

MİKROPOLAR ORTAMLARDA NONLİNEER DALGA YAYILMASI

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

DOKTORA TEZİ

Y.Müh. Saadet ERBAY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Nisan 1988

Tezin Savunulduğu Tarih : 20 Haziran 1988

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Erdoğan S. ŞUHUBİ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Avadis HACINLIYAN

Prof.Dr. Yavuz NUTKU

ÖNSÖZ

Gerek bu çalışma süresinde, gerek doktora çalışması öncesi dönemde hocam Sayın Prof.Dr.Erdoğan Şuhubi'nin üzerimdeki emeklerinin büyük olduğunu söylemek isterim. Çalışma süresince gösterdiği yakın ilgi ve yardımlarından dolayı kendilerine teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca kendileriyle yaptığım yararlı tartışmalar için Prof.Dr. Metin Gürses, Doç.Dr.Mevlut Teymur ve Hüsnü Ata Erbay'a teşekkür ederim.

Tezi büyük bir titizlikle ve sabırla yazan Sayın Şehnaz Madenci'ye de teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER	3
2.1. Giriş	3
2.2. Hareket	4
2.3. Bünye Denklemleri	7
BÖLÜM 3. İNDİRGEYİCİ (REDÜKTİF) PERTÜRBASYON YÖNTEMİ.....	16
3.1. Giriş	16
3.2. İndirgeyici (Redüktif) Pertürbasyon Yöntemi	17
BÖLÜM 4. MİKROPOLAR ORTAMLARDA BİR BOYUTLU DALGALAR.....	21
4.1. Giriş	21
4.2. Polar Ortamlarda Düzlem Dalgalar ve Lineer Dispersiyon Bağıntısı	21
4.3. Zayıf Dispersif Dalgalar	30
4.4. Özel Hal: Kuadratik Katı	87
4.5. KMKdV Denkleminin Soliter Dalga Çözümleri	89
BÖLÜM 5. KMKdV DENKLEMİNİN İNTEGRE EDİLEBİLİRLİĞİ.....	99
5.1. Giriş	99
5.2. Tekil Nokta Analizi	101
5.3. KMKdV Denkleminin Tekil Nokta Analizi	104
5.4. KMKdV Denkleminin Tekil Manifold Analizi	107
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	111
KAYNAKLAR.....	113
ÖZGEÇMİŞ.....	117

ÖZET

Bu çalışmada, nonlinear mikropolar ortamlarda bir boyutlu dalga yayılması problemi asimptotik olarak incelenmiş, asimptotik analiz sonucunda elde edilen Kompleks Modifiye Korteweg-de Vries denkleminin integre edilebilirliği tartışılmıştır.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde nonlinear dalga denklemleri kısaca gözden geçirilmiş, nonlinear dalga hareketleri sınıflandırılmıştır. Hiperbolik ve dispersif olarak sınıflanan denklemlerin çözüm yöntemleri anlatılmıştır.

İkinci bölüm, nonlinear mikropolar katıya ait alan ve bünye denklemlerinin özetlenmesine ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde nonlinear alan denklemlerini incelemek için seçilen İndirgeyici (Redüktif) Pertürbasyon Yöntemi tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde bir boyutlu alan denklemleri İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi ile incelenmiş, denklemlerin uzak alan davranışını karakterize eden kuple nonlinear evrim denklemleri elde edilmiş, katının izotrop olması durumunda evrim denklemlerinin Kuple Modifiye Korteweg-de Vries denklemlerine indirgendiği gözlenmiştir. Bu duruma ait soliter dalga çözümleri aranmış ve özel durumlar tartışılmıştır.

Beşinci bölümde KMKdV denkleminin integre edilebilirliği tartışılmış, bu anlamda Painlevé analizi yapılmıştır.

NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN MICROPOLAR MEDIA

SUMMARY

In this work, the plane wave propagation in nonlinear micropolar solids is considered. The reductive perturbation method is used to examine the plane wave propagation in weakly nonlinear dispersive media.

The theory of microelastic solids is developed by Eringen and Suhubi [2],[3]. Such solids are affected by the local deformations, not encountered in the classical elasticity, of the material particles in a volume element. The aim of the theory is to enlarge the limits of classical continuum theory so that it can explain the mechanical properties in a volume element ΔV smaller than some critical volume element ΔV^* . It is assumed that a material point in a microelastic solid has six degrees of freedom, three of them related to micro rotations and the other three related to an affine deformation. Micropolar solids which constitute a subclass of microelastic solids are named as couple stress theory in the works mentioned above. Later Eringen recapitulated and renamed it micropolar theory [5]. A material particle in a micropolar elastic medium has only three degrees of freedom associated with micro rotations. General nonlinear theory of micropolar media is given by Kafadar and Eringen [6]. Throughout this work field equations given in [6] are used.

In material coordinates, equations of motion in the absence of body forces and body couples may be written as

$$T_{Kk,K} = \rho_0 \dot{v}_k$$

$$M_{Kk,K} + \epsilon_{kmn} x_{m,K} T_{Kn} = \rho_0 \dot{\sigma}_k$$

where T_{Kk} is the first Piola-Kirchhoff stress tensor, ρ_0 is the mass density associated with undeformed state, v_k is the velocity, M_{Kk} is the material couple stress tensor, $\rho_0 \dot{\sigma}_k$ is the spin density. Stress and couple stress tensors in material coordinates are defined as

$$T_{Kk} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}}, \quad M_{Kk} = \Lambda_{mk}^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{m,K}}$$

where Λ_{mk}^{-1} is given as

$$\Lambda_{mk}^{-1} = -\frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \delta_{mk} + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}\right) \frac{\varphi_m \varphi_k}{\theta^2} + \frac{1}{2} \epsilon_{mkn} \varphi_n, \quad \theta = (\varphi_m \varphi_m)^{1/2}$$

and Σ is free energy density per unit mass in reference configuration.

Finally, field equations for a general nonlinear anisotropic polar medium may be written as

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \rho_0 \ddot{x}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{k,K}} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} = \lambda_{k\ell}(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi}_\ell + \gamma_{k\ell}(\varphi) \ddot{\varphi}_\ell$$

where $\lambda_{k\ell}$ and $\gamma_{k\ell}$ are defined as

$$\lambda_{k\ell} = \rho_0 J_{KL} \Lambda_{rk} (\dot{\chi}_{rK} \chi_{mL} \Lambda_{m\ell} + \chi_{rK} \dot{\chi}_{mL} \Lambda_{m\ell} + \chi_{rK} \chi_{mL} \dot{\Lambda}_{m\ell})$$

$$\gamma_{k\ell} = \rho_0 J_{KL} \Lambda_{rk} \chi_{rK} \chi_{mL} \Lambda_{m\ell}$$

for microanisotropic materials, and

$$\lambda_{k\ell} = \rho_0 J \Lambda_{mk} \dot{\Lambda}_{m\ell}, \quad \gamma_{k\ell} = \rho_0 J \Lambda_{mk} \Lambda_{m\ell}$$

for microisotropic materials. Here $\Lambda_{k\ell}$ is given as

$$\Lambda_{k\ell} = \frac{\sin \theta}{\theta} \delta_{k\ell} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \frac{\varphi_k \varphi_\ell}{\theta^2} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) \epsilon_{k\ell m} \varphi_m$$

In the present study, the plane wave motion in a homogeneous, macro- and microisotropic micropolar solid is investigated. This motion may be described as

$$x_k(X, t) = X_K \delta_{Kk} + u_k(X, t)$$

where X is a coordinate along the direction of propagation. In the reference state equations of motion may be written as

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_\ell} \frac{\partial p_\ell}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \varphi_\ell} \varphi_\ell + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \psi_\ell} \frac{\partial \psi_\ell}{\partial X} - \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial X} - \frac{\partial p_k}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial p_\ell} \frac{\partial p_\ell}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial \varphi_\ell} \phi_\ell + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial X} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} - \lambda_{k\ell}(\varphi, w) w_\ell - \gamma_{k\ell}(\varphi) \frac{\partial w_\ell}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial X} - \frac{\partial \phi_k}{\partial t} = 0$$

$$w_k - \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = 0$$

where v_k , p_k , w_k and ϕ_k are defined by relations

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = v_k, \quad \frac{\partial u_k}{\partial X} = p_k, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = w_k, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial X} = \phi_k.$$

In the region where the long acoustical waves propagate the dispersion relation has the form

$$\omega = ak + bk^3 + \dots, \quad k \rightarrow 0$$

and the phasor of waves is

$$kX - \omega t = k(X - at) - bk^3 t + O(k^5)$$

where a and b are constants, the relevant Gardner-Morikawa coordinate stretching is taken as

$$\xi = \epsilon^{1/2} (X - at), \quad \tau = \epsilon^{3/2} t$$

where ϵ is a small parameter measuring the weakness of dispersion, i.e. $\epsilon = O(k^2)$. In order to balance the dispersive effects with nonlinear effects, we expand the dependent variables about the undeformed uniform state as a power series of the same parameter ϵ :

$$(p_k, v_k, \varphi_k, \phi_k, w_k) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_k^{(n)}, v_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}, \phi_k^{(n)}, w_k^{(n)}) (\epsilon^{1/2})^n$$

After using the suitable coordinate stretching and expanding dependent variables in half powers of ϵ , it is arrived at sets of equation for each power in $\epsilon^{1/2}$. Eliminating the higher order terms in these equations, it is finally found the following third order coupled nonlinear dispersive equations

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_1 p_3 \frac{\partial p_3}{\partial \xi} + \alpha_2 p_2 \frac{\partial p_3}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\beta_1 p_2^3 + \beta_2 p_2^2 p_3 + \beta_3 p_2 p_3^2 + \beta_4 \beta_3^3) = 0$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_2 p_2 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \alpha_1 p_3 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\beta}_1 p_3^3 + \tilde{\beta}_2 p_3^2 p_2 + \tilde{\beta}_3 p_3 p_2^2 + \tilde{\beta}_4 p_3^3) = 0$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \tilde{\beta}_4$ are material constants containing derivatives of free energy function with respect to p_k, φ_k, ϕ_k . Because of the isotropy of the medium there exist some restrictions on the admissible forms of Σ , direct approach in employing isotropy of the medium is to assume that Σ is a function of all invariants of its arguments under the orthogonal group and calculate all the relevant derivatives thereafter to obtain coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \tilde{\beta}_4$. However since this way is quite tedious and provides in the meantime several information which we do not need in the analysis we have adopted instead an indirect approach exploiting the effect of isotropy on the field equations proper. If the solid is isotropic, the equations satisfied by the pair (p_2, p_3) must be the same equations satisfied by the pair (p_2', p_3') which can be obtained by rotating plane coordinates with an arbitrary angle α . In this way we obtain that for an isotropic solid we should have

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_3 = \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_3, \quad \beta_2 = \beta_4 = -\tilde{\beta}_2 = -\tilde{\beta}_4.$$

Nonlinear evolution equations may then be written as

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [\beta_1 (p_2^3 + p_2 p_3^2) + \beta_2 (p_2^2 p_3 + p_3^3)] = 0$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [\beta_1 (p_3^3 + p_3 p_2^2) - \beta_2 (p_3^2 p_2 + p_2^3)] = 0.$$

These equations are of appropriate invariant form under the proper orthogonal group. Therefore they are valid for hemitropic solids. For isotropic solids the invariance is under the full orthogonal group, that is, reflections are allowed. Hence if the pairs $(p_2, -p_3)$

and $(-p_2, p_3)$ both satisfy the evolution equations, it is easily seen that the coefficient β_2 should vanish. Thus for a general isotropic solid, evolution equations take the following form

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_2^3) + \beta \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_2 p_3^2) = 0$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_3^3) + \beta \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_3 p_2^2) = 0.$$

These equations are called as Coupled Modified Korteweg de-Vries equations. If a complex function w is defined as $w = p_2 + ip_3$ where p_2 and p_3 are real, the equations may be written as a single one

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (|w|^2 w) + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0.$$

It can be named as Complex Modified Korteweg-de Vries (CMKdV) Equation.

In order to find a solitary wave solution to CMKdV equation we try the form $w = |w| \exp(i\theta)$ ($\theta = \text{constant}$). Assuming w and its derivatives tend to zero for $\xi \rightarrow \infty$, $|w|$ is found as

$$|w| = a \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau \right) + \delta \right]$$

where a and δ are defined as

$$a^2 = \frac{2c}{\alpha}, \quad \delta = \left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \kappa.$$

For p_2 and p_3 , expressions written below are valid

$$p_2 = a \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau \right) + \delta \right] \cos \theta$$

$$p_3 = a \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau \right) + \delta \right] \sin \theta.$$

They are reminiscent of plane polarized waves in finite elasticity [2]. If $|w|$, amplitude of wave is taken as a constant value, then the phase function $\theta(\xi, \tau)$ will become

$$\theta(\xi, \tau) = B_0 [\xi - (\alpha A_0^2 - \beta B_0^2) \tau]$$

where $A_0 = |w|$ and B_0 are constants. In this case p_2 and p_3 are

$$p_2 = A_0 \cos [B_0 (\xi - (\alpha A_0^2 - \beta B_0^2) \tau)]$$

$$p_3 = B_0 \sin [B_0 (\xi - (\alpha A_0^2 - \beta B_0^2) \tau)]$$

Similar to the case mentioned above, they are reminiscent of the circularly polarized waves in finite elasticity [2]. For quadratic solids, second order longitudinal displacement gradient $p^{(2)}$ is equal to $\bar{\gamma} (p_2^{(1)2} + p_3^{(1)2})$ and has a solitary wave solution: 1

$$p_1^{(2)} = \frac{1}{\bar{\gamma}} a^2 \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau \right) + \delta \right].$$

At the end of these calculations, it is observed that first order components $p_1^{(1)}$ and $\varphi_1^{(1)}$ are equal to zero, and first order shear components $(p_2^{(1)}, p_3^{(1)})$ and $(\varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)})$ satisfy coupled Nonlinear Evolution equations (coupled MKdV Equations). These couples have both solitary wave solutions which are similar to plane polarized waves of classical finite elasticity. If a solid is taken as a quadratic one, the second order longitudinal displacement gradient $p_1^{(2)}$ has also solitary wave solution.

In the last section integrability of CMKdV equation is discussed. Related to the integrability of nonlinear partial differential equations (NPDE) Painlevé Property is defined. Painlevé property is discussed for both NPDEs and Nonlinear Ordinary Differential Equations (NODD). In order to verify whether CMKdV equation is integrable, Painlevé analyses are carried out for both situations. In both analyses, CMKdV fails to pass the Painlevé test. This result conforms with Carney, Sen and Chu's observations [29]. They obtained CMKdV while they were studying electrostatic waves in a magnetized plasma. They observed that there were only four constants of motion. This situation is in contrast to equations soluble by the inverse scattering method which have an infinite number of constants of motion.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Dalga yayılması olaylarının incelenmesi ondokuzuncu yüzyılın ortalarında başlamış ve günümüzde de ilgi çeken araştırma konularından birisi olmuştur. Bunun nedeni fiziksel olayların çok önemli bir kısmının dalga tabiatında olmasıdır. Dalga yayılması olaylarına günlük hayatımızdan da çeşitli örnekler verilebilir; su yüzeylerinde çeşitli nedenlerle oluşan hareketler, ses ve ışığın yayılması v.s. Dalga yayılması olaylarının karakterini anlamak ve bunlar için geliştirilen modelleri çözmek için değişik ve zengin matematik teknikler geliştirilmiştir.

Ortamin bir yerinden başka bir yerine belli bir yayılma hızıyla iletilen sinyal olarak tanımlanan dalga hareketleri hiperbolik ve dispersif olarak iki ana sınıfa ayrılabilir (Whitham [1]) Kısmî türevli hiperbolik denklemlerle modellenen dalga olaylarına hiperbolikler denir. Dispersif denklemler hiperbolik denklemler gibi kolaylıkla sınıflandırılmaz. Genel olarak denklemin dispersif olup olmadığı, lineerleştirilmiş denklemin harmonik dalga çözümleri incelenerek yani açısal frekansla dalga sayısı arasında bir ilişki olan dispersiyon bağıntısına bakılarak karar verilir. Dispersiyon bağıntısı ω açısal frekansı, k dalga sayısını göstermek üzere $\omega = \omega(k)$ formundadır. Eğer dalga hareketinin $c = \frac{\omega}{k}$ olarak tanımlanan faz hızı dalga sayısına bağlı ise dalga dispersiftir denir. Dispersif dalgaların sınıflanması, hiperbolik dalgalarda olduğu gibi denklemlere değil, çözümlere bakılarak yapılır.

Hiperbolik dalga denklemlerini inceleme yöntemleri dispersif olanlara göre daha gelişmiştir. Hiperbolik dalga yayılmasını incelemek için karakteristikler, basit dalga çözümü, hodograf transformasyonu ve tekil yüzeylerin (şok ve ivme cephelerinin) yayılması yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi uygulanarak dalga olayının belli başlangıç koşulları altında ne şekilde gelişeceği

hakkında bilgiler elde etmek mümkündür. Dispersif dalgalar için, hiperbolik denklemlerde olduğu gibi gelişmiş ve genel yöntemler yoktur. Bazı dispersif sistemleri bağımlı değişken dönüşümü veya Bäcklund dönüşümleri yardımı ile çözmek mümkün ise de bütün dispersif denklemlere uygulanamadıkları için genel yöntem olma özelliğini yitirirler. Üstelik çoğu zaman Bäcklund dönüşümlerini bulmak denklemin kendisini çözmek kadar zor olabilir.

Nonlinear sürekli ortamlarda çeşitli dalga yayılması problemleri çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiştir. Hiperbolik karakterde olan denklemleri incelemek için basit dalga çözümü teorisi, tekil yüzeyler teorisi problemdeki bağımsız değişkenlerin sayısına göre etkin olarak kullanılabilen yöntemlerdir. Elastik katılarda basit dalga çözümleri ve tekil yüzeylerin yayılmaları üzerine geniş bilgi Eringen ve Şuhubi'de [2] bulunabilir. Yukarıda da bahsedildiği gibi dispersif sistemleri incelemek için genel yöntemler yoktur. Bununla birlikte dispersif sistemleri de asimptotik olarak incelemek için çeşitli pertürbasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde amaç, genel denklem sistemini incelemek yerine onun belli asimptotik davranışını karakterize eden bir veya birkaç denklem elde etmektir. Doğal olarak nonlinear kısmî türevli skaler bir denklemle uğraşmak nonlinear kısmî diferansiyel denklem (NKDD) sisteminin kendisiyle uğraşmaktan daha kolaydır. Buna karşı ödenen bedel ise skaler denklemin, NKDD sistemin ancak belli bir asimptotik davranışını karakterize etmesidir. Nonlinear dalga yayılması üzerine gerek sürekli ortamlarda gerek diğer fizik dallarında bu kadar çok çalışılmasının bir nedeni de NKDD'lerin özellikle dalga denklemlerinin çözümü için önerilen Ters Saçılma yöntemi ve yöntemle birlikte ona bağlı olarak ortaya çıkan solitonlar, sonsuz korunum yasaları, Bäcklund dönüşümleri, Hamiltonyen yapıları, psödopotansiyeller, uzatılmış yapılar, benzerlik dönüşümleri, integrale edilebilirlik ve Painlevé özellikleri arasındaki bağıntılar v.b. gibi konuların matematiksel fizikte Nonlinear Olaylar başlıklı çok geniş ve popüler bir çalışma alanı içinde olmasıdır.

Bu çalışmanın amacı nonlinear mikropolar ortamlarda bir boyutlu dalga yayılması problemini asimptotik olarak incelemek ve asimptotik analiz sonucunda elde edilecek skaler NKDD'in bazı yapısal özelliklerini araştırmaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER

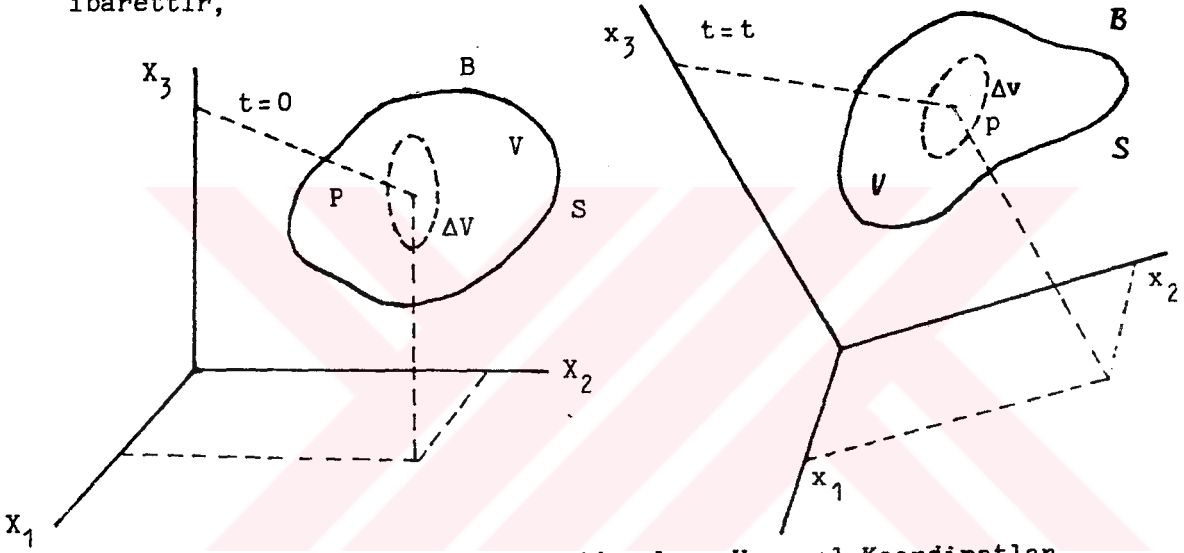
2.1. GİRİŞ

Mikroelastik katılar, maddesel noktalarının yerel deformasyonlarından etkilenen malzemelerdir. Polar teorilerin geliştirilmesindeki amaç klasik elastisite limitlerini genişletmektir. Klasik sürekli ortam teorisi sonsuz küçük dv hacim elemanında ρ sürekli kütle yoğunluğu olduğunu varsayar. Malzemenin moleküler yapısı düşünüldüğünde bu varsayımın ancak ideal bir durumu yansıttığı söylenebilir. Maddenin ayırık yapısı ΔV hacminin bir ΔV^* hacminden küçük olması durumunda bu varsayımın doğru olmayacağını açıkça gösterir. Klasik sürekli ortam teorisinin sınırını genişletmek için kritik ΔV^* hacminden küçük hacimdeki fiziksel olaylar açıklanmalıdır. Bu nedenle dv hacminin her noktasında sürekli kütle yoğunluğu olduğu varsayılır ve makro kütle elemanı dM 'nin dv hacmi içindeki bütün kütlelerin ortalaması olduğu kabul edilir. Böyle bir teoriye ihtiyaç duyulmasının bir başka nedeni de malzemenin dış kuvvetlere karşı tepkisi araştırıldığında, eğer karakteristik bir uzunluk malzeme molekülünün boyutlarıyla karşılaştırılabilir büyüklükte ise moleküller arası etkileşmenin önemli olmaya başlamasıdır. Bu durumda moleküler taneciklerin etkileşmeleri de hesaba katılmalıdır. Gözönüne alınan dv hacmindeki her noktanın 9 afin deformasyonundan oluşan 12 serbestlik derecesine sahip bir sürekli ortam kabulü ile mikroelastik malzemenin bünye teorisi Eringen ve Şuhubi [3], [4] tarafından elde edilmiştir. Eğer mikroyapının sadece rijit dönmeler yaptığı kabul edilirse mikroelastik malzemelerin bir alt sınıfını elde etmek mümkündür. Şuhubi ve Eringen [4] buna ilişkin çalışmalarını "couple stress theory" başlığı ile isimlendirmişlerdir. Daha sonra Eringen bu çalışmalardan hareketle mikrodüzeyde yalnızca rijit dönmeler yapan malzemeler için lineer bünye denklemlerini elde etmiş ve bunları mikropolar ortamlar olarak adlandırmıştır [5]. Daha sonra mikropolar ortamların nonlinear bünye teorisi Kafadar ve Eringen [6] tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada mikropolar

ortamları modelleyen alan denklemleri olarak [6] sayılı kaynakta verilenler kullanılacaktır. İlgilenilen problem kartezyen koordinatları gerektirdiğinden, polar ortama ait alan denklemleri kartezyen koordinatlarda elde edilmiştir.

2.2. HAREKET

Sürekli ortam $t=0$ anında uzayın V hacimli, S yüzeyli bir B bölgesini işgal eder. Bölgedeki bir P noktası $X_K (K=1,2,3)$ koordinatları ile bellidir. Cismin hareketi B bölgesindeki maddesel P noktasının koordinatları $x_k (k=1,2,3)$ olan p noktasına dönüşümünden ibarettir,



Şekil 2.2.1. Maddesel ve Uzaysal Koordinatlar

$$x_k = x_k(X_K, t) \quad \forall x \in B \text{ için.} \quad (2.2.1)$$

Dönüşümün birebir ve tersinin var olması için hareketin jakobyeninin pozitif olması gerekir,

$$j = \det \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_K} \right) > 0 \quad \forall t, X \in B \text{ için.}$$

Mikropolar malzemelerde ortamın makro hareketi (2.2.1) ile bellidir. Maddesel ve uzaysal koordinat takımlarında vektör ve tansör bileşenlerini göstermek için sırasıyla büyük ve küçük harf indisleri, kısmî türev için virgöl ve maddesel zaman türevi için bir üst nokta kullanılacaktır. Çalışmada kartezyen koordinatlar kullanılacağından tansörlerin kovaryant ve kontravaryant bileşenleri arasında fark

olmayacak, yalnız alt indisler kullanılacaktır. Tekrarlanan indisler üzerinde aksi belirtilmedikçe toplama olduğu kabul edilecektir. Maddesel ve uzaysal koordinatlarda birim vektörleri sırasıyla I_K ve i_k ($K, k=1,2,3$) ile gösterilmiştir. Maddesel I_K birim vektörleri ile uzaysal i_k vektörlerinin skaler çarpımları

$$g_{kK} = i_k \cdot I_K \quad (2.2.2)$$

şeklinde tanımlanırsa, burada görülen g_{kK} büyüklüğü kaydırıcı olarak adlandırılır. Maddesel ve uzaysal koordinatlar özdeş veya birbirlerine paralel ise kaydırıcılar Kronecker deltası olurlar. Bütün çalışma boyunca maddesel ve uzaysal koordinatlar paralel seçilmiştir. Bunun sonucunda kaydırıcılar Kronecker deltası gibi davranmış ve gereksiz terimlerin tutulmasından kaçınılmıştır. Mikropolar malzemelerde rijit bir cisim gibi kabul edilen noktaların dönmesi ise

$$x_{kl} = x_{kl}(X_K, t), \quad x_{km} x_{lm} = \delta_{kl}, \quad \det \chi = 1 \quad (2.2.3)$$

proper ortogonal tansörü ile verilir. Böylece malzemenin mikro hareketi de (2.2.3) ile tanımlanmış olur. χ proper ortogonal tansörü, φ_{kl} antisimetrik bir tansör olmak üzere

$$x_{kl} = e^{\varphi_{kl}}, \quad \varphi_{kl} = -\varepsilon_{klm} \varphi_m$$

veya

$$x_{kl} = \cos \theta \delta_{kl} + (1 - \cos \theta) \frac{\varphi_k \varphi_l}{\theta^2} - \sin \theta \varepsilon_{klm} \frac{\varphi_m}{\theta} \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılabilir [6]. Burada $\theta, \theta = (\varphi_m \varphi_m)^{1/2} \geq 0$ olarak tanımlanmıştır ve φ malzemenin mikrodönmesini gösteren dönme vektörüdür. χ dönmesine bağlı olarak tanımlanan açısal hız (jirasyon tansörü),

$$v_{kl} = x_{lK} \frac{d}{dt} (x_{kK}) = -v_{lk} \quad (2.2.5)$$

ikinci mertebe antisimetrik bir tansördür. Buna ilişkin açısal hız vektörü ise

$$v_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{klm} v_{lm} \quad , \quad v_{kl} = -\epsilon_{klm} v_m \quad (2.2.6)$$

ile ifade edilebilir. (2.2.4-5) bağıntıları (2.2.6)₁ de kullanılırsa v vektörü

$$v_k = \dot{\theta} \frac{\varphi_k}{\theta} + \sin \theta \left(\frac{\varphi_k}{\theta} \right)' + (1 - \cos \theta) \epsilon_{klm} \frac{\varphi_l}{\theta} \left(\frac{\varphi_m}{\theta} \right)' \quad (2.2.7)$$

olarak bulunur. Burada terimlerin üzerine konan nokta maddesel türetme işlemini göstermektedir (2.2.7) bağıntısı kendi içinde düzenlenerek, Λ tansörü

$$\Lambda_{kl} = \frac{\sin \theta}{\theta} \delta_{kl} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \frac{\varphi_k \varphi_l}{\theta^2} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) \epsilon_{klm} \varphi_m \quad (2.2.8)$$

olmak üzere

$$v_k = \Lambda_{kl} \dot{\varphi}_l \quad (2.2.9)$$

formunda yazılabilir. Polar cismin herhangi bir maddesel noktasının rijit cisim gibi davrandığı kabul edildiğinden rijit cisimde olduğu gibi her maddesel noktaya klasik kütle yoğunluğu ρ ve pozitif simetrik tansör yoğunluğu I bağlanabilir. I 'ya maddesel Euler tansör yoğunluğu denir. Rijit cisimde olduğu gibi eylemsizlik yoğunluğu maddesel tansörü

$$J_{KL} = I_{MM} G_{KL} - I_{KL}$$

ile tanımlanır. I 'nin uzaysal formu

$$i_{kl} = X_{kK} X_{lL} I_{KL}$$

ile verilir. J 'nin uzaysal formu ise

$$j_{kl} = i_{mm} \delta_{kl} - i_{kl}$$

dir. χ ortogonal bir tansör olduğundan

$$j_{kl} = X_{kK} X_{lL} J_{KL} \quad (2.2.10)$$

eşitliği geçerlidir. Klasik ortamlara benzeterek polar ortamlarda momentum, momentumun momenti kavramlarını genelleştirmek mümkündür. Polar ortamın momentum yoğunluğu, \mathbf{v} hız vektörü olmak üzere $\rho \mathbf{v}$ dir. Momentum yoğunluğunun momenti ise $\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\sigma}$ dir. \mathbf{r} ilgilenilen noktanın uzaysal konum vektörüdür. $\boldsymbol{\sigma}$ ise

$$\sigma_k = j_{kl} v_l \quad (2.2.11)$$

olarak tanımlanır. $\rho \boldsymbol{\sigma}$ ya spin yoğunluğu denir ve maddesel noktaya ait dönmeye ileri gelen momentum yoğunluğunun momentidir.

2.3. BÜNYE DENKLEMLERİ

Mikropolar sürekli ortamın yerel alan denklemlerinin uzaysal formu [6]

$$t_{kl,k} + \rho f_l = \rho \dot{v}_l \quad (\text{Momentumun korunumu}) \quad (2.3.1)$$

$$m_{kl,k} + \epsilon_{lmn} t_{mn} + \rho \dot{\ell}_l = \rho \dot{\sigma}_l \quad (\text{Momentum momentinin korunumu}) \quad (2.3.2)$$

$$\rho \dot{\epsilon} = t_{kl} (v_{l,k} + v_{kl}) + m_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h \quad (\text{Enerji korunumu}) \quad (2.3.3)$$

$$\rho \dot{\eta} + \left(\frac{q_k}{T} \right)_{,k} - \frac{\rho h}{T} \geq 0 \quad (\text{Entropi eşitsizliği}) \quad (2.3.4)$$

şeklinindedir. Burada t_{kl} simetrik olmayan gerilme tansörü, f_l kütle kuvveti yoğunluğu, v_l hız, m_{kl} gerilme çifti tansörü, ℓ_l kütle kuvveti çifti yoğunluğu, $\rho \dot{\sigma}_l$ spin yoğunluğu hızı, $v_{l,k}$ hız gradyanı, v_{kl} açısal hız tansörü, $v_{l,k}$ açısal hız tansörüne ait dönme vektörü gradyanı, q_k ısı akısı vektörü, h ortamda birim zamanda birim kütle başına ısı üretimini, η entropi yoğunluğunu ve T mutlak sıcaklığı göstermektedir.

Mikropolar bir ortama ait serbest enerji, entropi, gerilme tansörü, gerilme çifti tansörü ve ısı vektörü gibi bağımlı büyüklükler bağımsız değişkenlere genel olarak

$$\Phi = \Phi(x_{k,K}, \varphi_k, \varphi_{k,K}, T) \quad (2.3.5)$$

şeklinde bağlıdır. Bağımlı büyüklükler için verilen (2.3.5) ifadesi (2.3.4) entropi eşitsizliğinde kullanılırsa bağımlı büyüklüklerin

$$q_k = 0, \quad \eta = - \frac{\partial \phi}{\partial T}$$

$$t_{k\ell} = \rho x_{k,K} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell,K}}, \quad m_{k\ell} = \rho x_{k,K} \Lambda_{n\ell}^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_{n,K}} \quad (2.3.6)$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_n} + \varepsilon_{rkl} t_{k\ell} \Lambda_{rn} - m_{\ell k} \Lambda_{kn, \ell} = 0$$

formlarında olabilecekleri ortaya çıkar. Burada $\phi = \varepsilon - \eta T$ serbest enerji yoğunluğudur. Λ^{-1} ise (2.2.8) ile tanımlanan Λ 'nın tersidir ve

$$\Lambda_{kl}^{-1} = \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \delta_{kl} + (1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}) \frac{\varphi_k \varphi_\ell}{\theta^2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \varphi_m \quad (2.3.7)$$

olarak verildiği kolayca görülür. (2.3.6)₅ denklemi polar ortamlarda objektivite ilkesinin ifadesini oluşturmaktadır. Uzun hesaplardan sonra bu denklemin genel çözümünün

$$\phi = \phi(C_{KL}, \Gamma_{KL})$$

olduğu görülür. Burada C_{KL} ve Γ_{KL}

$$C_{KL} = x_{k,K} x_{\ell,L}, \quad \Gamma_{KL} = \frac{1}{2} \varepsilon_{KMN} x_{KM,L} x_{KN} \quad (2.3.8)$$

olarak verilmektedir. χ için verilen (2.2.4) ifadesi (2.3.8) de kullanılırsa

$$C_{KL} = x_{k,K} \left[\cos \theta \delta_{kl} + (1 - \cos \theta) \frac{\varphi_k \varphi_\ell}{\theta^2} \delta_{\ell L} - \sin \theta \varepsilon_{klm} \frac{\varphi_m}{\theta} \delta_{\ell L} \right] \quad (2.3.9)$$

$$\Gamma_{KL} = \theta_{,L} \frac{\varphi_k}{\theta} \delta_{kK} + \sin \theta \left(\frac{\varphi_k}{\theta} \right)_{,L} \delta_{kK} - (1 - \cos \theta) \varepsilon_{KMN} \frac{\varphi_k}{\theta} \delta_{kM} \left(\frac{\varphi_\ell}{\theta} \right)_{,L} \delta_{\ell N}$$

sonuçları elde edilir. (2.3.9) ile verilen yeni şekil değiştirme tansörleri polar ortamlarda ortaya çıkar. C_{KL} Cosserat şekil değiştirme tansörü, Γ_{KL} eğrilik (wryness) tansörü adını alır. $\chi \chi^T = I$ olduğu hatırlanacak olursa C Cosserat deformasyon tansörü ile

elastisiteden bilinen C Green deformasyon tansörü arasında

$$C_{KL} = C_{KM} C_{LM} \quad , \quad C = CC^T$$

bağıntısının var olduğu görülebilir (2.3.7) ve (2.3.8) ifadeleri (2.3.6)₃ ve (2.3.6)₄ denklemlerinde kullanılırsa gerilme tansörünün ve gerilme çifti tansörünün Γ ve C ye bağlı ifadeleri

$$t_{kl} = \rho x_{k,K} X_{\ell L} \frac{\partial \phi}{\partial C_{KL}} \quad , \quad m_{kl} = \rho x_{k,K} X_{\ell L} \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{LK}} \quad (2.3.10)$$

ile verilir. Uzaysal koordinatlarda yazılan t ve m tansörlerini referans konumundaki maddesel koordinatlarda yazılan T ve M tansörlerine bağlayan ifadeler, $\rho = J^{-1} \rho_0$ eşitliği de düşünülerek

$$t_{kl} = J^{-1} x_{k,K} X_{\ell L} T_{KL} \quad , \quad m_{kl} = J^{-1} x_{k,K} X_{\ell L} M_{KL} \quad (2.3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil değiştirme enerjisi için $\Sigma = \rho_0 \phi$ tanımı kullanılırsa

$$T_{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad , \quad M_{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \Gamma_{LK}} \quad (2.3.12)$$

olduğu görülür. Burada $\Sigma = \Sigma(C_{KL}, \Gamma_{KL})$ dir. (2.3.1) ve (2.3.2) alan denklemlerinin maddesel formu

$$T_{Kk} = T_{KL} X_{kL} \quad , \quad M_{Kk} = M_{KL} X_{kL} \quad (2.3.13)$$

tanımları ile

$$T_{Kk,K} + \rho_0 f_k = \rho_0 \ddot{u}_k \quad (2.3.14)$$

$$M_{Kk,K} + \epsilon_{kmn} x_{m,K} T_{Kn} + \rho_0 \ell_k = \rho_0 \dot{\sigma}_k \quad (2.3.15)$$

şeklini alır. (2.3.13) tanımları (2.3.11) ifadelerinde kullanılırsa

$$T_{Kk} = J t_{\ell k} X_{K,\ell} \quad , \quad M_{Kk} = J m_{\ell k} X_{K,\ell} \quad (2.3.16)$$

eşitliklerinin geçerli olduğu görülür. (2.3.16) denklemlerinde t ve

m yerlerine (2.3.6) denklemlerindeki ifadeleri yazılırsa maddesel koordinatlardaki gerilme ve gerilme çifti tansörleri

$$T_{Kk} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}}, \quad M_{Kk} = \Lambda_{\ell k}^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{\ell,K}} \quad (2.3.17)$$

olarak elde edilirler. (2.3.17) ifadeleri alan denklemlerinin maddesel formu olan (2.3.14) ve (2.3.15) denklemlerinde yazılırsa, kütle kuvvetleri ve kütle kuvvet çiftlerinin olmaması durumunda

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \rho_0 \ddot{x}_k \quad (2.3.18)$$

$$\Lambda_{\ell k}^{-1} \frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{\ell,K}} + \Lambda_{\ell k,K}^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{\ell,K}} + \epsilon_{kmn} x_{m,K} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{n,K}} = \rho_0 \dot{\sigma}_k \quad (2.3.19)$$

sonucu elde edilir. (2.3.6)₅ denklemini kullanarak (2.3.19) denklemini daha düzgün bir şekle getirmek mümkündür. (2.3.6)₅ denkleminde t ve m yerine (2.3.16) ifadelerindeki eşitleri yazılır ve (2.3.17) denklemleri kullanılırsa

$$\epsilon_{kmn} x_{m,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{n,L}} + \Lambda_{\ell k}^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{\ell}} + \Lambda_{\ell k,L}^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{\ell,L}} = 0 \quad (2.3.20)$$

sonucu elde edilir. Bu denklem (2.3.19) da kullanılırsa alan denklemlerinin maddesel formu

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \rho_0 \ddot{x}_k \quad (2.3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{k,K}} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} = \rho_0 \Lambda_{\ell k} \dot{\sigma}_\ell \quad (2.3.22)$$

şeklini alır. (2.3.21) ve (2.3.22) denklemleri nonlinear, anizotrop polar bir katının kütle kuvveti ve kütle kuvvet çiftinin olmaması durumunda genel alan denklemleridir. Hatırlanacağı gibi polar bir katı için σ (2.2.11) ile verilmişti. (2.2.11)in açık yazılması ile σ

$$\sigma_k = J_{kl} v_l = J_{KL} \chi_{kK} \chi_{lL} \Lambda_{lm} \dot{\varphi}_m \quad (2.3.23)$$

olarak bulunur. Mikro düzeyde anizotrop olan polar bir cisim için σ nın ne kadar karışık olduğu (2.3.23) ten açıkça görülebilmektedir. Özel olarak polar cisim mikro düzeyde izotrop ise, $J_{KL} = J \delta_{KL}$ olduğundan σ

$$\sigma_k = J \delta_{KL} \chi_{kK} \chi_{lL} \Lambda_{lm} \dot{\varphi}_m = J \Lambda_{kl} \dot{\varphi}_l$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda mikro ve makro düzeyde anizotrop olan polar bir katı için (2.3.21) ve (2.3.22) alan denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \rho_0 \ddot{x}_k \quad (2.3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{k,K}} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} = \lambda_{kl} (\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi}_l + \gamma_{kl} (\varphi) \ddot{\varphi}_l \quad (2.3.25)$$

olarak elde edilir. Burada görülen λ ve γ büyüklükleri katı mikro düzeyde anizotrop ise

$$\lambda_{kl} = \rho_0 J_{KL} \Lambda_{rk} (\dot{\chi}_{rK} \chi_{mL} \Lambda_{ml} + \chi_{rK} \dot{\chi}_{mL} \Lambda_{ml} + \chi_{rK} \chi_{mL} \dot{\Lambda}_{ml}) \quad (2.3.26)$$

$$\gamma_{kl} = \rho_0 J_{KL} \Lambda_{rk} \chi_{rK} \chi_{mL} \Lambda_{ml}$$

şeklinde, katı mikro düzeyde izotrop ise $J_{KL} = J \delta_{KL}$ olacağından

$$\lambda_{kl} = \rho_0 J \Lambda_{mk} \dot{\Lambda}_{ml} \quad (2.3.27)$$

$$\gamma_{kl} = \rho_0 J [2(1 - \cos \theta) \delta_{kl} + (-\frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} + 1) \varphi_k \varphi_l] \frac{1}{\theta^2}$$

şeklinde yazılırlar.

Eğer polar ortam izotrop olarak alınır, iç enerji fonksiyonu Σ , argümanları olan ve hiç bir simetri özelliğine sahip olmayan \mathbf{C} ve \mathbf{F} ikinci mertebe tansörlerinin ortak invaryantların izotropik tansör fonksiyonu olarak yazılabilir. \mathbf{C} ve \mathbf{F} tansörlerinin ortak

invariantları onbeş tanedir ve bu invariantlar (tr=trace)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr } \mathbf{C} & , & & I_2 &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{C}^2 & , & & I_3 &= \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{C}^3 \\
 I_4 &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{C}^I & , & & I_5 &= \text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{C}^I & , & & I_6 &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{C}^{2I} \\
 I_7 &= \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{\Gamma} & , & & I_8 &= \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{\Gamma}^2 & , & & I_9 &= \text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{\Gamma} & (2.3.28) \\
 I_{10} &= \text{tr } \mathbf{\Gamma} & , & & I_{11} &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{\Gamma}^2 & , & & I_{12} &= \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{\Gamma}^3 \\
 I_{13} &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^I & , & & I_{14} &= \text{tr } \mathbf{\Gamma}^2 \mathbf{\Gamma}^I & , & & I_{15} &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{\Gamma}^2 \mathbf{\Gamma}^{2I}
 \end{aligned}$$

olarak verilmişlerdir [6]. İzotrop durumda eğer Σ argümanları olan \mathbf{C} ve $\mathbf{\Gamma}$ tansörlerinin invariantları cinsinden yazılacaksa $\mathbf{\Gamma}$ nın mutlak bir tansör olmadığına dikkat edilmelidir. Gerçekten

$$\Gamma^{KL} = \frac{1}{2} \varepsilon^{KMN} X_{M:}^m X_{mN}^L$$

olarak tanımlanan $\mathbf{\Gamma}$ ikinci mertebe tansörünün X koordinat takımından X' koordinat takımına geçişi gösteren

$$\Gamma'^{KL} = \frac{\partial X'^K}{\partial X^M} \frac{\partial X'^L}{\partial X^N} \Gamma^{MN} \quad (2.3.29)$$

dönüşüm kuralını sağlayıp sağlamadığına bakıldığında (2.3.29) ifadesinde dönüşümün determinanti çarpan olarak ortaya çıkmaktadır. Bunu görmek için X' takımında $\mathbf{\Gamma}$ tansörü yazılırsa

$$\Gamma'^{KL} = \frac{1}{2} \varepsilon'^{KMN} X'^m_{M:} X'^L_{mN}$$

elde edilir. X' takımındaki büyüklüklerin X takımındaki bileşenlerine şekilde bağlı olduğuna bakılırsa

$$\epsilon^{KMN} = \det \left(\frac{\partial X^K}{\partial X'^L} \right) \frac{\partial X'^K}{\partial X^P} \frac{\partial X'^M}{\partial X^Q} \frac{\partial X'^N}{\partial X^R} \epsilon^{PQR}$$

$$X'^m_{mN} = X_{mn} g'^n_N = X_{mn} g^n_N G'_N = X_{mn} g^n_N G_S \frac{\partial X^S}{\partial X'^N} = X_{mn} g'^n_S \frac{\partial X^S}{\partial X'^N}$$

$$X'^m_M = X^n_m; g'_M = X^n_m v \frac{\partial X'^L}{\partial X^V} g^n_U \frac{\partial X^U}{\partial X'^M}$$

dönüşüm kurallarını sağladığı görülür. Burada ϵ^{KMN} ağırlıklı bir tansör olduğundan $X \rightarrow X'$ dönüşümünün determinanı çarpan olarak gelmiştir. Bütün bu ifadeler Γ'^{KL} ifadesinde yazılırsa

$$\Gamma'^{KL} = \frac{1}{2} \det \left(\frac{\partial X^K}{\partial X'^L} \right) \frac{\partial X'^K}{\partial X^P} \frac{\partial X'^M}{\partial X^Q} \frac{\partial X'^N}{\partial X^R} \frac{\partial X'^L}{\partial X^V} \frac{\partial X^U}{\partial X'^M} \frac{\partial X^S}{\partial X'^N} \epsilon^{PQR} X^m_U v X^m_S$$

elde edilir. Bu ifade Kronecker deltalarının kullanılmasıyla basitleştirilirse

$$\Gamma'^{KL} = \frac{1}{2} \det \left(\frac{\partial X^K}{\partial X'^L} \right) \frac{\partial X'^K}{\partial X^M} \frac{\partial X'^L}{\partial X^N} \epsilon^{MQR} X^m_Q v X^m_R$$

$$\Gamma'^{KL} = \det \left(\frac{\partial X^K}{\partial X'^L} \right) \frac{\partial X'^K}{\partial X^M} \frac{\partial X'^L}{\partial X^N} \Gamma'^{MN} \quad (2.3.30)$$

olduğu görülür (2.3.30) ifadesinden Γ' 'nin ağırlıklı bir tansör olduğu açıkça görülmektedir. Γ' 'nin ağırlığı 1'dir. Hemitropik malzemelerde yani dönme matrisinin proper ortogonal gruptan olması durumunda (2.3.30) Γ ifadesinde çarpan olarak görülen dönüşümün determinanı işaret değiştirmez. Dönme matrisinin tam ortogonal gruptan alındığı izotrop malzemelerde yani yansımalara da izin verilen durumda dönüşümün determinanı işaret değiştirir, -1 olur. Hemitropik malzemelerde Σ , (2.3.28) invaryantlarının izotropik tansör fonksiyonu olarak yazılabilirken, izotrop malzemelerde bunu yapmak mümkün olmaz. Tam ortogonal dönüşümler altında değişmezlik olan izotropi durumunda Γ' 'yi içeren invaryantların tek kuvvetli terimleri bu dönüşümler altında işaret değiştirdiği için Σ fonksiyonu form invaryant kalmaz. İzotrop halde Σ 'nin invaryant kalabilmesi

için \mathbf{F} 'yi içeren invaryantların tek kuvvetli terimlerinin katsayıları sıfır olmak zorundadır. Σ bu durumda \mathbf{F} 'yi içeren invaryantların çift kuvvetlerine bağlı olmalıdır.

(2.3.12) ifadeleri kullanılarak, izotrop polar bir katı için nonlinear bünye denklemleri

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.3.31)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=7}^{15} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{F}^T}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.28) ifadelerinde görülen invaryantların \mathbf{C} ve \mathbf{F} büyüklüklerine göre türevlerinin

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} , \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^T , \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^{2T} , \quad \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^2 + \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{C}^T , \quad \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^2 \mathbf{C}^T + \mathbf{C}^T \mathbf{C}^2$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{F}^T , \quad \frac{\partial I_8}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{F}^{2T} , \quad \frac{\partial I_9}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C}^T \mathbf{F}^T$$

(2.3.32)

$$\frac{\partial I_7}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{C} , \quad \frac{\partial I_8}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{F} \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{F} , \quad \frac{\partial I_9}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{C}^2$$

$$\frac{\partial I_{10}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{I} , \quad \frac{\partial I_{11}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{F} , \quad \frac{\partial I_{12}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{F}^2 , \quad \frac{\partial I_{13}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{F}^T$$

$$\frac{\partial I_{14}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^{T2} , \quad \frac{\partial I_{15}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mathbf{F} \mathbf{F}^{T2} + \mathbf{F}^{T2} \mathbf{F}$$

oldukları hemen görülebilir. Bu durumda (2.3.31) ifadelerindeki gerilme ve gerilme çifti tansörlerinin maddesel formları

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 \mathbf{C}^I + \lambda_3 \mathbf{C}^{I2} + \lambda_4 \mathbf{C} + \lambda_5 (\mathbf{C}^2 + \mathbf{C}^I \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{C}^I) \\ & + \lambda_6 (\mathbf{C}^2 \mathbf{C}^I + \mathbf{C}^I \mathbf{C}^2) + \lambda_7 \mathbf{\Gamma}^I + \lambda_8 \mathbf{\Gamma}^{I2} + \lambda_9 (\mathbf{\Gamma}^I \mathbf{C}^I + \mathbf{C}^I \mathbf{\Gamma}^I) \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \lambda_7 \mathbf{C} + \lambda_8 (\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{\Gamma}) + \lambda_9 \mathbf{C}^2 + \lambda_{10} \mathbf{I} + \lambda_{11} \mathbf{\Gamma} + \lambda_{12} \mathbf{\Gamma}^2 \\ & + \lambda_{13} \mathbf{\Gamma}^I + \lambda_{14} (\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^I + \mathbf{\Gamma}^I \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^{I2}) + \lambda_{15} (\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^{I2} + \mathbf{\Gamma}^{I2} \mathbf{\Gamma}) \end{aligned}$$

olarak elde edilirler. (2.3.33) denklemlerinde görülen \mathbf{I} birim matrisi göstermektedir. λ_i ($i=1,15$) katsayı fonksiyonları

$$\lambda_i = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i}$$

olarak tanımlanmışlardır ve onbeş invaryanta bağlı ifadelerdir.

Makro düzeyde izotrop olan bir katıda Σ iç enerji fonksiyonu onbeş invaryanta bağlı olacağından (2.3.24) ve (2.3.25) alan denklemleri makroizotrop bir katı için

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial x_{k,K}} = \rho_0 \ddot{x}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \sum_{i=7}^{15} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \varphi_{k,K}} - \sum_{i=1}^{15} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \varphi_k} = \lambda_{k\ell}(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi}_\ell + \gamma_{k\ell}(\varphi) \ddot{\varphi}_\ell$$

şeklinde yazılabilir. Katının mikroizotrop olup olmamasına göre $\lambda_{k\ell}$ ve $\gamma_{k\ell}$ için verilen (2.3.27) ve (2.3.26) ifadeleri geçerliliğini korumaktadır.

Bu çalışmanın amacı nonlinear polar ortamlarda düzlem dalga yayılması problemini asimptotik olarak incelemek olduğundan, bundan sonraki bölümde bu çalışmada kullanılacak olan ve Taniuti ve Wei [7] tarafından geliştirilmiş olan indirgeyici (redüktif) pertürbasyon yöntemi tanıtılacaktır.

BÖLÜM 3

İNDİRGEYİCİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ

3.1. GİRİŞ

Son yıllarda fiziğin birçok dalında ortaya çıkan NKDD sistemleri değişik pertürbasyon teknikleri ile incelenmiştir. NKDD sistemlerinin değişik pertürbasyon teknikleri ile incelenmesi sonucunda sistemlerin asimptotik davranışlarını karakterize eden bir, bazen de birden çok nonlinear denklem elde edilmiştir. Bunlar arasında su dalgalarından plazmaya, nonlinear optikten değişik sürekli ortam modellerine kadar geniş bir yelpazede dalga yayılması problemleri sayılabilir. İlgilenilen konuya yakınlığı itibariyle viskoelastik ortamlarda dalga yayılması ile ilgili olarak [8], [9], [10], termoelastik ortamlarda [11], [12], [13], Diatomik katılarda [14], çubuk ve plaklarda [15], [16] çalışmaları referans olarak verilebilir. Şimdiye kadar verilen örnekler bir boyutlu yani tek konum boyutunu içeriyordu. Nonlinear, elastik plaklarda iki boyutlu dalga yayılımı problemi pertürbatif bir yöntemle Potapov ile Soldatov [17] tarafından incelenmiş ve iki boyutlu skaler bir denklem olan Kadomtsev-Petviashvili denklemi elde edilmiştir. Esasları [18] numaralı referansta verilen ışın metodu kullanılarak değişik sürekli ortamlarda elde edilen iki boyutlu evölüsyon denklemleri [19] da verilmiştir.

Kabaca başlıklarından bahsedilen bu çalışmalarda bir boyutlu düzlem dalga veya boyuna dalga yayılması problemleri incelenmiş, değişik pertürbasyon teknikleri veya yaklaşımlarla denklem sisteminin uzak olan davranışlarını veren nonlinear skaler denklemler elde edilmiştir. Bunlar sistemin dispersif veya dissipatif olmasına bağlı olarak uzun dalga yaklaşımı için Korteweg-de Vries (KdV), Burgers denklemleri veya onların genelleştirilmiş formları, kısa dalga yaklaşımı için Nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi olmaktadır. Bu çalışmada nonlinear polar katılarda düzlem dalga yayılması problemini asimptotik olarak incelemek için seçilen yöntem indirgeyici pertürbasyon yöntemidir.

3.2. İNDİRGEYİCİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ

İndirgeyici pertürbasyon yöntemi genel NKDD sistemini, sistemin uzak-alan (far-field) davranışını karakterize eden bir veya birkaç nonlinear denkleme indirgemek için sistematik bir yol önerir. Yöntemin uzun dalga yaklaşımı durumunda genel formülasyonu Taniuti-Wei [7] tarafından verilmiştir. Yöntem hem disipatif hem de dispersif sistemleri karakterize edebilen

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + \left[\sum_{\beta=1}^S \sum_{\alpha=1}^P (\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial X}) \right] \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad p \geq 2 \quad (3.2.1)$$

denklemin sisteminin uzak-alan davranışını incelemek için geliştirilmiştir. Burada \mathbf{U} , u_1, u_2, \dots, u_n bileşenlerine sahip bir kolon vektör; \mathbf{A} , $\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$, $\mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}$ \mathbf{U} 'nun fonksiyonları olan $n \times n$ şeklinde matrislerdir. Yazarlar önce Gardner ve Morikawa'nın soğuk plazmada hidromanyetik dalgaların uzak alan davranışını incelerken yaptıkları dönüşüme benzer bir koordinat dönüşümü önermişlerdir [20]:

$$\xi = \epsilon^a (X - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^{a+1} t, \quad a = \frac{1}{p-1} \quad (3.2.2)$$

Burada ϵ küçük bir parametredir ve daha sonra görüleceği gibi lineer denklemlerin uzun dalga yaklaşımında asimptotik davranışından elde edilir, λ ise $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ için $\mathbf{A}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{A}_0$ matrisinin özdeğerleridir. \mathbf{U} , \mathbf{A} , $\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$, $\mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}$ ifadelerinin $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ sabit çözümü civarında

$$\mathbf{U} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{U}_j, \quad \mathbf{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{A}_j \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{H}_{\alpha j}^{\beta}, \quad \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{K}_{\alpha j}^{\beta}$$

şeklinde seriye açılabilirler varsayılmıştır. (3.2.2) koordinat dönüşümü ile birlikte (3.2.3) açılımları (3.2.1) denkleminde yazılarak ϵ 'un kuvvetlerine göre denklemler hiyerarşisi elde edilmiştir. Bu denklemler ϵ 'un kuvvetlerine göre sıralanacak olursa

$$O(\varepsilon^{a+1}): (-\lambda I + A_0) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$O(\varepsilon^{a+2}): (-\lambda I + A_0) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} = - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - [U_1 \cdot (\nabla_u A)_0] \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \sum_{\beta \alpha}^S \Pi (-\lambda H_{\alpha 0}^{\beta} + K_{\alpha 0}^{\beta}) \frac{\partial^p U_1}{\partial \xi^p} = 0 \quad (3.2.5)$$

şeklinde denklemler elde edilir. Burada ∇_u , U 'ya göre gradyan operatörünü göstermekte; $U \cdot \nabla_u = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ ve $A_1 = U_1 \cdot (\nabla_u A)_0$ tanımları kullanılmaktadır.

A_0 'ın λ özdeğerine karşı gelen sabit sağ öz vektörü R ile gösterilirse

$$(A_0 - \lambda I) R = 0$$

yazılabilir. Bu durumda (3.2.4) denkleminin çözümü

$$U_1 = R \phi_1(\xi, \tau) + V_1(\tau) \quad (3.2.6)$$

şeklinde verilebilir. $\phi_1(\xi, \tau)$ ve $V_1(\tau)$ keyfi fonksiyonlardır. $\xi \rightarrow \infty$ için $U \rightarrow U_0$ olduğundan, $\xi \rightarrow \infty$ için $U_1 \rightarrow 0$ geçerlidir. Böylece (3.2.6)daki τ 'ya bağlı V_1 fonksiyonu sıfırdır. (3.2.5) denkleminde U_2 'nin çözülebilmesi için U_1 'in, uygunluk koşulu denebilecek bir denklemi sağlaması gerekmektedir. (3.2.5) denklemi A_0 'ın λ özdeğerine karşı gelen L sol özvektörü ile çarpılırsa

$$L \cdot \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + L \cdot [U_1 \cdot (\nabla_u A)_0] \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + L \cdot \sum_{\beta \alpha}^S \Pi (-\lambda H_{\alpha 0}^{\beta} + K_{\alpha 0}^{\beta}) \frac{\partial^p U_1}{\partial \xi^p} = 0 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. $U_1 = R \phi_1(\xi, \tau)$ ifadesi (3.2.7) denkleminde yazılırsa ϕ_1 için

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + C_1 \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial^p \phi_1}{\partial \xi^p} = 0 \quad (3.2.8)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$C_1 = L \cdot [R \cdot (\nabla_u A)_O R] / (L \cdot R)$$

$$C_2 = L \cdot \sum_{\beta} \prod_{\alpha} (-\lambda H_{\alpha O}^{\beta} + K_{\alpha O}^{\beta}) R / (L \cdot R)$$

olarak tanımlanmışlardır. Dikkat edilirse (3.2.8) denklemi $p=3$ için KdV, $p=2$ için Burgers denklemine dönüşür. Genel olarak p 'nin tek kuvvetleri için KdV'nin genelleştirilmiş formları, çift kuvvetleri için ise Burgers denkleminin genelleştirilmiş formları elde edilir.

(3.2.1) denkleminde olduğu gibi sisteme uygun Gardner-Morikawa dönüşümü bulunmadığı hallerde denklem sisteminin lineerleştirilmiş haline ait, k -dalga sayısının küçük değerleri için (uzun dalga yaklaşımı) dispersiyon bağıntısına bakılır, eğer dispersiyon bağıntısı a ve b reel sabitler olmak üzere

$$\omega = ak + bk^3 + \dots$$

şeklinde ise sonlu genlikli dalga yayılması incelenmesi durumunda orijinal NKDD sisteminin asimptotik olarak KdV veya onun genelleştirilmiş formlarına indirgeneceği söylenebilir. Çünkü sonlu genlikli dalga yayılması probleminden gelen zayıf nonlineerlik ile $\omega = ak + bk^3$ şeklindeki zayıf dispersiyonun birbirini dengelemesi sonucunda sistemin asimptotik davranışını karakterize eden denklemin KdV veya genelleştirilmiş formlarından biri olması beklenebilir.

Dispersif veya dissipatif sistemlerin hangi koşullarda nonlineer skaler denklemlere indirgenebileceği henüz tam olarak belirlenmemiştir. Taniuti ve Wei [7] (3.2.1) sınıfındaki denklemler için uzun dalga yaklaşımı altında asimptotik yöntemi geliştirmişlerdir. Gene bu konuda Washimi ve Taniuti [21], Kakutani, Ono, Taniuti ve Wei'nin çalışmaları sayılabilir [22]. Dispersif sistemlerin uzak olan davranışlarının geniş bir incelemesi Jeffrey ve Kakutani'nin [23] çalışmasında verilmiştir. Bütün uzayda başlangıç değer problemlerinin daha genel bir incelemesi Teymur ve Şuhubi'de [24], yarım uzayda sınır değer problemlerinin incelenmesi Teymur ve Şuhubi'nin [24] ve [25] çalışmalarında verilmiştir. Aynı asimptotik yöntemin

dalga modülasyonu durumunda incelenmesi Taniuti-Washimi [26] ve Taniuti-Yajima'nın [27] çalışmalarında bulunabilir. Bu yöntemin yanısıra NKDD'leri asimptotik olarak incelemek için değişik pertürbasyon teknikleri Jeffrey ve Kawahara'nın [28] kitabında ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bir sonraki bölümde, nonlinear mikropolar ortamda bir boyutlu düzlem dalga yayılmasını karakterize eden NKDD sistemine bu bölümde anlatılan pertürbasyon yöntemi uygulanarak sistemin uzak alan davranışını gösteren denklemler elde edilmeye çalışılacaktır.



BÖLÜM 4

MİKROPOLAR ORTAMLARDA BİR BOYUTLU DALGALAR

4.1. GİRİŞ

Bu bölümün amacı alan denklemleri (2.3.24) ve (2.3.25) ile verilen nonlinear, anizotrop polar bir katıda düzlem dalga yayılma problemini İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi ile incelemektir. İkinci kısımda nonlinear polar katı için düzlem dalga yayılması durumuna ait bir boyutlu alan denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen denklemler, İndirgeyici Pertürbasyon Yönteminin tanıtıldığı üçüncü bölümdeki (3.2.1) denklem sınıfına girmediği için denklem sisteminin lineerleştirilmiş formunun dispersiyon bağıntısına bakılmıştır. Optik (yüksek frekans) ve akustik modların (alçak frekans) küçük ve büyük dalga sayıları için asimptotik davranışları incelenmiştir. Lineer duruma ait frekans bağıntısına bakılarak bu sistem için uygun koordinat uzatması denebilecek Gardner-Morikawa dönüşümüyle alan denklemleri yeni koordinatlarda yazılmıştır. Bağımlı değişkenler zayıf dispersiyonun ölçüsü olan küçük bir parametrenin kuvvet serisine açılmış, elde edilen denklemler hiyerarşisinden pertürbasyon açılımındaki bağımlı değişkenlerin sağladığı nonlinear skaler bir denklem elde edilmiştir. Elde edilen nonlinear skaler denklemin "yalnız" dalga (solitary wave) çözümleri aranmış, daha sonra problemin fiziğinden gelen özel durumlar incelenerek tartışılmıştır.

4.2. POLAR ORTAMDA DÜZLEM DALGALAR VE LİNEER DİSPERSİYON BAĞINTISI

Alan denklemleri (2.3.24) ve (2.3.25) ile verilen nonlinear polar katıya ait Σ fonksiyonu deformasyon gradyanı, dönme vektörü ve dönme vektörü gradyanına bağlıdır: $\Sigma = \Sigma(x_{k,K}, \varphi_k, \varphi_{k,K})$ [6]. Bu durumda (2.3.24) ve (2.3.25) alan denklemleri

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_{k,K} \partial x_{\ell,L}} x_{\ell,LK} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_{k,K} \partial \varphi_{\ell}} \varphi_{\ell,K} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_{k,K} \partial \varphi_{\ell,L}} \varphi_{\ell,LK} = \rho_0 \ddot{u}_k \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_{k,K} \partial x_{l,L}} x_{l,LK} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_{k,K} \partial \varphi_l} \varphi_{l,K} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_{k,K} \partial \varphi_{l,L}} \varphi_{l,LK} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} \\ = \lambda_{kl} \dot{\varphi}_l + \gamma_{kl} \ddot{\varphi}_l \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

şeklını alır. Hatırlanacağı gibi Λ ve χ

$$\begin{aligned} \Lambda_{kl} &= \frac{\sin \theta}{\theta} \delta_{kl} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \frac{\varphi_k \varphi_l}{\theta^2} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) \epsilon_{klm} \varphi_m \\ \chi_{kl} &= \cos \theta \delta_{kl} + (1 - \cos \theta) \frac{\varphi_k \varphi_l}{\theta^2} - \sin \theta \epsilon_{klm} \frac{\varphi_m}{\theta} \end{aligned}$$

olmak üzere (4.2.2) denklemindeki λ ve γ katının mikro düzeyde anizotrop veya izotrop oluşuna göre (2.3.26) ve (2.3.27) ifadeleriyle verilmiştir.

Alan denklemleri (4.2.1) ve (4.2.2) ile verilen nonlinear polar katıda $X = X_K N_K$ yayılma eksenindeki koordinat olmak üzere düzlem dalga hareketini karakterize eden şekil değiştirme alanı

$$x_k(X, t) = X_K \delta_{kK} + u_k(X, t) \quad (4.2.3)$$

ile verilir. Burada N_K ($K=1,2,3$) yayılma doğrultusundaki birim vektörü göstermektedir. (4.2.3) şekil değiştirme alanından yer değiştirme ve dönme gradyanları için

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \delta_{kK} + \frac{\partial u_k}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial X_K} = \delta_{kK} + p_k(X, t) N_K \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial X_K} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial X_K} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial X} N_K$$

ikinci gradyanlar için de

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_K \partial x_L} = \frac{\partial p_k}{\partial x} N_K N_L, \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_K \partial x_L} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} N_K N_L \quad (4.2.5)$$

bulunur. Burada

$$p_k(x, t) = \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x}$$

olarak tanımlanmıştır. Σ iç enerji fonksiyonunun gradyanlara göre türevleri için

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_{k,K} \partial x_{\ell,L}} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_\ell} N_K N_L, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{k,K}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_{k,X}} N_K \quad (4.2.6)$$

ifadeleri geçerli olur. X değişkenine göre kısmî türev operatörü için

$$\frac{\partial}{\partial x} () = ()'$$

tanımını da kullanarak (4.2.4) - (4.2.6) ifadeleri, $N_K N_K = 1$ olduğu gözönünde tutularak (4.2.1) ve (4.2.2) alan denklemlerinde yazılırsa, yayılma doğrultusu X olan düzlem dalga denklemleri ($k=1,2,3$)

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_\ell} p_\ell' + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \varphi_\ell} \varphi_\ell' + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \varphi_\ell'} \varphi_\ell'' = \rho_0 \ddot{u}_k \quad (4.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_k' \partial p_\ell} p_\ell' + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_k' \partial \varphi_\ell} \varphi_\ell' + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_k' \partial \varphi_\ell'} \varphi_\ell'' - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} = \lambda_{k\ell} \dot{\varphi}_\ell + \gamma_{k\ell} \ddot{\varphi}_\ell \quad (4.2.8)$$

olarak elde edilir. Polar katılarda düzlem dalga yayılmasını karakterize eden (4.2.7) ve (4.2.8) denklemleri, Σ fonksiyonunun argümanlarına kuadratik olarak bağlı olması dışında her zaman nonlineerdir.

İkinci mertebeden kısmî diferansiyel denklemler olan (4.2.7-8) sistemi

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = v_k, \quad \frac{\partial u_k}{\partial X} = p_k, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = w_k, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial X} = \phi_k \quad (4.2.9)$$

tanımları ile

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \varphi_l} \phi_l + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \phi_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} - \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial X} - \frac{\partial p_k}{\partial t} = 0 \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial \varphi_l} \phi_l + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial \phi_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} - \lambda_{kl}(\varphi, w) w_l$$

$$- \gamma_{kl}(\varphi) \frac{\partial w_l}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial X} - \frac{\partial \phi_k}{\partial t} = 0$$

$$w_k - \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = 0$$

birinci merteye denklem sistemine indirgenebilir. (4.2.10) birinci merteye denklem sistemi matris formda

$$A(U)U_t + B(U)U_X + C(U) = 0 \quad (4.2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$U = \begin{bmatrix} v \\ p \\ w \\ \phi \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} I & & & & 0 \\ & I & & & \\ & & \gamma & & \\ & & & I & \\ 0 & & & & I \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \varphi_l} \phi_l \\ 0 \\ \lambda_{kl} w_l - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial \varphi_l} \phi_l + \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} \\ 0 \\ -w_k \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_\ell} & 0 & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \phi_\ell} & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial p_\ell} & 0 & -\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak verilmektedir. U ve C (15×1) boyutlu bir vektör, A ve B (15×15) boyutlu matrislerdir.

Polar ortamlarda düzlem dalga yayılmasını karakterize eden (4.2.10) denklem sisteminin matris formda (4.2.11) ile ifade edilebildiği görüldü. Önceden de belirtildiği gibi bu çalışmanın amacı düzlem dalga denklemlerini asimptotik olarak incelemektir. Ancak denklemlerimiz (3.2.1) formunda yazılamadığı için uzun dalga yaklaşımında indirgeyici pertürbasyon yöntemini hemen uygulayabilme olanağı yoktur. Bu durumda izlenecek yol Jeffrey ve Kakutani'de [23] belirtildiği gibi orijinal denklem sisteminin lineerleştirilmiş dispersiyon bağıntısına bakmaktır. Adı geçen yazarların belirttiğine göre lineerleştirilmiş dispersiyon bağıntısı, k dalga sayısının küçük değerleri için, a ve b sabitler olmak üzere

$$\omega = ak + bk^3 + \dots$$

formunda ise, ilgilenilen sistemde küçük fakat sonlu genlikli dalgalar asimptotik olarak KdV denklemi, bazen de KdV'nin genelleştirilmiş formları ile karakterize edilirler. Bu fikir izlenerek (4.2.10) sistemi sabit bir durum civarında lineerleştirilirse ($k=1,2,3$)

$$\left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_\ell} \right)_0 \frac{\partial p_\ell}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \phi_\ell} \right)_0 \phi_\ell + \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \phi_\ell} \right)_0 \frac{\partial \phi_\ell}{\partial X} - \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0 \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_k \partial p_\ell} \right)_0 \frac{\partial p_\ell}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_k \partial \varphi_\ell} \right)_0 \psi_\ell + \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_k \partial \psi_\ell} \right)_0 \frac{\partial \psi_\ell}{\partial X} - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_k \partial p_\ell} \right)_0 p_\ell \\ & - \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_k \partial \varphi_\ell} \right)_0 \varphi_\ell - \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi_k \partial \psi_\ell} \right)_0 \psi_\ell - (\lambda_{k\ell})_0 w_\ell - (\gamma_{k\ell})_0 \frac{\partial w_\ell}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir (4.2.10)'un diğer denklemleri lineer formdadır. Bu lineerleştirme esnasında henüz katının makro ve mikro düzeyde izotrop olduğu kullanılmamıştır. İzotrop lineer bir katı için Σ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\frac{1}{2} [\lambda \delta_{k\ell} \delta_{mn} + (\mu + \kappa) \delta_{km} \delta_{\ell n} + \mu \delta_{kn} \delta_{\ell m}] (u_{\ell,k} + \epsilon_{\ell kp} \varphi_p) (u_{n,m} + \epsilon_{nmr} \varphi_r) \\ & + \frac{1}{2} (\alpha \delta_{k\ell} \delta_{mn} + \gamma \delta_{km} \delta_{\ell n} + \beta \delta_{kn} \delta_{\ell m}) \varphi_{k,\ell} \varphi_{m,n} \end{aligned}$$

olarak verilmiştir [5, 691 s.]. Bir boyutlu problemler için Σ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\frac{1}{2} [\lambda p_1^2 + (\mu + \kappa) (p_n p_n + 2 p_n \epsilon_{n1r} \varphi_r + 2 \varphi_m \varphi_m) + \mu (p_1^2 + 2 p_m \epsilon_{1mr} \varphi_r \\ & - 2 \varphi_m \varphi_m) + \alpha \psi_1^2 + \gamma \psi_m \psi_m + \beta \psi_1^2] \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

formunda yazılabilir. (4.2.13) ifadesi kullanılarak (4.2.12) denkleminde görülen sabitlerin

$$\Sigma_{p_1 p_1} = 2\mu + \kappa + \lambda, \quad \Sigma_{p_1 p_2} = \Sigma_{p_1 p_3} = \Sigma_{p_1 \varphi_k} = \Sigma_{p_1 \psi_k} = 0$$

$$\Sigma_{p_2 p_2} = \mu + \kappa, \quad \Sigma_{p_2 \varphi_3} = -\kappa, \quad \Sigma_{p_2 p_3} = \Sigma_{p_2 \varphi_1} = \Sigma_{p_2 \varphi_2} = \Sigma_{p_2 \psi_k} = 0$$

$$\Sigma_{p_3 p_3} = \mu + \kappa, \quad \Sigma_{p_3 \varphi_2} = \kappa, \quad \Sigma_{p_3 \varphi_1} = \Sigma_{p_3 \varphi_3} = \Sigma_{p_3 \psi_k} = 0 \quad (4.2.14)$$

$$\Sigma_{\psi_1\psi_1} = \alpha + \beta + \gamma, \quad \Sigma_{\psi_1\psi_1} = 2\kappa, \quad \Sigma_{\psi_k p_\ell} = \Sigma_{\psi_k\psi_\ell} = \Sigma_{\psi_1\psi_2} = \Sigma_{\psi_1\psi_3} = \Sigma_{\psi_1\psi_2} = \Sigma_{\psi_1\psi_3} = \Sigma_{\psi_1 p_k} = 0$$

$$\Sigma_{\psi_2\psi_2} = \gamma, \quad \Sigma_{\psi_2\psi_2} = 2\kappa, \quad \Sigma_{\psi_2\psi_3} = \Sigma_{\psi_2 p_1} = \Sigma_{\psi_2 p_2} = \Sigma_{\psi_2\psi_3} = 0$$

$$\Sigma_{\psi_3\psi_3} = \gamma, \quad \Sigma_{\psi_3\psi_3} = 2\kappa, \quad \Sigma_{\psi_3\psi_2} = \Sigma_{\psi_3 p_1} = \Sigma_{\psi_3 p_3} = \Sigma_{\psi_3\psi_1} = \Sigma_{\psi_3\psi_2} = 0$$

oldukları görülür. Burada $\Sigma_{p_1 p_2} = (\partial^2 \Sigma / \partial p_1 \partial p_2)_0$ tanımı kullanılmıştır.

Lineer teoride $\lambda_{kl} \approx \delta_{kl}, \chi_{kk} \approx \delta_{kk}$ olduğu düşünülürse $(\lambda_{kl})_0 = 0,$

$(\gamma_{kl})_0 = J_{KL} \delta_{kK} \delta_{lL}$ olduğu kolayca görülebilir. Mikroizotrop katı için $(\gamma_{kl})_0 = J \delta_{kl}$ dir.

Makro ve mikroizotrop katı için

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_1^2} \right)_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_2^2} \right)_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_2 \partial \varphi_3} \right)_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_3^2} \right)_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial X^2} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_3 \partial \varphi_2} \right)_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_1^2} \right)_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial X^2} + \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_1^2} \right)_0 \varphi_1 = 0$$

(4.2.15)

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_2^2} \right)_0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial X^2} + \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_2^2} \right)_0 \varphi_2 + \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_2 \partial p_3} \right)_0 \frac{\partial u_3}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_3^2} \right)_0 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial X^2} + \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_3^2} \right)_0 \varphi_3 + \frac{1}{\rho_0 J} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_3 \partial p_2} \right)_0 \frac{\partial u_2}{\partial X} = 0$$

şeklinde verilen lineer denklemlerde, boyuna yerdeğiştirme ve dönme vektörü bileşenleri u_1 ve φ_1 diğer büyüklüklerle bağıntılı değildir ve sırasıyla lineer dalga ve lineer Klein-Gordon denklemlerini

sağlarlar. (4.2.15) denklemlerinden görüldüğü gibi u_3 ve φ_2 ile u_2 ve φ_3 büyüklükleri kendi aralarında bağlantılı ama grup olarak kuple değildirler. (u_2, φ_3) ve (u_3, φ_2) grupları kuplelineer dalga ve Klein-Gordon denklemlerini sağlarlar. (4.2.15) lineer denklem sistemine $\exp [i(kX - \omega t)]$ şeklinde harmonik dalga çözümleri aranırsa dispersiyon bağıntıları u_1 ve φ_1 için sırasıyla

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_1 p_1} k^2, \quad \omega^2 = \frac{1}{\rho_0 J} \sum_{\psi_1 \psi_1} k^2 + \frac{1}{\rho_0 J} \sum_{\varphi_1 \varphi_1} k^2 \quad (4.2.16)$$

(u_2, φ_3) grubu için

$$\omega^4 + \omega^2 (-a_2^2 k^2 - a_3^2 - a_1^2 k^2) + a_1^2 k^2 (a_2^2 k^2 + a_3^2) - a_4^4 k^2 = 0 \quad (4.2.17)$$

şeklini alır. Burada

$$a_1^2 = \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_2 p_2}, \quad a_2^2 = \frac{1}{\rho_0 J} \sum_{\psi_3 \psi_3}, \quad a_3^2 = \frac{1}{\rho_0 J} \sum_{\varphi_3 \varphi_3}, \quad a_4^4 = \frac{1}{\rho_0^2 J} \sum_{p_2 \varphi_3}^2$$

tanımları yapılmıştır. $\sum_{p_2 p_2} = \sum_{p_3 p_3}$, $\sum_{\psi_3 \psi_3} = \sum_{\psi_2 \psi_2}$, $\sum_{\varphi_3 \varphi_3} = \sum_{\varphi_2 \varphi_2}$, $\sum_{p_2 \varphi_3}^2 = \sum_{p_3 \varphi_2}^2$ eşitlikleri geçerli olduğundan (u_3, φ_2) çifti için de (4.2.17) dispersiyon bağıntısı geçerlidir. (4.2.16) ifadeleri boyuna dalgalar için sırasıyla akustik mod (alçak frekans) ve optik modu (yüksek frekans) göstermektedir. Boyuna dalga durumunda lineer dispersiyon bağıntısına bakılarak akustik dalgaların dispersif olmadığı, optik dalgaların ise kuvvetli dispersif olduğu söylenebilir. Lineer durumda boyuna ve enine hareketi karakterize eden denklem grupları arasında kuplaj olmadığı için, ortamda bir şekilde u_1 boyuna yer değiştirilmesi yaratılırsa bu sinyal $u_2, u_3, \varphi_2, \varphi_3$ enine bileşenleri uyarmadan ortamda yayılacaktır. Aynı şekilde u_2 enine yer değiştirmesi φ_3 dönmesini uyaracak ama u_1 boyuna yer değiştirmesi yaratmadan ortamda yayılacaktır. Benzer bir yaklaşım u_3 bileşeni için de geçerlidir. Enine dalga durumuna ait (4.2.17) dispersiyon bağıntısı çözümlürse

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ (a_1^2 + a_2^2) k^2 + a_3^2 \pm [(a_1^2 - a_2^2) k^4 + (4a_4^4 + 2a_2^2 a_3^2 - 2a_1^2 a_3^2) k^2 + a_3^4]^{1/2} \} \quad (4.2.18)$$

sonucu elde edilir. Burada ω_+ optik dalı, ω_- akustik dalı göstermektedir. $k=0$ için

$$\omega_+^2 = a_3^2 = \frac{1}{\rho_0 J} \sum \varphi_3 \varphi_3, \quad \omega_-^2 = 0$$

dır. Bu sonuca bakarak optik dalgaların $(\frac{1}{\rho_0 J} \sum \varphi_3 \varphi_3)^{\frac{1}{2}}$ den büyük frekanslarda, akustik dalgaların bütün frekanslarda yayılabileceği söylenebilir. Yani a_3 optik mod için bir "cut-off" frekansı oluşturmaktadır. k dalga sayısının küçük değerleri için (4.2.18) ifadesi seriye açılırsa optik ve akustik modlar için sırasıyla

$$\omega_+^2 = a_3^2 + \frac{a_4^4 + a_2^2 a_3^2}{a_3^2} k^2 + O(k^4) \quad k \rightarrow 0 \quad (4.2.19)$$

$$\omega_-^2 = \frac{a_1^2 a_3^2 - a_4^4}{a_3^2} k^2 + \left[\frac{a_4^4 (a_4^4 + a_2^2 a_3^2 - a_1^2 a_3^2)}{6 a_3^6} \right] k^4 + O(k^6) \quad k \rightarrow 0$$

bağıntıları elde edilir. k dalga sayısının büyük olduğu durumda ise

$$\omega_+^2 = \frac{a_4^4}{a_1^2 - a_2^2} + a_1^2 k^2 + O(k^{-2}) \quad k \rightarrow \infty \quad (4.2.20)$$

$$\omega_-^2 = \frac{a_1^2 a_3^2 - a_2^2 a_3^2 - a_4^4}{a_1^2 - a_2^2} + a_2^2 k^2 + O(k^{-2}) \quad k \rightarrow \infty$$

sonuçları elde edilir. (4.2.19) ve (4.2.20) sonuçlarından yalnız $k \rightarrow 0$ için akustik modun zayıf dispersif, diğer modların kuvvetli dispersif oldukları görülmektedir. $k \rightarrow 0$ için akustik mod, a ve b reel sabitler olmak üzere

$$\omega = ak + bk^3 + \dots \quad (4.2.21)$$

formunda yazılabilmektedir. Burada a ve b sabitleri

$$a = \left(\frac{a_1^2 a_3^2 - a_4^4}{a_3^2} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{a_4^4 (a_4^4 + a_2^2 a_3^2 - a_1^2 a_3^2)}{6 a_3^6} \left(\frac{a_3^2}{a_1^2 a_3^2 - a_4^4} \right)^{1/2} \quad (4.2.22)$$

olarak tanımlanmışlardır. a ve b sabitleri lineer izotrop malzeme sabitlerine

$$a = \left(\frac{2\mu + \kappa}{2\rho_0} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{1}{16} \frac{J}{\rho_0} \left(\frac{2\gamma}{J} - 2\mu - \kappa \right) \left(\frac{2\rho_0}{2\mu + \kappa} \right)^{1/2}$$

şeklinde bağlıdırlar. [5] sayılı kaynakta verilen $2\mu + \kappa \geq 0$ ve $\kappa \geq 0$, [32] sayılı kaynakta verilen $\left(\frac{\gamma}{J} - \mu - \kappa \right) \geq 0$ eşitsizlikleri gereği a ve b sabitlerinin pozitif oldukları görülmektedir. Bölümün başında da söylendiği gibi dispersiyon bağıntısının küçük dalga sayıları için $\omega = ak + bk^3 + \dots$ formunda olması (sistemin zayıf dispersif olması) ilgilenilen sistemde sonlu ama küçük genlikli dalgaların (zayıf nonlineerlik) asimptotik olarak KdV denklemi veya genelleştirilmiş formları ile temsil edilebileceğini bekleyebiliriz.

4.3. ZAYIF DİSPERSİF DALGALAR

Bu bölümde (4.2.21) ile belirlenen zayıf dispersif bölgede uzun akustik dalgaların yayılma problemi incelenecektir. Uygun koordinat seçimi yapmak için, lineer dispersiyon bağıntısının küçük dalga sayıları için verilen (4.2.21) açılımı kullanılarak dalga hareketinin faz fonksiyonu, $k \rightarrow 0$ için

$$\begin{aligned} kX - \omega t &= kX - (ak + bk^3) t + O(k^5) \\ &= k(X - at) - bk^3 t + O(k^5) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

formunda yazılır. (4.3.1) faz ifadesi incelenirse, ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$) dispersiyonun zayıflık derecesini gösteren bir parametre yani $\epsilon = O(k^2)$ olmak üzere

$$\xi = \epsilon^{1/2} (X - at), \quad \tau = \epsilon^{3/2} t \quad (4.3.2)$$

şeklindeki Gardner-Morikawa koordinat uzatmalarının yapılabileceği ortaya çıkar [20]. $\xi = \epsilon^{1/2} (X - at)$ dönüşümü ile, a sabit hızıyla giden bir gezen dalga (travelling wave) üzerine koordinat takımı taşınmış olmaktadır. (4.2.22) ifadesinden a büyüklüğü, $a = (2\mu + \kappa / 2\rho_0)^{1/2}$ olarak hesaplanmıştır. Burada a'nın ifadesinde görülen μ ve κ enine yerdeğiştirme ve enine mikro dönme dalgaların yayılmasıyla ilgili

sabitlerdir. (ξ, τ) yeni koordinat takımı, a sabit hızıyla hareket eden dalganın üzerine taşınmış durumdadır. (ξ, τ) koordinatlarında kısmî türev operatörleri

$$\frac{\partial}{\partial X} = \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad (4.3.3)$$

bağıntılarından faydalanarak hesaplanırlar. (4.2.10) alan denklemleri yeni koordinat takımında yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial p_\ell} \epsilon^{1/2} \frac{\partial p_\ell}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \varphi_\ell} \psi_\ell + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_k \partial \phi_\ell} \epsilon^{1/2} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi} - \rho_0 \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) v_k = 0$$

$$\epsilon^{1/2} \frac{\partial v_k}{\partial \xi} - \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) p_k = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_k \partial p_\ell} \epsilon^{1/2} \frac{\partial p_\ell}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_k \partial \varphi_\ell} \psi_\ell + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \psi_k \partial \phi_\ell} \epsilon^{1/2} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} - \lambda_{k\ell} w_\ell \\ - \gamma_{k\ell} \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) w_\ell = 0 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\epsilon^{1/2} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} - \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \psi_k = 0$$

$$w_k - \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \varphi_k = 0$$

denklemleri elde edilir. Burada zayıf nonlineer dalgalarla ilgilendiğinden bundan sonra yapılacak iş alan büyüklüklerini sıfır uniform durumu civarında ϵ 'un kuvvet serisine açmaktır. Bağımlı değişkenlerin yanısıra, Σ iç enerji fonksiyonu da bağlı olduğu alan büyüklükleri aracılığıyla ϵ 'un kuvvet serisine açılacaktır. İlk aşamada bağımlı değişkenlerin ϵ 'a bağıllılığının ϵ 'un kuvvetleri şeklinde olması hemen daima izlenen bir yoldur. Ancak bizim durumumuzda kapalı Σ iç enerji fonksiyonunun argümanları olan p_k, φ_k ve ψ_k fonksiyonlarına ne şekilde bağlı olduğu bilinmediğinden ve koordinat

uzatması sonucunda (4.3.4) denklemini sisteminde $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvetleri görüldüğünden, bütün bağımlı alan değişkenleri sıfır üniform durumu civarında $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvet serisine açılacaktır. Σ iç enerji fonksiyonu ve onun bağımlı değişkenlere göre türevleri p, φ ve ψ 'ye bağlı olduğundan, Σ ve Σ 'nin türevlerinin de $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvetlerine göre açılımları gerekmektedir. Keyfi bir f analitik skaler fonksiyonun sıfır civarındaki MacLaurin açılımı

$$f(\epsilon^{1/2}) = f(0) + \left(\frac{df}{d\epsilon^{1/2}}\right)_0 \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{d\epsilon^{1/2 2}}\right)_0 \epsilon + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 f}{d\epsilon^{1/2 3}}\right)_0 \epsilon^{3/2} + \dots$$

verilebilir. Keyfi f fonksiyonu, herbirinin ϵ 'a bağılılıkları

$$p_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_k^{(n)} (\epsilon^{1/2})^n, \quad \varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k^{(n)} (\epsilon^{1/2})^n, \quad \psi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_k^{(n)} (\epsilon^{1/2})^n$$

ile verilen p, φ ve ψ fonksiyonlarına bağlı olduğundan, f için verilen açılım kısmî türetmeler sonucunda uzun bir ifadeye dönüşecektir. Gerçekten f fonksiyonunun açılımı

$$\begin{aligned} f = f(0) &+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_k}\right)_0 \psi_k^{(1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)_0 p_k^{(1)} \right] \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2!} \left\{ 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_k}\right)_0 \varphi_k^{(2)} \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_k}\right)_0 \psi_k^{(2)} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)_0 p_k^{(2)} + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_k \partial \psi_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} \psi_k^{(1)} + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_k \partial p_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} p_k^{(1)} \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial \psi_k}\right)_0 p_k^{(1)} \psi_k^{(1)} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_k \partial \varphi_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} \varphi_k^{(1)} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial \psi_k}\right)_0 \psi_k^{(1)} \psi_k^{(1)} \\ &+ \left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_k}\right)_0 p_k^{(1)} p_k^{(1)} \right\} \epsilon + \frac{1}{3!} \left\{ 6 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_k}\right)_0 \varphi_k^{(3)} + 6 \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_k}\right)_0 \psi_k^{(3)} + 6 \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)_0 p_k^{(3)} \right. \\ &+ 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_k \partial \psi_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} \psi_k^{(2)} + 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_k \partial p_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} p_k^{(2)} + 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial \psi_k}\right)_0 p_k^{(1)} \psi_k^{(2)} \\ &+ 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_k \partial \varphi_k}\right)_0 \varphi_k^{(1)} \varphi_k^{(2)} + 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial \psi_k}\right)_0 \psi_k^{(1)} p_k^{(2)} + 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \psi_k \partial p_k}\right)_0 p_k^{(1)} \varphi_k^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial \phi_\ell} \right)_o p_k^{(1)} \phi_\ell^{(2)} + 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell} \right)_o \phi_k^{(1)} \phi_\ell^{(2)} + 6 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell} \right)_o \phi_k^{(2)} \phi_\ell^{(1)} \\
 &+ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell \partial \phi_m} \right)_o \phi_k^{(1)} \phi_\ell^{(1)} \phi_m^{(1)} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell \partial \phi_m} \right)_o \phi_m^{(1)} \phi_\ell^{(1)} \phi_k^{(1)} \\
 &+ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial p_k \partial p_\ell \partial p_m} \right)_o p_k^{(1)} p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell \partial \phi_m} \right)_o \phi_k^{(1)} \phi_\ell^{(1)} \phi_m^{(1)}
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell \partial p_m} \right)_o \phi_k^{(1)} \phi_\ell^{(1)} p_m^{(1)} + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell \partial \phi_m} \right)_o \phi_k^{(1)} \phi_\ell^{(1)} \phi_m^{(1)} \\
 &+ 6 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial \phi_\ell \partial p_m} \right)_o p_m^{(1)} \phi_\ell^{(1)} \phi_k^{(1)} + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial p_\ell \partial p_m} \right)_o \phi_k^{(1)} p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} \\
 &+ 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial p_\ell \partial \phi_m} \right)_o \phi_k^{(1)} \phi_m^{(1)} p_\ell^{(1)} + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \phi_k \partial p_\ell \partial p_m} \right)_o \phi_k^{(1)} p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} \} \epsilon^{3/2} + O(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

şeklini alır. Pertürbasyon açılımında gerekli olacağından $\lambda_{kl}(\varphi, w)$ ve $\gamma_{kl}(\varphi)$ fonksiyonlarının $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvetlerine göre açılımları

$$\begin{aligned}
 \lambda_{kl}(\varphi, w) &= (\lambda_{kl})_o + \left[\left(\frac{\partial \lambda_{kl}}{\partial \varphi_m} \right)_o \varphi_m^{(1)} + \left(\frac{\partial \lambda_{kl}}{\partial w_m} \right)_o w_m^{(1)} \right] \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \lambda_{kl}}{\partial \varphi_m \partial \varphi_n} \right)_o \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \right. \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial^2 \lambda_{kl}}{\partial \varphi_m \partial w_n} \right)_o \varphi_m^{(1)} w_n^{(1)} + \left. \left(\frac{\partial^2 \lambda_{kl}}{\partial w_m \partial w_n} \right)_o w_m^{(1)} w_n^{(1)} + 2 \left(\frac{\partial \lambda_{kl}}{\partial \varphi_m} \right)_o \varphi_m^{(2)} \right. \\
 &+ \left. \left. 2 \left(\frac{\partial \lambda_{kl}}{\partial w_m} \right)_o w_m^{(2)} \right] \epsilon + O(\epsilon^{3/2})
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{kl}(\varphi) &= (\gamma_{kl})_o + \left(\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial \varphi_m} \right)_o \varphi_m^{(1)} \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 \gamma_{kl}}{\partial \varphi_m \partial \varphi_n} \right)_o \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \right. \\
 &+ \left. \left. 2 \left(\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial \varphi_m} \right)_o \varphi_m^{(2)} \right] \epsilon + O(\epsilon^{3/2})
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanırlar.

Bütün bağımlı değişkenlerin

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{(n)} (\epsilon^{1/2})^n$$

formunda yazılabildiği varsayılır ve öngörülen bu pertürbasyon serileri (4.3.4)_{2,4,5} denklemlerinde yazılırsa

$$\left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) (p_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + p_k^{(2)} \epsilon + \dots) - \frac{\partial}{\partial \xi} (v_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + v_k^{(2)} \epsilon + \dots) = 0$$

(k=1,2,3)

$$\left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) (\phi_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + \phi_k^{(2)} \epsilon + \dots) - \frac{\partial}{\partial \xi} (w_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + w_k^{(2)} \epsilon + \dots) = 0$$

(k=1,2,3)

(4.3.7)

$$\epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) (\phi_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + \phi_k^{(2)} \epsilon + \dots) - (w_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + w_k^{(2)} \epsilon + \dots) = 0$$

(k=1,2,3)

ifadeleri elde edilir. (4.3.7) denklemleri $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse hiyerarşik denklemler elde edilir. (Burada ilgili alan yükleri ve türevlerinin $\xi \rightarrow \infty$ için sıfır olduğu varsayılmıştır.)

$$\epsilon^{1/2} : v_k^{(1)} = -a p_k^{(1)}, w_k^{(1)} = -a \phi_k^{(1)} = 0, w_k^{(1)} = 0 \quad (k=1,2,3)$$

$$\epsilon : v_k^{(2)} = -a p_k^{(2)}, w_k^{(2)} = -a \phi_k^{(2)}, w_k^{(2)} = -a \frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \xi} \quad (k=1,2,3)$$

(4.3.8)

ϵ için bulunan denklemler düzenlenirse

$$v_k^{(2)} = -a p_k^{(2)}, w_k^{(2)} = -a \frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \xi}, \phi_k^{(2)} = \frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \xi}$$

(4.3.9)

sonuçları elde edilir. $\epsilon^{3/2}$ ve ϵ^2 için

$$\epsilon^{3/2} : -a \frac{\partial p_k^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial \xi} = 0, w_k^{(3)} = -a \frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial \xi}, \phi_k^{(3)} = \frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial \xi}$$

(4.3.10)

$$\epsilon^2 : -a \frac{\partial p_k^{(4)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_k^{(2)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_k^{(4)}}{\partial \xi} = 0, w_k^{(4)} = -a \frac{\partial \phi_k^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \tau}, \phi_k^{(4)} = \frac{\partial \phi_k^{(3)}}{\partial \xi}$$

sonuçları elde edilir. $w_k^{(1)} = \phi_k^{(1)} = 0$ sonuçları, f fonksiyonunun açılımı olan (4.3.5) ve $\lambda_{k\ell}$ 'nin açılımı olan (4.3.6)₁ denklemlerinin basitleşmesini beraberinde getirecektir. Bu sonuçları kullanarak ilgili alan büyüklüklerinin pertürbasyon serileri (4.3.4)₁ ve (4.3.4)₃ denklemlerinde yazılır, Σ ve Σ 'nin türevleri için (4.3.5) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 & \epsilon^{1/2} \left(-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (v_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + v_k^{(2)} \epsilon + v_k^{(3)} \epsilon^{3/2} + \dots) - \frac{1}{\rho_0} \epsilon^{1/2} [\Sigma_{p_k p_\ell} \\
 & + (\Sigma_{p_k p_\ell \varphi_m}^{(1)} + \Sigma_{p_k p_\ell p_m}^{(1)}) \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} (2 \Sigma_{p_k p_\ell \varphi_m}^{(2)} + 2 \Sigma_{p_k p_\ell \psi_m}^{(2)} \\
 & + 2 \Sigma_{p_k p_\ell p_m}^{(2)} + 2 \Sigma_{p_k p_\ell \varphi_m p_n}^{(1) (1)} + \Sigma_{p_k p_\ell \varphi_m \varphi_n}^{(1) (1)} \\
 & + \Sigma_{p_k p_\ell p_m p_n}^{(1) (1)}) \epsilon + \dots] \left(\frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \epsilon^{1/2} + \frac{\partial p_\ell^{(2)}}{\partial \xi} \epsilon + \frac{\partial p_\ell^{(3)}}{\partial \xi} \epsilon^{3/2} + \dots \right) \\
 & - \frac{1}{\rho_0} [\Sigma_{p_k \varphi_\ell} + (\Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m}^{(1)} + \Sigma_{p_k \varphi_\ell p_m}^{(1)}) \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} (2 \Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m}^{(2)} \\
 & + 2 \Sigma_{p_k \varphi_\ell \psi_m}^{(2)} + 2 \Sigma_{p_k \varphi_\ell p_m}^{(2)} + 2 \Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m p_n}^{(1) (1)} + \Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n}^{(1) (1)} \\
 & + \Sigma_{p_k \varphi_\ell p_m p_n}^{(1) (1)}) \epsilon + \dots] (\psi_\ell^{(2)} \epsilon + \psi_\ell^{(3)} \epsilon^{3/2} + \dots) - \frac{1}{\rho_0} \epsilon^{1/2} [(\Sigma_{p_k \psi_\ell \varphi_m}^{(1)} \\
 & + \Sigma_{p_k \psi_\ell p_m}^{(1)}) \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} (2 \Sigma_{p_k \psi_\ell \varphi_m}^{(2)} + 2 \Sigma_{p_k \psi_\ell \psi_m}^{(2)} + 2 \Sigma_{p_k \psi_\ell p_m}^{(2)} \\
 & + 2 \Sigma_{p_k \psi_\ell \varphi_m p_n}^{(1) (1)} + \Sigma_{p_k \psi_\ell \varphi_m \varphi_n}^{(1) (1)} + \Sigma_{p_k \psi_\ell p_m p_n}^{(1) (1)}) \epsilon + \dots] \\
 & \left(\frac{\partial \psi_\ell^{(2)}}{\partial \xi} \epsilon + \frac{\partial \psi_\ell^{(3)}}{\partial \xi} \epsilon^{3/2} + \dots \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \epsilon^{1/2} \{ \gamma_{k\ell}^{(0)} + (\frac{\partial \gamma_{k\ell}}{\partial \varphi_m})_0 \varphi_m^{(1)} \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} [(\frac{\partial^2 \gamma_{k\ell}}{\partial \varphi_m \partial \varphi_n})_0 \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + 2 (\frac{\partial \gamma_{k\ell}}{\partial \varphi_m})_0 \varphi_m^{(2)}] \epsilon + \dots \} \\
 & (-a \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}) (w_\ell^{(2)} \epsilon + w_\ell^{(3)} \epsilon^{3/2} + \dots) + \{ \lambda_{k\ell}^{(0)} + (\frac{\partial \lambda_{k\ell}}{\partial \varphi_m})_0 \varphi_m^{(1)} \epsilon^{1/2} \\
 & + \frac{1}{2} [(\frac{\partial^2 \lambda_{k\ell}}{\partial \varphi_m \partial \varphi_n})_0 \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + 2 (\frac{\partial \lambda_{k\ell}}{\partial \varphi_m})_0 \varphi_m^{(2)} + 2 (\frac{\partial \lambda_{k\ell}}{\partial w_m})_0 w_m^{(2)}] \epsilon + \dots \} \\
 & (w_\ell^{(2)} \epsilon + w_\ell^{(3)} \epsilon^{3/2} + \dots) - \epsilon^{1/2} \{ [\sum_{\psi_k p_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\psi_k p_\ell p_m} p_m^{(1)}] \epsilon^{1/2} \\
 & + \frac{1}{2} [2 \sum_{\psi_k p_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{\psi_k p_\ell \psi_m} \psi_m^{(2)} + 2 \sum_{\psi_k p_\ell p_m} p_m^{(2)} + 2 \sum_{\psi_k p_\ell \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + \sum_{\psi_k p_\ell \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\psi_k p_\ell p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)}] \epsilon + \dots \} (\frac{\partial p_\ell}{\partial \xi} \epsilon^{1/2} + \frac{\partial p_\ell}{\partial \xi} \epsilon + \dots) \\
 & - \{ [\sum_{\psi_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\psi_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(1)}] \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} [2 \sum_{\psi_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{\psi_k \varphi_\ell \psi_m} \psi_m^{(2)} \\
 & + 2 \sum_{\psi_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(2)} + 2 \sum_{\psi_k \varphi_\ell \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\psi_k \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \\
 & + \sum_{\psi_k \varphi_\ell p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)}] \epsilon + \dots \} (\psi_\ell^{(2)} \epsilon + \psi_\ell^{(3)} \epsilon^{3/2} + \dots) - \epsilon^{1/2} \{ \sum_{\psi_k \psi_\ell} + \\
 & [\sum_{\psi_k \psi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\psi_k \psi_\ell p_m} p_m^{(1)}] \epsilon^{1/2} + \dots \} (\frac{\partial \psi_\ell}{\partial \xi} \epsilon + \frac{\partial \psi_\ell}{\partial \xi} \epsilon^{3/2} + \dots) \\
 & + \{ [\sum_{\psi_k \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\psi_k p_m} p_m^{(1)}] \epsilon^{1/2} + \frac{1}{2} [2 \sum_{\psi_k \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{\psi_k p_m} p_m^{(2)} \\
 & + 2 \sum_{\psi_k \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\psi_k \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\psi_k p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)}] \epsilon + 0(\epsilon^{3/2}) \} = 0
 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. (4.3.11) denklemleri $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse hiyerarşik denklemler elde edilir. (4.3.11)₁ denkleminden elde edilen hiyerarşik denklemler takımı

$$\begin{aligned}
 \epsilon : & -a \frac{\partial}{\partial \xi} v_k^{(1)} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_l} \frac{\partial p_l^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k \varphi_l} \phi_l^{(2)} = 0 \\
 \epsilon^{3/2} : & -a \frac{\partial}{\partial \xi} v_k^{(2)} - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{p_k p_l} \frac{\partial p_l^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\sum_{p_k p_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{p_k p_l p_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial p_l^{(1)}}{\partial \xi} \right] \\
 & - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{p_k \varphi_l} \phi_l^{(3)} + \left(\sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{p_k \varphi_l p_m} p_m^{(1)} \right) \phi_l^{(2)} \right] = 0 \\
 \epsilon^2 : & -a \frac{\partial}{\partial \xi} v_k^{(3)} + \frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{p_k p_l} \frac{\partial p_l^{(3)}}{\partial \xi} + \left(\sum_{p_k p_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} \right. \right. \\
 & + \left. \sum_{p_k p_l p_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial p_l^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(2 \sum_{p_k p_l \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{p_k p_l \varphi_m} \phi_m^{(2)} \right. \\
 & + 2 \sum_{p_k p_l p_m} p_m^{(2)} + 2 \sum_{p_k p_l \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \left. \sum_{p_k p_l \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \right. \\
 & \left. + \sum_{p_k p_l p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \right) \frac{\partial p_l^{(1)}}{\partial \xi} \left. \right] - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{p_k \varphi_l} \phi_l^{(4)} + \left(\sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} \right. \right. \\
 & + \left. \sum_{p_k \varphi_l p_m} p_m^{(1)} \right) \phi_l^{(3)} + \frac{1}{2} \left(2 \sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \phi_m^{(2)} \right. \\
 & + 2 \sum_{p_k \varphi_l p_m} p_m^{(2)} + 2 \sum_{p_k \varphi_l \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \left. \sum_{p_k \varphi_l \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \right. \\
 & \left. + \sum_{p_k \varphi_l p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \right) \phi_l^{(2)} \left. \right] - \frac{1}{\rho_0} \left(\sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{p_k \varphi_l p_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial \phi_l^{(2)}}{\partial \xi} = 0
 \end{aligned}$$

(k=1,2,3) (4.3.12)

olur. (4.3.11)₂ denkleminden ise

$$\epsilon^{1/2} : \sum_{\varphi_k \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\varphi_k p_m} p_m^{(1)} = 0$$

$$\epsilon : 2 \sum_{\varphi_k \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_k p_m} p_m^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_k p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} : & -\gamma_{k\ell}^{(0)} a \frac{\partial w_\ell^{(2)}}{\partial \xi} - (\sum_{\varphi_k p_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\varphi_k p_\ell p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} - (\sum_{\varphi_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} \\ & + \sum_{\varphi_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(1)}) \psi_\ell^{(2)} - \sum_{\varphi_k \psi_\ell} \frac{\partial \psi_\ell^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{6} (6 \sum_{\varphi_k \varphi_m} \varphi_m^{(3)} + 6 \sum_{\varphi_k p_m} p_m^{(3)} \\ & + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m \psi_\ell} \varphi_m^{(1)} \psi_\ell^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(2)} \\ & + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} p_n^{(1)} \varphi_m^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k p_m \psi_\ell} p_m^{(1)} \psi_\ell^{(2)} \\ & + \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n \varphi_\ell} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} + \sum_{\varphi_k p_m p_n p_\ell} p_m^{(1)} p_\ell^{(1)} p_n^{(1)} \\ & + 3 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_\ell p_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} p_n^{(1)} + 3 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n p_\ell} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} p_\ell^{(1)}) = 0 \quad (4.3.13) \end{aligned}$$

hiyerarşik denklemleri elde edilir. (4.3.12) ve (4.3.13) denklemleri k=1,2,3 için geçerlidir ve tekrarlanan indisler üzerinde toplam vardır. Bundan sonra yapılacak iş lineer izotrop malzeme sabitleri ile Σ 'nın türevleri arasındaki bağıntıların verildiği (4.2.14) ifadelerini ve (4.3.8-10) sonuçlarını kullanarak denklem hiyerarşilerini düzenlemektir. (4.3.12)₁ denklemi k=1,2,3 için yazılırsa

$$\begin{aligned} \epsilon : & -a \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_o} \sum_{p_1 p_1} \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \\ & -a \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_o} \sum_{p_2 p_2} \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_o} \sum_{p_2 \varphi_3} \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (4.3.14) \end{aligned}$$

$$-a \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_3 p_3} \frac{\partial p_3^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_3 \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

sonuçları elde edilir. (4.3.14) denklemlerinde $v_k^{(1)} = -a p_k^{(1)}$ yerine yazılır $\sum_{p_1 p_1} = 2\lambda + \mu + \kappa$, $\sum_{p_2 p_2} = \sum_{p_3 p_3} = \mu + \kappa$, $\sum_{p_2 \varphi_3} = -\sum_{p_3 \varphi_2} = -\kappa$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\varepsilon : \frac{-(2\mu + \kappa + 2\lambda)}{\rho_0} \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

$$-\frac{\kappa}{2} \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \xi} = -\kappa \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \xi}$$

$$-\frac{\kappa}{2} \frac{\partial p_3^{(1)}}{\partial \xi} = \kappa \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \xi}$$

ifadeleri bulunur. Bu denklemlerin çözümünden

$$p_1^{(1)} = 0, \quad p_2^{(1)} = 2\varphi_3^{(1)}, \quad p_3^{(1)} = -2\varphi_2^{(1)} \quad (4.3.15)$$

sonuçları elde edilir. Benzer şekilde (4.3.13)₁ denklemi $k=1,2,3$ için yazılırsa

$$\varepsilon^{1/2} : \sum_{\varphi_1 \varphi_1} \varphi_1^{(1)} = 0$$

$$\sum_{\varphi_2 \varphi_2} \varphi_2^{(1)} + \sum_{\varphi_2 p_3} p_3^{(1)} = 0 \quad (4.3.16)$$

$$\sum_{\varphi_3 \varphi_3} \varphi_3^{(1)} + \sum_{\varphi_3 p_2} p_2^{(1)} = 0$$

ifadelerinin geçerli olduğu görülür. $\sum_{\varphi_2 \varphi_2} = 2\kappa$, $\sum_{\varphi_2 p_3} = -\sum_{\varphi_3 p_2} = \kappa$ olduğu düşünülürse (4.3.16) denklemlerinden

$$\varphi_1^{(1)} = 0, \quad p_3^{(1)} = -2\varphi_2^{(1)}, \quad p_2^{(1)} = 2\varphi_3^{(1)} \quad (4.3.17)$$

eşitlikleri bulunur. (4.3.15) ve (4.3.17) sonuçlarının son ikisi aynıdır. (4.3.13)₂ denkleminde k=1,2,3 için bakılacak olursa

$$\varepsilon : 2 \sum_{\varphi_1 \varphi_1} \varphi_1^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_1 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} = 0$$

$$2 \sum_{\varphi_2 \varphi_2} \varphi_2^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_2 p_3} p_3^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_2 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_2 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \quad (4.3.18)$$

$$+ \sum_{\varphi_2 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} = 0$$

$$2 \sum_{\varphi_3 \varphi_3} \varphi_3^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_3 p_2} p_2^{(2)} + 2 \sum_{\varphi_3 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_3 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)}$$

$$+ \sum_{\varphi_3 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} = 0$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler yazılırken (4.2.14) eşitlikleri kullanılmıştır ve daha önce belirtildiği gibi tekrarlanan indisler üzerinde toplama vardır. (4.3.18) ifadeleri düzenlenirse ikinci mertebeden mikrodönme bileşenlerinin, birinci mertebeden yerdeğiştirme gradyanları (birinci mertebeye mikrodönme ve yerdeğiştirme gradyanları (4.3.17) ile birbirlerine bağlıdırlar) ve ikinci mertebeye yerdeğiştirme gradyanlarına

$$\varepsilon : 4 \kappa \varphi_1^{(2)} = - (2 \sum_{\varphi_1 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)})$$

$$4 \kappa \varphi_2^{(2)} = -2 \kappa p_3^{(2)} - (2 \sum_{\varphi_2 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_2 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)})$$

$$+ \sum_{\varphi_2 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)}) \quad (4.3.19)$$

$$4 \kappa \varphi_3^{(2)} = 2 \kappa p_2^{(2)} - (2 \sum_{\varphi_3 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_3 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)})$$

$$+ \sum_{\varphi_3 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)})$$

şeklinde bağlı olduğu ortaya çıkar. Denklem hiyerarşilerinin düzenlenmesine devam edilir ve (4.3.12)₂ denklemi k=1,2,3 için açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2}: & -a \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{P_1 P_1} \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \left(\sum_{P_1 P_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{P_1 P_\ell P_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \\ & - \frac{1}{\rho_0} \left(\sum_{P_1 \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{P_1 \varphi_\ell P_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \\ & -a \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{P_2 P_2} \frac{\partial p_2^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\sum_{P_2 P_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{P_2 P_\ell P_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \right] \\ & - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{P_2 \varphi_3} \frac{\partial \varphi_3^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\sum_{P_2 \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{P_2 \varphi_\ell P_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (4.3.20) \\ & -a \frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{P_3 P_3} \frac{\partial p_3^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\sum_{P_3 P_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{P_3 P_\ell P_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \right] \\ & - \frac{1}{\rho_0} \left[\sum_{P_3 \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\sum_{P_3 \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{P_3 \varphi_\ell P_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \right] = 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde (4.3.9) kullanılarak $v_k^{(2)}$ nin yerine eşidi $p_k^{(2)}$ yazılır ve ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2}: & -\left(\frac{2\mu+\kappa+2\lambda}{2}\right) \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial \xi} = \sum_{P_1 P_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)}) + \frac{1}{2} \sum_{P_1 P_\ell P_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} p_m^{(1)}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{P_1 \varphi_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)}) \\ & - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial p_2^{(2)}}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial \varphi_3^{(2)}}{\partial \xi} - \left[\sum_{P_2 P_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)}) + \frac{1}{2} \sum_{P_2 P_\ell P_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} p_m^{(1)}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{P_2 \varphi_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)}) \right] = 0 \\ & - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial p_3^{(2)}}{\partial \xi} - \kappa \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial \xi} - \left[\sum_{P_3 P_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} p_\ell^{(1)}) + \frac{1}{2} \sum_{P_3 P_\ell P_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} p_m^{(1)}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{P_3 \varphi_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)}) \right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemlerin ξ - üzerinde integrasyonu ile ($\xi \rightarrow \infty$ için Φ_1 ile gösterebileceğimiz alan büyüklüklerinin sıfıra gitmesi koşulu altında)

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} : p_1^{(2)} = & -\frac{2}{2\mu+\kappa+2\lambda} \left(\sum_{p_1 p_\ell \varphi_m} p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{p_1 p_\ell p_m} p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{p_1 \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} \right) \\ 4\kappa \varphi_3^{(2)} = & 2\kappa p_2^{(2)} + 4 \sum_{p_2 p_\ell \varphi_m} p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} + 2 \sum_{p_2 p_\ell p_m} p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} \\ & + 2 \sum_{p_2 \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \quad (4.3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\kappa \varphi_2^{(2)} = & -2\kappa p_3^{(2)} - (4 \sum_{p_3 p_\ell \varphi_m} p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} + 2 \sum_{p_3 p_\ell p_m} p_\ell^{(1)} p_m^{(1)}) \\ & + 2 \sum_{p_3 \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. (4.3.19) ve (4.3.21) sonuçlarına birlikte bakıldığında ilk olarak ikinci merteye mikrodönme bileşeni $\varphi_1^{(2)}$ ve yer-değiştirme gradyanı $p_1^{(2)}$ büyüklüklerinin sadece birinci merteye büyüklüklere bağlı olduğu görülmektedir. İkinci olarak her iki grupta da yer alan $\varphi_2^{(2)}$ ve $\varphi_3^{(2)}$ büyüklüklerinin ilk bakışta birbirine eşit olmadıkları gözlenmektedir. (4.3.19) ve (4.3.21) denklem gruplarından elde edilen $\varphi_2^{(2)}$ ve $\varphi_3^{(2)}$ büyüklüklerinin birbirlerine eşit olduğunu söyleyebilmek için genel makroizotrop bir katı için

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\varphi_2 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_2 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_2 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \\ = 4 \sum_{p_3 p_n \varphi_m} p_n^{(1)} \varphi_m^{(1)} + 2 \sum_{p_3 p_n p_m} p_n^{(1)} p_m^{(1)} + 2 \sum_{p_3 \varphi_n \varphi_m} \varphi_n^{(1)} \varphi_m^{(1)} \quad (4.3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\varphi_3 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_3 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_3 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \\ = -4 \sum_{p_2 p_n \varphi_m} p_n^{(1)} \varphi_m^{(1)} - 2 \sum_{p_2 p_n p_m} p_n^{(1)} p_m^{(1)} - 2 \sum_{p_2 \varphi_n \varphi_m} \varphi_n^{(1)} \varphi_m^{(1)} \end{aligned}$$

eşitliklerinin geçerli olduğu gösterilmek zorundadır. Daha önce lineer denklemleri incelerken genel olarak $\Sigma_{p_k \varphi_\ell}$ şeklinde kendini gösteren birinci mertebeli sabitlerle lineer izotrop katıya ait sabitler arasındaki ilişkiler bilindiğinden (4.3.22) tipinde kısıtlamalar görülmemişti. Ancak katının makroizotrop olması durumunda, ikinci mertebeli sabitler diyebileceğimiz $\Sigma_{p_k \varphi_\ell p_m}$ şeklindeki ifadelerin ne gibi kısıtlamalar sağlayacağı henüz bilinmemektedir. Bir boyutlu durumda Σ fonksiyonu p, φ ve ϕ değişkenlerinin fonksiyonudur. Bu değişkenler x_i ($i=1,9$) olarak adlandırılırsa, genel bir Σ fonksiyonu (argümanlarının analitik fonksiyonu) her zaman

$$\Sigma(x_i + 0) = \Sigma_0 + \frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} \Big|_0 x_i + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 x_i x_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Big|_0 x_i x_j x_k + \dots \quad (4.3.23)$$

şeklinde yazılabilir. (Tekrarlanan indisler üzerinde birden dokuza kadar toplama vardır). Burada gösterilmek istenen genel makroizotrop bir katı için (4.3.22) ifadelerinin geçerli olduğudur. İkinci mertebeli sabitler arasındaki kısıtlamalar gibi görülen (4.3.22) denklemlerine giren terimler, Σ 'nın (4.3.23) şeklindeki açılımında görülen dördüncü grup terimlerden ibarettir. Eğer genel izotrop bir Σ 'yı (4.3.23) formunda açabilirsek, $\Sigma_{p_k \varphi_\ell p_m}$ şeklindeki sabitlerin izotrop katı için ne olduğunu hesaplamış oluruz. Bunun için Σ fonksiyonu argümanları olan ve hiç bir simetrisi olmayan \mathbf{C} ve \mathbf{F} tansörlerinin (2.3.28) ile verilen ortak invariantlarının izotropik tansör fonksiyonu olarak yazılır. \mathbf{C} ve \mathbf{F} tansörlerinin yerdeğiştirme gradyanları, dönme ve dönme gradyanlarına bağlı ifadeleri:

$$\begin{aligned} C_{KL} = & \delta_{KL} - \frac{1}{2} \theta^2 \delta_{KL} + \frac{1}{2} \varphi_m \varphi_n \delta_{mK} \delta_{nL} - \epsilon_{klm} \varphi_m \delta_{lL} \delta_{kK} + \frac{1}{6} \epsilon_{klm} \theta^2 \varphi_m \delta_{lL} \delta_{kK} \\ & + u_{k,K} \delta_{kL} - \frac{1}{2} \theta^2 u_{k,K} \delta_{kL} + \frac{1}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mL} u_{k,K} - \epsilon_{klm} \varphi_m \delta_{lL} u_{k,K} + O(\cdot^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{KL} = & \frac{1}{2} \epsilon_{KMN} (-\epsilon_{m\ell n} \varphi_{n,L} \delta_{\ell M} \delta_{mN} - \varphi_{n,L} \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN} - \frac{2}{3} \epsilon_{m\ell n} \varphi_r \varphi_{r,L} \varphi_n \delta_{\ell M} \delta_{mN} \\ & + \frac{2}{3} \epsilon_{m\ell n} \theta^2 \varphi_{n,L} \delta_{\ell M} \delta_{mN} + O(\cdot^4)) \end{aligned}$$

oldukları düşünülürse, Σ 'nin invaryantlarının kübik fonksiyonu olarak yazılabileceği görülür. Önceki bölümlerde söylendiği gibi Γ ağırlıklı bir tansör olduğundan, tam ortogonal dönüşümler altında değişmezlik olan izotropi durumunda Γ işaret değiştirebilir. Eğer Σ fonksiyonu Γ 'yı içeren invaryantların tek kuvvetlerine bağlı ise invaryant kalmaz. Bu durumu önlemek için Σ fonksiyonu, Γ 'yı içeren invaryantların çift kuvvetlerine bağlı olarak alınmak zorundadır. (2.3.38) ile verilen Σ açılımında yer alacak invaryantların p, φ ve ϕ fonksiyonlarına bağlı ifadeleri

$$I_1 = 3 - \theta^2 + u_{k,K} \delta_{kK} - \frac{1}{2} \theta^2 u_{k,K} \delta_{kK} + \frac{1}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k,K} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,K} + 0(\cdot^4)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (3 - 4\theta^2 + 2 u_{r,R} \delta_{rR} - 4\theta^2 u_{r,R} \delta_{rR} + 4 \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k,K} - 4 \epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k,K} \delta_{\ell K} + u_{k,K} \delta_{kL} u_{r,L} \delta_{rK} + u_{k,K} \delta_{kL} u_{r,L} \delta_{rK} - 2 \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,L} u_{r,K} \delta_{rL} + 0(\cdot^4))$$

$$I_3 = \frac{1}{3} (3 - 9\theta^2 + 3 u_{r,R} \delta_{rR} - \frac{27}{2} \theta^2 u_{r,R} \delta_{rR} + \frac{27}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k,K} - 9 \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,K} + 3 u_{r,K} \delta_{rM} u_{p,M} \delta_{pK} - 9 \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,M} u_{r,K} \delta_{rM} + u_{k,K} \delta_{kL} u_{r,L} \delta_{rM} u_{p,M} \delta_{pK} + 0(\cdot^4))$$

$$I_4 = \frac{1}{2} (3 + 2 u_{k,K} \delta_{kK} + u_{k,K} u_{k,K})$$

$$I_5 = 3 - \theta^2 + 3 u_{k,K} \delta_{kK} - \frac{3}{2} \theta^2 u_{k,K} \delta_{kK} + \frac{3}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k,K} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k,L} \delta_{\ell L} + u_{k,L} \delta_{kK} u_{r,K} \delta_{rL} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k,K} u_{r,L} \delta_{\ell L} \delta_{rK} + 2 u_{k,K} u_{k,K} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell L} \delta_{kK} u_{r,L} u_{r,K} + u_{k,L} u_{k,K} u_{r,K} \delta_{rL} + 0(\cdot^4)$$

$$I_7 = \varphi_{k,K} \delta_{kK} - \frac{1}{2} \epsilon_{LMN} \varphi_{n,L} \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN} + \frac{2}{3} \varphi_r \varphi_{r,L} \varphi_n \delta_{nL} - \frac{2}{3} \theta^2 \varphi_{n,L} \delta_{nL}$$

$$- \frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{kK} \varphi_{\ell,K} + u_{k,K} \varphi_{k,K} - \frac{1}{2} u_{k,K} \delta_{kL} \epsilon_{LMN} \varphi_{n,K} \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN}$$

$$- \epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k,K} \varphi_{\ell,K} + O(\cdot^4)$$

$$I_8 = \varphi_{n,N} \varphi_{m,M} \delta_{nM} \delta_{mN} - \frac{1}{2} \epsilon_{NPR} \varphi_{n,N} \varphi_{m,M} \varphi_p \delta_{pP} \delta_{mR} \delta_{nM}$$

$$- \frac{1}{2} \epsilon_{MRP} \varphi_{m,M} \varphi_{n,N} \varphi_p \delta_{pR} \delta_{nP} \delta_{mN} - \epsilon_{k\ell p} \varphi_p \delta_{kK} \varphi_{\ell,N} \varphi_{m,K} \delta_{mN}$$

$$+ u_{k,K} \varphi_{k,N} \varphi_{m,K} \delta_{mN} + O(\cdot^4)$$

$$I_{10} = \frac{1}{2} \epsilon_{KMN} (-\epsilon_{m\ell n} \varphi_{n,K} \delta_{\ell M} \delta_{nN} - \varphi_{n,K} \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN}$$

$$- \frac{2}{3} \epsilon_{m\ell n} \varphi_r \varphi_{r,K} \varphi_n \delta_{\ell M} \delta_{mN} + \frac{2}{3} \epsilon_{m\ell n} \theta^2 \varphi_{n,K} \delta_{\ell M} \delta_{mN} + O(\cdot^4))$$

$$I_{11} = \frac{1}{2} \varphi_{n,N} \varphi_{m,M} \delta_{nM} \delta_{mN} - \frac{1}{2} \epsilon_{LMN} \varphi_{n,L} \varphi_{r,K} \varphi_p \delta_{pM} \delta_{rN} \delta_{nK} + O(\cdot^4)$$

$$I_{13} = \frac{1}{2} \varphi_{r,R} \varphi_{r,R} + O(\cdot^4) \quad (4.3.24)$$

olarak elde edilir. Biz alan büyüklüklerimizi sıfır durumu civarında seriye açtıığımızdan bu durumda özellikle **C** ile ilgili invaryantların aldıkları değerleri gözönüne alarak Σ açılımını yapmak zorundayız. Gerçekten sıfır durum civarında invaryantların

$$I_1 = 3, \quad I_2 = \frac{3}{2}, \quad I_3 = 1, \quad I_4 = \frac{3}{2}, \quad I_5 = 3, \quad I_7 = I_8 = I_{10} = I_{11} = I_{13} = 0$$

olduklarına dikkat edilmelidir. $\Sigma_{p^k \varphi_{\ell} \varphi_m}$ şeklindeki türevler kübik terimlerden geleceği için Σ , **C** ve Γ tansörlerinin ortak invaryantlarının kübik terimlerine kadar yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \Sigma = & \alpha_1 (I_1 - 3) + \alpha_2 (I_1 - 3)^2 + \alpha_3 I_{10}^2 + \alpha_4 (I_1 - 3)^3 + \alpha_5 (I_1 - 3) I_{10}^2 \\
 & + \alpha_6 (I_1 - 3) \left(I_2 - \frac{3}{2} \right) + \alpha_7 (I_1 - 3) \left(I_4 - \frac{3}{2} \right) + \alpha_8 (I_1 - 3) I_{11} + \alpha_9 (I_1 - 3) I_{13} \\
 & + \alpha_{10} I_{10} I_7 + \alpha_{11} \left(I_2 - \frac{3}{2} \right) + \alpha_{12} (I_3 - 1) + \alpha_{13} \left(I_4 - \frac{3}{2} \right) + \alpha_{14} (I_5 - 3) + \alpha_{15} I_8 \\
 & + \alpha_{16} I_{11} + \alpha_{17} I_{13} + \dots \quad (4.3.25)
 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.24) ifadeleri (4.3.25) te yerlerine yazılırsa Σ 'nın yerdeğiştirme gradyanlarına, dönme ve dönme gradyanlarına bağlı ifadesi aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
 \Sigma = & \alpha_1 \left(-\theta^2 + u_{k,K} \delta_{kK} - \frac{1}{2} \theta^2 u_{k,K} \delta_{kK} + \frac{1}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k,K} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,K} \right) \\
 & + \alpha_2 \left(-2\theta^2 u_{\ell,L} \delta_{\ell L} - 2\epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,K} u_{r,R} \delta_{rR} + u_{k,K} \delta_{kK} u_{r,R} \delta_{rR} \right) \\
 & + \frac{\alpha_3}{4} \left[\epsilon_{KMN} \epsilon_{RQS} \left(-\epsilon_{m\ell n} \varphi_{n,K} \delta_{\ell M} \delta_{mN} \right) \left(-\epsilon_{prs} \varphi_{s,R} \delta_{rQ} \delta_{pS} \right) \right. \\
 & \left. - \varphi_{n,R} \varphi_r \delta_{rQ} \delta_{nS} \right] + \epsilon_{KMN} \varphi_{n,K} \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN} \epsilon_{RQS} \epsilon_{m\ell q} \varphi_{q,R} \delta_{\ell Q} \delta_{mS} \\
 & + \alpha_4 u_{k,K} \delta_{kK} u_{\ell,L} \delta_{\ell L} u_{r,R} \delta_{rR} + \alpha_5 \left(\varphi_{k,K} \delta_{kK} \varphi_{\ell,L} \delta_{\ell L} u_{r,R} \delta_{rR} \right) \\
 & + \frac{\alpha_6}{2} \left[-\theta^2 2 u_{r,R} \delta_{rR} + u_{k,K} \delta_{kK} \left(-4\theta^2 + 2 u_{r,R} \delta_{rR} - 4\epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k,K} \delta_{\ell K} \right) \right. \\
 & \left. + u_{k,K} \delta_{kL} u_{r,L} \delta_{rK} \right] - 2\epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,K} u_{r,R} \delta_{rR} \left. + \frac{\alpha_7}{2} \left(-\theta^2 2 u_{k,K} \delta_{kK} \right) \right. \\
 & \left. + 2 u_{k,K} \delta_{kK} u_{\ell,L} \delta_{\ell L} + u_{k,K} u_{k,K} u_{\ell,L} \delta_{\ell L} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k,K} u_{r,R} \delta_{rR} \right) \\
 & + \alpha_8 \varphi_{n,N} \varphi_{m,M} \delta_{nM} \delta_{mN} u_{k,K} \delta_{kK} + \frac{\alpha_9}{2} \varphi_{r,R} \varphi_{r,R} u_{k,K} \delta_{kK} \\
 & + \frac{\alpha_{10}}{2} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{KMN} \left(-\epsilon_{m\ell n} \varphi_{n,K} \delta_{\ell M} \delta_{mN} \right) \left(\varphi_{r,R} \delta_{rR} - \frac{1}{2} \epsilon_{LRS} \varphi_{n,L} \varphi_r \delta_{rR} \delta_{nS} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{kK} \varphi_{\ell, K} + u_{k, K} \varphi_{k, K}) - \frac{1}{2} \epsilon_{KMN} \varphi_{n, K} \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN} \varphi_{r, R} \delta_{rR}] \\
 & + \frac{\alpha_{11}}{2} (-4\theta^2 + 2u_{r, R} \delta_{rR} - 4\theta^2 u_{r, R} \delta_{rR} + 4\varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k, K} \\
 & - 4\epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k, K} \delta_{\ell K} + u_{k, K} \delta_{kL} u_{r, L} \delta_{rK} - 2\epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k, L} u_{r, K} \delta_{rL}) \\
 & + \frac{\alpha_{12}}{3} (-9\theta^2 + 3u_{r, R} \delta_{rR} - \frac{27}{2} \theta^2 u_{r, R} \delta_{rR} + \frac{27}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k, K} \\
 & - 9\epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k, K} + 3u_{r, K} \delta_{rM} u_{p, M} \delta_{pK} - 9\epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell K} u_{k, M} u_{r, K} \delta_{rM} \\
 & + u_{k, M} \delta_{kL} u_{r, L} \delta_{rM} u_{p, M} \delta_{pK}) + \frac{\alpha_{13}}{2} (2u_{k, K} \delta_{kK} + u_{k, K} u_{k, K}) \\
 & + \alpha_{14} (-\theta^2 + 3u_{k, K} \delta_{kK} - \frac{3}{2} \theta^2 u_{k, K} \delta_{kK} + \frac{3}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{mK} u_{k, K} \\
 & - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k, L} \delta_{\ell L} + u_{k, L} \delta_{kK} u_{r, L} \delta_{rL} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m u_{k, K} u_{r, L} \delta_{\ell L} \delta_{rK} \\
 & + 2u_{k, K} u_{k, K} - \epsilon_{k\ell m} \varphi_m \delta_{\ell L} \delta_{kK} u_{r, L} u_{r, K} + u_{k, L} u_{k, K} u_{r, K} \delta_{rL}) \\
 & + \alpha_{15} (\varphi_{n, N} \varphi_{m, M} \delta_{nM} \delta_{mN} - \frac{1}{2} \epsilon_{NPR} \varphi_{n, N} \varphi_{m, M} \varphi_p \delta_{pP} \delta_{mR} \delta_{nM} \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon_{MPR} \varphi_{m, M} \varphi_{n, N} \varphi_p \delta_{pR} \delta_{nP} \delta_{mN} - \epsilon_{k\ell p} \varphi_p \delta_{kK} \varphi_{\ell, N} \varphi_{m, K} \delta_{mN} \\
 & + u_{k, K} \varphi_{k, N} \varphi_{m, K} \delta_{mN}) + \alpha_{16} (\frac{1}{2} \varphi_{n, N} \varphi_{m, M} \delta_{nM} \delta_{mN} \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon_{LMN} \varphi_{n, L} \varphi_{r, K} \varphi_p \delta_{pM} \delta_{rN} \delta_{nK}) + \frac{\alpha_{17}}{2} \varphi_{r, R} \varphi_{r, R} + \dots \quad (4.3.26)
 \end{aligned}$$

(4.3.26) ifadesi bir boyutlu durum için yazılır ve büyüklüklerin mertebelerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= (\alpha_1 + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + 3\alpha_{14}) p_k \delta_{k1} + [\alpha_1 (-\theta^2 + \epsilon_{1km} \varphi_m p_k) \\
 & + \alpha_2 p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1} + \frac{\alpha_3}{4} \epsilon_{1MN} \epsilon_{1QS} \epsilon_{m\ell n} \psi_n \delta_{\ell M} \delta_{mN} \epsilon_{prs} \psi_s \delta_{rQ} \delta_{pS}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_{10}}{4} \epsilon_{1MN} \epsilon_{m\ell n} \psi_n \delta_{\ell M} \delta_{mN} \psi_r \delta_{r1} + \alpha_6 p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1} + \alpha_7 p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1} \\
 & + \frac{\alpha_{11}}{2} (-4\theta^2 + 4\epsilon_{1km} \varphi_m p_m + p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_{12}}{3} (-9\theta^2 + 9\epsilon_{1km} \varphi_m p_k \\
 & + 3p_r \delta_{r1} p_k \delta_{k1}) + \frac{\alpha_{13}}{2} p_k p_k + \alpha_{14} (-\theta^2 + \epsilon_{1km} \varphi_m p_k + p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1} + 2p_k p_k) \\
 & + \alpha_{15} \psi_n \psi_m \delta_{n1} \delta_{m1} + \frac{\alpha_{16}}{2} \psi_n \psi_m \delta_{n1} \delta_{m1} + \frac{\alpha_{17}}{2} \psi_r \psi_r \\
 & + \left\{ \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} \theta^2 p_k \delta_{k1} + \frac{1}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{m1} p_k \right) + \alpha_2 \left(-2\theta^2 p_k \delta_{k1} + 2\epsilon_{1km} \varphi_m p_k p_r \delta_{r1} \right) \right. \\
 & + \frac{\alpha_3}{4} [\epsilon_{1MN} \epsilon_{1QS} (+\epsilon_{m\ell n} \psi_n \delta_{\ell M} \delta_{mN} \psi_p \varphi_r \delta_{rQ} \delta_{pS} + \psi_n \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN} \epsilon_{m\ell q} \psi_q \delta_{\ell Q} \delta_{mS})] \\
 & + \alpha_4 p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1} p_m \delta_{m1} + \alpha_5 \psi_k \delta_{k1} \psi_\ell \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1} \\
 & + \frac{\alpha_6}{2} [-6\theta^2 p_k \delta_{k1} + p_n \delta_{n1} (4\epsilon_{1km} \varphi_m p_k + p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1}) + 2\epsilon_{1km} \varphi_m p_k p_r \delta_{r1}] \\
 & + \frac{\alpha_7}{2} (-2\theta^2 p_k \delta_{k1} + p_k p_k p_r \delta_{r1} + \epsilon_{1km} \varphi_m p_k p_r \delta_{r1}) + \alpha_8 \psi_n \psi_m \delta_{n1} \delta_{m1} p_k \delta_{k1} \\
 & + \frac{\alpha_9}{2} \psi_r \psi_r p_k \delta_{k1} + \frac{\alpha_{10}}{2} \left[-\frac{1}{2} \epsilon_{1MN} \epsilon_{m\ell n} \psi_n \delta_{\ell M} \delta_{mN} \left(-\frac{1}{2} \epsilon_{1RS} \psi_n \varphi_r \delta_{rR} \delta_{nS} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \epsilon_{1km} \varphi_m \psi_k + p_k \psi_k \right) - \frac{1}{2} \epsilon_{1MN} \psi_n \varphi_r \delta_{rM} \delta_{nN} \psi_r \delta_{r1} \right] + \frac{\alpha_{11}}{2} (-4\theta^2 p_k \delta_{k1} \\
 & + 4\varphi_k \varphi_m \delta_{m1} p_k + 2\epsilon_{1km} \varphi_m p_k p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_{12}}{3} \left(-\frac{27}{2} \theta^2 p_k \delta_{k1} \right. \\
 & \left. + \frac{27}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{m1} p_k + 9\epsilon_{1km} \varphi_m p_k p_r \delta_{r1} + p_k \delta_{k1} p_r \delta_{r1} p_m \delta_{m1} \right) \\
 & + \alpha_{14} \left(-\frac{3}{2} \theta^2 p_k \delta_{k1} + \frac{3}{2} \varphi_k \varphi_m \delta_{m1} p_k + \epsilon_{1km} \varphi_m p_k p_r \delta_{r1} + p_k p_k p_r \delta_{r1} \right) \\
 & + \alpha_{15} \left(-\frac{1}{2} \epsilon_{1PR} \psi_n \psi_m \varphi_r \delta_{rP} \delta_{mR} \delta_{n1} - \frac{1}{2} \epsilon_{1PR} \psi_m \psi_n \varphi_r \delta_{rR} \delta_{nP} \delta_{m1} \right)
 \end{aligned}$$

$$- \varepsilon_{1km} \varphi_m \psi_k \psi_r \delta_{r1} + p_k \psi_k \psi_m \delta_{m1} + \alpha_{16} \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{1MN} \psi_n \psi_r \varphi_p \delta_{pM} \delta_{rN} \delta_{n1} \right) \} \\ + 0(\cdot^4) \quad (4.3.27)$$

sonucu elde edilir. $\Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m}$ şeklindeki türevleri hesaplamak için (4.3.27) ile verilen $\Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m}$ 'nin türevlerini almamız gerekmektedir. Dikkat edilirse (4.3.27) ifadesinde φ^3 'lü terimlerin olmadığı hemen görülebilir. Bu durumda

$$(\Sigma_{p_k \varphi_\ell \varphi_m})_0 = 0$$

olduğu açıktır. $(\Sigma_{p_k p_\ell p_m})_0$ katsayılarını bulmak için $(p)^3$ 'lü terimleri türetmek yetecektir. Gerçekten $\Sigma_{p_k p_\ell p_m}$ için

$$\Sigma_{p_k} = \alpha_4 (3 \delta_{k1} p_\ell \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_6}{2} (3 \delta_{k1} p_\ell \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_7}{2} (2 p_k p_\ell \delta_{\ell 1} \\ + p_r p_r \delta_{k1}) + \frac{\alpha_{12}}{3} (3 \delta_{k1} p_\ell \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1}) + \alpha_{14} (2 p_k p_r \delta_{r1} + p_r p_r \delta_{k1})$$

$$\Sigma_{p_k p_\ell} = \alpha_4 (6 \delta_{k1} \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1}) + \alpha_6 (3 \delta_{k1} \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_7}{2} (2 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1} \\ + 2 p_k \delta_{\ell 1} + 2 p_\ell \delta_{k1}) + \alpha_{12} (2 \delta_{k1} \delta_{\ell 1} p_r \delta_{r1}) + \alpha_{14} (2 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1} \\ + 2 p_k \delta_{\ell 1} + 2 p_\ell \delta_{k1})$$

$$\Sigma_{p_k p_\ell p_m} = (6 \alpha_4 + 3 \alpha_6 + 2 \alpha_{12}) \delta_{k1} \delta_{\ell 1} \delta_{m1} + (\alpha_7 + 2 \alpha_{14}) (\delta_{k\ell} \delta_{m1} + \delta_{km} \delta_{\ell 1} \\ + \delta_{m\ell} \delta_{k1})$$

bulunur. $(\Sigma_{p_k \varphi_\ell p_m})_0$ katsayılarını bulmak için (4.3.27) ifadesinde $(\varphi^2 p)$ li terimleri türetmek yetecektir:

$$\Sigma_{p_k} = \alpha_1 \left(-\varphi_k p_r \delta_{r1} + \frac{1}{2} \varphi_m \delta_{m1} p_k + \frac{1}{2} \varphi_m \delta_{k1} p_m \right) + \alpha_2 (-4 \varphi_k p_r \delta_{r1})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha_6}{2} (-4 \varphi_k p_r \delta_{r1} - 8 \varphi_k p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_7}{2} (-4 \varphi_k p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_{11}}{2} (-8 \varphi_k p_r \delta_{r1} \\
 & + 4 \varphi_m \delta_{m1} p_k + 4 \varphi_m \delta_{k1} p_m) + \frac{\alpha_{12}}{3} (-27 \varphi_k p_r \delta_{r1} + \frac{27}{2} (\varphi_m \delta_{m1} p_k \\
 & + \varphi_m \delta_{k1} p_m)) + \alpha_{14} (-3 \varphi_k p_r \delta_{r1} + \frac{3}{2} (\varphi_m \delta_{m1} p_k + \varphi_m \delta_{k1} p_m))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma \varphi_k \varphi_\ell & = \alpha_1 (-\delta_{k\ell} p_r \delta_{r1} + \frac{1}{2} \delta_{\ell 1} p_k + \frac{1}{2} \delta_{k1} p_\ell) + \alpha_2 (-4 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1}) \\
 & + \alpha_6 (-6 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1}) + \alpha_7 (-2 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_{11}}{2} (-8 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1} \\
 & + 4 \delta_{\ell 1} p_k + 4 \delta_{k1} p_\ell) + \alpha_{12} (-9 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1} + \frac{9}{2} (\delta_{\ell 1} p_k + \delta_{k1} p_\ell)) \\
 & + \alpha_{14} (-3 \delta_{k\ell} p_r \delta_{r1} + \frac{3}{2} (\delta_{\ell 1} p_k + \delta_{k1} p_\ell))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma \varphi_k \varphi_\ell p_m & = \alpha_1 (-\delta_{k\ell} \delta_{m1} + \frac{1}{2} \delta_{\ell 1} \delta_{km} + \frac{1}{2} \delta_{k1} \delta_{\ell m}) + \alpha_2 (-4 \delta_{k\ell} \delta_{m1}) \\
 & + \alpha_6 (-6 \delta_{k\ell} \delta_{m1}) + \alpha_7 (-\delta_{k\ell} \delta_{m1}) + \alpha_{11} (-4 \delta_{k\ell} \delta_{m1} + 2 \delta_{\ell 1} \delta_{km} \\
 & + 2 \delta_{k1} \delta_{\ell m}) + \alpha_{12} (-9 \delta_{k\ell} \delta_{m1} + \frac{9}{2} \delta_{\ell 1} \delta_{km} + \frac{9}{2} \delta_{k1} \delta_{\ell m}) \\
 & + \alpha_{14} (-3 \delta_{k\ell} \delta_{m1} + \frac{3}{2} \delta_{\ell 1} \delta_{km} + \frac{3}{2} \delta_{k1} \delta_{\ell m})
 \end{aligned}$$

Bu hesaplardan sonra ($\Sigma \varphi_k \varphi_\ell p_m$) katsayısı için

$$\begin{aligned}
 \Sigma \varphi_k \varphi_\ell p_m & = (\alpha_1 + 4 \alpha_2 + 6 \alpha_6 + 2 \alpha_7 + 4 \alpha_{11} + 9 \alpha_{12} + 3 \alpha_{14}) (-\delta_{k\ell} \delta_{m1}) \\
 & + (\frac{\alpha_1}{2} + 2 \alpha_{11} + \frac{9}{2} \alpha_{12} + \frac{3}{2} \alpha_{14}) (\delta_{\ell 1} \delta_{km} + \delta_{k1} \delta_{\ell m})
 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Son olarak ($\Sigma \varphi_k p_\ell p_m$) katsayısını hesaplamak için (4.3.27) açılımındaki ($p^2 \varphi$)'li terimler türetilirse

$$\begin{aligned}\Sigma_{\varphi_k} &= \alpha_2 (-2 \epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_6}{2} (-4 \epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1} - 2 \epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1}) \\ &+ \frac{\alpha_7}{2} (-\epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1}) + \frac{\alpha_{11}}{2} (-2 \epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1}) \\ &+ \frac{\alpha_{12}}{3} (-9 \epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1}) + \alpha_{14} (-\epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1})\end{aligned}$$

$$\Sigma_{\varphi_k} = (2\alpha_2 + 3\alpha_6 + \frac{\alpha_7}{2} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12} + \alpha_{14}) (-\epsilon_{n1k} p_n p_r \delta_{r1})$$

$$\Sigma_{\varphi_k p_\ell} = (2\alpha_2 + 3\alpha_6 + \frac{\alpha_7}{2} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12} + \alpha_{14}) (-\epsilon_{\ell 1k} p_r \delta_{r1} - \epsilon_{n1k} p_n \delta_{\ell 1})$$

$$\Sigma_{\varphi_k p_\ell p_m} = (2\alpha_2 + 3\alpha_6 + \frac{\alpha_7}{2} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12} + \alpha_{14}) (-\epsilon_{\ell 1k} \delta_{m1} - \epsilon_{m1k} \delta_{\ell 1})$$

sonucu bulunur. (4.3.22) denklemlerinde görülen katsayılar için

$$(\Sigma_{\varphi_k \varphi_\ell \varphi_m})_0 = 0$$

$$\begin{aligned}(\Sigma_{p_k p_\ell p_m})_0 &= (6\alpha_4 + 3\alpha_6 + 2\alpha_{12}) \delta_{k1} \delta_{\ell 1} \delta_{m1} + (\alpha_7 + 2\alpha_{14}) (\delta_{k\ell} \delta_{m1} \\ &+ \delta_{km} \delta_{\ell 1} + \delta_{m\ell} \delta_{k1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Sigma_{\varphi_k \varphi_\ell p_m})_0 &= (\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_6 + 2\alpha_7 + 4\alpha_{11} + 9\alpha_{12} + 3\alpha_{14}) (-\delta_{k\ell} \delta_{m1}) \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha_1 + 4\alpha_{11} + 9\alpha_{12} + 3\alpha_{14}) (\delta_{\ell 1} \delta_{km} + \delta_{k1} \delta_{\ell m})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Sigma_{\varphi_k p_\ell p_m})_0 &= (2\alpha_2 + 3\alpha_6 + \frac{\alpha_7}{2} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12} + \alpha_{14}) (-\epsilon_{\ell 1k} \delta_{m1} - \epsilon_{m1k} \delta_{\ell 1}) \\ &(4.3.28)\end{aligned}$$

ifadelerinin geçerli olduğu görülür. (4.3.22) denklemlerine giren bu katsayılar için k indisinin 2 ve 3 değerlerini aldığı, ℓ ve m indislerinin $\varphi_1^{(1)} = p_1^{(1)} = 0$ olması nedeniyle 1 olamayacağı görülmektedir. Bu veriler gözönünde tutulursa

$$(\sum_{\varphi_k \varphi_l p_m})_0 = (\sum_{\varphi_k p_l p_m})_0 = (\sum_{p_k p_l p_m})_0 = 0$$

olduğunu hemen görmek mümkündür. Yani (4.3.22) denklemlerinde görülen bütün malzeme sabitleri özdeş olarak sıfır olmaktadır. Bu durum izotrop katının nonlineerlik mertebesine bağlı olmaksızın her zaman geçerlidir. Böylece (4.3.22) denklemlerinin özdeş olarak sağlanması nedeniyle (4.3.19)₂ ve (4.3.21)₂ denklemlerinde görülen $\varphi_2^{(2)}$ fonksiyonları ile (4.3.19)₃ ve (4.3.21)₃ denklemlerindeki $\varphi_3^{(2)}$ fonksiyonlarının birbirine eşit oldukları görülmüştür.

Sonraki hesaplamalarda, sonuçları topluca görme kolaylığı vereceği için (4.3.12)₂ denklemlerini kapalı olarak ele alalım:

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} : -a \frac{\partial v_k^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_l} \frac{\partial p_l^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} (\sum_{p_k p_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{p_k p_l p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial p_l^{(1)}}{\partial \xi} \\ - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} (\sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{p_k \varphi_l p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial \varphi_l^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.12)_2$$

Bu denklemin düzenlenip integre edilmesinden sonra

$$\begin{aligned} \sum_{p_k \varphi_l} \varphi_l^{(2)} = \rho_0 a^2 p_k^{(2)} - \sum_{p_k p_l} p_l^{(2)} - \sum_{p_k p_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} p_l^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{p_k p_l p_m} p_l^{(1)} p_m^{(1)} \\ - \frac{1}{2} \sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_l^{(1)} \varphi_m^{(1)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terime bakılırsa, (4.2.14) sonuçlarından $\sum_{p_k p_l}$ malzeme sabitinin ancak $k=l$ için sıfırdan farklı olduğu hatırlanacaktır. Bu durumda son denklemin

$$\begin{aligned} (\rho_0 a^2 - \sum_{\underline{p_k} \underline{p_k}}) p_k^{(2)} = \sum_{p_k \varphi_l} \varphi_l^{(2)} + \sum_{p_k p_l \varphi_m} \varphi_m^{(1)} p_l^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{p_k p_l p_m} p_l^{(1)} p_m^{(1)} \\ + \frac{1}{2} \sum_{p_k \varphi_l \varphi_m} \varphi_l^{(1)} \varphi_m^{(1)} \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. k indislerinin altındaki çizgi tekrarlanan indisler üzerinde toplama olmadığını göstermektedir. (4.3.13)₂'den elde edilen denklem ise

$$2 \sum \varphi_k \varphi_m \varphi_m^{(2)} + 2 \sum \varphi_k p_m p_m^{(2)} + 2 \sum \varphi_k \varphi_m p_n \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum \varphi_k \varphi_m \varphi_n \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum \varphi_k p_m p_n p_m^{(1)} p_n^{(1)} = 0 \quad (4.3.13)_2$$

dir. Son iki denklemden k=1 için sırasıyla $p_1^{(2)}$ ve $\varphi_1^{(2)}$ ikinci mertebe boyuna büyüklükleri birinci mertebe büyüklüklere bağlayan ifadeler elde edilir. (4.3.22) denklemlerinin özdeş olarak sağlandıkları gösterildiğinden, k=2,3 için elde edilen $\varphi_2^{(2)}$ ve $\varphi_3^{(2)}$ diğer denklemden bulunan $\varphi_2^{(2)}$ ve $\varphi_3^{(2)}$ büyüklüklerine eşit oldukları görülür. Sonuçta ikinci mertebe mikrodönme bileşenleri ile yerdeğiştirme gradyanları arasında

$$p_2^{(2)} = 2 \varphi_3^{(2)}, \quad p_3^{(2)} = -2 \varphi_2^{(2)} \quad (4.3.30)$$

bağıntılarının olduğu bulunmuştur. Denklem hiyerarşileri düzenlemeye devam edilirse, yani

$$v_k^{(1)} = -a p_k^{(1)}, \quad \frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial \xi} = -a \frac{\partial p_k^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \tau}, \quad \psi_k^{(m)} = \frac{\partial \varphi_k^{(m-1)}}{\partial \xi} \quad m > 1$$

ifadeleri (4.3.12)₃ denkleminde yazılırsa (k=1,2,3)

$$\begin{aligned} & -a \left(-a \frac{\partial p_k^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \tau} \right) - a \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho_0} \sum p_k p_\ell \frac{\partial p_\ell^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \left(\sum p_k p_\ell \varphi_m \varphi_m^{(1)} \right. \\ & + \sum p_k p_\ell p_m p_m^{(1)} \left. \right) \frac{\partial p_\ell^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2\rho_0} \left(2 \sum p_k p_\ell \varphi_m \varphi_m^{(2)} + 2 \sum p_k p_\ell \varphi_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi} \right. \\ & + 2 \sum p_k p_\ell p_m p_m^{(2)} + 2 \sum p_k p_\ell \varphi_m p_n \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum p_k p_\ell \varphi_m \varphi_n \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p_k p_\ell p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \left(\frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k \varphi_\ell} \frac{\partial \varphi_\ell^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \left(\sum_{p_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} \right. \right. \\
 & + \left. \sum_{p_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial \varphi_\ell^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2\rho_0} \left(2 \sum_{p_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(2)} + 2 \sum_{p_k \varphi_\ell \psi_m} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi} \right. \\
 & + 2 \sum_{p_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(2)} + 2 \sum_{p_k \varphi_\ell p_n \varphi_m} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \left. \sum_{p_k \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \right) \\
 & + \left. \sum_{p_k \varphi_\ell p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \right) \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \left(\sum_{p_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{p_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(1)} \right) \frac{\partial^2 \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.3.31}$$

denklemini elde edilir. (4.3.31) denkleminin düzenlenmesi ile son şekli ($k=1,2,3$)

$$\begin{aligned}
 & a^2 \frac{\partial p_k^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell} \frac{\partial p_\ell^{(3)}}{\partial \xi} - 2a \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(2)} \varphi_m^{(1)}) \\
 & - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell p_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} p_\ell^{(2)}) - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(2)}) \\
 & - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell \psi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi}) - \frac{1}{2\rho_0} \sum_{p_k p_\ell \varphi_m p_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)}) \\
 & - \frac{1}{2\rho_0} \sum_{p_k p_\ell \varphi_m \varphi_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)}) - \frac{1}{6\rho_0} \sum_{p_k p_\ell p_m p_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} p_n^{(1)}) \\
 & - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k \varphi_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(2)}) - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k \varphi_\ell \psi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_\ell^{(1)} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi}) \\
 & - \frac{1}{6\rho_0} \sum_{p_k \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)}) - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k \varphi_\ell} \frac{\partial \varphi_\ell^{(3)}}{\partial \xi} = 0 \tag{4.3.32}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bundan sonra (4.3.32) denkleminde, yukarı merteye terimler yerine bunları birinci merteye terimlere bağlayan ifadeler yazılarak denklemin son şeklinin birinci merteye büyüklükler cinsinden ne olacağı araştırılacaktır. Bunun için önce $\varphi_k^{(3)}$

terimi (4.3.13)₃ denkleminde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{3/2} : \gamma_{k\ell}^{(0)} a^2 \frac{\partial^2 \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi^2} - (\sum_{\varphi_k p_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\varphi_k p_\ell p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \\
 - (\sum_{\varphi_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\varphi_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} - \sum_{\varphi_k \varphi_\ell} \frac{\partial^2 \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi^2} \\
 + \frac{1}{6} (6 \sum_{\varphi_k \varphi_m} \varphi_m^{(3)} + 6 \sum_{\varphi_k p_m} p_m^{(3)} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_\ell} \varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \\
 + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)} \\
 + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} p_n^{(1)} \varphi_m^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k p_m \varphi_\ell} p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} + \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n \varphi_\ell} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} \\
 + \sum_{\varphi_k p_m p_n p_\ell} p_m^{(1)} p_\ell^{(1)} p_n^{(1)} + 3 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_\ell p_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} p_n^{(1)} \\
 + 3 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n p_\ell} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} p_\ell^{(1)}) = 0
 \end{aligned}$$

$\sum_{\varphi_k \varphi_\ell}$ malzeme sabiti $k=\ell$ için sıfırdan farklı olduğundan bu denklem $\varphi_k^{(3)}$ için

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{3/2} : - \sum_{\varphi_k \varphi_k} \varphi_k^{(3)} = (\gamma_{k\ell}^{(0)} a^2 - \sum_{\varphi_k \varphi_\ell} \varphi_\ell) \frac{\partial^2 \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi^2} - (\sum_{\varphi_k p_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} \\
 + \sum_{\varphi_k p_\ell p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial p_\ell^{(1)}}{\partial \xi} - (\sum_{\varphi_k \varphi_\ell \varphi_m} \varphi_m^{(1)} + \sum_{\varphi_k \varphi_\ell p_m} p_m^{(1)}) \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \\
 + \sum_{\varphi_k p_m} p_m^{(3)} + \frac{1}{6} (6 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_\ell} \varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(2)} \\
 + 6 \sum_{\varphi_k p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)} + 6 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n} p_n^{(1)} \varphi_m^{(2)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 6 \sum_{\varphi_k p_m \varphi_\ell} p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_\ell^{(1)}}{\partial \xi} + \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_n \varphi_\ell} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} \\
 & + \sum_{\varphi_k p_m p_n p_\ell} p_m^{(1)} p_n^{(1)} p_\ell^{(1)} + 3 \sum_{\varphi_k \varphi_m \varphi_\ell p_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + 3 \sum_{\varphi_k \varphi_m p_n p_\ell} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} p_\ell^{(1)} \quad (4.3.33)
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.33) denkleminde verilen $\varphi_k^{(3)}$ ifadesi (4.3.32) denkleminde yerine yazılırsa ($k=1,2,3$)

$$\begin{aligned}
 & a^2 \frac{\partial p_k^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell} \frac{\partial p_\ell^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\sum_{p_k \varphi_\ell} \varphi_\ell}{\sum_{\varphi_\ell \varphi_\ell}} \sum_{\varphi_\ell p_m} \frac{\partial p_m^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\sum_{p_k \varphi_\ell} \varphi_\ell}{\sum_{\varphi_\ell \varphi_\ell}} \\
 & [(\gamma_{\ell r}^{(0)} a^2 - \sum_{\varphi_\ell \varphi_r} \frac{\partial^3 \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi^3} - \sum_{\varphi_\ell p_r \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \frac{\partial p_r^{(1)}}{\partial \xi})) \\
 & - \sum_{\varphi_\ell p_r p_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} \frac{\partial p_r^{(1)}}{\partial \xi}) - \sum_{\varphi_\ell \varphi_r \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi}) \\
 & - \sum_{\varphi_\ell \varphi_r p_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi}) + \sum_{\varphi_\ell \varphi_m \varphi_r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi}) \\
 & + \sum_{\varphi_\ell \varphi_m p_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} p_n^{(2)}) + \sum_{\varphi_\ell p_m p_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} p_n^{(2)}) + \sum_{\varphi_\ell \varphi_m \varphi_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)}) \\
 & + \sum_{\varphi_\ell \varphi_m p_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_n^{(1)} \varphi_m^{(2)}) + \sum_{\varphi_\ell p_m \varphi_r} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi}) \\
 & + \frac{1}{6} \sum_{\varphi_\ell \varphi_m \varphi_n \varphi_r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \varphi_r^{(1)}) + \frac{1}{6} \sum_{\varphi_\ell p_m p_n p_r} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} p_n^{(1)} p_r^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_\ell \varphi_m \varphi_r p_n} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_n^{(1)}) + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_\ell \varphi_m p_n p_r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} p_r^{(1)})] \\
 & - 2a \frac{\partial p_k^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell \varphi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_\ell^{(2)} \varphi_m^{(1)}) - \frac{1}{\rho_0} \sum_{p_k p_\ell p_m} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_m^{(1)} p_\ell^{(2)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\rho_0} \sum p_k p_l \psi_m \frac{\partial}{\partial \xi} (p_l^{(1)} \psi_m^{(2)}) - \frac{1}{\rho_0} \sum p_k p_l \psi_m \frac{\partial}{\partial \xi} (p_l^{(1)} \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial \xi}) \\
 & -\frac{1}{2\rho_0} \sum p_k p_l \psi_m p_n \frac{\partial}{\partial \xi} (p_l^{(1)} \psi_m^{(1)} p_n^{(1)}) - \frac{1}{2\rho_0} \sum p_k p_l \psi_m \psi_n \frac{\partial}{\partial \xi} (p_l^{(1)} \psi_m^{(1)} \psi_n^{(1)}) \\
 & -\frac{1}{6\rho_0} \sum p_k p_l p_m p_n \frac{\partial}{\partial \xi} (p_l^{(1)} p_m^{(1)} p_n^{(1)}) - \frac{1}{\rho_0} \sum p_k \psi_l \psi_m \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_m^{(1)} \psi_l^{(2)}) \\
 & -\frac{1}{\rho_0} \sum p_k \psi_l \psi_m \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_l^{(1)} \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial \xi}) - \frac{1}{6\rho_0} \sum p_k \psi_l \psi_m \psi_n \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_l^{(1)} \psi_m^{(1)} \psi_n^{(1)}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

sonucu elde edilir. $k=1$ için (4.3.34) denklemi $p_1^{(3)}$ büyüklüğünü, küçük merteye bileşenlerine bağlayan bir ifadeye dönüştür:

$$\begin{aligned}
 (a^2 - \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 p_1) p_1^{(3)} &= \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 p_l \psi_m p_l^{(2)} \psi_m^{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 p_l p_m p_m^{(1)} p_l^{(2)} \\
 &+ \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 p_l \psi_m p_l^{(1)} \psi_m^{(2)} + \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 p_l \psi_m p_l^{(1)} \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial \xi} \\
 &+ \frac{1}{2\rho_0} \sum p_1 p_l \psi_m p_n p_l^{(1)} \psi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \frac{1}{2\rho_0} \sum p_1 p_l \psi_m \psi_n p_l^{(1)} \psi_m^{(1)} \psi_n^{(1)} \\
 &+ \frac{1}{6\rho_0} \sum p_1 p_l p_m p_n p_l^{(1)} p_m^{(1)} p_n^{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 \psi_l \psi_m \psi_m^{(1)} \psi_l^{(2)} \\
 &+ \frac{1}{\rho_0} \sum p_1 \psi_l \psi_m \psi_l^{(1)} \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{6\rho_0} \sum p_1 \psi_l \psi_m \psi_n \psi_l^{(1)} \psi_m^{(1)} \psi_n^{(1)}
 \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

$k=2$ için üçüncü merteye terimlere bakılacak olursa

$$a^2 \frac{\partial p_2^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \sum p_2 p_2 \frac{\partial p_2^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\sum p_2 \psi_3}{\sum \psi_3 \psi_3} \sum \psi_3 p_2 \frac{\partial p_2^{(3)}}{\partial \xi}$$

toplamanın sıfır olduğu gözlenir. Bu durum $k=3$ için de geçerlidir.

Bu durumda (4.3.34) denkleminde $k=2,3$ için üçüncü mertebeye terimler düşmektedir. Bundan sonraki adım bu denklemlerden ikinci mertebeye terimlerin yerine birinci mertebeye eşdeğerlerini yazarak, birinci mertebeye büyüklüklerin ne gibi bir uygunluk denklemini ya da başka bir deyişle hangi evölüsyon denklemini sağladığını görmektir. (4.3.34) denklemlerinde görülen ikinci mertebeye terimleri R ile gösterirsek

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum \varphi_\ell \varphi_m p_n \varphi_m^{(1)} p_n^{(2)} + \sum \varphi_\ell p_m p_n p_m^{(1)} p_n^{(2)} + \sum \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)}) \\
 & + \sum \varphi_\ell \varphi_m p_n p_n^{(1)} \varphi_m^{(2)} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum p_k p_\ell p_m p_m^{(1)} p_\ell^{(2)} + \sum p_k p_\ell \varphi_m p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(2)}) \\
 & + \sum p_k \varphi_\ell \varphi_m \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(2)} + \sum p_k p_\ell \varphi_m p_\ell^{(2)} \varphi_m^{(1)} \quad (4.3.36)
 \end{aligned}$$

şeklinde toparlanabilir. (4.3.36) ifadesinde $p_k^{(2)}$ yerine (4.3.29) denkleminde eşidi yazılırsa ortada kalan ikinci mertebeye terimler $\varphi_k^{(2)}$ cinsinden olacak ve ikinci mertebeye terimlere ilaveten birinci mertebeye terimler de gelecektir:

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \frac{\sum \varphi_\ell \varphi_m p_n}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} \sum p_n \varphi_r \varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(2)} \right. \\
 & + \frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \frac{\sum \varphi_\ell p_m p_n}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} \sum p_n \varphi_r p_m^{(1)} \varphi_r^{(2)} + \frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \sum \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)} \\
 & + \frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \sum \varphi_\ell \varphi_m p_n p_n^{(1)} \varphi_m^{(2)} - \frac{\sum p_k p_m p_n}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} \sum p_n \varphi_r p_m^{(1)} \varphi_r^{(2)} - \sum p_k p_\ell \varphi_m p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(2)} \\
 & \left. - \sum p_k \varphi_\ell \varphi_m \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(2)} - \frac{\sum p_k p_n \varphi_m}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} \sum p_n \varphi_r \varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(2)} \right) \quad (4.3.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1 = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \frac{\sum \varphi_\ell \varphi_m p_n}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} \varphi_m^{(1)} + \frac{\sum p_k \varphi_\ell}{\sum \varphi_\ell \varphi_\ell} \frac{\sum \varphi_\ell p_m p_n}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} p_m^{(1)} \right. \right. \\
 & - \frac{\sum p_k p_m p_n}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} p_m^{(1)} - \left. \frac{\sum p_k p_n \varphi_m}{\rho_0 a^2 - \sum p_n p_n} \varphi_m^{(1)} \right) (\sum p_n p_\ell \varphi_r \varphi_r^{(1)} p_\ell^{(1)}) \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum p_n p_\ell p_r p_\ell^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \sum p_n \varphi_\ell \varphi_r \varphi_\ell^{(1)} \varphi_r^{(1)} \right]
 \end{aligned}$$

Burada $R=R_1+R_2$ tanımı yapılmıştır. R_2 , R ifadesindeki ikinci merteye terimleri, R_1 birinci merteye terimleri göstermektedir. (4.3.37) ifadesinde R_1 ile gösterilen birinci merteye terimler (4.3.34) denklemlerine eklenecektir. Tekrarlanan indisler üzerindeki toplam- lar yapıldıktan sonra (4.3.37)₁ ifadesi $k=2$ ve $k=3$ için açık olarak yazılırsa, geride kalan ikinci merteye terimlerin $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)}$, $\varphi_3^{(2)}$ 'li gruplardan oluştuğu görülecektir. Bunlardan $\varphi_1^{(2)}$ büyüklüğü (4.3.19)₁ den açıkça görüldüğü gibi birinci merteye büyüklükler cinsinden yazılabildiğinden bu terimlerden gelecek katkı terimler de (4.3.34) denklemlerine ilave edilmek durumunda olacaktır. Yukarıda da belir- tildiği gibi amaç (4.3.34) denkleminde üst merteye terimleri yok edip birinci merteye büyüklüklerin verdiği uygunluk koşulunu bulmak- tır. Bunun için önce $k=2$ için (4.3.37)₁ ifadesini açık olarak yazalım:

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\kappa} \left[- (\sum \varphi_3 \varphi_2 p_2 \sum p_2 \varphi_3 \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \sum \varphi_3 \varphi_2 p_3 \sum p_3 \varphi_2 \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} \right. \\
 & + \sum \varphi_3 \varphi_3 p_2 \sum p_2 \varphi_3 \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \sum \varphi_3 \varphi_3 p_3 \sum p_3 \varphi_2 \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} \\
 & + \sum \varphi_3 p_2 p_2 \sum p_2 \varphi_3 p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \sum \varphi_3 p_2 p_3 \sum p_3 \varphi_2 p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} \\
 & \left. + \sum \varphi_3 p_3 p_2 \sum p_2 \varphi_3 p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \sum \varphi_3 p_3 p_3 \sum p_3 \varphi_2 p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1} \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_2} \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_3} \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 \varphi_3 \varphi_1} \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 \varphi_3 \varphi_2} \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 \varphi_3 \varphi_3} \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 p_2 \varphi_1} p_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 p_2 \varphi_2} p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 p_2 \varphi_3} p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 p_3 \varphi_1} p_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 p_3 \varphi_2} p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\varphi_3 p_3 \varphi_3} p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & + \frac{2}{\kappa} (\sum_{p_2 p_2 p_2} \sum_{p_2 \varphi_3} p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \sum_{p_2 p_2 p_3} \sum_{p_3 \varphi_2} p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} \\
 & + \sum_{p_2 p_3 p_2} \sum_{p_2 \varphi_3} p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \sum_{p_2 p_3 p_3} \sum_{p_3 \varphi_2} p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)}) - \sum_{p_2 p_2 \varphi_1} p_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & - \sum_{p_2 p_2 \varphi_2} p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum_{p_2 p_2 \varphi_3} p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} - \sum_{p_2 p_3 \varphi_1} p_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & - \sum_{p_2 p_3 \varphi_2} p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum_{p_2 p_3 \varphi_3} p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} - \sum_{p_2 \varphi_2 \varphi_1} \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & - \sum_{p_2 \varphi_2 \varphi_2} \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum_{p_2 \varphi_2 \varphi_3} \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} - \sum_{p_2 \varphi_3 \varphi_1} \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & - \sum_{p_2 \varphi_3 \varphi_2} \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum_{p_2 \varphi_3 \varphi_3} \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} - 2 \sum_{p_2 p_2 \varphi_2} \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & + 2 \sum_{p_2 p_3 \varphi_2} \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - 2 \sum_{p_2 p_2 \varphi_3} \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} - 2 \sum_{p_2 p_3 \varphi_3} \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)}]
 \end{aligned}$$

(4.3.38)

$\varphi_1^{(2)}$ nin (4.3.19)₁ ile verilen ifadesinin

$$4\kappa \varphi_1^{(2)} = - (2 \sum_{\varphi_1 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)})$$

olduğu hatırlanırsa, k=2 için (4.3.38) ifadesinden (4.3.34) denklemine gidecek birinci mertebeye büyüklükler topluluğunun

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \rho_2 \varphi_1 \rho_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \rho_3 \varphi_1 \rho_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum \rho_2 \rho_2 \varphi_1 \rho_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum \rho_2 \rho_3 \varphi_1 \rho_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\ & \left. - \sum \rho_2 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum \rho_2 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. (4.3.38) denkleminde birinci mertebeye pertürbasyon bileşenlerini ayıkladıktan sonra kalan ikinci mertebeye terimler düzenlenirse (k=2 için)

$$\begin{aligned} R_2 = & \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \left(-\sum \varphi_3 \varphi_2 \rho_2 + 2 \sum \varphi_3 \rho_2 \rho_3 - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_2 \varphi_3 + \sum \varphi_3 \rho_3 \varphi_3 + 4 \sum \rho_2 \rho_3 \rho_2 \right. \\ & \left. + 2 \sum \rho_2 \rho_3 \varphi_3 - \sum \rho_2 \varphi_2 \varphi_3 - 2 \sum \rho_2 \rho_2 \varphi_2 \right) + \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} \left(\sum \varphi_3 \varphi_2 \rho_3 - 2 \sum \varphi_3 \rho_3 \rho_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_2 \varphi_2 + \sum \varphi_3 \rho_3 \varphi_2 - 4 \sum \rho_2 \rho_3 \rho_3 + 2 \sum \rho_2 \rho_3 \varphi_2 - \sum \rho_2 \varphi_2 \varphi_2 + 2 \sum \rho_2 \rho_3 \varphi_2 \right) \\ & + \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \left(-\sum \varphi_3 \varphi_3 \rho_2 - 2 \sum \varphi_3 \rho_2 \rho_2 - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3 - \sum \varphi_3 \rho_2 \varphi_3 - 4 \sum \rho_2 \rho_2 \rho_2 \right. \\ & \left. - \sum \rho_2 \varphi_3 \varphi_3 - 2 \sum \rho_2 \rho_2 \varphi_3 - 2 \sum \rho_2 \rho_2 \varphi_3 \right) + \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} \left(\sum \varphi_3 \varphi_3 \rho_3 + 2 \sum \varphi_3 \rho_2 \rho_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_3 \varphi_2 - \sum \varphi_3 \rho_2 \varphi_2 + 4 \sum \rho_2 \rho_2 \rho_3 - 2 \sum \rho_2 \rho_2 \varphi_2 - \sum \rho_2 \varphi_2 \varphi_3 + 2 \sum \rho_2 \rho_3 \varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

sonucu elde edilir. (4.3.39) ifadesindeki birinci ve dördüncü parantezler birbirine eşittir. Bu terimler topluluğu (4.3.22) kısıtlamalarından başka bir şey değildir ve her bir parantez sıfıra

eşittir. Bu şu anlama gelmektedir: k=2 için yazılan (4.3.34) denklemini tamamen birinci mertebe pertürbasyon bileşenlerinin sağladığı bir denklem olur. Benzer işler k=3 için yapılırsa

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum \varphi_2 \varphi_2 p_2 \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} - \sum \varphi_2 \varphi_2 p_3 \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \sum \varphi_2 \varphi_3 p_2 \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \right. \\
 & - \sum \varphi_2 \varphi_3 p_3 \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \sum \varphi_2 p_2 p_2 \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} - \sum \varphi_2 p_2 p_3 \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} \\
 & + \sum \varphi_2 p_3 p_2 \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} - \sum \varphi_2 p_3 p_3 \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_2 \varphi_2 p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_2 \varphi_3 p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_3 \varphi_2 p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_3 \varphi_3 p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} - 2 \sum p_3 p_2 p_2 p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & + 2 \sum p_3 p_2 p_3 p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - 2 \sum p_3 p_3 p_2 p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} + 2 \sum p_3 p_3 p_3 p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} \\
 & - \sum p_3 p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum p_3 p_2 \varphi_2 p_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum p_3 p_2 \varphi_3 p_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & - \sum p_3 p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum p_3 p_3 \varphi_2 p_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum p_3 p_3 \varphi_3 p_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & - \sum p_3 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum p_3 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum p_3 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & - \sum p_3 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum p_3 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} - \sum p_3 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \sum_{p_3} p_2 \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} + 2 \sum_{p_3} p_3 \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} - 2 \sum_{p_3} p_2 \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \\
 & + 2 \sum_{p_3} p_3 \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} \quad (4.3.40)
 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (4.3.40) ifadesinden (4.3.34) denkleminde $k=3$ için giderek birinci mertebeye büyüklükler

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(- \sum_{\varphi_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum_{p_3} p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum_{p_3} p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \\
 & \quad \left. - \sum_{p_3} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{(1)} \varphi_1^{(2)} - \sum_{p_3} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3^{(1)} \varphi_1^{(2)} \right)
 \end{aligned}$$

ile verilir. (4.3.40) denkleminde kalan ikinci mertebeye terimler düzenlenirse ($k=3$ için)

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \varphi_2^{(1)} \varphi_3^{(2)} \left(\sum_{\varphi_2} \varphi_2 p_2 - 4 \sum_{\varphi_2} p_2 p_3 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} \varphi_2 \varphi_3 - 2 \sum_{\varphi_2} p_3 p_3 + 4 \sum_{p_3} p_3 p_2 \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{p_3} p_3 \varphi_3 \right) + \varphi_2^{(1)} \varphi_2^{(2)} \left(-3 \sum_{\varphi_2} \varphi_2 p_3 + 6 \sum_{\varphi_2} p_3 p_3 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} \varphi_2 \varphi_2 \right. \\
 & \left. - 4 \sum_{p_3} p_3 p_3 \right) + \varphi_3^{(1)} \varphi_3^{(2)} \left(2 \sum_{\varphi_2} \varphi_3 p_2 + 2 \sum_{\varphi_2} p_2 p_2 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} \varphi_3 \varphi_3 \right. \\
 & \left. - 4 \sum_{p_3} p_2 p_2 - 4 \sum_{p_3} p_2 \varphi_3 - \sum_{p_3} \varphi_3 \varphi_3 \right) + \varphi_3^{(1)} \varphi_2^{(2)} \left(\sum_{\varphi_2} \varphi_2 p_2 - 4 \sum_{\varphi_2} p_2 p_3 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\varphi_2} \varphi_2 \varphi_3 - 2 \sum_{\varphi_2} p_3 \varphi_3 + 4 \sum_{p_2} p_3 p_3 + 2 \sum_{p_3} p_3 \varphi_3 \right) \quad (4.3.41)
 \end{aligned}$$

neticeleri elde edilir. (4.3.41) ifadesindeki her parantez daha önce elde edilen (4.3.22) sonuçları gereği sıfırdır. Sonuç olarak

(4.3.34) denkleminde görülen yüksek mertebe terimler elimine edilerek sadece birinci mertebe terimlerin sağladığı denklemler elde edilecektir. k=2 için (4.3.34) denklemi

$$\begin{aligned}
 & -2a \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \tau} \frac{1}{2\rho_0} (\gamma_{3r}^{(0)} a^2 - \Sigma \psi_3 \psi_r) \frac{\partial^3 \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (-\Sigma \psi_3 p_r \varphi_m \varphi_m^{(1)} \frac{\partial p_r^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & - \Sigma \psi_3 p_r p_m p_m^{(1)} \frac{\partial p_r^{(1)}}{\partial \xi} - \Sigma \psi_3 \varphi_r \varphi_m \varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} - \Sigma \psi_3 \varphi_r p_m p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & + \Sigma \psi_3 \varphi_m \psi_r \varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} + \Sigma \psi_3 p_m \psi_r p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} + 2 \Sigma p_2 p_\ell \psi_m p_\ell^{(1)} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & + 2 \Sigma p_2 \varphi_\ell \psi_m \varphi_\ell^{(1)} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{6} \Sigma \psi_3 \varphi_m \varphi_n \varphi_r \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \varphi_r^{(1)} \\
 & + \frac{1}{6} \Sigma \psi_3 p_m p_n p_r p_m^{(1)} p_n^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \Sigma \psi_3 \varphi_m \varphi_r p_n \varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + \frac{1}{2} \Sigma \psi_3 \varphi_m p_n p_r \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} p_r^{(1)} + \Sigma p_2 p_\ell \varphi_m p_n p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + \Sigma p_2 p_\ell \varphi_m \varphi_n p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \frac{1}{3} \Sigma p_2 p_\ell p_m p_n p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + \frac{1}{3} \Sigma p_2 \varphi_\ell \varphi_m \varphi_n \varphi_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \frac{1}{\rho_0 (\rho_0 a^2 - \Sigma p_n p_n)} (-\frac{1}{2} \Sigma \psi_3 \varphi_m p_n - \Sigma p_2 \varphi_m p_n) \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} (\Sigma p_n p_\ell \varphi_r \varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_\ell^{(1)} + \frac{1}{2} \Sigma p_n p_\ell p_r \varphi_m^{(1)} p_\ell^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \Sigma p_n \varphi_\ell \varphi_r \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} \varphi_r^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{\rho_0 (\rho_0 a^2 - \Sigma p_n p_n)} (-\frac{1}{2} \Sigma \psi_3 p_m p_n - \Sigma p_2 p_m p_n) \frac{\partial}{\partial \xi} (\Sigma p_n p_\ell \varphi_r p_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_\ell^{(1)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum p_n p_\ell p_r p_m^{(1)} p_\ell^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \sum p_n \varphi_\ell \varphi_r p_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} \varphi_r^{(1)} \\
 & - \frac{1}{4\pi \rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(-\frac{1}{4} \sum \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 p_3^{(1)} - \frac{1}{4} \sum \varphi_3 \varphi_3 \varphi_1 p_2^{(1)} - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} \right. \right. \\
 & - \frac{1}{2} \sum \varphi_3 p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} - \sum p_2 p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} - \sum p_2 p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} + \frac{1}{2} \sum p_2 \varphi_2 \varphi_1 p_3^{(1)} \\
 & - \frac{1}{2} \sum p_2 \varphi_3 \varphi_1 p_2^{(1)} \left. \right) (2 \sum \varphi_1 \varphi_m p_n \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} + \sum \varphi_1 \varphi_m \varphi_n \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \\
 & + \sum \varphi_1 p_m p_n p_m^{(1)} p_n^{(1)})] = 0 \tag{4.3.42}
 \end{aligned}$$

şeklini alır. k=3 için ise

$$\begin{aligned}
 & - 2a \frac{\partial p_3^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho_0} (\gamma_{2r}^{(0)} a^2 - \sum \psi_2 \psi_r) \frac{\partial^3 \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (-\sum \psi_2 p_r \varphi_m \varphi_m^{(1)}) \frac{\partial p_r^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & - \sum \psi_2 p_r p_m p_m^{(1)} \frac{\partial p_r^{(1)}}{\partial \xi} - \sum \psi_2 \varphi_r \varphi_m \varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} - \sum \psi_2 \varphi_r p_m p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & + \sum \varphi_2 \varphi_m \psi_r \varphi_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} + \sum \varphi_2 p_m \psi_r p_m^{(1)} \frac{\partial \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi} - 2 \sum p_3 p_\ell \psi_m p_\ell^{(1)} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & - 2 \sum p_3 \varphi_\ell \psi_m \varphi_\ell^{(1)} \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{6} \sum \varphi_2 \varphi_m \varphi_n \varphi_r \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} \varphi_r^{(1)} \right) \\
 & + \frac{1}{6} \sum \varphi_2 p_m p_n p_r p_m^{(1)} p_n^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_m \varphi_r p_n \varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 \varphi_m p_n p_r \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} p_r^{(1)} - \sum p_3 p_\ell \varphi_m p_n p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & - \sum p_3 p_\ell \varphi_m \varphi_n p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} - \frac{1}{3} \sum p_3 p_\ell p_m p_n p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} p_n^{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3} \sum p_3 \varphi_l \varphi_m \varphi_n \varphi_l^{(1)} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \frac{1}{\rho_0 (\rho_0 a^2 - \sum_{\underline{p}_n \underline{p}_n})} \frac{1}{2} (\sum \varphi_2 \varphi_m p_n - \sum p_3 \varphi_m p_n) \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum_{\underline{p}_n \underline{p}_l \varphi_r} \varphi_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_l^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{\underline{p}_n \underline{p}_l \underline{p}_r} \varphi_m^{(1)} p_l^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{\underline{p}_n \varphi_l \varphi_r} \varphi_m^{(1)} \varphi_l^{(1)} \varphi_r^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{\rho_0 (\rho_0 a^2 - \sum_{\underline{p}_n \underline{p}_n})} \frac{1}{2} (\sum \varphi_2 p_m p_n - \sum p_3 p_m p_n) \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum_{\underline{p}_n \underline{p}_l \varphi_r} p_m^{(1)} \varphi_r^{(1)} p_l^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\underline{p}_n \underline{p}_l \underline{p}_r} p_m^{(1)} p_l^{(1)} p_r^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{\underline{p}_n \varphi_l \varphi_r} p_m^{(1)} \varphi_l^{(1)} \varphi_r^{(1)} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} [(-\frac{1}{4} \sum \varphi_2 \varphi_2 \varphi_1 p_3^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{4} \sum \varphi_2 \varphi_3 \varphi_1 p_2^{(1)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} + \frac{1}{2} \sum \varphi_2 p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} - \sum p_3 p_2 \varphi_1 p_2^{(1)} \\
 & - \sum p_3 p_3 \varphi_1 p_3^{(1)} + \frac{1}{2} \sum p_3 \varphi_2 \varphi_1 p_3^{(1)} - \frac{1}{2} \sum p_3 \varphi_3 \varphi_1 p_2^{(1)}] (2 \sum_{\varphi_1 \varphi_m p_n} \varphi_m^{(1)} p_n^{(1)} \\
 & + \sum_{\varphi_1 \varphi_m \varphi_n} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(1)} + \sum_{\varphi_1 p_m p_n} p_m^{(1)} p_n^{(1)})] = 0 \tag{4.3.43}
 \end{aligned}$$

formundadır. Böylece (4.3.34) denklemi k=2 ve k=3 için birinci mertebe pertürbasyon terimlerinin sağladığı nonlineer kuple diferansiyel denklemlerine indirgenmiştir. Ancak (4.3.42) ve (4.3.43) denklemleri karmaşık görünüşleriyle ilk anda pek bir şey ifade etmemektedir. Bunların anlaşılır hale gelebilmeleri için tekrarlanan indisler üzerinde toplam yapılması ve denklemlerin aynı grup bilinmeyenler için yazılması gerekmektedir. Yukarıda anılan denklemlerde $\varphi_2^{(1)} = -\frac{1}{2} p_3^{(1)}$, $\varphi_3^{(1)} = \frac{1}{2} p_2^{(1)}$ bağıntılarını da kullanarak uzun ve karmaşık hesaplardan sonra, denklemler

$$\begin{aligned}
 & 2a \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho_0} (\gamma_{3r}^{(0)} a^2 - \sum \varphi_3 \varphi_r) \frac{\partial^3 \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_1 p_3^{(1)} \frac{\partial p_3^{(1)}}{\partial \xi} \\
 & + \alpha_2 p_2^{(1)} \frac{\partial p_3^{(1)}}{\partial \xi}) + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\beta_1 p_2^{(1)3} + \beta_2 p_2^{(1)2} p_3^{(1)} + \beta_3 p_2^{(1)} p_3^{(1)2} + \beta_4 p_3^{(1)3}) = 0 \tag{4.3.44}
 \end{aligned}$$

$$2a \frac{\partial p_3^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2\rho_0} (\gamma_{2r}^{(0)} a^2 - \sum \psi_2 \psi_r) \frac{\partial^3 \varphi_r^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_2 p_2^{(1)} \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \xi} + \alpha_1 p_3^{(1)} \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \xi}) + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\beta}_1 p_3^{(1)^3} + \tilde{\beta}_2 p_3^{(1)^2} p_2^{(1)} + \tilde{\beta}_3 p_3^{(1)} p_2^{(1)^2} + \tilde{\beta}_4 p_2^{(1)^3}) = 0$$

formlarını alırlar. Yukarıda sözü edilen hesapların yapılmasından sonra denklemler daha gözle görülür bir hale gelmişlerdir. Bu denklemlerde görülen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \beta_4$ katsayıları farklı mertebeden malzeme sabitlerinin toplamıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\alpha_1 = \sum \psi_3 p_3 \varphi_2 - \sum \psi_3 p_3 p_3 - \frac{1}{4} \sum \psi_3 \varphi_2 \varphi_2 + \frac{1}{4} \sum \psi_2 \varphi_2 \varphi_3 - \frac{1}{2} \sum \psi_2 \varphi_3 p_3 - \sum \psi_2 p_2 p_3 + \frac{1}{2} \sum \psi_2 p_2 \varphi_2$$

$$\alpha_2 = - \sum \psi_2 p_2 \varphi_3 - \sum \psi_2 p_2 p_2 - \frac{1}{4} \sum \psi_2 \varphi_3 \varphi_3 + \frac{1}{4} \sum \psi_3 \varphi_2 \varphi_3 + \frac{1}{2} \sum \psi_3 \varphi_2 p_2 - \sum \psi_3 p_2 p_3 - \frac{1}{2} \sum \psi_3 p_3 \varphi_3$$

$$\beta_1 = \frac{1}{48} \sum \psi_3 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3 + \frac{1}{6} \sum \psi_3 p_2 p_2 p_2 + \frac{1}{8} \sum \psi_3 \varphi_3 \varphi_3 p_2 + \frac{1}{4} \sum \psi_3 \varphi_3 p_2 p_2 + \frac{1}{2} \sum p_2 p_2 \varphi_3 p_2 + \frac{1}{4} \sum p_2 p_2 \varphi_3 \varphi_3 + \frac{1}{3} \sum p_2 p_2 p_2 p_2 + A \left(- \frac{1}{4} \sum p_1 p_2 \varphi_3 + \frac{1}{4} \sum p_1 p_2 p_2 + \frac{1}{16} \sum p_1 \varphi_3 \varphi_3 \right) (\sum \varphi_3 \varphi_3 p_1 + 4 \sum p_2 \varphi_3 p_1 + 4 \sum p_2 p_2 p_1) + \frac{2}{\pi} \left[- \frac{1}{4} \sum p_2 p_2 \varphi_3 + \frac{1}{4} \sum p_2 p_2 p_2 + \frac{1}{16} \sum p_2 \varphi_3 \varphi_3 \right] (\sum \varphi_3 \varphi_3 p_2 + 4 \sum p_2 \varphi_3 p_2 + 4 \sum p_2 p_2 p_2) - \left(- \frac{1}{4} \sum p_3 p_2 \varphi_3 + \frac{1}{4} \sum p_3 p_2 p_2 + \frac{1}{16} \sum p_3 \varphi_3 \varphi_3 \right) (\sum \varphi_3 \varphi_3 p_3$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 \sum p_2 \varphi_3 p_3 + 4 \sum p_2 p_2 p_3) + (-\frac{1}{4} \sum \varphi_3 \varphi_3 \varphi_1 - \sum \varphi_3 p_2 \varphi_1 - \sum p_2 p_2 \varphi_1) \\
 & (\sum \varphi_1 \varphi_3 p_2 + \sum \varphi_1 p_2 p_2 + \frac{1}{4} \sum \varphi_1 \varphi_3 \varphi_3)] \\
 \beta_2 = & -\frac{1}{16} \sum \varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \sum \varphi_3 p_2 p_2 p_3 - \frac{1}{4} \sum \varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 p_2 + \frac{1}{8} \sum \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3 p_3 \\
 & - \frac{1}{4} \sum \varphi_3 \varphi_2 p_2 p_2 + \frac{1}{2} \sum \varphi_3 \varphi_3 p_2 p_3 - \frac{1}{2} \sum p_2 p_2 \varphi_2 p_2 + \sum p_2 p_2 \varphi_3 p_3 \\
 & - \frac{1}{2} \sum p_2 p_2 \varphi_2 \varphi_3 + \frac{1}{4} \sum p_2 p_3 \varphi_3 \varphi_3 + \sum p_2 p_2 p_2 p_3 - \frac{1}{8} \sum p_2 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_3 \\
 & + A [(-\frac{1}{4} \sum p_1 p_2 \varphi_3 - \frac{1}{4} \sum p_1 p_2 p_2 - \frac{1}{16} \sum p_1 \varphi_3 \varphi_3) (\sum \varphi_3 \varphi_2 p_1 + 2 \sum p_2 \varphi_2 p_1 \\
 & - 2 \sum \varphi_3 p_3 p_1 - 4 \sum p_2 p_3 p_1) + (-\frac{1}{4} \sum p_1 p_2 \varphi_2 + \frac{1}{4} \sum p_1 p_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \sum p_1 p_2 p_3 \\
 & - \frac{1}{8} \sum p_1 \varphi_2 \varphi_3) (\sum \varphi_3 \varphi_3 p_1 + 4 \sum \varphi_3 p_2 p_1 + 4 \sum p_2 p_2 p_1)] + \frac{1}{2\pi} [(-\frac{1}{4} \sum p_2 p_2 \varphi_3 \\
 & + \frac{1}{4} \sum p_2 p_2 p_2 + \frac{1}{16} \sum p_2 \varphi_3 \varphi_3) (\sum \varphi_3 \varphi_2 p_2 + 2 \sum p_2 \varphi_2 p_2 - 2 \sum \varphi_3 p_3 p_2 \\
 & - 4 \sum p_2 p_3 p_2) + (-\sum p_2 p_2 \varphi_2 - \frac{1}{4} \sum p_2 p_3 \varphi_3 - \frac{1}{2} \sum p_2 p_2 p_3 + \frac{1}{8} \sum p_2 \varphi_2 \varphi_3) \\
 & (2 \sum \varphi_3 p_2 p_2 + 4 \sum p_2 p_2 p_2 + \sum \varphi_3 \varphi_3 p_2 + 2 \sum p_2 \varphi_3 p_2) + (-\frac{1}{4} \sum p_2 p_3 \varphi_3 \\
 & + \frac{1}{4} \sum p_3 p_2 p_2 + \frac{1}{16} \sum p_3 \varphi_3 \varphi_3) (\sum \varphi_3 \varphi_2 p_3 + 2 \sum p_2 \varphi_2 p_3 - 2 \sum \varphi_3 p_3 p_3 \\
 & - 4 \sum p_2 p_3 p_3) + (-\frac{1}{4} \sum p_3 p_2 \varphi_2 - \frac{1}{4} \sum p_3 p_3 \varphi_3 - \frac{1}{2} \sum p_3 p_2 p_3 + \frac{1}{8} \sum p_3 \varphi_2 \varphi_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_3} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_3 p_3} + 2 \Sigma_{\varphi_3 p_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_2 p_2 p_3}) + (-\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 p_3 \varphi_1} - \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_1}) (\Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 p_2} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 \varphi_3} \\
 & + \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_2}) + (-\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 p_2 \varphi_1} - \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 \varphi_3 \varphi_1}) \\
 & (-\Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_2} + \Sigma_{\varphi_1 p_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + 2 \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_3})] \\
 \beta_3 = & \frac{1}{16} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 p_2 p_3 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_2 p_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_3 \varphi_3} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_3 p_3} - \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_3 p_3} \\
 & + \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_2 \varphi_2} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2 \varphi_3} + \Sigma_{p_2 p_2 p_3 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_3} \\
 & + A [(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_2 \varphi_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_3}) \\
 & (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_1} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_2 p_1} - 2 \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_1} - 4 \Sigma_{p_2 p_3 p_1}) + (-\frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_2} \\
 & + \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 p_3} + \frac{1}{16} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_2}) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_1} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_3 p_1} + 2 \Sigma_{\varphi_3 p_2 p_1} \\
 & + 4 \Sigma_{p_2 p_2 p_1})] + \frac{1}{2\pi} [-(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 p_3} \\
 & + \frac{1}{8} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_3}) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_2} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_2 p_2} - 2 \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_2} - 4 \Sigma_{p_2 p_3 p_2}) \\
 & - (-\frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_3 p_3} + \frac{1}{16} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2}) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_2} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_3 p_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \Sigma_{\varphi_3 p_2 p_2} + 4 \Sigma_{p_2 p_2 p_2}) - \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 p_3} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_3} \right) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_2 p_3} - 2 \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_3} - 4 \Sigma_{p_2 p_3 p_3}) \\
 & - \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 p_3} + \frac{1}{16} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_2} \right) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_3} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_3 p_3} \\
 & + 2 \Sigma_{\varphi_3 p_2 p_3} + 4 \Sigma_{p_2 p_2 p_3}) + \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 p_3 \varphi_1} - \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_1} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_1} \right) (-\Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_2} + \Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 p_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + 2 \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_3}) \\
 & + \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 p_2 \varphi_1} - \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 \varphi_3 \varphi_1} \right) (-\Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_3} \\
 & \left. + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_2} + \Sigma_{\varphi_1 p_3 p_3} \right)] \\
 \beta_4 = & \frac{1}{48} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2} + \frac{1}{6} \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_3 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_2 p_3} - \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_3 p_3} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2 \varphi_2} + \frac{1}{3} \Sigma_{p_2 p_3 p_3 p_3} - \frac{1}{24} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2} \\
 & + A \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 p_3} - \frac{1}{16} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_2} \right) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_1} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_2 p_1} \\
 & - 2 \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_1} - 4 \Sigma_{p_2 p_3 p_1}) + \frac{1}{2\pi} \left[-\left(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 p_3} - \frac{1}{16} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_2} \right) \right. \\
 & \left. (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_2 p_3} - 2 \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_3} - 4 \Sigma_{p_2 p_3 p_3}) - \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 p_3 p_3} - \frac{1}{16} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2} \right) (\Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_2} + 2 \Sigma_{p_2 \varphi_2 p_2} - 2 \Sigma_{\varphi_3 p_3 p_2} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_2}) + (\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_3 p_3 \varphi_1} - \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_1}) \\
 & (- \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_2} + \Sigma_{\varphi_1 p_3 p_3})] \quad (4.3.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_1 = & \frac{1}{48} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2} - \frac{1}{6} \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_3 p_3} - \frac{1}{8} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_3 p_3} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_2 \varphi_2} + \frac{1}{3} \Sigma_{p_3 p_3 p_3 p_3} - \frac{1}{24} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_2} \\
 & + A (- \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 p_3 p_3} + \frac{1}{16} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_2}) (\Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_1} - 2 \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_1} \\
 & - 2 \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_1} + 4 \Sigma_{p_3 p_3 p_1}) + \frac{1}{2\kappa} [- (- \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 p_3} \\
 & + \frac{1}{8} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2}) (- \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_2} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_2} - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_2} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_2}) \\
 & - (- \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_2}) (- \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_3} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_3} \\
 & - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_3}) + (- \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_3 \varphi_1} - \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_1} \\
 & + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_1}) (- \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_2} + \Sigma_{\varphi_1 p_3 p_3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_2 = & - \frac{1}{16} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_3 p_3} - \frac{1}{8} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_2 p_2} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_3 p_3} \\
 & + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_2 p_3} - \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_3 p_3} - \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_3 p_3} \\
 & + \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2 \varphi_2} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_2 \varphi_3} + \Sigma_{p_3 p_3 p_2 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A \left[\left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_3} + \Sigma_{p_1 p_2 p_3} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_3} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_1} \right. \right. \\
 & - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_1} - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_1} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_1} \left. \right) + \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_3 p_3} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{8} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_2} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 p_2 p_1} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_1} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_1} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2} \right. \right. \\
 & + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_2} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_2} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_2} \left. \right) - \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_3} \right. \\
 & \left. \left. + \Sigma_{p_2 p_2 p_3} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_3} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_2} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_2} - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_3} + \Sigma_{p_3 p_2 p_3} - \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_3} \right) \right. \\
 & \left. \left. \left(-\Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_3} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_3} - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_2} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 p_3} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_2} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 p_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_3} \right) + \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_3 \varphi_1} - \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_1} \right) \right. \\
 & \left. \left. \left(-\Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_2} + \Sigma_{\varphi_1 p_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + 2 \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_3} \right) + \left(-\Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_2 \varphi_1} - \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 \varphi_3 \varphi_1} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \Sigma_{\varphi_1 p_3 p_3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_3 = & \frac{1}{16} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2 p_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_3 p_2} - \frac{1}{8} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 p_3} \\
 & + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_2 p_2} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_2 p_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2 p_2} + \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_3 p_3} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2 \varphi_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_3 \varphi_3} + \Sigma_{p_3 p_2 p_2 p_3} - \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_3} \\
 & + A \left[\frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 \varphi_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 p_2} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_1 \varphi_3 \varphi_3} \right] \left(\frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_1} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_1} \right. \\
 & \left. - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_1} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_1} \right) + \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_3 \varphi_3} + \Sigma_{p_1 p_2 p_3} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_3} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 p_2 p_1} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_1} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_1} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left[-\left(\frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 p_2} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_2 \varphi_3 \varphi_3} \right) \left(\frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_2} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_3 \varphi_3} + \Sigma_{p_2 p_2 p_3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{4} \Sigma_{p_2 \varphi_2 \varphi_3} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_2} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_2} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_2} \right) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 p_2} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_3 \varphi_3} \right) \left(\frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_3} - \Sigma_{p_3 \varphi_2 p_3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_3 p_3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_3} + \Sigma_{p_3 p_2 p_3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_3} \right) \left(-\Sigma_{\varphi_2 p_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_3} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_3} \right) \right. \\
 & \left. + \left(-\frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_3 \varphi_1} - \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 \varphi_2 \varphi_1} \right) \left(\Sigma_{\varphi_1 p_2 \varphi_3} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 \varphi_3} + \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_2}) + (- \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_2 \varphi_1} - \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_1} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 \varphi_3 \varphi_1}) (- \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_2} + \Sigma_{\varphi_1 p_3 \varphi_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + 2 \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_3})] \\
 \tilde{\beta}_4 = & - \frac{1}{48} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3} - \frac{1}{8} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_3 p_2} - \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_3 \varphi_2 p_2 p_2} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_3 p_2} \\
 & + \frac{1}{4} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_3 \varphi_3} + \frac{1}{3} \Sigma_{p_3 p_2 p_2 p_2} + \frac{1}{24} \Sigma_{p_3 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_3} - \frac{1}{6} \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2 p_2} \\
 & + A (- \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 \varphi_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_1 p_2 p_2} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_1 \varphi_3 \varphi_3}) (- \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_1} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_1} \\
 & - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_1} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_1}) + \frac{1}{2\kappa} [- (- \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 \varphi_3} + \frac{1}{2} \Sigma_{p_2 p_2 p_2} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_2 \varphi_3 \varphi_3}) \\
 & (- \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_2} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_2} + \Sigma_{p_3 \varphi_3 p_2}) - (- \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_3} \\
 & + \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 p_2 p_2} + \frac{1}{8} \Sigma_{p_3 \varphi_3 \varphi_3}) (- \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_3} + 2 \Sigma_{p_3 p_2 p_3} - \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_3} \\
 & + \Sigma_{p_3 p_3 \varphi_3}) + (- \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1} + \frac{1}{2} \Sigma_{\varphi_2 p_2 \varphi_1} - \Sigma_{p_3 p_2 \varphi_1} - \frac{1}{2} \Sigma_{p_3 \varphi_3 \varphi_1}) \\
 & (\Sigma_{\varphi_1 p_2 \varphi_3} + \frac{1}{4} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 \varphi_3} + \Sigma_{\varphi_1 p_2 p_2})] \tag{4.3.46}
 \end{aligned}$$

(4.3.45) ve (4.3.46) ifadelerinde görülen A, $(-2/2\mu+\kappa+2\lambda)$ büyüklüğü yerine kullanılmıştır. (4.3.44) denklemlerinde dissipatif terimler diyebileceğimiz üçüncü grup terimlerin α_1, α_2 katsayıları her iki denklemde de görülürken, β_i ve $\tilde{\beta}_i$ ($i=1,4$) katsayıları arasında bu aşamada bir ilişki gözlenmemiştir. Yalnız burada hatırlanması gereken durum şudur: Başlangıçta (4.2.12) lineer denklemlerinde görülen Σ 'nın ikinci türevleri ile lineer izotrop malzeme sabitleri arasında

ilişkiler kurarak, daha sonra (4.3.22) denklemlerinin geçerli olduğunu göstermek için Σ 'nin üçüncü türevlerinin genel izotrop bir katı için ne olduğunu hesapladığımız (4.3.27) ifadesi ile izotropiyi kullandık. Ancak $\beta_i, \tilde{\beta}_i$ ($i=1,4$) katsayıları içinde Σ 'nin dördüncü merteye türevleri de bulunmaktadır. İzotropinin Σ 'nin dördüncü derece türevlerini içeren katsayılarını nasıl etkileyeceğini bu aşamada bilmemekteyiz. Bunu bilebilmek için Σ 'nin üçüncü derece türevlerini içeren sabitlerin izotrop katı durumunda aldığı formu bulmak için yaptığımız işlemleri, bir üst mertebeyi de içeren terimlerle benzer işleri yapmamız gerekir. Bunun için Σ 'yi C ve Γ 'nin ortak invaryantlarına göre dördüncü mertebeye kadar seriye açmak, açılıma giren terimleri de p, φ ve ψ fonksiyonlarının dördüncü kuvvetlerini içerecek şekilde seriye açmak gerekir. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \tilde{\beta}_4$ katsayılarının izotrop ortamlar için ne olacağına bakmadan önce (4.3.44) denklemlerinde bulunan $\gamma_{kl}^{(0)}$ büyüklüğünü hesaplamak gerekmektedir. Mikroizotrop katılar için (2.3.27)₂ ile verilen γ açık olarak

$$\gamma_{kl} = \rho_0 J [2(1 - \cos \theta) (\delta_{kl} - \frac{\varphi_k \varphi_l}{\theta^2}) + \varphi_k \varphi_l] \frac{1}{\theta^2} \quad (4.3.47)$$

şeklinde yazılabilir. φ bağımlı değişkeninin sıfır durumu civarında

$$\varphi_k = \varphi_k^{(1)} \epsilon^{1/2} + \varphi_k^{(2)} \epsilon + \varphi_k^{(3)} \epsilon^{3/2} + O(\epsilon^2)$$

olarak yazılabildiği düşünülürse, aşağıdaki

$$\theta^2 = \varphi_m \varphi_m = \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(1)} \epsilon + 2 \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)} \epsilon^{3/2} + O(\epsilon^2)$$

$$\theta^{-2} = \epsilon^{-1} \left[\frac{1}{\varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}} - \frac{2 \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)}}{(\varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(1)})^2} \epsilon^{1/2} + O(\epsilon) \right]$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(1)} \epsilon + O(\epsilon^{3/2})$$

$$\frac{\varphi_k \varphi_l}{\theta^2} = \frac{\varphi_k^{(1)} \varphi_l^{(1)}}{\varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}} + \varepsilon^{1/2} \left[- \frac{2 \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)}}{(\varphi_n^{(1)} \varphi_n^{(1)})^2} \varphi_k^{(1)} \varphi_l^{(1)} + \frac{\varphi_k^{(1)} \varphi_l^{(2)} + \varphi_k^{(2)} \varphi_l^{(1)}}{\varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}} \right] + O(\varepsilon)$$

açılımlar geçerlidir. Bu fonksiyonlar γ ifadesinde yazılırsa

$$\gamma_{k\ell} = \rho_o J [\delta_{k\ell} + O(\varepsilon^{1/2})] \quad (4.3.48)$$

sonucu elde edilir. Buradan $\gamma_{k\ell}^{(0)} = \rho_o J \delta_{k\ell}$ olduğu hemen görülmektedir. Bundan sonraki adım izotropinin (4.3.44) denklemlerindeki katsayılarla ne gibi kısıtlar getirdiğini bulmaktır. (4.3.44) denklemlerinde izotropiyi tam ve doğru olarak kullanmak için α_1, \dots, β_4 katsayılarında görülen Σ iç enerji fonksiyonunun φ ve p fonksiyonlarına göre türevlerinin, C ve Γ 'nin invaryantlarına göre türevleri cinsinden hesaplanması gerekir. Bunun için C ve Γ 'nin onbeş invaryantını önce

$$I_i = I_i^{(0)} + I_i^{(1)} \varepsilon^{1/2} + I_i^{(2)} \varepsilon + \dots \quad (i=1,15)$$

formunda yazmak gerekmektedir. C ve Γ 'nin p ve φ 'ye bağılılıkları nedeni ile

$$C_{KL} = C_{KL}^{(0)} + C_{KL}^{(1)} \varepsilon^{1/2} + C_{KL}^{(2)} \varepsilon + \dots$$

$$\Gamma_{KL} = \Gamma_{KL}^{(0)} + \Gamma_{KL}^{(1)} \varepsilon^{1/2} + \Gamma_{KL}^{(2)} \varepsilon + \dots$$

yazılabileceği açıktır. Burada $C_{KL}^{(0)}, C_{KL}^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots$ ve $p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, \dots; \Gamma_{KL}^{(0)}, \Gamma_{KL}^{(1)}, \dots$ ise $\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots$ ve $\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \dots$ fonksiyonlarına bağlı olacağından I_i ($i=1,15$) invaryantları da C ve Γ 'nin fonksiyonu olduklarından aynı argümanları içermelidirler. Bu durumda Σ_{φ_k} ifadesini invaryantlar cinsinden

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi_k} \right) \varepsilon^{1/2} = 0 = \left[\sum_{i=1}^{15} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_i} \left(\frac{\partial I_i}{\partial C_{KL}} \frac{\partial C_{KL}}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial I_i}{\partial \Gamma_{KL}} \frac{\partial \Gamma_{KL}}{\partial \varphi_k} \right) \right] \varepsilon^{1/2} = 0 \quad (4.3.49)$$

formunda yazmak mümkündür. Esasen bu zahmetli iş Σ 'nin üçüncü derece türevlerini içeren sabitler için (4.3.22) ifadesini gerçeklemek için

yapılmıştı. Σ için önerilen (4.3.23) açılımını bir merteye ileri götürerek dördüncü türevleri de hesaplamanın çok uzun ve karmaşık bir iş olduğu açıktır, fakat izotropinin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_4$ katsayılarına getirdiği kısıtlamaların bulunmasının gerçek yolu budur. Bu yolun çok uzun ve zahmetli olmasından dolayı, burada kolay ve sonuca götürücü başka bir yol izlenmiştir. Bir boyutlu alan denklemlerine uygulanan pertürbasyon sonucunda katının uzak alan davranışlarını veren (4.3.44) denklemleri $p_2^{(1)}$ ve $p_3^{(1)}$ bileşenleri için kuple NKDD lerinden ibarettir. Eğer ortam izotropsa veya başka bir deyişle doğrultuların birbirlerine göre üstünlüğü yoksa (p_2, p_3) çiftinin sağladığı denklemlerle, bu çiftin düzlemde α açısı kadar döndürülmüş halleri olan (p_2', p_3') çiftinin sağlayacağı denklemler form olarak aynı olmalıdır. (Yazım kolaylığı bakımından p_2 ve p_3 fonksiyonlarının (1) üst indisi kaldırılmıştır.) p_2 ve p_3 fonksiyonların düzlemde α açısı kadar döndükten sonraki formları olan p_2' ve p_3' fonksiyonları

$$p_2' = \cos \alpha p_2 + \sin \alpha p_3 \quad (4.3.50)$$

$$p_3' = -\sin \alpha p_2 + \cos \alpha p_3$$

ifadeleri ile verilir. İzotropi ile kastedilen, (p_2, p_3) çifti (4.3.44) denklemlerini sağlarken (p_2', p_3') çiftinin de aynı denklemleri sağlamasının gerektiğidir. (4.3.44) denklemleri daha düzenli bir formda yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8 \rho_0 a} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_1 p_3 \frac{\partial p_3}{\partial \xi} + \alpha_2 p_2 \frac{\partial p_3}{\partial \xi}) \\ + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\beta_1 p_2^3 + \beta_2 p_2^2 p_3 + \beta_3 p_2 p_3^2 + \beta_4 p_3^3) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8 \rho_0 a} \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_2 p_2 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \alpha_1 p_3 \frac{\partial p_2}{\partial \xi}) \\ + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\beta}_1 p_3^3 + \tilde{\beta}_2 p_3^2 p_2 + \tilde{\beta}_3 p_3 p_2^2 + \tilde{\beta}_4 p_2^3) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.51) denklemlerinin (p'_2, p'_3) çifti tarafından da sağlandığı düşünülürse

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p'_2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_1 p'_3 \frac{\partial p'_2}{\partial \xi} + \alpha_2 p'_2 \frac{\partial p'_3}{\partial \xi}) \\ & + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\beta_1 p'^3_2 + \beta_2 p'^2_2 p'_3 + \beta_3 p'_2 p'^2_3 + \beta_4 p'^3_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p'_3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_2 p'_2 \frac{\partial p'_3}{\partial \xi} + \alpha_1 p'_3 \frac{\partial p'_2}{\partial \xi}) \\ & + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\beta}_1 p'^3_3 + \tilde{\beta}_2 p'^2_3 p'_2 + \tilde{\beta}_3 p'_3 p'^2_2 + \tilde{\beta}_4 p'^3_2) = 0 \end{aligned}$$

denklemleri yazılabilir (4.3.52) denklemlerinde (p'_2, p'_3) çifti için (4.3.50) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \left\{ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\cos \alpha \alpha_1 + \sin \alpha \alpha_2) p_3 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + (-\sin \alpha \alpha_1 + \cos \alpha \alpha_2) p_2 \frac{\partial p_3}{\partial \xi}] \right\} + \sin \alpha \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a} \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\sin \alpha \alpha_1 - \cos \alpha \alpha_2) p_2 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + (-\cos \alpha \alpha_1 - \sin \alpha \alpha_2) p_3 \frac{\partial p_2}{\partial \xi}] \right\} \\ & + \frac{1}{4\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [p_2^3 (\cos^3 \alpha \beta_1 - \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_2 + \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_3 - \sin^3 \alpha \beta_4) \\ & + p_2^2 p_3 (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_1 + \cos^3 \alpha \beta_2 - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_2 - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_3 \\ & + \sin^3 \alpha \beta_3 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_4) + p_2 p_3^2 (3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_1 + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_2 \\ & - \sin^3 \alpha \beta_2 + \cos^3 \alpha \beta_3 - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_3 - 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_4) + p_3^3 (\sin^3 \alpha \beta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin^2 \alpha \cos \alpha \beta_2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha \beta_3 + \cos^3 \alpha \beta_4)] = 0 \\
 & \cos \alpha \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8 \rho_0 a} \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\cos \alpha \alpha_2 - \sin \alpha \alpha_1) p_2 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \right. \\
 & \left. + (\sin \alpha \alpha_2 + \cos \alpha \alpha_1) p_3 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \right\} - \sin \alpha \left\{ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8 \rho_0 a} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [(-\sin \alpha \alpha_2 - \cos \alpha \alpha_1) p_3 \frac{\partial p_3}{\partial \xi} + (-\cos \alpha \alpha_2 - \sin \alpha \alpha_1) p_2 \frac{\partial p_3}{\partial \xi}] \right\} \\
 & + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [p_3^3 (\cos^3 \alpha \tilde{\beta}_1 + \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_2 + \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_3 + \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_4) \\
 & + p_3^2 p_2 (-3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_1 + \cos^3 \alpha \tilde{\beta}_2 - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_2 \\
 & + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_3 - \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_3 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_4) + p_2^2 p_3 (3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_1 \\
 & - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_2 + \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_2 + \cos^3 \alpha \tilde{\beta}_3 - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_3 \\
 & + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_4) + p_2^3 (-\sin^3 \alpha \tilde{\beta}_1 + \sin^2 \alpha \cos \alpha \tilde{\beta}_2 - \sin \alpha \cos^2 \alpha \tilde{\beta}_3 \\
 & + \cos^3 \alpha \tilde{\beta}_4)] = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3.53}$$

ifadeleri elde edilir. (4.3.51)₁₋₂ denklemlerindeki ilk iki terim (4.3.53) denklemlerinde yazılırsa disipatif terimlerin katsayıları olan α_1 ve α_2 izotropinin gereği aşağıdaki kısıtları sağlamak zorundadır:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha \alpha_1 + \sin \alpha \alpha_2 &= \alpha_1, & -\sin \alpha \alpha_1 + \cos \alpha \alpha_2 &= -\alpha_2 \\
 \sin \alpha \alpha_1 - \cos \alpha \alpha_2 &= -\alpha_2, & -\cos \alpha \alpha_1 - \sin \alpha \alpha_2 &= \alpha_1
 \end{aligned}
 \tag{4.3.54}$$

Bu koşulları sağlayan α_1 ve α_2 katsayılarının sıfır olması gerektiği

(4.3.54) denklemlerinden açıkça görülmektedir. Böylece ilk adım olarak izotrop mikropolar katı için dissipatif terimlerin katsayılarının sıfır olacağı görülmüştür. $\beta_i, \tilde{\beta}_i$ ($i=1,4$) katsayılarının sağlanması gereken kısıtlamaların

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} [p_2^3 (\cos^3 \alpha \beta_1 - \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_2 + \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_3 - \sin^3 \alpha \beta_4 - \cos \alpha \beta_1 \\ & - \sin \alpha \tilde{\beta}_4) + p_2^2 p_3 (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_1 + \cos^3 \alpha \beta_2 - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_2 \\ & - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_3 + \sin^3 \alpha \beta_3 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_4 - \cos \alpha \beta_2 - \sin \alpha \tilde{\beta}_3) \\ & + p_2^2 p_3^2 (3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_1 + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_2 - \sin^3 \alpha \beta_2 + \cos^3 \alpha \beta_3 \\ & - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_3 - 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_4 - \cos \alpha \beta_3 - \sin \alpha \tilde{\beta}_2) \\ & + p_3^3 (\sin^3 \alpha \beta_1 + \sin^2 \alpha \cos \alpha \beta_2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha \beta_3 + \cos^3 \alpha \beta_4 \\ & - \cos \alpha \beta_4 - \sin \alpha \tilde{\beta}_1)] = 0 \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} [p_3^3 (\cos^3 \alpha \tilde{\beta}_1 + \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_2 + \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_3 + \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_4 \\ & + \sin \alpha \beta_4 - \cos \alpha \tilde{\beta}_1) + p_3^2 p_2 (-3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_1 + \cos^3 \alpha \tilde{\beta}_2 \\ & - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_2 + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_3 - \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_3 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_4 \\ & + \sin \alpha \beta_3 - \cos \alpha \tilde{\beta}_2) + p_2^2 p_3 (3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_1 - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_2 \\ & + \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_2 + \cos^3 \alpha \tilde{\beta}_3 - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_3 + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_4 \\ & + \sin \alpha \beta_2 - \cos \alpha \tilde{\beta}_3) + p_2^3 (-\sin^3 \alpha \tilde{\beta}_1 + \sin^2 \alpha \cos \alpha \tilde{\beta}_2 - \sin \alpha \cos^2 \alpha \tilde{\beta}_3 \\ & + \cos^3 \alpha \tilde{\beta}_4 + \sin \alpha \beta_1 - \cos \alpha \tilde{\beta}_4)] = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Parantez içindeki fonksiyonların lineer bağımsız olması toplamın sıfır olması için her bir katsayısının sıfır olmasını gerektirir. Bu bize β_1, β_1 ($i=1,4$) katsayıları arasında aşağıdaki bağıntıları verir:

$$\tilde{\beta}_4 = \frac{1}{\sin \alpha} (-\cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_1 - \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_2 + \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_3 - \sin^3 \alpha \beta_4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_3 = \frac{1}{\sin \alpha} [3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_1 - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_2 + (-2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ + \sin^3 \alpha) \beta_3 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_4] \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{\sin \alpha} [3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_1 + (2 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) \beta_2 \\ - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_3 - 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \beta_4] \end{aligned}$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{1}{\sin \alpha} (\sin^3 \alpha \beta_1 + \sin^2 \alpha \cos \alpha \beta_2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha \beta_3 - \cos \alpha \sin^2 \alpha \beta_4)$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{\sin \alpha} (-\cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_1 + \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_2 + \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_3 + \sin^3 \alpha \tilde{\beta}_4)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = -\frac{1}{\sin \alpha} [-3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_1 - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_2 + (2 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \\ - \sin^3 \alpha) \tilde{\beta}_3 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_4] \end{aligned} \quad (4.3.57)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = -\frac{1}{\sin \alpha} [3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_1 + (-2 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin^3 \alpha) \tilde{\beta}_2 \\ - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_3 + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tilde{\beta}_4] \end{aligned}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{\sin \alpha} (-\sin^3 \alpha \tilde{\beta}_1 + \sin^2 \alpha \cos \alpha \tilde{\beta}_2 - \sin \alpha \cos^2 \alpha \tilde{\beta}_3 - \cos \alpha \sin^2 \alpha \tilde{\beta}_4)$$

(4.3.56) denklemlerinden çekilen $\tilde{\beta}_i$ ($i=1,4$) katsayıları (4.3.57) denklemlerinde yerlerine yazılırsa $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve β_4 katsayılarının sağladığı (4x4)'lük homojen bir denklem takımına varılır. Kolay fakat uzun işlemler sonucunda β_i ($i=1,4$) katsayıları için geçerli olan bu denklem sisteminin aslında $(\beta_1 - \beta_3)$ ve $(\beta_2 - \beta_4)$ çiftinin sağlaması gereken iki denklem olduğunu görmek mümkündür:

$$\sin \alpha (\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha) (\beta_1 - \beta_3) + \cos \alpha (3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\beta_2 - \beta_4) = 0 \quad (4.3.58)$$

$$\cos \alpha (3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\beta_1 - \beta_3) + \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\beta_2 - \beta_4) = 0$$

$(\beta_1 - \beta_3)$ ve $(\beta_2 - \beta_4)$ çifti için bu denklem sisteminin çözümü olması için katsayılar determinantların sıfır olması gerekmektedir. Halbuki bu determinant hesaplanırsa (-1) olduğu görülecektir. Buradan tek mümkün çözümün $\beta_1 - \beta_3 = 0$, $\beta_2 - \beta_4 = 0$ olduğu görülecektir. $\beta_1 = \beta_3$, $\beta_2 = \beta_4$ kısıtlamalarının $\tilde{\beta}_i$ ($i=1,4$) katsayılarını ne şekilde değiştirdiğini görmek için (4.3.56) denklemlerine bakmak gerekmektedir. Bu yapılrsa

$$\tilde{\beta}_4 = \tilde{\beta}_2 = -\beta_2, \quad \tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_1 = \beta_1$$

olduğu kolayca görülür. Mikropolar katının keyfi α açısı dönmesi altında (4.3.51) denklemlerinin form invaryant kalması sonucunda denklemlerin katsayıları için elde edilen kısıtlamalar kullanılarak evolüsyon denklemlerinin son şekli yazılırsa

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8 \rho_0 a} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [\beta_1 (p_2^3 + p_2 p_3^2) + \beta_2 (p_2^2 p_3 + p_3^3)] = 0 \quad (4.3.59)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8 \rho_0 a} \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{4 \rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \xi} [\beta_1 (p_3^3 + p_3 p_2^2) - \beta_2 (p_3^2 p_2 + p_2^3)] = 0$$

elde edilir. Evolüsyon denklemlerinin bu şekliyle, yayılma doğrultusuna ($X = X_1$) dik bir düzlem için de ($X_2 X_3$ -düzlemi) yansımalara izin verilmediğine dikkat edilmelidir. Bu formuyla denklemlerin hemitropik katılar (invaryantlığın proper ortogonal grup altında kabul edildiği)

için geçerli olduğu söylenebilir. Katının izotrop olması için $X'_1 = X_1$, $X'_2 = -X_2$, $X'_3 = X_3$ veya $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2$, $X'_3 = -X_3$ gibi dönüşümler altında da alan denklemlerinin invaryant kalması, yani sırasıyla $(-p_2, p_3)$ veya $(p_2, -p_3)$ çiftleri için (4.3.59) denklemlerinin form invaryant kalmaları gerekmektedir. Bu koşul ise bize $\beta_2 = 0$ olması gerektiğini söyler. Nihayet izotrop polar bir katı için (4.3.59) evolüsyon denklemleri

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_2^3) + \beta \frac{\partial^3 p_2}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_2 p_3^2) = 0 \quad (4.3.60)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_3^3) + \beta \frac{\partial^3 p_3}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (p_3 p_2^2) = 0$$

formuna indirgenirler. Burada

$$\alpha = \frac{\beta_1}{4\rho_0 a}, \quad \beta = \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a}$$

tanımları yapılmıştır.

Bir boyutlu alan denklemlerine uygun bir koordinat uzatmasından sonra pertürbatif çözümler arandığında karşımıza çıkan denklem hiyerarşilerinde yüksek mertebe terimlerin yok edilmesinden sonra, izotrop katılar için (4.3.60) denklemlerine varılmıştır. (4.3.60) denklemlerinde ilk üç terim Modifiye Korteweg-de Vries (MKdV) denklemlerinden ibarettir. Son terimler ise diğer denklemle kuplajı göstermektedir. (4.3.60) denklemlerini bu durumda Kuple MKdV olarak adlandırmak mümkündür. p_2 ve p_3 reel fonksiyonlar olmak üzere $w(\xi, \tau)$ kompleks fonksiyonu $w = p_2 + ip_3$ olarak tanımlanırsa (4.3.60) denklemleri

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (|w|^2 w) + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.3.61)$$

tek denkleme indirgenir. Bu denklem Kompleks Modifiye Korteweg-de

Vries (KMKdV) denkleminde ibarettir.

$p_2^{(1)} = 2\varphi_3^{(1)}$ ve $p_3^{(1)} = -2\varphi_2^{(1)}$ bağıntılarının geçerli olduğu düşünülürse φ_2 ve φ_3 çifti için (üst indisler kaldırılmıştır) (4.3.60) denklemleri aşağıdaki formu alırlar:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau} + 4\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_3^3) + \beta \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \xi^3} + 4\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_3 \varphi_2^2) = 0$$

(4.3.62)

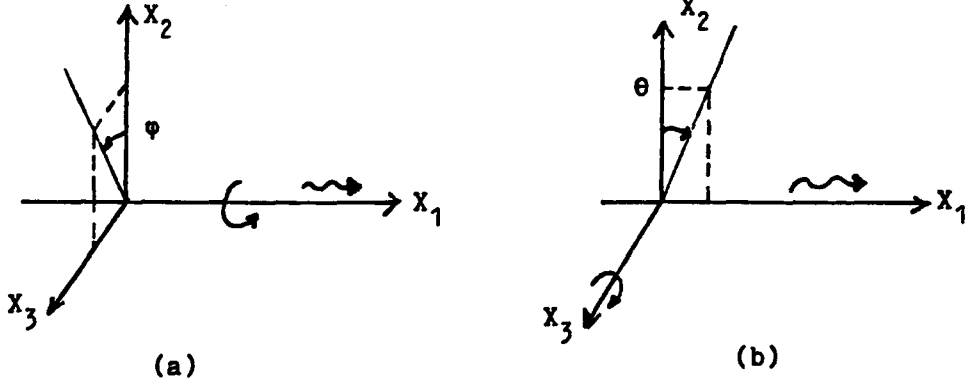
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} + 4\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_2^3) + \beta \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \xi^3} + 4\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_2 \varphi_3^2) = 0$$

veya $\zeta = \varphi_2 + i\varphi_3$ tanımı ile $w = -2i\zeta$ ve

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + 4\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (|\zeta|^2 \zeta) + \beta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} = 0$$

elde ederiz. (p_2, p_3) çifti için burada elde edilen KMKdV denklemi daha önce, magnetize olmuş plazmada yayılabildiği gözlenmiş iki konum boyutlu elektrostatik dalgaların nonlineer self modülasyonu incelendiğinde Karney, Sen ve Chu tarafından da elde edilmiştir [29], [30].

Nonlineer mikropolar katılarda bir boyutlu dalga yayılmasında farklı argümanlar kullanan Maugin ve Miled [31] değişik evölüsyon denklemleri elde etmişlerdir. Bu yazarlar ferromagnetlerde görülen Bloch ve Néel duvarları kavramlarını mikropolar katıların tanımlanmasında kullanmışlardır. Ferromagnetik Bloch duvarında, magnetik bir spin $X_1 = -\infty$ 'daki üniform bir durumdan etkisini arttırarak dar bir tabaka içinden X_1 eksenini etrafında 180° dönerek $X_1 = +\infty$ 'daki başka üniform bir duruma etkisi azalmış olarak geçer. Ferromagnetik Néel duvarında da benzer limit durumlar geçerlidir, ancak dönme spinin hareket ettiği X_1 eksenini içeren düzlem içinde gerçekleşir.



Şekil 4.3.1. (a) Bloch duvarı, (b) Néel duvarı

Yazarlar Σ iç enerji fonksiyonunu lineer mikropolar elastik katılar için kullanılan formda seçmişler, fakat sonlu şekil değiştirme tansörlerinin invaryantlarını kullanarak nonlineer davranışı probleme sokmuşlardır. Diğer bir deyişle nonlineerlik malzemenin bağlı olduğu \mathbf{C} ve Γ tansörlerinden gelmektedir. Böyle bir içenerji fonksiyonunu kullanarak bir boyutlu hareket denklemlerini yazmışlardır. Burada ilginç bir seçim χ mikrorotasyon tansörü ile ilgilidir. χ , X_3 eksenini etrafında θ kadar dönmeyi gösteren X_1 ve X_2 eksenini etrafında φ kadar dönmeyi gösteren X_2 'nin kompozisyonu olarak alınmıştır: $\chi = \chi_2 \circ \chi_1$. Dönme açılarının bu şekilde seçilmesi Bloch ve Néel duvarları ile kurulmak istenen ilgiden kaynaklanmaktadır. Mikropolar katıların yukarıda anlatıldığı gibi elde edilen alan denklemlerinde $\theta = 0$ alınırsa Bloch duvarı, $\varphi = 0$ alınırsa Néel duvarı tanımlanmış olur.

Yazarlar Bloch duvarı durumunda boyuna dalga yayılması için boyutsuz değişkenlerle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \bar{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial X} \left(\cos \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = e \sin \frac{\phi}{2} + \bar{\alpha} \frac{\partial u}{\partial X} \sin \frac{\phi}{2}$$

NKDD takımını elde etmişlerdir. ((4.3.63) denklemleri (4.2.15) denklemlerini hatırlatmaktadır). Burada verilen sabitler

$$V_L^2 = \frac{J_1(\lambda+2\mu+\kappa)}{(\alpha+\beta+\gamma)} , \quad \bar{\alpha} = [2(\alpha+\beta+\gamma)(\lambda+\mu)]^{1/2} , \quad e = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

olarak tanımlanmışlardır. (4.3.63) denklemleri boyuna elastik yer-
değiştirmeler için d'Alembert dalga denklemi, Φ için (mikro dönme açısı φ -nin iki katı) Çift Sinüs-Gordon denkleminde ibarettir. İki denklem $\bar{\alpha}$ parametresiyle birbirine bağlanmıştır. Néel duvarı durumunda ($\varphi=0$) boyuna ve enine yer değiştirmeler birbirinden bağımsız olmadığından durum biraz daha karışıktır. Yazarlar bu durumda, boyutsuz değişkenlerle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - V_L^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial X} \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - V_T^2 \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial X} \left(\sin \frac{\Phi}{2} \right) \quad (4.3.64)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \sin \Phi = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial X} \sin \frac{\Phi}{2} - \frac{\partial g}{\partial X} \cos \frac{\Phi}{2} \right)$$

denklemlerini elde etmişlerdir. Burada

$$V_L^2 = \frac{\lambda+2\mu+\kappa}{\rho_0(\gamma/J_3)} , \quad V_T^2 = \frac{\mu+\kappa}{\rho_0(\gamma/J_3)} , \quad \alpha = \mu (J_3/2\gamma)^{1/2} , \quad \Phi = 2\theta$$

olarak tanımlanmışlardır. f ve g fonksiyonları reel kısmı boyuna yer değiştirme, sanal kısmı enine yer değiştirme olan $U^\pm = U + iV$ şeklinde tanımlanan U^\pm fonksiyonlarının $U^\pm = F^\pm \exp(\pm i\theta)$ şeklindeki F^\pm genlikleri ile ilgili boyutsuz büyüklüklerdir. Ana hatları kabaca yukarıda anlatılan makale, bildiğimiz kadarıyla nonlineer polar katılarda bir boyutlu dalga yayılması üzerine yapılmış tek çalışmadır.

4.4. ÖZEL HAL: KUADRATİK KATI

Hatırlanacağı gibi (4.3.22) denklemi ile karşımıza çıkan ve Σ 'nin üçüncü mertebe türevlerini içeren malzeme sabitlerinin katının izotrop olması durumunda ne gibi kısıtlamalar sağladığını bulmak için, Σ fonksiyonu (4.3.25) serisine açılmıştı. Oradaki amacımız yukarıda belirtildiği gibi Σ 'nin üçüncü mertebe türevlerinin izotrop durumda aldığı şekli bulmaktı. Ama biz özel olarak kuadratik katı ile ilgilenmiş olsaydık, aynı açılımı yapmak durumunda kalacaktık. (4.3.25) açılımının kuadratik katı için geçerli olduğu düşünülerek (4.3.61) evolüsyon denkleminde görülen α ve β katsayılarının ne olduğuna bakmak mümkündür. Bunun için α ve β 'nin içinde bulunan Σ 'nin p ve φ 'ye göre türevlerini hesaplamak gerekir. (4.3.28) ifadeleri de kullanılarak kuadratik katı durumunda Σ 'nin türevleri ile α_i ($i=1,17$) sabitleri arasında aşağıdaki ilişkilerin olduğu gözlenmiştir.

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_3} &= \Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 p_2} = \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_2} = \Sigma_{\varphi_2 \varphi_2 p_3} = \Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_2} = \Sigma_{\varphi_3 \varphi_3 p_3} \\ &= \Sigma_{\varphi_2 \varphi_3 p_m} = 0 \quad (m=1,3) \end{aligned}$$

$$\Sigma_{\varphi_1 \varphi_2 p_2} = \Sigma_{\varphi_1 \varphi_3 p_3} = \frac{1}{2} (\alpha_1 + 4\alpha_{11} + 9\alpha_{12} + 3\alpha_{14})$$

$$\Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_2} = \Sigma_{p_1 \varphi_3 \varphi_3} = -(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_6 + \alpha_7 + 4\alpha_{11} + 9\alpha_{12} + 3\alpha_{14})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varphi_1 p_\ell p_m} &= \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_3} = \Sigma_{p_1 \varphi_3 p_3} = \Sigma_{p_1 \varphi_2 \varphi_2} = \Sigma_{p_1 p_2 \varphi_2} = \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2} \\ &= \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_3} = \Sigma_{\varphi_2 p_3 p_3} = \Sigma_{\varphi_3 p_2 p_3} = \Sigma_{\varphi_2 p_2 p_2} = 0 \quad (\ell, m = 1, 3) \end{aligned}$$

$$\Sigma_{p_1 p_2 \varphi_3} = -\Sigma_{p_1 p_3 \varphi_2} = 2\alpha_2 + 3\alpha_6 + \frac{\alpha_7}{2} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12} + \alpha_{14}$$

$$\Sigma p_1 p_2 p_3 = \Sigma p_2 p_2 p_2 = \Sigma p_2 p_2 p_3 = \Sigma p_2 p_3 p_3 = \Sigma p_3 p_3 p_3 = 0$$

$$\Sigma p_1 p_2 p_2 = \Sigma p_1 p_3 p_3 = \alpha_7 + 2\alpha_{14}$$

Elde edilen bu ifadeler (4.3.45)₃ ile açık ifadesi verilen β_1 katsayısında yerine yazılırsa, kuadratik katı için

$$\beta_1 = - \frac{2}{2\mu+\kappa+2\lambda} \left(-\frac{3}{2} \alpha_6 + \frac{5}{4} \alpha_7 + \frac{3}{4} \alpha_{12} + \frac{9}{4} \alpha_{14} \right)^2$$

olarak elde edilir. [5] numaralı kaynakta verilen $3\lambda+2\mu+\kappa \geq 0$ eşitsizliği kullanılarak $(2\lambda+2\mu+\kappa)$ büyüklüğünün her zaman pozitif olduğu görülebilir. Yine aynı kaynakta $2\mu+\kappa \geq 0$ eşitsizliğinin geçerli olduğu verilmiştir. $\lambda > 0$ için $2\mu+\kappa+2\lambda \geq 0$ eşitsizliği $2\mu+\kappa > 0$ 'ın kuvvetlendirilmiş halidir. $\lambda < 0$ için $2\lambda+2\mu+\kappa \geq -\lambda \geq 0$ yazılabilir. Böylece λ 'nın hem pozitif hem negatif değerleri için β_1 katsayısının her zaman negatif olacağı gösterilmiştir. Bu sonucun sadece kuadratik katı için geçerli olduğunu söylemek gerekmektedir. Çünkü Σ 'nin dördüncü türevleri bu hesaplamada gözönüne alınmamıştır. Genel bir katı için (4.3.61) evolüsyon denklemindeki α 'nın işaretinin ne olduğunu söyleyebilmek için bu türevlerin de hesaba katılması gereği açıktır. (4.3.61) evolüsyon denklemindeki β katsayısının sadece kuadratik katı için değil herhangi bir katı için de negatif olacağı şöyle gösterilebilir: Parfitt ve Eringen düzlem dalgaların düzgün mikropolar elastik yarımuzaydan yansımalarını inceledikleri çalışmalarında [32]

$$\frac{\gamma}{J} \geq \mu + \kappa$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermişlerdir. Bu eşitsizliği

$$\beta = \frac{(\rho_0 J a^2 - \gamma)}{8\rho_0 a}, \quad a^2 = \frac{2\mu + \kappa}{2\rho_0}$$

ifadesinde kullanırsak $\beta < \frac{-\kappa J}{16\rho_0 a}$ buluruz, $\kappa \geq 0$ olduğundan β 'nin her zaman

negatif olduğu görülür. Sayısal bir sonuçla ilgilenildiğinde en azından tutarlı değerlerle uğraşmak mümkün olacaktır.

Bir sonraki bölümde soliter dalga çözümleri olduğunu gözleyeceğimiz $p_1^{(2)}$ ikinci merteye yerdeğiştirme gradyanı genel halde

$$p_1^{(2)} = -\frac{2}{2\mu + \kappa + 2\lambda} \left(\sum p_1 p_\ell \varphi_m p_\ell^{(1)} \varphi_m^{(1)} + \frac{1}{2} \sum p_1 p_\ell p_m p_\ell^{(1)} p_m^{(1)} + \frac{1}{2} \sum p_1 \varphi_\ell \varphi_m \varphi_m^{(1)} \varphi_\ell^{(1)} \right)$$

ile verilmişti. Tekrarlanan indisler üzerindeki toplamlar yapılıp ve kuadratik katı için $p_1^{(2)}$ ifadesine bakılırsa

$$p_1^{(2)} = -\frac{1}{4\lambda + 4\mu + 2\kappa} \left(p_2^{(1)2} + p_3^{(1)2} \right) \left(-\frac{\alpha_1}{2} + 2\alpha_2 + 3\alpha_6 + \frac{5}{2}\alpha_7 + \frac{3}{2}\alpha_{12} + \frac{9}{2}\alpha_{14} \right)$$

sonucunun elde edildiği görülür. Genel halde $p_1^{(2)}$, $p_2^{(1)2}$, $p_3^{(1)2}$, $p_2^{(1)} p_3^{(1)}$ çarpımlarına bağlı olurken, kuadratik katı durumunda yalnız $p_2^{(1)2}$, $p_3^{(1)2}$ terimlerine bağlı olarak elde edilmiştir.

4.5. KMKdV DENKLEMİNİN SOLİTER DALGA ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde (4.3.61) denklemi ile verilen KMKdV denkleminin soliter dalga tipinde çözümleri olup olmadığına bakılacaktır. Bunun için

$$w_\tau + \alpha (|w|^2 w)_\xi + \beta w_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.5.1)$$

denklemine $w = |w| \exp(i\theta)$ (θ sabit) şeklinde çözümler arayalım. Denklem yeni formu

$$|w|_\tau + \alpha |w|^3_\xi + \beta |w|_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.5.2)$$

olacaktır. Soliter dalga bir nevi gezen dalga olduğundan, $\zeta = \xi - c\tau$ dönüşümü (4.5.2) denklemi

$$-c |w|' + \alpha (|w|^3)' + \beta |w|''' = 0 \quad (4.5.3)$$

şekline getirir. ($'$, ζ 'ye göre türevi göstermektedir). Bu denklem ζ' ya göre integre edilirse

$$|w|'' + \frac{\alpha}{\beta} |w|^3 - \frac{c}{\beta} |w| = C \quad (4.5.4)$$

sonucu elde edilir. Burada C integrasyon sabitidir, $\zeta \rightarrow \infty$ için $|w|$ ve türevlerinin sıfır olması koşulu $C = 0$ sonucunu verir. $w = p_2 + ip_3$ tanımını hatırlanacak olursa $|w| = (p_2^2 + p_3^2)^{1/2}$ yazılabilir. $\zeta \rightarrow \infty$ için p_2 ve p_3 yerdeğiştirme gradyanları sıfıra gittiğinden böyle bir sınır koşulu anlamlıdır. (4.5.4) denklemini $|w|'$ ile çarpılıp bir kez daha integre edilirse

$$(|w|')^2 = -\frac{\bar{\alpha}}{2} |w|^4 + \bar{c} |w|^2 + D \quad (4.5.5)$$

bulunur. Burada $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\bar{c} = \frac{c}{\beta}$ olarak tanımlanmıştır. Bir önceki adımda kine benzer bir argümanla ikinci integrasyon sabiti $D = 0$ olarak alınabilir. Bu durumda $|w| = f$ ile

$$\frac{df}{(-\frac{\bar{\alpha}}{2} f^4 + \bar{c} f^2)^{1/2}} = \pm d\zeta \quad (4.5.6)$$

elde edilir. (4.5.6) ifadesini integre etmek için $f^2 = u$ tanımı yapılırsa (4.5.6)

$$\frac{du}{(\bar{c})^{1/2} u (1 - \lambda u)^{1/2}} = \pm 2 d\zeta \quad (4.5.7)$$

şekline gelir. Burada $\lambda = \bar{\alpha}/2\bar{c}$ olarak tanımlanmıştır. $(1 - \lambda u)^{1/2} = v$ tanımıyla integral

$$-\frac{2}{\bar{c}^{1/2}} \int \frac{dv}{(1-v^2)} = \pm 2 d\zeta \quad (4.5.8)$$

formunda elde edilir. (4.5.8) ifadesinin integre edilmesiyle

$$\ln \frac{1+v}{1-v} = 2(\zeta + \kappa) (\bar{c})^{1/2}$$

sonucu elde edilir. (Uygunluk için ζ 'nin işareti (-) olarak alınmıştır). Buradan v ve u

$$\frac{\exp[2(\bar{c})^{1/2}(\zeta + \kappa)] - 1}{\exp[2(\bar{c})^{1/2}(\zeta + \kappa)] + 1} = \tanh[(\bar{c})^{1/2}(\zeta + \kappa)]$$

$$u = \frac{1}{\lambda} [1 - \tanh^2(\bar{c})^{1/2}(\zeta + \kappa)] = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sech}^2(\bar{c})^{1/2}(\zeta + \kappa)$$

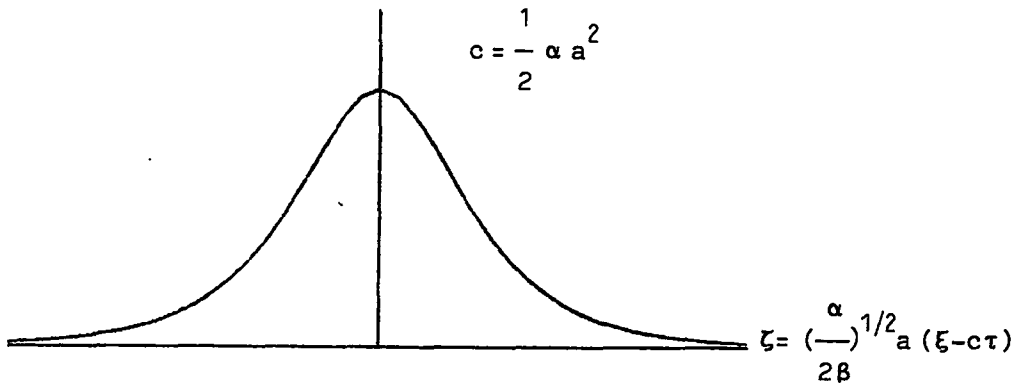
olarak bulunurlar. Burada

$$a^2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \delta = \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/2} a \kappa \quad (4.5.9)$$

tanımları kullanılarak, $f = |w| = (u)^{1/2}$ için

$$|w| = a \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau\right) + \delta \right] \quad (4.5.10)$$

sonucu bulunur, bu fonksiyona ait eğri şekil 4.5.1'de verilmiştir.



Şekil 4.5.1. KMKdV Denkleminin Soliter Dalga Çözümü

$w = |w| e^{i\theta} = p_2 + ip_3$ olduğu düşünülürse, p_2 ve p_3 için

$$p_2 = a \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau\right) + \delta \right] \cos \theta \quad (4.5.11)$$

$$p_3 = a \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau \right) + \delta \right] \sin \theta$$

yazılabilir. C ve D, integrasyon sabitlerini sıfır almadan benzer işleri yürütmek mümkündür, ancak burada olduğu gibi integraller elemanter fonksiyon integrallerine gelmez, Jacobi Eliptik fonksiyonları cinsinden elde edilebilirdi.

Yukarıda incelenen çözüm, $A = A(\xi, \tau)$, $\theta = \theta(\xi, \tau)$ olmak üzere (θ ve A reel)

$$w = A(\xi, \tau) \exp [i\theta(\xi, \tau)] \quad (4.5.12)$$

şeklindeki çözümlerin $\theta = \text{sbt}$ durumu için özel bir durumunu oluşturmaktadır. (4.5.12) ifadesi (4.5.1) denklemine yazılırsa $A(\xi, \tau)$ ve $\theta(\xi, \tau)$ bilinmeyen fonksiyonları için kuple nonlineer denklem sistemi elde edilir:

$$A_\tau + 3\alpha A^2 A_\xi + \beta (A_{\xi\xi\xi} - 3A_\xi \theta_\xi^2 - 3A \theta_\xi \theta_{\xi\xi}) = 0 \quad (4.5.13)$$

$$A \theta_\tau + \alpha A^3 \theta_\xi + \beta (3\theta_\xi A_{\xi\xi} + 3A_\xi \theta_{\xi\xi} + A \theta_{\xi\xi\xi} - A \theta_\xi^3) = 0$$

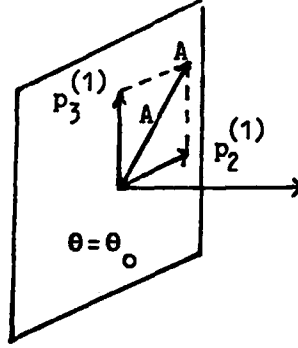
Gerçekten $\theta = \text{sbt}$ için (4.5.13) denklemi (4.5.2) denkleme indirgenir, bu denklem ise MKdV denkleminin ibarettir. $w = p_2^{(1)} + i p_3^{(1)}$ tanımı ve kuadratik katı için $p_1^{(2)} = \bar{\gamma} (p_2^{(1)2} + p_3^{(1)2})$ tanımları hatırlanacak olursa $p_1^{(2)} = \bar{\gamma} A^2$ olduğu açıktır.

Özel olarak faz fonksiyonu $\theta = \theta_0$ sabit olarak seçilirse (4.5.13) denklem sistemi $A(\xi, \tau)$ genlik fonksiyonunun sağladığı tek denkleme indirgenir

$$A_\tau + \alpha (A^3)_\xi + \beta A_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.5.14)$$

Bu yukarıda söylendiği gibi MKdV denklemdir. Dalga cephesi içinde bulunan toplam enine yerdeğiştirmenin yönelimi $\theta = \theta_0$ açısıyla belirlenir. ($p_2 = A \cos \theta$ $p_3 = A \sin \theta$, yukarıda incelenen özel durum).

Dalga cephesi içindeki yerdeğiştirme gradyanlarının büyüklüğü $A(\xi, \tau)$ genlik fonksiyonuna bağlı olmaktadır. (Şekil 4.5.2)



Şekil 4.5.2. Düzlem Polarize Olmuş Dalgalar

$A(\xi, \tau)$ fonksiyonunun evolüsyonu MKdV denkleminde göre olmaktadır. Boyuna ikinci mertebe yerdeğiştirme gradyanı $p_1^{(2)}$, A^2 ile doğru orantılıdır. Enine yerdeğiştirme gradyanlarının düzlemde yönelimlerinin aynı kalması, elastisitedeki dalga denklemlerine basit dalga çözümü aranırken karşılaşılan düzlem polarize olmuş dalga durumunu hatırlatmaktadır ([2], pp.183).

Faz fonksiyonu $\theta(\xi, \tau)$ yerine genlik fonksiyonu $A(\xi, \tau) = A_0$ 'ın sabit kaldığı düşünülürse (4.5.13) denklemleri

$$-3\beta A_0 \theta_\xi \theta_{\xi\xi} = 0 \tag{4.5.15}$$

$$\theta_\tau + \alpha A_0^2 \theta_\xi + \beta (\theta_{\xi\xi\xi} - \theta_\xi^3) = 0$$

formuna indirgenir. (4.5.15)₁ denklemini integre edilirse ($\beta, A_0 \neq 0$)

$$\theta_\xi^2 = B^2(\tau)$$

elde edilir. $B(\tau)$ keyfi fonksiyondur. ξ 'ye göre bir kez daha integre edilirse

$$\theta(\xi, \tau) = B(\tau) \xi + C(\tau)$$

sonucu bulunur. Elde edilen $\theta(\xi, \tau)$ fonksiyonu $\frac{\partial}{\partial \xi} (\theta_\tau + \alpha A_0^2 \theta_\xi + \beta \theta_{\xi\xi\xi} - \beta \theta_\xi^3) = 0$ denkleminde kullanılırsa $B(\tau) = B_0$ olarak hesaplanır,

(4.5.15)₂ denkleminde yazılırsa $C(\tau) = (-\alpha A_0^2 B_0 + \beta B_0^2) \tau$ elde edilir. Sonuçta $\theta(\xi, \tau)$ faz fonksiyonu

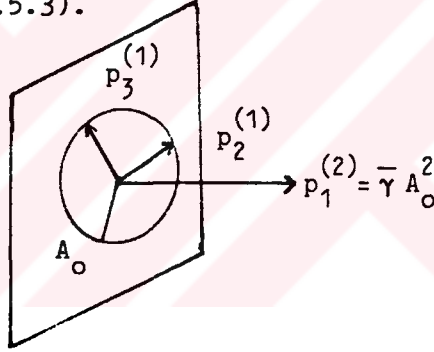
$$\theta(\xi, \tau) = B_0 [\xi - (\alpha A_0^2 - \beta B_0^2) \tau] \quad (4.5.16)$$

olarak elde edilir. Nihayet yer değiştirme gradyanları için

$$p_2^{(1)} = A_0 \cos[B_0 (\xi - (\alpha A_0^2 - \beta B_0^2) \tau)] \quad (4.5.17)$$

$$p_3^{(1)} = A_0 \sin[B_0 (\xi - (\alpha A_0^2 - \beta B_0^2) \tau)]$$

bulunur. (4.5.15) ifadesi öyle bir yerdeğiştirme alanı oluşturur ki ikinci merteye boyuna yerdeğiştirme gradyanı $p_1^{(2)} = \bar{\gamma} A_0^2$ sabit kalır, (4.5.17) ile verilen birinci merteye enine yer değiştirme gradyanları da uçları A_0 yarıçaplı çemberin üzerinde kalacak şekilde değişim gösterirler (Şekil 4.5.3).



Şekil 4.5.3. Dairesel Polarize Olmuş Dalgalar

Bu durum elastisitede dalga denkleminde basit dalga çözümü aranırken özel bir hal için karşılaşılan dairesel olarak polarize olmuş dalgaları hatırlatmaktadır.

Diğer ilginç bir durum $p_1^{(2)} = \bar{\gamma} (p_2^{(1)2} + p_3^{(1)2}) = \bar{\gamma} z$ büyüklüğünün sağladığı denklemdir. Hatırlanacağı gibi (4.5.3) denkleminin bir kez integre edilmesiyle

$$|w|'' + \frac{\alpha}{\beta} |w|^3 - \frac{c}{\beta} |w| = 0 \quad (4.5.4)$$

denkleminde geliniyordu. Bu denklemin $|w|'$ ile çarpılıp tekrar integre

edilmesinden

$$|w|^2 + \frac{\alpha}{2\beta} |w|^4 - \frac{c}{\beta} |w|^2 = 0 \quad (4.5.5)$$

elde ediliyordu. Her iki durumda ortaya çıkan integrasyon sabitleri $\zeta \rightarrow \infty$ için $|w|$ ve türevlerinin sıfır olması koşulundan sıfır olarak alınmıştı. (4.5.4) denklemi $|w|$ ile çarpılır, $|w|^2 = z$ (z reel) tanımı yapılırsa

$$|w| |w|'' = \frac{z''}{2} - |w|^2 \quad (4.5.18)$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür. (4.5.18) ifadesinde $|w|^2$ yerine (4.5.5) denkleminde eşiti yazılır ve $|w|^2 = z$ tanımı hatırlanırsa

$$|w| |w|'' + \frac{\alpha}{\beta} |w|^4 - \frac{c}{\beta} |w|^2 = 0$$

denklemini, z fonksiyonu cinsinden

$$z'' - 4\bar{c}z + 3\bar{\alpha}z^2 = 0 \quad (4.5.19)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. z değişkeninin sağladığı bu denklemle ilgilenmemizin nedeni, $z = p_2^{(1)2} + p_3^{(1)2} = p_1^{(2)}$ bağıntısının gösterdiği gibi boyuna ikinci merteye yerdeğiştirme gradyanının sağladığı denklemin çözümlerini bulmak istememizdir. (4.5.19) denklemi z' ile çarpılıp integre edilirse

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 = 4\bar{c}z^2 - 2\bar{\alpha}z^3 + \bar{c}_1 \quad (4.5.20)$$

ifadeleri elde edilir. Eğer \bar{c}_1 integrasyon sabiti sıfır olursa (4.5.20) ifadesi

$$\int \frac{dz}{(\bar{c}z(1-\lambda z))^{1/2}} = \pm 2(\zeta + \kappa)$$

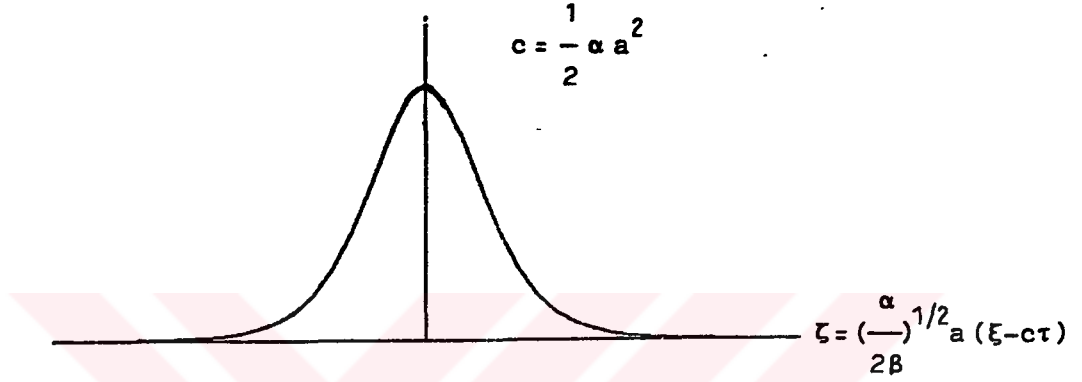
integraline gelir. Bu (4.5.7) integrali ile aynıdır ve sonucu

$$z = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\bar{c} \right)^{1/2} (\zeta + \kappa)$$

ile verilmiştir. Bunun düzenlenmiş hali

$$z = a^2 \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} a \left(\xi - \frac{1}{2} \alpha a^2 \tau \right) + \delta \right] \quad (4.5.21)$$

şeklini alır, bu fonksiyonun eğrisi şekil (4.5.4) ile verilmiştir.



Şekil 4.5.4. $p_1^{(2)}$ Büyüklüğünün Soliter Dalga Çözümü

Burada (4.5.9) tanımları kullanılmıştır. Burada görülen $\frac{\alpha}{\beta}$ oranı kuadratik katı için her zaman pozitifdir, dolayısıyla (4.5.21) kuadratik katı için geçerlidir. Bu oranın negatif olduğu durumda sech fonksiyonunun sec fonksiyonuna bozunduğuna dikkat edilmelidir. (4.5.20) denkleminde \bar{c}_1 integrasyon sabiti baştan sıfır alınmadığından integrasyonun nasıl yapıldığına bakalım:

$$\frac{1}{2\bar{\alpha}} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^2 = -z^3 + 2 \frac{\bar{c}}{\bar{\alpha}} z^2 + C = f(z) \quad (4.5.20)$$

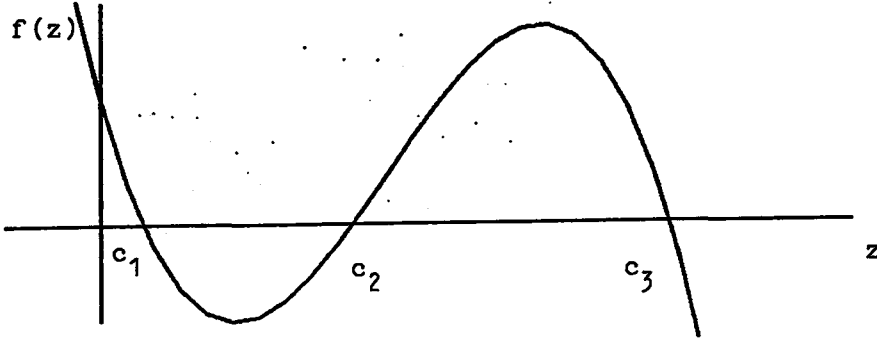
nonlineer adi diferansiyel denkleminin reel çözümleri $f(z) \geq 0$ koşulu altında mümkündür. $c_1 < c_2 < c_3$ olmak üzere $f(z) = (z - c_1)(z - c_2)(c_3 - z)$ olsun. Bu kabullerden sonra diferansiyel denklem

$$\frac{dz}{[(z - c_1)(z - c_2)(c_3 - z)]^{1/2}} = (2\bar{\alpha})^{1/2} d\zeta \quad (4.5.22)$$

şeklini alır. $z = t^2 + c_1$ dönüşümü ile (4.5.22) ifadesi

$$\frac{2 dt}{[(t^2 + c_1 - c_2)(c_3 - c_1 - t^2)]^{1/2}} = (2\bar{a})^{1/2} d\zeta \quad (4.5.23)$$

formuna girer. $a^2 = c_3 - c_1$, $b^2 = c_2 - c_1$ tanımları yapılırsa ($a > b$) (4.5.23) denkleminin açık çözümü Jacobian Eliptik fonksiyonları cinsinden bulunabilir. ([33], pp.56) $f(z) = (z - c_1)(z - c_2)(c_3 - z)$ fonksiyonunun kaba bir grafiği aşağıda verilmiştir. (Şekil 4.5.5)



Şekil 4.5.5. $f(z)$ Fonksiyonunun Grafiği

$f(z)$ 'in pozitif değerleri için (4.5.20) denkleminin çözümü olabileceğinden (4.5.23)'ün sol tarafındaki integralin sınırları c_2 ve c_3 kökleri arasında olmalıdır. $z = t^2 + c_1$ dönüşümü de düşünülerek integrasyon sınırları $a > y \geq b$ olarak bulunur,

$$\int_y^a \frac{dt}{[(t^2 - b^2)(a^2 - t^2)]^{1/2}} = \frac{\bar{a}^{1/2}}{2} \int_0^\zeta d\eta \quad (4.5.25)$$

Ters Jacobian eliptik fonksiyonlar cinsinden bu integralin değeri

$$\frac{1}{a} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \phi, k) = \frac{\bar{a}^{1/2}}{2} \zeta$$

olarak bulunur. Burada $a = (c_3 - c_1)^{1/2}$, $\sin \phi = \left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - b^2}\right)^{1/2}$, $\zeta = \xi - c\tau$ ve $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c_3 - c_2}{c_3 - c_1}$ dir. (4.5.25) ifadesinin tersi alınır.

$$\sin \phi = \operatorname{sn} \left[\left(\frac{\bar{a}}{2} (c_3 - c_1)\right)^{1/2} (\xi - c\tau); k \right] \quad (4.5.26)$$

bulunur. $\operatorname{sn}^2(y, k) + \operatorname{cn}^2(y, k) = 1$ bağıntısı kullanılırsa (4.5.26) eşitliği

$$\cos^2 \psi = \operatorname{cn}^2 \left[\left(\frac{\bar{\alpha}}{2} (c_3 - c_1) \right)^{1/2} (\xi - c\tau); k \right] \quad (4.5.27)$$

formunu alır. Burada $\cos^2 \psi = \frac{z - c_2}{c_3 - c_2}$ olduğu kolayca görülür. (4.5.27) sonucundan, (4.5.20) denkleminin çözümü Jacobian Eliptik fonksiyonlar cinsinden

$$z = c_2 + (c_3 - c_2) \operatorname{cn}^2 \left\{ \left[\frac{\bar{\alpha}}{2} (c_3 - c_1) \right]^{1/2} (\xi - c\tau); k \right\} \quad (4.5.28)$$

elde edilmiş oldu. Görüldüğü gibi C. integrasyon sabitini sıfır olmadan $f(z)$ fonksiyonunun üç ayrık kökü olduğu kabulü ile denklem integre edilirse çözüm elemanter fonksiyonlar cinsinden bulunamamaktadır. C. integrasyon sabitinin sıfır olduğunu varsayarsak $f(z)$ fonksiyonunun kökleri için $c_2 \rightarrow c_1$ ve $c_1 = 0$ bilgilerinin geçerli olduğu görülür. Bu durumda $k=1$ 'dir. $k=1$ için $\operatorname{cn}(y, 1) = \operatorname{sech} y$ olduğundan (4.5.20) denklemin çözümü elemanter fonksiyonlar cinsinden yazılabilir.

$$z = c_3 \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{\bar{\alpha}}{2} c_3 \right)^{1/2} (\xi - c\tau) \right] \quad (4.5.29)$$

$c_3 = 2 \frac{\bar{c}}{\bar{\alpha}} = a^2$ olduğundan (4.5.29) ifadesi (4.5.21) çözümüyle aynıdır.

BÖLÜM 5

KMKdV DENKLEMİNİN İNTEGRE EDİLEBİLİRLİĞİ

5.1. GİRİŞ

Dördüncü bölümde nonlinear polar katının bir boyutu alan denklemlerinin düzlem dalga yayılması halinde uzak alan davranışının uygun bir pertürbasyon yöntemiyle incelenmesi sonucunda kuple MKdV denklemleri veya tek bir denkleme indirgenirse KMKdV denklemi elde edilmişti. Bu bölümün amacı KMKdV denkleminin integre edilebilirlik koşullarının incelenmesidir.

Ablowitz, Ramani ve Segur (ARS) isimli yazarlar ters saçılma yöntemi ile çözülebilen NKDD'ler ile hareketli kritik noktaları olmayan NADD'ler arasında bir ilişki olduğunu gözlediler [34]. Daha sonra ARS, NKDD'lerin integre edilebilirliği ile ilgili olarak Painlevé özelliğini ortaya attılar [35]. Burada kısaca söylenen sonuçların ve onlara kaynaklık eden fikirlerin ayrıntılı bir incelemesini [36] sayılı referansta bulmak mümkündür.

n. mertebe lineer ADD'in

$$w^{(n)} + p_1(z) w^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(z) w' + p_n(z) w = 0$$

kompleks düzlemde z_0 noktası civarında denklemin n katsayısı da analitik ise z_0 , denklemin regüler noktasıdır ve z_0 civarında denklemin n tane lineer bağımsız analitik çözümü vardır. Denklemin çözümlerinin tekilliği denklemin katsayılarının tekilliklerinde olabilir. Yerleri n-integrasyon sabitinden bağımsız olan tekilliklere sabit tekillikler denir. Lineer ADD'ler için çözümlerin sabit tekillikleri olması genel bir özelliktir. NADD'lerde bu özellik kaybolur. Örneğin basit NAAD'in

$$w' + w^2 = 0$$

genel çözümü

$$w = \frac{1}{z - z_0}$$

dır. z_0 integrasyon sabitidir ve çözümün tekiliğinin yerini belirlemektedir. Böyle yeri integrasyon sabitine bağlı tekilliklere hareketli (movable) tekillik denir.

19. yüzyılın sonlarına doğru Painlevé ve çalışma arkadaşları

$$w'' = F(w, w', z)$$

formundaki ikinci mertebeli ADD'leri incelemişlerdir. Burada F , w ve w' ye göre rasyonel, z 'e göre analitik bir fonksiyondur. Amaçları ikinci mertebeli denklemleri sahip oldukları tekilliklere göre sınıflandırmaktır. Painlevé ve arkadaşları hareketli kritik noktaya (movable critical points) sahip olmayan 50 tane kanonik denklem elde ettiler. (Bir ADD'in kutup olmayan cebirsel ve logaritmik dallanma noktaları, esaslı tekillik noktalarına kritik nokta denir. ADD'in çözümünün hareketli kritik noktaya sahip olmama özelliği, ARS tarafından Painlevé özelliği olarak adlandırıldı). Bu 50 denklem ya daha önce çözülmüş bir denkleme veya Painlevé ve Gambier tarafından elde edilmiş ve adına Painlevé transandantları denilen otonom olmayan 6 NADD'lerden birine indirgenebilir. (Painlevé ve Gambier bu altı denklemin daha basit ADD'lere indirgenemeyeceğini göstermişlerdir). Bu konuların geniş bir incelemesini İnce'nin kitabında bulmak mümkündür [37].

1977 yılında Ablowitz ve Segur ters saçılma ile çözülebilen NKDD'ler ile hareketli kritik noktaları olmayan NADD'ler arasında bir ilişki olduğunu gözlediler. Daha sonra ARS NKDD'lerin integre edilebilirliği ile benzerlik dönüşümü aracılığı ile ortaya çıkan NADD'lerin Painlevé özelliğine sahip olup olmaması arasında ilgi kuran bir tahmin (conjecture) ortaya atmışlardır: Eğer bir NKDD'den benzerlik dönüşümü yardımı ile elde edilen NADD'in Painlevé özelliği varsa bu NKDD ters saçılma anlamında integre edilebilirdir denir. Burada Painlevé özelliği mutlaka 50 kanonik denklem veya Painlevé transandantlarına indirgeme şeklinde anlaşılmalıdır. ARS önerdikleri tekillik nokta analizi (singular point) ile bir NADD'in P-özelliğini

açıkça tanımlamışlardır. Tekil nokta analizi şu aşamalarda uygulanır.

a) Bir NKDD verildiğinde buna benzerlik dönüşümleri ile karşı gelen NADD bulunur.

b) Ayrıntıları aşağıda açıklanacak tekil nokta analizi NADD'e uygulanır. Eğer NADD'in P-özelliği varsa (belki bir dönüşümden sonra) karşı gelen NKDD ters saçılma yöntemi ile çözülebilir. Aslında benzerlik dönüşümünden elde edilen bütün NADD'lerin P-özelliğine bakılması gerekir. Ancak bir veya iki denemeden olumlu sonuç alınırsa denklemin Bäcklund dönüşümleri veya Lax çifti aranabilir. Eğer bunlar bulunabiliyorsa NKDD ters saçılma ile çözülebiliyor demektir.

5.2. TEKİL NOKTA ANALİZİ

n. mertebeden bir ADD

$$w^{(n)} = F(z; w, w', w'', \dots, w^{(n-1)}) \quad (5.2.1)$$

ile verilir. F, z'e göre analitik diğer argümanlarına göre rasyonel bir fonksiyondur. Çözümlerin z_0 hareketli tekil nokta komşuluğundaki dominant davranışını incelemek için (5.2.1)'in dominant terimlerinde

$$w \sim \alpha (z - z_0)^p \quad (5.5.2)$$

yazılır. (5.2.1) denkleminin hareketli kritik noktalarının olması istenmediğinden analizin yürümesi için p'nin negatif tamsayı olması istenir. (5.5.2) yazılışı ile logaritmik dallanma ayırdedilemez, ancak cebirsel dallanma noktaları seçilebilir. Örneğin dominant davranışın incelenmesi sonucunda p tamsayı olarak elde edilemezse (yani çözümün z_0 hareketli tekilliğinde p-ci mertebeden cebirsel dallanma noktası varsa) NADD'in P-özelliğinin olmadığı hemen söylenebilir. (5.5.2)'in denklemin dominant terimlerinde yazılmasıyla (α, p) çifti genellikle belirlenir. Denklemin yapısına göre birkaç (α, p) çiftinin belirlenmesi mümkündür, o zaman her çift için analiz yapılmalıdır. Bütün mümkün p'ler tamsayı olarak elde edilirse (5.5.2) ifadesi, z_0 hareketli kutbu civarında geçerli Laurent serisinin ilk terimi olur. Bu durumda (5.2.1) denkleminin çözümü

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad |z - z_0| < R \quad (5.2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada z_0 keyfi sabittir. Eğer z_0 'a ilaveten $(n-1)$ tane keyfi a_j katsayısı bulunabilirse, n integrasyon sabiti bulunmuş olacak ve (5.2.3) ifadesi (5.2.1) denkleminin genel çözümü olacaktır. Keyfi katsayıların bulunduğu mertebelere rezonanslar adı verilir. Anlatıldığı kadarı ile P-analizi ilgilenilen NKDD'e karşı gelen NADD'in kritik olmayan keyfi z_0 noktası civarında genel çözümün olup olmadığının araştırılmasıdır. Bunun için n.mertebe olan diferansiyel denklem için keyfi z_0 noktasından başka $(n-1)$ keyfi integrasyon sabitinin varolduğunu göstermek gerekir, yani keyfi katsayıların görüldüğü üsler olarak tanımlanan rezonansları bulmak gerekmektedir. İlk terimi $\alpha (z - z_0)^p$ olan çözüm fonksiyonuna, keyfi sabitlerin bu terimden sonra gelen r-sayıllı indiste ortaya çıkacağı varsayılarak β keyfi bir sabit olmak üzere $\beta (z - z_0)^{p+r}$ ilave edilir, yani w için

$$w = \alpha (z - z_0)^p + \beta (z - z_0)^{p+r} \quad (5.2.4)$$

yazılır. Bu durumu daha açık şöyle ifade edebiliriz,

$$w = \alpha (z - z_0)^p + a_1 (z - z_0)^{p+1} + a_2 (z - z_0)^{p+2} + a_3 (z - z_0)^{p+3} + \dots$$

ifadesinin (5.2.1) denkleminin çözümü olduğunu varsayalım. Bu şu anlama gelmektedir: Bu sonsuz toplam içinde keyfi olan sabitlerin sayısı n-dir. Örneğin ilk keyfi sabitin a_3 olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$w = \alpha (z - z_0)^p + a_3 (z - z_0)^{p+3}$$

ifadesi (5.2.1) denkleminde yazılır ve ilgili büyüklükler a_3 parantezinde toplanırsa a_3 'ün keyfi olması nedeniyle, a_3 katsayısının çarpanı olan parantez sıfır olacaktır. Burada açıklamaya çalıştığımız durumu (5.2.4) ile genelleştirelim. β keyfi katsayı, r bulunmak istenen keyfi katsayıların sayısıdır. (5.2.4) ifadesi (5.2.1) denkleminde yazılır ve denklem β -ya göre düzenlenirse, elde edilen

$$Q(r) \beta (z - z_0)^q = 0 \quad q \geq p+r-n$$

$Q(r)=0$ denkleminin kökleri aradığımız keyfi katsayıların bulunduğu üslerin numaralarını verecektir. (5.2.1) denkleminin en yüksek mertebeden türevi dominant davranışı belirleyen terimler arasında ise $q=p+r-n$ ve $Q(r)$ n-ci merteye bir polinomdur. En yüksek merteye türev dominant terimler arasında değilse $q>p+r-n$ ve $Q(r)$ dominant terimler arasında bulunan en yüksek merteye türev kuvvetinde bir polinomdur. ($Q(r)=0$, Linear ADD'in Frobenius metodu ile düzgün tekillik civarında çözümü aranırken ortaya çıkan indis denkleminin karşı gelir.) $Q(r)=0$ 'ın pozitif kökleri bulmak istediğimiz keyfi katsayıların sayısını verecektir. $Q(r)$ 'nin varsa negatif kökleri bizi ilgilendirmemektedir. Çünkü negatif kökler çözüm fonksiyonunda olmayan terimleri verir. (5.2.1) denkleminin n-ci integrasyon sabiti olarak bakılan z_0 tekil noktasının keyfiliği $Q(r)=0$ denkleminin pozitif köklerinden elde edilemez. Ancak $Q(r)=0$ denkleminin bir kökü (-1) olarak bulunursa $(p-1)$ üslü bir terim çözüm fonksiyonunda bulunmayacağı için (-1) kökünün z_0 noktasının keyfiliğini gösterdiği söylenebilir. Denklem dominant davranışının belirlendiği ilk aşamada α katsayısı keyfi kalmışsa $Q(r)$ 'nin bir kökü sıfır olmalıdır. Gerçekten (5.2.4) ifadesine bakılacak olursa $r=0$ durumunda $\beta=\alpha$ olduğu görülür. Eğer $Q(r)$ 'nin reel olmayan kökleri varsa, z_0 'da çözümün hareketli cebirsel dallanma noktası vardır ve denklem P-özelliğine sahip değildir. Eğer n-tane keyfi integrasyon sabiti belirlenebiliyorsa (5.2.3) ilgilenilen NADD'in genel çözümü olacaktır ve (5.2.1) denkleminin P-özelliği var olacaktır $Q(r)=0$ cebirsel denkleminin pozitif tamsayı kökleri $(n-1)$ 'den küçük ise genel çözümü yazmak için yeteri kadar keyfi sabit bulunamayacağından denklemin P-özelliği yoktur denilir.

Dikkat edilirse P-tahmini NKDD'lerin integre edilebilmesi için gerek bir koşuldur, yeter değildir. Tersine bir NKDD integre edilebilirse P-özelliği vardır denemez. Bunun örnekleri $u_t = u^3 u_{xxx}$ ile tanımlanan Harry Dym denklemi ve $u_t = (u^{-2} u_x)_x$ ile verilen nonlineer difüzyon denklemleridir. Harry Dym denklemi ters saçılma metodu ile çözülürken, nonlineer difüzyon denklemi lineer difüzyon denkleminde dönüşebilmektedir. Fakat Harry Dym [38] ve Nonlineer difüzyon denklemlerinin [39] Painlevé özellikleri yoktur.

Painlevé tahmini, NKDD'lerle ilişkisi, tekil nokta analizi, ters saçılma ile ilişkileri gibi konuları geniş olarak Ablowitz ve Segur'un ilginç kitaplarında bulmak mümkündür [36].

5.3. KMKdV DENKLEMİNİN TEKİL NOKTA ANALİZİ

Yazılış kolaylığı nedeniyle KMKdV denklemini

$$w_t + \alpha (|w|^2 w)_x + \beta w_{xxx} = 0 \quad (5.3.1)$$

şeklinde yazalım. Burada t ve x indisleri sırasıyla zaman ve konuma göre kısmî türevleri göstermektedir. Bu alt bölümün amacı (5.3.1) denkleminin integre edilip edilemediğinin araştırılmasıdır. Bunun için (5.3.1) denkleminin P-tahminine uyup uymadığı yani bu denklemlere benzerlik dönüşümleri yardımı ile karşı gelen NADD'in Painlevé özelliğine sahip olup olmadığı araştırılacaktır. (5.3.1) NKDD'i

$$w = \frac{\tilde{w}}{(3t)^{1/3}}, \quad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$$

benzerlik dönüşümü ile

$$\beta w''' + \alpha (|w|^2 w)' - (zw)' = 0 \quad (5.3.2)$$

NADD'ine indirgenir. Burada z 'in reel değişken olduğuna dikkat edilmelidir. (Yazılış kolaylığı nedeniyle w 'nin üzerindeki tilda kaldırılmıştır.) $'$, z değişkenine göre türetmeyi göstermektedir. (5.3.2) denklemi z değişkenine göre bir kez integre edilirse

$$\beta w'' + \alpha |w|^2 w - zw = C_1 \quad (5.3.3)$$

ikinci mertebe NADD'i elde edilir. C_1 integrasyon sabitidir. (5.3.3) NADD'inin dominant davranışını incelemek için

$$w(z) \sim \gamma (z - z_0)^p, \quad \bar{w}(z) \sim \bar{\gamma} (z - z_0)^p$$

ifadeleri (5.3.3) denkleminin bir ve ikinci terimlerinde yazılırsa

$$\beta \gamma p(p-1) (z-z_0)^{p-2} + \alpha |\gamma|^2 \gamma (z-z_0)^{3p} \sim 0 \quad (5.3.4)$$

elde edilir. Keyfi z_0 tekil noktası civarındaki dominant davranış incelendiğinden w fonksiyonunun eşleniği olan \bar{w} fonksiyonunun da aynı nokta civarındaki davranışı gerektiğinden z_0 tekil noktası bu durumda reel olmak durumundadır. γ sabiti komplekstir ve çizgi işareti kompleks eşlenik anlamında kullanılmaktadır. (5.3.3) denkleminin w için verilen açılımı kabul etmesi için (5.3.4) ifadesinde üsler arasında bir denge oluşması gerekmektedir. Bu nedenle $p-2=3p$ olmalıdır. Buradan $p=-1$ olarak bulunur. 0 halde (5.3.3) denkleminin Laurent serisi şeklinde yazılabilecek çözümleri $(z-z_0)^{-1}$ 'li terimler ile başlamak zorundadır. p 'nin negatif tamsayı olarak elde edilmesi bu aşamada umut verici görülmektedir. Logaritmik değilse bile cebirsel dallanma noktaları ihtimalini ortadan kaldırmaktadır. p 'nin değeri belli olduktan sonra $(z-z_0)^{-3}$ -lü terimlerin katsayılarına bakılacak olursa

$$|\gamma|^2 \alpha = -2\beta \quad (5.3.5)$$

denklemini elde edilir. Bu ifade γ sabitini (5.3.1) denkleminin katsayıları olan α ve β sabitlerine bağlar. Şu ana kadar üçüncü mertebeye (5.3.2) NADD'in bir kez integrasyonundan C_1 , tekil nokta z_0 olmak üzere iki keyfi sabiti vardır. Bu denklemin genel çözümünü yazabilmek için bir keyfi sabite daha ihtiyacımız vardır. Şimdi yapılması gereken rezonansı yani diğer keyfi sabitin görüldüğü kuvveti bulmaktır. Bunun için (5.3.3) denkleminin dominant davranışını karakterize eden basitleştirilmiş denklemlerde w ve eşleniği \bar{w} için

$$w \sim \gamma (z-z_0)^{-1} + \eta (z-z_0)^{r-1}, \quad \bar{w} \sim \bar{\gamma} (z-z_0)^{-1} + \bar{\eta} (z-z_0)^{r-1} \quad (5.3.6)$$

ifadelerini yazalım. (5.3.6) denklemindeki r , w 'nin (5.3.3) denkleminde yazıldığında rezonansın yani keyfi sabitin görüldüğü üssü göstermektedir. (5.3.6) ifadesi (5.3.3)'ün basitleştirilmiş formunda yazılırsa

$$\beta [2\gamma (z-z_0)^{-3} + \eta (r-1)(r-2) (z-z_0)^{r-3}] + \alpha [|\gamma|^2 (z-z_0)^{-2}$$

$$+ \gamma \bar{\eta} (z-z_0)^{r-2} + \bar{\gamma} \eta (z-z_0)^{r-2}] [\gamma (z-z_0)^{-1} + \eta (z-z_0)^{r-1}] \sim 0 \quad (5.3.7)$$

elde edilir. (5.3.7) ifadesi η 'ya göre düzenlenirse

$$Q(r) \eta (z-z_0)^q = 0, \quad q = r-3$$

yani

$$[\beta (r-1)(r-2) + 2\alpha |\gamma|^2] \eta (z-z_0)^{r-3} = 0 \quad (5.3.8)$$

denklemi elde edilir. Bulmayı umduğumuz rezonans, yani $w(z)$ çözüm fonksiyonundaki keyfi sabit (5.3.8) cebirsel denkleminin negatif olmayan kökleridir. (5.3.5) ifadesi de kullanılarak (5.3.8) denkleminin

$$\beta (r^2 - 3r - 2) = 0 \quad (5.3.9)$$

olduğu görülür. Ancak (5.3.9) cebirsel denkleminin pozitif tam sayı kökü yoktur. Bu da bulmayı umduğumuz üçüncü keyfi sabitin olmadığını göstermektedir. Bu durumda yeteri kadar (üç tane) keyfi sabit olmaması nedeniyle (5.3.2) NADD'inin genel çözümünü yazamamaktayız. Bu da (5.3.1) NKDD'ine karşı gelen NADD'in Painlevé özelliği olmadığını gösterir. Bunun sonucunda Painlevé tahmini gereği (5.3.2) NADD'ine karşı gelen (5.3.1) NKDD'inin integre edilemeyebileceği söylenebilir.

Sonuç olarak ARS'un önerdiği yöntemle (5.3.1) KMKdV denkleminin ters saçılma metodu ile integre edilemez olduğu görülmüştür. Bu sonuç daha önce KMKdV denklemini magnetize plazmada elektrostatik dalgaların asimptotik incelenmesinde ortaya çıkaran Karney, Sen ve Chu'nun gözlemleri ile uyumludur [29], [30]. Sözü geçen yazarlar yalnız dört hareket sabiti bulabilmişlerdir. Halbuki ters saçılma metoduyla çözülebilen NKDD'lerin sonsuz hareket sabitlerinin varolduğu bilinmektedir. (5.3.1) KMKdV denkleminin ters saçılma ile çözülebilmesi için Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur'un (AKNS) [40] önerdiği denklem sınıfına girmesi gerekmektedir. Bunun mümkün olmadığı hemen görülebilir. 1974 yılında Kaup ve Newell [41] ters saçılma şemasındaki lineer saçılma denkleminin formunu değiştirerek

$$i q_t = -q_{xx} \pm i (|q|^2 q)_x \quad (5.3.10)$$

NKDD'i ters saçılma tekniklerini kullanarak çözdüler. Bu denklem Türev Nonlinear Schrödinger (TNLS) denklemdir ve plazmada dairesel polarize olmuş nonlinear Alfvén dalgalarının yayılmasını karakterize eder. (5.3.10) denklemi $\tau = it$, $\xi = ix$ koordinat dönüşümü ile

$$q_\tau = q_{\xi\xi} \pm (|q|^2 q)_\xi \quad (5.3.11)$$

formuna indirgenir. Bu denklem katsayı ve dispersif terimin türev mertebesi farkıyla (5.3.1) KMKdV denklemine benzemektedir. (5.3.10) TNLS denklemi ters saçılma teknikleri ile tam olarak çözülebildiğine göre $q_{\xi\xi}$ 'li terimden gelen dispersiyon ile $(|q|^2 q)_\xi$ 'li terimden gelen nonlinearliğin birbirini dengelediğini söylemek mümkündür. Halbuki

$$w_t + \alpha (|w|^2 w)_x + \beta w_{xxx} = 0$$

KMKdV denklemi durumunda nonlinearite mertebesi (5.3.10) daki gibi olmasına rağmen, dispersiyonun mertebesi daha yüksektir. Yani dispersiyon ve nonlinearite birbirlerini dengeleyememektedirler. Burada KMKdV denkleminin değiştirilmiş bir ters saçılma şemasına da oturtulamadığı benzetme yolu ile gözlenmiştir.

Painlevé analizi ile ilgili olarak konunun bütünlüğü açısından Weiss, Tabor ve Carnevale'nin (WTC) NKDD'lere genişlettiği hali de incelemek yararlı olabilir [42]. Böylece ARS'nin yöntemiyle karşılaştırma imkanı doğar, sonuçların birbiriyle çelişip çelişmediği kontrol edilir.

5.4. KMKdV DENKLEMİNİN TEKİL MANİFOLD ANALİZİ

Bir kompleks değişkenli ve çok kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar arasındaki önemli farklardan biri çok değişkenli fonksiyonun tekil noktalarının ayrık olmamasıdır [43]. n kompleks değişkenli ($2n$ reel değişkenli) $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ fonksiyonunun tekillikleri $(2n-2)$ boyutlu reel analitik manifoldlar üzerindedir. Bu tekil

manifoldlar, φ değişkenlerinin analitik bir fonksiyonu olmak üzere $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ koşulu ile belirlenir.

Ablowitz, Ramani ve Segur'un Nonlinear Adi Diferansiyel Denklemler (NADD) için tanımladığı Painlevé özelliği Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından NKDD'lere genişletilmiştir. WTC, NKDD'ler için Painlevé özelliğini çözümlerin hareketli tekil manifoldlar civarında tek değerli olması şeklinde tanımlamışlardır. NADD'lerdeki tekil nokta analizine benzer biçimde, $w(z_1, z_2, \dots, z_n)$ NKDD'in çözümü olmak üzere

$$w = \varphi^p \sum_{j=0}^{\infty} w_j \varphi^j \quad (5.4.1)$$

açılımı önerdiler. Burada $\varphi = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $w_j = w_j(z_1, z_2, \dots, z_n)$ dir. p üst indisi tekil nokta analizinde olduğu gibi çözümün dominant davranışını gösterir ve analizin yürümesi için p 'nin negatif tamsayı olması gerekir. İlgilenilen NKDD'in Painlevé özelliğinin olması, denklemin çözümü olan (5.4.1) açılımının yeteri kadar keyfi fonksiyonu içermesi anlamına gelmektedir.

Bundan sonra yapılacak iş yukarıda kısaca özetlenen yöntemi

$$w_t + \alpha (|w|^2 w)_x + \beta w_{xxx} = 0 \quad (5.4.2)$$

KMKdV denkleminde uygulamaktır. İlk adım (5.4.2) denkleminde ait $w(x,t)$ çözüm fonksiyonunun dominant davranışını belirlemektir. bunun için (5.4.2) denkleminde w ve \bar{w} fonksiyonları için

$$w \sim w_0 \varphi^n, \quad \bar{w} \sim \bar{w}_0 \varphi^n \quad (5.4.3)$$

yazılır. Hatırlanacağı üzere $w(x,t)$ kompleks bir fonksiyondur. Çözümlerin bir $\varphi(x,t)$ tekil manifoldu civarındaki davranışlarını incelediğimizden, ilgilenilen $\varphi(x,t)$ fonksiyonu reel değerli olmak zorundadır. (5.4.3) ifadelerinin (5.4.2) denkleminde yazılması sonucunda

$$n \varphi^{n-1} \varphi_t w_0 + \beta n(n-1)(n-2) \varphi^{n-3} \varphi_x^3 w_0 + \alpha 3n \varphi^{3n-1} |w_0|^2 w_0 \varphi_x \sim 0 \quad (5.4.4)$$

elde edilir. En küçük üslü φ 'ler ikinci ve üçüncü terimler olabilir.. Bu terimlerin üslerinin eşitlenmesi sonucunda n için -1 değeri bulunur. Hatırlanacak olursa tekil nokta analizinde de dominant davranışı gösteren n , -1 olarak bulunmuştu. (5.4.4) ifadesinde üsleri aynı olan terimler yazılırsa

$$2\beta\varphi_x^2 = -\alpha|w_0|^2 \quad (5.4.5)$$

bağıntısı elde edilir. Dominant davranışı belirledikten sonra (5.4.2) denkleminin çözümü olan w ve eşleniği \bar{w} fonksiyonları

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \varphi^{j-1}, \quad \bar{w} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{w}_j \varphi^{j-1} \quad (5.4.6)$$

şeklinde yazılabilir. (5.4.6) ifadeleri (5.4.2) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} [w_{jt} \varphi^{j-1} + (j-1)w_j \varphi^{j-2} \varphi_t] + \beta \sum_{j=0}^{\infty} [w_{jxxx} \varphi^{j-1} + 3(j-1)w_{jxx} \varphi^{j-2} \varphi_x \\ & + 3(j-1)(j-2)w_{jx} \varphi^{j-3} \varphi_x^2 + 3(j-1)w_{jx} \varphi^{j-2} \varphi_{xx} \\ & + (j-1)(j-2)(j-3)w_j \varphi^{j-4} \varphi_x^3 + 3(j-1)(j-2)w_j \varphi^{j-3} \varphi_x \varphi_{xx} \\ & + (j-1)w_j \varphi^{j-2} \varphi_{xxx}] + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(w_{jx} \bar{w}_m w_n + w_j \bar{w}_{mx} w_n \\ & + w_j \bar{w}_m w_{nx}) \varphi^{j+m+n-3} + (j+m+n-3)w_j \bar{w}_m w_n \varphi^{j+m+n-4} \varphi_x] = 0 \quad (5.4.7) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu denklemde j indisi üzerindeki toplam kaldırılarak bütün terimler φ^{j-4} 'ün katsayısı olarak yazılırsa $w_j(x,t)$ fonksiyonlarının sağlaması gereken rekürsiyon bağıntısı,

$$\begin{aligned} & w_{j-3,t} + (j-3)w_{j-2} \varphi_t + \beta [w_{j-3,xxx} + 3(j-3)w_{j-2,xx} \varphi_x \\ & + 3(j-2)(j-3)w_{j-1,x} \varphi_x^2 + 3(j-3)w_{j-2,x} \varphi_{xx} + (j-1)(j-2)(j-3)w_j \varphi_x^3 \\ & + 3(j-2)(j-3)w_{j-1} \varphi_x \varphi_{xx} + (j-3)w_{j-2} \varphi_{xxx}] \end{aligned}$$

$$+ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{\ell=0}^m w_{j-m-1} \bar{w}_{m-\ell} w_{\ell} + \alpha (j-3) \varphi_x \sum_{m=0}^j \sum_{\ell=0}^m w_{j-m} \bar{w}_m w_{\ell} = 0 \quad (5.4.8)$$

olarak elde edilir. (5.4.8) bağıntısından w_j fonksiyonunu içeren terimler toplanırsa, $j=0,1,2,\dots$ için geçerli olan

$$\beta (j-1) (j-2) (j-3) w_j \varphi_x^3 + \alpha (j-3) \varphi_x 2w_j |w_0|^2 \\ = F(w_{j-1}, \dots, w_0, \bar{w}_j, \bar{w}_{j-1}, \dots, \bar{w}_0, \varphi_x, \varphi_{xx}, \dots)$$

ifadesi elde edilir. (5.4.5) sonucu da kullanılarak bu denklemin sol tarafı düzenlenirse

$$\beta (j-1) (j-2) (j-3) \varphi_x^3 w_j - 4\beta (j-3) \varphi_x^3 w_j = F(w_{j-1}, \dots)$$

ya da son şekliyle

$$\beta \varphi_x^3 w_j (j-3) (j^2 - 3j - 2) = F(w_{j-1}, \dots, w_0, \bar{w}_j, \dots) \quad (5.4.9)$$

ifadesi elde edilir. (5.4.9) ifadesine bakılırsa $j=3$ ve $j^2 - 3j - 2 = 0$ için w_j fonksiyonları tanımlanmamıştır, yani keyfi fonksiyonlardır. Ancak $j^2 - 3j - 2 = 0$ denkleminin kökleri tamsayı olmadığından keyfi w_j fonksiyonlarına karşı gelmemektedir. (5.4.8) denkleminin j indisinin tamsayı değerleri için geçerlidir. Eğer $j^2 - 3j - 2 = 0$ denkleminin kökleri tamsayı olsaydı, tamsayı köklere karşı gelen w_j fonksiyonları keyfi olarak kalacaktı. (5.4.2) denkleminin üçüncü merteye denklem olduğu hatırlanacak olursa, φ keyfi fonksiyonundan başka keyfi iki fonksiyon bulunabilseydi, (5.4.6) ifadesi KMKdV denkleminin genel çözümü olacaktı, ve Painlevé tahmini gereği ters saçılma ile integre edilebilir denecekti. KMKdV denkleminin yeteri kadar keyfi sabit bulunamadığından Painlevé testini geçemediğini söylemek durumundayız. Painlevé özelliği olmaması nedeniyle KMKdV denkleminin ARS'nin tahminine göre integre edilebilir bir sistem olmadığı söylenebilir. Tekil manifold analizi ile bulunan sonuçların tekil nokta analizi ile bulunan sonuçlarla çelişmediği de böylece gözlenmiş olmaktadır. KMKdV denkleminin Painlevé analizine göre integre edilemez olduğu gözlemi, aynı denklemin dört hareket sabitini bularak denklemin integre edilemez olduğunu söyleyen Karney, Sen ve Chu'nun [29], [30] sonucuyla uyumludur.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada nonlinear homogen ve izotrop mikropolar katılarda düzlem dalga yayılma problemi asimptotik olarak incelenmiştir. İkinci bölümde polar katı için alan denklemleri yazıldıktan sonra, üçüncü bölümde bir boyutlu alan denklemlerini asimptotik olarak incelemek için seçilen indirgeyici pertürbasyon yöntemi tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak nonlinear polar katıya ait bir boyutlu alan denklemleri asimptotik olarak incelenmiştir. Önce uygun bir koordinat uzatması yapılarak alan denklemleri yeni eksen takımında yazılmıştır. Koordinat uzatması ile probleme dispersif etkilerin bir ölçüsü olarak ithal edilen ϵ küçük parametresi, bağımlı değişkenlerin bu parametrenin kuvvet serisi şeklinde yazılması sonucu aynı zamanda nonlinearliğin de ölçüsü olmuştur. Böylece bağımlı değişkenlerin küçük ϵ parametresinin kuvvet serisi şeklinde yazılması, dispersif etkilerin nonlinear etkilerle dengelenmesi sonucunu beraberinde getirecektir. Bağımlı değişkenlerin yeni koordinatlarda yazılmış alan denklemlerinde yazılması sonucunda $\epsilon^{1/2}$ 'nin kuvvetlerine göre denklem hiyerarşileri elde edilmiştir. Bu denklem hiyerarşilerinin adım adım çözülmesiyle, yüksek mertbe pertürbasyon terimlerinin yok edilmesiyle birinci mertbe enine yerdeğiştirme gradyanları olan $p_2^{(1)}$ ve $p_3^{(1)}$ 'in sağladığı uygunluk denklemleri olarak karşımıza çıkan KMKdV denklemleri elde edilmiştir. Aynı denklemlerin birinci mertbe dönme bileşenleri $\varphi_2^{(1)}$ ve $\varphi_3^{(1)}$ tarafından da sağlandığı gözlenmiştir. Linear denklemlere bakıldığında boyuna bileşenlerin sağladığı denklemlerin enine bileşenlerin sağladığı denklemlerden bağımsız olduğu görülmüştü. Bunun sonucu olarak nonlinear durumda birinci mertbe enine bileşenler $((p_2^{(1)}, p_3^{(1)})$ ve $(\varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)})$) nonlinear kuple denklemler sağlarken, birinci mertbe boyuna bileşenlerin $(p_1^{(1)}, \varphi_1^{(1)})$ sıfır olduğu gözlenmiştir. Ancak ikinci mertbe boyuna bileşenlerin $(p_1^{(2)}, \varphi_1^{(2)})$ birinci mertbe bileşenler $(p_2^{(1)}, p_3^{(1)})$ cinsinden yazılabildiği gözlenmiştir.

Özel halde nonlinear polar katı kuadratik olduğu zaman KMKdV denkleminin katsayılarının ne olduğu hesaplanmıştır. Genel nonlinear katı için β sabitinin her zaman negatif olduğu bilinmesine rağmen, α katsayısının işareti bilinmemektedir. Kuadratik katı durumunda

α 'nın negatif olduğu görülmüştür.

KMKdV denkleminin soliter dalga çözümleri arandığında birinci mertebe enine yerdeğiştirme gradyanları $p_2^{(1)}$ ve $p_3^{(1)}$, in düzlemsel polarize olmuş soliter dalga çözümleri olduğu gözlenmiştir. boyuna ikinci mertebe yer değiştirme gradyanı $p_1^{(2)}$, nin de kuadratik katı özel durumunda soliter dalga çözümlerinin olduğu görülmüştür.

Beşinci bölümde KMKdV denkleminin integre edilebilirliği incelenmiştir. NKDD'lerin integre edilebilirliği ile ilgili olarak Painlevé Analizi tanıtılmış, KMKdV denkleminin hem Tekil Nokta Analizi, hem de Tekil Manifold Analizi yapılarak denklemin her iki anlamda Painlevé özelliğinin olmadığı gözlenmiştir, ve Painlevé tahmini-ne göre denklemin integre edilemez olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada nonlinear polar ortamlarda, uzun dalgaların yayıldığı zayıf dispersif bölgede düzlem dalga yayılması asimptotik olarak incelenmiş ve alan denklemlerinin uzak alan davranışlarını veren kuple MKdV denklemleri elde edilmiştir. Carney, Sen ve Chu [29] bu denklemlerin dört tane korunmuş büyüklüğü olduğunu Noether teoremi yardımıyla göstermiştir. Cartan'ın diferansiyel geometrik kavramlarını kullanarak Wahlquist ve Estabrook korunum yasalarını elde etmek için sistematik bir yol önermişlerdir [44]. Bu metod sığ su dalgalarında [45], bir boyutlu izentropik gaz akımlarında [46] bir boyutlu sonlu elastisitede [47], Benjamin-Bona-Mahoney denkleminin [48] korunum yasalarını elde etmek için başarıyla kullanılmıştır. Benzer bir yaklaşımın kuple MKdV denklemlerinin korunum yasalarını elde etmek için kullanılması düşünülebilir. Diferansiyel geometrik kavramları ve Lie gruplarını kullanan Harrison Estabrook [49] NKDD'lerin tam çözümlerini vermişlerdir. Harrison ve Estabrook'un önerdiği yolla KMKdV benzerlik çözümlerinin bulunması da mümkün görünmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] WHITHAM, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley Interscience, 1974.
- [2] ERINGEN, A.C., and E.S.ŞUHUBİ, Elastodynamics, Vol.I, Finite Motions, Academic Press, 1974.
- [3] ERINGEN, A.C., and E.S.ŞUHUBİ, Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids-I, Int.J.Engng.Sci., Vol.2, pp.189-203, 1964.
- [4] ŞUHUBİ, E.S., and A.C.ERİNGEN, Nonlinear Theory of Micro-Elastic Solids-II, Int.J.Engng.Sci., Vol.2, pp.389-404, 1964.
- [5] ERİNGEN, A.C., Theory of Micropolar Elasticity, Fracture, Vol.2, pp.621-729, 1968.
- [6] KAFADAR, C.B., and A.C.ERİNGEN, Micropolar Media-I: The Classical Theory, Int.J.Engng.Sci., Vol.9, pp.271-305, 1971.
- [7] TANIUTI, T., and C.C.WEI, Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation I, J.Phy.Soc.Japan, Vol.24, pp.941-946, 1968.
- [8] SPENCE, D.A., Nonlinear Wave Propagation in Viscoelastic Materials, Nonlinear Elasticity, Academic Press, 1973.
- [9] LARDNER, R.W., The Development of Plane Shock Waves in Nonlinear Viscoelastic Medium, Proc.R.Soc.London, A347, pp.329-344, 1976.
- [10] NIGUL, U., The Method of Successive Integration of the Linear Inhomogeneous Wave Equations in the Theory of Transient Wave Propagation in Nonlinear Hereditary Elastic Media, Int.J.Nonlinear Mechanics, Vol.15, pp.469-483, 1980.
- [11] JOHNSON, A.T., Pulse Propagation in Heat Conducting Elastic Materials, J.Mech.Phy.Solids, Vol.23, pp.55-75, 1975.
- [12] DONATO, A., The Burgers Equation in Magneto-Thermo-Elasticity with one-dimension Deformation, ZAMP, Vol.27, pp.281-284, 1976.
- [13] CHADWICK, P., and C.F.M.CREASY, Weak Nonlinear Waves in Homogeneously Deformed heat-conducting Elastic Materials, Q.J.Mech.App.Math., Vol.32, pp.419-436, 1979.
- [14] TEYMUR, M., Solitons in Diatomic Elastic Continua, Int.J.Engng.Sci. Vol. 24, pp.883-896, 1986.

- [15] NARIBOLI, G.A., and A.SEDOV, Burgers'-Korteweg-de Vries Equation for Viscoelastic rods and plates, J.Math.Anal.Ap-plications, Vol.32, pp.661-677, 1970.
- [16] OSTROVSKY, L.A., Short-wave Asymptotics for weak Shock Waves and Solitons in Mechanics, Int.J.Non-linear Mechanics, Vol.11, pp.401-416, 1976.
- [17] POTAPOV, A.I., and I.N.SOLDATOV, Quasiplane beam of Nonlinear Longitudinal Waves in a Plate, Sov.Phys.Acoust., Vol.30, pp.486-488, 1985.
- [18] ENGELBRECHT, J., Theory of Nonlinear Wave Propagation with Application to Interaction and Inverse Problems, Int.J. Non-linear Mechanics, Vol.12, pp.189, 1977.
- [19] ENGELBRECHT, J., Two dimensional Non-linear Evolution Equations: The derivation and the Transient Wave Solution, Int.J. Non-linear Mechanics, Vol.16, pp.199-212, 1981.
- [20] GARDNER, C.S., and G.K.MORIKAWA, Courant Inst.Math.Sci. Report No NYO-9082, 1960.
- [21] WASHIMI, H., and T.TANIUTI, Propagation of Ion-acoustic Solitary Waves of Small Amplitude, Phys.Rev.Lett., Vol.17, pp.996-998, 1966.
- [22] KAKUTANI, T., H.ONO, T.TANIUTI, and C.C.WEI, Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II, Application to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma, J.Phys.Soc. Japan, Vol.24, pp.1159-1166, 1968.
- [23] JEFFREY, A. and T.KAKUTANI, Weak Nonlinear Dispersive Waves: A Discussion centered around the Korteweg-de Vries Equation, SIAM Review, Vol.14, pp.582-643, 1972.
- [24] TEYMUR, M., and E.S.ŞUHUBİ, Wave Propagation in Dissipative or Dispersive Nonlinear Media, Report No.34, App.Math.Division, M.S.I.R.I., 1976.
- [25] TEYMUR, M., and E.S.ŞUHUBİ, Wave Propagation in Dissipative or Dispersive Nonlinear Media, J.Inst.Math.Aplics., Vol.21, pp.25-40, 1978.
- [26] TANIUTI, T., and H.WASHIMI, Self-trapping and Instability of Hydromagnetic Waves along the Magnetic field in Cold Plasma, Phys.Rev.Lett., Vol.21, pp.209-212, 1968.
- [27] TANIUTI, T., and N.YAJIMA, Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation I, J.Math.Phys., Vol.10, pp.1369-1372, 1969.
- [28] JEFFREY, A., and T.KAWAHARA, Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, 1982.

- [29] KARNEY, C.F.F., A. SEN., and F.Y.F. CHU, Plasma Physics Laboratory Report PPPL-1452, Princeton University, 1978.
- [30] KARNEY, C.F.F., A. SEN., and F.Y.F. CHU, The Complex MKdV Equation, a Non-integrable Evolution Equation, Solitons and Condensed Matter Physics, (Ed. A.D. Bishop, T. Schneider), Springer-Verlag, 1976.
- [31] MAUGIN, G.A., and A. MILED, Solitary Waves in Micropolar Elastic Crystals, Int. Jour. Engng. Sci. Vol. 24, pp. 1477-1499, 1986.
- [32] PARFITT, V.R., and A.C. ERINGEN, Reflection of Plane Waves from the Flat Boundary of a Micropolar Elastic Halfspace, Report No. 8-3, General Technology Corporation, 1966.
- [33] BYRD, P.F., and M.D. FRIEDMAN, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer, 1971.
- [34] ABLOWITZ, M.J., and H. SEGUR, Exact Linearization of a Painlevé Transcendent, Phys. Rev. Lett., Vol. 38, pp. 1103-1106, 1977.
- [35] ABLOWITZ, M.J., A. RAMANI, and H. SEGUR, A Connection between nonlinear Evolution equations and Ordinary differential equations of P-type I, J. Math. Phys., Vol. 21, pp. 715-721, 1980.
- [36] ABLOWITZ, M.J., and H. SEGUR, Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1981.
- [37] INCE, E.L., Ordinary Differential Equations, Dover, 1956.
- [38] WEISS, J., The Painlevé Property for Partial Differential Equations II: Backlund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative, J. Math. Phys., Vol. 24, pp. 1405-1413, 1983.
- [39] STEEB, W.H., and W. STRAMPP, XII. International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Springer, 1984.
- [40] ABLOWITZ, M.J., D.J. KAUP, A.C. NEWELL, and H. SEGUR, The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems, Stud. App. Math., Vol. 53, pp. 249-315, 1974.
- [41] KAUP, D.J., and A.C. NEWELL, An Exact Solution for a derivative Nonlinear Schrödinger Equation, J. Math. Phys., Vol. 19, pp. 798-801, 1978.
- [42] WEISS, J., M. TABOR and G. CARNEVALE, The Painlevé Property for Partial Differential Equations, J. Math. Phys., Vol. 24, pp. 522-526, 1983.
- [43] OSGOOD, W.F., Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables, Dover, 1966.

- [44] WAHLQUIST,H.D., and F.B.ESTABROOK. Prolongation Structure of Nonlinear Evolution Equations. J.Math.Phys.. Vol.16, pp.1-7, 1975.
- [45] AKYILDIZ,Y., Conservation Laws for Shallow Water Waves on a Sloping Beach, J.Math.Phys., Vol.23, pp.1723-1727, 1982.
- [46] ŞUHUBİ,E.S., Conservation Laws for One-Dimensional İsentropic Gas Flows, Int.J.Engng.Sci., Vol.22, pp.119-126, 1984.
- [47] ŞUHUBİ,E.S., Conservation Laws for One-Dimensional Finite Elasticity, Bull.Tech.Univ., Vol.40, pp.437-451, 1987.
- [48] CHOWDHURY,K.L., and E.S.ŞUHUBİ, On the Conservation Laws of BBM Equation, Int.J.Engng.Sci., Vol.25, pp.1397-1402, 1987.
- [49] HARRISON,B.D., and F.B.ESTABROOK, Geometric Approach to Invariance Groups and Solution of Partial Differential Systems, J.Math.Phys., Vol.12, pp.653-666, 1971.

ÖZGEÇMİŞ

Saadet ERBAY, 1957 yılında Kırklareli'nde doğmuş, lise öğrenimini Kırklareli Atatürk Lisesinde yapmıştır. 1974 yılında İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümüne girmiş ve 1980 Şubat döneminde mezun olmuştur. Eylül 1980'de aynı fakültenin mekanik bölümünün master programına kayıt olmuş ve 1982 Temmuz döneminde mezun olmuştur. Master programı süresince aynı fakültenin mekanik bölümünde teknisyenlik görevinde bulunmuştur. 1982 Eylül tarihinde TÜBİTAK Marmara Bilimsel ve Endüstriyel Araştırma Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bölümüne araştırma asistanı olarak girmiş, 1984 Eylül döneminde İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünün doktora programına kayıt olmuştur. Şubat 1983'ten beri TÜBİTAK Temel Bilimler Araştırma Enstitüsünün Uygulamalı Matematik Bölümünde araştırma asistanı olarak görev yapmaktadır.