4).

Nr.2- İKİ DOĞRUNUN İNSİDENT DURUMU (Kesişme durumu)

Uzayın iki $d,\bar{d}$ doğrusu aynı bir P noktası ile insidens durumunda bulunursa, bu durumdaki doğrulara " İnsident " diyoruz. İnsident durumunda bulunan iki doğru aynı zamanda bir ε düzlemi ile de insidens olur.

$d,\bar{d}$ doğruları bir P noktası ile insidens durumunda bulunursa bu doğruların $d^m,\bar{d}^m$ Merkezî izdüşümlerinin kesişme noktası P nin P^mMerkezî izdüşümünü, $d_1^s,\bar{d}_1^s$ Sfero-Stereografik izdüşüm çemberlerinin İ den farklı kesişme noktaları P^m den geçen tanzim doğrusu üzerinde bulunur ve P_1^s izdüşümünü verir (Şekil:7).

Ters olarak, π resim düzleminde, Merkezî izdüşümleri ile Sfero-Stereografik izdüşümlerinin kesişme noktaları aynı bir tanzim doğrusu üzerinde bulunursa bu iki doğrunun izdüşümlerinin kesişme noktalarını aynı isimli izdüşümü olarak kabul eden belli bir P uzay noktası ile insidens durumunda bulunurlar, yani insident olurlar.

Nr. 3- NOKTA VE DÜZLEMİN İNSİDENS DURUMU

Bir P noktası, muayyen bir ε düzlemi ile insidens durumunda ise (III-Nr.1) e göre P nin P^m Merkezî izdüşümü, $\varepsilon(P,...)$ alanını izdüşümde gösteren $\pi(P^m,...)$ alanına ve P_1^s Sfero-Stereografik izdüşümü de $\pi(P_1^s,...)$ alanına aittir. Yani (P^m,P_1^s) çifti $\pi(P^m,...)$ ve $\pi(P_1^s,...)$ alanları arasında mevcut olan B_ε bağıntısının bir çiftidir (Şekil :7).

Nr.4- DOĞRU VE DÜZLEMİN İNSİDENS DURUMU

Herhangi bir d doğrusu, bir ε düzlemi ile insidens durumunda bulunursa, d doğrusunun Φ küresi üzerindeki E,F çakışma noktaları, ε un $c^m=c_1^s$ çakışma çemberi ile insidens durumunda bulunacaklarından bunların π deki izdüşümleri de değişmez kalır. Bu nedenle d nin E,F çakışma noktalarının $E^m=E_1^s$ $F^m=F_1^s$ izdüşümleri ε un $c^m=c_1^s$ çakışma çemberine aittir.

Ters olarak, π de (d^m,d_1^s) izdüşüm çiftleri ile verilen bir d doğrusunun çakışma noktaları, izdüşümde ε düzlemini belirleyen $c^m=c_1^s$ çakışma çemberine ait ise, d doğrusu uzayda ε düzlemi ile insidens durumunda bulunur (Şekil : 7,8).

V- PROJEKTİF TEMEL ŞEKİLLER

Nr.1- NOKTALAR DİZİSİ

Bilindiği gibi, her noktalar dizisi, uzayın belli bir d doğrusu ile insidens durumunda bulunan birparametreli noktalar çokluğudur. Böyle bir d(P,...) dizisinin Merkezî ve Sfero - Stereografik izdüşümü (II-Nr.1) de açıklanmıştır (Şekil :4).

Nr. 2- DOĞRULAR DEMETİ

Uzayda sabit bir ε düzlemi ve bu düzlemle insidens durumunda bulunan sabit bir P noktası gözönüne alınırsa, ε da bulunan ve P den geçen d,... doğrular ailesi, bilindiği gibi birparametreli bir çokluk teşkil ederler ve $P(\varepsilon)$ doğrular demetı olarak isimlendirilir. P noktası bu demetin tepesi, ε düzlemi ise taşıyıcı düzlemidir.

$P(\varepsilon)$ demetine ait her d doğrusu, bir taraftan ε düzlemiyle ve diğer taraftan ε ile insidens durumunda olan P noktasiyle insidens durumunda bulunduğundan, demetin her d doğrusunun d^m Merkezî izdüşümü P nin P^m izdüşümünden geçer, d_1^s Sfero-Stereografik izdüşüm çemberi ise, $(\text{İ},P_1^s)$ noktaları temel noktalar olarak kabul eden çemberler demetine aittir. O-halde, $P(\varepsilon)$ doğrular demetinin izdüşümü olarak π resim düzleminde $P^m(d^m,...)$ doğrular demeti ve yukarıda belirtilen çemberler demeti elde edilir.

$P(\varepsilon)$ demetindeki her d doğrusunun $E=E_1$, $F=F_1$ çakışma noktaları ε taşıyıcı düzleminin $c=c_1$ çakışma çemberine ait olduğundan bunların izdüşümleri olan $E^m=E_1^s$, $F^m=F_1^s$ noktaları da $c^m=c_1^s$ çakışma çemberi üzerinde bulunurlar (Şekil:7).

Bu özeliklerden açıkca görülürki, $P(\varepsilon)$ demetinin her bir d doğrusunun d^m Merkezî izdüşümü, aynı doğrunun d_1^s Sfero-Stereografik izdüşüm çemberi ile ε taşıyıcı düzleminin $c^m=c_1^s$

çakışma çemberinin kuvvet eksenidir. Diğer taraftan aynı demetin Sfero-Stereografik izdüşümü teşkil eden çemberler demetinin kuvvet ekseni(temel noktaları taşıyan eksen) de P^m den geçer. Ohalde P^m noktası, temel noktaları $\dot{I},P_1^s$ olan çemberler demeti ile bu demetin her bir d_1^s çemberinin ayrı ayrı ε un $c^m=c_1^s$ çakışma çemberiyle teşkil ettiği kuvvet eksenlerinin kesişme noktası, yani adı geçen çemberlerin kuvvet merkezidir. Bu nedenle P^m merkezli ve yukarıda belirtilen çemberlerden birini dik kesen ς_{pm} çemberi adı geçen bütün çemberleri dik keser(Şekil:10).[7]

Bu bağıntı aynı zamanda nokta ile düzlemin insidenslik şartını da verir.

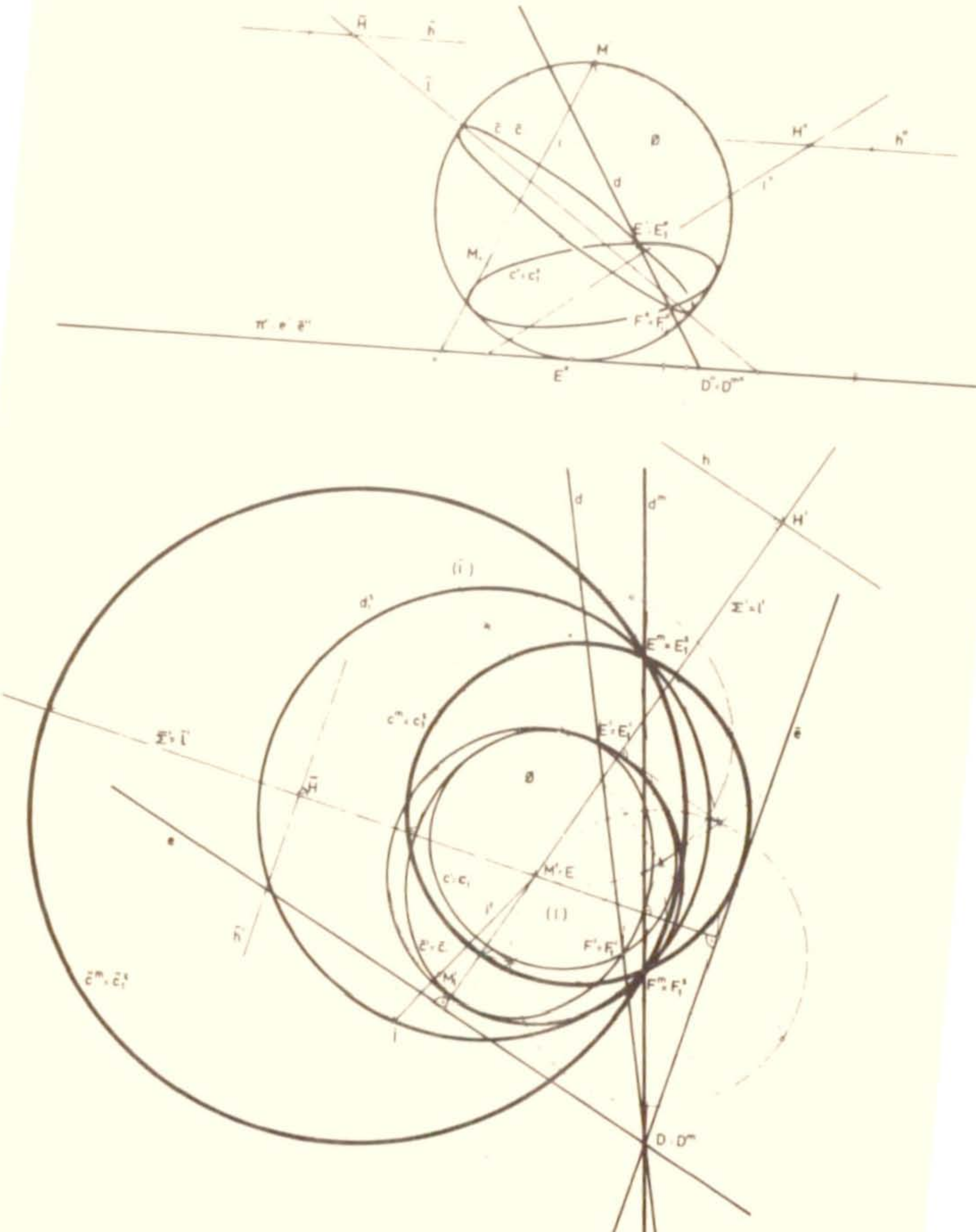
Nr.3- DÜZLEMLER DEMETİ

Uzayın bir d doğrusu ile insidens durumunda bulunan $\varepsilon,\bar{\varepsilon},\ldots$ düzlemleri birparametreli temel şekil olan düzlemler demetini teşkil ederler ve $d(\varepsilon,\ldots)$ şeklinde gösterilir. Demetin her düzlemi d ile insidens olduğundan d nin $E=E_1$, $F=F_1$ çakışma noktaları $\varepsilon,\ldots$ düzlemlerine ait olan $c=c_1,\ldots$ çakışma çemberlerinin ortak noktalarıdır. Bu nedenle $d(\varepsilon,\ldots)$düzlemlerini π de gösteren izdüşüm alanlarının $c^m=c_1^s,\ldots$ çakışma çemberleri $E^m=E_1^s$, $F^m=F_1^s$ noktalarını temel noktalar kabul eden çemberler demetini teşkil ederler (Şekil : 9). d_1^s çemberinin de adı geçen çemberler demetinin bir çemberi olduğu açıktır.

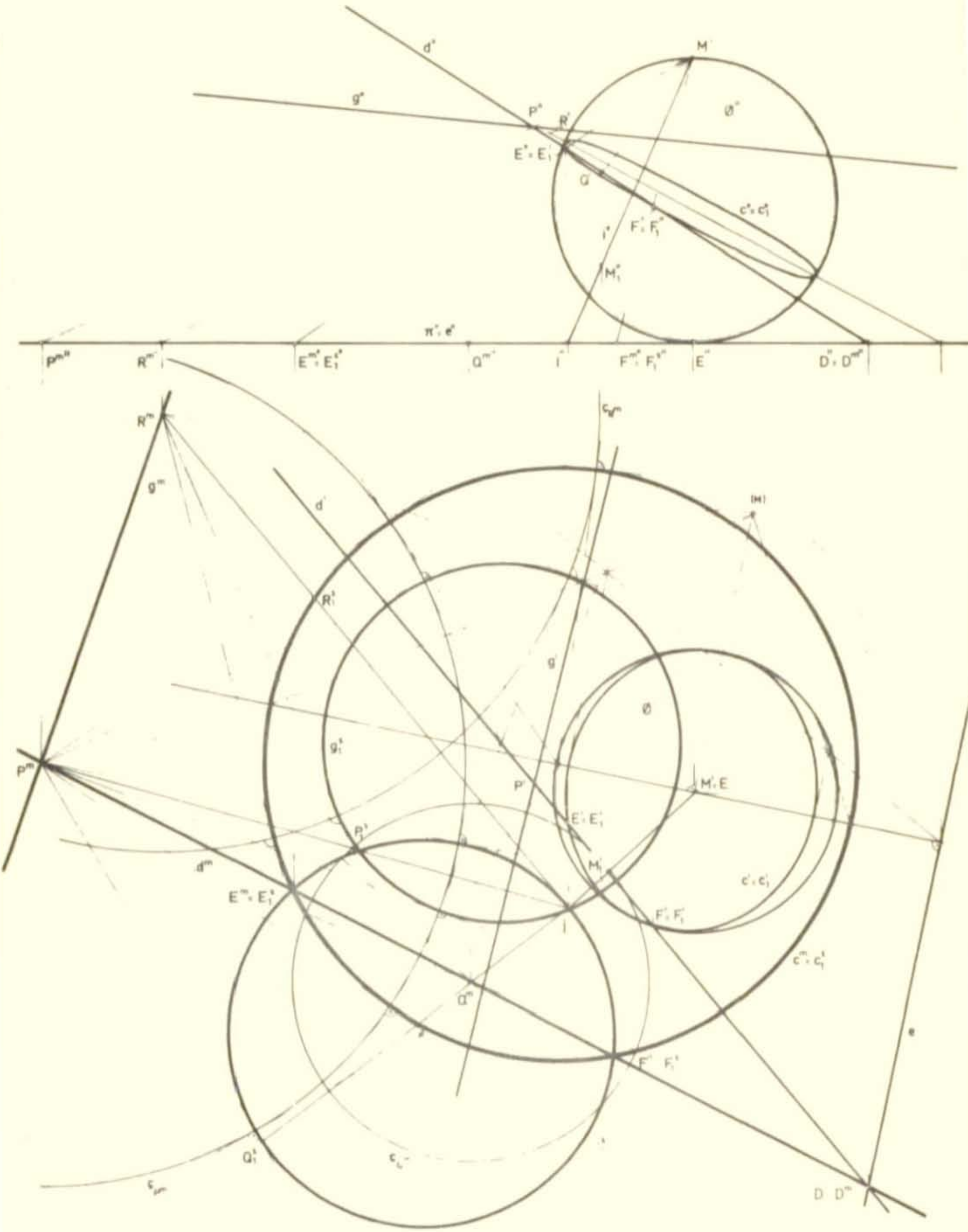
Ters olarak, π resim düzleminde, (d^m,d_1^s) izdüşüm çifti ile verilen bir d doğrusunun $E^m=E_1^s$, $F^m=F_1^s$ çakışma noktalarından geçen çemberler $\varepsilon,\bar{\varepsilon},\ldots$ düzlemlerinin $c^m=c_1^s$, $\bar{c}^m=\bar{c}_1^s,\ldots$

---

7) Bu çembere P nin karakteristik çemberi diyeceğiz. Çünkü böyle bir çember, P yi tepe olarak kabul eden doğrular demetini, demet düzleminin $c^m=c_1^s$ çakışma çemberi ve $\dot{I}$ çekirdek noktası ile birlikte belirler.



Sekil: 9


d''
M''
g''
P''
R''
Ø''
E''= E₁''
Q''
c''= c₁''
F''= F₁''
i''
M₁''
π''= e''
R'''
E'''= E₁'''
Q'''
i'''
F'''= F₁'''
E''
D''= D'''
R'''
g'''
d'
R₁'
g'
Ø
g₁'
P'
M'= E
E'= E₁'
P₁'
d'''
E'''= E₁'
M₁'
c'= c₁'
F'= F₁'
i
c'''= c₁'
Q'''
F'''= F₁'
e
Q₁'
D= D'''

Şekil 10

çakışma çemberleri olarak alınırsa adı geçen düzlemler uzayda d doğrusu ile insidens durumunda bulunurlar, yani d(ε,...) düzlemler demetini meydana getirirler.

Nr.4- DÜZLEMSEL NOKTALAR ALANI

Düzlemsel noktalar alanı, bilindiği gibi uzayın muayyen bir ε düzlemi ile insidens durumunda bulunan noktalar çokluğudur. Bu nedenle böyle bir alanın Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümü ε düzleminin gösterilmesinden ibarettir. Dolayısiyle düzlemsel noktalar alanının izdüşüm bağıntısı (III-Nr.1) de açıklanmıştır.

Nr.5- DÜZLEMSEL DOĞRULAR ALANI

(Nr.4) de olduğu gibi düzlemsel doğrular alanı da(III-Nr.1) de açıklandı.

Nr.6- DOĞRULAR DESTESİ

Uzayın sabit bir P noktası ile insidens durumunda olan d,... doğruları ikiparametreli bir çokluk teşkil ederler ve doğrular destesi olarak isimlendirilirler. Adı geçen deste ikiparametreli bir temel şekil olduğundan, bunun π deki izdüşümlerini gösteren şeklin de ikiparemetreli olması gerektiği açıktır.

Desteye ait her d doğrusu izdüşümde d yı M esas izdüşüm merkezine birleştiren ε düzleminin π deki d^m izi ve $\alpha = [dM_1]$ düzlemi ile Φ nin d_1 arakesit çemberinin d_1^s izdüşüm çemberi olarak elde edilir (II-Nr.1). Buradan açıkca görülürki d^m doğrusu desteye ait ∞^1 sayıdaki d doğrusunun Merkezî izdüşümüdür. Yani destenin ε düzleminde bulunan kesit demetinin taşıyıcı düzlemi, Merkezî izdüşümde izdüşüren olduğundan bütün demet doğruları bu izdüşümde bir tek doğru olarak görülürler. Bu demetin doğruları M_1 tali izdüşüm merkezine göre genel durumda bulunduklarından bunların Sfero-Stereografik izdüşümü $\dot{I}, P^s$ noktaları temel noktalar olarak kabul eden çemberler demetini teşkil eder. Elde edilen bu çemberler demetinin muayyen bir d_1^s çemberi desteye ait herhangi bir d doğrusunun izdüşümü olduğundan (II-Nr.1) e göre d_1^s çemberi d yi M_1 e birleştiren α düzlemi ile ϕ nin d_1 arakesit çemberinin M den π üzerindeki Stereografik izdüşümüdür. Dolayısıyle α düzleminde bulunan ∞^1 sayıdaki deste doğrusunun Sfero-Stereografık izdüşümü analog münasebetler sebebiyle π de bir tek d_1^s çemberini verir.

Böylece görülürki, P tepeli doğrular destesi, Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde P^m tepeli doğrular demeti ve temel noktaları $\dot{I}, P_1^s$ olan çemberler demeti olarak elde edilir. Ancak her d^m doğrusu ∞^1 sayıdaki doğrunun Merkezî izdüşümü ve her d_1^s çemberi de ∞^1 sayıdaki doğrunun Sfero-Stereografik izdüşümünü gösterdiğinden doğrular demetinin her bir d doğrusu, çemberler demeti ile birlikte destenin ∞^1 sayıdaki doğrusunun izdüşümünü ve çemberler demetinin her bir d_1^s çemberi, doğrular demeti ile birlikte aynı destenin ∞^1 doğrusunun izdüşümünü belirler. Bu nedenle $P^m(d^m,\ldots)$ doğrular demeti ve temel noktaları $\dot{I}, P_1^s$ olan çemberler demeti ikiparemetreli bir çokluğu temsil ederler, yani adı geçen desteyi izdüşümde tayin ederler. Çemberler demetinin kuvvet ekseni, aynı zamanda bir tanzim doğrusu olarak P^m noktasından geçer. Ohalde P^m nın, demetin bütün çemberlerine göre kuvveti aynıdır, yani P^m yi merkez kabul eden ve demet çemberlerinden birini dik kesen ς_{pm} çemberi, demetin bütün çemberlerini de dik keser[8] (Şekil:10).

---

8) P^m nin ς_{pm} karakteristik çemberinin bu özeliği, ileride görüleceği gibi bazı konstrüktif problemler için birtakım kolaylıklar sağlar.

Nr.7- DÜZLEMLER DESTESİ

Uzayın sabit bir P noktası ile insidens durumunda bulunan $\varepsilon, \ldots$ düzlemleri, bilindiği gibi ikiparametreli bir çokluk teşkil ederler ve $P(\varepsilon, \ldots)$ "Düzlemler Destesi" olarak isimlendirilir. Böyle bir destenin Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümü (III-Nr.1) e göre çakışma çemberleriyle gösterilebilir. (Nr.2) den de açıkca görülürki destenin tepesi olan P noktasının P^m Merkezî izdüşümünü merkez ve $\bar{I}, P_1^s$ noktalarını temel noktalar olarak kabul eden çemberler demetini dik kesen $ç_{pm}$ çemberini, $P(\varepsilon, \ldots)$ destesinin her düzleminin çakışma çemberini dik keser (Şekil : 10).

Ters olarak, π resim düzleminde aynı tanzim doğrusu üzerinde (P^m, P_1^s) nokta çifti alınırsa, yukarıda tanımlanan P^m merkezli $ç_{pm}$ sabit çemberini dik kesen π nin ∞^2 sayıdaki çemberi, çakışma çemberi olarak kabul eden $\varepsilon, \ldots$ düzlemleri uzayda, (P^m, P_1^s) izdüşüm çiftinin belirlediği P noktasından geçerler.

VI- TEMEL DURUM PROBLEMLERİ

Nr.1- BİRLEŞTİRME PROBLEMLERİ

a) İki noktanın birleştirilmesi

Uzayın iki P,Q noktasının birleştirilmesiyle bir d doğrusu elde edilir. Dolayisiyle P ve Q noktalarının izdüşüm - leri (II-Nr.1) e göre d nin izdüşümü üzerinde bulunurlar. Yani π resim düzleminde P^m, Q^m noktalarını birleştiren doğru d nin d^m izdüşümü ve P_1^s , Q_1^s ve İ çekirdek noktasından geçen çember de d nin d_1^s izdüşümünü verir (Şekil:4).

b) Üç nokta veya doğru ile noktanın birleştirilmesi

Üç P,Q,R noktasının birleştirilmesiyle bir ε düzlemi elde edilir. Bu şekilde verilen ε düzleminin gösterilmesini (III-Nr.1) de açıkladık. Bu üç nokta ikişer ikişer birleştirildiğinde ε düzlemi ile insidens durumunda olan doğrular elde edilir (Şekil : 7). Doğru ile noktanın birleştirilmesi yukarıdaki probleme dönüştürelerek yapılır.

Nr.2- KESİŞME PROBLEMLERİ

a) Aynı düzlemdeki iki doğrunun kesişme noktası

İki, $d, \bar{d}$ doğrusu aynı bir ε düzlemi ile insidens durumunda bulunursa (IV-Nr.2) ye göre bu iki doğru aynı zamanda bir P noktası ile de insidens durumunda bulunurlar, yani bu noktada kesişirler. P noktası her iki doğrunun ortak elemanı olduğundan $d^m, \bar{d}^m$ doğrularının kesişme noktası P nin P^m Merkezî izdüşümünü ve $d_1^s, \bar{d}_1^s$ çemberlerinin İ den farklı kesişme noktası da P nin P_1^s Sfero-Stereografik izdüşümünü verir (Şekil:7). Yani P^m noktası $d_1^s, \bar{d}_1^s$ çemberinin kesişme kirişlerinin üzerinde bulunur.

b) İki düzlemin arakesit doğrusu

İki $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ düzlemi kesişiyorlarsa, bu düzlemler muayyen öz bir d doğrusu ile insidens durumunda bulunurlar. Bu nedenle d doğrusunun çakışma noktaları, hem ε un $c^m=c^s_1$ çakışma çemberine ve hem de $\bar{\varepsilon}$ nin $\bar{c}^m=\bar{c}^s_1$ çakışma çemberine aittir(Şekil:9).

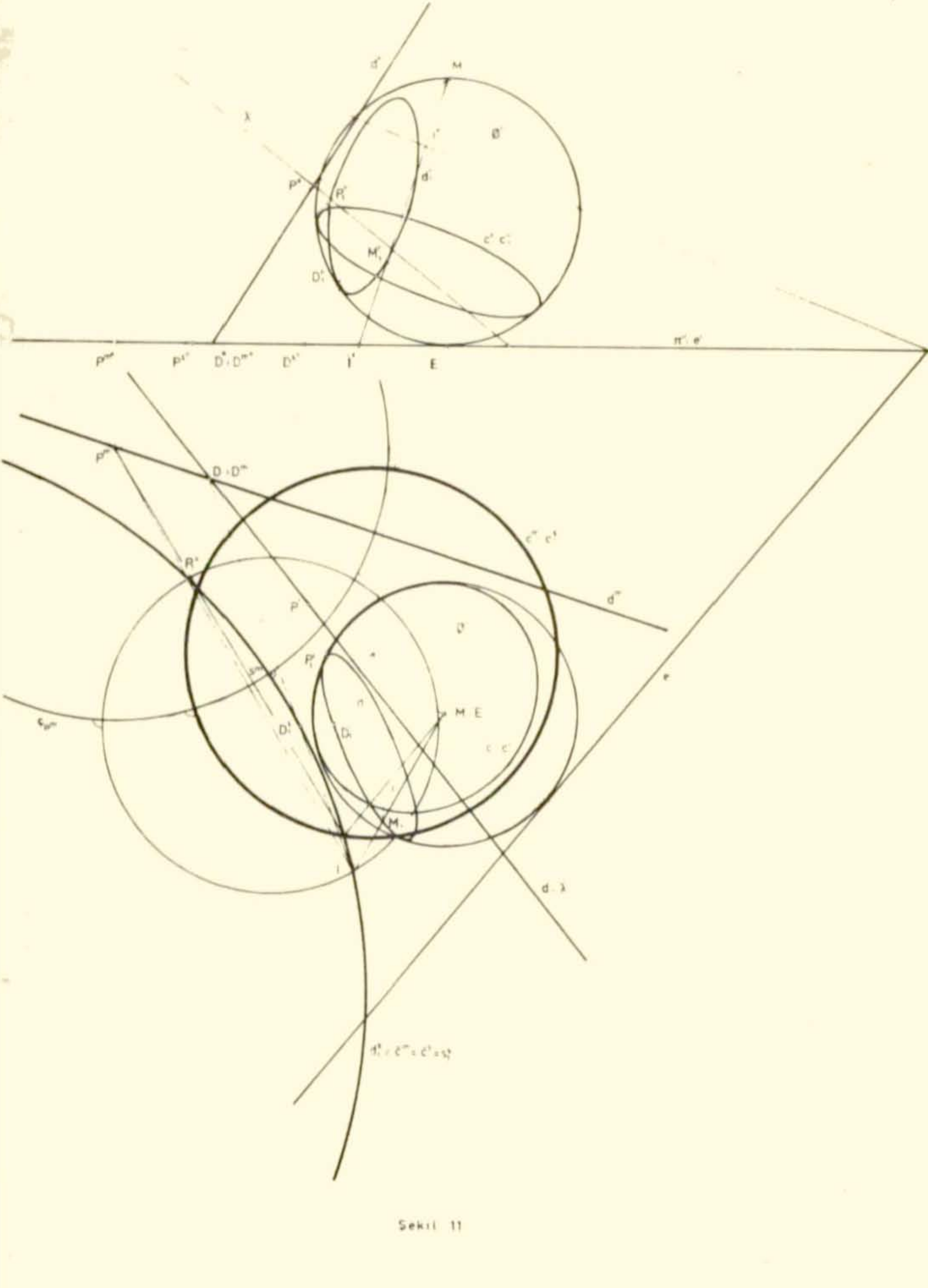
Ohalde,π resim düzleminde iki $c^m=c^s_1,\bar{c}^m=\bar{c}^s_1$ çemberi,Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde uzayın iki $\varepsilon,\bar{\varepsilon}$ düzleminin çakışma çemberleri olarak verilmişse, bu çemberlerin $E^m=E^s_1$, $F^m=F^s_1$ ortak noktalarını birleştiren doğru, adı geçen düzlemlerin d arakesit doğrusunun d^m Merkezî izdüşümü ve aynı noktalardan ve $\dagger$ çekirdek noktasından geçen çember de d nin d^s_1 Sfero-Stereografik izdüşümünü temsil eder.

Verilen iki düzlemin, Φ çakışma küresinin bir teğeti boyunca kesişmesi halinde, bu düzlemlere ait çakışma çemberlerinin birbirine teğet olacağı açıktır.

c) Doğru ile düzlemin kesişme noktası

Bir d doğrusu ile bir ε düzleminin kesişmesiyle bilindiği gibi bir P noktası elde edilir. P noktasını tayin etmek için d den geçen herhangi bir $\bar{\varepsilon}$ düzlemi ile verilen ε düzlemi kestirilir. Bu şekilde elde edilen arakesit doğrusu d yi P noktasında keser.

Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde d doğrusu(d^m,d^s_1) izdüşüm çifti ve ε düzlemi de $c^m = c^s_1$ çakışma çemberiyle verilmiş olsun. d den geçen keyfî bir $\bar{\varepsilon}$ düzlemi olarak $[d,M_1]$ düzlemi seçilirse açık olarak görülürki bu düzlemin $\bar{c}^m=\bar{c}^s_1$ çakışma çemberi d^s_1 ile identiktir. Böylece $\bar{\varepsilon}$ ve ε düzlemlerinin arakesit doğrusunun s^m Merkezî izdüşümü verilen d^s_1 ve $c^m=c^s_1$ çemberlerinin kuvvet ekseni olarak b) ye göre elde edilmiş olur. s^m ile d^m nin kesişme noktası aranan P^m noktasının Merkezî izdüşümünü verir. P^s_1 izdüşümü ise bilindiği şekilde P^m den geçen tanzim doğrusunun d^s_1 yi kestiği $\dagger$ den farklı nokta olarak bulunur (Şekil : 11).Diğer bir düşünme şekli şudur: d nin ε u deldiği aranan P noktası bir doğrular destesinin taşıyıcısı



Şekil 11

(tepesi olarak) düşünülürse (V-Nr.6) dan bilindiği gibi bu destenin Sfero-Stereografik izdüşümleri P nin Merkezî izdüşümünü kuvvet merkezi olarak kabul ederler. Diğer taraftan destenin ε içindeki doğrular demetinin Sfero-Stereografik izdüşüm çemberleri ve demet düzleminin çakışma çemberi de (V-Nr.2) ye göre aynı şekilde P^m yi kuvvet merkezi kabul ettiklerinden bütün bu çemberlerin ortak kuvvet merkezi olan P^m ye ait bir geometrik yer verilen d_1^s ve $c^m = c_1^s$ çemberlerinin s^m kuvvet ekseni elde edilir. Diğer geometrik yer ise P nin insidens olduğu d doğrusunun verilen d^m Merkezî izdüşümü olduğundan P^m noktası s^m ile d^m nin kesişme noktası olarak elde edilir. P_1^s ise bilinen şekilde bulunur.

Nr.3- PARALELİTE

a) İki doğrunun paralelliği

Uzayın iki $d, \bar{d}$ doğrusu birbirine paralel ise, bilindiği gibi bu doğruların sonsuzdaki Ω düzleminde bulunan ortak bir U_∞ noktaları vardır, yani verilen doğrular adıgeçen U_∞ noktasında kesişirler. Bu durumda bulunan $d, \bar{d}$ doğrularının π resim düzlemindeki $d^m, \bar{d}^m$ Merkezî izdüşümleri U_∞ noktasının U_∞^m Merkezî izdüşümünde kesişirler. Bu nokta $d, \bar{d}$ doğrularının kaçma noktasıdır. Aynı doğruların d_1^s , $\bar{d}_1^s$ Sfero-Stereografik izdüşüm çemberleri ise İ çekirdek noktasından ve U_∞^m ye tekabül eden $U_{1\infty}^s$ noktasından geçen çemberlerdir. Bu çemberler aynı zamanda (V-Nr.2) ye göre $\text{ç}_{U_\infty^m}$ karakteristik çemberini dik keserler (Şekil:12).

Taşıyıcıları aynı bir P noktası olan bir doğrular destesi ve bir düzlemler destesi düşünülerse (V-Nr.2) ve (V-Nr.6) ya göre böyle bir destenin her doğrusunun Sfero-Stereografik izdüşüm çemberleri ile her düzlemin çakışma çemberi P nin P^m Merkezî izdüşümüne göre aynı kuvveti haizdir. Yani P^m ,bütün bu çemberlerin ortak kuvvet merkezinde bulunur.

Paralel iki doğrunun sonsuzdaki kesişme noktası böyle bir destenin tepesi olarak alınırsa, bu iki paralel doğru ve sonsuzdaki Ω düzlemi bu destenin elemanları olarak düşünülebilir. Doğruların verilen Sfero-Stereografik izdüşüm çemberleriyle sonsuzdaki düzlemin M esas izdüşüm merkezinin c_M distans çemberi ile temsil edilen imaginer çakışma çemberinin kuvvet merkezi, d^m ve $\bar{d}^m$ nin kesişme noktasiyle belirlenen U^m_∞ noktası olmalıdır.

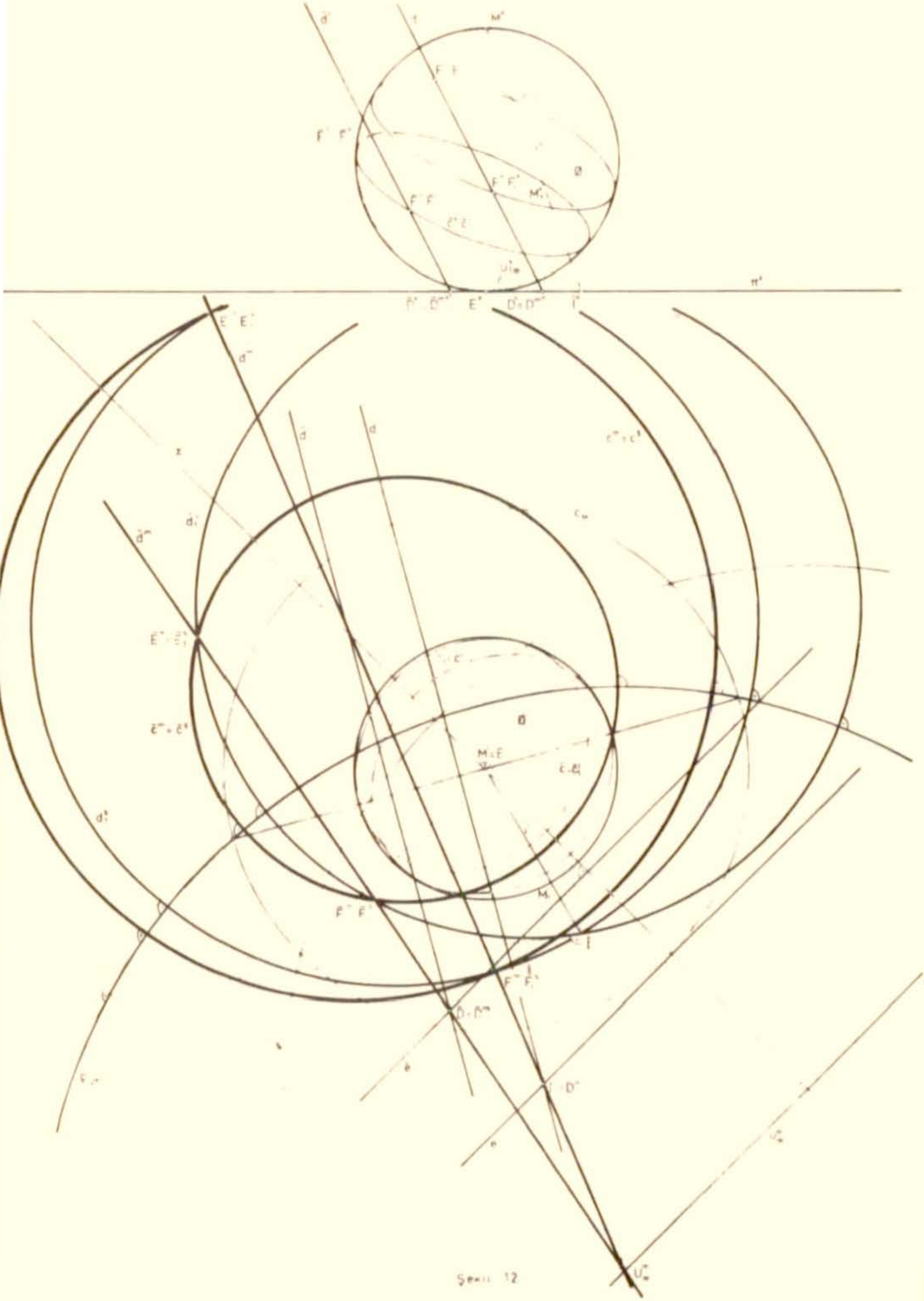
b) Doğru ile düzlemin paralelliği

Bir d doğrusu uzayın bir ε düzlemine paralel ise, a) ya göre ε ile d, sonsuzdaki Ω düzlemi ile insidens olan bir U_∞ noktasında kesişirler. Ohalde yukarıda açıklanan özeliklere göre izdüşümde, U_∞ noktasının $\varsigma_{U^m_\infty}$ karakteristik çemberi d nin d^s_1 Sfero-Stereografik izdüşüm çemberini ve ε un $c^m = c^s_1$ çakışma çemberini dik, Ω nın çakışma çemberinin reel temsilcisi olan c_M distans çemberini ise çapı boyunca keser (Şekil : 12).

Ters olarak, π de U^m_∞ merkezi ile belirtilen ve c_M distans çemberini çapı boyunca kesen $\varsigma_{U^m_\infty}$ karakteristik çemberini dik kesen $c^m = c^s_1$ çemberini çakışma çemberi olarak kabul eden ε düzlemi ile, $\varsigma_{U^m_\infty}$ yi dik kesen ve $\hat{I}$ çekirdek noktasından geçen d^s_1 çemberini Sfero-Stereografik izdüşümü ve U^m_∞ den geçen d^m doğrusunu da Merkezî izdüşümü olarak kabul eden d doğrusu paralel durumda bulunurlar.

c) İki düzlemin paralelliği

İki $\varepsilon,\bar{\varepsilon}$ düzlemi uzayda paralel durumda ise, bunların arakesit doğrusunun sonsuzdaki Ω düzleminde bulunan bir u_∞ doğrusu olacağı açıktır. Bu doğru her üç düzlemin ortak doğrusu ol-



Şekil 12

duğundan doğrunun çakışma noktaları, düzlemlerin çakışma çemberlerinin ortak noktaları olurlar. İzdüşümde ortak nokta özeliği değişmez kalacağından adı geçen düzlemleri izdüşümde belirleyen çakışma çemberleri, u_{∞}^{m} doğrusunun imaginer olan çakışma noktalarını temel noktalar kabul eden hiperbolik bir demet teşkil ederler. Buradan açıkca görüleceği gibi demetin sıfır çemberlerini çapucları alan v_0 çemberi (demetin temel çemberi), M nin c_M distans çemberini çapı boyunca keser (Şekil : 12).

Ohalde π de c_M distans çemberini çapı boyunca kesen çemberi temel çember alan hiperbolik çemberler demetinin çemberlerini, çakışma çemberleri olarak kabul eden düzlemler uzayda paralel durumda bulunurlar.

S O N U Ç L A R

1- Uzayın noktaları ve bunların Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşüm çiftleri arasındaki bağıntının " Karşılıklı bire-bir bir bağıntı " olduğu gösterilmiştir.

2- Noktaların izdüşümleri olarak, π resim düzleminde, İ çekirdek noktasından geçen aynı bir tanzim doğrusu üzerinde bulunan nokta çifti elde edilmiştir.

3- Doğruların izdüşümleri olarak, bir doğru ve sabit İ çekirdek noktasından geçen bir çember (doğru-çember çifti) bulunmuştur.

4- Uzayın düzlemlerinin izdüşümleri, verilen düzlem ile Φ izdüşüm küresinin arakesit çemberi (çakışma çemberi)nin izdüşümü olarak bir çemberle gösterilmiştir.

5- Nokta, doğru ve düzlem arasındaki birleştirme, kesişme paralellik bağıntıları Merkezî ve Sfero-Stereografik izdüşümde incelenmiş ve bunlarla ilgili problemlerin çözümleri açıklanmıştır.

6- Doğru ile düzlemin kesişme noktasının izdüşüm çiftinin diğer izdüşümlerden farklı olarak taşıyıcı düzlem kullanmadan doğru ile düzlem izdüşüm çiftleriyle verilince doğrudan doğruya tesbit edilebileceği görülmüştür.

7- Her ε düzleminin izdüşümdeki bağıntısının perspektif ve kuadratik bir bağıntı olduğu, perspetkivin merkezinin İ çekirdek noktası olduğu saptanmıştır.

8- Düzlemsel doğrular demeti, izdüşümde, taşıyıcı düzlemin çakışma çemberi ve demet tepesinin karakteristik çemberi ile gösterilmiştir.

9- Doğrular destesi, deste tepesinin karakteristik çemberinin verilmesiyle belirlenebileceği açıklanmıştır.

10- İzdüşüm sistemine göre özel durumdaki uzay elemanlarını gösteren izdüşüm bağıntıları ve bunların karakteristik özelikleri belirtilmiştir.

11- Bulunan sonuçlar yardımıyle, düzlemsel bir çemberler sistemine ait problemlerin çözümünde uzaysal problemlerin çözüm yollarının uygulanabileceği gösterilmiştir.