

İKİ PARAMETRELİ ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAK VE  
BASIK KÜRESEL KABUK TABANLI SİLİNDİRİK TANK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Bahattin KİMENÇE

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 4 Eylül 1989

Tezin Savunulduğu Tarih : 8 Eylül 1989

Tez Danışmanı : Doç. Dr. M. Ertaç ERGUVEN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan ENGIN

Doç. Dr. Metin AYDOĞAN

EYLÜL-1989

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada iki karakteristikli tek tabakalı elastik temele oturan dairesel plak, küresel kabuk ve küresel kabuk tabanlı silindirik silo problemleri incelenmiştir.

Bu konuyu bana veren ve çalışmam süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Hocam Sayın, Doç.Dr.M.Ertaç ERGÜVEN'e teşekkür etmeyi bir borç biliyorum.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	1V
SUMMARY.....	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAK.....	10
2.1. Temel Denklemler.....	10
2.2. Elastik Temel Üzerine Oturan Dairesel Plak Diferansiyel Denklemin Genel Çözümü.....	14
2.3. Uygulamalar .....	19
2.3.a) Üniform Yayılı Yük Durumu .....	19
2.3.b) Plak Kenarında Üniform Yayılı Cizgisel Düşey Yük Durumu .....	23
2.3.c) Plak Kenarında Üniform Yayılı Cizgisel Moment Durumu .....	26
2.4. Dairesel Plak Tabanlı Silindirik Tankın Kuvvet Yöntemiyle Çözümü.....	28
BÖLÜM 3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN BASIK KÜRESEL KABUK... 34	34
3.1. Basık Küresel Kabuğun Temel Denklemleri... 34	34
3.2. Elastik Temel Üzerinde Kabuğun Rijit Davranışı Kabulü.....	40
3.3. Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümleri. 43	43
3.4. İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Küresel Tabanlı Silindirik Tank.....	50
3.4.1. Kuvvet Metodu.....	55
3.4.2. Birim Deplasmanların Tayini.....	55
3.4.2.I. Küresel Taban Kısmı.....	55
3.4.2.II. Silindirik Tankta Birim Uc Deplasmanlar.....	60
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	64
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	73

## ÖZET

Bu çalışmada iki parametrelili, tek tabakalı elastik temele oturan dairesel plak ve basık küresel kabuk problemleri incelenmiştir. Tek tabakalı elastik zemin parametrelerinin belirlenmesi için exponansiyel varyasyon fonksiyonu tanımlanmıştır. İki parametrelili elastik zemin modeli, tek parametrelili elastik Winkler zemin modeli ile çeşitli durumlar için karşılaştırılmıştır.

İkinci bölümde elastik temel üzerine oturan dairesel plak diferansiyel denklemi dönel simetrik dış yük için çözülmüştür. Çeşitli sınır dış yükleme durumları için kesit zorları hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde önce basık küresel kabuk diferansiyel denklemi dönel simetrik dış yük için çözülmüştür. Daha sonra elastik temel üzerindeki basık küresel kabuğun radyal deplasmanı, temelin çökmesine göre çok küçük olacağı kabulüne dayanarak, küresel kabuğun rijit bir cisim gibi çöktüğü kabul edilmiştir. Bu nedenle temelde üniform taban basıncı ve temelin çökmesi sırasında kabuk kenarında fiktif mesnet tepkisi oluşacaktır. Elastik temele oturan basık küresel kabuk problemi de dış yükü; üniform taban basıncı, fiktif mesnet tepkisi ve kabuğa uygulanan dış yüklerin toplamından oluşan basık küresel kabuk problemi gibi çözülmüştür. Çeşitli kenar dış yükleme durumları ve çeşitli kenar mesnetlenmeleri için kesit zorları (momentler, kesme kuvvetler ve normal kuvvetler) hesaplanmıştır.

Elastik temele oturan küresel kabuk ve dairesel plak tabanlı silindirik silo problemi, bu çözümler yardımıyla kuvvet metodu uygulanılarak çözülmüştür.



THE CIRCULAR PLATES AND THE SHALLOW SPHERICAL  
SHELLS ON THE TWO-PARAMETER ELASTIC  
FOUNDATION AND APPLICATION TO THE  
ANALYSIS OF THE BOTTOMS OF CYLINDRICAL RESERVOIRS

SUMMARY

There are many kinds of elastic models of soil behaviour. They can be considered two groups; the first group is single-parameter elastic model and the second group is two-parameter elastic model.

The first group is:

- 1) The Winkler model (1867)
- 2) Elastic continuum models
  - a) The isotropic elastic continuum
  - b) The anisotropic elastic continuum and the non-homogenous elastic continuum
  - c) Layered and structured elastic media.

The second group is:

- 1) Filonenko-Brodich model (1940-1945)
- 2) Hetenyi model (1945)
- 3) Pasternak model (1954)
- 4) Vlazov model (1949 a,b)
- 5) Reissner model (1958)

In general, Vlazov model have been considered, but sometime that model have been compared to Winkler model.

### The Winkler Model

The idealized model of soil media proposed by Winkler (1867) assumes that the deflection  $w$ , of the soil medium at any point on the surface is directly proportional to the stress  $q$ , applied at that point and independent of stresses applied at other locations i.e.

$$q(x,y) = kw(x,y)$$

where  $k$  is termed the modulus of subgrade reaction with units of stress per unit length. Physically Winkler's idealisation of the soil medium consists of a system of mutually independent spring elements with spring constant  $k$ . One important feature of this soil model is that the displacement occurs immediately under the loaded area and outside this region the displacements are zero.

### The Vlazov Model

The model of soil response proposed by Vlazov (1949 a.b) presents an example of the second type of two-parameter elastic model which is derived by introducing displacement constraints that simplify the basic equations for a linear elastic isotropic continuum. Vlazov's approach to the formulation of the soil model is based on the application of a variational method. The particular importance of Vlazov model is relation to the analysis of soil-foundation interaction problems, we shall present here a brief exposition of the method.

Consider first the state of plane strain in the single elastic-layer. The state of strain in the foundation layer is assumed to be such that the displacement components are:

$$u(x,z) = 0 \quad , \quad w(x,z) = w(x)\psi(z)$$

where  $u$  is horizontal displacement,  $w$  is vertical displacement,  $x$  is horizontal coordinate,  $z$  is vertical coordinate and  $\psi(z)$  is variation of displacement  $w(x,z)$  proposed by Vlazov and Leontiew (1966) including the linear and exponential variations

$$\psi(z) = (1 - \eta)$$

$$\psi(z) = \frac{\text{Sinh}[\gamma(H-z)/R]}{\text{Sinh}[\gamma H/R]}$$

where  $\eta = z/H$ ,  $H$  = thickness of compressible soil layer,  $k$  = plate radius and  $\gamma$  = dimensionless coefficient depending on the elastic properties of the foundation.

Using the stress-strain relations for plane strain conditions (Timoshenko and Godier, 1970) we obtain

$$\sigma_{xx} = \frac{E_o \cdot \nu_o}{(1 - \nu_o^2)} w(x) \frac{d\psi(z)}{dz}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E_o}{(1 - \nu_o^2)} w(x) \frac{d\psi(z)}{dz}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E_o}{2(1 - \nu_o)} \frac{dw(x)}{dx} \psi(z)$$

where  $E_o = E_s / (1 - \nu_s^2)$ ;  $\nu_o = \nu_s (1 - \nu_s)$  and  $E_s$ ,  $\nu_s$  are respectively the elastic modulus and Poisson's ratio for the elastic material. The equation of equilibrium in the  $z$ -direction is obtained by Lagrange's principle of virtual work, i.e. by equating to zero the total work, i.e. by equating to zero the total work of all internal and external forces on an element over any arbitrary virtual displacement.

The response function ( $q(x)$ ) can be obtained by virtual work contribution from external and internal forces, as shown below:

$$q(x) = k w(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

where

$$k = \frac{E_o}{(1 - \nu_o^2)} \int_0^H \psi(z)^2 dz$$

$$t = \frac{E_o}{4(1 + \nu_o)} \int_0^H \psi(z)^2 dz$$

In the second chapter, problem of axisymmetrical deformation of circular plates on elastic single-layer foundation have been considered. The external load have been applied symmetrical relative to the plate center, so that the plate is subjected to an axisymmetrical deformation. Polar coordinates  $(\theta, \rho)$  have been used. The differential equation of bending of a plate resting on an elastic single-layer foundation is in polar coordinates:

$$D \nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 W - 2t \nabla_{\rho}^2 W + kW = p$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

where

- $p$  : external load
- $D$  : flexural rigidity of plate
- $h$  : thickness of plate
- $E$  : elastic modulus of plate
- $\nu$  : Poisson's ratio of material of plate

By virtue of the axial symmetry, the plate deflections  $W = W(\rho)$  are independent of the polar angle  $\theta$ , and the Laplacian of  $W$  becomes:

$$\nabla_{\rho}^2 W = \frac{d^2 W(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW(\rho)}{d\rho}$$

The differential equation of the plate have been solved according to Bessel and Hankel functions, then constants of integration have been calculated from boundary and continuously condition. In the last operation, bending moments  $M_{\rho}$ ,  $M_{\theta}$  and shearing forces  $Q_{\rho}$  can be calculated as shown below:

$$M_{\rho} = -D \left[ \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right] = -D \left[ \nabla_{\rho}^2 W - \frac{1-\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right]$$

$$M_{\theta} = -D \left[ \nu \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right] = -D \left[ \nu \nabla^2 W + \frac{1-\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right]$$

$$Q_{\rho} = -D \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right]$$

In the third chapter, problem of axisymmetrical deformation of a shallow spherical shell on a single-layer elastic foundation have been considered. All statical and geometrical equations characterising the states of stress and strain of the shallow spherical shell can be written as follows:

$$D\nabla^2 \nabla^2 W - \frac{Eh}{R^2} W - Z = 0$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

where

Z = a normal load (it is positive when directed along the outer normal)

D = flexural rigidity of shell

E = elastic modulus of shell

h = thickness of shell

$\nu$  = Poisson's ratio of material of shell

R = radius of curvature of spherical shell

The radial displacements of a spherical shell are thus determined by a fourth-order differential equation having the same form as the equation of bending of plate on an elastic Winkler foundation whose foundation modulus is

$$k = \frac{Eh}{R^2}$$

The plate and shell be so rigid that their deformations can be neglected; they can then be considered as a circular punch and a spherical punch

whose displacements are constant. According to this approach, the problem of a shallow spherical shell on a single-layer elastic foundation have been solved. In this approach the external loads and the reactions of the elastic foundation have been considered as the total external loads and the problem of the shallow spherical shell on the elastic foundation have been solved as the problem of the shallow spherical shell.

This method have been applicated to the analysis of the bottoms of cylindrical reservoirs. To obtain a more accurate solution it is necessary to make allowance for the effect of the cylindrical reservoir walls on the strains of the bottom. This can be done by the methods used to analyze statically indeterminate systems, i.e., the method of forces or the method of displacements (strains). In the first method, a cut is made in the zone where the bottom joins the cylindrical reservoir wall, and the constraints there are replaced by unknown forces (and moments). This method have been applicated to the bottom of cylindrical reservoir.

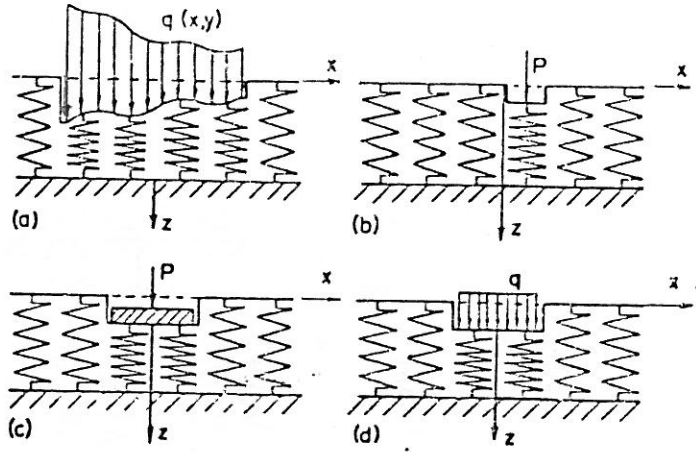
## BÖLÜM. 1

### GİRİŞ

Elastik zemine oturan kirişler ve plaklar problemi Winkler (1867) tarafından incelenmiş ve teorisinin esasları verilmiştir. Bu teori,  $q$  zemin tepkilerinin,  $w$  plak çökmeleri ile orantılı olduğu kabulüne dayanarak ;

$$q(x,y) = kw(x,y) \quad (1.1)$$

bağıntısını vermektedir.



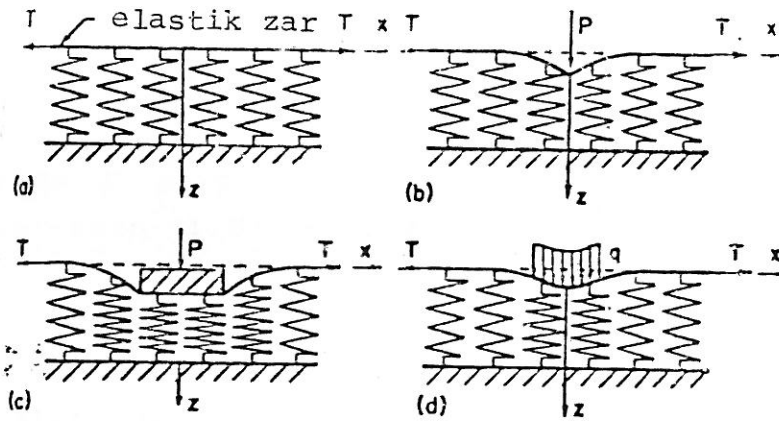
Şekil 1.1. Winkler zemin modeli.

Winkler modelinde zemin, birbirinden bağımsız katsayısı  $k$  olan yaylar gibi idealleştirilmiştir. Bu nedenle yükün etki ettiği yay bir miktar çöker diğer yaylarda herhangi bir değişiklik olmaz. Şekil 1.1 a) üniform olmayan yayılı yük altında zeminin çökme durumunu, şekil 1.1 b) tekil yük altındaki çökme durumunu, şekil 1.1 c) rijit bir yük altındaki çökme durumunu ve şekil 1.1 d) üniform yayılı yük altındaki çökme durumunu göstermektedir.

Winkler modelinde, zemini karakterize eden sadece  $k$  parametresi vardır. Fakat zemini, daha gerçeğe yakın idealleştirmek için bazı araştırmacılar kayma gerilmelerinde içeren iki parametrelili modeller geliştirmişlerdir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir [1].

- 1) Filonenko-Brodich Modeli (1940-1945)
- 2) Hetényi Modeli (1946)
- 3) Pasternak Modeli (1954)
- 4) Vlazov Modeli (1949 a,b)
- 5) Reissner Modeli (1958)

Filonenko-Brodich Modelinde, Winkler yaylarının yüzeyi elastik zar gibi gözönüne alınmıştır.



Şekil 1.2. Filonenko-Brodich zemin modeli.

Bu modelde sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde membran (zar) gerilme meydana gelir. Membran-yay sistemi dengesinden, zeminin reaksiyon fonksiyonu:

$$q(x,y) = kw(x,y) - T\nabla^2 w(x,y) \quad (1,2)$$

olarak elde edilir.



Burada:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

kartezyan koordinatlarda Laplasiyen operatörüdür. Bir boyutlu problemler için (1.2) denklemi tekrar yayılırsa

$$q(x) = kw(x) - T \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.4)$$

bağıntısı elde edilir. Bu modelde elastik zemin parametreleri k ve T dir.

Hetényi Modelinde, Winkler yaylarının üzerinde, iki boyutlu problemler için elastik bir plak, tek boyutlu problemler için elastik bir kirişin olduğu kabul edilir. Bu modelde zeminin reaksiyon fonksiyonu:

$$q(x,y) = kw(x,y) - D\nabla^2 w(x,y) \quad (1.5)$$

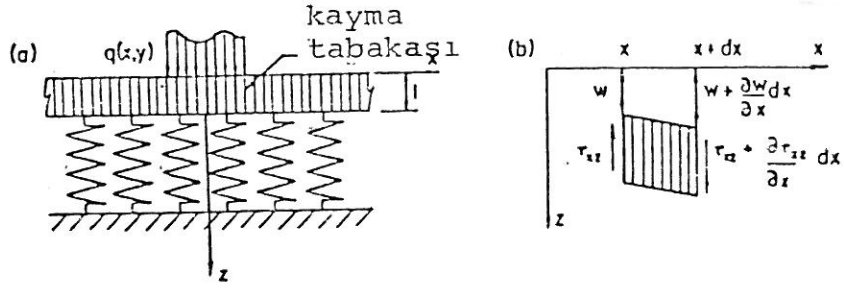
olarak elde edilir.

Burada D plağın eğilme rijitliğidir. Tek boyutlu problemler için (1.5) denklemi:

$$q(x) = kw(x) - D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} \quad (1.6)$$

şeklini alır. Bu modelde elastik zemin parametreleri k ve D dir.

Pasternak modelinde, yay elemanları üzerinde sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan, kayma tabakası gözönüne alınmıştır. (Şekil 1.3)



Şekil 1.3. Pasternak modeli.

Kayma tabakası  $(x,y)$  düzleminde izotropik kabul edilmiş olup kayma modülü  $G_x = G_y = G_p$  dir. Düşey doğrultuda denge denklemi yazıldığında zeminin reaksiyon fonksiyonu:

$$q(x,y) = kw(x,y) - G_p \nabla^2 w(x,y) \quad (1.7)$$

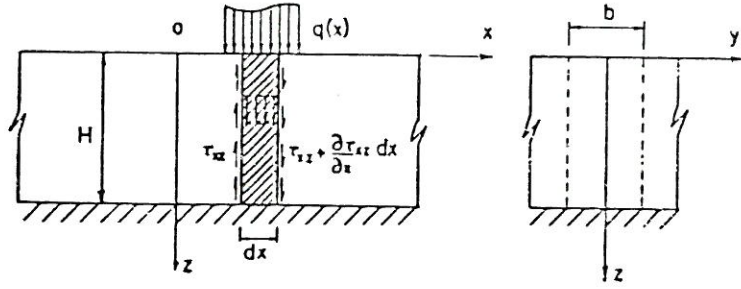
şeklinde elde edilir. Elastik zemin parametreleri  $k$  ve  $G_p$  dir.

Vlazov modelinin diğer modellerden farkı, elastik zemin parametrelerinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmıştır. Bu metotta  $x-z$  düzleminde bir elastik tabaka gözönüne alınarak (Şekil 1.4), bu tabaka için deplasmanlar

$$u(x,z) = 0 \quad w(x,z) = w(x)\Psi(z) \quad (1.8)$$

şeklinde seçilir.

Burada,  $u(x,y)$  yatay deplasman,  $w(x,z)$  düşey deplasman ve  $\Psi(z)$  fonksiyonu,  $w(x,y)$  fonksiyonunun,  $z$  yönündeki yaklaşımı olarak tanımlanır.



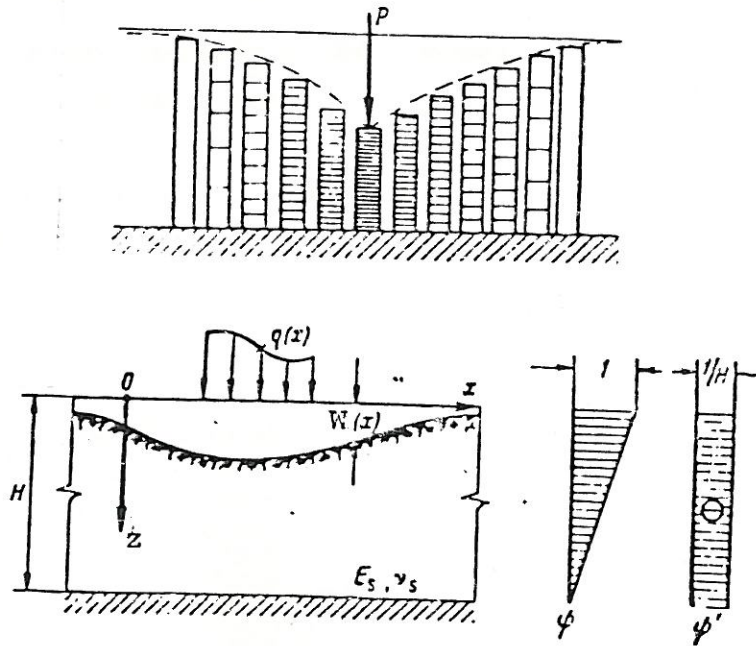
Şekil 1.4. Vlazov zemin modeli.

Vlazov ve Leontiev (1966) tarafından yaklaşım fonksiyonu:

$$\Psi(z) = (1-\eta) ; \quad \Psi(z) = \frac{\text{Sin h} [\gamma(H-z)/R]}{\text{Sin h} [\gamma H/R]} \quad (1.9)$$

şeklinde lineer veya exponansiyel olarak önerilmiştir.

Burada  $\eta = z/H$ ;  $\gamma$  zeminin elastik özelliklerine bağlı sabit,  $H$  sıkışabilir tabaka kalınlığı,  $R$  plak yarıçapıdır. Şekil 1.5 te lineer yaklaşım fonksiyonu gösterilmiştir.



Şekil 1.5. Lineer yaklaşım fonksiyonu.

Düzlem gerilme için, gerilme-sekil değiştirme ilişkisi kullanılarak;

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E_0 \nu_0}{(1-\nu_0^2)} \cdot w(x) \frac{d\Psi(z)}{dz} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \cdot w(x) \frac{d\Psi(z)}{dz} \\ \tau_{xz} &= \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \cdot \frac{dw(x)}{dx} \Psi(z)\end{aligned}\quad (1.10)$$

bağıntıları elde edilir.

Burada,  $E_0 = E_s / (1-\nu_s^2)$ ;  $\nu_0 = \nu_s (1-\nu_s)$  ve  $E_s$ ,  $\nu_s$  sırasıyla zeminin elastisite modülü ve poisson oranıdır. Zeminin reaksiyon fonksiyonu, z yönünde Virtüel iş prensibi kullanılarak:

$$q(x) = kw(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.11)$$

şeklinde elde edilir. Bu modeldeki elastik zemin parametreleri k ve t dir.

Bu parametreler, Pasternak modelindeki kayma ve normal gerilme enerjileriyle, Vlazov modelindeki kayma ve normal gerilme enerjileri eşitlenerek aşığıdaki biçimde elde edilirler.

Vlazov modelindeki normal ve kayma gerilme enerjileri:

$$W_{\sigma_v} = \int_0^H \left[ \frac{1}{2E_0} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu_0}{E_0} \sigma_{xx} \sigma_{zz} \right] (b \cdot dx) dz \quad (1.12)$$

$$W_{\tau_v} = \int_0^H \left[ \frac{1}{2G} \tau_{xz}^2 \right] (b \cdot dx) dz$$

şeklinde yazılabilir.

Pasternak modelinde normal ve kayma gerilme enerjileri ise:

$$W_{\sigma_p} = \frac{1}{2} k [w(x)]^2 (b \cdot dx) \quad (1.13)$$

$$W_{\tau_p} = \frac{1}{2} G_p \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 (b \cdot dx)$$

şeklinde dir.

(1.12) ve (1.13) bağıntılarından  $W_{\sigma_v} = W_{\sigma_p}$  ve  $W_{\tau_v} = W_{\tau_p}$  eşitlikleri kullanılarak, k ve t parametreleri:

$$k = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \int_0^H \Psi'(z)^2 dz \quad (1.14)$$

$$t = \frac{E_0}{4(1+\nu_0^2)} \int_0^H \Psi(z)^2 dz$$

şeklinde yaklaşım fonksiyonuna ve zeminin elastik özelliklerine bağlı olarak elde edilirler.

(1.4), (1.6) ve (1.7) bağıntılarındaki k, T, D ve  $G_p$  zeminin elastik özelliklerinden direk elde edilebilirler.



Fakat buna karşılık (1.11) bağıntısındaki  $k$  ve  $t$  parametreleri (1.14) bağıntısından elde edilir veya  $k$ , zemine düşey yükleme yapıp sıkışma miktarı ölçülerek,  $t$  ise bir elemandaki düşey yüklemenin komşu elemanlara etkisi diğer bir deyişleyükün yayılma kapasitesi ölçülerek belirlenebilir.

Bu çalışmada, dairesel plak ve basık küresel kabuğun oturduğu elastik zemin olarak, Vlazov modeli alınacaktır.  $k$  ve  $t$  parametreleri ise yaklaşım fonksiyonu (1.9) daki exponansiyel olan bağıntı kullanılarak (1.14) den elde edilen

$$k = \frac{E_o}{H(1-\nu_o^2)} \Psi_k \quad (1.15)$$

$$t = \frac{E_o \cdot H}{4(1+\nu_o)} \Psi_t$$

değerleri alınacaktır.

Burada:

$$\Psi_k = \frac{\gamma H}{2R} \frac{[ \sin h \frac{\gamma H}{R} \cos \frac{\gamma H}{R} + \frac{\gamma H}{R} ]}{\sin h^2 \frac{\gamma H}{R}} \quad (1.16)$$

$$\Psi_t = \frac{3R}{2\gamma H} \frac{[ \sin h \frac{\gamma H}{R} \cos \frac{\gamma H}{R} - \frac{\gamma H}{R} ]}{\sin h^2 \frac{\gamma H}{R}}$$

dir.

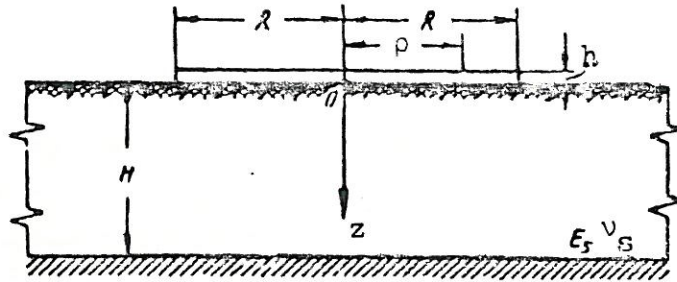
Plak ve kabuğun rölâtif yer değistirmeleri elastik zeminin çökmesi yanında çok az olduğundan plak ve kabuk rijit cisim gibi kabul edilip üniform taban basıncı elde edilebilir. Tabanı küresel kabuk biçiminde olan silindirik hazne problemi bu varsayıma göre kuvvet metodu kullanılarak çözülmüştür [2]. Ayrıca plak için ise Winkler (tek parametrelî zemin) ve Vlazov (iki parametrelî zemin) zeminine oturan plağın ince, elastik olması halinde temel çözümlerle çözülmüş olup kenar yüklemeler yapılarak bazı sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu çözümlerden yararlanarak tabanı plak olan silindirik hazne problemi yine kuvvet yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

## BÖLÜM 2

### ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAK

#### 2.1. Temel Denklemler

Bu bölümde elastisite modülü  $E_s$ , poisson oranı  $\nu_s$  ve tabaka kalınlığı  $H$  olan iki karakteristikli tek tabakalı elastik temel üzerinde bir dairesel plak problemi gözönüne alınacaktır. Dış yükler şekil 2.1 deki gibi plak merkezine göre simetrik alındığından, plakta aksenal simetrik deformasyonlar meydana gelir.



Şekil 2.1. Elastik zemine oturan dairesel plak

Tek tabakalı elastik temel üzerine oturan dairesel plak diferansiyel denklemi:

$$D \nabla^2 \nabla^2 W - 2t \nabla^2 W + kW = p \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada:

W: Plagın ve elastik temelin düşey deplasmanı,

p: Düşey doğrultuda plağa etkiyen aksenal simetrik dış yük,



$\nabla_{\rho}^2$ :  $\rho$  değişkenine göre Laplasiyen operatörü,  
 D: Plağın eğilme rijitliği,  
 t, k: Elastik zemin özelliklerine bağlı katsayılar,  
 ( $\theta, \rho$ ): Plak düzleminde polar koordinatlardır.

t=0 özeldurumda; ikinci terim sıfır olacağından  
 (2.1) denklemini; lineer elastik Winkler temeline oturan  
 plak diferansiyel denklemine dönüşür.

Sistem aksenal simetrik olduğundan, deplasmanlar  $\theta$   
 açısından bağımsızdır. Buna göre Laplasiyen operatörü de  
 $\theta$  açısından bağımsız olup sadece  $\rho$  değişkenine bağlıdır.

Bu durumda Laplasiyen operatörü:

$$\nabla_{\rho}^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Plağın eğilme rijitliği ise:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.3)$$

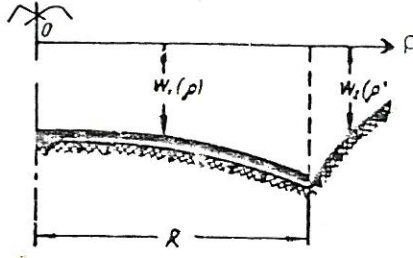
dir. Burada:

E: Plak malzemesinin elastisite modülü

h: Plak kalınlığı,

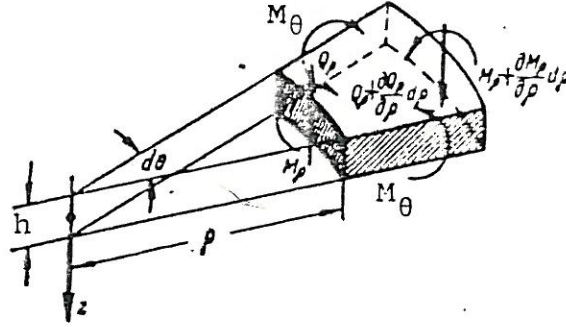
$\nu$ : Plak malzemesinin poisson oranıdır.

Eksenal simetrik eğilme durumunda (şekil 2.2), şekil  
 2.3)  $\rho$ =sabit silindirik plak kesitinde radyal eğilme  
 momenti  $M_{\rho}$  ve kesme kuvveti  $Q_{\rho}$  ile  $\theta$ =sabit radyal kesitte  
 sadece  $M_{\theta}$  eğilme momenti etkileri vardır.



Şekil 2.2. Elastik temeldeki çökmeler.

Şekil (2.2) de,  $W_1(\rho)$  plak ve elastik temelin  $\rho \leq R$  bölgesindeki düşey deplasmanı,  $W_2(\rho)$  elastik temelin  $\rho > R$  bölgesindeki düşey deplasmandır.



Şekil 2.3. Plak kesitinde meydana gelen tesirler.

Eksenel simetrik durumda dairesel plakta meydana gelen  $M_\rho$ ,  $M_\theta$ ,  $Q_\rho$  kesit tesirleri  $\rho$  değişkenine bağlı olarak aşağıdaki bağıntılarla elde edilebilirler.

$$M_\rho = -D \left( \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right) = -D \left[ \nabla_\rho^2 W - \frac{1-\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right]$$

$$M_\theta = -D \left( \nu \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right) = -D \left[ \nu \nabla_\rho^2 W + \frac{1-\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right] \quad (2.4)$$

$$Q_\rho = -D \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right) = -D \frac{d}{d\rho} \nabla_\rho^2 W$$

Plakın eğilmesi sırasında elastik temelde de eğilme olacağı açıktır. Bu nedenle t elastik zemin parametresine bağlı olarak ilave kesme kuvveti terimide gözönüne alınmalıdır. Buna göre

$\rho \leq R$  bölgesinde:

$$N_{\rho} = -D \frac{d}{d\rho} \nabla^2 W + 2t \frac{dW}{d\rho} \quad (2.5)$$

şeklinde genelleştirilmiş kesme kuvveti tanımlanabilir. Burada, birinci terim (2.4) denklemindeki plakta oluşan  $Q_{\rho}$  kesme kuvveti, ikinci terim ise plağın eğilmesiyle elastik temelde oluşan kesme kuvveti terimidir.

İkinci terimi elastik Winkler zeminiyle karşılaştıracak olursak;  $k$  elastik Winkler zemininin çökmesi sırasındaki yay katsayısı,  $t$  elastik zeminin dönmesi sırasındaki yay katsayısı olarak düşünülebilir.  $t=0$  özel durumunda ise sistem, elastik Winkler temeline oturan plak problemine dönüşür.

$\rho > R$  bölgesinde birinci terim düşeceğinden, sadece elastik temelde:

$$S_{\rho} = 2t \frac{dW}{d\rho} \quad (2.6)$$

şeklinde kesme kuvveti terimi meydana gelir.

$\rho=R$  noktasında kesme kuvvetlerinin eşitliğinden ( $N_{\rho} = S_{\rho}$ ), aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$-D \frac{d}{d\rho} \nabla^2 W + 2t \frac{dW_1}{d\rho} = 2t \frac{dW_2}{d\rho} \quad (2.7)$$

(2.7) denkleminde

$$-D \frac{d}{d\rho} \nabla^2 W = 2t \left( \frac{dW_2}{d\rho} - \frac{dW_1}{d\rho} \right) \quad (2.8)$$

yazılabilir. (2.4) ve (2.8) den ise

$$Q_{\rho}(R) = 2t \left( \frac{dW_2}{d\rho} - \frac{dW_1}{d\rho} \right) \quad (2.9)$$

olarak plak sınırındaki kesme kuvveti elde edilir. plak sınırındaki bu değer:

$$Q^{\phi} = Q_{\rho}(R) \quad (2.10)$$

fiktif mesnet reaksiyonu olarak isimlendirilebilir.

## 2.2 Elastik Temel Üzerine Oturan Dairesel Plak Diferansiyel Denkleminin Genel Çözümü

$\rho$  koordinatına bağlı olarak;

$$\xi = \rho / L_0 \quad (2.11)$$

şeklinde boyutsuz koordinat tanımlayalım. Burada;  $L_0$  karakteristik uzunluk anlamında olup

$$L_0 = \sqrt[4]{D/k} \quad (2.12)$$

bağıntısıyla elde edilebilir.

Boyutsuz  $\xi$  koordinatına göre (2.1) diferansiyel denklemi tekrar yazılırsa:

$$\nabla_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 W - 2r_0^2 \nabla_{\xi}^2 W + W = \frac{\rho L_0^4}{D} \quad (2.13)$$

bağıntısı elde edilir.

Burada :

$$r_0^2 = t \cdot L_0^2 / D \quad (2.14)$$

dir.  $\xi$  koordinatına göre Laplasiyen operatörü ise

$$\nabla_{\xi}^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \quad (2.15)$$

dir. (2.13) denkleminin homojen ve özel çözümleri



aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$p=0$  (yüksüz) durumu için (2.13) denklemi:

$$\nabla_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 W - 2r_0^2 \nabla_{\xi}^2 W + W = 0 \quad (2.16)$$

şeklinde bir homojen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü için,  $\lambda$  daha sonra belirlenecek bir parametre olmak üzere [3]:

$$\nabla_{\xi}^2 W = -\lambda^2 W \quad (2.17)$$

bağıntısı tanımlanarak her iki yanın Laplasiyeni alınırsa

$$\nabla_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 W = \lambda^4 W \quad (2.18)$$

elde edilir. Bu son iki denklem (2.16) denkleminde yerine konulduğunda:

$$\lambda^4 + 2r_0^2 \lambda^2 + 1 = 0 \quad (2.19)$$

şeklinde karakteristik denklem elde edilir. Dördüncü dereceden olan bu denklemin çözümü ise

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp \sqrt{-r_0^2 \mp \sqrt{r_0^4 - 1}} \quad (2.20)$$

dir. Zeminler için sık karşılaşılan durumlarda

$$0 \leq r_0^2 < 1 \quad (2.21)$$

aralığında alınabilir.  $r_0^2 = 0$  limit durumunda (2.14) denkleminde  $t=0$  olacağından sistem elastik Winkler temelinde oturan dairesel plak problemine dönüşmüş olur. Bu nedenle (2.16) denklemi  $0 < r_0^2 < 1$  aralığı için çözülecektir.

$0 < r_0^2 < 1$  için (2.20) denklemi:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-r_0^2 \pm i \sqrt{1-r_0^4}} \quad (2.22)$$

şeklinde karmaşık sayılarla ifade edilebilir.

$$r_0^2 = -\cos 2\varphi, \quad \sqrt{1-r_0^4} = \sin 2\varphi \quad (2.23)$$

şeklinde trigonometrik fonksiyonlarını tanımlayarak, (2.22) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\cos 2\varphi \pm i \sin 2\varphi} = \pm \sqrt{e^{\pm 2i\varphi}} \quad (2.24)$$

Buradan  $\pm \sqrt{e^{\pm 2i\varphi}} = \pm e^{\pm i\varphi}$  olarak sadeleştikten sonra (2.24) denklemini

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm e^{\pm i\varphi} = \pm (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \quad (2.25)$$

şeklini alır. (2.23) bağıntısından  $\varphi$  parametresi

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[ \pi - \arctg \frac{(1-r_0^4)}{r_0^2} \right] \quad (2.26)$$

olarak elde edilebilir.

Sonuç olarak (2.13) diferansiyel denkleminin  $0 < r_0^2 < 1$  aralığı için genel çözümü:

$$W = A_1 J_0(\xi e^{i\varphi}) + A_2 J_0(\xi e^{-i\varphi}) + A_3 H_0^{(1)}(\xi e^{i\varphi}) + A_4 H_0^{(2)}(\xi e^{-i\varphi}) + W_p \quad (2.27)$$

şeklindedir.

Burada  $A_1, A_2, A_3, A_4$  integrasyon sabitleri,  $J_0$  birinci çeşit sıfırinci dereceden Bessel fonksiyonu  $H_0^{(1)}$  ve  $H_0^{(2)}$  sırasıyla birinci ve ikinci çeşit sıfırinci dereceden Hankel fonksiyonları,  $W_p$  ise diferansiyel denklemin özel çözümüdür. (2.27) deki fonksiyonlar tamamen karmaşıktır. Buna karşılık çözümün gerçel olabilmesi için  $A_1, A_2, A_3, A_4$  integral sabitleri de

karmaşık olmalıdır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} J_0(\xi e^{\pm i\varphi}) &= u_0(\xi) \pm i v_0(\xi), & u_0(\xi) &= \text{Re. } J_0(\xi e^{i\varphi}) \\ & & v_0(\xi) &= \text{Im. } J_0(\xi e^{i\varphi}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$H_0^{(1)}(\xi e^{i\varphi}) = f_0(\xi) + i g_0(\xi), \quad f_0(\xi) = \text{Re. } H_0^{(1)}(\xi e^{i\varphi})$$

$$H_0^{(2)}(\xi e^{-i\varphi}) = f_0(\xi) - i g_0(\xi), \quad g_0(\xi) = \text{Im. } H_0^{(1)}(\xi e^{i\varphi})$$

şeklinde argümanı,  $\xi$  olan  $u_0(\xi)$ ,  $v_0(\xi)$ ,  $f_0(\xi)$ ,  $g_0(\xi)$  gerçel fonksiyonları tanımlanırsa, genel çözüm ise bu fonksiyonların, (2.27) ve (2.28) bağıntılarından elde edilen  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  gerçel integral sabitleriyle çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W = c_1 u_0(\xi) + c_2 v_0(\xi) + c_3 f_0(\xi) + c_4 g_0(\xi) + W_p \quad (2.29)$$

Elde edilen bu fonksiyon sadece plak bölgesindeki ( $\rho \leq R$ ) çözüme karşı gelir. Plakın dışında, ( $\rho > R$ ) bölgesindeki çökmeleri bulabilmek için  $\xi$  koordinatına bağlı:

$$\nabla_{\xi}^2 W_2 + \alpha_0^2 W_2 = 0 \quad (2.30)$$

diferansiyel denkleminin çözümü gerekir [2].

Burada;  $W_2$  plak bölgesinin dışındaki çökme fonksiyonu,

$$\alpha_0^2 = \alpha^2 L_0^2 \quad (2.31)$$

$$\alpha^2 = k/2t$$

dir. (2.30) diferansiyel denkleminin genel çözümü :

$$W_2 = c_5 I_0(\alpha_0 \xi) + c_6 K_0(\alpha_0 \xi) \quad (2.32)$$

şeklinde Bessel fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilir. Burada  $c_5$ ,  $c_6$  integral sabitleri,  $I_0$  ve  $K_0$  sıfırıncı



dereceden birinci ve ikinci çeşit Bessel fonksiyonlarıdır [4].

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  integral sabitleri 6 adet bağımsız sınır koşulları ve süreklilik koşulundan elde edilirler.

Genel olarak sınır koşulları şöyle sıralanabilirler:

$$\rho=0 \quad (\xi=0) \text{ da a) } \frac{dW_1}{d\rho} = 0 \quad (2.33)$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} Q_\rho \cdot \rho \cdot d\theta = 0$$

$$\rho=R \quad (\xi=\frac{R}{L_0}) \text{ de c) } M_\rho = 0$$

$$\text{d) } Q_\rho = 2t \left( \frac{dW_2}{d\rho} - \frac{dW_1}{d\rho} \right) \quad (2.34)$$

$$\text{e) } W_1(R) = W_2(R) \text{ (süreklilik koşulu)}$$

$$\rho \rightarrow \infty \quad \text{f) } W_2(\rho) = 0 \quad (2.35)$$

(2.33) ifadesindeki koşullar plak merkezindeki eğimin ve kesme kuvveti etkisinin sıfır olduğunu ifade eder. Bu şartlardan  $c_3 = c_4 = 0$  olarak belirlenir.

(2.34, b) sınır koşulu plağın serbes kenarının oturması sırasında temelini gösterdiği reaksiyondur. (2.35) sınır koşulunda,  $\rho$  sonsuza giderken düşey deplesman sıfırdır. Bu koşuldan  $c_5 = 0$  olarak belirlenir. Diğer integral sabitleri ( $c_1, c_2, c_6$ )  $\rho=R$  sınır koşullarından elde edilebilir.

Sonuç olarak yer değiştirme fonksiyonları plak bölgesinde ve plağın dışındaki bölgede sırasıyla:



$$W_1 = c_1 \cdot u_0(\xi) + c_2 \cdot v_0(\xi) + W_p$$

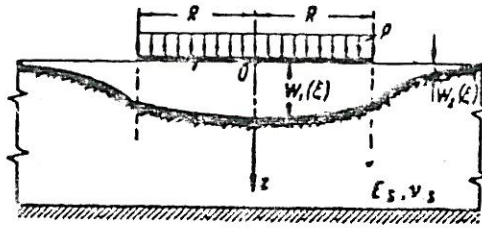
(2.36)

$$W_2 = c_0 \cdot K_0(\alpha_0 \xi)$$

bağıntılarıyla elde edilebilirler.

### 2.3 Uygulamalar

#### 2.3 a) Üniform Yayılı Yük Durumu



Şekil 2.4. Üniform yayılı yük durumu.

$p=R$  deki sınır koşulları ve süreklilik koşullarından  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_0$  sabitleri belirlenerek (2.38) deki yer değiştirme fonksiyonlarının ifadeler elde edilir. Bu fonksiyonlar yardımıyla da (2.4) denklemlerindeki  $M_p$ ,  $M_\theta$ ,  $Q_p$  kesit tesirleri belirlenmiş olur.

Sınır koşulları ve süreklilik koşulları:

$$p=R \quad \left(\xi = \frac{R}{L_0}\right) \text{ de a) } M_p = 0$$

$$b) \quad Q_p = 2t \left( \frac{dW_2}{dp} - \frac{dW_1}{dp} \right) \quad (2.37)$$

$$c) \quad W_1(R) = W_2(R)$$

dır.

(2.4) deki  $M_p$  ve  $Q_p$  denklemleri, (2.37 a, b) denklemlerinde  $\xi$  değişgenine bağlı olarak yerlerine

konulduğunda

$$\nabla_{\xi}^2 W_1 - \frac{1-\nu}{\xi} \frac{dW_1}{d\xi} = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{d\xi} \nabla_{\xi}^2 W_1 = - \frac{2tL^2}{D} \left( \frac{dW_2}{d\xi} - \frac{dW_1}{d\xi} \right)$$

bağıntıları elde edilir. (2.36) deki yer değiştirme fonksiyonları, (2.38) denklemlerinde gerekli türevleri alınıp yerlerine konursa

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0 \quad (2.39)$$

$$n_1 c_1 + n_2 c_2 = G_p$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle de  $c_1$  ve  $c_2$  integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$c_1 = \frac{-G_p m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} \quad (2.40)$$

$$c_2 = \frac{+G_p m_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}$$

Burada:

$$m_1 = M_1(\xi_R) - (1-\nu)\bar{M}_1(\xi_R)$$

$$m_2 = M_2(\xi_R) - (1-\nu)\bar{M}_2(\xi_R) \quad (2.41)$$

$$n_1 = Q_1(\xi_R) + \frac{\theta_1(\xi_R)}{\alpha_0^2} - u_0(\xi_R) \frac{K_1(\alpha_0 \xi_R)}{\alpha_0 K_0(\alpha_0 \xi_R)}$$

$$n_2 = Q_2(\xi_R) + \frac{\theta_2(\xi_R)}{\alpha_0^2} - v_0(\xi_R) \frac{K_1(\alpha_0 \xi_R)}{\alpha_0 K_0(\alpha_0 \xi_R)}$$

$$G = \frac{p}{k} \frac{K_1(\alpha_0 \xi_R)}{\alpha_0 K_0(\alpha_0 \xi_R)} \quad (2.42)$$

$u_0(\xi)$ ,  $v_0(\xi)$ ,  $\theta_1(\xi)$ ,  $\theta_2(\xi)$ ,  $M_1(\xi)$ ,  $M_2(\xi)$ ,  $\bar{M}_1(\xi)$ ,  $\bar{M}_2(\xi)$ ,  $Q_1(\xi)$ ,  $Q_2(\xi)$  fonksiyonlarının seriyeye açılımları:

$$u_0(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \cos 2m\varphi$$

$$v_0(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \sin 2m\varphi$$

$$\theta_1(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \cdot (m+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+1} \cos 2(m+1)\varphi$$

$$\theta_2(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \cdot (m+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+1} \sin 2(m+1)\varphi$$

$$M_1(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \cos 2(m+1)\varphi \quad (2.43)$$

$$M_2(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \sin 2(m+1)\varphi$$

$$\bar{M}_1(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \cdot (m+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \cos 2(m+1)\varphi$$

$$\bar{M}_2(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \cdot (m+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m} \sin 2(m+1)\varphi$$

$$Q_1(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \cdot (m+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+1} \cos 2(m+2)\varphi$$

$$Q_2(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \cdot (m+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+1} \sin 2(m+2)\varphi$$

bağıntılarıyla verilmiştir. Bu bağıntılar  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  ve  $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq -\frac{\pi}{4}$  aralıklarında elde edilebilirler.

$c_0$  integral sabiti ise (2.37) daki süreklilik koşulundan aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_0 = \frac{c_1 \cdot u_0(\xi_R) + c_2 \cdot v_0(\xi_R) + W_p}{K_0(\alpha_0 \xi_R)} \quad (2.44)$$

Burada:

$$\xi_R = R/L_0 \quad (2.45)$$

$$W_p = p/k \quad (2.46)$$

dır.

Tüm bu fonksiyonlar ve  $c$  sabitleri belirlendikten sonra, deplasmanlar, momentler ve kesme kuvveti değerleri,

$$W_1 = c_1 \cdot u_0(\xi) + c_2 \cdot v_0(\xi) + W_p$$

$$\frac{dW_1}{d\rho} = -\frac{1}{L_0} [c_1 \cdot \theta_1(\xi) + c_2 \cdot \theta_2(\xi)]$$

$$M_p = \frac{D}{L_0^2} [c_1 \cdot L_1(\xi) + c_2 \cdot L_2(\xi)] \quad (2.47)$$

$$M_\theta = \frac{D}{L_0^2} [c_1 \cdot \bar{L}_1(\xi) + c_2 \cdot \bar{L}_2(\xi)]$$

$$Q_p = \frac{D}{L_0^3} [c_1 \cdot Q_1(\xi) + c_2 \cdot Q_2(\xi)]$$

bağıntılarıyla elde edilirler.

Burada;  $L_1(\xi)$ ,  $L_2(\xi)$ ,  $\bar{L}_1(\xi)$ ,  $\bar{L}_2(\xi)$  fonksiyonları,  $M_1(\xi)$ ,  $M_2(\xi)$ ,  $\bar{M}_1(\xi)$ ,  $\bar{M}_2(\xi)$  fonksiyonlarına bağlı olarak aşağıdaki gibidir.

$$L_1(\xi) = M_1(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_1(\xi)$$

$$L_2(\xi) = M_2(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_2(\xi)$$

$$\bar{L}_1(\xi) = \nu M_1(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_1(\xi) \quad (2.48)$$

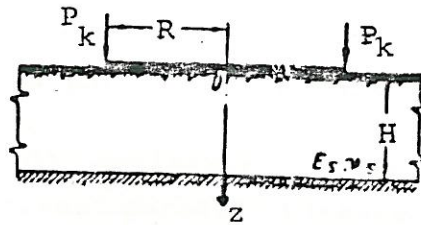
$$\bar{L}_2(\xi) = M_2(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_2(\xi)$$

### 2.3.b) Plak Kenarında Üniform Yayılı Çizgisel Düşey Yük Durumu

P yayılı alan yükü sıfır olduğundan  $W_p$  özel çözüm sıfırdır. Bu nedenle (2.35) denklemlerinden plak bölgesindeki denklem:

$$W_1 = c_1 \cdot u_0(\xi) + c_2 \cdot v_0(\xi) \quad (2.49)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.5. Plak kenarında düşey yük durumu.

Plak bölgesinin dışındaki denklem değişmez.  $W_2$  denklemi aynen yazılabilir.



$$W_2 = c_0 K_0(\alpha_0 \xi) \quad (2.50)$$

sınır şartları:

$$\rho = R \left( \xi = \frac{R}{L_0} \right) \quad \text{sınırında}$$

$$a) M\rho = 0$$

(2.4) denklemlerinde  $M\rho$  denklemi  $\xi$  değişkenine bağlı olarak yazılıp sıfıra eşitlendiğinde:

$$\nabla_{\xi}^2 W_1 - \frac{1-\nu}{\xi} \frac{dW_1}{d\xi} = 0 \quad (2.51)$$

ifadesi bulunur.

$$b) Q_{\rho} = 2t \left( \frac{dW}{d\xi} - \frac{dW}{d\xi} \right) + P \quad (2.52)$$

sınır şartı ile (2.4) denklemlerinden  $Q_{\rho}$  bağıntısı kullanılarak,  $\xi$  koordinatına bağlı;

$$\frac{d}{d\xi} \nabla_{\xi}^2 W_1 = - \frac{2tL_0^2}{D} \left( \frac{dW_2}{d\xi} - \frac{dW_1}{d\xi} \right) - \frac{PL_0^2}{D} \quad (2.53)$$

şeklinde bir denklem elde edilir.

$$c) W_1(R) = W_2(R) \quad \text{sınır koşulundan}$$

$$c_0 = \frac{c_1 \cdot u_0(\xi_R) + c_2 \cdot v_0(\xi_R)}{K_0(\alpha_0 \xi_R)} \quad (2.54)$$

$c_1$  ve  $c_2$  sabitlerine bağlı olarak bulunur.

(2.49), (2.50) deplasman fonksiyonları, (2.51) ve (2.53) bağıntılarında gerekli türevler alınıp yerlerine konursa:

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0$$

$$n_1 c_1 + n_2 c_2 = \bar{G}P_k \quad (2.55)$$

Lineer denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin çözümü olarak integral sabitleri

$$c_1 = \frac{-G_{pk} m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}$$

$$c_2 = \frac{+G_{pk} m_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1} \quad (2.56)$$

olarak bulunur.

Burada:

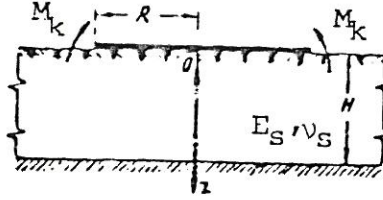
$$G_{pk} = \frac{-PL_o^3}{D} \quad (2.57)$$

dır.

$m_1, m_2, n_1, n_2$  değerleri ise (2.41) bağıntılarından elde edilir.

Deplasmanlar, momentler ve kesme kuvveti değerleri (2.47) denklemlerinden elde edilirler.

2.3. c) Plak Kenarında Üniform Yayılı Çizgisel Moment Durumu



Şekil 2.6. Plak kenarında moment durumu.

$p$  yayılı alan yükü sıfır olduğundan;  $W_p$  özel çözüm sıfırdır. Deplasman fonksiyonları ise bölüm (2.3 b) deki gibidir. Buna göre (2.49) ve (2.50) denklemleri

$$\begin{aligned} W_1 &= c_1 u_0(\xi) + c_2 v_0(\xi) \\ W_2 &= c_3 K_0(\alpha_0 \xi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

şeklinde aynen yazılabilir.

Sınır koşulları:

$$\rho=R \quad (\xi=\xi_R) \text{ sınırında}$$

$$a) M_\rho = M$$

(2.4) denklemlerinden  $M_\rho$  denklemi  $\xi$  değişkenine bağlı olarak yazılıp  $M$  değerine eşitlendiğinde:

$$\nabla_\xi^2 W_1 - \frac{1-\nu}{\xi} \frac{dW_1}{d\xi} = - \frac{ML_0^2}{D} \quad (2.59)$$

bağıntısı elde edilir.

$$b) Q_\rho = 2t \left( \frac{dW}{d\xi} - \frac{dW}{d\xi} \right) \quad (2.60)$$

sınır şartı ile (2.4) denklemlerinden  $Q_\rho$  bağıntısı kullanılarak,  $\xi$  koordinatına bağlı;



$$\frac{d}{d\xi} \nabla^2 W_1 = - \frac{2tL_o^2}{D} \left( \frac{dW_2}{d\xi} - \frac{dW_1}{d\xi} \right) \quad (2.61)$$

bağıntısı elde edilir.

c)  $W_1(R) = W_2(R)$  koşulundan

$$c_o = \frac{c_1 u_o(\xi_R) + 2v_o(\xi_R)}{K_o(\alpha \xi_R)} \quad (2.62)$$

$c_1$  ve  $c_2$  sabitlerine bağlı olarak bulunur.

Bölüm (2.3-b) dekine benzer şekilde (2.56) deplasman fonksiyonları (2.59) ve (2.61) bağıntılarında gerekli türevleri alınıp yerlerine konursa

$$\begin{aligned} m_1 c_1 + m_2 c_2 &= G_m \\ n_1 c_1 + n_2 c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir.

Buradaki  $m_1, m_2, n_1, n_2$  değerleri (2.41) bağıntılarından,  $G_m$  ve  $c_1, c_2$  sabitleri aşağıdaki bağıntılardan elde edilirler.

$$G_m = \frac{ML_o^2}{D} \quad (2.64)$$

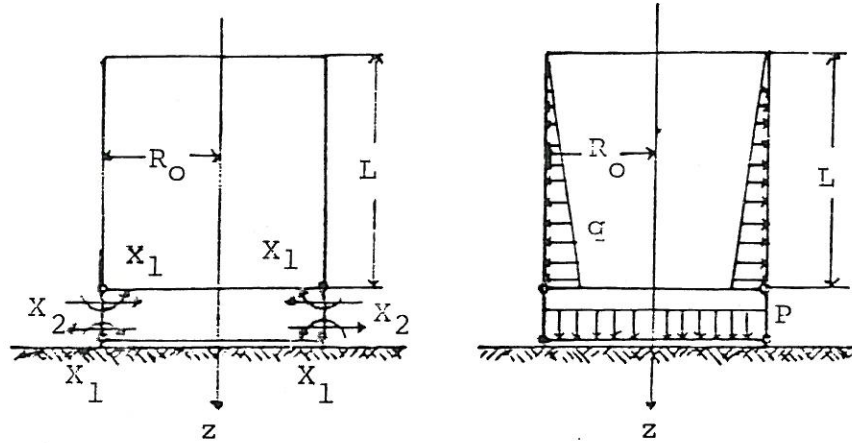
$$c_1 = \frac{n_2 G_m}{m_1 n_2 - m_2 n_1} \quad (2.65)$$

$$c_2 = \frac{-n_1 G_m}{m_1 n_2 - m_2 n_1}$$

Deplasmanlar, momentler ve kesme kuvveti değerleri (2.47) denklemlerinden elde edilirler.

## 2.4 Vlazov Zeminine Oturan Dairesel Plak Tabanlı Silindirik Tankın Kuvvet Yöntemiyle Çözümü

Hiperstatik bilinmeyenler  $X_1$  ve  $X_2$  kuvvetleri olmak üzere izostatik esas sistem Şekil 2.7 daki gibi seçilebilir [5-9].



Şekil 2.7. İzostatik sistem ve yükleme durumları.

Bu durumda sistemin süreklilik denklemleri:

$$(\Delta_{11}^c + \delta_{11}^b) X_1 + (\Delta_{12}^c - \delta_{12}^b) X_2 - \Delta_{1q}^c + \delta_{1p}^b - \delta_{1P}^b = 0$$

(2.66)

$$(\Delta_{21}^c - \delta_{21}^b) X_1 + (\Delta_{22}^c + \delta_{22}^b) X_2 - \Delta_{2q}^c - \delta_{2p}^b + \delta_{2P}^b = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,  $\delta, \Delta$  birim deplasman sabitlerindeki birinci indis, deplasmanın yönünü ve yerini belirtirken, ikinci indis nedenini belirtir. "c" indisi silindire ait terimleri "b" indisi ise plak tabanına ait terimleri gösterir.  $\Delta_{1q}^c, \Delta_{2q}^c, \delta_{1p}^b, \delta_{2p}^b$  p ve q dış yüklerinden meydana gelen yük terimleri,  $\delta_{1P}^b, \delta_{2P}^b$  ise silindirin duvarlarından plağa etkiyen yük terimleridir.

## Birim Deplasmanların Tayini

## I-Plak Taban Kısmı

I-a)  $X_1=1$  Birim Yükleme

Bu yükleme durumu , bölüm 2.3 c)' deki yükleme durumuyla aynı olup,  $M=1$  alınarak (2.64) bağıntısı:

$$G_M = \frac{L_o^2}{D} \quad (2.67)$$

şeklinde yazılabilir. (2.65) bağıntılarından  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri belirlenir. (2.47) bağıntılarından ise:

$$\delta_{11}^b = \frac{dW_1}{d\rho} = -\frac{1}{L_o} [c_1 \cdot \theta_1(\xi) + c_2 \cdot \theta_2(\xi)] \quad (2.68)$$

$$\delta_{21}^b = 0$$

birim deplasman sabitleri elde edilir. Momentten dolayı plakta aksenal uzama olmadığı gözönüne alınarak  $\delta_{21}^b = 0$  alınmıştır. Bunun terside geçerlidir, aksenal çekmeden dolayı plağın ucunda dönme meydana gelmeyeceyi gözönüne alınarakta  $\delta_{12}^b = 0$  alınmıştır.

I-b)  $X_2=1$  Birim Yükleme

Bu yükleme durumunda,  $\delta_{22}^b$  kaynak [9]' dan alınacaktır,  $\delta_{12}^b$  ise yukarıda bahsedildiği gibi sıfır alınacaktır. Buna göre, birim deplasmanlar:

$$\delta_{12}^b = 0$$

$$\delta_{22}^b = \frac{1-\nu}{Eh} R_o \quad (2.69)$$

şeklinde yazılabilir.

## I-c) p Dış Yükleme (Üniform Yayılı Yük Durumu)

Bu yükleme durumu, bölüm 2.3 a) yükleme durumuyla tamamen aynı olup, (2.40), (2.42) ve (2.47) bağıntıları kullanılarak birim deplasmanlar:

$$\delta_{1P}^b = \frac{dW_1}{d\rho}$$

$$\delta_{2P}^b = 0$$
(2.70)

olarak elde edilirler.

## I-d) P Dış Yükleme (Silindir Duvarından Plağa Etkiyen Yük)

Bu yükleme durumu ise, bölüm 2.3 b) yükleme durumuyla tamamen aynıdır.  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri (2.56) dan  $\delta_{1P}^b$  dönmesi (2.47) den alınarak, birim deplasman sabitleri:

$$\delta_{1P}^b = \frac{dW_1}{d\rho}$$

$$\delta_{2P}^b = 0$$
(2.71)

olarak elde edilirler.

## II- Silindirik Tankta Birim Uc Deplasmanlar.

Problemimizde silindirik kabuk ile dairesel plak birleşim noktası incelendiğinden silindirik kabuğun genel çözümüne girilmeyecektir. Sadece dönel simetrik silindirik kabuğun uç deplasmanları çeşitli yükleme durumları için Kaynak [9]'dan alınacaktır.



Eğilme rijitliği:

$$D_c = \frac{E_c h_c^3}{12(1-\nu_c^2)} \quad (2.72)$$

ve karakteristik yüksekliği:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu_c^2)}{R^2 h_c^2}} \quad (2.73)$$

olan silindirik kabuk,  $\lambda L > 5$  için uzun kabuk, aksi durum için kısa kabuk olarak kabul edilebilir.

Burada:

$E_c$ : Silindirik kabuk malzemesinin elastisite modülü,

$\nu_c$ : Silindirik kabuk malzemesinin poisson oranı,

$h_c$ : Silindirik kabuk kalınlığı,

$L$ : Silindirin boyu,

$R$ : Silindirin yarıçapıdır.

Uzun kabukta  $X_1=1$  ve  $X_2=1$  yüklemeleri için birim uç deplasmanlar:

$$\Delta_{11}^c = \frac{1}{D_c \lambda}$$

$$\Delta_{21}^c = \frac{1}{2D_c \lambda^2}$$

$$\Delta_{12}^c = \frac{1}{2D_c \lambda^2} \quad (2.74)$$

$$\Delta_{22}^c = \frac{1}{2D_c \lambda^3}$$

Bağıntılarıyla elde edilebilirler.

Kısa kabukta ise,  $X_1=1$  ve  $X_2=1$  yüklemeleri için birim uç deplasmanlar:

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^c &= \frac{G_4}{D_c \lambda G_2} \\ \Delta_{21}^c &= \frac{G_1}{2D_c \lambda^2 G_2} \\ \Delta_{12}^c &= \frac{G_1}{2D_c \lambda^2 G_2} \\ \Delta_{22}^c &= \frac{G_5}{2D_c \lambda^3 G_2}\end{aligned}\tag{2.75}$$

bağıntılarıyla elde edilebilirler.

Burada:

$$\begin{aligned}G_1 &= \sinh^2 \lambda L + \sin^2 \lambda L \\ G_2 &= \sinh^2 \lambda L - \sin^2 \lambda L \\ G_4 &= \sinh \lambda L \cdot \cosh \lambda L + \sin \lambda L \cdot \cos \lambda L \\ G_5 &= \sinh \lambda L \cdot \cosh \lambda L - \sin \lambda L \cdot \cos \lambda L\end{aligned}\tag{2.76}$$

dir.

$q$  yüklemesinden dolayı silindirik kabukta meydana gelen birim uç deplasmanlar:

$$\begin{aligned}\Delta_{1q}^c &= \frac{\gamma_c LR^2}{E_c h_c} \\ \Delta_{2q}^c &= \frac{\gamma_c R^2}{E_c h_c}\end{aligned}\tag{2.77}$$

bağıntılarıyla elde edilirler.

Burada;  $\gamma_c$  silindirik tanktaki sıvının birim hacim ağırlığıdır.

Silindirik tankın ve dairesel plağın birim uç deplasmanları belirlendikten sonra , (2.66) lineer denklem sistemi çözülerek  $X_1$  ve  $X_2$  bilinmeyenleri:

$$X_1 = \frac{a_{02} b_{12} - b_{02} a_{12}}{a_{21} b_{11} - a_{11} b_{21}} \quad (2.78)$$

$$X_2 = \frac{a_{01} b_{11} - b_{01} a_{11}}{a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}}$$

olarak elde edilirler.

Burada:

$$a_{00} = -\Delta_{1q}^c + \delta_{1p}^b - \delta_{1p}^b$$

$$a_{11} = \Delta_{11}^c + \delta_{11}^b$$

$$a_{22} = \Delta_{12}^c - \delta_{12}^b \quad (2.79)$$

$$b_{00} = -\Delta_{2q}^c - \delta_{2p}^b + \delta_{2p}^b$$

$$b_{11} = \Delta_{21}^c - \delta_{21}^b$$

$$b_{22} = \Delta_{22}^c + \delta_{22}^b$$

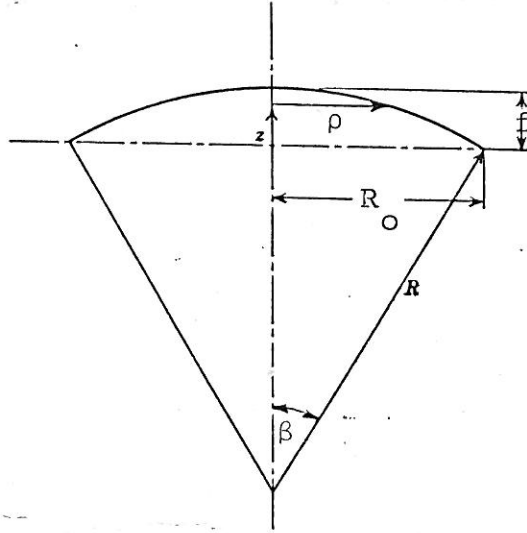
dir.

## BÖLÜM. 3

### ELASTİK TEMEL ÜZERİNE OTURAN BASIK KÜRESEL KABUK

#### 3.1 Basık Küresel Kabuğun Temel Denklemleri

Bir küresel kabuğun eğrilik yarı çapı diğer boyutlarına göre çok büyükse, basık küresel kabuk olarak gözönüne alınabilir. Bu sınırlama çeşitli kaynaklara göre değişebilir. Örneğin,  $f/2R_0 < 1/8$  veya  $R_0/R < 1/2$  için küresel kabuk, basık olarak gözönüne alınabilir (Şekil 3.1) [10].



Şekil 3.1

Bu bölümde, dönel simetrik dış yük altında basık küresel kabuğun eğilmeli hesabı yapılacaktır. Z dış normal kuvvet etkisi altında (dış normalinin pozitif yönünde) (Şekil 3.2), kabuğun geometrik uygunluk şartı:



$$\frac{R}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \phi - \nabla^2 w = 0 \quad (3.1)$$

denklemlerle, radyal yönde denge şartı ise:

$$\frac{1}{R} \nabla^2 \phi + D \nabla^2 \nabla^2 w - Z = 0 \quad (3.2)$$

denklemlerle ifade edilebilir [1].

Burada:

E: Kabuk malzemesinin elastisite modülü,

h: Kabuk kalınlığı,

R: Kabuğu eğrilik yarıçapı,

$w = w(\rho, \theta)$ : Kabuğun dış normalinin pozitif yönündeki radyal yer değiştirme fonksiyonu,

$\phi = \phi(\rho, \theta)$ : Membran gerilme fonksiyonu,

$\rho, \theta$ : polar koordinatlar,

Z: Dönel simetrik dış normal kuvvet (kabuğun dış normalinin pozitif yönünde),

D: Kabuğun eğilme rijitliği,

$\nabla^2$ : İkinci derece diferansiyel operatörüdür.

Kabuğun eğilme rijitliği; malzemenin  $\nu$  poisson oranı, elastisite modülü ve kabuk kalınlığı cinsinden,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.3)$$

olarak hesaplanabilir. İkinci derece diferansiyel operatörü ise;

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.

$F = F(\rho, \theta)$ , aşağıdaki eşitlikleri sağlayan skaler fonksiyon olsun;

$$w = \nabla^2 \nabla^2 F \quad (3.5)$$

$$\phi = \frac{Eh}{R} \nabla^2 F$$

(3.5) denklemlerinden ikincisi, (3.2) denkleminde yerine konursa:

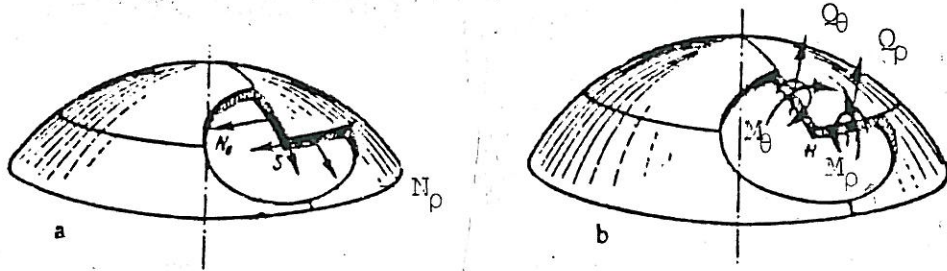
$$\frac{Eh}{R^2} \nabla^2 \nabla^2 F + D \nabla^2 \nabla^2 w - Z = 0 \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir.. (3.5) deki birinci denklem ile (3.6) denklemini kullanılarak:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} w - Z = 0 \quad (3.7)$$

basık küresel kabuğun diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem,  $k = Eh/R^2$  olarak gözönüne alındığında elastik Winkler zeminine oturan dairesel plağın diferansiyel denklemiyle tamamen benzerdir.

Kabukta kesit tesirleri iki grupta incelenebilir (şekil 3.2-a, şekil 3.2-b) [11-15]..



Şekil 3.2

1.) Eğilmesiz deformasyonlara neden olan normal (mambran) kuvvetler  $N_p$ ,  $N_\theta$  ve  $S$  dir. Bu kuvvetler,  $\phi$  gerilme fonksiyonu cinsinden:

$$N_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$N_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \quad (3.8)$$

$$S = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

elde edilebilirler.

2.) Eğilme momentleri  $M_r$ ,  $M_\theta$ , burulma momenti  $H$  ve kesme kuvvetleri  $Q_r$ ,  $Q_\theta$  dir. Burada momentler ve deformasyonlar arasındaki bağıntılar:

$$M_r = -D(\chi_r + \nu \chi_\theta)$$

$$M_\theta = -D(\chi_\theta + \nu \chi_r) \quad (3.9)$$

$$H = D(1-\nu)\gamma$$

şeklinde yazılabilir. Kesme kuvvetleri ise radyal yer değiştirme cinsinden:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 w$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada deformasyonlar:

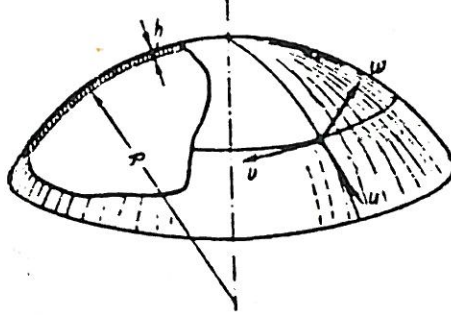
$$\chi_r = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \quad (3.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

yer değiştirme fonksiyonlarına bağlı olarak elde edilebilirler.

Kabuğun  $\rho$ =sabit ve  $\theta$ =sabit noktasındaki  $u(\rho, \theta)$  ve  $v(\rho, \theta)$  teğetsel yer değiştirmeleri, mambran kuvvetlere bağlı olarak elde edilebilirler (şekil 3.3).



Şekil 3.3

Birim şekil değiştirmeler ile mambran kuvvetler arasındaki ilişki:

$$\begin{aligned}
 N_{\rho} &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{\rho} + \nu \epsilon_{\theta}) \\
 N_{\theta} &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\rho}) \\
 S &= \frac{Eh}{2(1-\nu)} \epsilon_{\theta\rho}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilir. Birim şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki ilişki ise:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\rho} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{w}{R} \\
 \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} - \frac{w}{R} \\
 \epsilon_{\theta\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{w}{R}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir.

Gerilme fonksiyonu  $\phi$  ve radyal yer değiştirme fonksiyonları (3.1) ve (3.2) denklemlerinden hesaplandıktan sonra, (3.3) bağıntılarından membran kuvvetler hesaplanır. (3.12) ve (3.13) bağıntılarından ise u ve v teğetsel yer değiştirmeler hesap edilebilir.

Problem aksenal simetrik olduğundan bütün türevler  $\theta$  dan bağımsız olacaktır. Buna göre, Laplasiyen operatörünü gösteren (3.4) denkleminde  $\theta$  ya göre türev terimi düşer.

Mambran kuvvetler (3.8) den :

$$N_p = \frac{1}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho}$$

$$N_\theta = \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} \quad (3.14)$$

$$S = 0$$

(3.9) ve (3.10) dan momentler ile kesme kuvvetleri

$$M_p = -D \left[ \nabla^2 w - \frac{(1-\nu)}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right]$$

$$M_\theta = -D \left[ \nu \nabla^2 w - \frac{(1+\nu)}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right] \quad (3.15)$$

$$H = 0$$

$$Q_p = -D \frac{d}{d\rho} \nabla^2 w$$

$$Q_\theta = 0$$



(3.13) den birim şekil değiştirmeler:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{du}{d\rho} + \frac{w}{R}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{\rho} + \frac{w}{R}$$

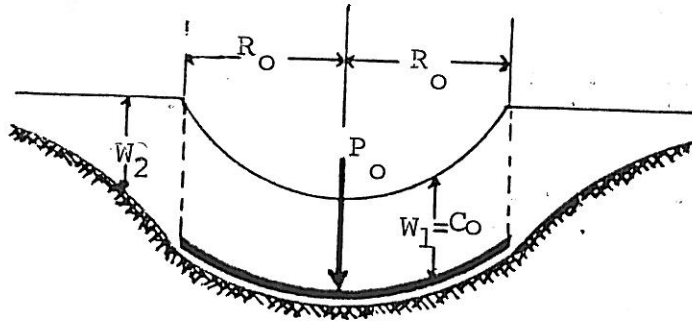
(3.16)

$$\varepsilon_{\theta\rho} = 0$$

şeklinde yazılabilirler.

### 3.2. Elastik Temel Üzerinde Kabuğun Rijit Davranışı Kabulü:

Kabuğun rölatif yer değiştirmesi, elastik zeminin çökmesine göre çok az olduğundan, kabuk rijit bir cisim gibi kabul edilecektir. Buna göre eksensel simetrik  $P_0$  düşey yükü etkisinde temelde  $c_0$  üniform çökme meydana gelecektir. (Şekil 3,4)



Şekil 3,4

$\rho \leq R_0$  bölgelerinde çökme fonksiyonu  $W_1 = c_0$  sabittir.

$\rho > R_0$  bölgesinde ise çökme fonksiyonunun diferansiyel denklemi kaynak [2] den:

$$\frac{d^2 W_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW_2}{d\rho} - \alpha^2 W_2 = 0 \quad (3.17)$$

olarak alınmıştır. Buradaki  $\alpha$  değeri elastik zemin katsayıları cinsinden:

$$\alpha^2 = k/2t \quad (3.18)$$

bağıntısından elde edilir.

(3.17) diferansiyel denkleminin genel çözümü:

$$W_2 = c_1 I_0(\alpha\rho) + c_2 K_0(\alpha\rho) \quad (3.19)$$

şeklinde Bessel fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilir. Burada  $c_1$ ,  $c_2$  integral sabitleri,  $I_0$  ve  $K_0$  sıfırıncı dereceden birinci ve ikinci çeşit Bessel Fonksiyonlarıdır.

$c_1$  ve  $c_2$  integral sabitleri:

$$\rho = R_0 \quad \text{da} \quad W_2 = c_0 \quad (3.20, a)$$

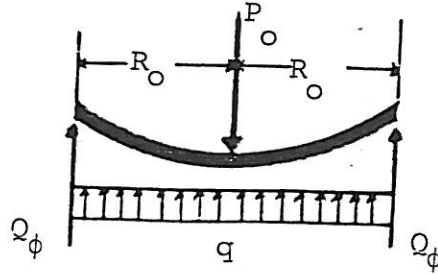
$$\rho \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad W_2 \rightarrow 0 \quad (3.20, b)$$

süreklilik koşulları ve asimptotiksınır koşullarından elde edilirler. (3.20. b) koşulundan;  $c_1 = 0$  bulunur.

(3.20. a) kosulu ile (3.19) bağıntısından:

$$c_2 = \frac{c_0}{K_0(\alpha R_0)} \quad (3.21)$$

$c_2$  integral sabiti belirlenmiş olur.  $c_0$  değeri ise sistemin (kabuk + elastik temel) denge şartından elde edilir. (Şekil 3.5)



Şekil 3.5

$W_1 = c_0$  sabit olduğundan  $Q^\phi$  fiktif mesnet reaksiyonu (2.10) bağıntısından:

$$Q^\phi = 2t \left( \frac{dW_2}{d\rho} \right)_{\rho=R_0} \quad (3.22)$$

şeklinde, sadece  $W_2$  çökmesine bağlı olarak yazılabilir.  $c_1 = 0$  gözönünde tutularak (3.22) denklemi; (3.18), (3.19) ve (3.21) denklemleri kullanılarak

$$Q^\phi = c_0 k \frac{K_1(\alpha R_0)}{\alpha K_0(\alpha R_0)} \quad (3.23)$$

şeklinde  $c_0$  bilinmeyenine bağlı olarak elde edilir. Ayrıca  $q$  üniform taban basıncı ise, Winkler teorisinden:

$$q = c_0 k \quad (3.24)$$

dir. Sistemin denge denklemi (Şekil 3.5):

$$q\pi R_0^2 + Q^\phi 2\pi R_0 = P_0 \quad (3.25)$$

şeklinde yazılabilir. (3.23) ve (3.24) bağıntıları, (3.25) denkleminde yerlerine konulduğunda  $c_0$  bilinmeyeni:

$$c_o = \frac{P_o}{\pi R_o^2 \left[ 1 + 2 \frac{K_1(\alpha R_o)}{\alpha R_o K_o(\alpha R_o)} \right]} \quad (3.26)$$

olarak belirlenir. (3.23) ve (3.24) deki mesnet tepkileri ise; (3.26) ifadesi gözönünde tutularak:

$$Q^\phi = \frac{P_o}{\pi R_o \left[ 1 + 2 \frac{K_1(\alpha R_o)}{\alpha R_o K_o(\alpha R_o)} \right]} \cdot \frac{K_1(\alpha R_o)}{\alpha R_o K_o(\alpha R_o)} \quad (3.27)$$

$$q = \frac{P_o}{\pi R_o^2 \left[ 1 + 2 \frac{K_1(\alpha R_o)}{\alpha R_o K_o(\alpha R_o)} \right]}$$

bağıntılarıyla belirlenir.

Bu bağıntılar, rijit bir cisim gibi davrandığı kabul edilen yarıçapı  $R$  olan dairesel plak içinde geçerlidir.

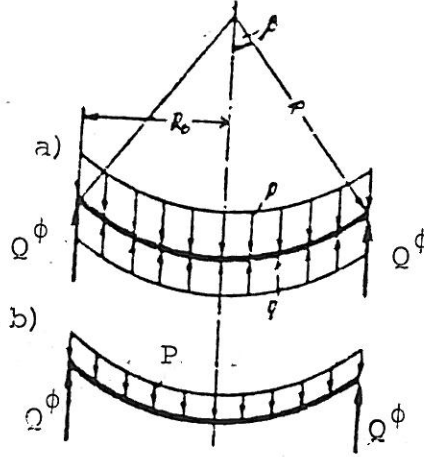
### 3.3. Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümleri

Elastik temele oturan basık küresel kabuk verilen dış yük ( $p$ ) ve temel reaksiyonları ( $Q^\phi$  ve  $q$ ) etkisinde dengededir (Şekil 3.6.a).

Kabuk rijit bir cisim gibi kabul edildiğinden  $p$  üniform yayılı dış yük altında,  $q$  üniform yayılı taban basıncı meydana gelir. Kabuğun birim alanına gelen toplam üniform yayılı yük. (Şekil 3.6.b)

$$p^* = p - q \quad (3.28)$$

dir.



Şekil 3.6

(3.7) denklemi  $Z$  dış yük yerine  $p^*$  yükü gözönüne alındığında:

$$D\nabla^2\nabla^2W + \frac{Eh}{R^2}W - p^* = 0 \quad (3.29)$$

şeklinde elastik temel etkilerininide içeren diferansiyel denklem elde edilir. Kabuğun geometrik uygunluk şartından elde edilen (3.1) denklemi yüklemekten bağımsız olduğundan aynen geçerlidir.

Elastik temel  $W_1 = c_0$  kadar çöktükten sonra, (3.29) daki  $W$ ; kabuğun rölatif yer değiştirme fonksiyonudur. (3.29) denkleminin boyutsuz koordinattaki ifadesi:

$$\nabla_{\xi}^2\nabla_{\xi}^2W + W = \frac{p^* R^2}{Eh} \quad (3.30)$$

şeklindedir. Burada:

$$\xi = \rho/L_0 \quad (3.31)$$

$$L_0 = (DR^2/Eh)^{1/4} \quad (3.32)$$



$$\nabla_{\xi}^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \quad (3.33)$$

dir. (3.1) denklemi ise, boyutsuz koordinatta:

$$\nabla_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 \Phi = \frac{EhL^2}{R} \nabla_{\xi}^2 W \quad (3.34)$$

şeklindedir.

(3.30) denkleminin homojen çözümü için,  $\lambda$  daha sonra belirlenecek bir parametre olmak üzere:

$$\nabla_{\xi}^2 W = -\lambda^2 W \quad (3.35)$$

bağıntısı tanımlanır ve her iki yanın Laplasiyeni alınırsa

$$\nabla_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 W = \lambda^4 W \quad (3.36)$$

bağıntısı elde edilir. Bu son iki denklem (3.30) denkleminde yerlerine konulup sifıra eşitlendiğinde

$$\lambda^4 + 1 = 0 \quad (3.37)$$

şeklinde karakteristik denklem elde edilir. Dördüncü dereceden olan bu denklemin çözümü ise;

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\pm i} \quad (3.38)$$

dir. Sonuç olarak (3.30) diferansiyel denklemin homojen çözümü:

$$W_h = A_1 J_0(\xi\sqrt{i}) + A_2 J_0(\xi\sqrt{-i}) + A_3 H_0^{(1)}(\xi\sqrt{i}) + A_4 H_0^{(2)}(\xi\sqrt{-i}) \quad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada  $A_1, A_2, A_3, A_4$  integral sabitleri,  $J_0$  birinci cesit sıfırıncı dereceden Bessel Fonksiyonu  $H_0^{(1)}$  ve  $H_0^{(2)}$

birinci ve ikinci çeşit sıfırıncı dereceden Hankel Fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların tümü karmaşıktır. Buna karşılık, çözümün gerçel olabilmesi için  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , integral sabitleride karmaşık olmalıdır. Bu yüzden; (2.29) bağıntısına benzer şekilde:

$$\begin{aligned} u_0(\xi) &= \operatorname{Re} J_0(\xi \sqrt{-i}) \\ v_0(\xi) &= \operatorname{Im} J_0(\xi \sqrt{-i}) \\ f_0(\xi) &= \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\xi \sqrt{-i}) \\ g_0(\xi) &= \operatorname{Im} H_0^{(2)}(\xi \sqrt{-i}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

argümanı  $\xi$  olan  $u_0(\xi)$ ,  $v_0(\xi)$ ,  $f_0(\xi)$   $g_0(\xi)$  gerçel fonksiyonları tanımlanabilir. Bu fonksiyonlar bilinen Thomson fonksiyonlarıdır.

Genel çözüm ise bu fonksiyonların, (3.39) ve (3.40) bağıntılarından elde edilen  $c_1, c_2, c_3, c_4$  gerçel integral sabitleriyle çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W = c_1 u_0(\xi) + c_2 v_0(\xi) + c_3 f_0(\xi) + c_4 g_0(\xi) + W_p \quad (3.41)$$

Burada  $W_p$  özel çözüm  $p^* =$  sabit için

$$W_p = \frac{p^* R^2}{Eh} \quad (3.42)$$

bağıntısıyla elde edilir.

(2.23) bağıntısı ile (3.38) bağıntısı arasındaki fark  $r_0^2 = 0$  durumundan meydana gelmiştir.  $r_0^2 = 0$  için ise; (2.24) bağıntısından  $\phi = 45^\circ$  olarak bulunur. Bu özel durumdan:

$$\nabla^2 u_0 = v_0, \quad \nabla^2 v_0 = -u_0, \quad \nabla^2 f_0 = g_0, \quad \nabla^2 g_0 = -f_0 \quad (3.43)$$

bağıntıları elde edilir.

$c_1, c_2, c_3$  ve  $c_4$  integral sabitleri aşağıdaki sınır koşulları elde edilebilirler.

$$\begin{aligned} \rho=0 \quad (\xi=0) \text{ da} \quad & \text{a) } \frac{dW}{d\rho} = 0 \\ & \text{b) } \int_0^{2\pi} Q_\rho \rho d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \rho=R \quad \left(\xi = \frac{R}{L_0}\right) \text{ de} \quad & \text{a) } M_\rho = 0 \\ & \text{b) } Q_\rho = -Q^\phi \cos\beta \end{aligned} \quad (3.45)$$

(3.44) sınır koşullarından  $C_3 = C_4 = 0$  olarak belirlendikten sonra, (3.41) denklemi, (3.42) bağıntısındaki özel çözüme gözönüne alındığında:

$$W = c_1 u_0(\xi) + c_2 v_0(\xi) + \frac{p^* R^2}{Eh} \quad (3.46)$$

şeklinde yazılabilir. (3.15) denklemleri ve eğim; (3.43) ve (3.46) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilirler:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\rho} &= \frac{1}{L_0} [c_1 u_0'(\xi) + c_2 v_0'(\xi)] \\ M_\rho &= -\frac{D}{L_0^2} \left\{ c_1 \left[ v_0(\xi) - (1-\nu) \frac{u_0'(\xi)}{\xi} \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left[ -u_0(\xi) - (1-\nu) \frac{v_0'(\xi)}{\xi} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= -\frac{D}{L_0^2} \left\{ c_1 \left[ \nu v_0(\xi) + (1-\nu) \frac{u_0'(\xi)}{\xi} \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left[ -\nu u_0(\xi) + (1-\nu) \frac{v_0'(\xi)}{\xi} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$Q_p = - \frac{D}{l_0^3} [c_1 v_0'(\xi) - c_2 u_0'(\xi)]$$

(3.46) da elde edilen yer değiştirme fonksiyonu, (3.34) diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda gerilme fonksiyonu elde edilir. Buna göre (3.34) diferansiyel denklemi:

$$\nabla_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 \Phi = \frac{EhL^2}{R} \nabla_{\xi}^2 W \quad (3.48)$$

ve genel çözümü:

$$\Phi = \frac{EhL^2}{R} (\phi_h + \phi_p) \quad (3.49)$$

şeklindedir.

Burada  $\phi_h$ , homojen çözüm ve  $\phi_p$ , özel çözümdür. Sistem aksenal simetrik olduğundan homojen çözüm:

$$\phi_h = c_5 + c_6 \xi^2 + c_7 \xi^2 \ln \xi + c_8 \ln \xi \quad (3.50)$$

olarak elde edilir.

Özel çözüm ise:

$$\phi_p = - [c_1 v_0(\xi) - c_2 u_0(\xi)] + \frac{p^* R^2}{Eh} \frac{\xi^2}{4} \quad (3.51)$$

olarak elde edilir. (3.49) denklemi ise, (3.50) ve (3.51) denklemleri kullanılarak:

$$\Phi = \frac{EhL^2}{R} [-c_1 v_0(\xi) + c_2 u_0(\xi) + c_5 + c_6 \xi^2 + c_7 \xi^2 \ln \xi + c_8 \ln \xi + \frac{p^* R^2}{Eh} \frac{\xi^2}{4}] \quad (3.52)$$

şeklinde belirlenmiş olur.

Burada  $c_1, c_2, c_5, c_6, c_7, c_8$  integral sabitleridir.  $c_1$  ve  $c_2$  kabuğun eğilmeli durumuna ait sabitlerdir. (3.45) koşullarından elde edilebilir.  $c_5, c_6, c_7, c_8$  kabuğun membran durumuna ait sabitlerdir.  $c_5$  kabuğun gerilme ve şekil değiştirmelerine etkili olmadığından ihmal edilebilir. Logaritmik terimlerde çok küçük olduğundan ihmal edilebilir.

Buna göre  $c_7 = c_8 = 0$  alınabilir. Sonuç olarak (3.52) den gerilme fonksiyonu:

$$\Phi = \frac{EhL^2}{R} [-c_1 v_0'(\xi) + c_2 u_0'(\xi) + c_6 \xi^2 + \frac{p^* R^2 \xi^2}{Eh 4}] \quad (3.65)$$

bağıntısıyla elde edilebilir.

Bu bağıntı (3.14) bağıntılarında yerine konulduğunda membran kuvvetler:

$$N_R = \frac{Eh}{R} \left[ -c_1 \frac{v_0'(\xi)}{\xi} + c_2 \frac{u_0'(\xi)}{\xi} + 2c_6 + \frac{1}{2} \frac{p^* R^2}{Eh} \right] \quad (3.54)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{R} \left\{ c_1 \left[ u_0'(\xi) + \frac{v_0'(\xi)}{\xi} \right] + c_2 \left[ v_0'(\xi) - \frac{u_0'(\xi)}{\xi} \right] + 2c_6 + \frac{1}{2} \frac{p^* R^2}{Eh} \right\}$$

şeklinde elde edilir. Bu kuvvetler belirlendikten sonra (3.12) bağıntılarında yerlerine konularak  $\varepsilon_\rho$  ve  $\varepsilon_\theta$  birim şekil değiştirmeler elde edilerek (3.16) bağıntılarından  $u$  teğetsel yer değiştirme:



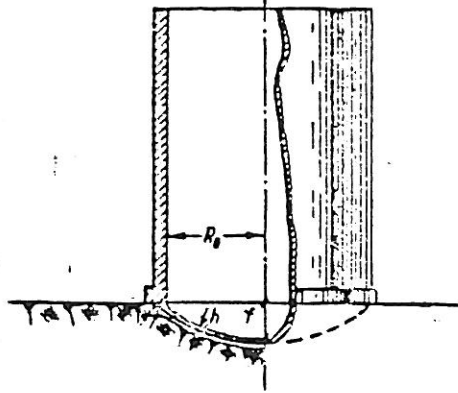
$$u = \frac{L_0}{R} \left\{ -(1+\nu) [-c_1 v_0'(\xi) + c_2 u_0'(\xi)] + 2c_0 (1-\nu) \xi - \frac{(1+\nu)}{2} \frac{p^* R^2}{Eh} \xi \right\} \quad (3.55)$$

olarak elde edilir.

$c_0$  integral sabiti  $\rho=R$  deki membran kuvvet  $N_\rho$  veya teğetsel yerdeğiştirme  $u$  koşullarından elde edilebilir.

#### 3.4. İki Parametrelili Elastik Zemine Oturan Küresel Tabanlı Silindirik Tank

Yarıçapı  $R_0$  et kalınlığı  $h_0$  olan silindirik tank ile buna tabanında birleşik; yarıçapı  $R$ , et kalınlığı  $h$  olan ve iki parametrelili elastik zemine oturan basık küresel kabuk gözönüne alınıyor. (Şekil 3.7) Kabuk kısmı elastik zemin üzerinde rijit bir cisim gibi davrandığı gözönünde tutulacaktır.



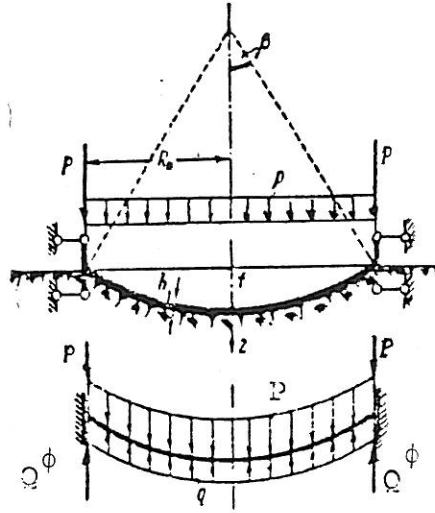
Şekil 3.7

Sistemin statik incelenmesi ise çeşitli sınır koşullarına göre yapılacaktır. Önce küresel kabuk kısmı

ile silindirik tankın birleşim noktalarına göre sınır koşulları yazılarak kuvvet yöntemiyle ortak uç tesirleri bulunacaktır. Daha sonra sistem, silindirik tank ve küresel kabuk olmak üzere, iki kısma ayrılıp çözülecektir.

a) Tüm Uç Deplasmanlar Önlenmiş

Sistem şematik olarak şekil 3.8 deki gibi gözönüne alınabilir. Burada;  $P$  silindirik tankın duvarından gelen dış yük,  $p$  silindirik tanktaki üniform yayılı sıvı basıncı iken  $q$  ve  $Q^\phi$  (3.27) bağıntılarından elde edilen elastik zemin tepkileridir.



Şekil 3.8

Sınır koşulları:

$$p = R_0 \quad (p = R_0 / L_0)$$

$$W = 0$$

$$W' = 0$$

$$u = 0$$

(3.55)

ve (3.47) nin birinci bağıntısı kullanılarak  $c_1$  ve  $c_2$

integral sabitleri;

$$c_1 = \frac{v'_0(\xi_R)}{u_0(\xi_R)v'_0(\xi_R) - u'_0(\xi_R)v_0(\xi_R)} \cdot \frac{p^*R^2}{Eh} \quad (3.57)$$

$$c_2 = \frac{u'_0(\xi_R)}{u_0(\xi_R)v'_0(\xi_R) - v_0(\xi_R)u'_0(\xi_R)} \cdot \frac{p^*R^2}{Eh}$$

şeklinde belirlenirler.  $c_\sigma$  integral sabiti ise  $u=0$  koşulu ve (3.55) bağıntısı kullanılarak;

$$c_\sigma = \frac{(1+\nu)}{4(1-\nu)} \left\{ \frac{2[u'^2(\xi) + v'^2(\xi)]}{\xi_R [u_0(\xi_R)v'_0(\xi_R) - u'_0(\xi_R)v_0(\xi_R)]} + 1 \right\} \frac{p^*R^2}{Eh} \quad (3.58)$$

şeklinde belirlenir.

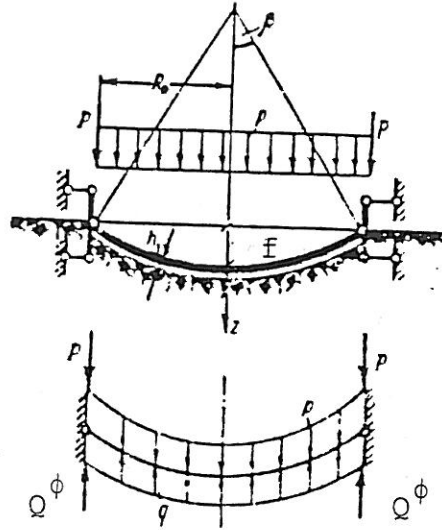
Integral sabitleri belirlendikten sonra kesit tesirleri (3.47) ve (3.54) bağıntılarından elde edilir.

#### b) Sadece Radyal Deplesmanlar Önlenmiş

Sistem Şematik olarak Şekil 3.9 daki gibi gözönüne alınabilir. Bu durumda sınır koşulları:

$$\begin{aligned} \rho=R_0 \quad (\xi=R_0/L_0) \quad & W=0 \\ & M_\rho=0 \\ & u=0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 3.9

$W=0$  ve  $M_p=0$  koşulları ile (3.46) ve (3.47)'nin ikinci bağıntısı kullanılarak  $c_1$  ve  $c_2$  integral sabitleri:

$$c_1 = \frac{-K_1}{K_1 u_0(\xi_R) + K_2 v_0(\xi_R)} \frac{p R^2}{Eh} \quad (3.60)$$

$$c_2 = \frac{-K_2}{K_1 u_0(\xi_R) + K_2 v_0(\xi_R)} \frac{p R^2}{Eh}$$

olarak belirlenir.

Burada:

$$K_1 = u_0(\xi_R) + (1-\nu) \frac{v_0'(\xi_R)}{\xi_R} \quad (3.61)$$

$$K_2 = v_0(\xi_R) - (1-\nu) \frac{u_0'(\xi_R)}{\xi}$$

dir.

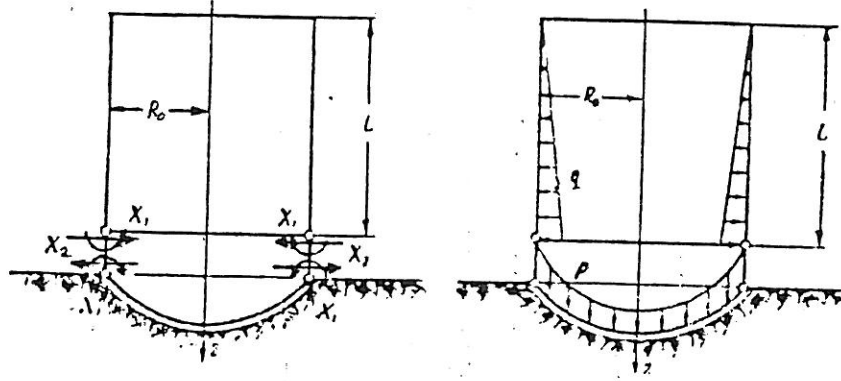
$u=0$  koşulu ve (3.55) bağıntısı kullanılarak  $c_0$  integral sabiti:

$$c_0 = \frac{(1+\nu)}{4(1-\nu)} \left\{ \frac{2}{\xi_R} \left[ -c_1 v'_0(\xi_R) + c_2 u'_0(\xi_R) \right] + \frac{p^* R^2}{Eh} \right\} \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. Kesit tesirleri ise (3.47) ve (3.54) bağıntılarından elde edilirler.

### 3.4.1 Kuvvet Metodu

Hiperstatik bilinmeyenler  $X_1$  ve  $X_2$  kuvvetleri olmak üzere izostatik esas sistem Şekil 3.10 daki gibi seçilebilir.



Şekil 3:10

Sistemin süreklilik denklemleri:

$$(\Delta_{11}^c + \delta_{11}^b) X_1 + (\Delta_{12}^c - \delta_{12}^b) X_2 - \Delta_{1q}^c + \delta_{1p}^b - \delta_{1P}^b = 0$$

$$(\Delta_{21}^c - \delta_{21}^b) X_1 + (\Delta_{22}^c + \delta_{22}^b) X_2 - \Delta_{2q}^c - \delta_{2p}^b + \delta_{2P}^b = 0$$

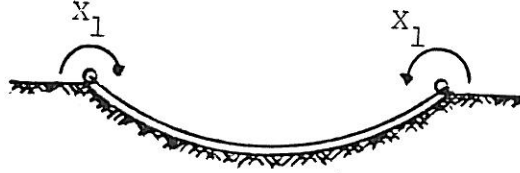
(3.63)

Burada,  $\delta, \Delta$  birim deplasman sabitlerindeki birinci indis, deplasmanın yönünü ve yerini belirtirken, ikinci indis nedenini belirtir. "c" indisi silindire ait terimleri "b" indisi ise küresel kabuk tabanına ait terimleri gösterir.  $\Delta_{1q}^c, \Delta_{2q}^c, \delta_{1p}^b, \delta_{2p}^b$  p ve q dış yüklerinden meydana gelen yük terimleri,  $\delta_{1p}^b, \delta_{2p}^b$  ise silindirin duvarlarından küresel kabuğa etkiyen yük terimleridir.

### 3.4.2 Birim Deplasmanların Tayini

#### 3.4.2 I-Küresel Taban Kısmı

I-a)  $X_1=1$  Birim Yükleme



Şekil 3.11

Kabuğun uç noktasında  $M_p=1$ , diğer uç kuvvetleri sıfır olacağından sınır koşulları:

$$\begin{aligned} p=R_0 \text{ için} \quad M_p &= 1 \\ Q_p &= 0 \\ N_p &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

şeklinde olacaktır.  $M=1$  ve  $Q=0$  sınır koşullarıyla (3.47) bağıntıları kullanılarak  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri;



$$c_1 = \frac{L_D^2}{D} \frac{u'_D(\xi_R)}{K_1 v'_D(\xi_R) - K_2 u'_D(\xi_R)} \quad (3.65)$$

$$c_2 = \frac{L_D^2}{D} \frac{v'_D(\xi_R)}{K_1 v'_D(\xi_R) - K_2 u'_D(\xi_R)}$$

bağıntılarıyla bulunur. Burada  $K_1$  ve  $K_2$  değerleri (3.61) bağıntısından bulunurlar.  $N_P = 0$  koşulu ve (3.54) denklemi kullanılarak,  $c_D$  sabiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$c_D = \frac{1}{2} \left[ c_1 \frac{v'_D(\xi_R)}{\xi_R} - c_2 \frac{u'_D(\xi_R)}{\xi_R} \right] \quad (3.66)$$

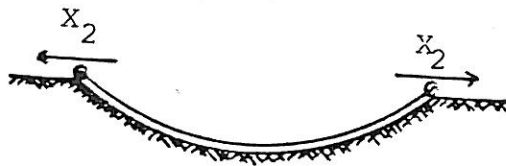
(3.47) ve (3.55) bağıntıları kullanılarak  $X_1 = 1$  birim moment yüklemesinden meydana gelen birim deplasmanlar:

$$\delta_{11}^b = \frac{dW}{d\rho}$$

$$\delta_{21}^b = W \sin \beta + u \cos \beta \quad (3.67)$$

olarak bulunur.

)-b)  $X_2 = 1$  Birim Yükleme



Şekil 3.12

Bu yükleme durumunda sınır koşulları:

$$\begin{aligned} p=K_0 \text{ için} \quad M_{\rho} &= 0 \\ Q_{\rho} &= 1 \cdot \sin\beta \\ N_{\rho} &= 1 \cdot \cos\beta \end{aligned} \quad (3.68)$$

şeklinde yazılabilir.  $M_{\rho}=0$  ve  $Q_{\rho}=\sin\beta$  sınır koşullarıyla (3.47)bağıntıları kullanılarak  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri:

$$c_1 = - \frac{l_0^3}{D} \frac{K_1}{K_1 v'_D(\xi_R) - K_2 u'_D(\xi_R)} \sin\beta \quad (3.69)$$

$$c_2 = - \frac{l_0^3}{D} \frac{K_2}{K_1 v'_D(\xi_R) - K_2 u'_D(\xi_R)} \sin\beta$$

olarak elde edilir.  $N_{\rho}=\cos\beta$  ve (3.54) bağıntısı kullanılarak,  $c_0$  sabiti ise;

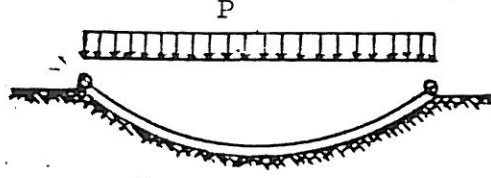
$$c_0 = \frac{1}{2} \left[ c_1 \frac{v'_D(\xi_R)}{\xi_R} - c_2 \frac{u'_D(\xi_R)}{\xi_R} + \frac{R}{Eh} \cos\beta \right] \quad (3.70)$$

bağıntısıyla elde edilir. (3.47) ve (3.55) bağıntıları kullanılarak,  $X_2=1$  birim yatay kuvvet yüklemesinden meydana gelen birim deplasmanlar:

$$\begin{aligned} \delta_{12}^b &= \frac{dW}{d\rho} \\ \delta_{22}^b &= W \sin\beta + u \cos\beta \end{aligned} \quad (3.71)$$

olarak bulunur.

## I-c) Dış Yükleme (Üniform Yayılı Yük Durumu)



Şekil 3.13

Bu durumda kabuğun uç noktasında  $Q^\phi$  fiktif mesnet tepkisi oluşacağından, sınır koşulları;

$$\begin{aligned} p=R_0 \text{ için} \quad M_p &= 0 \\ Q_p &= -Q^\phi \cdot \cos\beta \\ N_p &= Q^\phi \cdot \sin\beta \end{aligned} \quad (3.72)$$

şeklinde,  $Q^\phi$  değerine bağlı olarak yazılabilir.  $Q^\phi$  değeri (3.25) bağıntısından elde edilebilir. (3.72) deki birinci ve ikinci koşul kullanılarak, (3.47) bağıntısından,  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri;

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{L_0^3 Q^\phi}{D} \frac{K_1}{K_1 v'_0(\xi_R) - K_2 u'_0(\xi_R)} \cos\beta \\ c_2 &= \frac{L_0^3 Q^\phi}{D} \frac{K_2}{K_1 v'_0(\xi_R) - K_2 u'_0(\xi_R)} \cos\beta \end{aligned} \quad (3.73)$$

şeklinde elde edilirler.  $c_0$  sabiti ise (3.72)'nin üçüncü koşulu ile (3.54) denklemi kullanılarak;

$$c_{\sigma} = \frac{1}{2} \left[ c_1 \frac{v'_0(\xi_R)}{\xi_R} - c_2 \frac{u'_0(\xi_R)}{\xi_R} - \frac{1}{2} \frac{p^* R^2}{Eh} + \frac{RQ^{\phi}}{Eh} \sin\beta \right] \quad (3.74)$$

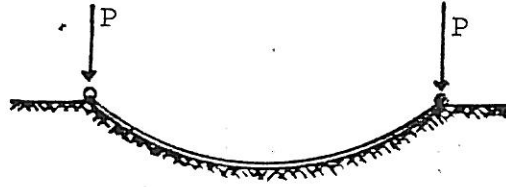
olarak bulunur. Birim deplasmanlar ise (3.47) ve (3.55) bağıntılarından:

$$\delta_{1P}^b = \frac{dW}{dP} \quad (3.75)$$

$$\delta_{2P}^b = W \sin\beta + u \cos\beta$$

olarak elde edilir.

1-d) Dış Yükleme (Silindir Duvarından Kabuğa Etkiyen Yük)



Şekil 3.14

Bu durumda (3.72) deki sınır koşulları, P dış yükte gözönüne alındığında:

$$\begin{aligned} \rho=R_0 \text{ için} \quad M_P &= 0 \\ Q_P &= (P-Q^{\phi}) \cos\beta \\ N_P &= -(P-Q^{\phi}) \sin\beta \end{aligned} \quad (3.76)$$

bağıntılarıyla kullanılarak, integral sabitleri:

$$c_1 = - \frac{L_0^3 (P-Q\phi)}{D} \frac{K_1}{K_1 v'_0(\xi_R) - K_2 u'_0(\xi_R)} \cos\beta$$

$$c_2 = - \frac{L_0^3 (P-Q\phi)}{D} \frac{K_2}{K_1 v'_0(\xi_R) - K_2 u'_0(\xi_R)} \cos\beta \quad (3.77)$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \left[ c_1 \frac{v'_0(\xi_R)}{\xi_R} - c_2 \frac{u'_0(\xi_R)}{\xi_R} - \frac{1}{2} \frac{p^x R^2}{Eh} - \frac{R(P-Q\phi)}{Eh} \sin\beta \right]$$

şeklinde elde edilirler. Birim deplasmanlar ise (3.75) bağıntılarına benzer şekilde:

$$\delta_{1P}^b = \frac{dW}{dp}$$

$$\delta_{2P}^b = W \sin\beta + u \cos\beta \quad (3.78)$$

elde edilirler.

### 3.4.2 II- Silindirik Tankta Birim Uç Deplasmanlar.

Problemimizde silindirik kabuk ile basık küresel kabuk birleşim noktası incelendiğinden silindirik kabuğun genel çözümüne girilmeyecektir. Sadece dönele simetrik silindirik kabuğun uç deplasmanları çeşitli yükleme durumları için Kaynak [9]'dan alınacaktır.

Eğilme rijitliği ve karakteristik yüksekliği (2.72) ve (2.73) bağıntılarıyla verilen silindirik kabuk,  $\lambda L > 5$  için uzun kabuk, aksi durum için kısa kabuk olarak kabul edilebilir.

Uzun kabukta  $X = 1$  ve  $X = 1$  yüklemeleri için birim uç deplasmanlar:

$$A_{11}^c = \frac{1}{D_c \lambda}$$

$$A_{21}^c = \frac{1}{2D_c \lambda^2}$$

$$A_{12}^c = \frac{1}{2D_c \lambda^2}$$

(3.79)

$$A_{22}^c = \frac{1}{2D_c \lambda^3}$$

bağıntılarıyla elde edilebilirler.

Kısa kabukta ise,  $X_1=1$  ve  $X_2=1$  yüklemeleri için birim uç deplasmanlar:

$$A_{11}^c = \frac{G_1}{D_c \lambda G_2}$$

$$A_{21}^c = \frac{G_1}{2D_c \lambda^2 G_2}$$

$$A_{12}^c = \frac{G_1}{2D_c \lambda^2 G_2}$$

(3.80)

$$A_{22}^c = \frac{G_1}{2D_c \lambda^3 G_2}$$

bağıntılarıyla elde edilebilirler.

Burada:

$$G_1 = \sinh^2 \lambda L + \sin^2 \lambda L$$

$$G_2 = \sinh^2 \lambda L - \sin^2 \lambda L$$

$$G_4 = \sinh \lambda L \cdot \cosh \lambda L + \sin \lambda L \cdot \cos \lambda L$$

$$G_5 = \sinh \lambda L \cdot \cosh \lambda L - \sin \lambda L \cdot \cos \lambda L$$

(3.81)

dir.



$q$  yüklemesinden dolayı silindirik kabukta meydana gelen birim uc deplasmanları:

$$\Delta_{1q}^c = \frac{\gamma_c LR^2}{E_c h_c} \quad (3.82)$$

$$\Delta_{2q}^c = \frac{\gamma_c R^2}{E_c h_c}$$

bağantılarıyla elde edilirler.

Burada;  $\gamma_c$  silindirik tanktaki sıvının birim hacim ağırlığıdır.

Silindirik tankın ve küresel kabuğun birim uc deplasmanları belirlendikten sonra, (3.86) lineer denklem sistemi çözülerek  $X_1$  ve  $X_2$  bilinmeyenleri:

$$X_1 = \frac{a_{02} b_{12} - b_{02} a_{12}}{a_{21} b_{11} - a_{11} b_{21}} \quad (3.83)$$

$$X_2 = \frac{a_{01} b_{21} - b_{01} a_{21}}{a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}}$$

olarak elde edilirler.

Burada:

$$a_{00} = -\Delta_{1q}^c + \delta_{1p}^b - \delta_{1p}^b$$

$$a_{11} = \Delta_{11}^c + \delta_{11}^b$$

$$a_{22} = \Delta_{22}^c - \delta_{22}^b \quad (3.84)$$

$$b_{00} = -\Delta_{2q}^c - \delta_{2p}^b + \delta_{2p}^b$$

$$b_{11} = \Delta_{21}^c - \delta_{21}^b$$

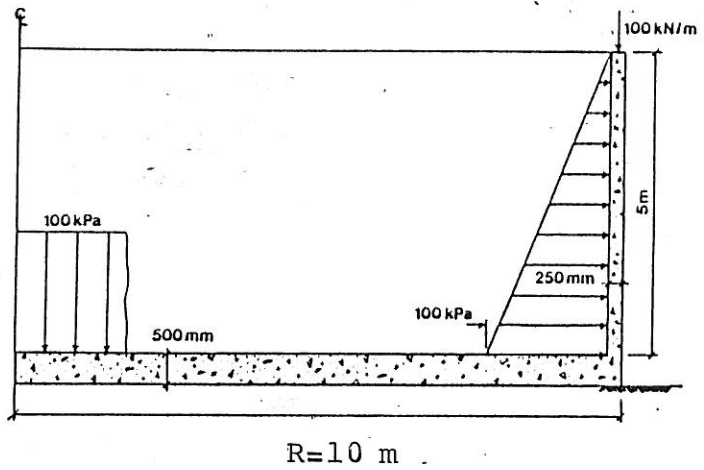
$$b_{22} = \Delta_{22}^c + \delta_{22}^b$$

dir.

## SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, iki parametrelili elastik zemine oturan dairesel plak ve basık küresel kabuk problemleri incelenmiş olup, plak ve küresel tabanlı silindirik tanka uygulanmıştır.

Sayısal uygulama ise, şekil 4.1 de malzeme özellikleri ve yük durumları verilen dairesel plak tabanlı silindirik tank için yapılmıştır.



Şekil 4.1

Plâğın geometrik ve fiziksel karakteristikleri:

$$R=10 \text{ m}$$

$$h=0.50 \text{ m}$$

$$E=16 \text{ GPa}$$

$$\nu=0.2$$

(4.1)

Silindirik tankın geometrik ve fiziksel

karakteristikleri:

$$L=5 \text{ m}$$

$$h_c=0.25 \text{ m}$$

(4.2)

$$E_c = 15 \text{ GPa}$$

$$\nu_c = 0.2$$

olarak verilmiştir.

Elastik zeminin fiziksel özellikleri :

$$E_o = 20 \text{ MPa}$$

$$(4.3)$$

$$\nu_o = 0.2$$

olarak verilmiş iken,  $k$  ve  $t$  elastik zemin parametrelerinin belirlenmesi; a)  $H/R=1$ ,  $\gamma=1$ , b)  $H/R=2.5$ ,  $\gamma=1$ , c)  $H/R=1$ ,  $\gamma=1.5$ , d)  $H/R=2.5$ ,  $\gamma=1.5$  durumları için (1.15) bağıntıları kullanılarak elde edilmiştir.

Burada:

$H$ : sıkışabilir tabaka kalınlığı,

$\gamma$ : zeminin elastik özelliklerine bağlı katsayıdır.

Aynı uygulamanın yarı-sonsuz uzay ve yatak katsayısı  $k=1.33 \text{ MN/m}^3$  olan Winkler zemini için, daha önceden yapılmış çözümleri kaynak [5] ve [9] dan alınmıştır. Şekil 4.2, 4.3, 4.4 ve 4.5 deki eğri numaraları:

① : Winkler zeminini,

② : Yarı-Sonsuz Uzayı

İki parametrelili elastik zemin için:

③ :  $H/R=1$ ,  $\gamma=1$  durumunu,

④ :  $H/R=2.5$ ,  $\gamma=1$  durumunu,

⑤ :  $H/R=1$ ,  $\gamma=1.5$  durumunu,

⑥ :  $H/R=2.5$ ,  $\gamma=1.5$  durumunu,

göstermektedir.

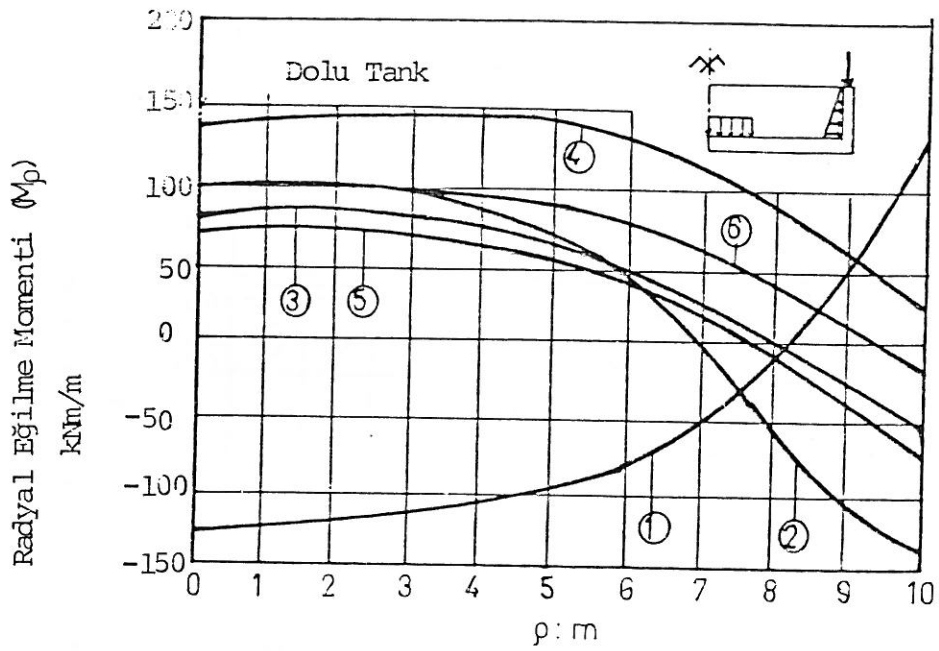
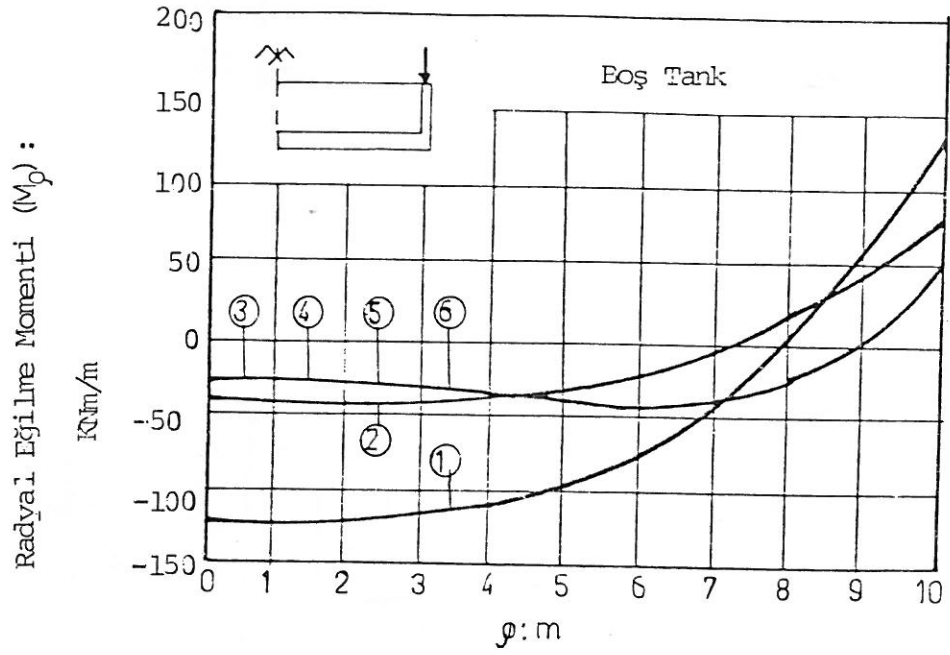
Şekil 4.2 de, silindirik tankın dolu ve boş olması halinde plaktaki radyal eğilme momenti eğrileri gösterilmiştir. Boş tank için, elastik zeminde  $H/R$  ve  $\gamma$  nın değişimleri önemli derecede etkili olmadıkları için aynı eğri üzerinde gösterilmiştir. Buna karşılık dolu tankta,  $H/R$  ve  $\gamma$  nın değişmesiyle momentlerde de önemli değişimler gözlenmektedir.  $H/R$  oranının artmasıyla

eğilme momenti de pozitif yönde artmıştır.  $\gamma$  nın değişimi,  $H/R=1$  için daha az etkili iken,  $H/R=2.5$  için etkisi önemli ölçüde artmaktadır. Fakat  $\gamma$  değerinin artmasıyla eğilme momenti azalmaktadır.

Şekil 4.3 te, dolu tankın tabanında oluşan oturma ve basınç eğrileri gösterilmiştir.  $H/R$  oranının artmasıyla oturma önemli ölçüde artmaktadır, fakat  $\gamma$  değerinin artmasıyla da oturmalar azalmaktadır. Yukarda da belirtildiği gibi  $\gamma$  nın değişimi,  $H/R=1$  için daha az etkili iken,  $H/R=2.5$  için etkisi önemli ölçüde artmaktadır. Taban basıncı,  $H/R$  ve  $\gamma$  nın değişmesiyle çok az değiştiğinden aynı eğri üzerinde gösterilmiştir. Winkler zeminine göre daha az olduğu ise, elastik zeminde  $Q^\phi$  fiktif mesnet tepkisinin taban basıncını azaltmasıyla açıklanabilir. Diğer bir değişle, düşey denge yazıldığında  $Q^\phi$  ve  $q$  (taban basıncı) etkilerinin toplamı verilen düşey dış yüke eşit olacaktır.

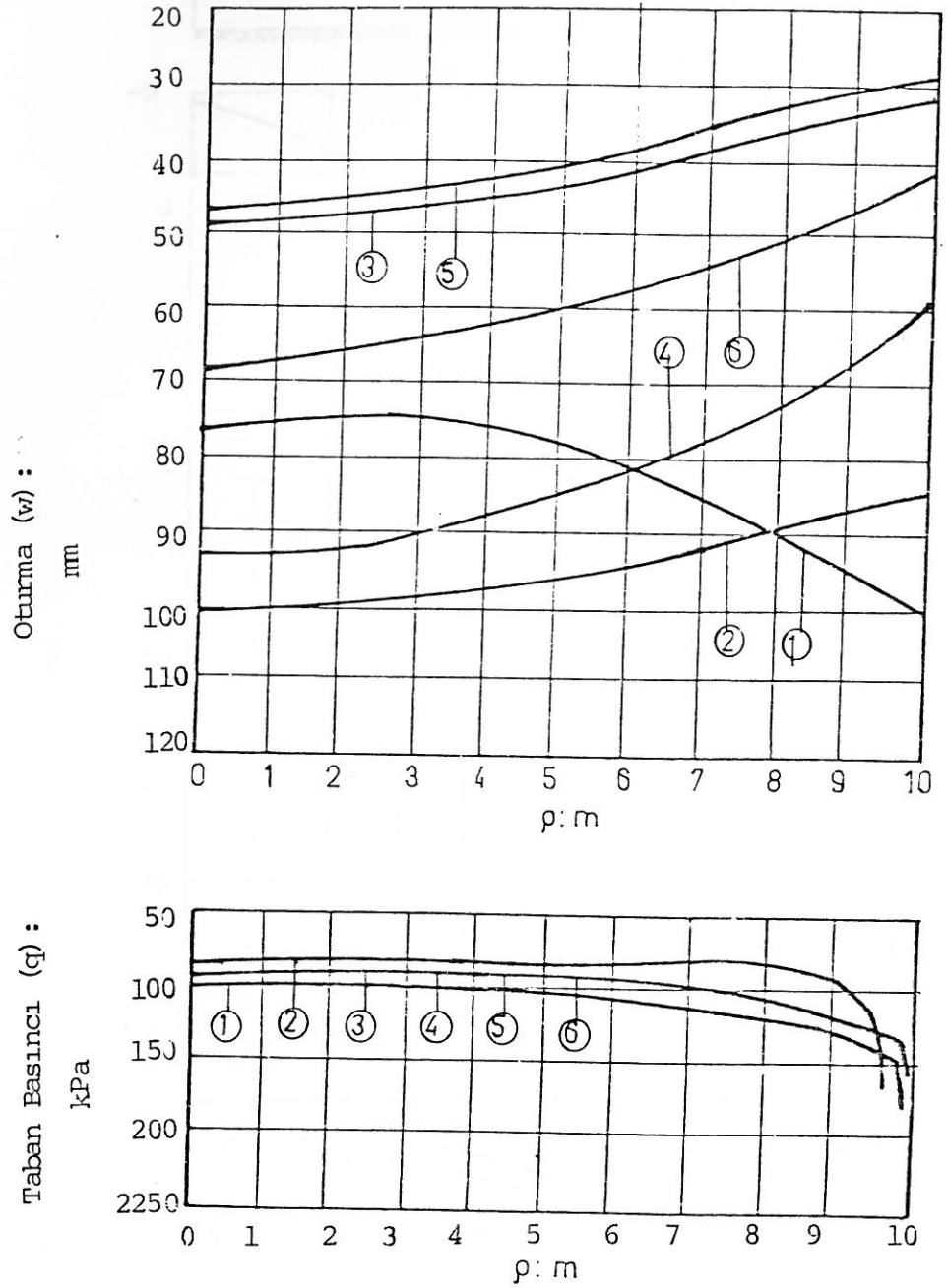
Şekil 4.4 te serbest kenarında  $100 \text{ kN/m}$  lik çizgisel yük durumunda plakta meydana gelen radyal eğilme momenti ile oturmalar gösterilmiştir. Plâğin fiziksel ve karakteristik özellikleri (4.1) eşitliklerinden alınmıştır. Eğrilerin  $H/R$  ve  $\gamma$  ile değişimleri boş tank durumuna benzer şekilde açıklanabilir.

Şekil 4.5 te serbest kenarında  $100 \text{ kN/m}$  lik çizgisel yük ile  $100 \text{ kPa}$  lık üniform yayılı yükü yüklenmiş dairesel plakta meydana gelen radyal eğilme momenti ile oturmalar gösterilmiştir. Plâğin fiziksel ve karakteristik özellikleri (4.1) eşitliklerinden alınmıştır. Eğrilerin  $H/R$  ve  $\gamma$  ile değişimleri; dolu tank durumuna benzer şekilde açıklanabilir.

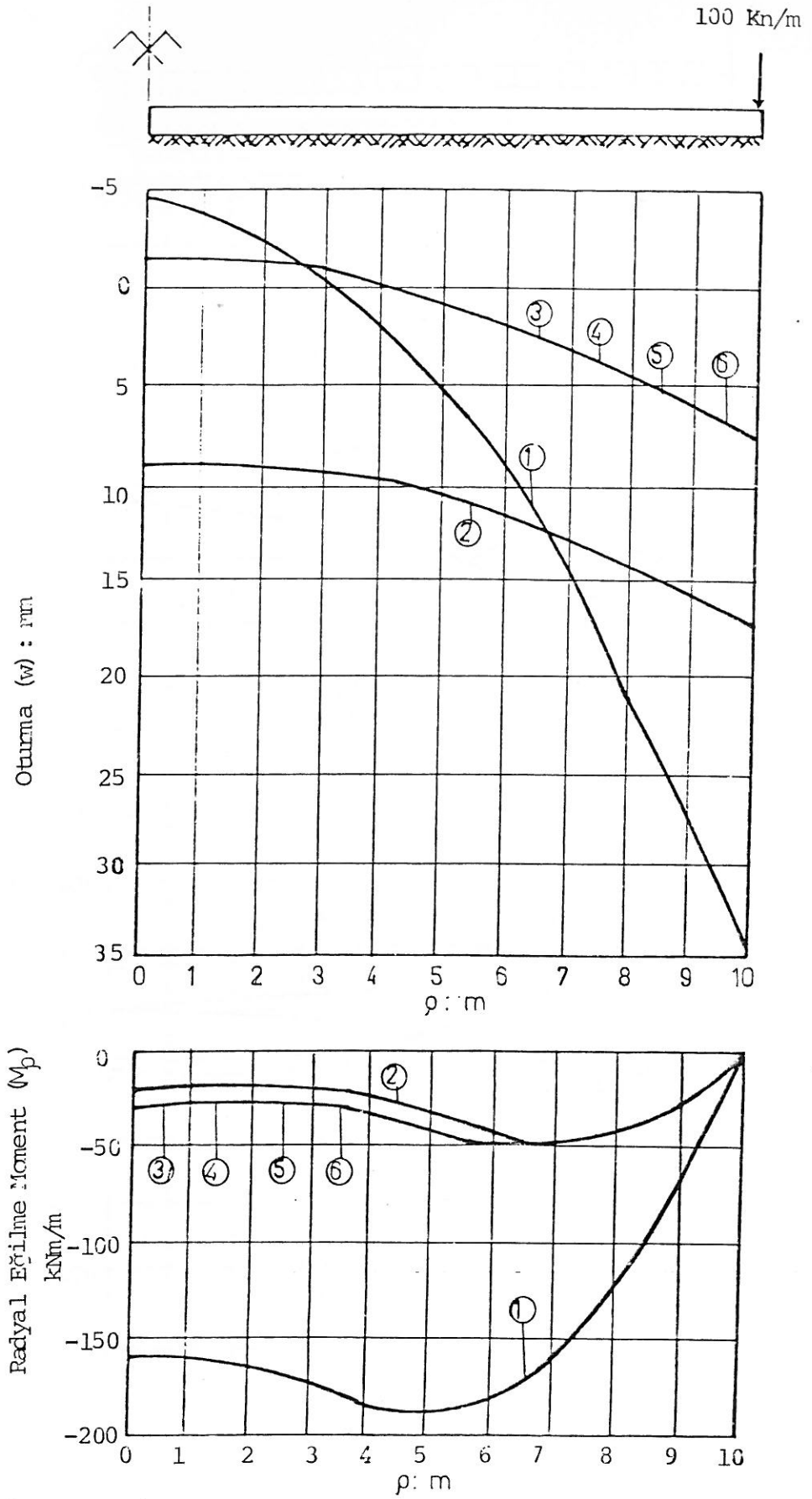


Şekil 4.2. Silindirik tankın dolu ve boş hallerinde dairesel plakta meydana gelen radyal eğilme momentleri.

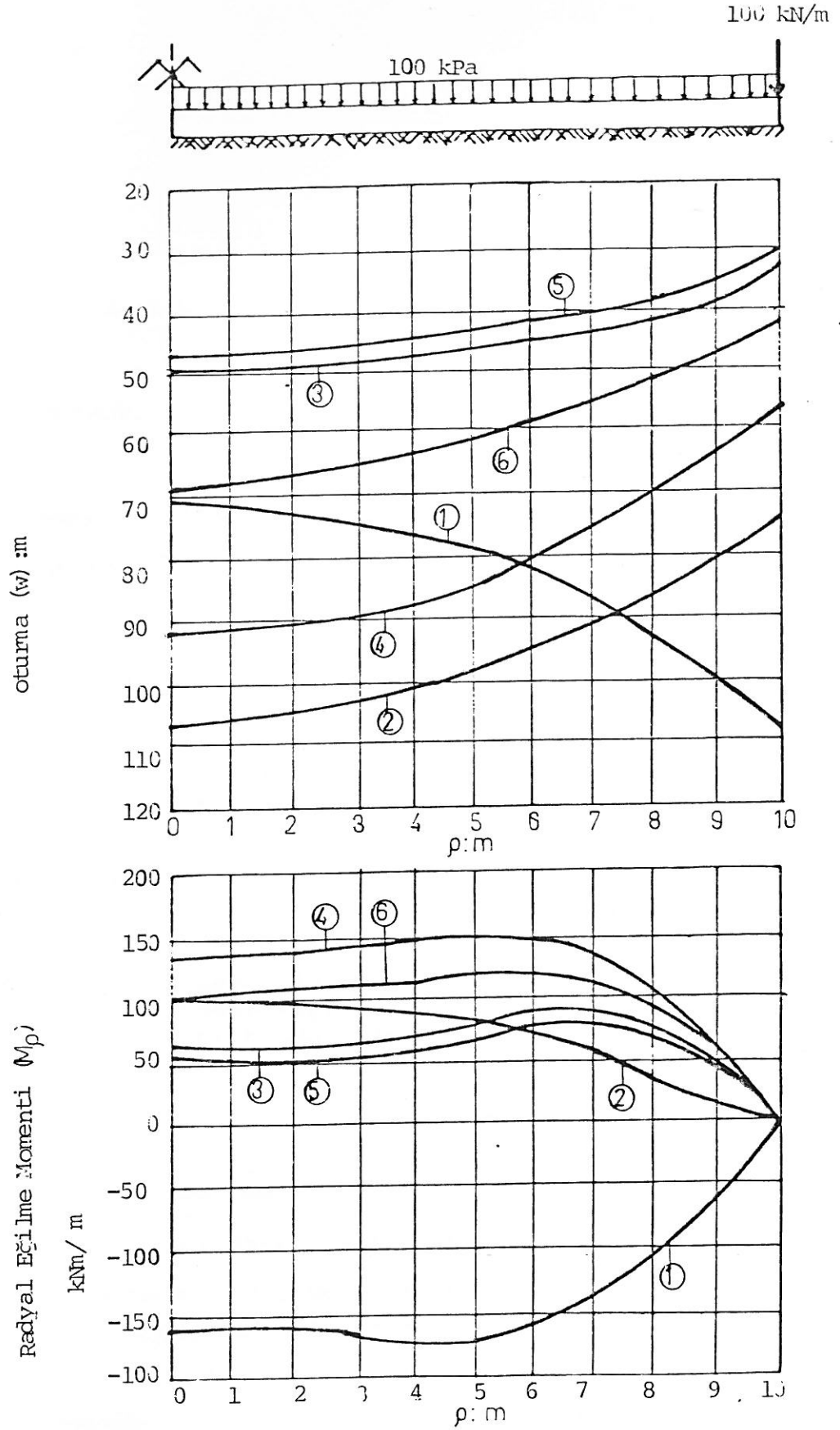




Şekil 4.3. Dolu tankın tabanında oluşan oturma ve basınç eğrileri.



Şekil 4.4. Kenar yüküyle yüklenmiş dairesel plakta meydana gelen oturma ve radyal eğilme momentleri



Şekil 4.5. Üniform yayılı yükle yüklenmiş dairesel plakta meydana gelen oturma ve radyal eğilme momentleri.

## KAYNAKLAR

- [11] SALVADURAI, A.P.S., Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction Elsevier Sci. Pub.Comp. 1979.
- [12] VLAZOV, V.Z., and LEONTIEV, N.N., Beams, Plates and Shells On Elastic Foundations, GIFML, Moskow, 1960.
- [13] PANC, V., Theories of Elastic Plates, 1975.
- [14] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1972
- [15] HEMSLEY, J.A., Elastic Solution For Axisymmetrically Loaded Circular Raft With Free or Clamped Edges Founded On Winkler Springs Or A Half-Space, Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2, 1987, 83, Mar., 61-90.
- [16] KESKİNEL, F., KUMBASAR, N., Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar, 1976
- [17] BARTHELMES, W., Ermittlung Der Schnittkräfte in Kreiszyklindrischen Silos, Bauingenieur 52 (1977) 423-435
- [18] HEMSLEY, J.A., Elastic Solution For Thin Cylindrical Shell Walls Under Axisymmetric Loading, Proc. Instn Civ. Engrs. Part 2, 1987, 83, Mar., 91-114
- [19] HEMSLEY, J.A., Influence of Wall Superstructure On The Foundation Interaction Analysis Of A Circular Raft, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 1987 83, Mar., 115-142
- [110] KRAUS, H., Thin Elastic Shells, 1967.
- [111] TIMOSHENKO, S., WOINOWS-KRIEGER, S., Theory of Plates and Shells, 1959.
- [112] BETENYI, M., Beams On Elastic Foundation, 1946
- [113] TURNER, C., Introduction to Plate And Shell Theory, 1965

[14] GIBSON, J.E., M.Sc., Ph.D., A.M.I.C.E., Linear  
Elastic Theory of Thin Shells, 1968

[15] PFLUGER, A., Elementary Statics Of Shells, 1961

## ÖZGEÇMİŞ

1964 yılında Kars'ın Cildir İlçesinin Gölbelen Köyünde doğdu. Orta öğrenimini Cildir Lisesinde tamamladı. İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden 1985-1986 öğretim yılı yaz döneminde mezun olup İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim Dalı Yapı Analizi ve Boyutlandırılması programında Yüksek Lisans yapmaya başladı. 1989 yılında İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim Dalına araştırma görevlisi olarak girdi. Halen bu görevi yürütmektedir.