1400+

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNCE HİPERELASTİK PLAKLARIN ASİMPTOTİK TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Hüsnü A. ERBAY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Nisan 1988

Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Haziran 1988

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Cengiz DÖKMECİ
Prof. Dr. Esin E. İNAN

HAZİRAN 1988

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında büyük sabır ve anlayışla değerli yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu tezin yazılmasında emeği geçen sayın Kadriye GÜL'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada, nonlineer elastisite teorisinin referans konumundaki üç boyutlu denklemlerinin asimptotik analizi yardımıyla geometrik nonlineerliği olduğu gibi fiziksel nonlineerliği de içeren bir ince plak teorisi geliştirilmiştir.

Çalışmanın ilk bölümünde asimptotik açılım tekniğinin plak teorilerinin çıkarılmasında kullanılmasının şimdiye kadarki örnekleri üzerinde durulmuştur. Önceleri lineer plak teorilerini daha sonra geometrik nonlineerliği içeren plak teorilerini elde etmede kullanılan yöntemin gelişimi kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölümde ilk olarak nonlineer elastisite teorisinin alan denklemleri maddesel koordinatlarda sunulmuştur. İnce plak tarafından işgal edilen bölge karşılaştırılabilir boyutlara sahip yeni bir bölgeye dönüştürülmüş ve daha sonra yerdeğiştirme vektörü ve gerilme tansörü kalınlık parametresinin yardımıyla von Kármán teorisinde olduğu gibi ölçeklenmiştir.

Üçüncü bölümde yerdeğiştirme vektörü ve gerilme tansörünü kalınlık parametresi cinsinden asimptotik kuvvet serisi olarak açtıktan sonra bu açılımın denge denklemleri ve sınır şartlarında kullanılmasıyla, bu parametrenin kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek, denklem hiyerarşileri elde edilmiştir. Benzer bir yaklaşım ile, izotrop elastik cisimlere ait bünye denklemi hiyerarşisi de çıkarılmıştır. Bu şekilde elde edilmiş denklem hiyerarşilerinin ilk iki mertebesi ayrıntılı olarak incelenmiş ve sıfırıncı mertebe yaklaşımın von Kármán teorisine karşı geldiği gösterilmiştir. Ayrıca fiziksel nonlineerliğin etkisinin birinci mertebede ortaya çıktığına işaret edilmiş ve sıkışabilir hal için bulunmuş sonuçlardan sıkışmaz elastik cisimler için olanlara nasıl geçileceği açıklanmıştır.

Son bölümde, önceki bölümde geliştirilen teorinin bir uygulaması olarak üst yüzünden uniform yüke maruz sonsuz şerit problemi incelenmiştir. Hem ankastre hem de basit mesnetli haller için çözümler analitik olarak elde edilmiştir. Ko, Mooney-Rivlin ve Neo-Hookyen cisim halinde bulunan sayısal sonuçlar sadece geometrik nonlineerlikten hareket ederek bulunanlar ile karşılaştırılmış ve fiziksel nonlineerliğin önem kazandığı bölge için çökmelerin mertebesi açısından yaklaşık bir sınır verilmiştir.

AN ASYMPTOTIC THEORY OF THIN HYPERELASTIC PLATES

SUMMARY

There exist several works in the literature dealing with asymptotic derivation of the nonlinear equilibrium theory of plates. In these works, the plate theories of various orders are obtained by asymptotic expansions of field variables in terms of a small thickness parameter. However, it should be noted that approximations assumed in those papers are mostly valid only for linear stress-strain relations. The aim of present work is to develop a theory of thin plates which is physically as well as geometrically nonlinear, using an asymptotic analysis of three dimensional equations of nonlinear elasticity in the reference configuration. To this end the nonlinear field equations, the asymptotic expansion technique and the results will be briefly summarized.

As is known, the strain-displacement relations in the curvilinear material coordinates X^K (K=1,2,3) are given by

$$2E_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K}U^{M}{}_{;L}$$

where $\underset{\sim}{U}$ is the displacement vector, E is the Lagrangian strain tensor, semicolon denotes the partial covariant differentiation and the summation convention is employed. For a body occupying a region R in the reference configuration the equilibrium equations are in the form

$$(T^{KL} + T^{KM}U^{L}{}_{;M})_{;K} + \rho_0 F^{L} = 0$$

where $\underset{\sim}{T}$ is the second Piola-Kirchhoff stress tensor, ρ_0 is the initial density and F^K is body force per unit mass. Similarly, at the boundary ∂R of R, or on a part of it, the surface tractions $\hat{t}^K$ satisfy

$$(T^{KL} + T^{KM}U^{L}{}_{;M})N_K = \hat{t}^L$$

where $\underset{\sim}{N}$ is the unit exterior normal to ∂R.

On the other hand, the constitutive equations of isotropic nonlinear elasticity are

$$T^{KL} = \left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_E} + I_E\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_E} + II_E\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial III_E}\right)G^{KL} - \left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_E} + I_E\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial III_E}\right)E^{KL}$$

$$+ \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial III_E}E^{K}{}_{M}E^{ML}$$

where $\underset{\sim}{G}$ is the metric tensor, $\tilde{\Sigma}$ is the strain energy function and I_E, II_E and III_E are the basic invariants of $\underset{\sim}{E}$. However for an incompressible nonlinear elastic material when the Cayley-Hamilton theorem is used these equations take the form

$$T^{KL} = \left[2\left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C}\right) - \tilde{P}\, II_C\right] G^{KL}$$

$$+ \left(\tilde{P}\, I_C - 2\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C}\right) C^{KL} - \tilde{P}\, C^K{}_M C^{ML}$$

where I_C and II_C are the basic invariants of C_{KL}, Green deformation tensor which is defined by $C_{KL} = G_{KL} + 2E_{KL}$.

The plate occupies the region bounded by the two faces, $X^3 = h$ and $X^3 = -h$, where $2h$ is the uniform thickness of the plate, and a cylindrical surface having generators normal to the middle plane such that $X^3 = 0$ represents the middle plane of the plate. If the diameter of the plate is denoted by $2L$ then the thickness parameter which specifies the order of deflection of the plate is defined by $\varepsilon = h/L$. Moreover X^α (α=1,2) which are the curvilinear coordinates in the middle plane are chosen such that $X^\alpha \in [-L,L]$ and X^3 shows the coordinate in the normal direction of the middle plane. The dimensionless coordinates ξ^K are introduced by

$$X^\alpha = L\xi^\alpha \quad , \quad X^3 = \varepsilon L \xi^3 \quad , \qquad \xi^1, \xi^2, \xi^3 \in [-1,1]$$

This mapping transforms the domain occupied by a thin plate to a domain of comparable dimensions. Later it is assumed that the displacement components are scaled as in the von Kármán theory. Namely, the dimensionless displacements and stress components in ξ^K coordinates are described in the form

$$U^\alpha(\underset{\sim}{X}) = \varepsilon^2 L u^\alpha(\underset{\sim}{\xi}) \ , \qquad U^3(\underset{\sim}{X}) = \varepsilon L u^3(\underset{\sim}{\xi})$$

$$T^{\alpha\beta}(\underset{\sim}{X}) = T_0 \varepsilon^2 \sigma^{\alpha\beta}(\underset{\sim}{\xi}), \qquad T^{\alpha 3}(\underset{\sim}{X}) = T_0 \varepsilon^3 \sigma^{\alpha 3}(\underset{\sim}{\xi}),$$

$$T^{33}(\underset{\sim}{X}) = T_0 \varepsilon^4 \sigma^{33}(\underset{\sim}{\xi})$$

where T_0 is an appropriately chosen factor of stress dimension. Moreover, if it is assumed that the surface tractions $\underset{\sim}{t}_+$ and $\underset{\sim}{t}_-$ are prescribed on the upper and lower faces, respectively and the stress vector on the lateral surface is denoted by $\bar{\underset{\sim}{t}}$ then the nondimensional surface and body force densities are defined by

$$t^\alpha_{+,-}(X^\beta) = T_0 \varepsilon^3 g^\alpha_{+,-}(\xi^\beta) \ , \qquad t^3_{+,-}(X^\beta) = T_0 \varepsilon^4 g^3_{+,-}(\xi^\beta)$$

$$\bar{t}^\alpha(\underset{\sim}{X}) = T_0 \varepsilon^2 \tau^\alpha(\underset{\sim}{\xi}) \ , \ \bar{t}^3(\underset{\sim}{X}) = T_0 \varepsilon^3 \tau^3(\underset{\sim}{\xi}) \ , \qquad \underset{\sim}{X} \in C, \quad \underset{\sim}{\xi} \in c$$

$$\rho_0 L F^\alpha(\underset{\sim}{X})/T_0 = \varepsilon^2 f^\alpha(\underset{\sim}{\xi}) \ , \qquad \rho_0 L F^3(\underset{\sim}{X})/T_0 = \varepsilon^3 f^3(\underset{\sim}{\xi})$$

where C and c are the boundaries of the middle plane of the plate in $\underset{\sim}{X}$ and $\underset{\sim}{\xi}$ coordinates, respectively.

Using the above equations the equilibrium equations in the dimensionless coordinates become

$$(\sigma^{\alpha\beta} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha\gamma}u^{\beta}{}_{;\gamma} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha 3}u^{\beta}{}_{,3})_{;\alpha} + (\sigma^{3\beta} + \varepsilon^2\sigma^{3\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha}$$

$$+ \varepsilon^2\sigma^{33}u^{\beta}{}_{,3})_{,3} + f^{\beta} = 0$$

$$(\sigma^{\alpha 3} + \sigma^{\alpha\gamma}u^{3}{}_{,\gamma} + \sigma^{\alpha 3}u^{3}{}_{,3})_{;\alpha} + (\sigma^{33} + \sigma^{3\gamma}u^{3}{}_{,\gamma} + \sigma^{33}u^{3}{}_{,3})_{,3} + f^{3} = 0$$

where derivatives are taken with respect to $\underset{\sim}{\xi}$ coordinates. Similarly the boundary conditions are obtained in the form

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^{3\beta} + \varepsilon^2\sigma^{3\alpha}u^{\beta}{}_{;\alpha} + \varepsilon^2\sigma^{33}u^{\beta}{}_{,3} = \mp\ g^{\beta}_{+,-} \\ &\sigma^{33} + \sigma^{3\alpha}u^{3}{}_{,\alpha} + \sigma^{33}u^{3}{}_{,3} = \mp\ g^{3}_{+,-} \end{aligned}\right\}\ \text{on } \omega^{+} \text{ and } \omega^{-}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma^{\alpha\beta} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha\gamma}u^{\beta}{}_{;\gamma} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha 3}u^{\beta}{}_{,3})n_{\alpha} = \tau^{\beta} \\ &(\sigma^{\alpha 3} + \sigma^{\alpha\gamma}u^{3}{}_{,\gamma} + \sigma^{\alpha 3}u^{3}{}_{,3})n_{\alpha} = \tau^{3} \end{aligned}\right\}\ \text{on } \sigma$$

where ω^{+} and ω^{-} are the upper and lower plane faces of the plate in the transformed domain, respectively, σ is the lateral surface and $\underset{\sim}{n}$ is the exterior unit normal to σ. In this case the strain-displacement relations take the form

$$E_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} + u_{3,\alpha}u_{3,\beta}) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^4 u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}{}_{;\beta}$$

$$E_{\alpha 3} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha} + u_{3,\alpha}u_{3,3}) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^3 u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}{}_{,3}$$

$$E_{33} = u_{3,3} + \tfrac{1}{2}\,u_{3,3}u_{3,3} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 u_{\alpha,3}u^{\alpha}{}_{,3}$$

The following asymptotic expansions for $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{\xi})$ and $\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\xi})$ in the dimensionless coordinates are defined:

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\ {}^{n}\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{\xi}), \qquad \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\ {}^{n}\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\xi})$$

If these expansions are introduced into the governing equations in $\underset{\sim}{\xi}$ coordinates successive systems of the equations are obtained by equating coefficients of the like powers of ε in both sides of the equations. The equilibrium equations corresponding to the lowest two order members in the hierarchy of equations so obtained are given by

$$
\begin{aligned}
&{}^0\sigma^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{3\beta}{}_{,3} + f^{\beta} = 0 \\
&{}^0\sigma^{\alpha3}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{33}{}_{,3} + ({}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha3}\,{}^0u^3{}_{,3})_{;\alpha} + ({}^0\sigma^{3\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} \\
&\qquad + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3})_{,3} + f^3 = 0
\end{aligned}
$$

for the zeroth order approximation and

$$
\begin{aligned}
&{}^1\sigma^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^1\sigma^{3\beta}{}_{,3} + ({}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha3}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3})_{;\alpha} + ({}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\alpha} \\
&\qquad + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3})_{,3} = 0 \\
&{}^1\sigma^{\alpha3}{}_{;\alpha} + {}^1\sigma^{33}{}_{,3} + ({}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^1u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha3}\,{}^1u^3{}_{,3} \\
&\qquad + {}^1\sigma^{\alpha3}\,{}^0u^3{}_{,3})_{;\alpha} + ({}^0\sigma^{3\gamma}\,{}^1u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{3\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{33}\,{}^1u^3{}_{,3} \\
&\qquad + {}^1\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3})_{,3} = 0
\end{aligned}
$$

for the first order approximation. Similarly the boundary conditions for the lowest two order are obtained in the form

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}^0\sigma^{3\beta} = \mp g^{\beta}_{+,-} \\
&{}^0\sigma^{33} + {}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^3{}_{,\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3} = \mp g^3_{+,-}
\end{aligned}
\right\} \text{ on } \omega^+ \text{ and } \omega^-
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}^0\sigma^{\alpha\beta}\,n_{\alpha} = \tau^{\beta} \\
&({}^0\sigma^{\alpha3} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha3}\,{}^0u^3{}_{,3})n_{\alpha} = \tau^3
\end{aligned}
\right\} \text{ on } \sigma
$$

and

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}^1\sigma^{3\beta} + {}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3} = 0 \\
&{}^1\sigma^{33} + {}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^1u^3{}_{,\alpha} + {}^1\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^3{}_{,\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^1u^3{}_{,3} + {}^1\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3} = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&({}^1\sigma^{\alpha\beta} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha3}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3})n_{\alpha} = 0 \\
&({}^1\sigma^{\alpha3} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^1u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha3}\,{}^1u^3{}_{,3} + {}^1\sigma^{\alpha3}\,{}^0u^3{}_{,3})n_{\alpha} = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

If the asymptotic expansion

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon^2\,{}^0E_{\alpha\beta} + \varepsilon^4\,{}^1E_{\alpha\beta} + \dots$$

where ${}^0E_{\alpha\beta}$ and ${}^1E_{\alpha\beta}$ depend on the displacement components as follows

$${}^0E_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,({}^0u_{\alpha;\beta} + {}^0u_{\beta;\alpha} + {}^0u_{3,\alpha}\,{}^0u^3{}_{,\beta})$$

$${}^1E_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,({}^1u_{\alpha;\beta} + {}^1u_{\beta;\alpha} + {}^0u_{3,\alpha}\,{}^1u^3{}_{,\beta} + {}^1u_{3,\alpha}\,{}^0u^3{}_{,\beta} + {}^0u_{\gamma;\alpha}\,{}^0u^{\gamma}{}_{;\beta})$$

is employed in the constitutive relations, then, after some calculations, the stress components ${}^{0}\sigma^{\alpha\beta}$ and ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ take the following form

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\sigma^{\alpha\beta} &= 2\Delta_1 (\Delta_0 \; {}^{0}E^{\gamma}_{\;\gamma} \; A^{\alpha\beta} + {}^{0}E^{\alpha\beta}) \\
{}^{1}\sigma^{\alpha\beta} &= 2\Delta_1 (\Delta_0 \; {}^{1}E^{\gamma}_{\;\gamma} \; A^{\alpha\beta} + {}^{1}E^{\alpha\beta}) + \Delta_0 \; {}^{0}\sigma^{33} \; A^{\alpha\beta} + \big[\tfrac{1}{2} \Delta_3 ({}^{0}E^{\gamma}_{\;\gamma} \; {}^{0}E^{\delta}_{\;\delta} \\
&\quad - {}^{0}E^{\gamma}_{\;\delta} \; {}^{0}E^{\delta}_{\;\gamma}) + \Delta_4 \; {}^{0}E^{\gamma}_{\;\gamma} \; {}^{0}E^{\delta}_{\;\delta}\big] A^{\alpha\beta} - \Delta_3 \; {}^{0}E^{\gamma}_{\;\gamma} \; {}^{0}E^{\alpha\beta} \\
&\quad + \Delta_2 \; {}^{0}E^{\alpha}_{\;\gamma} \; {}^{0}E^{\gamma\beta}
\end{aligned}
$$

where $A^{\alpha\beta}$ is the metric tensor of the middle plane and Δ_n $(n=0,1,2,3,4)$ are the material constants evaluated as some derivatives of the stress potential $\tilde{\Sigma}$ with respect to invariants at the natural state. The values of these coefficients are given below for some well-known materials. For the Ko solid the strain energy function is defined as

$$
\tilde{\Sigma} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{II_C}{III_C} + 2\sqrt{III_C} - 5\right)
$$

where μ is constant. Choosing the scale factor $T_0 = \mu$ it is found that

$$
\Delta_0 = \frac{1}{3}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = -8, \quad \Delta_3 = \frac{4}{3}, \quad \Delta_4 = -\frac{4}{9}
$$

The strain energy function for the Murnaghan solid is given by

$$
\tilde{\Sigma} = \tfrac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I_E^2 - 2\mu II_E + \ell I_E^3 + m I_E II_E + n III_E
$$

where λ, μ and ℓ, m, n are Lamé and Murnaghan's constants respectively. In this case the above coefficients are obtained as

$$
\Delta_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \frac{n}{\mu}, \quad \Delta_3 = \frac{2(m+n)}{\lambda + 2\mu}
$$

$$
\Delta_4 = \left[8\mu^2(3\ell + m) - 4\lambda(\lambda + \mu)(m + n) - \lambda^3 n/\mu\right] / (\lambda + 2\mu)^3
$$

where $T_0 = \mu$. It is obvious that $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ for the classical linear stress-strain relations. As is seen from the above constitutive equations for the lowest two order the effect of physical nonlinearity comes into effect at the first order approximation.

If the condition that the components of stress tensor with a negative supercript vanish in the hierarchy of constitutive equations is imposed then this leads to forms

$$
{}^{0}u^{3}(\underset{\sim}{\xi}) = {}^{0}w(\xi^1,\xi^2), \qquad {}^{0}u^{\alpha}(\underset{\sim}{\xi}) = {}^{0}v^{\alpha}(\xi^1,\xi^2) - \xi^3 \; {}^{0}w_{;}^{\;\alpha}
$$

for the displacement field. After some calculations the first order displacement components are also found in the form

$$
{}^{1}u^{3}(\underset{\sim}{\xi}) = {}^{1}w(\xi^1,\xi^2) + {}^{1}U^{3}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)
$$

$$
{}^{1}u^{\alpha}(\underset{\sim}{\xi}) = {}^{1}v^{\alpha}(\xi^1,\xi^2) - \xi^3 \; {}^{1}w_{;}^{\;\alpha} + {}^{1}U^{\alpha}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)
$$

where ${}^{1}U^{3}$ and ${}^{1}U^{\alpha}$ are known functions of only the zeroth order terms. These equations prove that the lowest order displacement field is a Kirchhoff-Love field. But it is not possible to forward the same claim for the first order approximation.

The theories corresponding to the lowest two order members in the hierarchy of field equations so obtained is studied in detail and it is shown that the zeroth order theory corresponds to the well-known von Kármán theory. On the other hand, in first approximation it has been observed that the total stress cannot be decomposed into bending and membrane stress components due to the coupling between bending and stretching. Moreover the stress components in the transverse direction have been determined and the Cauchy stress tensor which represents the actual state of stress in the deformed plate is also evaluated.

A similar expansion is given for an incompressible nonlinear elastic material and the incompressibility condition is used to eliminate the arbitrary pressure function. Later, it is shown that the results obtained for the compressible elastic solid are also valid for the incompressible solid under the following transformation

$$\Delta_0 \to 1, \quad \Delta_1 \to \Lambda_0, \quad \Delta_2 \to -4(\Lambda_0 - \Lambda_1), \quad \Delta_3 \to 4\Lambda_0, \quad \Delta_4 \to -4(\Lambda_0 + \Lambda_1)$$

where Λ_0 and Λ_1 are the material constants for the incompressible solid. As is known, for the Mooney-Rivlin material the $\tilde{\Sigma}$ function is given as

$$\tilde{\Sigma} = C_1(I_C - 3) + C_2(II_C - 3)$$

where C_1 and C_2 are the material constants. In this case Λ_0 and Λ_1 take the following values

$$\Lambda_0 = 2(1 + \delta), \qquad \Lambda_1 = -2\delta$$

where $\delta = C_2/C_1$ and T_0 is chosen as C_1. If $\delta = 0$ (or $C_2 = 0$) is substituted in the above expressions then the results are valid for a material which is called Neo-Hookean.

Finally, as an example the problem of infinitely long strip under uniform lateral load is studied for various edge conditions. Using the plane strain assumption the solutions are calculated analytically for both simply supported strip and clamped strip problems. Later these problems are numerically investigated for the various thickness parameters and for the various materials. In the special cases of Ko, Mooney-Rivlin and Neo-Hookean solids, the maximum deflections are plotted versus the lateral load. The results are compared with the solutions based upon the geometric nonlinearity and at very large deflections it is found that the material nonlinearity plays an important part. Moreover, for this range of deflections the variations of the axial force, the bending moment and the Cauchy stress along the length of the strip are plotted. From these figures it is seen that the solutions are dominated by membrane field.

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Üç boyutlu elastisite teorisinin denklemlerinden iki boyutlu plak teorilerini türetmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda en yaygın olarak izlenen yöntem, gerilme ve yerdeğiştirme bileşenlerinin plak içersindeki dağılımları hakkında a priori varsayımlarda bulunmak ve daha sonra bu varsayımlar ışığında plak denklemlerini çıkarmaktır. Diğer bir yaklaşım ise gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri gibi alan büyüklüklerinin kalınlık parametresi cinsinden asimptotik açılımları sonucu bulunan denklem hiyerarşilerini plak denklemleri olarak benimsemektir. Gerçekte asimptotik açılım tekniği de, alan büyüklüklerini kalınlık parametresi cinsinden ölçeklemesi nedeniyle a priori varsayımlardan bağımsız değildir. Fakat bu yöntem denklemler giderek karmaşık bir şekil alsa da, yukarı mertebe plak teorilerine ulaşma imkanı verdiği için daha sistematik bir yaklaşım olarak görünmektedir. Yakın zamanlarda ise, asimptotik açılım tekniği Gusein-Zade [1], Niordson [2], Ciarlet ve Destuynder [3], Sayir ve Mitropoulos [4] tarafından statik ve dinamik lineer plak modellerinin elde edilmesi ve analizinde kullanılmıştır. Bu iki yönteme ek olarak burada plağı bir Cosserat yüzeyi, yani yüzeyin her noktasına şekil değiştirebilen bir yön vektörü bağlanmış, olarak kabul eden yaklaşımı da saymak gerekir. Esas olarak lineer modeller için, bu metodların daha geniş bir tartışması Naghdi [5] tarafından verilmiştir.

Bilindiği gibi, ince lineer elastik plakların büyük çökmelerini inceleyen nonlineer bir teori ilk olarak a priori varsayımlardan hareket ederek von Kármán [6] tarafından sunulmuştur. Geometrik nonleariteyi içeren yani küçük şekil değiştirmeler için geçerli olan bu teorinin daha sistematik bir elde edilişi ayrıca Koppe [7] tarafından da verilmiştir. von Kármán plak teorisi olarak ta anılan bu teoriyi üç boyutlu elastisite teorisinin denklemlerinden bir asimptotik açılım tekniği ile elde edebilmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu konuda Ebcioğlu ve Habip [8] ve Habip [9] tarafından yapılan çalışmalarda başlangıç noktası olarak bilinen şekil değiştirme - yerdeğiştirme ilişkileri yerine, bunların daha basit bir şekli alınmış ve referans konumundaki denge denklemleri yeni şekil değiştirme - yerdeğiştirme ilişkilerinin yardımıyla bir varyasyonel denklemden türetilmiştir. Yazarlar tarafından kısmi nonlineer teori olarak ta adlandırılan bu denklemler üzerine inşa edilen asimptotik açılımın ilk mertebesi bilinen von Kármán denklemlerini vermiştir. Bunun yanında Westbrook [10] tarafından yapılan bir çalışmada da üç boyutlu elastisitenin dinamik denklemlerine pertürbasyon teorisi, özel olarak ta değişik zaman ölçekleri yönteminin uygulanması ile nonlineer dinamik plak teorileri incelenmiştir. Bu inceleme sırasında çökmelerin kalınlık parametresinin küpüne, kendisine ve kareköküne orantılı olmasına göre değişik plak denklemleri elde edilmiştir. Yukardaki çalışmalara ek olarak Ciarlet [11] ve daha sonra Blanchard ve Ciarlet [12] tarafından yapılan çalışmalarda ise üç boyutlu elastisite probleminin varyasyonel formda tanımlanmasından sonra asimptotik açılım tekniği kullanılmıştır. Esas olarak Ciarlet tarafından bulunanlar ile aynı sonuçlara ulaşan fakat asimptotik açılımın nonlineer alan denklemlerine direkt uygulanması nedeniyle, varyasyonel denklem ile konulmuş bazı kısıtlamaları kaldıran ve yukarı mertebe teorileri elde etmeye daha uygun bir yaklaşım Şuhubi [13] tarafından verilmiştir. Bu yaklaşımın anizotrop cisimlere genişletilmesi için ise Şuhubi [14]'e başvurulabilir. Daha sonra gene bu yaklaşım çerçevesinde Erbay ve Şuhubi [15] tarafından n. mertebe plak denklemleri elde edilmiş ve örnek olarak ilk iki mertebe için uniform yüke maruz sonsuz şerit probleminin çözümü sunulmuştur. Unutulmaması gereken, yukarıdaki tüm çalışmaların küçük şekil değiştirme ve büyük yerdeğiştirme varsayımını içerdiği ve referans konumunda çalışmayı benimsediğidir.

Geometrik nonlineerlik yanında fiziksel nonlineerliği de gözönüne alan çalışmaların gerekliliği günümüzde kendini bir ihtiyaç olarak hissettirmektedir. Gerek bu açıdan gerekse von Kármán teorisinin geçerlilik bölgesinin irdelenmesi açısından nonlineer elastik cisimler için bir plak teorisi geliştirilmesi birçok araştırıcının ilgisini çekmiştir. Taber [16], [17] Kirchhoff hipotezinden hareket ederek, uniform yüke maruz ve Neo-Hookyen malzemeden oluşmuş büyük şekil değiştirme yapan dairesel plakları incelemiş ve gerilme hesabı açısından ortadaki çökmelerin, plak kalınlığının iki katından daha büyük olduğu durumlarda fiziksel nonlineerliğin önem kazandığını vurgulamıştır. Abé ve Utsui [18]'de ise şekil değiştirme tansörü düzlem dışı koordinat cinsinden kuvvet serisine açılmış ve bir mertebe analizi yardımıyla Mooney-Rivlin malzemesinden oluşmuş dairesel plaklara ait denklemler elde edilmiştir. Ayrıca sözkonusu denklemlerin Neo-Hookyen bir cisim için sonlu fark yöntemiyle çözümü verilmiş ve nümerik olarak mertebe analizinin uygunluğu üzerinde durulmuştur. Bu çalışmanın sonuçlarından biri de, maksimum çökme, kalınlığın on katından daha küçük ise von Kármán plak teorisinin geçerli olduğudur. İkinci mertebe elastisite teorisinin dinamik denklemlerinden hareket ederek nonlineer plak denklemlerine ulaşan bir çalışma da Sugimoto [19] tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada uygulanan yöntem, yerdeğiştirme bileşenlerinin kalınlık parametresi cinsinden ölçeklenmesi ve ardından düzlem dışı koordinat cinsinden kuvvet serisine açılması şeklindedir. Yapılan inceleme sonucu, fiziksel nonlineerliğin geometrik nonlineerlik yanında ikincil olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Johnson ve Urbanik [20] tarafından sunulan çalışmada ise von Kármán denklemlerinin nonlineer anizotropik gerilme-şekil değiştirme ilişkilerini içeren bir genelleştirilmesi üzerinde durulmuş ve asimptotik açılım tekniğinin referans konumundaki üç boyutlu elastisite denklemlerine direkt olarak uygulanması yoluna gidilmiştir. Çalışmada simetrik olmayan Piola-Kirchhoff gerilme tansörünün kullanılması denklem ve bilinmeyen sayısının artması sonucunu vermiştir. Ayrıca nonlineer bünye denklemlerine komplemanter enerji fonksiyonunda düzlem dışı gerilme bileşenlerini ihmal etme varsayımı ile yaklaşılmış ve teori özel bir kağıt türüne ait bünye denklemini deneysel verilerden yararlanarak elde etmede kullanılmıştır. Daha sonra benzer bir yaklaşım Johnson [21] tarafından düzlem şekil değiştirme altındaki ince elastik plakların silindirik deformasyonu problemine uygulanmıştır. von Kármán teorisine ait ölçeklemeyi benimseyen, yani plak düzlemindeki yerdeğiştirme bileşenlerinin çökmeye göre bir mertebe daha düşük olduğunu kabul eden önceki çalışmanın aksine bu çalışmada bütün yerdeğiştirme bileşenleri aynı mertebede, özel olarak ta plak genişliği mertebesinde, alınmıştır. Bunun yanında, von Kármán teorisinde kalınlık parametresinin karesi mertebesinde olan şekil değiştirme tansörü bileşenlerinin kalınlık parametresi mertebesinde olduğu varsayılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, başlangıçta yapılan ölçekleme dışında hiçbir ek varsayım yapmaksızın von Kármán teorisinin nonlineer izotrop elastik cisimlere genelleştirilmesini incelemektir. Bunun için ikinci bölümde üç boyutlu nonlineer elastisitenin denge denklemleri, şekil değiştirme-yerdeğiştirme ilişkileri ve sıkışabilir ve sıkışmaz izotrop elastik cisimler için bünye denklemleri verilmiştir. Ayrıca sözkonusu denklemler bir koordinat dönüşümü yardımıyla boyutsuzlaştırılmış ve yerdeğiştirme bileşenleri von Kármán teorisine benzer şekilde ölçeklenmiştir.

Üçüncü bölümde ise yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin asimptotik açılımı sonucu şekil değiştirme-yerdeğiştirme ilişkileri, denge denklemleri ve sınır koşullarına ait denklem hiyerarşileri elde edilmiştir. Teorik olarak istenildiği kadar yukarı mertebelere ilerleme imkanı olmasına rağmen, ifadeler giderek karmaşıklaştığı için ilk iki mertebeye ait denklemler ile yetinilmiştir. İnvaryantların fonksiyonu olan gerilme potansiyelinin de boyutsuz kalınlık cinsinden kuvvet serisine açılımı sonucu bünye denklemleri bulunmuş ve bu denklemlerde görünen katsayıların bazı bilinen nonlineer elastik cisimler için aldığı değerler verilmiştir. Sıfırıncı mertebe yerdeğiştirme bileşenlerinin Kirchhoff hipotezini sağladığını gösterdikten sonra moment tanımları yardımıyla plak denklemleri çıkarılmıştır. Momentler üzerine yazılı olan plak denklemlerinin yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden ifadesi de bulunmuş ve bir gerilme fonksiyonu tanımıyla von Kármán denklemlerine ulaşılmıştır. Sıfırıncı mertebeye ait düzlem dışı gerilme bileşenleri ve birinci mertebe denge denklemlerinin sağ tarafındaki terimlerin, sıfırıncı mertebe yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden açık olarak hesaplanmasının ardından ilk iki mertebe için Cauchy gerilme bileşenlerinin nasıl hesaplanacağı üzerinde durulmuştur. Son olarak sıkışmaz elastik cisimler gözönüne alınmış ve daha önce bulunan sonuçların özel bir dönüşüm altında sıkışmaz halde de geçerli olduğu belirtilmiştir.

Dördüncü bölümde teorinin bir uygulaması olarak büyük çökmeler yapan, üniform yüke maruz nonlineer elastik şerit problemi irdelenmiştir. Lineer halde Timoshenko ve Woinowsky-Krieger [22] tarafından incelenen bu problemin hem ankastre hem de basit mesnetli haller için çözümü analitik olarak bulunmuştur. Bu çözümler değişik kalınlık parametreleri ve değişik malzemeler için sayısal olarak değerlendirilmiş ve maksimum çökmelerin enine yük ile değişimi grafik olarak gösterilmiştir.

Ko, Mooney-Rivlin ve Neo-Hookyen cisim halinde bulunan çözümler von Kármán teorisinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmış ve çok büyük çökmelerde fiziksel nonlineerliğin önemli bir faktör olduğu belirtilmiştir. Öte yandan çökmelerin bu mertebesinde mambran etkisinin belirleyici olduğu vurgulanmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER

2.1. Temel Denklemler

Bu bölümde nonlineer elastisite teorisinin temel denklemleri, esas olarak Eringen [23]'den yararlanmak suretiyle kısaca hatırlatılacaktır. Bunun için referans konumu olarak alınmış doğal durumdaki bir P noktasının deformasyon ile p noktasına taşındığı homojen, izotrop elastik bir cisim gözönüne alınmıştır. Maddesel P noktasının konumu X^K, (K=1,2,3) eğrisel koordinat takımı ile uzaysal p noktasının konumu ise x^k, (k=1,2,3) eğrisel koordinat takımı ile belirtilmiştir. Literatürde X^K koordinatları maddesel veya Lagrange'yen koordinatlar, x^k koordinatları da uzaysal veya Euler'yen koordinatlar olarak adlandırılmaktadır. Bu cisme ait statik deformasyon

$$x^k = x^k(X^K) \text{ veya } X^K = X^K(x^k) \tag{2.1.1}$$

fonksiyonları ile gösterilir ve dönüşümün tersinin varolması, j dönüşüme ait jakobiyeni göstermek üzere,

$$j \equiv \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right) \neq 0 \tag{2.1.2}$$

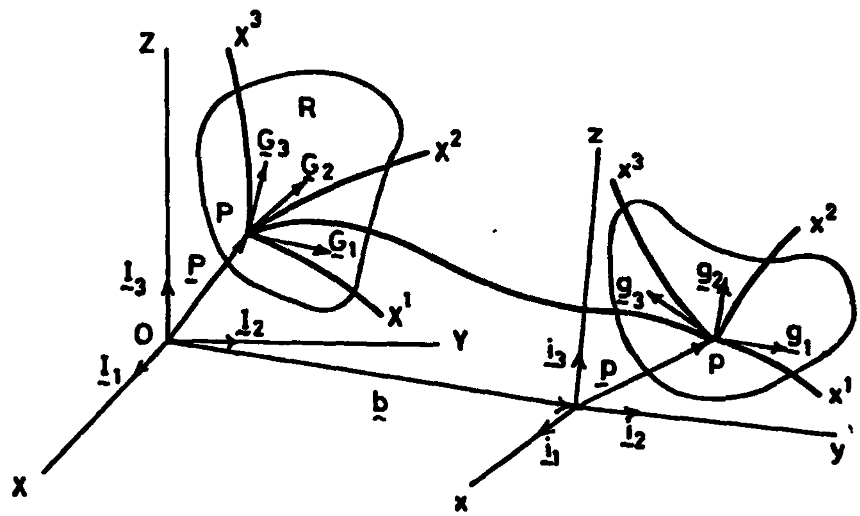
şartının sağlanmasına bağlıdır. Eğer, Şekil-2.1.1'den de görüldüğü gibi, doğal durumdaki P noktasının konum vektörü $\underset{\sim}{P}$ ile deformasyondan sonraki p noktasının konum vektörü $\underset{\sim}{p}$ ile ifade edilir ise,

$$\underset{\sim}{G}_K(\underset{\sim}{X}) \equiv \frac{\partial \underset{\sim}{P}}{\partial X^K} \quad , \quad \underset{\sim}{g}_k(\underset{\sim}{x}) \equiv \frac{\partial \underset{\sim}{p}}{\partial x^k} \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanan $\underset{\sim}{G}_K$ ve $\underset{\sim}{g}_k$ vektörleri sırasıyla X^K ve x^k eğrisel koordinatlarındaki baz vektörlerini gösterirler. Bu baz vektörleri X^K ve x^k koordinat eğrilerine teğet olup, karşıt baz vektörleri olan $\underset{\sim}{G}^K(\underset{\sim}{X})$ ve $\underset{\sim}{g}^k(\underset{\sim}{x})$ vektörleri de

$$\underset{\sim}{G}^K \cdot \underset{\sim}{G}_L = \delta^K{}_L \qquad \underset{\sim}{g}^k \cdot \underset{\sim}{g}_\ell = \delta^k{}_\ell \tag{2.1.4}$$

ortonormalite şartları ile tanımlanır. Öte yandan, bir vektörün iki koordinat sistemindeki bileşenlerini birbirine bağlayan kaydırıcılar da



Şekil - 2.1.1
Koordinat sistemi

$$g^K{}_k(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{G}^K(\underset{\sim}{X}).\underset{\sim}{g}_k(\underset{\sim}{x}), \qquad g^k{}_K(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{g}^k(\underset{\sim}{x}).\underset{\sim}{G}_K(\underset{\sim}{X})$$

$$g_{kK}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x}) = g_{Kk}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{g}_k(\underset{\sim}{x}).\underset{\sim}{G}_K(\underset{\sim}{X}) \qquad (2.1.5)$$

$$g^{kK}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x}) = g^{Kk}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{g}^k(\underset{\sim}{x}).\underset{\sim}{G}^K(\underset{\sim}{X})$$

tanımları ile verilir. Bunun yanında,

$$G_{KL}(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{G}_K.\underset{\sim}{G}_L \,, \qquad g_{k\ell}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{g}_k.\underset{\sim}{g}_\ell \qquad (2.1.6)$$

denklemleri ile tanımlanan kovaryant metrik tansörler ve kontravaryant metrik tansörler arasında

$$G_{KL}G^{LM} = \delta_K{}^M \qquad g_{k\ell}g^{\ell m} = \delta_k{}^m \qquad (2.1.7)$$

ilişkileri vardır.

Bu durumda, P noktasından p noktasına uzanan $\underset{\sim}{u}$ yerdeğiştirme vektörü, çalışılmak istenen koordinat takımına göre,

$$\underset{\sim}{u} = U^K\underset{\sim}{G}_K = U_K\underset{\sim}{G}^K = u^k\underset{\sim}{g}_k = u_k\underset{\sim}{g}^k \qquad (2.1.8)$$

yazılışlarından biri ile ifade edilebilir. Eğer kaydırıcılar kullanılır ise deformasyon gradyanı ve yerdeğiştirme gradyanı arasında, noktalı virgül kısmi kovaryant türevi göstermek üzere,

$$x^k{}_{,K} = (G_{KM} + U_{M;K})g^{Mk} \qquad (2.1.9)$$

ilişkisi olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan Cauchy ve Green deformasyon tansörleri sırasıyla

$$c_{k\ell}(\underset{\sim}{x}) = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,\ell} \qquad C_{KL}(\underset{\sim}{X}) = g_{k\ell} x^k_{,K} x^\ell_{,L} \qquad (2.1.10)$$

denklemleri ile tanımlanır ve bu tansörlerin tersleri olan Finger ve Piola tansörleri ise, sırasıyla,

$$c^{-1k\ell} = G^{KL} x^k_{,K} x^\ell_{,L} \qquad C^{-1KL} = g^{k\ell} X^K_{,k} X^L_{,\ell} \qquad (2.1.11)$$

şeklinde verilir. Maddesel koordinatlardaki Lagrange şekil değiştirme tansörü ile Green deformasyon tansörü arasında

$$C_{KL} = G_{KL} + 2E_{KL} \qquad (2.1.12)$$

ilişkisi olup, ayrıca şekil değiştirme tansörünün yerdeğiştirme bileşenlerine bağlılığı

$$2E_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K} U^M_{;L} \qquad (2.1.13)$$

şeklindedir. Bunun yanında E_{KL}'nin asal invaryantları olan I_E, II_E ve III_E büyüklüklerinin tanımları

$$I_E = tr\underset{\sim}{E} , \quad II_E = \frac{1}{2} [(tr\underset{\sim}{E})^2 - tr\underset{\sim}{E}^2]$$
$$III_E = \frac{1}{3} [tr\underset{\sim}{E}^3 - \frac{3}{2} (tr\underset{\sim}{E})(tr\underset{\sim}{E}^2) + \frac{1}{2} (tr\underset{\sim}{E})^3] \qquad (2.1.14)$$

olarak verilir. C_{KL}'nin asal invaryantları olan I_C, II_C ve III_C için de benzer ilişkiler sağlanır ve bu ilişkileri elde etmek için sağ taraftaki $\underset{\sim}{E}$ tansörü yerine $\underset{\sim}{C}$ tansörünü koymak yeterlidir. Ayrıca E_{KL} ve C_{KL} tansörlerinin invaryantları arasında

$$I_C = 3 + 2I_E, \; II_C = 3 + 4I_E + 4II_E, \; III_C = 1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E \qquad (2.1.15)$$

ilişkilerinin varolduğu (2.1.12) denklemi kullanılarak gösterilebilir.

Referans konumunda R bölgesini işgal eden cismin denge denklemleri

$$T^{Kk}_{:K} + \rho_0 f^k = 0, \quad \text{R de} \qquad (2.1.16)$$

olarak verilir. Burada T^{Kk} ile birinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü, ρ_0 ile başlangıç yoğunluğu, f^k ile birim kütleye ait kütle kuvveti ve iki nokta ile tam kovaryant türev gösterilir. R bölgesine ait

∂R sınırının tamamı veya bir kısmı üzerinde sağlanması gereken sınır koşulları ise, $\hat{t}^k$ sınır kuvvetlerini ve $\underset{\sim}{N}$ sınıra ait dış birim normali göstermek üzere,

$$T^{Kk} N_K = \hat{t}^k \ , \qquad \partial R \text{ de} \tag{2.1.17}$$

şeklindedir. Bilindiği gibi simetrik olmayan birinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü T^{Kk} ile simetrik olan ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü T^{KL} arasında

$$T^{Kk} = T^{KL} x^k_{,L} \ , \qquad T^{KL} = T^{Kk} X^L_{,k} \tag{2.1.18}$$

ilişkisi vardır. (2.1.16)-(2.1.17) denklemlerinde (2.1.9) ve $(2.1.18)_1$ ilişkilerinin kullanılmasıyla, $\hat{t}^K = \hat{t}^k g^K_k$ ve $F^K = f^k g^K_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (T^{KL} + T^{KM} U^L_{;M})_{;K} + \rho_0 F^L &= 0 \ , \qquad R \text{ de} \\ (T^{KL} + T^{KM} U^L_{;M}) N_K &= \hat{t}^L \ , \qquad \partial R \text{ de} \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

sonuçları elde edilir. Denge denklemleri ve sınır koşullarının yukarıdaki şekilde ifade edilmesinin nedeni asimptotik açılım sırasında T^{KL} gerilme tansörünün ve dolayısıyla (2.1.19) denklemlerinin kullanılacak olmasıdır. Bunun yerine [20]'de yapıldığı gibi asimptotik açılım için T^{Kk} gerilme tansörü ve dolayısıyla (2.1.16)-(2.1.17) denklemlerini de kullanmak mümkündür. Fakat bu yöntem ile bulunan momentler simetrik olmayacak ve bilinmeyen sayısı yapay olarak artmış gibi görünecektir. Bu nedenle yeterli sayıda denkleme ulaşmak için, $(2.1.18)_2$ yardımıyla, T^{KL} gerilme tansörünün simetri koşulunu kullanmak gerekecektir. Belirtilen sakıncalar nedeniyle, daha sonra Johnson [21]'de de T^{KL} gerilme tansörü kullanılmıştır.

Bilindiği gibi, homojen, izotrop hiperelastik bir cismin bünye denklemi

$$T^{KL} = \tilde{e}_1 G^{KL} + \tilde{e}_2 E^{KL} + \tilde{e}_3 E^K_M E^{ML} \tag{2.1.20}$$

şeklinde verilir. Buradaki $\tilde{e}_k$ (k=1,2,3) katsayıları ise, $\tilde{\Sigma}(I_E, II_E, III_E)$ gerilme potansiyelini göstermek üzere

$$\tilde{e}_1 = \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_E} + I_E \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_E} + II_E \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial III_E} \quad , \quad \tilde{e}_2 = -\left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_E} + I_E \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial III_E}\right) ,$$

$$\tilde{e}_3 = \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial III_E} \tag{2.1.21}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki ilişkilerden, doğal durumun gerilmesiz olması için, yani $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{0}$ olduğunda $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$ olması için,

$$\left.\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_E}\right|_{I_E=II_E=III_E=0} = 0 \tag{2.1.22}$$

koşulunun sağlanması gerektiği açıktır. Eğer T^{KL} Piola-Kirchhoff gerilme tansöründen $t^{k\ell}$ Cauchy gerilme tansörüne geçmek istenirse

$$t^{k\ell} = J^{-1}\, x^k_{,K}\, x^\ell_{,L}\, T^{KL} \tag{2.1.23}$$

ilişkisi kullanılır. Burada $J = \sqrt{\frac{g}{G}}\, j$ olarak tanımlanmıştır. g ve G uzaysal ve maddesel koordinatlarda metrik tansörün determinantlarıdır. Aynı zamanda J ile C_{KL}'nin üçüncü invaryantı arasında $J = III_C^{\frac{1}{2}}$ ilişkisinin varolduğu da hatırlatılmalıdır.

Sıkışmaz cisimlerde ise, $III_C = 1$ koşulunun sağlanması gerekliliği bir $\tilde{P}(\underset{\sim}{x})$ bilinmeyen basınç fonksiyonunun bünye denklemlerine katılmasına neden olur. Bu durumda sıkışmaz cisimler için

$$T^K{}_k = -\tilde{P}(\underset{\sim}{x})\, X^K_{,k} + \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial x^k_{,K}} \tag{2.1.24}$$

denklemi ile verilen bünye denkleminden (2.1.11) ve (2.1.18) ilişkilerinin kullanılmasıyla

$$T^{KL} = -\tilde{P}\, C^{-1KL} + 2\,\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial C_{KL}} \tag{2.1.25}$$

sonucuna ulaşılır. İzotrop cisimler için gerilme potansiyelinin $\tilde{\Sigma}(I_C, II_C)$ şeklinde olması nedeniyle yukarıdaki denklem

$$T^{KL} = -\tilde{P}\, C^{-1KL} + 2\left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C}\right) G^{KL} - 2\,\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C}\, C^{KL} \tag{2.1.26}$$

olarak yazılabilir. Bilindiği gibi, Cayley-Hamilton teoremine göre $\underset{\sim}{C}$ tansörü

$$-\underset{\sim}{C}^3 + I_C\, \underset{\sim}{C}^2 - II_C\, \underset{\sim}{C} + III_C\, \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{0} \tag{2.1.27}$$

denklemini sağlar. Eğer bu ifade soldan $\underset{\sim}{C}^{-1}$ ile çarpılır ve sonuç (2.1.26) denkleminde kullanılır ise sıkışmaz elastik cismin bünye denklemi

$$T^{KL} = \tilde{b}_1 G^{KL} + \tilde{b}_2 C^{KL} - \tilde{P}\, C^K{}_M\, C^{ML} \qquad (2.1.28)$$

şeklini alır. Buradaki $\tilde{b}_k$ (k=1,2) katsayıları ise

$$\tilde{b}_1 = 2\left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C}\right) - \tilde{P}\, II_C \;, \qquad \tilde{b}_2 = \tilde{P}\, I_C - 2\,\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C} \qquad (2.1.29)$$

tanımları ile verilir. Ayrıca doğal durumun gerilmesiz olması için, yani $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{I}$ olduğunda $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$ olması için

$$\tilde{P}\Big|_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{X}} = 2\left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial I_C} + 2\,\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial II_C}\right)\Big|_{I_C=II_C=3} \qquad (2.1.30)$$

koşulunun sağlanması gerektiği açıktır. Öte yandan cismin doğal halde basınç taşıdığı gibi bir yanılgıya meydan vermemek için gerçek basınç fonksiyonunun $\tilde{P}(\underset{\sim}{x}) - \tilde{P}\Big|_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{X}}$ farkına eşit olduğunu vurgulamak gerekir.

2.2. Ölçekleme ve Temel Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Referans konumunda $X^3 = \pm\, h$ düzlemsel yüzleriyle sınırlı 2h kalınlıklı $R = \Omega \times [-h,h]$ bölgesini işgal eden homojen, izotrop ve elastik bir plak gözönüne alınır (Şekil-2.2.1.a). Plağın orta düzlemi olan Ω, $X^3 = 0$ düzleminde C sınırına sahip sınırlı açık bir küme olarak düşünülür. Bu durumda plağın üst, alt ve yanal yüzleri sırasıyla $\Omega^+ = \Omega \times \{h\}$, $\Omega^- = \Omega \times \{-h\}$ ve $\Sigma = C \times [-h,h]$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde plağın üst, alt ve yanal yüzlerine etkiyen kuvvetler de sırasıyla $\underset{\sim}{t}_+$, $\underset{\sim}{t}_-$ ve $\underset{\sim}{\bar{t}}$ şeklinde ifade edilir. Plağa ait herhangi bir $\underset{\sim}{P}$ konum vektörü, $\underset{\sim}{A}_3$ orta düzleme dik birim normal vektörü göstermek üzere,

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{R}(X^\alpha) + X^3 \underset{\sim}{A}_3 \qquad (2.2.1)$$

olarak yazılabilir. Burada ve bundan sonra Latin harfleri 1, 2, 3 değerlerini alırken, Yunan harfleri plak düzlemi içindeki büyüklükleri göstermekte kullanılacak ve 1, 2 değerlerini alacaktır. Yukarıdaki yazılış sonucu, $\underset{\sim}{G}_K$ baz vektörleri ile düzleme ait $\underset{\sim}{A}_\alpha$ baz vektörleri ve $\underset{\sim}{A}_3$ normal vektörü arasında

$$\underset{\sim}{G}_\alpha(X^\gamma) = \frac{\partial \underset{\sim}{R}}{\partial X^\alpha} = \underset{\sim}{A}_\alpha(X^\gamma) \;, \qquad \underset{\sim}{G}_3 = \underset{\sim}{A}_3 = \underset{\sim}{A}^3 \qquad (2.2.2)$$

ilişkilerinin varolduğu hemen görülebilir. Bu durumda G_{KL} metrik tansörünün bileşenleri, $A_{\alpha\beta}(X^\gamma) = \underset{\sim}{A}_\alpha . \underset{\sim}{A}_\beta$ yüzey metrik tansör olmak üzere

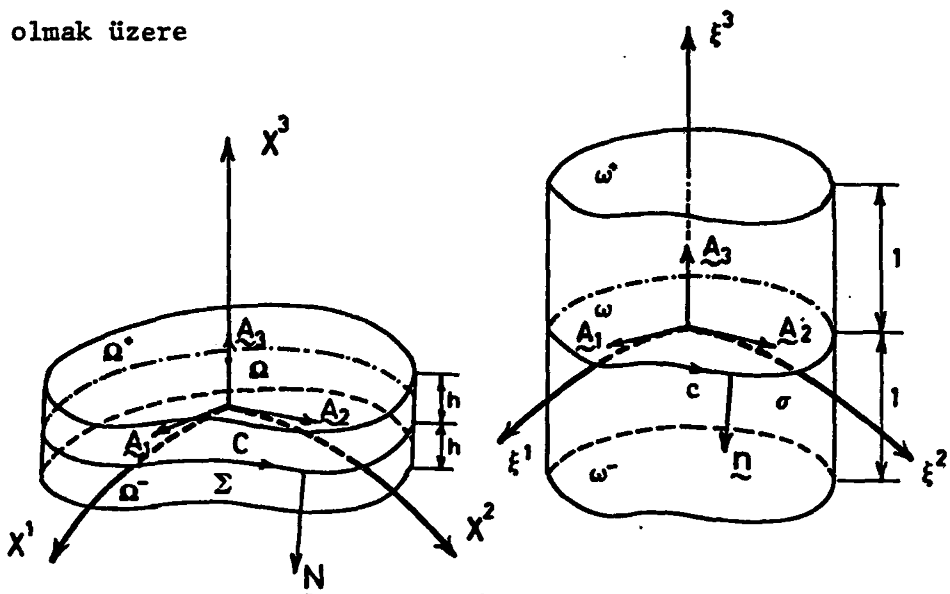
$$G_{\alpha\beta}(X^\gamma) = A_{\alpha\beta}(X^\gamma), \quad G_{\alpha 3} = 0, \quad G_{33} = 1 \tag{2.2.3}$$

şeklini alacaktır. Metrik tansörün yukarıdaki formu 3 indisinin alt veya üst indis olmasının bir önemi kalmadığını belirtmektedir. Öte yandan uzaysal koordinatlardaki $\underset{\sim}{g}_3$ vektörünün de $\underset{\sim}{G}_3$ ile aynı doğrultuda bir birim vektöre eşit olduğu kabul edilmektedir. Dolayısıyla (2.1.5) denklemi ile tanımlanan kaydırıcıların a = 1,2 değerini almak üzere $g_{a3} = \underset{\sim}{g}_a . \underset{\sim}{G}_3 = 0$, $g_{3\alpha} = \underset{\sim}{g}_3 . \underset{\sim}{G}_\alpha = 0$ ve $g_{33} = \underset{\sim}{g}_3 . \underset{\sim}{G}_3 = 1$ ilişkilerini sağlayacağı açıktır. Böylece Green ve Zerna [24]'da da belirtildiği gibi, kısmi kovaryant türev alma işlemi sırasında kullanılan Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı olanları

$$\left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} = \tfrac{1}{2} A^{\delta\gamma}(A_{\alpha\gamma,\beta} + A_{\beta\gamma,\alpha} - A_{\alpha\beta,\gamma}) \tag{2.2.4}$$

denklemi ile verilir. Geri kalan Christoffel sembollerinin sıfır olması nedeniyle de 3 indisine göre alınan bütün kısmı kovaryant türevler 3 indisine göre adi türeve indirgenir. Bunun yanında düzlem dışı büyüklüklerin düzlem koordinatlara göre kısmi kovaryant türevi de adi türev şeklini alır, örneğin $U^3_{;\alpha} = U^3_{,\alpha}$, $U_{3;\alpha} = U_{3,\alpha}$.

Gözönüne alınan plağın ince plak olması nedeniyle, asimptotik açılımda kullanılacak ε parametresi, 2L Ω orta düzleminin maksimum çapı olmak üzere



Şekil - 2.2.1
a) $\underset{\sim}{X}$ koordinatlarında ve b) $\underset{\sim}{\xi}$ koordinatlarında plağa ait geometrik büyüklükler

$$\varepsilon = \frac{h}{L} << 1 \qquad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca orta düzleme ait X^α koordinatlarını $X^\alpha \in [-L,L]$ olacak şekilde seçelim ve plak tarafından işgal edilen bölgeyi bir koordinat dönüşümü yardımıyla aynı mertebede boyutlara sahip olan bir bölgeye dönüştürelim. Bunu gerçekleştirmek için

$$X^\alpha = L\xi^\alpha \ , \quad X^3 = \varepsilon L\xi^3 \ , \quad \xi^1,\xi^2,\xi^3 \in [-1,1] \qquad (2.2.6)$$

şeklinde tanımlanan ξ^K boyutsuz eğrisel koordinatlarına geçilir. Böylece düzlem içindeki $\underset{\sim}{R}(X^\gamma)$ vektörünün de $\underset{\sim}{R}(X^\gamma) = L\underset{\sim}{r}(\xi^\gamma)$ olarak boyutsuzlaştırılmasıyla düzleme ait baz vektörleri $\underset{\sim}{A}_\alpha(\xi^\gamma) = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \xi^\alpha}$ şeklini alır. Yeni koordinatlardaki plağın üst, alt ve yanal yüzleri ise, ω orta düzlemi $\xi^3 = 0$ düzleminde c sınırına sahip sınırlı açık bir küme olmak üzere, sırasıyla, $\overset{+}{\omega}$, $\overset{-}{\omega}$ ve σ ile gösterilir (Şekil-2.2.1.b). Fung [25] tarafından da belirtildiği gibi, von Kármán plak teorisinde çökmelerin kalınlık mertebesinde düzlem içi yerdeğiştirmelerin ise daha küçük mertebede olduğu kabul edilir. Bilinen başka bir gerçek ise düzlem dışı gerilmelerin düzlem içi gerilmeler yanında ufak olduğudur. Bu gözlemler ışığında, boyutsuz ξ^K koordinatlarındaki boyutsuz yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri

$$U^\alpha(\underset{\sim}{X}) = \varepsilon^2 L u^\alpha(\underset{\sim}{\xi}), \qquad U^3(\underset{\sim}{X}) = \varepsilon L u^3(\underset{\sim}{\xi})$$

$$T^{\alpha\beta}(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^2\sigma^{\alpha\beta}(\underset{\sim}{\xi}), \quad T^{\alpha 3}(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^3\sigma^{\alpha 3}(\underset{\sim}{\xi}), \quad T^{33}(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^4\sigma^{33}(\underset{\sim}{\xi}) \qquad (2.2.7)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada T_0 gerilme boyutunda bir çarpan olup özel bir $\tilde{\Sigma}$ gerilme potansiyelinin seçilmesi durumunda ayrıca özelleştirilecektir. Diğer yandan, büyük çökmeler yapan ince bir plağın umulan davranışını yansıtmak üzere kabul edilen yukarıdaki ölçeklemenin [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] ve [20]'de yapılan ölçeklemeler ile aynı olduğunu belirtmek gerekir. Fakat bu çalışmalardan [20] dışındakilerin tamamı fiziksel nonlineerliği gözönüne almamış ve sadece geometrik nonlineerlik ile ilgilenmiştir. Plağın üst, alt ve yanal yüzlerine etkiyen sınırdaki kuvvetler ve kütle kuvvetleri için de

$$t^\alpha_{+,-}(X^\beta) = T_0\varepsilon^3 g^\alpha_{+,-}(\xi^\beta) \ , \qquad t^3_{+,-}(X^\beta) = T_0\varepsilon^4 g^3_{+,-}(\xi^\beta) \qquad \underset{\sim}{X}\in\Omega^{+,-}, \ \underset{\sim}{\xi}\in\omega^{+,-}$$

$$\bar{t}^\alpha(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^2\tau^\alpha(\underset{\sim}{\xi}), \qquad \bar{t}^3(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^3\tau^3(\underset{\sim}{\xi}) \ , \quad \underset{\sim}{X}\in C, \ \underset{\sim}{\xi}\in c \qquad (2.2.8)$$

$$\rho_0 L F^\alpha(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^2 f^\alpha(\underset{\sim}{\xi}) \ , \qquad \rho_0 L F^3(\underset{\sim}{X}) = T_0\varepsilon^3 f^3(\underset{\sim}{\xi})$$

ölçeklendirmesi yapılsın. Bu ölçeklendirmede kalınlık sıfıra giderken dış yüklerin de sıfıra gitmesi gerekliliği ve ε parametresine bağlı olmayan $g^{\alpha}_{+,-}$, $g^{3}_{+,-}$, τ^{α}, τ^{3}, f^{α} ve f^{3} fonksiyonlarının ilk mertebe teoride kendilerini göstermesi isteği rol oynamıştır.

Boyutsuz koordinatlardaki denge denklemleri ve sınır koşullarını elde edebilmek için (2.2.6)-(2.2.8) ilişkileri (2.1.19) denklemlerinde kullanılmalıdır. Böylece $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{\xi}$ koordinatlarında yanal yüzeye ait dış birim normali göstermek üzere, denge denklemleri için

$$\begin{aligned}
&(\sigma^{\alpha\beta} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha\gamma}u^{\beta}_{;\gamma} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha 3}u^{\beta}_{,3})_{;\alpha} + (\sigma^{3\beta} + \varepsilon^2\sigma^{3\alpha}u^{\beta}_{;\alpha} + \varepsilon^2\sigma^{33}u^{\beta}_{,3})_{,3} + f^{\beta} = 0 \\
&(\sigma^{\alpha 3} + \sigma^{\alpha\gamma}u^{3}_{,\gamma} + \sigma^{\alpha 3}u^{3}_{,3})_{;\alpha} + (\sigma^{33} + \sigma^{3\gamma}u^{3}_{,\gamma} + \sigma^{33}u^{3}_{,3})_{,3} + f^{3} = 0 \qquad (2.2.9)
\end{aligned}$$

sonuçları, sınır koşulları için ise

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma^{3\beta} + \varepsilon^2\sigma^{3\alpha}u^{\beta}_{;\alpha} + \varepsilon^2\sigma^{33}u^{\beta}_{,3} = \mp\, g^{\beta}_{+,-} \\
&\sigma^{33} + \sigma^{3\alpha}u^{3}_{,\alpha} + \sigma^{33}u^{3}_{,3} = \mp\, g^{3}_{+,-}
\end{aligned}\right\} \quad \overset{+}{\omega} \text{ ve } \overset{-}{\omega} \text{ de}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma^{\alpha\beta} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha\gamma}u^{\beta}_{;\gamma} + \varepsilon^2\sigma^{\alpha 3}u^{\beta}_{,3})n_{\alpha} = \tau^{\beta} \\
&(\sigma^{\alpha 3} + \sigma^{\alpha\gamma}u^{3}_{,\gamma} + \sigma^{\alpha 3}u^{3}_{,3})n_{\alpha} = \tau^{3}
\end{aligned}\right\} \quad \sigma \text{ da} \qquad (2.2.10)$$

sonuçları bulunur. Açıktır ki bu denklemlerde görünen türevler artık boyutsuz $\underset{\sim}{\xi}$ koordinatlarına göredir. Benzer şekilde, (2.2.6)-(2.2.7) dönüşümlerinin (2.1.13) denkleminde kullanılmasıyla boyutsuz koordinatlardaki şekil değiştirme - yerdeğiştirme ilişkileri

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\varepsilon^2(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} + u_{3,\alpha}u_{3,\beta}) + \frac{1}{2}\varepsilon^4 u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}_{;\beta} \\
E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\varepsilon(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha} + u_{3,\alpha}u_{3,3}) + \frac{1}{2}\varepsilon^3 u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}_{,3} \qquad (2.2.11) \\
E_{33} &= u_{3,3} + \frac{1}{2}u_{3,3}u_{3,3} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 u_{\alpha,3}u^{\alpha}_{,3}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Asimptotik açılıma geçmeden önce, son olarak, gerilme boyutunda olan bazı büyüklükleri T_0 çarpanı yardımıyla boyutsuzlaştırmak yararlı olacaktır. Bunun için bünye denklemlerinde görünen $\underset{\sim}{\Sigma}$ gerilme potansiyeli, $\tilde{P}$ basınç fonksiyonu, $\tilde{e}_k$ ve $\tilde{b}_{\alpha}$ katsayılarının

$$\Sigma = \frac{\tilde{\Sigma}}{T_0} \ , \quad P = \frac{\tilde{P}}{T_0} \ , \quad e_k = \frac{\tilde{e}_k}{T_0} \ , \quad b_\alpha = \frac{\tilde{b}_\alpha}{T_0} \qquad (2.2.12)$$

şeklinde boyutsuzlaştırıldığı kabul edilmektedir.

BÖLÜM 3

ASİMPTOTİK AÇILIM

3.1. Asimptotik Açılım ve Şekil Değiştirme İle İlgili Büyüklükler

Boyutsuz koordinatlardaki alan denklemlerinde ε parametresinin görünmesi nedeniyle bulunacak çözümlerin de ε parametresine bağlı olması doğaldır. Yani bir sınır değer probleminin çözümü olarak bulunacak yerdeğiştirme ve gerilme ifadeleri $\underset{\sim}{\xi}$ koordinatlarından ayrı olarak ε parametresine de bağlı olacaktır. Bu açıdan yerdeğiştirme vektörü ve gerilme tansörünün bileşenleri için, (2.2.9)-(2.2.11) ilişkilerine de dikkat ederek, bu büyüklüklerin ε cinsinden analitik oldukları varsayımı altında

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, {}^{n}\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{\xi}) \;, \qquad \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, {}^{n}\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\xi}) \tag{3.1.1}$$

açılımlarının geçerli olduğu kabul edilecektir. Böyle bir açılım ile, geometrik nonlineerliğe sahip lineer elastik plaklar için [15]'de yapıldığı gibi, her mertebede uyumlu plak denklemleri türetmek mümkündür. Fakat burada işlemlerin karmaşıklığından bir parça olsun kurtulabilmek için, sadece sıfırıncı ve birinci mertebe plak teorilerinin elde edilmesi ile yetinilecektir. Dolayısıyla aşağıdaki denklemlerde yalnız ilk iki mertebe teori için gerekli olan ilişkiler sunulacaktır.

(3.1.1) ile varsayıldığı gibi, yerdeğiştirme bileşenlerinin ε parametresine bağlılığının asimptotik kuvvet serisi şeklinde olması, (2.1.13) ve (2.1.12) tanımları nedeniyle E_{KL} ve C_{KL} tansörlerinin ve ayrıca bu tansörlere ait invaryantların da ε parametresine asimptotik kuvvet serisi şeklinde bağlı olmasını gerektirir. Eğer (2.2.11) denklemlerinden hareket ederek E_{KL} tansörünün bileşenleri için

$$\{E_{\alpha\beta},\, E_{\alpha 3},\, E_{33}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varepsilon^{2}\, {}^{n}E_{\alpha\beta},\, \varepsilon\, {}^{n}E_{\alpha 3},\, {}^{n}E_{33}\}\varepsilon^{2n} \tag{3.1.2}$$

açılımları kabul edilirse, (3.1.1)-(3.1.2) ilişkilerinin (2.2.11) denklemlerinde yerine konulması ve ε parametresinin aynı kuvvetlerine ait katsayıların eşitlenmesiyle

$$
\begin{aligned}
{}^{0}E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\,({}^{0}u_{\alpha;\beta} + {}^{0}u_{\beta;\alpha} + {}^{0}u_{3,\alpha}\;{}^{0}u_{3,\beta})\;,\\
{}^{1}E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\,({}^{1}u_{\alpha;\beta} + {}^{1}u_{\beta;\alpha} + {}^{0}u_{3,\alpha}\;{}^{1}u_{3,\beta} + {}^{1}u_{3,\alpha}\;{}^{0}u_{3,\beta} + {}^{0}u_{\gamma;\alpha}\;{}^{0}u^{\gamma}{}_{;\beta})\;,\\
{}^{0}E_{\alpha3} &= \frac{1}{2}\,({}^{0}u_{\alpha,3} + {}^{0}u_{3,\alpha} + {}^{0}u_{3,\alpha}\;{}^{0}u_{3,3})\;,\\
{}^{1}E_{\alpha3} &= \frac{1}{2}\,({}^{1}u_{\alpha,3} + {}^{1}u_{3,\alpha} + {}^{0}u_{3,\alpha}\;{}^{1}u_{3,3} + {}^{1}u_{3,\alpha}\;{}^{0}u_{3,3} + {}^{0}u_{\gamma;\alpha}\;{}^{0}u^{\gamma}{}_{,3})\;,\\
{}^{0}E_{33} &= {}^{0}u_{3,3} + \frac{1}{2}\,{}^{0}u_{3,3}\;{}^{0}u_{3,3}\;,\\
{}^{1}E_{33} &= {}^{1}u_{3,3} + {}^{0}u_{3,3}\;{}^{1}u_{3,3} + \frac{1}{2}\,{}^{0}u_{\alpha,3}\;{}^{0}u^{\alpha}{}_{,3}\;,\\
{}^{2}E_{33} &= {}^{2}u_{3,3} + {}^{0}u_{3,3}\;{}^{2}u_{3,3} + \frac{1}{2}\,{}^{1}u_{3,3}\;{}^{1}u_{3,3} + {}^{0}u_{\alpha,3}\;{}^{1}u^{\alpha}{}_{,3}\;,\ldots
\end{aligned}
\tag{3.1.3}
$$

sonuçları bulunur. Benzer şekilde (3.1.2) açılımı (2.1.12) denkleminde yerine konur ve Green deformasyon tansörünün bileşenleri için

$$
\{C_{\alpha\beta},\, C_{\alpha3},\, C_{33}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{n}C_{\alpha\beta},\, \varepsilon\,{}^{n}C_{\alpha3},\, {}^{n}C_{33}\}\varepsilon^{2n}
\tag{3.1.4}
$$

açılımı kabul edilirse

$$
\begin{aligned}
&{}^{0}C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\;, \quad {}^{1}C_{\alpha\beta} = 2\;{}^{0}E_{\alpha\beta}\;, \quad {}^{2}C_{\alpha\beta} = 2\;{}^{1}E_{\alpha\beta}\;,\ldots\\
&{}^{0}C_{\alpha3} = 2\;{}^{0}E_{\alpha3}, \quad {}^{1}C_{\alpha3} = 2\;{}^{1}E_{\alpha3}\;,\ldots\\
&{}^{0}C_{33} = 1 + 2\;{}^{0}E_{33}, \quad {}^{1}C_{33} = 2\;{}^{1}E_{33}\;, \quad {}^{2}C_{33} = 2\;{}^{2}E_{33},\ldots
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

ilişkileri elde edilir. İnvaryantlar içinde benzer bir açılım yapmadan önce, (2.1.14) denklemleri ile verilen invaryant tanımlarını bileşenler cinsinden yazmak yararlı olacaktır. Bu işlem sonunda (2.1.14) tanımları düzlem içi ve düzlem dışı bileşenlere bağlı olarak

$$
\begin{aligned}
I_E &= E^{\alpha}{}_{\alpha} + E^{3}{}_{3}\\
II_E &= \frac{1}{2}\,(E^{\alpha}{}_{\alpha}\,E^{\beta}{}_{\beta} - E^{\alpha}{}_{\beta}\,E^{\beta}{}_{\alpha}) + E^{\alpha}{}_{\alpha}\,E^{3}{}_{3} - E^{\alpha}{}_{3}\,E^{3}{}_{\alpha}\\
III_E &= \frac{1}{6}\,(2E^{\alpha}{}_{\beta}\,E^{\beta}{}_{\gamma}\,E^{\gamma}{}_{\alpha} + 6E^{\alpha}{}_{\beta}\,E^{\beta}{}_{3}\,E^{3}{}_{\alpha} + E^{\alpha}{}_{\alpha}\,E^{\beta}{}_{\beta}\,E^{\gamma}{}_{\gamma} + 3E^{\alpha}{}_{\alpha}\,E^{\gamma}{}_{\gamma}\,E^{3}{}_{3}\\
&\quad - 3E^{\alpha}{}_{\gamma}\,E^{\gamma}{}_{\alpha}\,E^{\beta}{}_{\beta} - 6E^{\alpha}{}_{3}\,E^{3}{}_{\alpha}\,E^{\beta}{}_{\beta} - 3E^{\alpha}{}_{\beta}\,E^{\beta}{}_{\alpha}\,E^{3}{}_{3})
\end{aligned}
\tag{3.1.6}
$$

şeklini alır. Böylece E_{KL} tansörünün invaryantları için kabul edilen

$$\{I_E,\ II_E,\ III_E\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^nI_E,\ \varepsilon^2\ {}^nII_E,\ \varepsilon^4\ {}^nIII_E\}\varepsilon^{2n} \qquad (3.1.7)$$

açılımının ve (3.1.2) açılımının (3.1.6) denklemlerinde konulmasıyla

$$^0I_E = {}^0E^3{}_3\ , \quad {}^1I_E = {}^0E^\alpha{}_\alpha + {}^1E^3{}_3\ , \quad {}^2I_E = {}^1E^\alpha{}_\alpha + {}^2E^3{}_3\ ,\ldots$$

$$^0II_E = {}^0E^\alpha{}_\alpha\ {}^0E^3{}_3 - {}^0E^\alpha{}_3\ {}^0E^3{}_\alpha,$$

$$^1II_E = \frac{1}{2}\,({}^0E^\alpha{}_\alpha\ {}^0E^\beta{}_\beta - {}^0E^\alpha{}_\beta\ {}^0E^\beta{}_\alpha) + {}^0E^\alpha{}_\alpha\ {}^1E^3{}_3 + {}^1E^\alpha{}_\alpha\ {}^0E^3{}_3 - 2\ {}^0E^\alpha{}_3\ {}^1E^3{}_\alpha,\ldots$$

$$^0III_E = \frac{1}{2}\ {}^0E^3{}_3({}^0E^\alpha{}_\alpha\ {}^0E^\beta{}_\beta - {}^0E^\alpha{}_\beta\ {}^0E^\beta{}_\alpha) + {}^0E^\alpha{}_\beta\ {}^0E^\beta{}_3\ {}^0E^3{}_\alpha$$

$$- {}^0E^\alpha{}_3\ {}^0E^3{}_\alpha\ {}^0E^\beta{}_\beta,\ldots \qquad (3.1.8)$$

sonuçları elde edilir. Bilindiği gibi (3.1.6) denklemlerinin benzerleri C_{KL} tansörünün invaryantları için de geçerlidir. Eğer bu invaryantlar için

$$\{I_C,\ II_C,\ III_C\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^nI_C,\ {}^nII_C,\ {}^nIII_C\}\varepsilon^{2n} \qquad (3.1.9)$$

açılımı kabul edilir ve ${}^0C^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta$ olması ile (3.1.4) tanımı, (3.1.6) denklemlerinin benzerlerinde kullanılırsa

$$^0I_C = 2 + {}^0C^3{}_3,\quad {}^1I_C = {}^1C^\alpha{}_\alpha + {}^1C^3{}_3\ ,\quad {}^2I_C = {}^2C^\alpha{}_\alpha + {}^2C^3{}_3\ ,\ldots$$

$$^0II_C = 1 + 2\ {}^0C^3{}_3,\quad {}^1II_C = {}^1C^\alpha{}_\alpha + 2\ {}^1C^3{}_3 + {}^1C^\alpha{}_\alpha\ {}^0C^3{}_3 - {}^0C^\alpha{}_3\ {}^0C^3{}_\alpha$$

$$^2II_C = {}^2C^\alpha{}_\alpha + 2\ {}^2C^3{}_3 + {}^2C^\alpha{}_\alpha\ {}^0C^3{}_3 + \frac{1}{2}\,({}^1C^\alpha{}_\alpha\ {}^1C^\beta{}_\beta - {}^1C^\alpha{}_\beta\ {}^1C^\beta{}_\alpha)$$

$$+ {}^1C^\alpha{}_\alpha\ {}^1C^3{}_3 - 2\ {}^0C^\alpha{}_3\ {}^1C^3{}_\alpha,\ldots$$

$$^0III_C = {}^0C^3{}_3,\quad {}^1III_C = {}^1C^3{}_3 + {}^1C^\alpha{}_\alpha\ {}^0C^3{}_3 - {}^0C^\alpha{}_3\ {}^0C^3{}_\alpha$$

$$^2III_C = {}^2C^3{}_3 + {}^1C^\alpha{}_\alpha\ {}^1C^3{}_3 + {}^2C^\alpha{}_\alpha\ {}^0C^3{}_3 + \frac{1}{2}\,({}^1C^\alpha{}_\alpha\ {}^1C^\beta{}_\beta - {}^1C^\alpha{}_\beta\ {}^1C^\beta{}_\alpha){}^0C^3{}_3$$

$$+ {}^1C^\alpha{}_\beta\ {}^0C^\beta{}_3\ {}^0C^3{}_\alpha - {}^0C^\alpha{}_3\ {}^0C^3{}_\alpha\ {}^1C^\beta{}_\beta - 2\ {}^0C^\alpha{}_3\ {}^1C^3{}_\alpha,\ldots \qquad (3.1.10)$$

ilişkileri bulunur. İlk iki mertebe için gerekli olan şekil değiştirme ile ilgili büyüklükleri bu şekilde elde ettikten sonra, bundan sonraki altbölümde denge denklemleri ve sınır şartları üzerinde durulacaktır.

3.2. Denge Denklemleri Ve Sınır Koşulları

İlk iki mertebeye ait denge denklemleri ve sınır koşullarını elde edebilmek için yapılacak iş, (3.1.1) açılımlarını boyutsuz koordinatlardaki (2.2.9)-(2.2.10) denklemlerinde koymak ve ε^2 ye kadar olan kuvvetlerin katsayılarını sıfıra eşitlemektir. Bu işlem sonucunda denge denklemleri ilk mertebe için

$$
\begin{aligned}
&{}^0\sigma^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{3\beta}{}_{,3} + f^{\beta} = 0 \\
&{}^0\sigma^{\alpha 3}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{33}{}_{,3} + ({}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha 3}\,{}^0u^3{}_{,3})_{;\alpha} + ({}^0\sigma^{3\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} \\
&\qquad + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3})_{,3} + f^3 = 0
\end{aligned}
\tag{3.2.1}
$$

olarak ve ε^2 mertebesi için

$$
\begin{aligned}
&{}^1\sigma^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^1\sigma^{3\beta}{}_{,3} + ({}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha 3}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3})_{;\alpha} + ({}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3})_{,3} = 0 \\
&{}^1\sigma^{\alpha 3}{}_{;\alpha} + {}^1\sigma^{33}{}_{,3} + ({}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^1u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{\alpha 3}\,{}^0u^3{}_{,3} + {}^0\sigma^{\alpha 3}\,{}^1u^3{}_{,3})_{;\alpha} \\
&\qquad + ({}^0\sigma^{3\gamma}\,{}^1u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{3\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{33}\,{}^1u^3{}_{,3} + {}^1\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3})_{,3} = 0
\end{aligned}
\tag{3.2.2}
$$

olarak bulunur. Benzer bir işlemle sınır koşulları da sıfırıncı mertebede

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&{}^0\sigma^{3\beta} = \mp\, g^{\beta}_{+,-} \\
&{}^0\sigma^{33} + {}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^3{}_{,\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3} = \mp\, g^3_{+,-}
\end{aligned}\right\}\ \omega^{+} \text{ ve } \omega^{-} \text{ de} \\
&\left.\begin{aligned}
&{}^0\sigma^{\alpha\beta}\, n_{\alpha} = \tau^{\beta} \\
&({}^0\sigma^{\alpha 3} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha 3}\,{}^0u^3{}_{,3})n_{\alpha} = \tau^3
\end{aligned}\right\}\ \sigma \text{ da}
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

şeklinde ve birinci mertebede

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&{}^1\sigma^{3\beta} + {}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3} = 0 \\
&{}^1\sigma^{33} + {}^0\sigma^{3\alpha}\,{}^1u^3{}_{,\alpha} + {}^1\sigma^{3\alpha}\,{}^0u^3{}_{,\alpha} + {}^0\sigma^{33}\,{}^1u^3{}_{,3} + {}^1\sigma^{33}\,{}^0u^3{}_{,3} = 0
\end{aligned}\right\}\ \omega^{+} \text{ ve } \omega^{-} \text{ de} \\
&\left.\begin{aligned}
&({}^1\sigma^{\alpha\beta} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^{\beta}{}_{;\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha 3}\,{}^0u^{\beta}{}_{,3})n_{\alpha} = 0 \\
&({}^1\sigma^{\alpha 3} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^1u^3{}_{,\gamma} + {}^1\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^0u^3{}_{,\gamma} + {}^0\sigma^{\alpha 3}\,{}^1u^3{}_{,3} + {}^1\sigma^{\alpha 3}\,{}^0u^3{}_{,3})n_{\alpha} = 0
\end{aligned}\right\}\ \sigma \text{ da}
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

şeklinde elde edilecektir.

3.3. Bünye Denklemleri

İnvaryantlar için (3.1.7) açılımının kabul edilmesi nedeniyle, invaryantların fonksiyonu olan e_k bünye katsayıları için de

$$e_k = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{n}e_k \, \varepsilon^{2n} \qquad (k=1,2,3) \tag{3.3.1}$$

açılımının varolduğu düşünülecektir. Ayrıca invaryantlara bağlı olan bir $f(I_E, II_E, III_E)$ fonksiyonunun ε parametresine göre Taylor açılımının

$$\begin{aligned} f(I_E,II_E,III_E) = {} & f(I_E,II_E,III_E)\Big|_{\varepsilon=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial I_E}\,{}^{1}I_E + \frac{\partial f}{\partial II_E}\,{}^{0}II_E\right)\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon^2 \\ & + \left\{\frac{\partial f}{\partial I_E}\,{}^{2}I_E + \frac{\partial f}{\partial II_E}\,{}^{1}II_E + \frac{\partial f}{\partial III_E}\,{}^{0}III_E \right. \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial I_E^2}({}^{1}I_E)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial I_E \partial II_E}\,{}^{1}I_E\,{}^{0}II_E \right. \\ & \left.\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial II_E^2}({}^{0}II_E)^2\right]\right\}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir. Böylece (3.3.2) açılımından Σ gerilme potansiyelinin invaryantlara göre türevini hesaplayarak ve sonucu (2.1.21) tanımlarında kullanarak (3.3.1) denklemindeki ${}^{n}e_k$ (k=1,2,3) katsayılarını açık olarak bulmak mümkün olur. Bu işleme geçmeden önce, (2.2.7), (3.1.1), (3.1.2) ve (3.3.1) denklemleri (2.1.20) bünye denklemlerinde kullanılır ise, negatif indisli gerilme bileşenlerinin de sıfıra eşit olması gerektiği gözönünde tutulduğunda

$${}^{-2}\sigma^{33} = 0 \rightarrow {}^{0}e_1 + ({}^{0}e_2 + {}^{0}e_3\,{}^{0}E^3{}_3)\,{}^{0}E^3{}_3 = 0$$

$${}^{-1}\sigma^{\alpha\beta} = 0 \rightarrow {}^{0}e_1 = 0$$

$${}^{-1}\sigma^{\alpha 3} = 0 \rightarrow ({}^{0}e_2 + {}^{0}e_3\,{}^{0}E^3{}_3)\,{}^{0}E^\alpha{}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} {}^{-1}\sigma^{33} = 0 \rightarrow {}& {}^{1}e_1 + {}^{0}e_2\,{}^{1}E^3{}_3 + {}^{1}e_2\,{}^{0}E^3{}_3 + {}^{0}e_3(2\,{}^{0}E^3{}_3\,{}^{1}E^3{}_3 \\ & + {}^{0}E^\alpha{}_3\,{}^{0}E^3{}_\alpha) + {}^{1}e_3\,{}^{0}E^3{}_3\,{}^{0}E^3{}_3 = 0 \end{aligned}$$

$${}^{0}\sigma^{\alpha\beta} = {}^{1}e_1\,A^{\alpha\beta} + {}^{0}e_2\,{}^{0}E^{\alpha\beta} + {}^{0}e_3\,{}^{0}E^{\alpha 3}\,{}^{0}E^{3\beta}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\sigma^{\alpha 3} &= {}^{0}e_{2}\,{}^{1}E^{\alpha 3} + {}^{1}e_{2}\,{}^{0}E^{\alpha 3} + {}^{0}e_{3}({}^{0}E^{\alpha}{}_{\gamma}\,{}^{0}E^{\gamma 3} + {}^{0}E^{\alpha 3}\,{}^{1}E^{33} + {}^{1}E^{\alpha 3}\,{}^{0}E^{33}) \\
&\quad + {}^{1}e_{3}\,{}^{0}E^{\alpha 3}\,{}^{0}E^{33} \\
{}^{0}\sigma^{33} &= {}^{2}e_{1} + {}^{0}e_{2}\,{}^{2}E^{33} + {}^{1}e_{2}\,{}^{1}E^{33} + {}^{2}e_{2}\,{}^{0}E^{33} + {}^{0}e_{3}(2\,{}^{0}E^{33}\,{}^{2}E^{33} \\
&\quad + {}^{1}E^{33}\,{}^{1}E^{33} + 2\,{}^{0}E^{3}{}_{\alpha}\,{}^{1}E^{\alpha 3}) + {}^{1}e_{3}(2\,{}^{0}E^{33}\,{}^{1}E^{33} + {}^{0}E^{3}{}_{\alpha}\,{}^{0}E^{\alpha 3}) \\
&\quad + {}^{2}e_{3}\,{}^{0}E^{33}\,{}^{0}E^{33} \\
{}^{1}\sigma^{\alpha\beta} &= {}^{2}e_{1}\,A^{\alpha\beta} + {}^{0}e_{2}\,{}^{1}E^{\alpha\beta} + {}^{1}e_{2}\,{}^{0}E^{\alpha\beta} + {}^{0}e_{3}({}^{0}E^{\alpha}{}_{\gamma}\,{}^{0}E^{\gamma\beta} + {}^{0}E^{\alpha 3}\,{}^{1}E^{3\beta} \\
&\quad + {}^{1}E^{\alpha 3}\,{}^{0}E^{3\beta}) + {}^{1}e_{3}\,{}^{0}E^{\alpha 3}\,{}^{0}E^{3\beta}
\end{aligned}
\tag{3.3.3}
$$

sonuçları elde edilir. Yukarıda da belirtildiği gibi, bu denklemlerde görünen ${}^{n}e_{k}$ katsayılarını açık olarak hesaplayabilmek için (3.3.1)-(3.3.2) açılımları (2.1.21) tanımlarında kullanılmalıdır. $(3.3.3)_{1,2,3}$ denklemlerinde görünen ${}^{0}e_{k}$ katsayıları bu şekilde

$$
{}^{0}e_{1} = \frac{\partial\Sigma}{\partial I_{E}}\Big|_{\varepsilon=0} + {}^{0}I_{E}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial II_{E}}\Big|_{\varepsilon=0}\,, \qquad {}^{0}e_{2} = -\Big(\frac{\partial\Sigma}{\partial II_{E}}\Big|_{\varepsilon=0} + {}^{0}I_{E}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial III_{E}}\Big|_{\varepsilon=0}\Big),
$$

$$
{}^{0}e_{3} = \frac{\partial\Sigma}{\partial III_{E}}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{3.3.4}
$$

olarak bulunur. Diğer ${}^{n}e_{k}$ katsayılarının hesabı ileride ayrıca verilecektir. Eğer (3.3.4), (3.1.8) ve $(3.3.3)_{2}$ kullanılırsa $(3.3.3)_{1,3}$ kısıtlamaları

$$
\begin{aligned}
-{}^{2}\sigma^{33} = 0 &\rightarrow {}^{0}E^{3}{}_{3}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial II_{E}}\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \\
-{}^{1}\sigma^{\alpha 3} = 0 &\rightarrow {}^{0}E^{\alpha}{}_{3}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial II_{E}}\Big|_{\varepsilon=0} = 0
\end{aligned}
\tag{3.3.5}
$$

şeklini alır. Baştan beri Σ gerilme potansiyelinin keyfi olduğu durum ile ilgilenildiğinden ve çıkacak sonuçların lineer teoriyi de kapsaması beklenildiğinden yukardaki kısıtlamalar

$$
{}^{0}E^{3}{}_{3} = 0, \qquad {}^{0}E^{\alpha}{}_{3} = 0 \tag{3.3.6}
$$

sonuçlarını verir. Eğer şimdiki teorinin hangi mertebede şekil değiştirmeler ile ilgilendiği sorulursa, yukarıdaki sonuçlar ve (3.1.2) denkleminden $E_{\alpha\beta}$ ve E_{33} ün ε^{2} mertebesinde fakat $E_{\alpha 3}$ ün ε^{3} mertebesinde varsayıldığı görülür. Diğer yandan (3.3.6) kısıtlamalarının (3.1.8) denklemlerinde kullanılmasıyla ${}^{0}I_E = {}^{0}II_E = {}^{0}III_E = 0$ sonuçları bulunur. Bu ise (3.1.7) açılımından $\varepsilon = 0$ da $I_E = II_E = III_E = 0$ olduğu sonucunu verir. Böylece, $(3.3.3)_2$ şartı da doğal halin gerilmesiz olduğunu ifade eden (2.1.22) şartına dönüşür, dolayısıyla ek bir kısıtlama getirmez. Eğer (3.3.6) sonuçları geri kalan $(3.3.3)_{4,5,6,7,8}$ denklemlerinde kullanılırsa bu denklemler

$$
\begin{aligned}
&-{}^{1}\sigma^{33} = 0 \rightarrow {}^{1}e_{1} + {}^{0}e_{2}\, {}^{1}E^{3}{}_{3} = 0 \\
&{}^{0}\sigma^{\alpha\beta} = {}^{1}e_{1}\, A^{\alpha\beta} + {}^{0}e_{2}\, {}^{0}E^{\alpha\beta}\,, \qquad {}^{0}\sigma^{\alpha 3} = {}^{0}e_{2}\, {}^{1}E^{\alpha 3} \\
&{}^{0}\sigma^{33} = {}^{2}e_{1} + {}^{0}e_{2}\, {}^{2}E^{33} + {}^{1}e_{2}\, {}^{1}E^{33} + {}^{0}e_{3}\, {}^{1}E^{33}\, {}^{1}E^{33}, \\
&{}^{1}\sigma^{\alpha\beta} = {}^{2}e_{1}\, A^{\alpha\beta} + {}^{0}e_{2}\, {}^{1}E^{\alpha\beta} + {}^{1}e_{2}\, {}^{0}E^{\alpha\beta} + {}^{0}e_{3}\, {}^{0}E^{\alpha}{}_{\gamma}\, {}^{0}E^{\gamma\beta}
\end{aligned}
\tag{3.3.7}
$$

şeklini alır. Bunun yanında invaryantlar ile ilgili sonuçların (3.3.2) Taylor açılımında konulması

$$
\begin{aligned}
f(I_E, II_E, III_E) = f(0,0,0) &+ {}^{1}I_E \left.\frac{\partial f}{\partial I_E}\right|_{I_E=II_E=III_E=0} \varepsilon^2 \\
&+ \left.\left[{}^{2}I_E \frac{\partial f}{\partial I_E} + {}^{1}II_E \frac{\partial f}{\partial II_E} + \frac{1}{2}({}^{1}I_E)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial I_E^2}\right]\right|_{I_E=II_E=III_E=0} \varepsilon^4 + \ldots
\end{aligned}
\tag{3.3.8}
$$

sonucunu verir. Böylece (2.1.21), (3.3.1) ve (3.3.8) denklemlerinin kullanılmasıyla (3.3.7) denklemlerinde görünen ${}^{n}e_k$ katsayıları

$$
\begin{aligned}
&{}^{0}e_{2} = \Gamma_{1}\,, \quad {}^{0}e_{3} = \Gamma_{2}, \quad {}^{1}e_{1} = \Gamma_{0}\, {}^{1}I_E\,, \quad {}^{1}e_{2} = -\,\Gamma_{3}\, {}^{1}I_E\,, \\
&{}^{2}e_{1} = \Gamma_{0}\, {}^{2}I_E + \Gamma_{3}\, {}^{1}II_E + \Gamma_{4}\, ({}^{1}I_E)^2
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

olarak bulunur. Buradaki Γ_k (k=0,1,2,3,4) katsayıları ise

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{0} = \left.\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial I_E^2} + \frac{\partial\Sigma}{\partial II_E}\right)\right|_{I_E=II_E=III_E=0}, \quad \Gamma_{1} = -\left.\frac{\partial\Sigma}{\partial II_E}\right|_{I_E=II_E=III_E=0}, \\
&\Gamma_{2} = \left.\frac{\partial\Sigma}{\partial III_E}\right|_{I_E=II_E=III_E=0}, \quad \Gamma_{3} = \left.\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial I_E \partial II_E} + \frac{\partial\Sigma}{\partial III_E}\right)\right|_{I_E=II_E=III_E=0}, \\
&\Gamma_{4} = \left.\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial I_E^3} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial I_E \partial II_E}\right)\right|_{I_E=II_E=III_E=0}
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse $(3.3.7)_2$ ile verilen ${}^0\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme ifadesinin içinde görünen ${}^1e_1$ katsayısı, ${}^1I_E$ büyüklüğünün tanımı nedeniyle birinci mertebeye ait ${}^1E^3{}_3$ şekil değiştirme bileşenini içerir. Yani sıfırıncı mertebeye ait ${}^0\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme ifadesinin içinde birinci mertebeye ait ${}^1u_3$ yerdeğiştirme bileşenleri bulunmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak ve uyumlu bir asimptotik açılım elde etmek ancak geride kalan $(3.3.7)_1$ kısıtlamasını kullanmak ile mümkün olur. Böylece $(3.3.7)_1$ kısıtlamasından (3.3.9) ilişkilerinin kullanılmasıyla

$$ {}^1E^3{}_3 = -\frac{\Gamma_0}{\Gamma_0+\Gamma_1}\,{}^0E^\alpha{}_\alpha \tag{3.3.11}$$

sonucu elde edilir. Bu durumda (3.3.6), (3.3.9) ve (3.3.11) ilişkilerinin (3.3.7) denklemlerinde konulmasıyla gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned}
{}^0\sigma^{\alpha\beta} &= \Gamma_1\Big(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_0+\Gamma_1}\,{}^0E^\gamma{}_\gamma\,A^{\alpha\beta} + {}^0E^{\alpha\beta}\Big)\,, \qquad {}^0\sigma^{\alpha3} = \Gamma_1\,{}^1E^{\alpha3}\\
{}^0\sigma^{33} &= (\Gamma_0+\Gamma_1)\,{}^2E^{33} + \Gamma_0\,{}^1E^\gamma{}_\gamma + \frac{\Gamma_3}{2}\big({}^0E^\gamma{}_\gamma\,{}^0E^\delta{}_\delta - {}^0E^\gamma{}_\delta\,{}^0E^\delta{}_\gamma\big)\\
&\quad + \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4 + \Gamma_0^2(\Gamma_2-\Gamma_3)}{(\Gamma_0+\Gamma_1)^2}\,{}^0E^\gamma{}_\gamma\,{}^0E^\delta{}_\delta\\
{}^1\sigma^{\alpha\beta} &= \Big[\Gamma_0\big({}^1E^\gamma{}_\gamma + {}^2E^3{}_3\big) + \frac{\Gamma_3}{2}\big({}^0E^\gamma{}_\gamma\,{}^0E^\delta{}_\delta - {}^0E^\gamma{}_\delta\,{}^0E^\delta{}_\gamma\big)\\
&\quad + \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4 - \Gamma_0\Gamma_3\Gamma_0(\Gamma_0+\Gamma_1)}{(\Gamma_0+\Gamma_1)^2}\,{}^0E^\gamma{}_\gamma\,{}^0E^\delta{}_\delta\Big]A^{\alpha\beta} + \Gamma_1\,{}^1E^{\alpha\beta}\\
&\quad - \frac{\Gamma_1\Gamma_3}{\Gamma_0+\Gamma_1}\,{}^0E^\gamma{}_\gamma\,{}^0E^{\alpha\beta} + \Gamma_2\,{}^0E^\alpha{}_\gamma\,{}^0E^{\gamma\beta}
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

şeklini alır. Dikkat edilirse ${}^1\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme bileşeninde, içinde daha yukarı mertebeye ait yerdeğiştirme bileşenleri bulunan ${}^2E^{33}$ büyüklüğü görülmektedir. Bu aykırılığın önüne geçebilmenin yolu ${}^0\sigma^{33}$ gerilme ifadesinden ${}^2E^{33}$ büyüklüğünü çekmek ve sonucu ${}^1\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme ifadesinde koymaktır. Eğer bu işlem yapılır ve daha kısa bir yazılış için

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0+\Gamma_1}\,,\quad \Delta_1 = \frac{\Gamma_1}{2}\,,\quad \Delta_2 = \Gamma_2\quad,\quad \Delta_3 = \frac{\Gamma_1\Gamma_3}{\Gamma_0+\Gamma_1}\\
&\Delta_4 = \big[\Gamma_1^2(\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_0\Gamma_3) - \Gamma_0^2(\Gamma_0\Gamma_2 + 2\Gamma_1\Gamma_3)\big]/(\Gamma_0+\Gamma_1)^3
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

şeklinde tanımlanan Δ_k $(k=0,1,\ldots,4)$ katsayıları kullanılır ise, ${}^0\sigma^{\alpha\beta}$ ve ${}^1\sigma^{\alpha\beta}$ düzlemsel gerilmeleri

$$
{}^{0}\sigma^{\alpha\beta} = 2\Delta_1 (\Delta_0 \; {}^{0}E^{\gamma}_{\gamma} \; A^{\alpha\beta} + {}^{0}E^{\alpha\beta})
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\sigma^{\alpha\beta} = {} & 2\Delta_1 (\Delta_0 \; {}^{1}E^{\gamma}_{\gamma} \; A^{\alpha\beta} + {}^{1}E^{\alpha\beta}) + \Delta_0 \; {}^{0}\sigma^{33} \; A^{\alpha\beta} + [\tfrac{\Delta_3}{2} ({}^{0}E^{\gamma}_{\gamma} \; {}^{0}E^{\delta}_{\delta} \\
& - {}^{0}E^{\gamma}_{\delta} \; {}^{0}E^{\delta}_{\gamma}) + \Delta_4 \; {}^{0}E^{\gamma}_{\gamma} \; {}^{0}E^{\delta}_{\delta}] A^{\alpha\beta} - \Delta_3 \; {}^{0}E^{\gamma}_{\gamma} \; {}^{0}E^{\alpha\beta} + \Delta_2 \; {}^{0}E^{\alpha}_{\gamma} \; {}^{0}E^{\gamma\beta}
\end{aligned}
\tag{3.3.14}
$$

olarak yazılabilir.

Görüldüğü gibi şimdiye kadar Σ fonksiyonu üzerine hiçbir kısıtlama getirilmemiş ve invaryantların keyfi bir fonksiyonu olduğu varsayılmıştır. [20]'de ise E_{33} bileşeninin gerilme-şekil değiştirme ilişkilerine girmesini önlemek için, tamamlayıcı enerji ve dolayısıyla şekil değiştirme enerjisinin sadece $E_{\alpha\beta}$ bileşenlerine bağlı olduğu kabulü yapılmıştır. Yazarlar tarafından da belirtildiği gibi plağı oluşturan malzeme üzerine büyük bir kısıtlama getiren bu yaklaşım daha sonra [21]'de ince elastik plakların silindirik deformasyonu problemine de uygulanmıştır. Doğal olarak Σ fonksiyonunun keyfiliği bünye denklemlerinde görünen Γ_k ve dolayısıyla Δ_k katsayılarının da keyfi olmasına yol açar. Eğer (3.3.10) ve (3.3.13) tanımlarına veya (3.3.12) ve (3.3.14) bünye denklemlerine dikkat edilirse bu katsayılardan Γ_2, Γ_3, Γ_4 veya Δ_2, Δ_3, Δ_4 ün fiziksel nonlineerlik ile ilgili olduğu görülür. Geri kalan Γ_0, Γ_1 veya Δ_0, Δ_1 katsayıları ise lineer elastisiteye ait katsayılardır ve sıfırıncı mertebe denklemlerde sadece bu katsayılar görünür. Yani sıfırıncı mertebe teori sadece geometrik nonlineerliği içermekte ve fiziksel nonlineerlik ancak birinci mertebe teoride kendini göstermektedir. Dolayısıyla, bu yaklaşım çerçevesinde fiziksel nonlineerliğin ikincil olduğu sonucu çıkarılabilir. Her ne kadar işlemlere, keyfi Σ fonksiyonu (veya Δ_k katsayıları) için devam edilse de bazı sıkışabilir hiperelastik malzemeler için önerilmiş Σ fonksiyonlarına ilişkin Δ_k katsayılarının aldığı değerler üzerinde durmak yararlı olabilir. Aşağıda Ko malzemesi ve şekil değiştirmelere göre ikinci mertebe malzeme için sözkonusu katsayıların verilmesi ile yetinilecektir.

a) Ko malzemesi: Bu tür malzemeye ait $\Sigma(I_E, II_E, III_E)$ fonksiyonu, μ kayma modülünü T_0 olarak almak üzere

$$
\Sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{II_C}{III_C} + 2\sqrt{III_C} - 5\right] \tag{3.3.15}
$$

şeklinde verilir (Ko [26]). Sözkonusu fonksiyonun, deformasyonun sınırlı bir bölgesi için (örneğin basit çekmede 2.4 uzama oranına kadar) % 47 boşluk içeren poliüretan köpüklü lastiğe ait deneysel sonuçlar ile iyi uyum sağladığı gözlenmiştir. Eğer (2.1.15), (3.3.10) ve (3.3.13) ilişkileri kullanılırsa Ko malzemesine ait Δ_k katsayıları

$$\Delta_0 = \frac{1}{3}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = -8, \quad \Delta_3 = \frac{4}{3}, \quad \Delta_4 = -\frac{4}{9} \qquad (3.3.16)$$

olarak bulunur.

b) Şekil değiştirmelere göre ikinci mertebe malzeme: Ko malzemesi için yapıldığı gibi T_0 çarpanı μ kayma modülü olarak alınırsa ikinci mertebe elastik bir malzeme için $\Sigma(I_E, II_E, III_E)$ fonksiyonu

$$\Sigma = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} I_E^2 - 2\, II_E + \frac{\ell}{\mu} I_E^3 + \frac{m}{\mu} I_E\, II_E + \frac{n}{\mu} III_E \qquad (3.3.17)$$

şeklinde ifade edilir.(Murnaghan [27]). Buradaki λ ve μ katsayıları lineer elastisitenin Lamé sabitlerini gösterirken nonlineerliği karakterize eden ℓ, m, n katsayıları ise Murnaghan sabitleri olarak adlandırılır. Bu durumda boyutsuz Δ_k katsayılarının hesabı

$$\Delta_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \frac{n}{\mu}, \quad \Delta_3 = \frac{2(m+n)}{\lambda + 2\mu}$$

$$\Delta_4 = \left[8\mu^2(3\ell + m) - 4\lambda(\lambda+\mu)(m+n) - \lambda^3 n/\mu\right]/(\lambda + 2\mu)^3 \qquad (3.3.18)$$

sonuçlarını verir. Şekil değiştirmelere göre lineer teoride $\ell = m = n = 0$ ve dolayısıyla $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$ ile tanımlanan ν Poisson oranı kullanılırsa $\Delta_0 = \nu/(1-\nu)$ olduğu görülür. Eğer bu çalışmada elde edilen sonuçlarda $\Delta_0 = \nu/(1-\nu)$, $\Delta_1 = 1$ ve $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ şeklindeki lineer elastisiteye ait katsayılar kullanılır ise [15]'deki denklemlere ulaşılır.

3.4. Nonlineer Plak Denklemleri

Bu bölümde denge denklemlerinin kalınlık boyunca integrasyonu sonucu moment denklemleri elde edilecek ve bu denklemlerin yardımıyla sıfırıncı mertebe için von Kármán plak denklemlerine ulaşılacaktır. Bu sonuca varmak için (3.3.6) ve (3.3.11) denklemlerinin yerdeğiştirme bileşenlerine getirdiği kısıtlamaları incelemek yararlı olacaktır. Öte yandan bundan sonra boyutsuz enine koordinat ξ^3 yerine daha kolay bir yazılış için ζ kullanılacaktır. (3.1.3) ilişkilerinden kolayca görülebileceği gibi $(3.3.6)_1$ şartının sağlanması ancak ${}^0u^3_{,3} = 0$ olması ile mümkündür. Diğer seçenek olan ${}^0u^3_{,3} = -2$ hali lineer teoride geçersiz olduğu için gözönüne alınamaz. Buradan sıfırıncı mertebe ${}^0u^3$ çökmesinin ζ değişkeninden bağımsız olduğu yani

$$ {}^0u^3 = {}^0w(\xi^1,\xi^2) \tag{3.4.1} $$

yazılabileceği çıkar. $(3.3.6)_2$ şartı ise (3.1.3) ilişkileri ve yukarıdaki sonuç nedeniyle

$$ {}^0u_{\alpha,3} = -\,{}^0w_{,\alpha} \tag{3.4.2} $$

şeklini alır. Bu denklemin integrasyonuyla plak düzlemindeki sıfırıncı mertebe yerdeğiştirmeler, ${}^0v_\alpha = {}^0v_\alpha(\xi^1,\xi^2)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$ {}^0u_\alpha = {}^0v_\alpha - \zeta\,{}^0w_{,\alpha} \tag{3.4.3} $$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi sıfırıncı mertebe teori Kirchhoff-Love yaklaşımını sağlamaktadır. Birinci mertebe yerdeğiştirme bileşenlerinin formunu belirleyebilmek için yukarıdaki sonuçlar ve (3.1.3) ilişkileri kullanılırsa (3.3.11) kısıtlaması

$$ {}^1u_{3,3} = -\Delta_0({}^0v^\alpha_{;\alpha} - \zeta\,{}^0w_{;\ \alpha}^{\ \alpha}) - \frac{1}{2}(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;\alpha}\,{}^0w_{;}^{\ \alpha} \tag{3.4.4} $$

şeklini alır. Eğer bu denklem ζ değişkenine göre integre edilirse birinci mertebe çökme

$$ {}^1u_3 = {}^1w(\xi^1,\xi^2) + {}^1U_3(\xi^1,\xi^2,\zeta) \tag{3.4.5} $$

olarak bulunur. Buradaki ${}^1U_3$ fonksiyonu

$$ {}^1U_3 = -\Delta_0\,\zeta({}^0v^\alpha_{;\alpha} - \frac{1}{2}\zeta\,{}^0w_{;\ \alpha}^{\ \alpha}) - \frac{1}{2}(1+\Delta_0)\zeta\,{}^0w_{;\alpha}\,{}^0w_{;}^{\ \alpha} \tag{3.4.6} $$

şeklinde olup sıfırıncı mertebe büyüklüklere bağlı bilinen bir fonksiyonu gösterir. ${}^1w$ ise ζ değişkeninden bağımsız olan ve birinci mertebe alan denklemlerinden bulunması gereken keyfi bir fonksiyondur. Benzer şekilde ${}^1u^\alpha$ yerdeğiştirmesinin formunu belirlemek için (3.1.3) ilişkileri ve yukarıdaki sonuçlar, $(3.3.12)_2$ ile verilen ${}^0\sigma_{\alpha3}$ ifadesinde kullanılır ve ${}^1u_{\alpha,3}$ çekilirse

$$ {}^1u_{\alpha,3} = -\,{}^1w_{;\alpha} - {}^1U_{3;\alpha} - {}^0w_{;\alpha}\,{}^1U_{3,3} + {}^0w_{;}^{\ \gamma}({}^0v_{\gamma;\alpha} - \zeta\,{}^0w_{;\gamma\alpha}) + \frac{1}{\Delta_1}\,{}^0\sigma_{\alpha3} \tag{3.4.7} $$

elde edilir. Bu denklemin ζ değişkenine göre integrasyonu ise, ${}^1v_\alpha(\xi^1,\xi^2)$ ile integrasyon sonucu çıkan keyfi fonksiyon gösterilmek üzere

$$ {}^1u_\alpha = {}^1v_\alpha - \zeta\, {}^1w_{,\alpha} + {}^1U_\alpha(\xi^1,\xi^2,\zeta) \qquad (3.4.8)$$

sonucunu verir. Buradaki ${}^1v_\alpha$ fonksiyonunun belirlenmesi ancak birinci mertebe alan denklemlerinin çözümü ile mümkün olacaktır. Sadece sıfırıncı mertebe büyüklüklere bağlı ${}^1U_\alpha(\xi^1,\xi^2,\zeta)$ fonksiyonunun açık formu ise, ileride sayfa 39'da, ${}^0\sigma_{\alpha_3}$ gerilmesi sıfırıncı mertebe yerdeğiştirme bileşenlerine bağlı olarak bulunduktan sonra yazılacaktır. Fakat birinci mertebe denklemler ile ilgilenilirken ${}^1U_\alpha$ fonksiyonuna, şu anda açık ifadesi verilmese de, sıfırıncı mertebe büyüklüklere bağlı bilinen bir fonksiyon olarak bakmak doğru olacaktır. Öte yandan sıfırıncı mertebeden kaynaklanan terimler nedeniyle (3.4.5) ve (3.4.8) denklemleri ile verilen birinci mertebe yerdeğiştirmelerin Kirchhoff-Love yaklaşımını sağlamadığı açıktır.

(3.3.14) gerilme ifadelerini yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden yazma sırasında daha sade bir görünüm elde etmek için, sadece plak düzlemindeki koordinatlara bağlı olan

$$ {}^k\theta_{\alpha\beta}(\xi^1,\xi^2) = {}^kv_{\alpha;\beta} + {}^kv_{\beta;\alpha} + \sum_{\ell=0}^{k} {}^\ell w_{;\alpha}\, {}^{k-\ell}w_{;\beta} \qquad k=0,1 \qquad (3.4.9)$$

büyüklüğünü tanımlayalım. Böylece (3.4.1)-(3.4.9) ilişkilerinin (3.1.3) denklemlerinde kullanılmasıyla ${}^kE_{\alpha\beta}$ (k=0,1) için

$$ {}^kE_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, {}^k\theta_{\alpha\beta} - \zeta\, {}^kw_{;\alpha\beta} + {}^k\tilde{E}_{\alpha\beta} \qquad (3.4.10)$$

yazılabileceği görülür. Burada ${}^0\tilde{E}_{\alpha\beta} = 0$ olup, ${}^1\tilde{E}_{\alpha\beta}$ ise sadece sıfırıncı mertebeye ait büyüklükleri bulunduran ve

$$ \begin{aligned} {}^1\tilde{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \big[& {}^1U_{\alpha;\beta} + {}^1U_{\beta;\alpha} + {}^0w_{;\alpha}\, {}^1U_{3;\beta} + {}^0w_{;\beta}\, {}^1U_{3;\alpha} + {}^0v_{\gamma;\alpha}\, {}^0v^{\gamma}_{;\beta} \\ & - \zeta({}^0w_{;\gamma\alpha}\, {}^0v^{\gamma}_{;\beta} + {}^0v_{\gamma;\alpha}\, {}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\beta}) + \zeta^2\, {}^0w_{;\gamma\alpha}\, {}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\beta} \big] \end{aligned} \qquad (3.4.11)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur. Bu durumda (3.3.14) gerilme bileşenleri, ${}^0\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = 0$ olmak üzere

$$ {}^k\sigma^{\alpha\beta} = \Delta_1 \big[{}^k\theta^{\alpha\beta} + \Delta_0\, {}^k\theta^{\gamma}_{\gamma} A^{\alpha\beta} - 2\zeta({}^kw_{;}{}^{\alpha\beta} + \Delta_0\, {}^kw_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma} A^{\alpha\beta}) \big] + {}^k\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}, \quad k=0,1 \qquad (3.4.12)$$

yazılışı ile verilebilir. Burada ${}^{1}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$, ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme tansörüne ilk mertebeden gelen katkıyı gösterir ve $(3.3.14)_2$ denkleminde ${}^{1}E_{\alpha\beta}$ yerine ${}^{1}\tilde{E}_{\alpha\beta}$ koymakla elde edilir. (3.4.12) denklemlerinden görüldüğü gibi sıfırıncı mertebeye ait gerilmeler plak kalınlığı boyunca lineer olarak değişirken birinci mertebe gerilmelerde bu özellik kaybolmaktadır. Ayrıca yukarıdaki ilişkilerden, her mertebeye ait yerdeğiştirme probleminin çözümüyle o mertebeye ait düzlemsel gerilmelerin hemen belirlenebileceği ve dolayısıyla sözkonusu denklemlerin uyumlu olduğu açıktır.

Gerilme bileşenlerinin sıfırıncı ve birinci mertebe çeşitli momentleri

$$\{{}^{k}n^{\alpha\beta}, {}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta}\} = \int_{-1}^{1} \{{}^{k}\sigma^{\alpha\beta}, {}^{k}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}\}d\zeta\ , \quad \{{}^{k}m^{\alpha\beta}, {}^{k}\tilde{m}^{\alpha\beta}\} = \int_{-1}^{1} \{{}^{k}\sigma^{\alpha\beta}, {}^{k}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}\}\zeta d\zeta$$

$$\{{}^{k}q^{\alpha}, {}^{0}\tilde{q}^{\alpha}\} = \int_{-1}^{1} \{{}^{k}\sigma^{\alpha 3},_{\zeta}\ {}^{0}\sigma^{\alpha 3}\}d\zeta\ , \quad \{{}^{0}n^{33}, {}^{0}m^{33}\} = \int_{-1}^{1} \{{}^{0}\sigma^{33},_{\zeta}\ {}^{0}\sigma^{33}\}d\zeta \qquad k=0,1, \quad (3.4.13)$$

şeklinde tanımlansın. Burada ${}^{0}\tilde{n}^{\alpha\beta} = {}^{0}\tilde{m}^{\alpha\beta} = 0$ olduğunun unutulmaması gerekir. Eğer (3.4.12) gerilme ifadesi yukarıdaki tanımlarda kullanılırsa $k=0,1$ için ${}^{k}n^{\alpha\beta}$ ve ${}^{k}m^{\alpha\beta}$ momentleri

$${}^{k}n^{\alpha\beta} = 2\Delta_1({}^{k}\theta^{\alpha\beta} + \Delta_0\ {}^{k}\theta^{\gamma}_{\gamma}\ A^{\alpha\beta}) + {}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta},$$

$${}^{k}m^{\alpha\beta} = -\frac{4}{3}\Delta_1({}^{k}w_{;}{}^{\alpha\beta} + \Delta_0\ {}^{k}w_{;\gamma}{}^{\gamma} A^{\alpha\beta}) + {}^{k}\tilde{m}^{\alpha\beta} \qquad (3.4.14)$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.4.12) ve (3.4.14) denklemlerinden gerilme ve moment bileşenleri arasında

$${}^{k}\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}({}^{k}n^{\alpha\beta} - {}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta}) + \frac{3}{2}\zeta({}^{k}m^{\alpha\beta} - {}^{k}\tilde{m}^{\alpha\beta}) + {}^{k}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \qquad k=0,1 \qquad (3.4.15)$$

ilişkisinin varolduğu kolayca görülebilir. Dikkat edilirse sıfırıncı mertebe gerilmeleri mambran ve eğilme gerilmelerinin toplamı olarak yazmak mümkün iken birinci mertebe toplam gerilmeleri mambran ve eğilme gerilmelerine ayrıştırmak mümkün değildir.

Plağa ait moment denge denklemlerini elde edebilmek için, (3.2.1)-(3.2.2) denklemleri ve ζ kere $(3.2.1)_1$ ile $(3.2.2)_1$ denklemleri, -1 ve 1 sınırları arasında ζ üzerinde integre edilir. Çıkan sonuçlarda

$(3.2.3)_{1,2}$ ve $(3.2.4)_{1,2}$ sınır koşullarıyla birlikte (3.4.13) tanımlarının kullanılması, bazı işlemlerden sonra k=0,1 için

$$
\begin{aligned}
&{}^{k}n^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^{k}r^{\beta} = 0 \\
&{}^{k}q^{\alpha}{}_{;\alpha} + \sum_{\ell=0}^{k} \left({}^{\ell}n^{\alpha\gamma}\,{}^{k-\ell}w_{;\gamma\alpha} - {}^{\ell}r^{\gamma}\,{}^{k-\ell}w_{,\gamma}\right) + {}^{k}p = 0 \qquad (3.4.16)\\
&{}^{k}m^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} - {}^{k}q^{\beta} + {}^{k}s^{\beta} = 0
\end{aligned}
$$

denklemlerini verir. Burada ${}^{0}\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme tansörünün ikinci mertebe momentinin hesaplanmasında (3.4.15) ilişkisi kullanılmış ve dış yükler ile ilgili

$$
\begin{aligned}
&{}^{0}r^{\beta} = g_{+}^{\beta} + g_{-}^{\beta} + \int_{-1}^{1} f^{\beta} d\zeta\,, \qquad {}^{0}s^{\beta} = g_{+}^{\beta} - g_{-}^{\beta} + \int_{-1}^{1} \zeta f^{\beta} d\zeta, \\
&{}^{0}p = g_{+}^{3} + g_{-}^{3} + \int_{-1}^{1} f^{3} d\zeta \qquad (3.4.17)
\end{aligned}
$$

tanımları yapılmıştır. Ayrıca birinci mertebe denklemlerde görünen fakat sadece sıfırıncı mertebe büyüklüklere bağlı olan ${}^{1}r^{\beta}$, ${}^{1}s^{\beta}$ ve ${}^{1}p$ terimleri ise

$$
\begin{aligned}
{}^{1}r^{\beta} &= \left({}^{0}n^{\alpha\gamma}\,{}^{0}v^{\beta}{}_{;\gamma} - {}^{0}m^{\alpha\gamma}\,{}^{0}w_{;\gamma}{}^{\beta} - {}^{0}q^{\alpha}\,{}^{0}w_{;}{}^{\beta}\right)_{;\alpha} \\
{}^{1}s^{\beta} &= \left({}^{0}m^{\alpha\gamma}\,{}^{0}v^{\beta}{}_{;\gamma} - \frac{1}{3}\,{}^{0}n^{\alpha\gamma}\,{}^{0}w_{;\gamma}{}^{\beta} - {}^{0}\bar{q}^{\alpha}\,{}^{0}w_{;}{}^{\beta}\right)_{;\alpha} - {}^{0}q^{\alpha}\,{}^{0}v^{\beta}{}_{;\alpha} \\
&\quad + {}^{0}\bar{q}^{\alpha}\,{}^{0}w_{;\alpha}{}^{\beta} + {}^{0}n^{33}\,{}^{0}w_{;}{}^{\beta} \qquad (3.4.18)\\
{}^{1}p &= -\Big\{\Delta_{0}\left({}^{0}m^{\alpha\gamma}\,{}^{0}v^{\delta}{}_{;\delta\gamma} - \frac{1}{6}\,{}^{0}n^{\alpha\gamma}\,{}^{0}w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta\gamma} + {}^{0}q^{\alpha}\,{}^{0}v^{\gamma}{}_{;\gamma} - {}^{0}\bar{q}^{\alpha}\,{}^{0}w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 + \Delta_{0})\left[{}^{0}q^{\alpha}\,{}^{0}w_{;\gamma}\,{}^{0}w_{;}{}^{\gamma} + {}^{0}m^{\alpha\gamma}\left({}^{0}w_{;\delta}\,{}^{0}w_{;}{}^{\delta}\right)_{;\gamma}\right]\Big\}_{;\alpha}
\end{aligned}
$$

denklemleri ile verilir.

Eğer $(3.4.16)_2$ ve $(3.4.16)_3$ arasında ${}^{k}q^{\alpha}$ yok edilir ve $(3.4.14)_2$ ilişkisi kullanılırsa (3.4.16) denklemleri

$$
\begin{aligned}
&{}^{k}n^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^{k}r^{\beta} = 0 \\
&-\frac{4}{3}\Delta_{1}(1 + \Delta_{0})\,{}^{k}w_{;}{}^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} + \sum_{\ell=0}^{k}\left({}^{\ell}n^{\alpha\gamma}\,{}^{k-\ell}w_{;\gamma\alpha} - {}^{\ell}r^{\gamma}\,{}^{k-\ell}w_{,\gamma}\right) + {}^{k}\tilde{m}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} \\
&\qquad + {}^{k}s^{\alpha}{}_{;\alpha} + {}^{k}p = 0 \qquad (3.4.19)
\end{aligned}
$$

şeklini alır. Örnek olarak incelenecek problemde olduğu gibi, eğer sınır şartları yerdeğiştirmeler üzerine verilmiş ise o zaman (3.4.19) denklemlerinin yerdeğiştirme bileşenlerine bağlı olarak yazılması daha uygun olur. Bu durumda yukarıdaki denklemlerde (3.4.9) ve (3.4.14) ilişkilerinin kullanılması, k=0,1 için

$$(1 + 2\Delta_0)\,{}^{k}v^{\alpha\ \beta}_{\ ;\alpha} + {}^{k}v^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha} + \sum_{\ell=0}^{k} \Big[{}^{\ell}w_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\,{}^{k-\ell}w_{;}{}^{\beta} + (1 + \Delta_0)\,{}^{\ell}w_{;\alpha}\,{}^{k-\ell}w_{;}{}^{\alpha\beta}$$

$$+ \Delta_0\,{}^{\ell}w_{;}{}^{\alpha\beta}\,{}^{k-\ell}w_{;\alpha}\Big] + \frac{1}{2\Delta_1}\left({}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^{k}r^{\beta}\right) = 0$$

$$- \frac{2}{3}(1 + \Delta_0)\,{}^{k}w_{;}{}^{\alpha\ \beta}{}_{\alpha\ \beta} + \sum_{\ell=0}^{k} \Big[\Big({}^{\ell}v_{\alpha;\gamma} + {}^{\ell}v_{\gamma;\alpha} + \sum_{n=0}^{\ell} {}^{n}w_{;\alpha}\,{}^{\ell-n}w_{;\gamma}\Big)\,{}^{k-\ell}w_{;}{}^{\gamma\alpha}$$

$$+ \Delta_0\Big(2\,{}^{\ell}v^{\delta}{}_{;\delta} + \sum_{n=0}^{\ell} {}^{n}w_{;\delta}\,{}^{\ell-n}w_{;}{}^{\delta}\Big)\,{}^{k-\ell}w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\Big] + \frac{1}{2\Delta_1}\Big[\sum_{\ell=0}^{k} \Big({}^{\ell}\tilde{n}^{\alpha\gamma}\,{}^{k-\ell}w_{;\alpha\gamma}$$

$$- {}^{\ell}r^{\gamma}\,{}^{k-\ell}w_{,\gamma}\Big) + {}^{k}\tilde{m}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} + {}^{k}s^{\alpha}{}_{;\alpha} + {}^{k}p\Big] = 0 \qquad (3.4.20)$$

sonucunu verir. Görüldüğü gibi üç tane ${}^{k}v^{\alpha}$ ve ${}^{k}w$ (k=0,1) bilinmeyeni için üç tane denklem vardır ve bu denklemler asimptotik açılım tekniğinin bir sonucu olarak sıfırıncı mertebede nonlineer iken birinci mertebede lineer denklem şeklindedir.

Eğer sınır şartları gerilmeler üzerine verilmiş ise, genellikle bilinmeyenler olarak ${}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta}$ ve ${}^{k}w$ büyüklüklerini seçmek daha uygun olabilir. Bu durumda çözülmesi gereken (3.4.19) denklemleri üç tane iken bilinmeyen sayısının dört olması nedeniyle (3.4.19) denklemlerine bir uygunluk koşulunun ilave edilmesi gerektiği çıkar. Bunun için, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ iki boyutlu alterne tansörü göstermek üzere,

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta} = \delta^{\beta}_{\alpha}\,\delta^{\delta}_{\gamma} - \delta^{\beta}_{\gamma}\,\delta^{\delta}_{\alpha} \qquad (3.4.21)$$

özdeşliğinin ([24]) (3.4.9) tanımında kullanılması

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,{}^{k}\theta^{\alpha}{}_{\beta;}{}^{\gamma}{}_{\delta} = - \sum_{\ell=0}^{k} \left[{}^{\ell}w,\ {}^{k-\ell}w\right] \qquad (3.4.22)$$

sonucunu verir. Burada denklemin sağ tarafı için Φ ve Ψ, ξ^{α} nın skaler fonksiyonları olmak üzere

$$[\Phi,\Psi] = \Phi_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\,\Psi_{;}{}^{\beta}{}_{\beta} - \Phi_{;}{}^{\alpha\beta}\,\Psi_{;\alpha\beta} \qquad (3.4.23)$$

notasyonu tanımlanmıştır. Ayrıca $(3.4.14)_1$ denkleminden ${}^{k}\theta^{\alpha\beta}$ çekilirse

$$ {}^{k}\theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\Delta_1}\left[{}^{k}n^{\alpha\beta} - {}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta} - \frac{\Delta_0}{1+2\Delta_0}\left({}^{k}n^{\gamma}{}_{\gamma} - {}^{k}\tilde{n}^{\gamma}{}_{\gamma}\right)A^{\alpha\beta}\right] \tag{3.4.24} $$

yazılabileceği görülür. Bu sonucun (3.4.22) denkleminin sol tarafında konulmasıyla uygunluk koşulu olarak

$$ {}^{k}n^{\alpha}{}_{\gamma;\alpha}{}^{\gamma} - \frac{1+\Delta_0}{1+2\Delta_0}\,{}^{k}n^{\alpha}{}_{\alpha;\gamma}{}^{\gamma} = 2\Delta_1 \sum_{\ell=0}^{k}\left[{}^{\ell}w,\ {}^{k-\ell}w\right] + {}^{k}\tilde{n}^{\alpha}{}_{\gamma;\alpha}{}^{\gamma} - \frac{1+\Delta_0}{1+2\Delta_0}\,{}^{k}\tilde{n}^{\alpha}{}_{\alpha;\gamma}{}^{\gamma} \tag{3.4.25} $$

denklemi bulunur. Böylece (3.4.19) ve (3.4.25) denklemleri ${}^{k}n^{\alpha\beta}$ ve ${}^{k}w$ bilinmeyenlerini belirlemek için yeterli sayıda denklem oluştururlar. ${}^{k}n^{\alpha\beta}$ üzerine yazılması gereken sınır koşullarını bulabilmek için $(3.2.3)_3$ ve $(3.2.4)_3$ denklemleri ζ değişkenine göre $[-1,1]$ aralığında integre edilirse, k=0,1 için

$$ {}^{k}n^{\alpha\beta}\, n_\alpha = {}^{k}h^{\beta} \qquad c \text{ üzerinde} \tag{3.4.26} $$

sınır koşulları elde edilir. Buradaki ${}^{k}h^{\beta}$ fonksiyonları ise

$$ {}^{0}h^{\beta} = \int_{-1}^{1} \tau^{\beta}\, d\zeta\,, \quad {}^{1}h^{\beta} = -\left({}^{0}n^{\alpha\gamma}\, {}^{0}v^{\beta}{}_{;\gamma} - {}^{0}m^{\alpha\gamma}\, {}^{0}w^{\beta}{}_{;\gamma} - {}^{0}q^{\alpha}\, {}^{0}w^{\beta}{}_{;}\right)n_\alpha \tag{3.4.27} $$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bir gerilme fonksiyonu tanımlayarak (3.4.19) ve (3.4.25) denklemlerini daha basit bir formda yazmak mümkün olabilir. Bunun için $(3.4.19)_1$ denkleminin çözümü homojen çözüm ve özel çözümün toplamı şeklinde, yani

$$ {}^{k}\bar{n}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0\,, \qquad {}^{k}\eta^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = -\,{}^{k}r^{\beta} \tag{3.4.28} $$

olmak üzere

$$ {}^{k}n^{\alpha\beta} = {}^{k}\bar{n}^{\alpha\beta} + {}^{k}\eta^{\alpha\beta} \tag{3.4.29} $$

şeklinde yazılır. Bunun yanında $(3.4.28)_1$ denkleminin çözümü, ${}^{k}\Phi(\xi^1,\xi^2)$ gerilme fonksiyonu olmak üzere

$$ {}^{k}\bar{n}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\gamma\alpha}\varepsilon^{\delta\beta}\, {}^{k}\Phi_{;\delta\gamma} \tag{3.4.30} $$

ile ifade edilebilir. Eğer yukarıdaki tanımlar $(3.4.19)_2$ ve (3.4.25) denklemlerinde kullanılırsa, bazı hesaplamalardan sonra ${}^{k}\Phi$ ve ${}^{k}w$

bilinmeyenleri için

$$ {}^{k}\Phi_{;\alpha\beta}^{\ \ \alpha\beta} = -\frac{1+2\Delta_0}{1+\Delta_0}\left(2\Delta_1 \sum_{\ell=0}^{k} [{}^{\ell}w, {}^{k-\ell}w] + {}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^{k}r^{\alpha}{}_{;\alpha}\right) + {}^{k}\tilde{n}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - {}^{k}\eta^{\alpha\beta}{}_{;\beta} $$

$$ \frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^{k}w_{;\alpha\beta}^{\ \ \alpha\beta} - \sum_{\ell=0}^{k} ({}^{\ell}\eta^{\alpha\beta}\,{}^{k-\ell}w_{,\beta})_{;\alpha} = \sum_{\ell=0}^{k} [{}^{\ell}\Phi, {}^{k-\ell}w] + {}^{k}\tilde{m}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} + {}^{k}s^{\alpha}{}_{;\alpha} + {}^{k}p \tag{3.4.31} $$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler k=0 için nonlineer olup von Kármán denklemlerinin genelleştirilmesinden başka birşey değildir, k=1 için ise asimptotik açılım tekniğinin bir sonucu olarak lineer denklem sınıfına girerler. Yukarıdaki denklemlerin çözülebilmesi için sınır koşullarının da ${}^{k}w$ ve ${}^{k}\Phi$ üzerine yazılması gerektiği açıktır. Eğer (3.4.29)-(3.4.30) tanımları (3.4.26) denkleminde kullanılırsa ${}^{k}\Phi$ fonksiyonu ile ilgili sınır şartları

$$ \varepsilon^{\gamma\alpha}\varepsilon^{\delta\beta}\,{}^{k}\Phi_{;\delta\gamma}\,n_\alpha = {}^{k}h^{\beta} - {}^{k}\eta^{\alpha\beta}\,n_\alpha \qquad c \text{ üzerinde} \tag{3.4.32} $$

olarak bulunur. Bunun yanında yerdeğiştirme tipi bir sınır değer problemi için sınır koşullarının ${}^{k}w$ ve $\partial\,{}^{k}w/\partial n$ üzerine yazılması gereklidir. Bu durum ileride ayrıca incelenecektir.

Eğer gerilme tipi bir sınır değer problemi sözkonusu ise sınır boyunca momentlerin ve kayma kuvvetlerinin tanımlanması gerektiği açıktır. Bunu gerçekleştirmek için ζ kere $(3.2.3)_3$ ve $(3.2.4)_3$ denklemleri ve ayrıca $(3.2.3)_4$ ve $(3.2.4)_4$ denklemleri ζ değişkenine göre kalınlık boyunca integre edilirse, k=0,1 için

$$ {}^{k}m^{\alpha\beta}\,n_\alpha = {}^{k}m^{\beta}\ , \quad {}^{k}q_n = {}^{k}q^{\alpha}\,n_\alpha = {}^{k}h^{3} - \sum_{\ell=0}^{k} {}^{\ell}h^{\alpha}\,{}^{k-\ell}w_{,\alpha} \quad c \text{ üzerinde} \tag{3.4.33} $$

sınır koşulları bulunur. Buradaki ${}^{k}m^{\beta}$ ve ${}^{k}h^{3}$ büyüklükleri ise

$$ {}^{0}m^{\beta} = \int_{-1}^{1} \tau^{\beta}\zeta d\zeta\ , \quad {}^{0}h^{3} = \int_{-1}^{1} \tau^{3} d\zeta\ , $$

$$ {}^{1}m^{\beta} = \left(\frac{1}{3}\,{}^{0}n^{\alpha\gamma}\,{}^{0}w_{;\gamma}^{\ \beta} + {}^{0}\bar{q}^{\alpha}\,{}^{0}w_{;}^{\ \beta} - {}^{0}m^{\alpha\gamma}\,{}^{0}v^{\beta}_{;\gamma}\right)n_\alpha $$

$$ {}^1h^3 = \{\Delta_0({}^0m^{\alpha\gamma}\,{}^0v^{\delta}_{;\delta\gamma} - \frac{1}{6}\,{}^0n^{\alpha\gamma}\,{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta\gamma} + {}^0q^{\alpha}\,{}^0v^{\gamma}_{;\gamma} - {}^0\bar{q}^{\alpha}\,{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}) $$

$$ + \frac{1}{2}(1 + \Delta_0)[{}^0q^{\alpha}\,{}^0w_{;\gamma}\,{}^0w_{;}{}^{\gamma} + {}^0m^{\alpha\gamma}({}^0w_{;\delta}\,{}^0w_{;}{}^{\delta})_{;\gamma}]\}n_{\alpha} \qquad (3.4.34) $$

olarak tanımlanır. Bilindiği gibi ${}^km^{\alpha\beta}$ momentlerinin ${}^kw$ büyüklüğüne bağlı ifadesi $(3.4.14)_2$ denklemi ile verilir, benzer şekilde ${}^kq^{\alpha}$ kayma kuvvetlerini de ${}^kw$ cinsinden ifade etmek için $(3.4.16)_3$ kullanılırsa

$$ {}^kq^{\beta} = -\frac{4}{3}\Delta_1(1 + \Delta_0)\,{}^kw_{;\alpha}{}^{\alpha\beta} + {}^k\tilde{m}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^ks^{\beta} \qquad (3.4.35) $$

bulunur. Dikkat edilirse sınırda gerilmeler verildiği zaman (3.4.33) ile verilen üç sınır şartı ${}^kw$ büyüklüğünü tek olarak belirlemek için gerekli olandan fazladır. Bu durumu ortadan kaldırmak, klasik plak teorisinde yapıldığı gibi, sınır şartlarını ${}^km_n = {}^km^{\alpha\beta}\,n_{\alpha}\,n_{\beta}$ ile verilen eğilme momenti ve ${}^kq_e = {}^kq_n - \partial\,{}^km_t/\partial s$ ile verilen effektif kayma kuvveti üzerine yazmak ile mümkün olur. Burada t birim teğet vektörü, s sınır boyunca yay uzunluğunu ve ${}^km_t = {}^km^{\alpha\beta}\,\tilde{t}_{\alpha}\,n_{\beta}$ ise burulma momentini gösterir. Böylece yeni sınır şartları

$$ {}^km_n = {}^km^{\beta}\,n_{\beta}\,, \qquad {}^kq_e = {}^kh^3 - \sum_{\ell=0}^{k}\,{}^{\ell}h^{\alpha}\,{}^{k-\ell}w_{;\alpha} - \frac{\partial}{\partial s}({}^km^{\alpha}\,t_{\alpha}) \quad \text{c üzerinde} \qquad (3.4.36) $$

şeklinde verilir.

Görüldüğü gibi bu bölümde işlemler k=0,1 için yani sıfırıncı ve birinci mertebe için birarada yürütülmüş ve denklemler bu iki mertebe için kapalı olarak verilmiştir. Bundan sonraki iki bölümde önce sıfırıncı mertebe denklemler kısaca özetlenecek ve daha sonra birinci mertebe denklemlerde görünen fakat sıfırıncı mertebeden kaynaklanan bazı terimlerin açık yazılışlarının belirlenmesiyle birinci mertebe denklemler üzerinde durulacaktır.

3.5. Sıfırıncı Mertebe Yaklaşım

3.5.1. Plak Denklemleri:

Yerdeğiştirme tipi formülasyonda;

$$ (1 + 2\Delta_0)\,{}^0v^{\alpha}_{;\alpha}{}^{\beta} + {}^0v^{\beta}_{;\alpha}{}^{\alpha} + (1 + 2\Delta_0)\,{}^0w_{;}{}^{\alpha\beta}\,{}^0w_{;\alpha} + {}^0w_{;\alpha}{}^{\alpha}\,{}^0w_{;}{}^{\beta} + \frac{1}{2\Delta_1}\,{}^0r^{\beta} = 0 $$

$$\frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - 2\Delta_1\left[({}^0v_{\alpha;\beta} + {}^0v_{\beta;\alpha})\,{}^0w_{;}^{\;\alpha\beta} + \Delta_0(2\,{}^0v_{;\alpha}^{\alpha} + {}^0w_{;\alpha}\,{}^0w_{;}^{\;\alpha})\,{}^0w_{;\beta}^{\;\beta} + {}^0w_{;\alpha}\,{}^0w_{;\beta}\,{}^0w_{;}^{\;\alpha\beta}\right] + {}^0r^{\alpha}\,{}^0w_{;\alpha} = {}^0p + {}^0s_{;\alpha}^{\alpha} \tag{3.5.1}$$

Gerilme tipi formülasyonda;

$${}^0n_{;\alpha}^{\alpha\beta} + {}^0r^{\beta} = 0$$

$$\frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - {}^0n^{\alpha\beta}\,{}^0w_{;\alpha\beta} + {}^0r^{\alpha}\,{}^0w_{;\alpha} = {}^0p + {}^0s_{;\alpha}^{\alpha} \tag{3.5.2}$$

$${}^0n_{\beta;\alpha}^{\alpha\;\beta} - \frac{1+\Delta_0}{1+2\Delta_0}\,{}^0n_{\alpha;\beta}^{\alpha\;\beta} = 2\Delta_1\left[{}^0w,\,{}^0w\right] \qquad \text{(uygunluk koşulu)}$$

veya

$${}^0\Phi_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} = -\frac{1+2\Delta_0}{1+\Delta_0}\left(2\Delta_1\left[{}^0w,\,{}^0w\right] + {}^0r_{;\alpha}^{\alpha}\right) - {}^0\eta_{\alpha;\beta}^{\alpha\;\beta}$$

$$\frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - ({}^0\eta^{\alpha\beta}\,{}^0w_{;\beta})_{;\alpha} = \left[{}^0\Phi,\,{}^0w\right] + {}^0p + {}^0s_{;\alpha}^{\alpha} \tag{3.5.3}$$

3.5.2. Sınır Koşulları:

Plak düzlemiyle ilgili sınır koşulları yerdeğiştirme tipi formülasyonda

$${}^0v^{\alpha} = 0 \qquad c \text{ üzerinde} \tag{3.5.4}$$

olarak, gerilme tipi formülasyonda ise

$${}^0n^{\alpha\beta}\,n_{\alpha} = {}^0h^{\beta} \quad \text{veya} \quad \varepsilon^{\gamma\alpha}\,\varepsilon^{\delta\beta}\,{}^0\Phi_{;\gamma\delta}\,n_{\alpha} = {}^0h^{\beta} - {}^0\eta^{\alpha\beta}\,n_{\alpha} \quad c \text{ üzerinde} \tag{3.5.5}$$

şeklinde verilmektedir. Enine yerdeğiştirme ile ilgili sınır koşulları da, c_1, c_2, c_3 sırasıyla c sınırının ankastre, basit mesnetli ve serbest kenar olan kısımlarını göstermek üzere aşağıda verildiği gibi alınacaktır.

a) Ankastre kenar: ${}^0w = 0$, $\dfrac{\partial\,{}^0w}{\partial n} = 0$ $\qquad c_1$ de

b) Basit mesnetli kenar: ${}^0w = 0$, ${}^0m_n = {}^0m^{\beta}\,n_{\beta}$ c_2 de

(3.5.6)

c) Serbest kenar: $\quad {}^0m_n = {}^0m^\beta n_\beta ,$

$$ {}^0q_e = {}^0q_n - \frac{\partial\, {}^0m_t}{\partial s} = {}^0h^3 - {}^0h^\alpha\, {}^0w_{;\alpha} $$

$$ - \frac{\partial}{\partial s}({}^0m^\alpha t_\alpha) \qquad c_3 \text{ de} $$

Bu koşulların her biri c sınırının tamamında geçerli olabildiği gibi birbiriyle ayrık olan c_1, c_2 ve c_3 alt bölgelerinde de geçerli olabilir.

3.6. Birinci Mertebe Yaklaşım

Dikkat edilirse, (3.4.12) denklemleri ile plak düzlemine ait gerilme bileşenlerinin ${}^kw$ ve ${}^kv^\alpha$ yerdeğiştirmelerine nasıl bağlı olduğu verilmiş olmasına rağmen, şu ana kadar düzlem dışı gerilmelerin nasıl elde edileceği konusunda birşey söylenmemiştir. Bunun yanında (3.3.12) denklemleri ile verilen ${}^0\sigma^{\alpha 3}$ ve ${}^0\sigma^{33}$ bileşenlerine ait bünye denklemleri sırasıyla ${}^1u^\alpha$ yerdeğiştirmesinin formunu belirlemekte ve ${}^1\sigma^{\alpha\beta}$ gerilmesinden ${}^2u^3_{,3}$ büyüklüğünü elimine etmekte kullanılmıştır. Bu nedenle ${}^0\sigma^{\alpha 3}$ gerilmesini içeren ${}^1U^\alpha$ büyüklüğünün ve ${}^0\sigma^{33}$ gerilmesini içeren ${}^1\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ büyüklüğünün yerdeğiştirmelere bağlı açık yazılışı verilememiştir. Benzer nedenlerle ${}^1\tilde{n}^{\alpha\beta}$, ${}^1\tilde{m}^{\alpha\beta}$, ${}^0\bar{q}^\alpha$, ${}^0n^{33}$ ve ${}^0m^{33}$ büyüklükleri de sadece tanım olarak sunulmuştur. Bu durumu ortadan kaldırmak için yapılacak ilk işlem [13], [14] ve [15]'de izlenen yolu kullanarak ${}^0\sigma^{\alpha 3}$ ve ${}^0\sigma^{33}$ gerilme bileşenlerini belirlemektir. İlk olarak $(3.2.1)_1$ denklemini (3.4.15) ve $(3.4.16)_1$ ilişkilerinin yardımıyla

$$ {}^0\sigma^{3\beta}_{,3} = -\frac{3}{2}\zeta\, {}^0m^{\alpha\beta}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\, {}^0r^\beta - f^\beta \qquad (3.6.1) $$

şeklinde yazabiliriz. Eğer bu denklem ζ üzerinde integre edilirse, $F^\beta(\xi^1,\xi^2)$ integrasyon sonucu çıkan keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$ {}^0\sigma^{3\beta} = -\frac{3}{4}\zeta^2\, {}^0m^{\alpha\beta}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\zeta\, {}^0r^\beta - \int_{-1}^{\zeta} f^\beta d\zeta + F^\beta(\xi^1,\xi^2) \qquad (3.6.2) $$

ilişkisini buluruz. ${}^0\sigma^{3\beta}$ gerilme bileşeninin $(3.2.3)_1$ sınır koşullarında kullanılması ise

$$ g^\beta_+ = -\frac{3}{4}\, {}^0m^{\alpha\beta}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\, {}^0r^\beta - \int_{-1}^{1} f^\beta d\zeta + F^\beta(\xi^1,\xi^2) $$

$$ -g^\beta_- = -\frac{3}{4}\, {}^0m^{\alpha\beta}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\, {}^0r^\beta + F^\beta(\xi^1,\xi^2) \qquad (3.6.3) $$

denklemlerini verir. Bu iki denklemin toplanmasıyla da F^{β} keyfi fonksiyonu

$$F^{\beta}(\xi^1,\xi^2) = \frac{3}{4}\,{}^{0}m^{\alpha\beta}_{\;;\alpha} + \frac{1}{2}\,{}^{0}i^{\beta} \tag{3.6.4}$$

olarak belirlenir. Burada

$${}^{0}i^{\beta} = g^{\beta}_{+} - g^{\beta}_{-} + \int_{-1}^{1} f^{\beta} d\zeta \tag{3.6.5}$$

tanımı yapılmıştır. Kolayca görülebileceği gibi (3.6.3) denklemlerinin çıkartılması ise bir özdeşlik verecektir. Böylece (3.6.4) ve $(3.4.14)_2$ ilişkilerinin kullanılmasıyla ${}^{0}\sigma^{\beta 3}$ gerilme bileşeni

$${}^{0}\sigma^{3\beta} = -\Delta_1(1+\Delta_0)(1-\zeta^2)\,{}^{0}w_{;\alpha}^{\;\alpha\beta} + \frac{1}{2}\zeta\,{}^{0}r^{\beta} + \frac{1}{2}\,{}^{0}i^{\beta} - \int_{-1}^{\zeta} f^{\beta} d\zeta \tag{3.6.6}$$

olarak elde edilir. Benzer bir işlemle ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilmesini de hesaplamak için $(3.2.1)_2$ denklemi, $(3.2.1)_1$ denkleminin de yardımıyla

$${}^{0}\sigma^{33}_{\;,3} = -\,{}^{0}\sigma^{\alpha 3}_{\;;\alpha} - {}^{0}\sigma^{\alpha\gamma}\,{}^{0}w_{;\gamma\alpha} + f^{\alpha}\,{}^{0}w_{;\alpha} - f^{3} \tag{3.6.7}$$

şeklinde yazılır. Eğer bu denklemde (3.6.6) ve (3.4.15) ilişkileri kullanılır ve çıkan ifade ζ değişkenine göre integre edilirse, $F(\xi^1,\xi^2)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}{}^{0}\sigma^{33} = {} & \Delta_1(1+\Delta_0)\zeta(1-\frac{1}{3}\zeta^2)\,{}^{0}w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - \frac{3}{4}\zeta^2\,{}^{0}m^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{2}\zeta\,{}^{0}n^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha\beta} - \frac{1}{4}\zeta^2\,{}^{0}r^{\alpha}_{\;;\alpha} - \frac{1}{2}\zeta\,{}^{0}i^{\alpha}_{\;;\alpha} + \zeta\int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha}_{\;;\alpha}\,d\zeta \\ & - \int_{-1}^{\zeta}\zeta f^{\alpha}_{\;;\alpha}\,d\zeta + {}^{0}w_{;\alpha}\int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha}d\zeta - \int_{-1}^{\zeta} f^{3}d\zeta + F(\xi^1,\xi^2)\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

bulunur. Bu sonucun $(3.2.3)_2$ sınır koşullarında kullanılması ise

$$\begin{aligned}g^{3}_{+} - g^{\alpha}_{+}\,{}^{0}w_{;\alpha} = {} & \frac{2}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^{0}w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - \frac{3}{4}\,{}^{0}m^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,{}^{0}n^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\beta\alpha} \\ & -\frac{1}{4}\,{}^{0}r^{\alpha}_{\;;\alpha} - \frac{1}{2}\,{}^{0}i^{\alpha}_{\;;\alpha} + \int_{-1}^{1} f^{\alpha}_{\;;\alpha}\,d\zeta - \int_{-1}^{1}\zeta f^{\alpha}_{\;;\alpha}\,d\zeta + {}^{0}w_{;\alpha}\int_{-1}^{1} f^{\alpha}d\zeta \\ & - \int_{-1}^{1} f^{3}d\zeta + F(\xi^1,\xi^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-g^{3}_{-} + g^{\alpha}_{-}\,{}^{0}w_{;\alpha} = {} & -\frac{2}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^{0}w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - \frac{3}{4}\,{}^{0}m^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2}\,{}^{0}n^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\beta\alpha} - \frac{1}{4}\,{}^{0}r^{\alpha}_{\;;\alpha} + \frac{1}{2}\,{}^{0}i^{\alpha}_{\;;\alpha} + F(\xi^1,\xi^2)\end{aligned} \tag{3.6.9}$$

denklemlerini verir. Bu iki denklemin toplanmasından F fonksiyonu

$$ {}^0\ell = g_+^3 - g_-^3 + \int_{-1}^{1} f^3 d\zeta \qquad (3.6.10) $$

tanımını da kullanırsak

$$ F(\xi^1,\xi^2) = \frac{3}{4}\,{}^0m^{\alpha\beta}\,{}^0w_{;\alpha\beta} + \frac{1}{4}\,{}^0r^{\alpha}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\,{}^0\ell - \frac{1}{2}\,{}^0i^{\alpha}\,{}^0w_{;\alpha} + \frac{1}{2}\,({}^0s^{\alpha}_{;\alpha} - {}^0i^{\alpha}_{;\alpha}) \qquad (3.6.11) $$

şeklinde belirlenirken çıkartılmalarından ise yine bir özdeşlik bulunur. Böylece (3.6.11), (3.4.14), (3.4.17) ve $(3.4.19)_2$ ilişkilerinin kullanılmasıyla ${}^0\sigma^{33}$ gerilme bileşeni

$$ \begin{aligned} {}^0\sigma^{33} = {} & \frac{1}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)(\zeta-\zeta^3)\,{}^0w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - \Delta_1(1-\zeta^2)({}^0w_{;\alpha\beta}\,{}^0w_{;}^{\;\alpha\beta} \\ & + \Delta_0\,{}^0w_{;\alpha}^{\;\alpha}\,{}^0w_{;\beta}^{\;\beta}) - \frac{1}{2}\,{}^0w_{;\alpha}({}^0i^{\alpha} + \zeta\,{}^0r^{\alpha} - 2\int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha}d\zeta) + \frac{1}{2}\,({}^0\ell \\ & + \zeta\,{}^0p - 2\int_{-1}^{\zeta} f^3 d\zeta) + \frac{1}{2}\,(1+\zeta)({}^0s^{\alpha}_{;\alpha} - {}^0i^{\alpha}_{;\alpha}) + \frac{1}{4}\,(1-\zeta^2) \\ & \times {}^0r^{\alpha}_{;\alpha} + \int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)f^{\alpha}_{;\alpha}(\xi^{\beta},\eta)d\eta \end{aligned} \qquad (3.6.12) $$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi ${}^0\sigma^{\alpha 3}$ ve ${}^0\sigma^{33}$ gerilmelerini belirleyebilmek için sadece ${}^0w$ bilinmeyenini bulmak yeterlidir. Böylece şimdiye kadar sadece tanım olarak verilen ve birinci mertebe denklemlerin sağ tarafına giren ${}^0\bar{q}^{\alpha}$, ${}^0n^{33}$ ve ${}^0m^{33}$ büyüklükleri (3.4.13) tanımlarının kullanılmasıyla

$$ {}^0\bar{q}^{\alpha} = \frac{1}{3}\,{}^0r^{\alpha} - \int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha}(\xi^{\beta},\eta)d\eta d\zeta $$

$$ \begin{aligned} {}^0n^{33} = {} & -\frac{4}{3}\Delta_1({}^0w_{;\alpha\beta}\,{}^0w_{;}^{\;\alpha\beta} + \Delta_0\,{}^0w_{;\alpha}^{\;\alpha}\,{}^0w_{;\beta}^{\;\beta}) - {}^0i^{\alpha}\,{}^0w_{;\alpha} + {}^0\ell + {}^0s^{\alpha}_{;\alpha} \\ & - {}^0i^{\alpha}_{;\alpha} + \frac{1}{3}\,{}^0r^{\alpha}_{;\alpha} + {}^0w_{;\alpha}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha}(\xi^{\beta},\eta)d\eta d\zeta - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta} f^3(\xi^{\alpha},\eta)d\eta d\zeta \\ & + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)f^{\alpha}_{;\alpha}(\xi^{\beta},\eta)d\eta d\zeta \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {}^0m^{33} = {} & \frac{1}{3}\left[\frac{4}{15}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;\alpha\beta}^{\;\alpha\beta} - {}^0r^{\alpha}\,{}^0w_{;\alpha} + {}^0p + {}^0s^{\alpha}_{;\alpha} - {}^0i^{\alpha}_{;\alpha}\right] \\ & + {}^0w_{;\alpha}\int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha}(\xi^{\beta},\eta)d\eta d\zeta - \int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta} f^3(\xi^{\alpha},\eta)d\eta d\zeta + \int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta) \\ & \times f^{\alpha}_{;\alpha}(\xi^{\beta},\eta)d\eta d\zeta \end{aligned} \qquad (3.6.13) $$

şeklinde belirlenebilir.

Birinci mertebede görünen fakat sıfırıncı mertebeden kaynaklanan diğer terimlerin hesabına geçmeden önce (3.6.12) ile verilen ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilmesinin bir özelliğini belirtmek birinci mertebe teorinin sonuçlarını yorumlamak açısından gereklidir. Wittrick [28] tarafından da belirtildiği gibi, klasik plak teorisinde ve birçok daha yukarı mertebe teoride enine yükün sadece plağın bir yüzüne uygulanması veya iki yüz arasında eşit şekilde paylaştırılması sonuçlar açısından önemsizdir. Yine aynı yerde vurgulandığı gibi, bunun nedeni bu teorilerde üç boyutlu teorilerden farklı olarak çökmenin ζ dan bağımsız kabul edilmesidir. Bu durumu şimdiki yaklaşım çerçevesinde daha açık bir şekilde görebilmek amacıyla, bir an için, kütle kuvvetleri ile üst ve alt yüzlere etkiyen plak düzlemindeki kuvvetler sıfır alınsın yani $g_{+}^{\alpha} = g_{-}^{\alpha} = f^{\alpha} = f^{3} = 0$ ve dolayısıyla ${}^{0}r^{\alpha} = {}^{0}s^{\alpha} = {}^{0}i^{\alpha} = 0$ kabul edilsin. Eğer, p_0 düzgün yayılı yük olmak üzere, iki boyutlu teorilerde fark yaratmayan $g_{+}^{3} = p_0$ ve $g_{-}^{3} = 0$ ile $g_{+}^{3} = \frac{1}{2}\,p_0$ ve $g_{-}^{3} = \frac{1}{2}\,p_0$ durumları karşılaştırılırsa, her iki halde ${}^{0}p = p_0$ olmasına rağmen birinci durumda ${}^{0}\ell = p_0$ ve ikinci durumda ${}^{0}\ell = 0$ olması nedeniyle sonuçta bulunan ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilme bileşeni bu iki durumda $\frac{1}{2}\,p_0$ kadar farkeder. Diğer bir örnek olarak bir yüze uygulanan yükün çekme veya basınç olması hali karşılaştırılabilir. Bilindiği gibi iki boyutlu teorilerde bir yüze uygulanan yükün çekme veya basınç olması sadece çökmenin işaretini değiştirir fakat onun mutlak değerini değiştirmez. Şimdiki teori ile ilgili bir sonuca ulaşabilmek için her iki durumda da $g_{-}^{3} = 0$ olmak üzere $g_{+}^{3} = p_0$ ve $g_{+}^{3} = -\,p_0$ durumları gözönüne alınsın. Bu hallere karşı gelen ${}^{0}p$ ve ${}^{0}\ell$ sırasıyla ${}^{0}p = {}^{0}\ell = p_0$ ve ${}^{0}p = {}^{0}\ell = -\,p_0$ şeklinde bulunur. Her iki haldeki ζ ve ${}^{0}w$ büyüklüklerinin ters işaretli olduğu düşünülürse bu iki duruma karşı gelen ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilme bileşeni mutlak değerde p_0 kadar fark eder. Dolayısıyla her iki örnekte de ${}^{0}\ell$ teriminden kaynaklanan bu fark (3.6.13) denklemiyle tanımlanan ${}^{0}n^{33}$ büyüklüğünde de kendini gösterir. Ayrıca bu fark gerek ${}^{1}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ gerilmesinin içinde ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilmesinin bulunması nedeniyle gerekse (3.4.18) tanımlarında ${}^{0}n^{33}$ büyüklüğünün görünmesi nedeniyle birinci mertebeye ait denge denklemlerinde de kendini gösterecektir. Sonuç olarak von Kármán plak teorisine karşı gelen ve ${}^{0}u^{3}$ yerdeğiştirmesinin ζ değişkeninden bağımsız olduğu sıfırıncı mertebe plak denklemlerinde yükün çekme veya basınç olması çökmenin mutlak değeri açısından önemsizdir. Fakat ${}^{1}u^{3}$

yerdeğiştirmesinin (3.4.5) ile verildiği birinci mertebe teoride, beklenebileceği gibi, yükün nasıl uygulandığı önem kazanır.

Bu vurgulamayı yaptıktan sonra, artık ${}^{0}\sigma^{\alpha 3}$ gerilme bileşeninin belirlenmiş olması nedeniyle ${}^{1}U^{\alpha}$ büyüklüğünü açık olarak yazmak mümkün olur. Bunun için (3.6.6) ifadesi (3.4.7) denkleminde yerine konur ve ζ değişkenine göre integre edilirse,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}U^{\alpha} = & - \left[(1+\Delta_0)\zeta - \frac{1}{6}(2+\Delta_0)\zeta^3\right] {}^{0}w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}{}^{\alpha} + \frac{1}{4}\Delta_0\, \zeta^2 ({}^{0}\theta^{\delta}{}_{\delta;}{}^{\alpha} \\
& - 2\, {}^{0}w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}\, {}^{0}w_{;}{}^{\alpha}) + \zeta[{}^{0}w_{;}{}^{\gamma}({}^{0}v_{\gamma;}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\, {}^{0}w_{;\gamma}\, {}^{0}w_{;}{}^{\alpha}) + \frac{1}{2}\Delta_0\, {}^{0}\theta^{\delta}{}_{\delta}\, {}^{0}w_{;}{}^{\alpha}] \\
& + \frac{1}{2\Delta_1}(\zeta\, {}^{0}i^{\alpha} + \frac{1}{2}\zeta^2\, {}^{0}r^{\alpha}) - \frac{1}{\Delta_1}\int_{-1}^{\zeta} (\zeta - \eta) f^{\alpha}(\xi^{\beta},\eta)\, d\eta
\end{aligned} \qquad (3.6.14)
$$

sonucu bulunur. Yukarıdaki sonucun (3.4.11) tanımında kullanılmasıyla da ${}^{1}\tilde{E}^{\alpha\beta}$ büyüklüğü

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\tilde{E}^{\alpha\beta} = & - \left[(1+\Delta_0)\zeta - \frac{1}{6}(2+\Delta_0)\zeta^3\right] {}^{0}w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\zeta^2 [\Delta_0 ({}^{0}\theta^{\delta}{}_{\delta;}{}^{\alpha\beta} \\
& - 2\, {}^{0}w_{;}{}^{\alpha\beta}\, {}^{0}w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}) + 2\, {}^{0}w_{;\delta}{}^{\alpha}\, {}^{0}w_{;}{}^{\delta\beta}] + \frac{1}{2}\zeta(2\, {}^{0}w_{;}{}^{\delta}\, {}^{0}v_{\delta;}{}^{\alpha\beta} \\
& + {}^{0}w_{;\delta}\, {}^{0}w_{;}{}^{\delta}\, {}^{0}w_{;}{}^{\alpha\beta} + \Delta_0\, {}^{0}\theta^{\delta}{}_{\delta}\, {}^{0}w_{;}{}^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\, {}^{0}v_{\delta;}{}^{\alpha}\, {}^{0}v^{\delta}{}_{;}{}^{\beta} \\
& + \frac{1}{4\Delta_1}[\zeta({}^{0}i^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + {}^{0}i^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha}) + \frac{1}{2}\zeta^2({}^{0}r^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + {}^{0}r^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha})] \\
& - \frac{1}{2\Delta_1}\int_{-1}^{\zeta} (\zeta - \eta)(f^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + f^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha})\, d\eta
\end{aligned} \qquad (3.6.15)
$$

olarak elde edilir. Daha önce de belirtildiği gibi, ${}^{1}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ gerilme tansörünün ${}^{1}\tilde{E}^{\alpha\beta}$ büyüklüğü cinsinden yazılışı $(3.3.14)_2$ denkleminde ${}^{1}E^{\alpha\beta}$ yerine ${}^{1}\tilde{E}^{\alpha\beta}$ ve ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ yerine ${}^{1}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ koymakla bulunur. Eğer bu işlem yapılır ve (3.6.15) ilişkisi kullanılırsa ${}^{1}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ gerilme tansörü ζ değişkeninin kuvvetlerine göre

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = & \frac{1}{2}(I_0^{\alpha\beta} + \zeta\, I_1^{\alpha\beta} + \zeta^2\, I_2^{\alpha\beta} + \zeta^3\, I_3^{\alpha\beta}) - \Delta_0 \Big[\int_{-1}^{\zeta} (\zeta - \eta) f^{\alpha}_{;\alpha}\, d\eta \\
& - {}^{0}w_{;\alpha} \int_{-1}^{\zeta} f^{\alpha} d\zeta + \int_{-1}^{\zeta} f^{3} d\zeta\Big] A^{\alpha\beta} - \int_{-1}^{\zeta} (\zeta - \eta)(f^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + f^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha})\, d\eta
\end{aligned} \qquad (3.6.16)
$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $I_n^{\alpha\beta}$ $(n=0,1,2,3)$ tansörleri ise

$$
\begin{aligned}
I_0^{\alpha\beta} = {} & [2\Delta_0\Delta_1({}^0v^{\gamma}{}_{;\delta}\;{}^0v_{\gamma;}{}^{\delta} - {}^0w_{;\gamma\delta}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma\delta} - \Delta_0\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\,{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}) \\
& + \tfrac{1}{4}\Delta_3({}^0\theta^{\gamma}{}_{\gamma}\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta} - {}^0\theta^{\gamma}{}_{\delta}\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\gamma}) + \tfrac{1}{2}\Delta_4\;{}^0\theta^{\gamma}{}_{\gamma}\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta} + \Delta_0({}^0\ell \\
& + \tfrac{1}{2}\,{}^0r^{\gamma}{}_{;\gamma} + {}^0s^{\gamma}{}_{;\gamma} - {}^0i^{\gamma}{}_{;\gamma} - {}^0i^{\gamma}\;{}^0w_{;\gamma})]A^{\alpha\beta} + 2\Delta_1\;{}^0v_{\gamma;}{}^{\alpha}\;{}^0v^{\gamma}{}_{;}{}^{\beta} \\
& - \tfrac{1}{2}\Delta_3\;{}^0\theta^{\gamma}{}_{\gamma}\;{}^0\theta^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\Delta_2\;{}^0\theta^{\alpha}{}_{\gamma}\;{}^0\theta^{\gamma\beta} \\
I_1^{\alpha\beta} = {} & [-\tfrac{10}{3}\Delta_0\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}{}^{\gamma}{}_{\gamma} + 2\Delta_0\Delta_1(\Delta_0\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma} + 2\;{}^0v_{\gamma;}{}^{\delta}\,{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\delta} \\
& + {}^0w_{;\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}) - \Delta_3({}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\,{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta} - {}^0\theta^{\gamma}{}_{\delta}\;{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\gamma}) - 2\Delta_4\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta} \\
& + \Delta_0({}^0p + {}^0i^{\gamma}{}_{;\gamma} + {}^0s^{\gamma}{}_{;\gamma} - {}^0r^{\gamma}\;{}^0w_{;\gamma})]A^{\alpha\beta} - 4\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}{}^{\alpha\beta} \\
& + 2\Delta_1(\Delta_0\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta}\;{}^0w_{;}{}^{\alpha\beta} + 2\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}\;{}^0v_{\gamma;}{}^{\alpha\beta} + {}^0w_{;\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\alpha\beta}) \\
& + \Delta_3({}^0\theta^{\gamma}{}_{\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\alpha\beta} + {}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\,{}^0\theta^{\alpha\beta}) - \Delta_2({}^0\theta^{\alpha}{}_{\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma\beta} + {}^0w_{;}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\;{}^0\theta^{\gamma\beta}) \\
& + {}^0i^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + {}^0i^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha} \\
I_2^{\alpha\beta} = {} & [\Delta_0\Delta_1(\Delta_0\;{}^0\theta^{\delta}{}_{\delta;}{}^{\gamma}{}_{\gamma} + 4\;{}^0w_{;\gamma\delta}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma\delta}) + \Delta_3({}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\;{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta} - {}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\delta}\;{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\gamma}) \\
& + 2\Delta_4\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\,{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta} + \tfrac{1}{2}\Delta_0\;{}^0r^{\gamma}{}_{;\gamma}]A^{\alpha\beta} + \Delta_0\Delta_1({}^0\theta^{\delta}{}_{\delta;}{}^{\alpha\beta} - 2\;{}^0w_{;}{}^{\alpha\beta}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}) \\
& + 2\Delta_1\;{}^0w_{;\gamma}{}^{\alpha}\;{}^0w_{;}{}^{\gamma\beta} - 2\Delta_3\;{}^0w_{;}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\,{}^0w_{;}{}^{\alpha\beta} + 2\Delta_2\;{}^0w_{;}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\,{}^0w_{;}{}^{\gamma\beta} \\
& + \tfrac{1}{2}({}^0r^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + {}^0r^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha}) \\
I_3^{\alpha\beta} = {} & \tfrac{2}{3}\Delta_1[\Delta_0\;{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}{}^{\gamma}{}_{\gamma}\;A^{\alpha\beta} + (2+\Delta_0)\,{}^0w_{;}{}^{\delta}{}_{\delta}{}^{\alpha\beta}]
\end{aligned}
\tag{3.6.17}
$$

olarak verilir. Benzer şekilde (3.6.16) sonucunun (3.4.13) tanımlarında kullanılması ile ${}^1\tilde{n}^{\alpha\beta}$ ve ${}^1\tilde{m}^{\alpha\beta}$ büyüklükleri yukarıda tanımlanan tansörlere bağlı olarak

$$
\begin{aligned}
{}^1\tilde{n}^{\alpha\beta} = {} & I_0^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{3}I_2^{\alpha\beta} - \Delta_0\Big[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)f^{\gamma}{}_{;\gamma}\,d\eta d\zeta + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta}(f^3 - f^{\gamma}\;{}^0w_{;\gamma})d\eta d\zeta\Big] \\
& \times\; A^{\alpha\beta} - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)(f^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + f^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha})d\eta d\zeta \\
{}^1\tilde{m}^{\alpha\beta} = {} & \tfrac{1}{3}I_1^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{5}I_3^{\alpha\beta} - \Delta_0\Big[\int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)f^{\gamma}{}_{;\gamma}d\eta d\zeta + \int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta}(f^3 \\
& - f^{\gamma}\;{}^0w_{;\gamma})d\eta d\zeta\Big]A^{\alpha\beta} - \int_{-1}^{1}\zeta\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)(f^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta} + f^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha})d\eta d\zeta
\end{aligned}
\tag{3.6.18}
$$

şeklinde bulunur.

Sıfırıncı mertebeye ait ${}^{0}\sigma^{\alpha 3}$ ve ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilme bileşenlerini belirlemek için uygulanan yöntemi izleyerek birinci mertebeye ait ${}^{1}\sigma^{\alpha 3}$ ve ${}^{1}\sigma^{33}$ gerilme bileşenlerini de belirlemek mümkündür. Bunun için yapılacak şey (3.2.2) denklemlerinin ζ üzerinde integre edilmesi ve ${}^{1}\sigma^{\alpha 3}$ ile ${}^{1}\sigma^{33}$ için bulunan ifadelerde $(3.2.4)_{1,2}$ sınır koşullarının kullanılmasıdır. Fakat gerek ${}^{1}\sigma^{\alpha 3}$ ve ${}^{1}\sigma^{33}$ gerilme bileşenlerinin pratik açıdan plak teorisinde önemli bir işlevi olmaması nedeniyle (çünkü onlar bir yukarı mertebede gerekmektedir) gerekse bu gerilme bileşenlerinin belirlenmesinin uzun ve karmaşık işlemlere yol açması nedeniyle bu konu üzerinde durulmayacaktır. Yukarıda elde edilen sonuçların ışığında birinci mertebeye ait denklemler aşağıda kısaca özetlenmiştir.

3.6.1. Plak Denklemleri:

Yerdeğiştirme tipi formülasyonda;

$$
\begin{aligned}
&(1 + 2\Delta_0)\,{}^{1}v^{\alpha}{}_{;\alpha}{}^{\beta} + {}^{1}v^{\beta}{}_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha} + (1 + 2\Delta_0)({}^{0}w_{;\alpha}\,{}^{1}w_{;}{}^{\alpha\beta} + {}^{1}w_{;\alpha}\,{}^{0}w_{;}{}^{\alpha\beta}) \\
&\quad + {}^{0}w_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\,{}^{1}w_{;}{}^{\beta} + {}^{1}w_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\,{}^{0}w_{;}{}^{\beta} = -\frac{1}{2\Delta_1}({}^{1}\tilde{n}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^{1}r^{\beta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{3}\Delta_1(1 + \Delta_0)\,{}^{1}w_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} - 2\Delta_1\big[({}^{0}v_{\alpha;\beta} + {}^{0}v_{\beta;\alpha})\,{}^{1}w_{;}{}^{\alpha\beta} + ({}^{1}v_{\alpha;\beta} + {}^{1}v_{\beta;\alpha})\,{}^{0}w_{;}{}^{\alpha\beta} \\
&\quad + \Delta_0(2\,{}^{0}v^{\alpha}{}_{;\alpha} + {}^{0}w_{;\alpha}\,{}^{0}w_{;}{}^{\alpha})\,{}^{1}w_{;}{}^{\beta}{}_{\beta} + 2\Delta_0({}^{1}v^{\alpha}{}_{;\alpha} + {}^{0}w_{;\alpha}\,{}^{1}w_{;}{}^{\alpha})\,{}^{0}w_{;}{}^{\beta}{}_{\beta} \\
&\quad + {}^{0}w_{;\alpha}\,{}^{0}w_{;\beta}\,{}^{1}w_{;}{}^{\alpha\beta} + 2\,{}^{1}w_{;\alpha}\,{}^{0}w_{;\beta}\,{}^{0}w_{;}{}^{\alpha\beta}\big] + {}^{0}r^{\alpha}\,{}^{1}w_{;\alpha} = {}^{1}p \\
&\quad + {}^{1}s^{\alpha}{}_{;\alpha} - {}^{1}r^{\alpha}\,{}^{0}w_{;\alpha} + {}^{1}\tilde{m}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} + {}^{1}\tilde{n}^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha\beta} \qquad (3.6.19)
\end{aligned}
$$

Gerilme tipi formülasyonda;

$$
{}^{1}n^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + {}^{1}r^{\beta} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{3}\Delta_1(1 + \Delta_0)\,{}^{1}w_{;}{}^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} - ({}^{0}n^{\alpha\beta}\,{}^{1}w_{;\alpha\beta} + {}^{1}n^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha\beta}) + {}^{0}r^{\alpha}\,{}^{1}w_{;\alpha} = {}^{1}p \\
&\quad + {}^{1}s^{\alpha}{}_{;\alpha} + {}^{1}\tilde{m}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} - {}^{1}r^{\alpha}\,{}^{0}w_{;\alpha} \qquad (3.6.20)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{1}\mathring{n}^{\alpha\beta}{}_{;\beta\alpha} - \frac{1 + \Delta_0}{1 + 2\Delta_0}\,{}^{1}n^{\alpha}{}_{\alpha;}{}^{\beta}{}_{\beta} = 4\Delta_1[{}^{0}w,\ {}^{1}w] + {}^{1}\tilde{n}^{\alpha\beta}{}_{;\beta\alpha} - \frac{1 + \Delta_0}{1 + 2\Delta_0}\,{}^{1}\tilde{n}^{\alpha}{}_{\alpha;}{}^{\beta}{}_{\beta}
$$

(uygunluk koşulu)

veya

$$
{}^{1}\Phi^{\alpha\ \beta}_{;\alpha\ \beta} = -\frac{1+2\Delta_0}{1+\Delta_0}\left(4\Delta_1\left[{}^{0}w,\ {}^{1}w\right] + {}^{1}\tilde{n}^{\alpha\beta}_{;\beta\alpha} + {}^{1}r^{\alpha}_{;\alpha}\right) + {}^{1}\tilde{n}^{\alpha}{}_{\alpha;}{}^{\beta}{}_{\beta} - {}^{1}\eta^{\alpha}{}_{\alpha;}{}^{\beta}{}_{\beta}
$$

$$
\frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^{1}w_{;\alpha\ \beta}^{\alpha\ \beta} - \left({}^{0}\eta^{\alpha\beta}\,{}^{1}w_{;\beta}\right)_{;\alpha} = \left[{}^{0}\Phi,\ {}^{1}w\right] + \left[{}^{1}\Phi,\ {}^{0}w\right]
$$

$$
+ {}^{1}p + {}^{1}s^{\alpha}_{;\alpha} + {}^{1}\tilde{m}^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} + \left({}^{1}\eta^{\alpha\beta}\,{}^{0}w_{;\beta}\right)_{;\alpha} \qquad (3.6.21)
$$

3.6.2. Sınır Koşulları:

Birinci mertebeye ait sınır koşullarını yazmak sıfırıncı mertebede yapıldığı kadar kolay değildir. Bunun nedeni (3.4.5) ve (3.4.8) denklemlerinden de görüldüğü gibi birinci mertebeye ait ${}^{1}u_k$ (k=1,2,3) yerdeğiştirmelerinin sadece ξ^1 ve ξ^2 değişkenlerinin değil fakat ζ değişkeninin de fonksiyonu olmasıdır. Dolayısıyla keyfi ζ değerleri için sınır koşulları yazıldığında bu sınır koşullarının sayısı integrasyon sabitlerinin sayısından fazla olacaktır. Böylece, sıfırıncı mertebeye ait yerdeğiştirmeler üzerine fiziksel olarak anlamı olmayan kısıtlamalar getirilmiş olur. Bu durumu ortadan kaldırmak için burada izlenen yol sınır koşullarını

$$
{}^{1}\bar{u}_k(\xi^1,\xi^2) = \int_{-1}^{1} {}^{1}u_k(\xi^1,\xi^2,\zeta)\,d\zeta \qquad (3.6.22)
$$

şeklinde tanımlanan ortalama yerdeğiştirmeler üzerine yazmak olacaktır. Aslında burada sunulan yaklaşımın gerçek sınır değer problemine bir dış çözüm olduğu ve bu yaklaşımın bir sınır tabaka çözümü ile tamamlanması gerektiği açıktır. Şimdiki yaklaşımın sınır tabakasından uzak bölgelerde geçerli olduğu düşünülürse sınır koşullarını enine koordinat boyunca alınan ortalama büyüklükler üzerine yazmanın uygun olduğu görülür. (3.4.5), (3.4.6), (3.4.8) ve (3.6.14) denklemlerinin kullanılmasıyla yukarıda tanımlanan ortalama yerdeğiştirmeler

$$
{}^{1}\bar{u}_{\alpha} = 2\ {}^{1}v_{\alpha} + \frac{1}{6}\Delta_0\left({}^{0}\theta^{\beta}_{\beta;\alpha} - 2\ {}^{0}w_{;}{}^{\beta}{}_{\beta}\,{}^{0}w_{;\alpha}\right) + \frac{1}{6\Delta_1}\,{}^{0}r_{\alpha} - \frac{1}{\Delta_1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\zeta}(\zeta-\eta)
$$

$$
\times f_{\alpha}(\xi^{\beta},\eta)\,d\eta\, d\zeta
$$

$$
{}^{1}\bar{u}_3 = 2\ {}^{1}w + \frac{1}{3}\Delta_0\ {}^{0}w_{;\ \alpha}^{\ \alpha} \qquad (3.6.23)
$$

olarak elde edilir. Bu durumda plak düzlemi ile ilgili sınır koşulları yerdeğiştirme tipi formülasyonda

$$
{}^{1}\bar{u}_{\alpha} = 0 \qquad c \text{ üzerinde} \qquad (3.6.24)
$$

şeklinde, gerilme tipi formülasyonda ise

$$ {}^{1}n^{\alpha\beta}\, n_\alpha = {}^{1}h^\beta \quad \text{veya} \quad \varepsilon^{\gamma\alpha}\, \varepsilon^{\delta\beta}\, {}^{1}\phi_{;\gamma\delta}\, n_\alpha = {}^{1}h^\beta - {}^{1}\eta^{\alpha\beta}\, n_\alpha \quad c \text{ üzerinde} \tag{3.6.25} $$

şeklinde yazılacaktır. ${}^{1}\bar{u}_3$ ile ilgili sınır koşulları da, c sınırının tamamı veya bir kısmı üzerinde geçerli olmak üzere, ankastre, basit mensetli ve serbest kenar için

a) Ankastre kenar: $\quad {}^{1}\bar{u}_3 = 0\,, \quad \dfrac{\partial\, {}^{1}\bar{u}_3}{\partial n} = 0 \qquad c_1$ de

b) Basit mesnetli kenar: $\quad {}^{1}\bar{u}_3 = 0, \quad {}^{1}m_n = {}^{1}m^\beta\, n_\beta \qquad c_2$ de

c) Serbest kenar: $\quad {}^{1}m_n = {}^{1}m^\beta\, n_\beta\,,$

$$ {}^{1}q_e = {}^{1}q_n - \frac{\partial\, {}^{1}m_t}{\partial s} = {}^{1}h^3 - {}^{0}h^\alpha\, {}^{1}w_{;\alpha} - {}^{1}h^\alpha\, {}^{0}w_{;\alpha} - \frac{\partial}{\partial s}\left({}^{1}m^\alpha\, t_\alpha\right) \qquad c_3 \text{ de} \tag{3.6.26} $$

şeklinde verilecektir.

İntegrasyon sabitlerinin sayısı ile uyumlu sınır koşulları tanımlamanın diğer bir yolu, yukarıda yapıldığı gibi kalınlık boyunca yerdeğiştirmeler ile çalışmak yerine, sınır koşullarını orta düzlemde yazmaktır. Kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde $\zeta = 0$ için ${}^{1}U_\alpha = {}^{1}U_3 = 0$ olması nedeniyle bu işlem sınır koşullarını ${}^{1}w$ ve ${}^{1}v_\alpha$ üzerinde yazmaya denktir. Bu durumda sınır koşulları ankastre mesnetli hal için c_1 üzerinde ${}^{1}v_\alpha = 0$ ve ${}^{1}w = \dfrac{\partial\, {}^{1}w}{\partial n} = 0$ şeklinde verilirken basit mesnetli halde yukarıda verilmiş olan eğilme momenti ile ilgili koşula ek olarak yine c_2 üzerinde ${}^{1}v_\alpha = 0$ ve ${}^{1}w = 0$ şeklinde verilecektir. Örnek problemin incelenmesi sırasında bu iki tip sınır koşulunun karşılaştırılması üzerinde ayrıca durulacaktır.

3.7. Cauchy Gerilme Tansörünün Hesabı

Bilindiği gibi pratik açıdan deforme olmuş durumdaki plak üzerine etkiyen gerçek gerilmeleri yani Cauchy gerilmelerini bilmek daha önemlidir. Bu nedenle, şimdi, (2.1.23) tanımından yararlanarak Cauchy gerilme tansörü bileşenlerinin, asimptotik açılımın ilk iki mertebesi için, nasıl belirleneceği üzerinde durulacaktır. Eğer $J = III_C^{\frac{1}{2}}$ bağıntısından ve (2.1.15), (3.1.8), (3.3.11) ile (3.1.3) ilişkilerinden yararlanılırsa J^{-1} için

$$J^{-1} = 1 - (1 - \Delta_0)({}^0u^{\alpha}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\, {}^0u_{3;\alpha}\, {}^0u_{3;}{}^{\alpha})\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \tag{3.7.1}$$

yazılabilir. Bu durumda, uzaysal koordinatları gösteren a ve b indisleri 1, 2 değerlerini almak üzere, (3.7.1), (2.1.9) ve (2.2.7) ilişkilerinin (2.1.23) tanımında kullanılmasıyla Cauchy gerilme bileşenleri, bazı uzun hesaplardan sonra,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_0} t^{ab} = {} & \varepsilon^2\, {}^0\sigma^{\alpha\beta} g^a{}_{\alpha} g^b{}_{\beta} + \varepsilon^4[{}^1\sigma^{\alpha\beta} + {}^0\sigma^{\alpha\gamma}\, {}^0u^{\beta}_{;\gamma} + {}^0\sigma^{\gamma\beta}\, {}^0u^{\alpha}_{;\gamma} \\
& + {}^0\sigma^{\alpha 3}\, {}^0u^{\beta}_{,3} + {}^0\sigma^{3\beta}\, {}^0u^{\alpha}_{,3} - (1 - \Delta_0)({}^0u^{\gamma}_{;\gamma} + \frac{1}{2}\, {}^0u_{3;\gamma}\, {}^0u_{3;}{}^{\gamma}) \\
& \times {}^0\sigma^{\alpha\beta}] g^a{}_{\alpha} g^b{}_{\beta} + O(\varepsilon^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_0} t^{a3} = {} & \varepsilon^3({}^0\sigma^{\alpha 3} + {}^0\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\beta}) g^a{}_{\alpha} + \varepsilon^5[{}^1\sigma^{\alpha 3} + {}^1\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\beta} + {}^0\sigma^{\alpha\beta}\, {}^1u^3_{;\beta} \\
& + {}^0\sigma^{\alpha 3}\, {}^1u^3_{,3} + {}^0\sigma^{\beta 3}\, {}^0u^{\alpha}_{;\beta} + {}^0\sigma^{33}\, {}^0u^{\alpha}_{,3} + {}^0\sigma^{\beta\delta}\, {}^0u^{\alpha}_{;\beta}\, {}^0u^3_{;\delta} \\
& + {}^0\sigma^{3\beta}\, {}^0u^{\alpha}_{,3}\, {}^0u^3_{;\beta} - (1 - \Delta_0)({}^0u^{\delta}_{;\delta} + \frac{1}{2}\, {}^0u_{3;\delta}\, {}^0u_{3;}{}^{\delta}) \\
& \times ({}^0\sigma^{\alpha 3} + {}^0\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\beta})] g^a{}_{\alpha} + O(\varepsilon^7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_0} t^{33} = {} & \varepsilon^4({}^0\sigma^{33} + 2\, {}^0\sigma^{3\alpha}\, {}^0u^3_{;\alpha} + {}^0\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\alpha}\, {}^0u^3_{;\beta}) + \varepsilon^6[{}^1\sigma^{33} \\
& + 2\, {}^0\sigma^{3\alpha}\, {}^1u^3_{;\alpha} + 2\, {}^1\sigma^{3\alpha}\, {}^0u^3_{;\alpha} + 2\, {}^0\sigma^{33}\, {}^1u^3_{,3} + 2\, {}^0\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\alpha}\, {}^1u^3_{;\beta} \\
& + {}^1\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\alpha}\, {}^0u^3_{;\beta} + 2\, {}^0\sigma^{\alpha 3}\, {}^0u^3_{;\alpha}\, {}^1u^3_{,3} - (1 - \Delta_0)({}^0u^{\delta}_{;\delta} \\
& + \frac{1}{2}\, {}^0u_{3;\delta}\, {}^0u_{3;}{}^{\delta})({}^0\sigma^{33} + 2\, {}^0\sigma^{3\alpha}\, {}^0u^3_{;\alpha} + {}^0\sigma^{\alpha\beta}\, {}^0u^3_{;\alpha}\, {}^0u^3_{;\beta})] + O(\varepsilon^8)
\end{aligned} \tag{3.7.2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $g^a{}_3$ kaydırıcı bileşenlerinin sıfır olması kullanılır.

3.8. Sıkışmaz Cisimler İçin Asimptotik Açılım

Bu bölümde önceki bölümlerde sunulan yaklaşımın sıkışmaz cisimlere nasıl uygulanacağı üzerinde durulacaktır. Bilindiği gibi sıkışmaz elastik cisimler için $III_C = 1$ kısıtlaması geçerlidir ve bu kısıtlama sonucu sıkışmaz cisimlere ait bünye denklemleri, $\tilde{P}$ alan denklemlerinden belirlenecek bilinmeyen bir basınç fonksiyonu olmak üzere, (2.1.28)-(2.1.29) tanımları ile verilir. Görüldüğü gibi ek bir koşula karşılık ek bir bilinmeyen vardır ve bunun dışında uygulanan yöntem önceki bölümler ile tamamen aynıdır. III_C için (3.1.9) açılımı kullanılır ise yukarıdaki sıkışmazlık koşulunun ${}^0III_C = 1$ ve ${}^nIII_C = 0$ $(n=1,2,\ldots)$ şeklini alacağı açıktır. Bu sonuçların (3.1.10) ilişkilerinde kullanılmasıyla da C_{KL} tansörünün bileşenleri için

$$
\begin{aligned}
&{}^0III_C = 1 \rightarrow {}^0C^3{}_3 = 1 \\
&{}^1III_C = 0 \rightarrow {}^1C^3{}_3 + {}^1C^\alpha{}_\alpha - {}^0C^\alpha{}_3\,{}^0C^3{}_\alpha = 0 \qquad (3.8.1) \\
&{}^2III_C = 0 \rightarrow {}^2C^3{}_3 + {}^2C^\alpha{}_\alpha + {}^1C^\alpha{}_\alpha\,{}^1C^3{}_3 + \frac{1}{2}({}^1C^\alpha{}_\alpha\,{}^1C^\beta{}_\beta - {}^1C^\alpha{}_\beta\,{}^1C^\beta{}_\alpha) \\
&\qquad + {}^1C^\alpha{}_\beta\,{}^0C^\beta{}_3\,{}^0C^3{}_\alpha - {}^0C^\alpha{}_3\,{}^0C^3{}_\alpha\,{}^1C^\beta{}_\beta - 2\,{}^0C^\alpha{}_3\,{}^1C^3{}_\alpha = 0
\end{aligned}
$$

kısıtlamaları elde edilir. (3.1.5) ilişkilerine dikkat edilirse $(3.8.1)_1$ sonucunun daha önce sıkışabilir hal için elde edilmiş olan ${}^0E^3{}_3 = 0$ (veya ${}^0u^3 = {}^0w(\xi^1,\xi^2)$) koşulundan başka birşey olmadığı görülür. İleride diğer iki kısıtlama ${}^1C^3{}_3$ ve ${}^2C^3{}_3$ büyüklüklerini diğer bileşenler cinsinden ifade etmekte kullanılacaktır.

Sıkışmaz cisme ait bünye denkleminde görünen ve (2.2.12) denklemleri ile boyutsuzlaştırılmış olan b_α $(\alpha=1,2)$ katsayıları ve P basınç fonksiyonu için

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} {}^nP\,\varepsilon^{2n} \quad , \quad b_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} {}^nb_\alpha\,\varepsilon^{2n} \qquad (3.8.2)$$

açılımlarını kabul etmek uygun olur. Böylece yukarıda da belirtildiği gibi açılımın her mertebesi için bir ${}^nP$ bilinmeyenine karşılık gene her mertebeye ait ek bir koşul vardır. Daha önce sıkışabilir halde yapıldığı gibi, yukarıdaki açılımda görünen ${}^nb_\alpha$ katsayılarının hesabında da bir $f(I_C,II_C)$ fonksiyonunun ε parametresine göre Taylor açılımından yararlanılacaktır. Bu açılımın ise

$$
\begin{aligned}
f(I_C,II_C) = {} & f(I_C,II_C)\Big|_{\varepsilon=0} + \left({}^1I_C \frac{\partial f}{\partial I_C} + {}^1II_C \frac{\partial f}{\partial II_C}\right)\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 \\
& + \Big\{{}^2I_C \frac{\partial f}{\partial I_C} + {}^2II_C \frac{\partial f}{\partial II_C} + \frac{1}{2}\Big[({}^1I_C)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial I_C^2} \\
& + 2\,{}^1I_C\,{}^1II_C \frac{\partial^2 f}{\partial I_C \partial II_C} + ({}^1II_C)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial II_C^2}\Big]\Big\}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^4 + \ldots \qquad (3.8.3)
\end{aligned}
$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir. Bu katsayıların hesabına geçmeden önce bünye denklemlerinin açılımındaki negatif indisli gerilme bileşenlerini sıfıra eşitliyerek elde edilen kısıtlamalar üzerinde durmak uygun olur. Bunun için (2.2.7), (2.2.12), (3.1.1), (3.1.4) ve (3.8.2) ilişkileri, ${}^0C^3{}_3 = 1$ olmak üzere, (2.1.28) bünye denkleminde kullanılırsa negatif indisli gerilme bileşenlerinin sıfır olma şartı

$$
\begin{aligned}
{}^{-1}\sigma^{\alpha\beta} &= {}^{-2}\sigma^{33} = 0 \rightarrow {}^0b_1 + {}^0b_2 - {}^0P = 0 \\
{}^{-1}\sigma^{\alpha 3} &= 0 \qquad \rightarrow ({}^0b_2 - 2\,{}^0P)\,{}^0C^{\alpha 3} = 0 \qquad\qquad (3.8.4) \\
{}^{-1}\sigma^{33} &= 0 \qquad \rightarrow {}^1b_1 + {}^1b_2 - {}^1P + ({}^0b_2 - 2\,{}^0P)\,{}^1C^{33} - {}^0P\,{}^0C^3{}_\alpha\,{}^0C^{\alpha 3} = 0
\end{aligned}
$$

kısıtlamalarını verir. İlk iki kısıtlamayı daha yakından inceleyebilmek için bu kısıtlamalarda görünen ${}^0b_1$ ve ${}^0b_2$ katsayıları hesaplanmalıdır. Bu işlem (2.1.29) tanımları ve (3.8.3) açılımı kullanılarak kolayca yapılır ve ${}^0b_1$ ile ${}^0b_2$ katsayıları

$$
{}^0b_1 = -3\,{}^0P + 2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_C} + 3\frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\right)\Bigg|_{I_C=II_C=3}, \quad {}^0b_2 = 3\,{}^0P - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\Bigg|_{I_C=II_C=3} \qquad (3.8.5)
$$

olarak elde edilir. Burada ${}^0C^3{}_3 = 1$ olması nedeniyle, (3.1.10) ilişkilerinden görülebileceği gibi, ${}^0I_C = {}^0II_C = 3$ ve dolayısıyla $\varepsilon = 0$ da $I_C = II_C = 3$ olması kullanılmıştır. Dikkat edilirse yukarıdaki katsayıların $(3.8.4)_1$ denkleminde konulması (2.1.30) şartına benzer bir denklem verir. Böylece P basınç fonksiyonuna ait açılımdaki ilk terim olan ${}^0P$ büyüklüğünün esas olarak basınç fonksiyonunun doğal haldeki formundan başka birşey olmadığı görülür. Öte yandan, daha önce de vurgulandığı gibi, gerçek basınç fonksiyonunun $P - {}^0P$ olması nedeniyle kalınlık sıfıra giderken basıncın da sıfıra gideceği açıktır. Sonuç olarak (3.8.5) ve $(3.8.4)_1$ ilişkilerinden ${}^0P$ fonksiyonu

$$
{}^0P = 2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_C} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\right)\Bigg|_{I_C=II_C=3} \qquad (3.8.6)
$$

olarak bulunur ve bu durumda $(3.8.4)_2$ kısıtlaması da

$$
{}^0C^{\alpha 3}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_C} + \frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\right)\Bigg|_{I_C=II_C=3} = 0 \qquad (3.8.7)
$$

şeklini alır. Açıktır ki keyfi bir $\Sigma(I_C, II_C)$ fonksiyonu için bu koşulun sağlanması ancak ${}^0C^{\alpha 3} = 0$ olması ile mümkündür. Bu koşul ise, esas olarak, (3.1.5) ilişkilerinden de görüldüğü gibi sıkışabilir halde bulunmuş olan ${}^{0}E^{\alpha 3} = 0$ koşulu ile aynıdır ve doğal olarak sıfırıncı mertebe ${}^{0}u^{\alpha}$ yerdeğiştirmesi için (3.4.3) denkleminde bulunan sonucu verir. Böylece ${}^{0}C^{3}_{\ 3} = 1$ ve ${}^{0}C^{\alpha 3} = 0$ şartlarının da kullanılmasıyla diğer gerilme bileşenleri (2.1.28) bünye denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\sigma^{\alpha\beta} &= ({}^{1}b_{1} + {}^{1}b_{2} - {}^{1}P)A^{\alpha\beta} + ({}^{0}b_{2} - 2\,{}^{0}P)\,{}^{1}C^{\alpha\beta}, \quad {}^{0}\sigma^{\alpha 3} = ({}^{0}b_{2} - 2\,{}^{0}P)\,{}^{1}C^{\alpha 3} \\
{}^{0}\sigma^{33} &= {}^{2}b_{1} + {}^{2}b_{2} - {}^{2}P + ({}^{0}b_{2} - 2\,{}^{0}P)\,{}^{2}C^{33} + ({}^{1}b_{2} - 2\,{}^{1}P)\,{}^{1}C^{33} - {}^{0}P\,{}^{1}C^{33}\,{}^{1}C^{33} \\
{}^{1}\sigma^{\alpha\beta} &= ({}^{2}b_{1} + {}^{2}b_{2} - {}^{2}P)A^{\alpha\beta} + ({}^{0}b_{2} - 2\,{}^{0}P)\,{}^{2}C^{\alpha\beta} + ({}^{1}b_{2} - 2\,{}^{1}P)\,{}^{1}C^{\alpha\beta} \\
&\quad - {}^{0}P\,{}^{1}C^{\alpha}_{\ \gamma}\,{}^{1}C^{\gamma\beta} \qquad (3.8.8)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Şimdi yukarıdaki denklemlerde görünen ve (3.8.5) ile verilmemiş olan ${}^{n}b_{\alpha}$ katsayılarının açık formu elde edilmeye çalışılacaktır. Öte yandan, $(3.8.1)_2$ koşulu yardımıyla ${}^{1}C^{3}_{\ 3}$ diğer bileşenler cinsinden ifade edilir ve ${}^{0}C^{\alpha 3} = 0$ olması gözönüne alınırsa (3.1.10) denklemlerinden invaryantlar için

$$
{}^{1}I_{C} = {}^{1}II_{C} = 0, \qquad {}^{2}I_{C} = {}^{2}II_{C} = \frac{1}{2}\,({}^{1}C^{\alpha}_{\ \alpha}\,{}^{1}C^{\beta}_{\ \beta} + {}^{1}C^{\alpha}_{\ \beta}\,{}^{1}C^{\beta}_{\ \alpha}) \qquad (3.8.9)
$$

yazılabileceği görülür. Böylece (3.8.3) denklemi ile verilen Taylor açılımı da

$$
f(I_{C},II_{C}) = f(I_{C},II_{C})\Big|_{I_{C}=II_{C}=3} + \left({}^{2}I_{C}\,\frac{\partial f}{\partial I_{C}} + {}^{2}II_{C}\,\frac{\partial f}{\partial II_{C}}\right)\Big|_{I_{C}=II_{C}=3} \varepsilon^{4} + \ldots \qquad (3.8.10)
$$

şeklini alır. (2.1.29) tanımlarının kullanılmasıyla, ilk mertebedeki formları (3.8.5) ile verilen ${}^{n}b_{\alpha}$ katsayılarının (3.8.8) denklemlerinde görünen daha yukarı mertebeleri

$$
\begin{aligned}
{}^{1}b_{1} &= -\,3\,{}^{1}P\,, \qquad {}^{1}b_{2} = 3\,{}^{1}P \\
{}^{2}b_{1} &= -\,3\,{}^{2}P - {}^{0}P\,{}^{2}I_{C} + 2\,{}^{2}I_{C}\left(\frac{\partial^{2}\Sigma}{\partial I_{C}^{2}} + 4\,\frac{\partial^{2}\Sigma}{\partial I_{C}\partial II_{C}} + 3\,\frac{\partial^{2}\Sigma}{\partial II_{C}^{2}} + \frac{\partial\Sigma}{\partial II_{C}}\right)\Big|_{I_{C}=II_{C}=3} \\
{}^{2}b_{2} &= 3\,{}^{2}P + {}^{0}P\,{}^{2}I_{C} - 2\,{}^{2}I_{C}\left(\frac{\partial^{2}\Sigma}{\partial I_{C}\partial II_{C}} + \frac{\partial^{2}\Sigma}{\partial II_{C}^{2}}\right)\Big|_{I_{C}=II_{C}=3} \qquad (3.8.11)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Eğer $(3.8.1)_{2,3}$ koşullarından ${}^{1}C^{3}_{\ 3}$ ve ${}^{2}C^{3}_{\ 3}$ büyüklükleri diğer bileşenler cinsinden ifade edilir ve sonuç (3.8.8) denklemlerinde konursa, (3.8.11) ilişkileri yardımıyla, gerilme bileşenleri

$$ {}^{0}\sigma^{\alpha\beta} = -\,{}^{1}P\,A^{\alpha\beta} + \Lambda_0\,{}^{1}C^{\alpha\beta}\,, \qquad {}^{0}\sigma^{\alpha 3} = \Lambda_0\,{}^{1}C^{\alpha 3} $$

$$ {}^{0}\sigma^{33} = -\,{}^{2}P - \Lambda_0\,{}^{2}C^{\gamma}_{\gamma} - {}^{1}P\,{}^{1}C^{\gamma}_{\gamma} + \frac{1}{2}(\Lambda_0 + \Lambda_2)({}^{1}C^{\gamma}_{\gamma}\,{}^{1}C^{\delta}_{\delta} + {}^{1}C^{\gamma}_{\delta}\,{}^{1}C^{\delta}_{\gamma}) $$

$$ + (\Lambda_1 - \Lambda_0){}^{1}C^{\gamma}_{\gamma}\,{}^{1}C^{\delta}_{\delta} \tag{3.8.12} $$

$$ {}^{1}\sigma^{\alpha\beta} = -\,{}^{2}P\,A^{\alpha\beta} + \Lambda_0\,{}^{2}C^{\alpha\beta} + {}^{1}P\,{}^{1}C^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Lambda_2({}^{1}C^{\gamma}_{\gamma}\,{}^{1}C^{\delta}_{\delta} + {}^{1}C^{\gamma}_{\delta}\,{}^{1}C^{\delta}_{\gamma})A^{\alpha\beta} $$

$$ + (\Lambda_1 - \Lambda_0){}^{1}C^{\alpha}_{\gamma}\,{}^{1}C^{\gamma\beta} $$

şeklinde yazılabilir. Buradaki Λ_0, Λ_1 ve Λ_2 katsayıları ise

$$ \Lambda_0 = 2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_C} + \frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\right)\Bigg|_{I_C=II_C=3}\,, \qquad \Lambda_1 = -\,2\,\frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\Bigg|_{I_C=II_C=3} $$

$$ \Lambda_2 = 2\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial I_C^2} + 3\,\frac{\partial^2\Sigma}{\partial I_C\,\partial II_C} + 2\,\frac{\partial^2\Sigma}{\partial II_C^2} + \frac{\partial\Sigma}{\partial II_C}\right)\Bigg|_{I_C=II_C=3} \tag{3.8.13} $$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse yukarıdaki denklemler keyfi bir $\Sigma(I_C, II_C)$ fonksiyonu için geçerli olup buradaki Λ_0, Λ_1 ve Λ_2 katsayıları verilen fonksiyon için (3.8.13) tanımlarından hesaplanacaktır. Örneğin lastik türü malzemeleri belirtmekte kullanılan Mooney-Rivlin malzemesine ait $\tilde{\Sigma}$ fonksiyonu C_1 ve C_2 malzeme sabitleri olmak üzere

$$ \tilde{\Sigma} = C_1(I_C - 3) + C_2(II_C - 3) \tag{3.8.14} $$

şeklinde verildiğine göre karşı gelen katsayılar, $T_0 = C_1$ alınırsa,

$$ \Lambda_0 = 2(1 + \delta), \qquad \Lambda_1 = -\,2\delta\,, \quad \Lambda_2 = 2\delta \tag{3.8.15} $$

olarak bulunur. Burada $\delta = C_2/C_1$ şeklinde verilir ve Neo-Hookyen cisme ait katsayıları elde etmek için yukarıda $\delta = 0$ koymak yeterli olur. Öte yandan küçük şekil değiştirmeler için kayma modülü ile C_1 ve C_2 malzeme sabitleri arasında $\mu = 2(C_1 + C_2)$ (veya $\mu/C_1 = \Lambda_0$) ilişkisinin varolduğu gösterilebilir.

Görüldüğü gibi (3.8.12) ile verilen ${}^{0}\sigma^{\alpha\beta}$ ve ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme bileşenleri içlerinde bilinmeyen olarak ${}^{1}P$ ve ${}^{2}P$ büyüklüklerini de bulundurmaktadırlar. Eğer yukarıdaki işlemler sırasında (3.8.4) denklemleri ile verilen kısıtlamaların ilk ikisinin kullanıldığı düşünülürse geriye sadece $(3.8.4)_3$ kısıtlaması kalır ve bu kısıtlama aşağıda da görüleceği gibi ${}^{1}P$ büyüklüğünü Green deformasyon tansörü cinsinden belirlemekte kullanılır. Böylece (3.8.5), (3.8.6), (3.8.11) ve (3.8.13) denklemlerinin $(3.8.4)_3$ kısıtlamasında kullanılmasıyla ${}^{1}P$ büyüklüğü

$$ {}^{1}P = -\Lambda_0 \, {}^{1}C^{\alpha}_{\alpha} \qquad (3.8.16) $$

olarak bulunur. ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ büyüklüğündeki ${}^{2}P$ ifadesini elimine etmek için de sıkışabilir halde ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ den ${}^{2}E^{3}_{3}$ ifadesini yok etmek için kullanılan yöntem izlenir. Yani $(3.8.12)_3$ denkleminden ${}^{2}P$ çekilir ve (3.8.16) ile birlikte bu sonuç $(3.8.12)_4$ denkleminde kullanılırsa plak düzlemindeki ${}^{0}\sigma^{\alpha\beta}$ ve ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme bileşenlerini

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\sigma^{\alpha\beta} &= \Lambda_0 ({}^{1}C^{\gamma}_{\gamma} A^{\alpha\beta} + {}^{1}C^{\alpha\beta}) \\
{}^{1}\sigma^{\alpha\beta} &= \Lambda_0 ({}^{2}C^{\gamma}_{\gamma} A^{\alpha\beta} + {}^{2}C^{\alpha\beta}) + {}^{0}\sigma^{33} A^{\alpha\beta} - \Big[\frac{\Lambda_0}{2} ({}^{1}C^{\gamma}_{\gamma}\, {}^{1}C^{\delta}_{\delta} + {}^{1}C^{\gamma}_{\delta}\, {}^{1}C^{\delta}_{\gamma}) \\
&\quad + \Lambda_1 \, {}^{1}C^{\gamma}_{\gamma}\, {}^{1}C^{\delta}_{\delta}\Big] A^{\alpha\beta} - \Lambda_0 \, {}^{1}C^{\gamma}_{\gamma}\, {}^{1}C^{\alpha\beta} + (\Lambda_1 - \Lambda_0)\, {}^{1}C^{\alpha}_{\gamma}\, {}^{1}C^{\gamma\beta} \qquad (3.8.17)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazmak mümkün olur. Sonuç olarak, sıkışmaz halde yeni bir bilinmeyen olarak görünen P basınç fonksiyonu, $III_C = 1$ şeklindeki sıkışmazlık koşulununda yardımıyla, burada ilgilenilen ilk iki mertebeye kadar belirlenmiş olur. Açılımın ilk terimi olan ${}^{0}P$ büyüklüğü, yukarıda da belirtildiği gibi, basıncın doğal haldeki formuna karşı gelir ve malzeme katsayılarına bağlı olarak ${}^{0}P = \Lambda_0 - \Lambda_1$ şeklinde verilir. Sıfırıncı mertebeye ait yerdeğiştirme bileşenlerinin bulunmasıyla da ${}^{1}C^{\alpha}_{\alpha}$ ve dolayısıyla (3.8.16) denkleminden ${}^{1}P$ basınç fonksiyonu elde edilir. ${}^{0}\sigma^{33}$ gerilmesinin sıkışabilir halde yapıldığı gibi, $(3.2.1)_2$ denkleminden belirleneceği düşünülürse birinci mertebe problemin çözülmesiyle ${}^{2}P$ basınç fonksiyonu $(3.8.12)_3$ denkleminden bulunur. Böylece, denklemlerden basınç fonksiyonunun yok edilmesiyle problem katsayı farklılıkları dışında esas olarak sıkışabilir hal ile aynı forma gelir. Eğer (3.1.5) ilişkileride hesaba katılır ve sıkışabilir ile sıkışmaz hallere ait plak düzlemindeki gerilme bileşenleri karşılaştırılırsa, sıkışabilir halden sıkışmaz hale geçmek için katsayılar arasında

$$ \Delta_0 \to 1, \quad \Delta_1 \to \Lambda_0, \quad \Delta_2 \to 4(\Lambda_1 - \Lambda_0), \quad \Delta_3 \to 4\Lambda_0, \quad \Delta_4 \to -4(\Lambda_0 + \Lambda_1) \qquad (3.8.18) $$

dönüşümünün yapılması gerektiği çıkar. Dolayısıyla tekrardan kaçınmış olmak için sıkışabilir halde (3.4.1) denkleminden itibaren bulunmuş olan sonuçların tamamını tekrar elde etmek yerine, bütün bu sonuçların yukarıdaki dönüşüm altında sıkışmaz cisim içinde geçerli olduğunu belirtmek yeterlidir. Benzer şekilde, bundan sonraki bölümde ele alınacak problemi sıkışmaz cisimlere özelleştirmek için de katsayılar arasında yukarıdaki dönüşümü yapmak yeterli olacaktır.

Eğer asimptotik açılım (2.1.28) denklemi yerine sıkışmaz lineer elastik cisme ait

$$T^{KL} = -\tilde{P}\, G^{KL} + 2\mu E^{KL} \qquad (3.8.19)$$

bünye denklemine uygulanmak istenirse, bu durumda $III_C = 1$ sıkışmazlık koşulu (2.1.15) den görüldüğü gibi $I_E = 0$ şeklini alır. Bu ise (3.1.7) ve (3.1.8) ilişkilerinin kullanılmasıyla E_{KL} tansörünün bileşenleri üzerine

$$^{0}I_E = 0 \rightarrow {}^{0}E^{3}{}_{3} = 0, \quad {}^{1}I_E = 0 \rightarrow {}^{1}E^{3}{}_{3} + {}^{0}E^{\alpha}{}_{\alpha} = 0,$$

$$^{2}I_E = 0 \rightarrow {}^{2}E^{3}{}_{3} + {}^{1}E^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \qquad (3.8.20)$$

kısıtlamalarını verir. Öte yandan (2.2.7), (3.1.2), $(3.8.2)_1$ denklemleri ve ${}^{0}E^{3}{}_{3} = 0$ koşulu (3.8.19) bünye denkleminde kullanılırsa, negatif indisli gerilme bileşenlerinin de sıfıra eşit olmasını gözönünde tutarak

$$^{-1}\sigma^{\alpha\beta} = {}^{-2}\sigma^{33} = 0 \rightarrow {}^{0}P = 0; \qquad {}^{-1}\sigma^{\alpha 3} = 0 \rightarrow {}^{0}E^{\alpha 3} = 0$$

$$^{-1}\sigma^{33} = 0 \rightarrow -{}^{1}P + 2\Lambda_0\, {}^{1}E^{33} = 0; \quad {}^{0}\sigma^{\alpha\beta} = -{}^{1}P\, A^{\alpha\beta} + 2\Lambda_0\, {}^{0}E^{\alpha\beta} \qquad (3.8.21)$$

$$^{0}\sigma^{\alpha 3} = 2\Lambda_0\, {}^{1}E^{\alpha 3}; \quad {}^{0}\sigma^{33} = -{}^{2}P + 2\Lambda_0\, {}^{2}E^{33}; \quad {}^{1}\sigma^{\alpha\beta} = -{}^{2}P\, A^{\alpha\beta} + 2\Lambda_0\, {}^{1}E^{\alpha\beta}$$

sonuçları elde edilir. Burada $T_0 = C_1$ kabul edilir ve daha önce belirtilen $\mu = \Lambda_0 C_1$ ilişkisi kullanılır. Eğer bu elde edilen sonuçlarda (3.8.20) kısıtlamalarından çekilen ${}^{1}E^{3}{}_{3}$ ve ${}^{2}E^{3}{}_{3}$ büyüklükleri konursa ${}^{1}P$ ve ${}^{2}P$ basınç fonksiyonları için

$$^{1}P = -2\Lambda_0\, {}^{0}E^{\alpha}{}_{\alpha}, \quad {}^{2}P = -2\Lambda_0\, {}^{1}E^{\alpha}{}_{\alpha} - {}^{0}\sigma^{33} \qquad (3.8.22)$$

ilişkileri bulunur. Bu ilişkilerin kullanılmasıyla da ${}^{0}\sigma^{\alpha\beta}$ ve ${}^{1}\sigma^{\alpha\beta}$ gerilme bileşenleri

$$ {}^{0}\sigma^{\alpha\beta} = 2\Lambda_{0}({}^{0}E^{\gamma}_{\gamma}\, A^{\alpha\beta} + {}^{0}E^{\alpha\beta}), $$

$$ {}^{1}\sigma^{\alpha\beta} = 2\Lambda_{0}({}^{1}E^{\gamma}_{\gamma}\, A^{\alpha\beta} + {}^{1}E^{\alpha\beta}) + {}^{0}\sigma^{33}\ A^{\alpha\beta} \qquad (3.8.23) $$

şeklini alır. Eğer bulunan sonuçlar (3.3.14) ile verilen sıkışabilir hale ait gerilme bileşenleri ile karşılaştırılırsa, sıkışabilir halden sıkışmaz lineer elastik hale geçmek için katsayılar arasında, (3.8.18) den farklı olarak,

$$ \Delta_{0} \to 1,\ \Delta_{1} \to \Lambda_{0},\ \Delta_{2} \to 0,\ \Delta_{3} \to 0,\ \Delta_{4} \to 0 \qquad (3.8.24) $$

dönüşümünün yapılması gerektiği çıkar.

BÖLÜM 4

BÜYÜK ÇÖKME YAPAN SONSUZ ŞERİT PROBLEMİ

4.1. Problemin Tanımı

Bu bölümde, önceki bölümlerde geliştirilmiş olan metodun basit bir probleme uygulanması üzerinde durulacaktır. Bunun için büyük çökmeler yapan ve üniform yüke maruz sonsuz uzun bir şerit gözönüne alınacak ve bu şerite ait deformasyonun düzlem şekil değiştirme koşulunu sağladığı kabul edilecektir. Geometrinin basitliği çözümlerin analitik olarak bulunması sonucunu vermiş ve doğal olarak nonlineer plak teorilerinde kaçınılması mümkün olmayan karmaşık nümerik işlemlerden kurtulmak mümkün olmuştur. Özellikle birinci mertebe yaklaşımda ortaya çıkan bazı uzun ve karışık ifadelerin hesaplanmasında ise REDUCE sembolik dili yardımıyla bilgisayar kullanılmıştır. Aynı problem buradakine benzer bir yaklaşımla fakat lineer elastik plaklar için [15]'de incelenmiş ve sıfırıncı mertebe çözümün [22, Chapter 1]'de verilen ile aynı olduğu vurgulanmıştır. Daha önce fiziksel nonlineerliğin birinci mertebede kendini gösterdiği açıklandığı için, doğal olarak burada ilk mertebe için bulunan çözümler [15] ve [22]'deki çözümler ile aynı olacaktır. Bunun yanında Σ fonksiyonu lineer elastik cisimlere özelleştirilirse buradaki tüm sonuçlar [15]'de bulunanlara indirgenmektedir. Ayrıca burada elde edilen, sıkışabilir hale ait, denklem ve çözümlerin (3.8.18) dönüşümü altında sıkışmaz cisimler için de geçerli olduğu açıktır. Son olarak kartezyen koordinat sisteminin kullanılmış olması nedeniyle kovaryant ve kontravaryant büyüklükler arasında bir fark kalmadığını ve kovaryant türevlerin adi türeve dönüştüğünü hatırlatmak yararlı olur.

Yukarıda da belirtildiği gibi, homojen, izotrop ve nonlineer elastik bir sonsuz şeritin, $\underset{\sim}{X}$ koordinatlarında, $-\infty \leqq X_1 \leqq \infty$, $-L \leqq X_2 \leqq L$ ve $-h \leqq X_3 \leqq h$ bölgesini işgal ettiği, şeritin üst yüzünün q_0 düzgün yayılı çekmesine maruz kaldığı ve kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği kabul edilmektedir. Ayrıca deformasyonun düzlem şekil değiştirme kabulünü sağladığı yani yerdeğiştirme bileşenlerinin

$$u_1 = 0, \quad u_2 = u_2(\xi_2,\zeta), \quad u_3 = u_3(\xi_2,\zeta) \tag{4.1.1}$$

şeklinde olduğu varsayılmaktadır. Açıktır ki deformasyonun bu formda olabilmesi için $X_2 = \pm L$ (veya $\xi_2 = \pm 1$) sınırları boyunca verilen sınır koşulları X_1 (veya ξ_1) yönünde üniform olmalıdır. Yukarıda tanımlanan problem için dış yüklerin $(t_{+,-})_\alpha = (t_-)_3 = \bar{t}_\alpha = \bar{t}_3 = 0$ ve $(t_+)_3 = q_0$ şeklinde yazılacağı açıktır. Böylece $\underset{\sim}{\xi}$ koordinatlarındaki, dış yükler ve kütle kuvvetleri ile ilgili boyutsuz büyüklükler ise (2.2.8), (3.4.17), (3.6.5) ve (3.6.10) denklemlerinden

$$f_\alpha = f_3 = (g_{+,-})_\alpha = (g_-)_3 = \tau_\alpha = \tau_3 = {}^0r_\alpha = {}^0s_\alpha = {}^0i_\alpha = 0,$$

$$ {}^0p = {}^0\ell = (g_+)_3 = p_0 \tag{4.1.2}$$

olarak bulunur. Burada, $\bar{q}_0 = q_0/T_0$ ile boyutsuz yük gösterilmek üzere, $p_0 = \bar{q}_0/\varepsilon^4$ tanımı yapılmıştır. Aşağıda şeritin basit ve ankastre mesnetli olması halleri için sırasıyla sıfırıncı ve birinci mertebe çözümler verilecektir.

4.2. Sıfırıncı Mertebe Yaklaşım

Sıfırıncı mertebeye ait denge denklemleri, (4.1.1) ve (4.1.2) sonuçlarının kullanılmasıyla (3.5.1) denklemlerinden

$$\left({}^0v_{2,2} + \frac{1}{2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\right)_{,2} = 0$$

$${}^0w_{,2222} - 3\left({}^0v_{2,2} + \frac{1}{2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\right){}^0w_{,22} = \frac{3}{4\Delta_1(1+\Delta_0)}\,p_0 \tag{4.2.1}$$

olarak bulunur. İlk denklemin ξ_2 değişkenine göre integrasyonu ve sonucun ikinci denklemde konulmasıyla denge denklemleri,

$${}^0v_{2,2} + \frac{1}{2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2} = c_1$$

$${}^0w_{,2222} - 3c_1\,{}^0w_{,22} = \frac{3}{4\Delta_1(1+\Delta_0)}\,p_0 \tag{4.2.2}$$

şeklini alır. Burada c_1 integrasyon sabitidir. Böylece kuple nonlineer (4.2.1) denklemleri yine kuple, nonlineer fakat çözümü mümkün olan (4.2.2) formuna indirgenmiş olur. Tahmin edileceği gibi önce lineer bir diferansiyel denklem olan ve sadece ${}^0w$ büyüklüğünü içeren $(4.2.2)_2$ denklemi çözülecek ve sonuç $(4.2.2)_1$'de konarak integre edilecektir. Diferansiyel denklemin çözümü ve integrasyon sonucu ortaya çıkan sabitler ise ${}^{0}v_2$ ve ${}^{0}w$ ile ilgili sınır koşullarının kullanılmasıyla belirlenecektir. Her iki halde de, yani hem ankastre hem de basit mesnetli halde, plağın düzlemde hareket etmediği varsayılacaktır. Başka bir deyişle, ${}^{0}v_2$ ile ilgili sınır koşullarının $\xi_2 = \pm 1$ de ${}^{0}v_2 = 0$ şeklinde verildiği kabul edilecektir. Ayrıca, özellikle birinci mertebede karmaşık bir hal alan çözümlerin daha basit bir formda yazılmasını sağlamak için bundan böyle

$$\alpha^2 = 3c_1 , \qquad y = \alpha\xi_2 , \qquad \gamma = \frac{3}{4\Delta_1(1+\Delta_0)} P_0 ,$$

$$\phi = \frac{\alpha}{\tanh\alpha} , \qquad \kappa_1 = \frac{\alpha}{\sinh\alpha} , \qquad \kappa_2 = \frac{1}{\cosh\alpha} \tag{4.2.3}$$

tanımları kullanılacaktır. Son olarak ta ξ_2 ekseni boyunca olan gerilme ve momentlerin sıfırıncı mertebe için

$$\begin{aligned} {}^{0}\sigma_{22} &= 2\Delta_1(1+\Delta_0)\left(\frac{\alpha^2}{3} - \zeta\, {}^{0}w_{,22}\right), \quad {}^{0}n_{22} = \frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\alpha^2, \\ {}^{0}m_{22} &= -\frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\,{}^{0}w_{,22} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

şeklinde yazılabileceği (3.4.12) ve (3.4.14) denklemlerinden hemen görülebilir. Dikkat edilirse (4.2.2) denklemleri, γ parametresinin tanımı dışında, lineer elastik hal için [15]' de verilenler ile aynı formdadır. Dolayısıyla aşağıda sadece sınır koşullarının ve çözümlerin verilmesiyle yetinilecektir.

4.2.1. Ankastre Mesnetli Şerit Problemi:

Ankastre mesnete ait sınır koşulları

$$\left.\begin{aligned} {}^{0}w &= 0 \\ {}^{0}w_{,2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \xi_2 = \pm 1 \text{ de} \tag{4.2.5}$$

şeklinde olup karşı gelen çözüm

$$\begin{aligned} {}^{0}w &= \frac{\gamma}{\alpha^4}\left[\frac{1}{2}(\alpha^2 - y^2) - \kappa_1(\cosh\alpha - \cosh y)\right] \\ {}^{0}v_2 &= \frac{\alpha}{3} y - \frac{\gamma^2}{2\alpha^7}\left[\frac{\kappa_1^2}{4}(\sinh 2y - 2y) - 2\kappa_1(y\cosh y - \sinh y) + \frac{y^3}{3}\right] \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olarak bulunur. Buradaki α sabiti ise ${}^{0}v_2\big|_{y=\pm\alpha} = 0$ bağıntısından

$$F_1(\alpha) = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{\gamma^2}{2\alpha^6}\left(3\phi + \phi^2 - \frac{5}{3}\alpha^2 - 4\right) = 0 \tag{4.2.7}$$

transandant denkleminin kökü olarak elde edilecektir.

4.2.2. Basit Mesnetli Şerit Problemi:

Benzer şekilde, basit mesnetli halde sınır koşulları

$$\left.\begin{array}{l} {}^0w = 0 \\ {}^0m_{22} = 0 \ (\text{veya } {}^0w_{,22} = 0) \end{array}\right\} \ \xi_2 = \pm 1 \text{ de} \qquad (4.2.8)$$

olarak verilir ve karşı gelen çözüm

$$\begin{aligned} {}^0w &= \frac{\gamma}{\alpha^4}\left[\frac{1}{2}(\alpha^2 - y^2) - \kappa_2(\cosh\alpha - \cosh y)\right] \\ {}^0v_2 &= \frac{\alpha}{3}y - \frac{\gamma^2}{2\alpha^7}\left[\frac{\kappa_2^2}{4}(\sinh 2y - 2y) - 2\kappa_2(y\cosh y - \sinh y) + \frac{y^3}{3}\right] \end{aligned} \qquad (4.2.9)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda olduğu gibi yine α sabiti

$$F_2(\alpha) = \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{2\alpha^6}\left(\frac{5}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi^2} + \frac{2}{3}\alpha^2 - 5\right) = 0 \qquad (4.2.10)$$

transandant denkleminin çözümü olarak bulunur. Dikkat edilirse (4.2.6) ve (4.2.9) denklemleri ile verilen ankastre ve basit mesnetli hallere karşı gelen çözümler form olarak aynıdır. Aradaki farklılık bu denklemlerde görünen κ_1 ve κ_2 büyüklüklerinin her iki hal için farklı tanımlanmış olması ve α sabitini belirleyecek denklemlerin farklı olmasından kaynaklanır. Bu çözümlerin form olarak aynı olması aşağıda bazı ifadelerin tek olarak yazılmasında kullanılacaktır.

4.3. Birinci Mertebe Yaklaşım

Eğer $(4.2.2)_1$ kullanılırsa birinci mertebe denklemler (3.6.19) dan

$$\begin{aligned} &({}^1v_{2,2} + {}^0w_{,2}\,{}^1w_{,2})_{,2} + \frac{1}{4\Delta_1(1+\Delta_0)}({}^1\tilde{n}_{22,2} + {}^1r_2) = 0 \\ &{}^1w_{,2222} - \alpha^2\,{}^1w_{,22} - 3({}^1v_{2,2} + {}^0w_{,2}\,{}^1w_{,2})\,{}^0w_{,22} = \frac{3}{4\Delta_1(1+\Delta_0)}({}^1\tilde{n}_{22}\,{}^0w_{,22} \\ &\qquad - {}^1r_2\,{}^0w_{,2} + {}^1\tilde{m}_{22,22} + {}^1s_2 + {}^1p) \end{aligned} \qquad (4.3.1)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemler ${}^1r_2$ büyüklüğüne ait $(3.4.18)_1$ tanımının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} &[{}^1v_{2,2} + {}^0w_{,2}\,{}^1w_{,2} + g(\xi_2)]_{,2} = 0 \\ &{}^1w_{,2222} - \alpha^2\,{}^1w_{,22} - 3[{}^1v_{2,2} + {}^0w_{,2}\,{}^1w_{,2} + g(\xi_2)]\,{}^0w_{,22} = f(\xi_2) \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

şeklini alır. Buradaki $g(\xi_2)$ ve $f(\xi_2)$ fonksiyonları ise

$$g(\xi_2) = \frac{1}{4\Delta_1(1+\Delta_0)}({}^1\tilde{n}_{22} + {}^0n_{22}\,{}^0v_{2,2} - {}^0m_{22}\,{}^0w_{,22} - {}^0q_2\,{}^0w_{,2})$$

$$f(\xi_2) = \frac{3}{4\Delta_1(1+\Delta_0)}\{{}^1\tilde{m}_{22,22} + {}^1s_{2,2} + {}^1p - [({}^0n_{22}\,{}^0v_{2,2} - {}^0m_{22}\,{}^0w_{,22} - {}^0q_2\,{}^0w_{,2}){}^0w_{,2}]_{,2}\} \qquad (4.3.3)$$

olarak tanımlanmıştır. Sıfırıncı mertebe yaklaşımda yapıldığı gibi $(4.3.2)_1$ denklemi ξ_2 değişkenine göre integre edilir ve sonuç $(4.3.2)_2$ denkleminde konursa (4.3.2) denklemleri, c_2 bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\begin{aligned} &{}^1v_{2,2} + {}^0w_{,2}\,{}^1w_{,2} + g(\xi_2) = c_2 \\ &{}^1w_{,2222} - \alpha^2\,{}^1w_{,22} = f(\xi_2) + 3c_2\,{}^0w_{,22} \end{aligned} \qquad (4.3.4)$$

denklemlerine dönüşür. Bu denklemlerin çözümünü bulabilmek için sıfırıncı mertebe büyüklüklerin fonksiyonu olan $g(\xi_2)$ ve $f(\xi_2)$ fonksiyonlarının açık bir şekilde hesaplanması gereklidir. Bu işleme geçmeden önce ξ_2 ekseni boyunca olan gerilme ve momentler (3.4.12) ve (3.4.14) denklemlerinden

$$\begin{aligned} &{}^1\sigma_{22} = 2\Delta_1(1+\Delta_0)[c_2 - g(\xi_2) - \zeta\,{}^1w_{,22}] + {}^1\tilde{\sigma}_{22} \quad , \\ &{}^1n_{22} = 4\Delta_1(1+\Delta_0)[c_2 - g(\xi_2)] + {}^1\tilde{n}_{22} \quad , \\ &{}^1m_{22} = -\frac{4}{3}\Delta_1(1+\Delta_0){}^1w_{,22} + {}^1\tilde{m}_{22} \end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

şeklinde yazılır. Buradaki, sıfırıncı mertebeden gelen katkıları gösteren ${}^1\tilde{\sigma}_{22}$, ${}^1\tilde{n}_{22}$ ve ${}^1\tilde{m}_{22}$ büyüklükleri ise (3.6.16)-(3.6.18) denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}^1\tilde{\sigma}_{22} = \Delta_1(1+\Delta_0)[&-\frac{1}{3}\zeta(6+5\Delta_0 - 2\zeta^2){}^0w_{,2222} + (\zeta^2 - \Delta_0){}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22} \\ &+ \zeta(\frac{2}{3}\Delta_0\alpha^2\,{}^0w_{,22} - {}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,22}) + (\frac{\alpha^2}{3} - \frac{1}{2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2})^2 \\ &+ \Delta_N(\frac{\alpha^4}{9} - \frac{2}{3}\alpha^2\zeta\,{}^0w_{,22} + \zeta^2\,{}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22}) + \frac{2}{3}\Delta_0(1+\zeta)\gamma] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\tilde{n}_{22} &= \frac{2}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\Big[\Delta_N\Big(\frac{\alpha^4}{3} + {}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22}\Big) + (1-3\Delta_0){}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22} \\
&\quad + 3\Big(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{1}{2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\Big)^2 + 2\Delta_0\gamma\Big] \\
{}^{1}\tilde{m}_{22} &= \frac{2}{3}\Delta_1(1+\Delta_0)\Big[-\frac{24+25\Delta_0}{15}\,{}^0w_{,2222} + \frac{2}{3}\alpha^2(\Delta_0 - \Delta_N){}^0w_{,22} \\
&\quad - {}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,22} + \frac{2}{3}\Delta_0\gamma\Big]
\end{aligned}
\qquad (4.3.6)
$$

olarak bulunur. Buradaki Δ_N katsayısı ise

$$
\Delta_N = \frac{\Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_3}{\Delta_1(1+\Delta_0)} \qquad (4.3.7)
$$

şeklinde tanımlanmıştır. Fiziksel nonlineerliği gösteren Δ_2, Δ_3 ve Δ_4 katsayılarının fonksiyonu olması nedeniyle Δ_N esas olarak fiziksel nonlineerliği karakterize eden katsayıdır. Başka bir deyişle, şimdiye kadar ve bundan sonra çıkarılan bütün denklemlerin lineer elastik plaklara indirgenmesi Δ_0 ve Δ_1 için (3.3.18) denklemiyle verilenleri ve $\Delta_N = 0$ koymakla mümkün olur. (3.8.18) dönüşümünden sıkışmaz cisim halinde Δ_N katsayısının $\Delta_N = -6$ şeklinde olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi $g(\xi_2)$ ve $f(\xi_2)$ fonksiyonlarının yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden formunu bulmak için (4.3.6) ve (3.4.18) ilişkileri (4.3.3) tanımlarında kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
g(\xi_2) &= \frac{1}{6}\Big[\Delta_N\Big(\frac{\alpha^4}{3} + {}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22}\Big) + 3\Big(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{1}{2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\Big)^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 \\
&\quad - \alpha^2\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2} + 3(1-\Delta_0){}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22} + 2\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,222} + 2\Delta_0\gamma\Big] \\
f(\xi_2) &= \frac{1}{6}\Big[-\frac{24+25\Delta_0}{5}\,{}^0w_{,22222} + (5\Delta_0 - 2)\alpha^2\,{}^0w_{,222} \\
&\quad - 6\,{}^0w_{,2}({}^0w_{,22}\,{}^0w_{,22} + {}^0w_{,2}\,{}^0w_{,222}) + 3\alpha^2\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,2} \\
&\quad + (\gamma - 2\alpha^4){}^0w_{,2} - 2\Delta_N\,\alpha^2\,{}^0w_{,222}\Big]_{,2}
\end{aligned}
\qquad (4.3.8)
$$

sonuçları bulunur. Daha öncede belirtildiği gibi, ankastre ve basit mesnetli haller için verilen, sıfırıncı mertebeye ait (4.2.6) ve (4.2.9) çözümleri aynı formdadır. Dolayısıyla bu çözümler yukarıdaki fonksiyonlara yerleştirilirse i=1 için ankastre mesnetli, i=2 için basit mesnetli hallere karşı gelen $g(\xi_2)$ ve $f(\xi_2)$ fonksiyonları

$$g(\xi_2) = \frac{\gamma^4}{8\alpha^{12}}(\kappa_i \sinh y - y)^4 + \frac{\gamma^2}{6\alpha^4}\{[\Delta_N + 3(1-\Delta_0)](\kappa_i \cosh y - 1)^2 + 2y(\kappa_i \sinh y - y)\} + \frac{\gamma}{3}\Delta_0 + \frac{\alpha^4}{18}(3+\Delta_N)$$

$$f(\xi_2) = -\frac{\gamma^3}{\alpha^6}[(\kappa_i \cosh y - 1)^3 + \frac{1}{2}(5\kappa_i^2 \sinh^2 y - y^2)(\kappa_i \cosh y - 1) + \frac{1}{2}\kappa_i^2(\kappa_i \sinh y - 3y)\sinh 2y + \kappa_i y \sinh y + y^2] + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(\kappa_i \cosh y - 1) - \frac{\gamma}{3}\alpha^2[(\frac{22}{5} + \Delta_N)\kappa_i \cosh y - 1] \quad (4.3.9)$$

olarak elde edilir. Ayrıca $(4.3.4)_2$ lineer diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$^1w = A_1 + A_2\xi_2 + A_3 e^{\alpha\xi_2} + A_4 e^{-\alpha\xi_2} + {}^1w_p(\xi_2) \quad (4.3.10)$$

şeklinde olduğu açıktır. Buradaki ^1w_p fonksiyonu sözkonusu denklemin sağ tarafından kaynaklanan özel çözümü gösterir ve uzun işlemler sonucu

$$^1w_p(\xi_2) = -\frac{\gamma^3}{8\alpha^{10}}\{\frac{\kappa_i^3}{2}(\cosh^3 y + \frac{7}{4}\cosh y - y\sinh y) + \kappa_i^2(\cosh^2 y - y\sinh 2y + y^2 + 4) + \kappa_i(7y^2\cosh y + \frac{23}{2}\cosh y - \frac{2}{3}y^3\sinh y - 15y\sinh y) - (y^2+4)^2\} + \frac{\gamma(\gamma + 3c_2)}{2\alpha^6}[\kappa_i(y\sinh y - \frac{5}{2}\cosh y) + y^2 + 2] - \frac{\gamma}{6\alpha^2}[\kappa_i(\Delta_N + \frac{22}{5})(y\sinh y - \frac{5}{2}\cosh y) + y^2 + 2] \quad (4.3.11)$$

olarak bulunur. Yukarıda da belirtildiği gibi, κ_i büyüklüğündeki i indisinin 1 ve 2 değerlerini almasına göre bu çözüm sırasıyla ankastre ve basit mesnetli hallere karşı gelen çözümü gösterir. Homojen denklemin çözümü sırasında ortaya çıkan A_1, A_2, A_3 ve A_4 sabitleri ise, aşağıda, ankastre ve basit mesnetli hallere ait sınır koşullarının kullanılması ile belirlenecektir.

Daha önce de belirtildiği gibi, birinci mertebe için bilinmeyen sayısı ile uyumlu sınır koşulları elde etmenin iki yolu vardır. Bunlardan birincisi sınır koşullarını yerdeğiştirmelerin kalınlık boyunca integrasyonu olan ortalama yerdeğiştirmeler üzerine yazmak, diğeri sınır koşullarını $\zeta = 0$ ile belirtilen orta düzlemde yazmaktır. Eğer (3.6.23) denklemleri kullanılırsa bu problem için ortalama yerdeğiştirmeler

$$ {}^1\bar{u}_2 = 2\,{}^1v_2 - \frac{\Delta_0}{3}\,{}^0w_{,2}\,{}^0w_{,22} \,, \qquad {}^1\bar{u}_3 = 2\,{}^1w + \frac{\Delta_0}{3}\,{}^0w_{,22} \tag{4.3.12} $$

olarak elde edilecektir. Sıfırıncı mertebede yapıldığı gibi, hem ankastre hem de basit mesnetli hallerde plak düzlemindeki yerdeğiştirme ile ilgili sınır koşulunun $\xi_2 = \pm 1$ de ${}^1\bar{u}_2 = 0$ şeklinde olduğu kabul edilir. Fakat (4.2.5) ve (4.2.8) koşulları hesaba katılırsa bu sınır koşulu, her iki hal için $\xi_2 = \pm 1$ de ${}^1v_2 = 0$ şeklini alır. Aşağıda, diğer sınır koşulları ve karşı gelen çözümler ankastre ve basit mesnetli haller için ayrı ayrı verilmektedir.

4.3.1. Ankastre Mesnetli Şerit Problemi:

Bu durumda sınır koşulları

$$ \left.\begin{aligned} {}^1\bar{u}_3 &= 0 \\ {}^1\bar{u}_{3,2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \xi_2 = \pm 1 \text{ de} \tag{4.3.13} $$

şeklinde alınır. Böylece, (4.3.10)-(4.3.11) çözümlerinin bu koşullarda kullanılmasıyla integrasyon sabitleri

$$ \begin{aligned} A_1 = \bar{A}_1 = {} & \frac{\gamma^3}{16\alpha^{10}} \Big[\phi^4 - \phi^3 + \big(\tfrac{4}{3}\alpha^2 + 12\big)\phi^2 + (15\alpha^2 + 62)\phi - \frac{13}{3}\alpha^4 \\ & - 54\alpha^2 - 32\Big] + \frac{\gamma(\gamma + 3c_2)}{2\alpha^6}(\phi^2 + 3\phi - 2\alpha^2 - 2) - \frac{\gamma}{30\alpha^2}\Big[5\Delta_N(\phi^2 + \phi \\ & - \alpha^2) + 22\phi^2 + 32\phi - 27\alpha^2 - 5(2 + \Delta_0)\Big] \end{aligned} $$

$$ A_2 = 0 \tag{4.3.14} $$

$$ \begin{aligned} A_3 = A_4 = \bar{A}_2 = \kappa_1 \Big\{ & -\frac{\gamma^3}{128\alpha^{10}}\Big[4\phi^3 - 15\phi^2 + \big(\tfrac{4}{3}\alpha^2 + 8\big)\phi + 27\alpha^2 + 156\Big] \\ & - \frac{\gamma(\gamma + 3c_2)}{8\alpha^6}(1 + 2\phi) + \frac{\gamma}{60\alpha^2}\Big[\frac{5}{2}\Delta_N(2\phi - 3) + 22\phi - 5\Delta_0 - 23\Big]\Big\} \end{aligned} $$

olarak bulunur. Bu durumda ${}^1w$ fonksiyonu

$$ {}^1w = \bar{A}_1 + 2\bar{A}_2 \cosh y + {}^1w_p(\xi_2) \tag{4.3.15} $$

şeklini alır. Eğer ${}^1w$ büyüklüğü $(4.3.4)_1$ denkleminde konur ve sonuç denklem ξ_2 değişkenine göre integre edilirse ${}^1v_2$ fonksiyonu, c_3 bir integrasyon sabiti olmak üzere,

$$ {}^1v_2 = c_3 + c_2 V_1(\xi_2) + V_2(\xi_2) \tag{4.3.16} $$

şeklinde bulunur. Buradaki $V_1(\xi_2)$ ve $V_2(\xi_2)$ fonksiyonları ise

$$V_1(\xi_2) = \frac{3\gamma^2}{2\alpha^9}\Big[\frac{\kappa_1^2}{8}(5+2\phi)(\sinh 2y - 2y) - \kappa_1(6+\phi)(y\cosh y - \sinh y)$$
$$- \frac{\kappa_1^2}{2} y\sinh^2 y + \kappa_1 y^2 \sinh y + \frac{2}{3}y^3\Big] + \frac{y}{\alpha}$$

$$V_2(\xi_2) = \frac{\gamma^4}{8\alpha^{13}}\Big\{\frac{\kappa_1^2}{8}\Big[\phi^3 - \frac{1}{4}\phi^2 + (\frac{\alpha^2}{3}+2)\phi + \frac{13}{4}\alpha^2 + 37\Big](\sinh 2y - 2y)$$
$$- \frac{\kappa_1}{2}\Big[\phi^3 + (\frac{\alpha^2}{3}+2)\phi + 3\alpha^2 + 160\Big](y\cosh y - \sinh y)$$
$$+ \frac{\kappa_1^4}{16}(\sinh 2y - 4y)\sinh^2 y - \frac{\kappa_1^3}{4}(y\sinh 2y - \frac{2}{3}\sinh^2 y - 2y^2)\sinh y$$
$$+ \kappa_1^2(y^2\sinh 2y - \frac{1}{3}y^3\sinh^2 y - \frac{5}{2}y\sinh^2 y - \frac{2}{3}y^3) + \frac{\kappa_1}{3}(2y^4\sinh y$$
$$- 23y^3\cosh y + 72y^2\sinh y) + \frac{3}{5}y^5 + \frac{16}{3}y^3\Big\} + \frac{\gamma^3}{8\alpha^9}\Big[\kappa_1^2(\phi + \frac{5}{2})$$
$$\times (\sinh 2y - 2y) - 4\kappa_1(\phi+6)(y\cosh y - \sinh y) - 2\kappa_1^2 y\sinh^2 y$$
$$+ 4\kappa_1 y^2\sinh y + \frac{8}{3}y^3\Big] + \frac{\gamma^2}{120\alpha^5}\Big\{10\Delta_N\Big[\frac{\kappa_1^2}{2}(\frac{3}{2} - \phi)(\sinh 2y - 2y)$$
$$+ 2\kappa_1\phi(y\cosh y - \sinh y) + \kappa_1^2(y\sinh^2 y - \frac{3}{2}\sinh 2y + y)$$
$$+ \kappa_1(4y\cosh y - 2y^2\sinh y) - 2y\Big] - \kappa_1^2(22\phi - 20\Delta_0 - 23)(\sinh 2y - 2y)$$
$$+ 4\kappa_1(22\phi - 5\Delta_0 + 54)(y\cosh y - \sinh y) + \kappa_1^2(44y\sinh^2 y - 59\sinh 2y$$
$$+ 60\Delta_0 y + 58y) + 120\kappa_1(1 - \Delta_0)\sinh y - 88\kappa_1 y^2\sinh y - 60(1-\Delta_0)y\Big\}$$
$$- \frac{\gamma}{3\alpha}\Delta_0 y - \frac{(3+\Delta_N)}{18}\alpha^3 y \qquad (4.3.17)$$

olarak tanımlanır. (4.3.16) denkleminde görünen c_2 ve c_3 sabitlerini belirlemek için yapılacak şey ${}^1v_2$ ile ilgili sınır koşullarını kullanmaktır. V_1 ve V_2 fonksiyonlarının tek fonksiyon olmasını da hesaba katarak bu sınır koşulları kullanılırsa

$$c_2 = -\frac{V_2(1)}{V_1(1)}, \qquad c_3 = 0 \qquad (4.3.18)$$

sonuçları elde edilir. Burada $V_1(1)$ ve $V_2(1)$ ile $V_1(\xi_2)$ ve $V_2(\xi_2)$ fonksiyonlarının $\xi_2 = +1$ deki değeri gösterilmektedir.

Şimdi sınır koşullarının ortalama yerdeğiştirmeler üzerine değil de $\zeta = 0$ ile gösterilen orta düzleme ait yerdeğiştirmeler üzerine yazılması halinde çözümlerin nasıl elde edileceği gösterilecektir. Daha önce de belirtildiği gibi bu durumda sınır koşulları ${}^1v_2$ ile ${}^1w$ üzerine yazılır. Bunun sonucunda ${}^1v_2$ ile ilgili sınır koşulları aynı kalırken (4.3.13) koşulları

$$\left.\begin{array}{l} {}^1w = 0 \\ {}^1w_{,2} = 0 \end{array}\right\} \xi_2 = \pm 1 \text{ de} \qquad (4.3.19)$$

şeklini alır. Eğer yukarıdaki sınır koşullarını kullanarak bulunan çözümler "$_0$" indisi ile gösterilirse, (4.3.14) ve (4.3.17) ile verilen ifadelere bağlı olarak $\bar{A}_1^0$, $\bar{A}_2^0$, V_1^0 ve V_2^0 büyüklükleri

$$\bar{A}_1^0 = \bar{A}_1 - \frac{\gamma}{6\alpha^2}\Delta_0 , \qquad \bar{A}_2^0 = \bar{A}_2 + \frac{\gamma}{12\alpha^2}\Delta_0\kappa_1 , \qquad V_1^0 = V_1 ,$$

$$V_2^0 = V_2 + \frac{\gamma^2}{6\alpha^5}\Delta_0\kappa_1\left[y\cosh y - \sinh y - \frac{\kappa_1}{4}(\sinh 2y - 2y)\right] \qquad (4.3.20)$$

şeklinde hesaplanır. Yeni yerdeğiştirme ifadelerini ve c_2 integrasyon sabitini bulmak için yapılacak şey yukarıdaki "$_0$" indisli büyüklükleri (4.3.15), (4.3.16) ve (4.3.18) denklemlerine, indissiz büyüklükler yerine, koymaktır. Bu iki tip sınır koşulu ve çözümün karşılaştırılması ileride ayrıca yapılacaktır.

4.3.2. Basit Mesnetli Şerit Problemi:

(4.2.8) ve (4.3.12) denklemlerinden görüldüğü gibi $\xi_2 = \pm 1$ de ${}^1\bar{u}_3 = 2\,{}^1w$ olması nedeniyle, basit mesnetli hal için sınır koşullarını ortalama yerdeğiştirme üzerine veya $\zeta = 0$ ile gösterilen orta düzlem için yazmanın hiçbir farkı yoktur. Dolayısıyla bu durumda sınır koşulları

$$\left.\begin{array}{l} {}^1w = 0 \\ {}^1m_{22} = 0 \end{array}\right\} \xi_2 = \pm 1 \text{ de} \qquad (4.3.21)$$

olarak yazılabilir. Eğer (4.3.10), (4.3.11), $(4.3.5)_3$ ve $(4.3.6)_3$ denklemleri bu koşullarda kullanılırsa A_1, A_2, A_3 ve A_4 sabitleri

$$A_1 = \bar{A}_1 = -\frac{\gamma^3}{8\alpha^{10}}\left(4\frac{\alpha^2}{\phi^2} + \frac{\alpha^4}{\phi^2} + 18\frac{\alpha^2}{\phi} + \alpha^4 - 9\alpha^2 - 21\right) + \frac{\gamma(\gamma + 3c_2)}{2\alpha^6}$$
$$\times (2 - \alpha^2) + \frac{\gamma}{6\alpha^2}(\alpha^2 + 3\Delta_0 - 2\Delta_N - 4)$$

$$A_2 = 0 \qquad (4.3.22)$$

$$A_3 = A_4 = \bar{A}_2 = \kappa_2\{-\frac{\gamma^3}{128\alpha^{10}}(-4\frac{\alpha^4}{\phi^3} + 7\frac{\alpha^2}{\phi^2} + \frac{16}{3}\frac{\alpha^4}{\phi} - 4\frac{\alpha^2}{\phi} + 72\alpha^2 + 153)$$
$$-\frac{\gamma(\gamma + 3c_2)}{8\alpha^6}(3 + 2\frac{\alpha^2}{\phi}) + \frac{\gamma}{60\alpha^2}[5\Delta_N(\frac{\alpha^2}{\phi} - \frac{1}{2}) + 22\frac{\alpha^2}{\phi} - 5(3\Delta_0 + 5)]\}$$

şeklinde bulunur. Böylece ${}^1w$ fonksiyonu yine (4.3.15) ile verilir ve, ankastre mesnetli halde yapıldığı gibi, bu ifadenin $(4.3.4)_1$ denkleminde kullanılması ile ${}^1v_2$ fonksiyonu (4.3.16) ile aynı formda elde edilir. Fakat bu durumdaki $V_1(\xi_2)$ ve $V_2(\xi_2)$ fonksiyonları

$$V_1(\xi_2) = \frac{3\gamma^2}{2\alpha^9}[\frac{\kappa_2^2}{8}(7 + 2\frac{\alpha^2}{\phi})(\sinh 2y - 2y) - \kappa_2(7 + \frac{\alpha^2}{\phi})(y\cosh y - \sinh y)$$
$$-\frac{\kappa_2^2}{2}y\sinh^2 y + \kappa_2 y^2\sinh y + \frac{2}{3}y^3] + \frac{y}{\alpha}$$

$$V_2(\xi_2) = \frac{\gamma^4}{8\alpha^{13}}[\frac{\kappa_2^2}{8}(-\frac{\alpha^4}{\phi^3} - \frac{5}{4}\frac{\alpha^2}{\phi^2} + \frac{4}{3}\frac{\alpha^4}{\phi} - \frac{\alpha^2}{\phi} + 18\alpha^2 + \frac{157}{4})(\sinh 2y - 2y)$$
$$+\frac{\kappa_2}{2}(\frac{\alpha^4}{\phi^3} + \frac{\alpha^2}{\phi^2} - \frac{4}{3}\frac{\alpha^4}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi} - 18\alpha^2 - 162)(y\cosh y - \sinh y)$$
$$+\frac{\kappa_2^4}{8}(\cosh^3 y\sinh y - 2y\cosh^2 y + y) + \frac{\kappa_2^3}{6}(\cosh^2 y\sinh y - 3y\cosh^3 y$$
$$+ 3y^2\sinh y + 2\sinh y) - \frac{\kappa_2^2}{6}(2y^3\cosh^2 y + 15y\cosh^2 y - 6y^2\sinh 2y$$
$$+ 2y^3 - 15y) + \frac{\kappa_2}{3}(2y^4\sinh y - 23y^3\cosh y + 72y^2\sinh y) + \frac{3}{5}y^5$$
$$+\frac{16}{3}y^3] + \frac{\gamma^3}{8\alpha^9}[\kappa_2^2(\frac{7}{2} + \frac{\alpha^2}{\phi})(\sinh 2y - 2y) - 4\kappa_2(7 + \frac{\alpha^2}{\phi})$$
$$\times (y\cosh y - \sinh y) - 2\kappa_2^2 y\sinh^2 y + 4\kappa_2 y^2\sinh y + \frac{8}{3}y^3]$$
$$+\frac{\gamma^2}{120\alpha^5}\{5\Delta_N[\frac{\kappa_2^2}{2}(1 - 2\frac{\alpha^2}{\phi})(\sinh 2y - 2y) + 4\kappa_2(1 + \frac{\alpha^2}{\phi})$$
$$\times (y\cosh y - \sinh y) + \kappa_2^2(2y\cosh^2 y - 3\sinh 2y) + 4\kappa_2(2y\cosh y$$
$$- y^2\sinh y) - 4y] + 60\Delta_0(\frac{\kappa_2^2}{2}\sinh 2y - \kappa_2 y\cosh y - \kappa_2\sinh y + y)$$
$$+ 2\kappa_2^2(9 - 11\frac{\alpha^2}{\phi})(\sinh 2y - 2y) + 88\kappa_2(1 + \frac{\alpha^2}{\phi})(y\cosh y - \sinh y)$$
$$+ 4\kappa_2^2(11y\cosh^2 y - 13\sinh 2y) + 8\kappa_2(15y\cosh y - 11y^2\sinh y)$$
$$- 60y\} - \frac{\gamma}{3\alpha}\Delta_0 y - \frac{(3 + \Delta_N)}{18}\alpha^3 y \qquad (4.3.23)$$

şeklinde verilir. Ankastre mesnetli halde yapıldığı gibi, ${}^1v_2$ ile ilgili sınır koşulları kullanılırsa c_2 ve c_3 sabitleri için yine (4.3.18) sonuçları elde edilir.

$(4.2.6)_1$ ve $(4.2.9)_1$ denklemlerinden de görüldüğü gibi, hem ankastre hem de basit mesnetli hal için sıfırıncı mertebe çökme γ parametresinin (veya (4.2.3) tanımı nedeniyle $\bar{q}_0$ boyutsuz yükünün) tek kuvvetine bağlıdır. Yani yükün çekme veya basınç olması sıfırıncı mertebe çökmenin sadece işaretini değiştirir fakat mutlak değerini değiştirmez. Öte yandan, hem ankastre hem de basit mesnetli halde, birinci mertebe ${}^1w$ çözümünün γ parametresinin çift kuvvetlerini de bulundurduğu görülür. Dolayısıyla artık yükün işaret değiştirmesi ile sadece işaret değiştiren bir yerdeğiştirme yerine büyüklük olarak ta değişime uğrayan bir yerdeğiştirme sözkonusudur. Bunun nedeni, Bölüm 3.6'da da belirtildiği gibi, sıfırıncı mertebede gözönüne alınmayan enine kayma ve normal gerilmelerinin birinci mertebede hesaba katılmasıdır. Ayrıca ${}^1u_3$ büyüklüğünün enine koordinata bağlı olması nedeniyle sıfırıncı mertebede kalınlık boyunca üniform olan çökmelerin birinci mertebede kalınlık boyunca değişeceği açıktır. Aşağıda bu problem için şimdiye kadar bulunan sonuçların değişik malzemeler için değerlendirilmesi üzerinde durulacak ve geometrik nonlineerlik ile fiziksel nonlineerliğin karşılaştırması yapılacaktır.

4.4. Sayısal Sonuçlar

Sayısal olarak verilmiş malzeme sabitleri ve γ parametresi (veya $\bar{q}_0$ boyutsuz yükü ile ε boyutsuz kalınlık) için yukarıda verilen çözümlerden sayısal sonuçlar elde etmede ilk adım, sırasıyla, (4.2.7) ve (4.2.10) denklemleriyle verilen $F_1(\alpha)$ ve $F_2(\alpha)$ fonksiyonlarının kökü olan α değerlerini bulmak olacaktır. Gerek c_1 integrasyon sabitinin gerekse ${}^0n_{22}$ eksenel kuvvetinin reel olması istenildiğinden (4.2.3)-(4.2.4) ilişkileri α^2 büyüklüğünün de reel olması gerektiğini belirtir. Bu ise ancak bulunacak α kökünün reel veya tam sanal olması ile mümkündür. $F_1(\alpha)$ ve $F_2(\alpha)$ fonksiyonlarının sayısal bir incelemesi ise, α kökünün tam sanal kabul edildiği durumda bu denklemlerin hiçbir kökünün varolmadığını ve sadece $\pm\alpha$ şeklinde ($F_1(\alpha)$ ve $F_2(\alpha)$ fonksiyonlarının çift fonksiyon olması nedeniyle) iki reel kökünün varolduğunu ortaya koyar. Diğer yandan, eğer $\alpha \ll 1$ için bu iki denklemin yaklaşık kökleri hesaplanmak istenirse sırasıyla $F_1(\alpha)$ ve $F_2(\alpha)$ fonksiyonları için

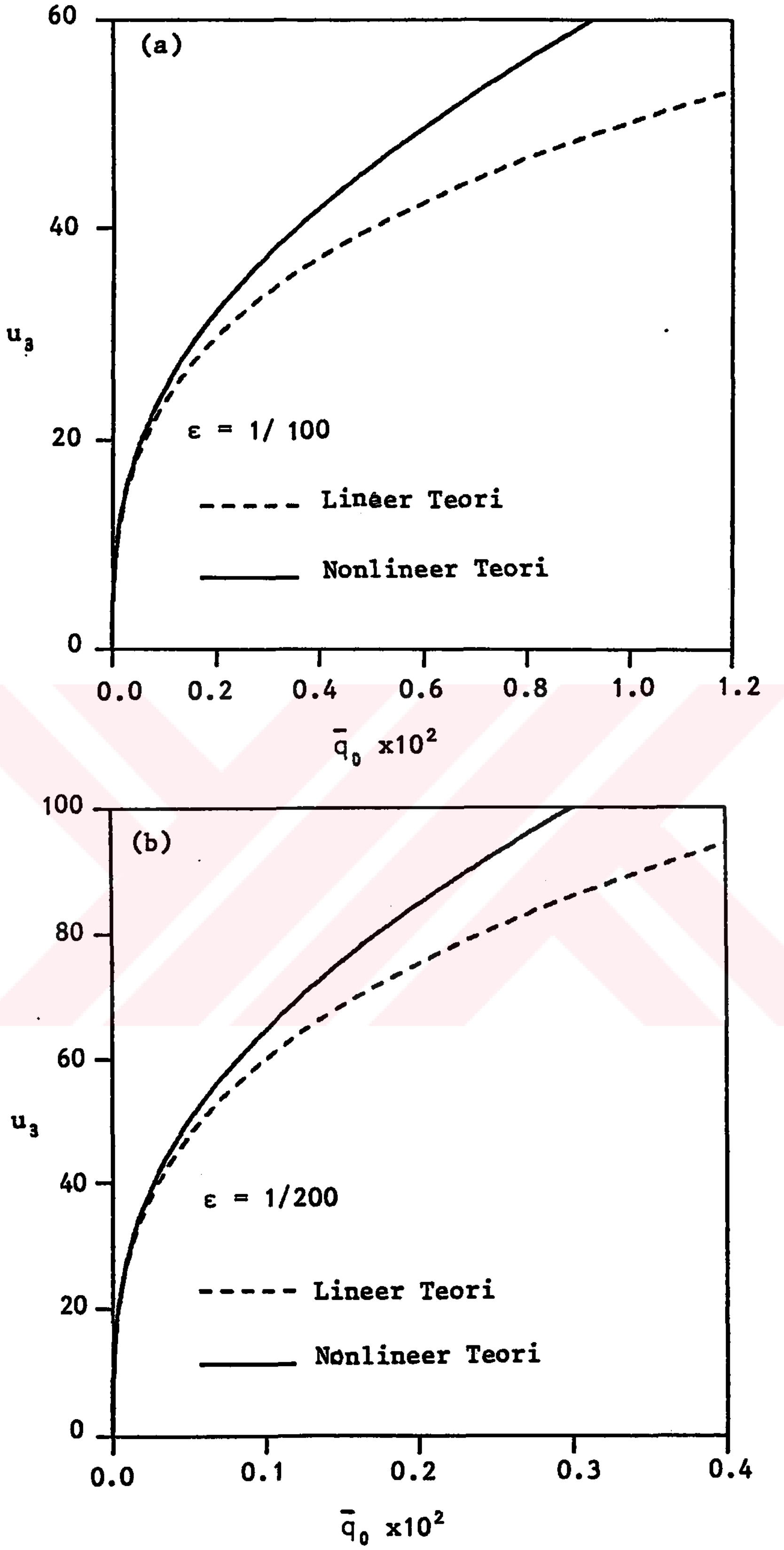
$$\alpha^2 = \frac{5\gamma^2}{\gamma^2 + 1575} \quad , \quad \alpha^2 = \frac{1683\gamma^2}{1364\gamma^2 + 20790} \tag{4.4.1}$$

ifadeleri bulunur. Benzer bir yaklaşımın $\alpha \gg 1$ bölgesi için de yapılmasıyla her iki denkleme ait yaklaşık kök

$$\alpha^2 = (\frac{\gamma^2}{2})^{1/3} \qquad (4.4.2)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerden de görüldüğü gibi, α ve dolayısıyla γ parametresinin küçük olduğu durumda ankastre ve basit mesnete ait kökler birbirinden farklı iken α veya γ'nın büyük değerleri için her iki halde yakın sonuç elde edilir. γ parametresinin artması ancak plağın daha da incelmesine veya yükün artmasına bağlı olduğu için bu parametrenin artması ile birlikte çökmelerin de artmasını beklemek doğaldır. Böylece, küçük deformasyonlar için ankastre ve basit mesnetli şeritlere ait çözümlerde görünen fark, deformasyonlar büyüdükçe ortadan kalkar ve çözüm sınır şartlarından çok az etkilenir hale gelir. Bu çalışmada fiziksel nonlineerliğin katkısını ortaya çıkarmak amacıyla çok büyük deformasyonlarla ilgilenildiği için sözü edilen durum hemen kendini gösterir. Dolayısıyla aşağıda fiziksel nonlineerlik ile geometrik nonlineerliği karşılaştırma amacıyla çizilen maksimum çökme - yük eğrilerinde sadece ankastre mesnete ait sonuçlar verilmiştir.

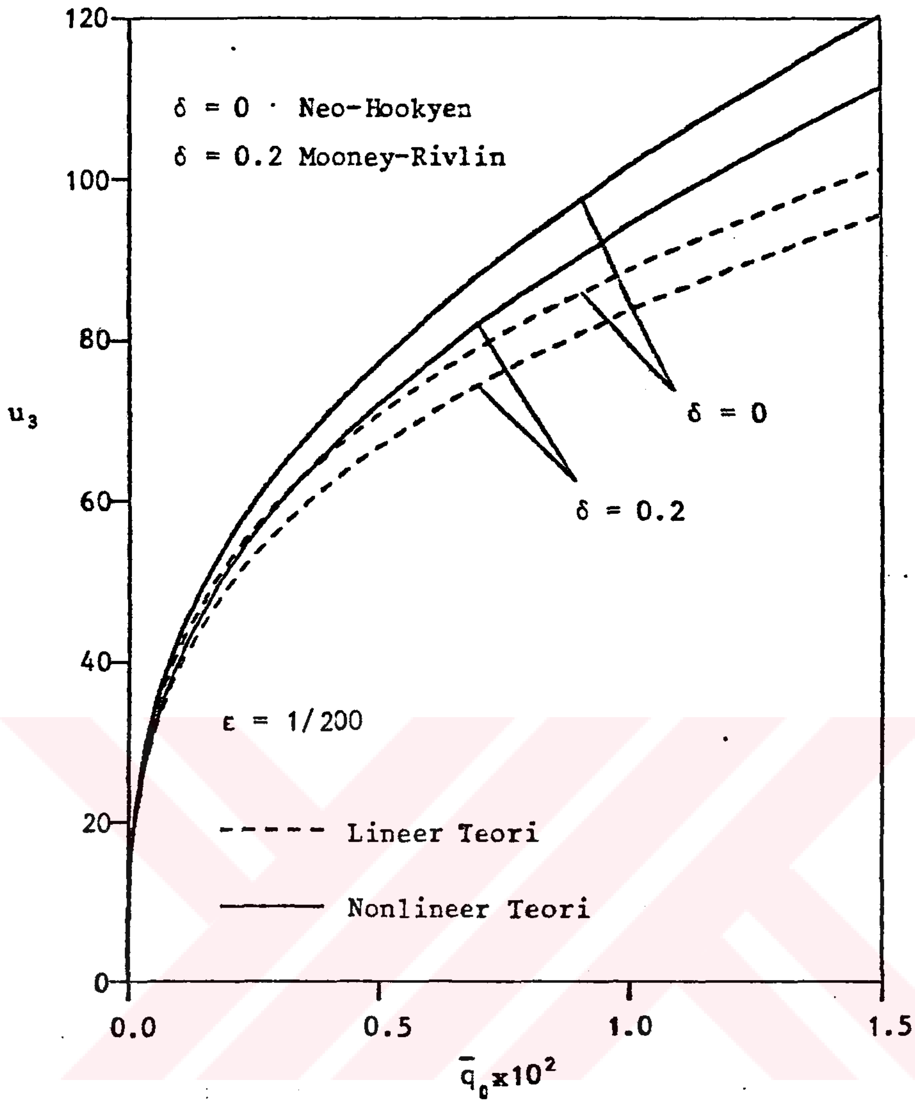
Karşılaştırma için ilk olarak Ko malzemesi gözönüne alınmış ve yük ile maksimum çökme arasındaki ilişki ankastre mesnet halinde Şekil-4.4.1.a-b ile verilmiştir. Fiziksel nonlineerliği karakterize eden ve (4.3.7) ile tanımlanan Δ_N katsayısının Ko cismi için $\Delta_N = -\frac{22}{3}$ ile verildiği (3.3.16) ilişkileri kullanılarak görülebilir. Bu katsayının sıfır olarak alınmasının geometrik nonlineerliğe karşı gelmesi kullanılarak Şekil-4.4.1'de fiziksel ve geometrik nonlineer cisme ait davranışların bir karşılaştırması yapılmıştır. Sözkonusu şeklin düşey ekseni, $(3.1.1)_1$ açılımının ilk iki terimi ile verilen u_3 büyüklüğünün plak düzleminin ortasındaki değerini, yani $u_3 = {}^0u_3 + \varepsilon^2\,{}^1u_3$ büyüklüğünün $\xi_2 = \zeta = 0$ noktasındaki değerini gösterir. Bu karşılaştırmaların ve sayısal incelemelerin gösterdiği gibi, ε parametresinin değişimi ile fiziksel nonlineerliğin etkili olduğu bölge arasında yakın bir ilişki vardır. Yani ε küçüldükçe daha küçük yüklerde fiziksel nonlineerlik kendini göstermeye başlar. Öte yandan fiziksel nonlineerlik ile geometrik nonlineerliğin kalınlık kadar yani 2h kadar farketmeye başladığı çökmeler $\varepsilon = 1/100$ için $u_3 \simeq 27$ (veya $U_3 \simeq 27h$) iken $\varepsilon = 1/200$ için $u_3 \simeq 45$ (veya $U_3 \simeq 45h$) şeklinde bulunur. Dolayısıyla $\varepsilon = 1/100$ ve $\varepsilon = 1/200$ için, sırasıyla, kalınlığın 13-14 ve 22-23 katından daha büyük olan çökmelerde fiziksel nonlineerliği ihmal etmek mümkün değildir.



Şekil - 4.4.1
Ankastre mesnet halinde a) ε = 1/100 ve b) ε = 1/200 oranları için Ko malzemesine ait boyutsuz yük ile maksimum çökmenin değişimi

Eğer, bu karşılaştırma kalınlık yerine şeritin yarı genişliği için yapılmak istenirse her iki hal için εu_3 $(= U_3/L)$ çarpımı hesaplanmalıdır. Bu durumda yukarıdaki iki hal için çökmelerin şeritin yarı genişliğinin, sırasıyla, yaklaşık olarak % 27 ve % 22'sine ulaştığı durumda fiziksel nonlineerliğin önem kazandığı ve kalınlık mertebesinde farkların meydana gelmeye başladığı görülmektedir. Son olarak, ilgili bölgede, basit mesnete ait çökmeler ankastre hale göre çok küçük bir artım göstermesine rağmen (ki bu artımlar nonlineerliğin etkili olmaya başladığı bölgede % 2 mertebesinde olup deformasyon arttıkça bu oran giderek küçülür) esas olarak yukarıdaki ilişkiler basit mesnetli halde de geçerlidir.

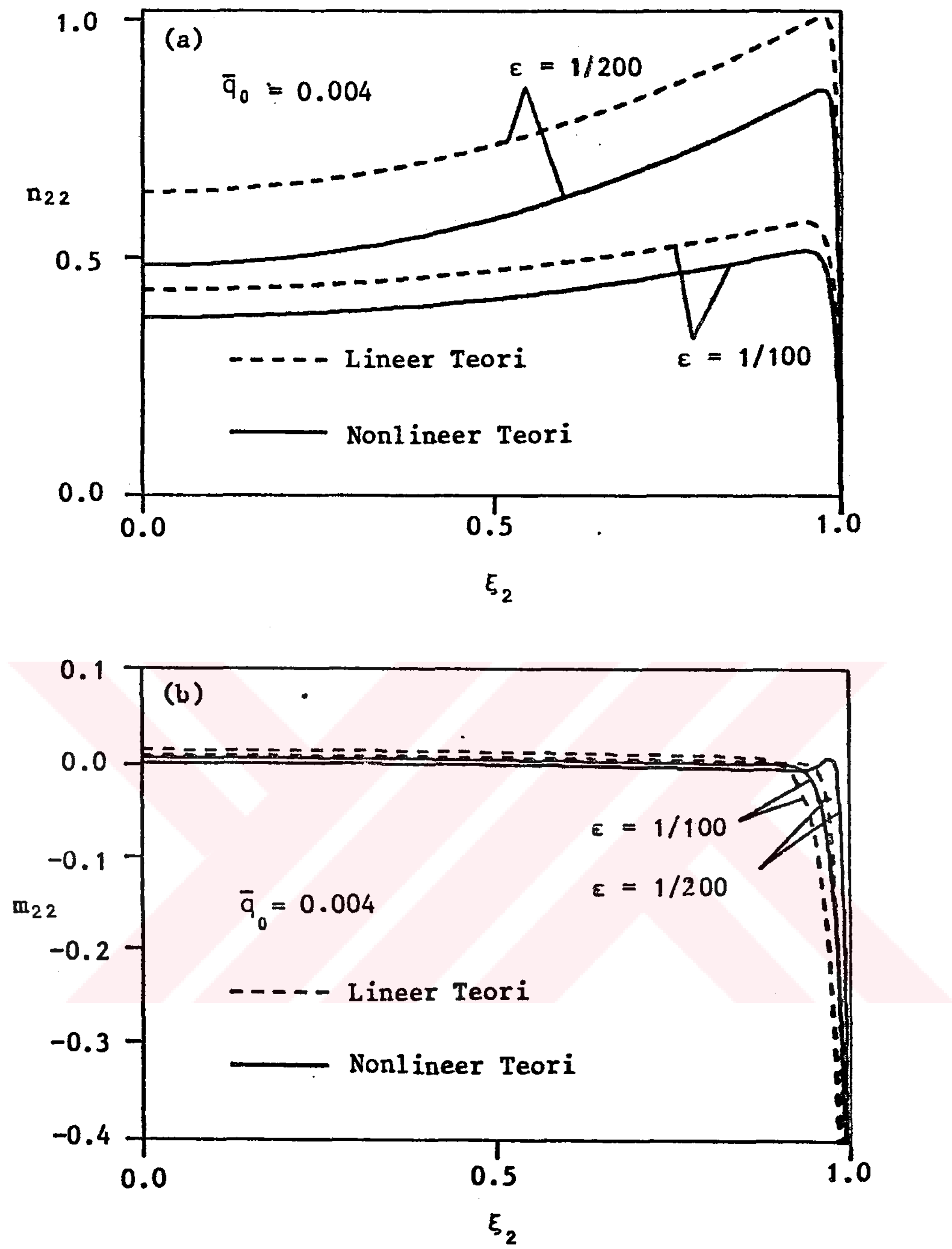
Şekil-4.4.2 ile benzer bir karşılaştırma Mooney-Rivlin ve Neo-Hookyen malzemeler için verilmektedir. (3.8.18) ve (3.8.24) dönüşümlerinin (4.3.7) tanımında kullanılmasıyla Δ_N katsayısının sıkışmaz cisimler için fiziksel nonlineerlik halinde $\Delta_N = -6$ ve geometrik nonlineerlik halinde $\Delta_N = 0$ değerlerini alacağı çıkar. Ayrıca (3.8.15)'deki Mooney-Rivlin malzemesine ait katsayılar $\delta = 0$ konulmasıyla Neo-Hookyen cisim için $\Lambda_0 = 2$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ şeklini alır. Dolayısıyla Şekil-4.4.2'de $\delta = 0$ ve $\delta = 0.2$ ile, sırasıyla, Neo-Hookyen ve Mooney-Rivlin malzemelerine ait eğriler gösterilmiştir. Sözkonusu şekil ve sayısal hesaplar, fiziksel veya geometrik nonlineerlik kabulünden dolayı çökmelerin kalınlık yani 2h kadar farketmeye başladığı bölgeler için şu sonuçları ortaya koyar. Mooney-Rivlin malzemesi için $u_3 \geqq 49$ (veya $U_3 \geqq 49h$) ve Neo-Hookyen malzeme için $u_3 \geqq 46$ (veya $U_3 \geqq 46h$) bölgelerinde artık von Kármán denklemleri geçerli olmaktan çıkar. Dolayısıyla fiziksel nonlineerlik, çökmeler kalınlığın yaklaşık olarak 23-24 katından daha büyük ise önem kazanmaya başlar. Yukarıda yapıldığı gibi bu çökmeler şeritin yarı genişliği ile karşılaştırılırsa, bu yarı genişliğin yaklaşık olarak % 23-24'den daha büyük çökmelerde büyük şekil değiştirmelerin meydana geldiği ortaya çıkar. Öte yandan söz konusu şeklin Neo-Hookyen malzemeler için [18]'de verilen 8. şekle form olarak benzerliği dikkat çekicidir. Gerek dairesel plakların ele alınması gerekse burada olduğu gibi ε ve $\bar{q}_0$ parametrelerini özelleştirmek yerine γ parametresine benzer bir parametre ile çalışmayı tercih etmesi nedeniyle tam bir karşılaştırma mümkün değildir. Fakat her iki çalışmada da fiziksel nonlineerlik halinde bulunan çökmelerin von Kármán teorisi ile elde edilenlerden daha büyük olduğu görülür. Öte yandan [17]'de



Şekil - 4.4.2
Ankastre mesnet halinde Mooney-Rivlin (δ = 0.2) ve Neo-Hookyen (δ = 0) cisimler için yük ve maksimum çökme arasındaki ilişki

von Kármán denklemlerinin, buradaki parametreler cinsinden $\bar{q}_0^2 \ll 4\varepsilon^2$ bölgesi için geçerli olduğu belirtilmiştir. Şimdiye kadar elde edilen sonuçlarında bu koşulu sağladığı $\varepsilon = 1/200$ ve Şekil-4.4.2'den de $\bar{q}_0$ için yaklaşık olarak 0.1×10^{-2} alarak hemen görülebilir.

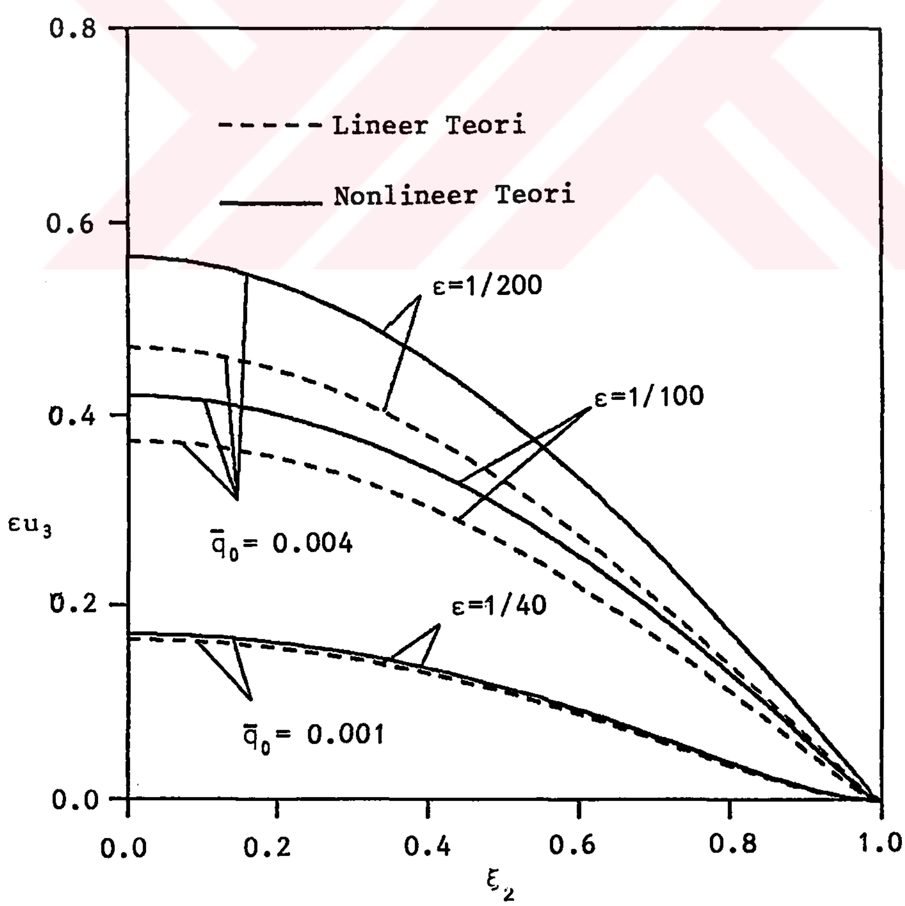
Şekil-4.4.3.a-b ile fiziksel nonlineerliğin önem kazandığı bölge için eksenel kuvvet ve eğilme momentinin eksen boyunca değişimi verilmektedir. Buradaki düşey eksenler sırasıyla $n_{22} = \varepsilon^2({}^0n_{22} + \varepsilon^2\,{}^1n_{22})$ ve $m_{22} = \varepsilon^2({}^0m_{22} + \varepsilon^2\,{}^1m_{22})$ ile tanımlanan eksenel kuvvet ve eğilme momentini göstermektedir. Sonuçta, [17]'de de belirtildiği gibi, bu mertebedeki çökmeler için şeritin kenarına yakın yerler hariç heryerde



Şekil - 4.4.3
Ankastre mesnet halinde Ko malzemesi için a) Eksenel kuvvet b) Eğilme momentinin eksen boyunca değişimi

mambran etkisinin belirleyici olduğu görülmektedir. Yani sınıra yakın yerler dışında eğilme momentinin katkısı çok küçük olur. Dolayısıyla yük arttıkça veya kalınlık parametresi küçüldükçe daha büyük çökmeler meydana gelir ve eksenel kuvvet eğilme momentine göre dominant olmaya başlar. Şekilde ankastre mesnet için kalınlık parametresinin küçülmesiyle eksenel kuvvetin artımı açık bir şekilde gözlenmektedir. Benzer bir durum sabit bir ε ve giderek artan yükler için de ortaya çıkar fakat burada sadece bu durumu vurgulamakla yetinilecektir. Öte yandan basit mesnet halinde sınıra yakın bölgelerde de eksenel kuvvetin artımı sürer ve burada görünen bükülme meydana gelmez. Ayrıca gene basit mesnet halinde, eğilme momenti burada olduğu gibi sınıra yakın yerlerde negatif değerler almayacak ve tam sınırda sıfır olacak şekilde azalacaktır. Son olarak, Şekil-4.4.3.a-b ile verilen eğrilerin Mooney malzemesinden oluşmuş bir silindirik kabuğun sınır tabakalarını inceleyen Taber [29]'ın 5. ve 8. şekillerine nitelik olarak benzerliği ilginçtir.

Şekil-4.4.4 ile ankastre mesnet halinde Ko malzemesi için şerit orta düzleminin deformasyondan sonra aldığı biçim çeşitli yük ve kalınlık parametreleri için verilir. Bu şekilden de görüldüğü gibi yük arttıkça veya kalınlık parametresi küçüldükçe sınırdaki bölge giderek küçülür. Esas olarak bu, çökmelerin giderek büyümesiyle sınıra daha

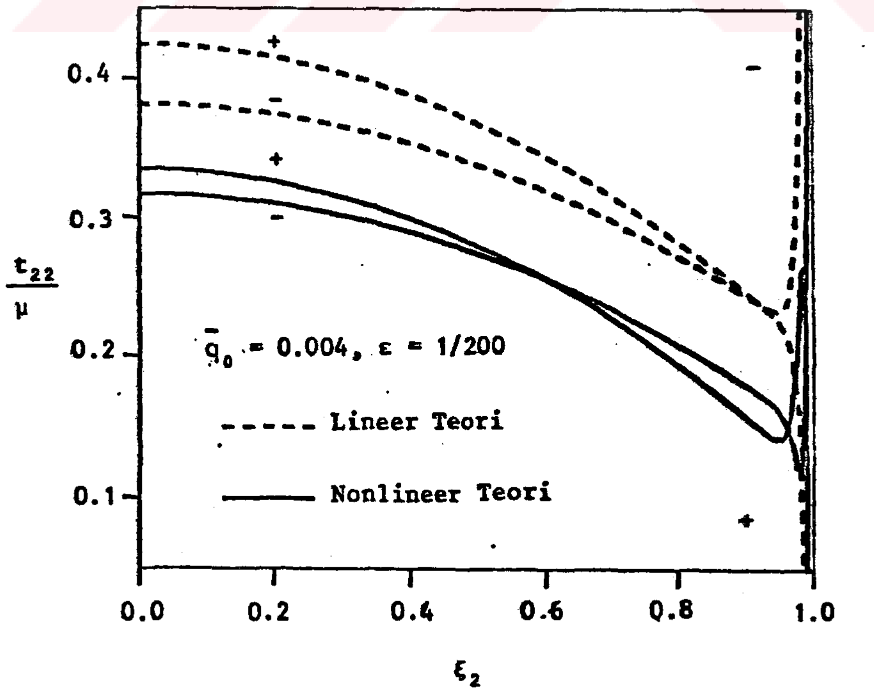


Şekil - 4.4.4.
Ankastre mesnet halinde Ko malzemesi için çökme eğrileri

yakın bölgelerde kalınlık mertebesinde yerdeğiştirmeler olması ve dolayısıyla çökmelerin kalınlık mertebesinde olduğu varsayımına dayanan asimptotik açılımın giderek sınıra daha yakın bölgelerde geçerli hale gelmesinden kaynaklanır. Öte yandan ankastre mesnet için verilen (4.3.19) sınır koşullarının ve (4.3.20) sonuçlarının sayısal bir incelemesi yapılırsa görülür ki burada incelenen mertebedeki çökmeler için bu sınır koşullarının bulunan maksimum çökmelere katkısı % 0.001 mertebesindedir. Doğal olarak bu sınır koşullarının şeritin orta düzlemindeki çökmenin tam sınırda sıfır olmasını sağlayacağı açıktır.

Hatırlanacağı gibi daha önce, plağın yüzlerindeki yüklerin basınç veya çekme olmasına göre birinci mertebe yerdeğiştirmelerin mutlak değerinde, von Kármán teorisinin aksine, farklılık oluşacağı belirtilmişti. Bu farklılığı ortaya çıkarmak için Şekil-4.4.1'de üst yüze çekme (yani + $\bar{q}_0$) uygulanarak yapılan hesaplar basınç (yani − $\bar{q}_0$) için tekrarlanmıştır. Sonuçta maksimum çökme için bu farkın $\varepsilon = 1/100$ ile $\bar{q}_0 = 0.012$ olduğu durumda yaklaşık olarak % 0.8–0.9 mertebesinde ve $\varepsilon = 1/200$ ile $\bar{q}_0 = 0.004$ olduğu durumda ise yine yaklaşık olarak % 0.4 mertebesinde olduğu görülür.

Son olarak Şekil-4.4.5 ile cisimdeki gerçek gerilmeleri



Şekil – 4.4.5

Ankastre mesnet halinde Ko malzemesi için Cauchy gerilmelerinin ξ_2 ekseni boyunca değişimi. Burada + ve − sırasıyla şeritin üst ve alt yüzlerine etkiyen gerilmeleri gösterir.

gösteren Cauchy gerilme tansörüne ait t_{22} bileşeninin eksen boyunca değişimi verilmektedir. Burada + ve - işaretleriyle şeritin sırasıyla $\zeta = 1$ ve $\zeta = -1$ yüzlerine etkiyen gerilmeler gösterilmektedir. Şekilden de farkedildiği gibi, şeritin ortasına yakın bölgelerde, nonlineer bünye denklemlerini kullanarak bulunan gerilmeler von Kármán teorisi yardımıyla bulunanlardan daha küçük değerlere sahiptirler. Öte yandan, yine aynı bölgede, yükün uygulandığı üst yüzdeki gerilmelerin dış kuvvetlerden bağımsız olan alt yüzdeki gerilmelerden daha büyük olduğu görülür.

Son olarak bu bölümü bitirmeden, burada bulunan sonuçların gerçek probleme bir dış çözüm olarak düşünülmesi ve bu sonuçların bir sınır tabaka çözümü ile tamamlanması gerektiğini hatırlatmak yararlı olur. Ayrıca şimdiki sonuçların, farklı geometrilere sahip olsalar da bu tür problemlerdeki belirleyici yanları kalitatif olarak ortaya çıkarmakta yararlı olduğunu ve benzer çalışmalar ile uyum içersinde olduğunu vurgulamak gerekir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, üç boyutlu nonlineer elastisitenin denklemlerinden hareket ederek, asimptotik açılım tekniğinin kullanılmasıyla, von Kármán teorisinin büyük şekil değiştirme yapan plaklara genelleştirilmesi üzerinde durulmuştur. Esas olarak izotrop cisim hali gözönüne alınmış fakat şekil değiştirme enerjisinin şekil değiştirme tansörünün invaryantlarına bağlılığı üzerine hiçbir kısıtlama getirilmemiştir. Gerek maddesel koordinatlar ve yerdeğiştirme bileşenleri gerekse ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörünün bileşenleri, kalınlık parametresinin yardımıyla, von Kármán teorisinde olduğu gibi ölçeklenmiş ve bu ölçekleme temelinde inşa edilen asimptotik açılımın ilk iki mertebe denklemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Sonuçta sıfırıncı mertebe yerdeğiştirmelerin Love-Kirchhoff hipotezini sağladığı fakat sıfırıncı mertebeden gelen katkılar nedeniyle birinci mertebe yerdeğiştirmeler için aynı şeyi söylemenin mümkün olmadığı görülmüştür. Ayrıca ilk iki mertebe için uyumlu, yani sadece o mertebe ve daha küçük mertebedeki yerdeğiştirmeleri içeren, bünye denklemleri elde edilmiş ve bunun yanında denge denklemlerinin gerek yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden gerekse bir gerilme fonksiyonu kullanarak yazılışı üzerinde durulmuştur. Asimptotik açılım tekniğinin bir sonucu olarak sözkonusu denklemlerin sıfırıncı mertebe için nonlineer iken birinci mertebede lineer olduğuna işaret edilmiştir. Öte yandan ilk iki mertebe denklemlere giren katsayıların formu fiziksel nonlineerliğin birinci mertebede ortaya çıktığını göstermiştir. Yani ilk mertebede kendini gösteren geometrik nonlineerlik yanında fiziksel nonlineerlik, baştaki ölçeklemenin bir sonucu olarak, daha zayıf bir etki şeklindedir. Diğer bir sonuç ise, klasik teori ve sıfırıncı mertebe yaklaşımın tersine birinci mertebede toplam gerilmenin eğilme ve mambran gerilmelerinin bir kombinasyonu olarak yazılamamasıdır. Aynı sonucun sıkışmaz dairesel plakların büyük şekil değiştirmesini inceleyen [16]'da da belirtildiğini vurgulamak gerekir. Ayrıca genel olarak sıkışabilir cisimler için elde edilen sonuçların nasıl bir dönüşüm altında sıkışmaz cisimleri de kapsadığı gösterilmiştir. Cisimdeki gerçek gerilmeleri gösteren Cauchy gerilme tansörünün ilk iki mertebe için nasıl hesaplanacağı da belirtilmiştir.

Son bölümde, teorinin bir uygulaması olarak, üst yüzünden uniform çekmeye maruz sonsuz şerit problemi hem ankastre hem de basit mesnetli olması halleri için incelenmiştir. Birinci mertebe sınır koşullarını tam olarak sağlatmak mümkün olmadığı için sınır koşulları ya kalınlık boyunca ortalama yerdeğiştirmeler üzerine veya şerit orta düzlemindeki yerdeğiştirmeler üzerine yazılmıştır. Sonuçta bu iki tür sınır koşulunun basit mesnet halinde analitik olarak çakıştığı, ankastre mesnet halinde ise sayısal inceleme sonucunda ilgilenilen mertebedeki maksimum çökmeler için farkın ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu görülmüştür. Hem ankastre hem de basit mesnete ait çözümler analitik olarak elde edilmiş ve klasik teoride ihmal edilen enine kayma ve normal gerilmelerinin hesaba katılması nedeniyle birinci mertebe çözümde yükün çekme veya basınç olmasının maksimum çökmenin mutlak değerini etkilediği gözlenmiştir. Sayısal inceleme sırasında, bu etkinin mertebesinin kalınlık parametresi ve yükün büyüklüğüne bağlı olduğu vurgulanmıştır.

Geometrik ve fiziksel nonlineerliğin çeşitli açılardan bir karşılaştırmasını yapmak için, bulunan analitik çözümlerden değişik kalınlık parametreleri ve yükler için Ko ve Mooney-Rivlin cisimlerine ait katsayıları kullanarak sayısal değerler bulunmuştur. Ko, Mooney-Rivlin ve Neo-Hookyen cisimler için çizilen yük-maksimum çökme eğrileri fiziksel nonlineerliğin kabaca şeritin yarı genişliğinin % 20'sinden daha büyük olan çökmelerde önem kazandığını ortaya koymaktadır. Kalınlığa oranla çok büyük olan bu çökmeler için, eksen boyunca çizilen eksenel kuvvet ve eğilme momenti eğrileri kenarlar hariç heryerde mambran etkisinin belirleyici olduğunu göstermektedir. Bu mambran gibi davranış nedeniyle çökmeler sınır şartlarından çok az etkilenmekte ve bunun sonucu ankastre ve basit mesnetli haller için cok yakın değerler bulunmaktadır. Ayrıca çökmeler arttıkça sınırdaki bölgenin giderek küçüldüğü gözlenmektedir.

Öte yandan, bulunan çözümlerin gerçek sınır değer problemine bir dış çözüm olarak düşünülmesi ve dolayısıyla bu çözümlerin bir sınır tabaka çözümü ile tamamlanması gerektiği açıktır. Bu açıdan elde edilen sonuçları problemin tam sayısal sonuçları olarak değil de problemin genel karakteristiklerini ve eğilimlerini ortaya çıkaran bir çözüm olarak düşünmek gerekir. Sözü edilen bakışla şimdiki sonuçların benzer çalışmalar ile tam bir uyum içersinde olduğu görülür.

Son olarak, bundan sonraki çalışmaların, elde edilen sonuçların ışığında, ilk mertebe yaklaşımda fiziksel nonlineerliği içeren bir asimptotik teoriye yönelmesi gerektiği söylenebilir. Doğal olarak bu durumda burada yapılandan daha değişik bir ölçekleme kabul edilmesi gerekeceği açıktır. Bu tür bir ölçekleme sırasında, örnek probleme ait sayısal incelemeden de görüldüğü gibi, fiziksel nonlineerliğin etkili olduğu bölgedeki çökmeleri plak yarı genişliği mertebesinde kabul etmek daha uygun bir yaklaşım olur.

KAYNAKLAR

[1] GUSEIN-ZADE, M.I., Asymptotic Analysis of Three-Dimensional Dynamic Equations of a Thin Plate, P.M.M., 38, 1072-1078 (1974).

[2] NIORDSON, F.I., An Asymptotic Theory for Vibrating Plates, Int. J. Solids Structures, 15, 167-181 (1979).

[3] CIARLET, P.G. ve P. DESTUYNDER, A Justification of the Two-Dimensional Linear Plate Model, J. de Mécanique, 18, 315-344 (1979).

[4] SAYIR, M. ve C. MITROPOULOS, On Elementary Theories of Linear Elastic Beams, Plates and Shells, Z. angew. Math. Phys., 31, 1-55 (1980).

[5] NAGHDI, P.M., The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik, VIa/2, 425-640, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[6] von KÁRMÁN, Th., Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, IV/4, 311-385, Druck und Verlag von B.G.Teubner, Leipzig (1910).

[7] KOPPE, E., Methoden der nichtlinearen Elastizitätstheorie mit Anwendung auf die dünne Platte endlicher Durchbiegung, Z. angew. Math. Mech., 36, 455-462 (1956).

[8] EBCİOĞLU, İ.K. ve L.M.HABİP, Moderately Large Deflection of Transversely Isotropic Plate, Proceedings of the Ninth Midwestern Mechanics Conference, University of Wisconsin, 437-442 (1965).

[9] HABİP, L.M., Moderately Large Deflection of Asymmetrically Layered Elastic Plate, Int. J.Solids Structures, 3, 207-215 (1967).

[10] WESTBROOK, D.R., Small Strain Non-Linear Dynamics of Plates, J. Sound Vib., 44, 75-82 (1976).

[11] CIARLET, P.G., A Justification of the von Kármán Equations, Arch. Rational Mech. Anal., 73, 349-389 (1980).

[12] BLANCHARD, D. ve P.G.CIARLET, A Remark on the von Kármán Equations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., 37, 79-92 (1983).

[13] ŞUHUBİ, E.S., An Asymptotic Nonlinear Theory of Thin Elastic Plates, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 35, 217-233 (1982).

[14] ŞUHUBİ, E.S., An Asymptotic Nonlinear Theory of Anisotropic Thin Elastic Plates, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 36, 231-242 (1983).

[15] ERBAY, H.A. ve E.S.ŞUHUBİ, A General Asymptotic Approximation to the Nonlinear Theory of Thin Elastic Plates, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 38, 247-272 (1985).

[16] TABER, L.A., A Variational Principle for Large Axisymmetric Strain of Incompressible Circular Plates, Int. J. Non-Linear Mechanics, 21, 327-337 (1986).

[17] TABER, L.A., Asymptotic Expansions For Large Elastic Strain of a Circular Plate, Int. J. Solids Structures, 23, 719-731 (1987).

[18] ABÉ, H. ve M.UTSUI, On the Large Axisymmetrical Deflection of Thin Plates Made of the Mooney-Rivlin Material, ASME J. Appl. Mech., 41, 725-730 (1974).

[19] SUGIMOTO, N., Nonlinear Theory for Flexural Motions of Thin Elastic Plate, ASME J. Appl. Mech., 48, 377-382 (1981).

[20] JOHNSON, M.W. ve T.J.URBANIK, A Nonlinear Theory for Elastic Plates With Application to Characterizing Paper Properties, ASME J. Appl. Mech. 51, 146-152 (1984).

[21] JOHNSON, M.W., On the Foundations of the Nonlinear Theory of the Cylindrical Deformation of Thin Elastic Plates, Int. J. Solids Structures, 21, 11-20 (1985).

[22] TIMOSHENKO, S. ve S.WOINOWSKY-KRIEGER, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, (1959).

[23] ERINGEN, A.C., Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, (1962).

[24] GREEN, A.E. ve W.ZERNA, Theoretical Elasticity, Oxford University Press, New York, (1954).

[25] FUNG, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, (1965).

[26] KO, W.L., Application of Finite Elasticity Theory to the Behaviour of Rubber-Like Materials, Ph.D.Thesis, California Institute of Technology, (1963).

[27] MURNAGHAN, F.D., Finite Deformations of an Elastic Solid, Amer. J. Math., 59, 235-260 (1937).

[28] WITTRICK, W.H., Analytical, Three-Dimensional Elasticity Solutions to Some Plate Problems, and Some Observations on Mindlin's Plate Theory, Int. J. Solids Structures, 23, 441-464 (1987).

[29] TABER, L.A., On Boundary Layers in a Pressurized Mooney Cylinder, ASME J. Appl. Mech., 109, 280-286 (1987).

ÖZGEÇMİŞ

Hüsnü Ata ERBAY, 1956 yılında İzmir'de doğmuş ve lise öğrenimini Mudanya Lisesi'nde yapmıştır. 1974 yılında İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi'ne girmiş ve 1980 Şubat döneminde Matematik Mühendisi olarak mezun olmuştur. Eylül 1980'de aynı fakültenin Mekanik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başlamış ve Ocak 1981'de yine aynı yerde teknisyen kadrosuna atanmıştır. Haziran 1982'de mezun olmuş ve Eylül 1982 den itibaren TÜBİTAK Marmara Araştırma Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bölümü'nde Araştırma Asistanı olarak görev almıştır. Eylül 1984'de doktora öğrenimine başlamış olup halen TÜBİTAK Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bölümü'nde Araştırma Asistanı olarak çalışmasına devam etmektedir.