T. C.
MALTEPE ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE ANABİLİM DALI

# MATEMATİK EĞİTİMİ BAĞLAMINDA MATEMATİKSEL NESNENİN VARLIKSAL NİTELİĞİ ÜZERİNE

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BEYHAN ŞENER**
**121114101**

**Danışman Öğretim Üyesi:**

**Prof. Dr. ZEKİYE KUTLUSOY**

**İstanbul, Eylül 2015**

T.C. Maltepe Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

17.09.2015 tarihinde tezinin savunmasını yapan Beyhan ŞENER'e ait "Matematik Eğitimi Bağlamında Matematiksel Nesnenin Varlıksal Niteliği Üzerine" başlıklı çalışma, Jürimiz Tarafından Sosyal Bilimler Enstitüsü Felsefe Anabilim Dalı, Felsefe Programında Yüksek Lisans Tezi Olarak **Oy Birliği/**[redacted] Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Zekiye KUTLUSOY
(Başkan)
(Danışman)

Doç. Dr. Ahu TUNÇEL

(Üye )

Yrd. Doç. Dr. Gülseren KARAGÖZ AKAR
(Üye )

# ÖNSÖZ

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğrencisi olduğum yıllarda Hasan Ali Yücel Fakültesinden aldığım Pedagojik Formasyon dersleri hep alışık olduğum formdan çıkarmıştı beni. Tanımlar, teoremler, ispatlar ve akıl yürütmelerle ilerleyen dizgem bir anda değerlendirme, yorum yapma kesin doğruluklar olmayan düşünmelerle karşılaşmıştı. Böylece bu eğitimler, matematik eğitimine, matematiğin işleyiş biçimine dair olan alışkanlıklarımızın dışında bakmamamız gerektiği konusunda bir fikir oluşturmuştu. Eğitim felsefesi alanı o zamanlarda dikkatimi çekmiş, eğitime felsefi yaklaşımların eğitim teorilerinin temel düşüncelerini oluşturmaları dolayısıyla benim için önem kazanmıştı. Öğretmenliğim boyunca matematiğin en iyi nasıl öğretileceği üzerine düşünmeye devam ederken değerli matematik öğretmeni ve yazar Ahmet Doğan'ın yönlendirmeleri ile eğitim üzerine okumalar yaptım. Bana gösterdiği yol ve yöntemler için ona şükranlarımı sunarım. Sonrasında 2010 yılında çalışmalarıma yön veren ve onun imkânlarını sunan Boğaziçi Üniversitesi Öğretim Üyesi Yard. Doç. Dr. Gülseren Karagöz Akar ile tanıştım. Onunla yaptığımız çalışmalar ile yapılandırmacı metotla yapılan matematik eğitimine dair önemli kazanımlara sahip oldum. Onun bana kazandırdıkları ve bu yolda yürüyebilmem için sürekli verdiği güç bu satırlarda edilecek teşekkürün çok üstünde… Onu tanımış olmanın büyük bir şans olduğunu düşünüyor ve hem bu çalışmaya hem de öznel gelişimime yaptığı katkılar için sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı bildiriyorum. Lise matematik eğitimi için yapılandırmacı metot ile geliştirdiğimiz matematik etkinlikleri sırasında aritmetik üstü konularda etkinlik üretiminin daha zorlaşması beni bu konuda derinlemesine düşünmeye sevk etti. Değerli hocam Prof. Dr. Betül Çotuksöken'nin Maltepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölüm başkanlığı sırasında açılan "Eğitim Felsefesi" programı beni çok heyecanlandırdı. Benim gibi felsefeden eğitime bakmak isteyen eğitimcilere bu programı açarak imkân sağlayan ve gelişimime katkılar sunan Prof. Dr. Betül Çotuksöken'e teşekkürü bir borç bilirim. Eğitimim sırasında değerli tez hocam Prof. Dr. Zekiye Kutlusoy ile karşılaşmak benim için yine büyük bir şanstı. Yüksek lisansa başladığım ilk anlarda sahip olduğum dağınık düşüncelerim, onun sayesinde şekillenmeye ve yol almaya başladı. 20. yüzyıl filozofu Gottlob Frege ile tanışmam ve bundan sonrası için kocaman bir çalışma alanı oluşturmam hep onun sayesindedir. Sabırla, büyük bir gönülle gösterdiği yol ve yöntemlere ayrıca adeta bir ilham perisini andıran zihinleri ustalıkla açan üslubuna hayran kalmamak mümkün değil. Onun yanında dolaşırken dikkatli olmak gerekebilir, sihirli tozcuklarını üstünüze serpebilir. Değerli hocama bana gösterdiği sabır ve alçak gönüllü desteği için sonsuz minnettarlığımı sunarım. Buna ek olarak tez çalışmamın oluşumuna katkı sunan ve felsefenin ruhunu hissetmemi sağlayan başta dünyaca ünlü filozofumuz Prof. Dr. İoanna Kuçuradi ve diğer bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tezime yaptığı değerli eleştirileriyle katkı sunan ve eğitime felsefeyle bakmamda önemli katkıları olan Doç. Dr. Ahu Tuncel'e teşekkürlerimi sunarım. Bunun yanı sıra uzun süren çalışmam süresinde sıkça kapısını çaldığım ve büyük gönüllükle bilgisini ve desteğini benden esirgemeyen Doç Dr. Ahmet Ayhan Çitil'e şükranlarımı sunarım. Son olarak çalışan bir matematik öğretmeni olarak yaptığım yüksek lisansım sırasında yerine getiremediğim ailevi görevlerim için bana sabır gösteren aileme, özellikle benim ben olmamı sağlayan, biricik annem Hanım Şener'e ne kadar minnettar olsam azdır.

Bu çalışma ile söyleyebilirim ki başlangıçta matematik eğitimine dair yaşadığım sorunların çözümlerinin felsefede olabileceğini seziyor ama emin olamıyordum. Şimdi ise kendimi bir define bulmuş gibi hissediyorum.

# ÖZET

Bu çalışmanın amacı, öncelikle, matematik felsefesi kapsamındaki matematiksel nesneye yönelik bakış açılarını ülkemizde kullanılan matematik eğitimi programları içinde yakalamaktır. Bu hedefle ülkemizde uzun süredir kullanılmakta olan davranışçı ve yapılandırmacı öğretim yöntemlerinin bilgiye yaklaşımları değerlendirilerek matematik eğitimi için ileri sürdükleri matematiksel nesne görüşleri netleştirilmeye çalışılmıştır. Davranışçı öğretim yöntemi, pozitivist anlayışa sahip olup matematik felsefesi çerçevesinde epistemolojik temellerini realizmden alır. Bu öğretim metodu matematiksel nesneyi insan üretiminin dışında bir gerçeklik olarak kabul eder ve Platoncu realizm olarak anılan Frege bakışlı matematiksel nesne anlayışı ile benzerlik gösterir. Ancak, herhangi bir bilgi anlayışı ortaya koymayan bu öğretim teorisi, bilgiyi elde etme yöntemleri açısından realizmin kabulleri ile uyuşmamaktadır. Oysa bir bilgi teorisi de olan yapılandırmacılık, hem matematiksel nesneyi insan üretimine bağlı kılan Kant'ın sentetik *a priori* yargı anlayışı ile hem de o nesnenin bilgisini edinme yöntemleri açısından matematik felsefesi görüşleriyle örtüşmektedir. Bununla birlikte yapılandırmacı öğretim yönteminde öğretmenlerin aritmetik üstü matematik konularıyla ilgili yapılandırma süreçlerinde ortaya çıkan sorunların giderilmesi için, çalışmanın sonunda, Frege'nin matematiksel nesne anlayışını da içeren bir eğitim anlayışı önerilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** matematik eğitim felsefesi, matematik felsefesi, matematik eğitimi, matematiksel nesne, Frege, Kant, davranışçılık, yapılandırmacılık.

**ABTRACT**

The aim of this study is first to illuminate views for mathematical object in philosophy of mathematics and also in programs of mathematics education in our country. For this aim, by evaluating approaches to knowledge in behaviorist and constructivist methods, their accounts for mathematical object for mathematics education are clarified. Behaviorist education method, which accepts a positivist view, is grounded epistemologically on realism. İn this respect, behaviorist education method takes a similar position to Fregean point of view for mathematical object known also as Platonist realism which acknowledges mathematical object independent of the knower. However, this education method without any epistemological foundation does not align with realism in terms of the acquisition of knowledge. On the other hand, constructivism, which accepts a post-positivist view, is also a theory of knowledge, which builds on Kant's synthetic *a priori* mathematical object. İn this regard, constructivism takes on the view that mathematical object is human invention. Also, it aligns with Kant's philosophical point of view in terms of the acquisition of knowledge. At the end of the study, in order to provide some solutions to the problems encountered during the teaching of advanced topics in mathematics education, an educational perspective taking also into account of Fregean philosophy on mathematical object is proposed.

**Keywords:** philosophy of mathematics education, philosophy of mathematics, mathematics education, mathematical object, Frege, Kant, behaviorism, constructivism.

## İÇİNDEKİLER

**ÖNSÖZ…………………………………………………………………………....i**

**ÖZET ……………………………………………………………………………iii**

**ABSTRACT ……………………………………………………………………..iv**

**İÇİNDEKİLER ……………………...……………………………………………v**

**TABLOLAR LİSTESİ……………………………………………………….....viii**

**ŞEKİLLER LİSTESİ…………………………………………………………..ix**

**GİRİŞ ………………………………………………………………………..1**

1. **BÖLÜM: MATEMATİK FELSEFESİNİN TEMEL SORUNLARI KAPSAMINDA MATEMATİKSEL NESNE ……….……….…..……...……….5**

1.1. Matematiksel Nesne Sorunu……………………………………..…….….11

1.1.1. Matematiksel Nesne Hakkında Görüşler……………………….........12

1.1.2. Immanuel Kant'ta Matematiksel Nesne……………………….........23

1.1.2.1. Kant'ın Epistemolojisinin Temel Çerçevesi………….……..23

1.1.2.2. Kant'ın Transsendental Felsefesi……………………….....24

1.1.2.3. *A Priori* Bilginin Olanaklılığı İçin Arı Sezgi Biçimleri: Uzay ve Zaman…………………………………………………….……26

1.1.2.3.1. Uzay……………………………………………..27

1.1.2.3.2. Zaman…………………...……………………29

1.1.2.4. Kant'ta Nesnenin Tasarımı…………………………………30

1.1.2.5. *A Priori* Bilginin Gerekliliği Üzerine………………………..32

1.1.2.6. Analitik ile Sentetik ve *A Priori* ile *A Posteriori* Yargılar…..32

1.1.2.7. Saf Matematik Nasıl Olanaklıdır?.........................................35

1.1.3. Gottlob Frege'de Matematiksel Nesne……………………………..37

1.1.3.1. Frege'de Dil-Mantık İlişkisi…………………………………..39

1.1.3.2. Frege'de Anlam Problemi: Anlam ve Yönletim Üstüne……...40

1.1.3.3. Kavram ve Nesne Üzerine………..……………..……………..49

1.1.3.4. Frege'de Düşünceler ve Düşüncenin Nesnelliği…….……..51
1.1.3.5. Frege'de Doğruluk ve Yargı……………………….…………..54
1.1.3.6. Frege'de Mantık-Matematik İlişkisi……….…………………58
1.2. Matematiğin Temellerine İlişkin Felsefi Görüşler…………….…………61
1.2.1. Mantıkçılık ……………………………………………………64
1.2.2. Biçimcilik…………………………………..…………………67
1.2.3. Sezgicilik………………………………………………………69
1.2.4. Temelci Görüşlere Dair Yapılan Eleştiriler…………………………71
1.3. Günümüz Matematik Felsefesindeki Gelişmeler……………………………75
1.3.1. Quine'ın Matematik Üzerine Görüşleri……………………………...76
1.3.2. Yeni-Fregeciler…………………………………………………...77
1.3.3. Adcılar……………………………………………………….…78
1.3.4. Yapısalcılar……………………………………………………..79
1.3.5. Yarı-Deneyimci Görüş ……………...……………………………80

**2. BÖLÜM: MATEMATİK EĞİTİMİNDE MATEMATİKSEL NESNE…..82**

2.1. Eğitim Felsefeleri ve Öğretim Kuramları Bağlamında Matematik Eğitimi…………………………….……………………………………….…….82
2.1.1. Bilginin Doğası Üzerine……………………....…………………...84
2.1.2. Eğitim Felsefesi Teorileri……………………….………………..88
2.1.2.1. Daimicilik……………………………………………..……...88
2.1.2.1.1. İdealizm ve Eğitim……………………………..…………….89
2.1.2.1.2. Realizm ve Eğitim…………………………………….….91
2.1.2.2. İlerlemecilik ……………………………………………………93
2.1.2.3 Yeniden Yapılanmacılık ve İnşacılık…………..…………………..94
2.1.2.4. Esasicilik…………………………………..………..….……..96
2.1.2.5. Politeknik Eğitim……………………………………………..……97
2.1.3. Öğrenme Teorileri…………………………………………….……..98
2.1.3.1. Davranışçı Yaklaşım………………………………………………99
2.1.3.2. Yapılandırmacı Yaklaşım……………………………………......102
2.1.3.2.1. Bilişsel Yapılandırmacılık…………………………………105
2.1.3.2.2. Toplumsal Yapılandırmacılık……………………….…...…108
2.1. 3.2.3. Radikal Yapılandırmacılık…………………….……….…...108

2.1.3.2.4. Yapılandırmacılığın Değerlendirmesi………………………109
2.2. Matematik Eğitimi Felsefesinde Matematiksel Nesne……………………..…114
2.2.1. Matematiksel Nesnenin Belirlenmesi…………………………….…..115
2.2.1.1. Matematiksel Nesnenin Varlıksal Durumuyla İlgili Tartışmalar………………………………………………………..116
2.2.1.2. Davranışçı ve Yapılandırmacı Öğretim Teoremlerinin Matematiğin Nesnesine/Doğasına İlişkin Yaklaşımları…………………118
2.2.2. Matematik Eğitiminin Önemli Bir Bileşeni Olarak Matematiksel Nesne......................................................................................................122

**SONUÇ**………………………………………………………………………130
**KAYNAKLAR**………………………………………………………………141
**ÖZGEÇMİŞ**……………………………………….…………………….…….146

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. Anlama Yetisi Kavramlarının (Kategorilerin) Transsendental Çizelgesi…………………………………………………………………..31
Tablo 1.2. Önermelerin Sınıflandırılması…………………………………………...33
Tablo 2.1. Pozitivizm ve Post-Pozitivizm Ayrımı…………………………………..85
Tablo 2.2. Davranışçı Yaklaşımın Temel Savları…………………………………100
Tablo 2.3. Bilişsel Yapılandırmacılığın Temel Varsayımları……………………...107
Tablo 2.4. Yapılandırmacılığın Temel Savları……………………………………109
Tablo 2.5. Matematik Felsefesi İçinde Matematik Nesneye Bakış Açıları……….118
Tablo 2.6. Davranışçı ve Yapılandırmacı Yaklaşımların Felsefi Temelleri……….121

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Anlam ve Yönletimin Görsel İfadesi……………………………………..42
Şekil 1.2. Salerno'nun Düşünceden Doğruluk Değerine Geçiş Tablosu……………47
Şekil 1.3. Frege'de Özne Yüklem Bağlamı…………………………………………50

# GİRİŞ

Eğitim felsefesi çerçevesinde değerlendirilecek bu tezin sorunu/sorunsalı, ülkemizdeki matematik eğitiminde kullanılan matematiksel nesnenin neliğine ilişkindir. Matematik eğitimi içindeki matematiksel nesne anlayışını yakalayabilmek için matematik felsefesi içindeki matematiksel nesne anlayışlarını ve matematik öğretim teorileri altındaki bilgi teorileri eğitim felsefelerinin genel anlamda bilgiye bakışı özel anlamda matematiksel nesnesine bakışları incelenecektir.

Ülkemizde 2005 yılında eğitim alanında, o dönemde izlenen müfredat ve programların ve hatta öğretim biçim ve yöntemlerin değişmesine, yenilenmesine neden olan bir süreç başlamıştır. 2005'te çıkarılan "Orta Öğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı "nda bu süreç; küresel dünya içinde hızla gelişen teknolojinin yaşantımızla birlikte demokrasi ve yönetim kavramlarımızın içeriğinin değişmişi olarak ifade edilmiştir. Bu değişim, öğretim kurumlarını ve eğitim politikalarını etkilemiş öğretim sistemlerini bu amaçla yeniden gözden geçirilme ihtiyacı doğurmuştur (TTKB, 2005: s. 2). Bu hedefle eğitim sistemi olarak *"Yapılandırmacı Bilgi Teorisi"*ne bağlı "*yapılandırmacı öğretim teorisi*" kabul edilmiştir. Sonrasında MEB'e bağlı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı'ınca, 2005'ten sonra 2011 ve 2013'te öğretim kılavuzları çıkarılmıştır. Bu kılavuzlarda klasik öğretimde, yani öğretmenin anlattığı ve öğrencinin dinlediği öğretimde, matematiğin anlamlı öğretimi için imkân sağlamadığı vurgulanır. Klasik öğrenmede "Tanım→Teorem→İspat→Uygulamalar→Test" yaklaşımı benimsenerek matematiğin yaşamla bağlarının kurulmadığı ve bu sebepten öğrencileri matematiği ezberlemeye teşvik edildiği ifade edilir. Bu durum ise kavramlar arası ilişkileri kurma, modelleme yapma gibi üst matematiksel beceri gerektiren fırsatları öğrencilere sunamamaktadır. Bu amaçla öğrenciler için öğretim eğitim süreçlerinde yeni bir sisteme geçiş hedeflenmiştir. Bu süreçte öğrenme döngüsü "Problem→Keşfetme→Hipotez Kurma→ Doğrulama→Genelleme→İlişkilendirme→Çıkarım" olarak belirlenmiştir (TTKB, 2005: s. 2; TTKB, 2011: s. 6; TTKB, 2013: s. 1). Bu eğitim yöntemine göre, bilgiyi hazır olarak alan pasif bir öğrenci yerine, bilgiyi inşa ederek elde eden, keşfetme süreçleri yaşayan aktif bir öğrenciye dönüşüm hedeflendi. Bu geçişin mimarı ise, elbette öğretmen olarak belirlendi. Ülkemizde şimdiye kadar klasik olarak bilgiyi aktaran matematik öğretmenine, bu aşamada yardımcı olarak Mili Eğitim Bakanlığı'nca *"Yapılandırmacı Öğretim Teorisine"* uygun ders kitapları hazırlandı. Ancak üzerinden geçen on yıla yakın bir sürede, lise düzeyinde, hemen hemen her yıl yenilenen kitaplara rağmen matematik öğretmenlerinin, bilgiyi yapılandırma ve eğitim sürecinde de bunu kontrol edebilme becerileri konusunda hala sorunlar yaşanmaktadır. "Peki, acaba lise matematik bilgisinin, öğrenci tarafından bilgiyi yapılandırarak üretilme sürecinin, öğretmen tarafından istenildiği gibi kontrol edilemeyişinin nedenleri nelerdir?" Böyle bir sorunun cevabı eğitim teorileri, eğitim psikolojisi, eğitim politikaları gibi alanlar yönünden irdelenebilir. Bu çalışmanın amacı bu doğrultuda, matematik eğitiminde kullanılan klasik yöntem olan davranışçı öğretim teorisi ve sonrasında geçilmeye çalışılan yapılandırmacı öğretim teorisinin matematik nesnesine bakış açılarını irdeleyerek bahsi geçen sıkıntıların temelindeki felsefi kökenlerin araştırılmasıdır. Eğitim metotlarını yakından incelediğimizde altında yatan felsefi görüşü görmek, değerlendirmek hatta çıkış noktalarını saptamak çok olasıdır. Fakat bu çalışmada, eğitim teorilerinden "davranışçı" ve "yapılandırmacı" kuramların, bilgi nesnesine bakış açıları ve daha da yakından matematik nesnesini ele alışları incelenirken, Kant'ın *sentetik a priori* yargılardan oluşan matematiksel nesne anlayışı ve Frege'nin analitik yargılardan oluşan mantıksal nesne anlayışlarının bu eğitim biçimlerine göre konumları değerlendirilecektir. Böyle bir değerlendirmenin amacı, matematik eğitimi içinde öğretmenin matematik nesnesine bakış açısında yapacağı bir tercih ile kullanacağı eğitim metodunun nasıl etkilenebileceği üzerine düşünebilmektir. Böylece matematik felsefesi kapsamında soruşturmalar, öğretmenler için eğitim metodu tercihinden önce matematik nesnesine bakış açısında bir tercih yapma imkânı sağlayacaktır. Bu hedefle bu çalışmanın önemli diğer bir amacı, matematiksel nesneye bakış açısı belirlendiğinde öğretimin nasıl değişeceğine dair cevapların zaman zaman felsefe yolunda yürünerek ve zaman zaman matematik eğitimi alanında felsefeyi yoldaş alarak aranmasıdır. Böylece çalışmamız, matematik felsefesi ile matematik eğitimi arasındaki ilişkiyi inceleyen, onları bir araya getirmeye çalışan matematik eğitimi felsefesi üzerine olan bir çalışma olacaktır.

Bu hedefle çalışmamızın birinci bölümünde matematik felsefesi kapsamında matematiksel nesne anlayışları incelenecektir. Bunun için öncelikle matematik felsefesinin kendine atfettiği görevleri ve bu görevler arasındaki matematiksel nesnenin neliği sorunsalının yeri irdelenerek matematiğin anlamı ve matematiksel nesnenin niteliği üzerine verilen önemli cevaplar, belirledikleri tanımlar ve kabuller tarihsel bir sıralama ile Pythagorasçılar, Platon ve Aristoteles gibi antik filozofların görüşlerine yer verilerek tespit edilecektir. Birçok matematikçi tarafından kabul gören ve matematiksel nesneleri insandan bağımsız gerçeklik olduğunu savunan Platonculuk'un matematik felsefesi içindeki önemi değerlendirilerek temel kabulleri incelenecektir. Sonrasında soyut nesneleri kabul etmeyen nominalist (adcılık) yaklaşım ve matematiksel nesneleri insanın çevreyle iletişimi sonucunda oluşan soyut nesneler olarak ifade eden yapısalcı yaklaşım incelenecektir. Arkasından gelen bölümde, çalışmamızın hedefleri arasında olan yapılandırmacılıktaki matematiksel nesne anlayışı için Kant'ın matematiksel nesne anlayışı incelenecektir. Bunun için Kant'ın transsendental felsefesinin epistemolojisi irdelenerek Kant'ta matematiksel nesnenin ve yargının oluşması için gerekli zemin olan saf görü formları uzay ve zaman saf sezgileri incelenecek ve insanda saf matematiğin ve matematiksel yargının oluşma koşulları ve düzenekleri tespit edilecektir. Böylece matematiksel nesneleri sentetik *a priori* yargılar olarak tanımlayan Kant'a göre bu bilginin oluşma koşulları belirlenirken aritmetiksel bilginin bilinebilme dayanakları serimlenmiş olacaktır. Sonrasında matematik felsefesi içinde Platoncu realist olarak ifade edilen ve aynı zamanda Kant'ın matematiksel nesnesine bir eleştiri sunan Frege'nin mantıksal olan matematiksel nesnesinin kurulma koşulları incelenecektir. Frege'nin aritmetiğin kökenlerinde mantık ilkelerini arayışı ile ortaya çıkan anlam problemi ayrıntılı olarak değinilerek bu ilkelere ulaşma süreçlerine tanıklık edilecektir. Bununla birlikte Frege'de düşüncede ve kavramda nesnelliğin nasıl elde edildiği sorgulanarak mantıksal yargının koşulları ve doğruluğu incelenecektir. Son olarak Frege'de mantık ile matematiğin ilişkileri, matematiği mantığa indirme çabaları ve matematiğin nesnelliği irdelenecektir. Frege'nin mantıksal nesne arayışları içinde aritmetikte mantık ilkelerini türetme çabası aritmetiğin temellerine dair bir cevap oluşturması 20. yüzyılda aritmetiğin temelleri problemini oluşturur. Bu kapsamda aritmetiğin temellerine dair düşünceler olan mantıkçılık, biçimcilik ve sezgicilik görüşleri ve bu görüşlere yapılan eleştiriler matematiğin neliğine dair birer cevap oluşturmasından dolayı irdelenecektir. Bunun devamı olarak aynı kaygıyla günümüz matematik felsefesi içinde Quine, yeni-Fregeciler, adcılar (nominalizm), yapısalcılar ve yarı-deneyimcilerin görüşlerine yer vererek matematiksel nesne anlayışları tespit edilecektir.

İkinci bölümümüzde ise ayrıntılı incelediğimiz matematik felsefesi içinde matematiksel nesne anlayışlarını matematik eğitimi içinde yakalayabilmek için matematik eğitimini şekillendiren bilgiye felsefi bakış açılarından pozitivizm ve post-pozitivizm görüşlerine aralarındaki ayrımlar vurgulanarak incelenecektir. Yine matematik öğretimine bir temel oluşturan eğitim felsefesi görüşlerinden daimicilik, ilerlemecilik, yeniden yapılanmacılık ve inşacılık, esasicilik ve politeknik eğitim görüşleri incelenerek bu görüşlerin matematik öğretime yansımaları tespit edilmeye çalışılacaktır. Daha sonra öğretim teorilerinden kullanımı ülkemiz tarihinde uzun süre kullanılan davranışçı ve 2005'den beri geçiş süreci yaşadığımız yapılandırmacı yaklaşımların temelleri, bilgiye bakışları ve öğretim yöntemleri irdelenerek matematik eğitimi içindeki matematiksel nesne anlayışları yakalanmaya çalışılacaktır. Sonrasında bu irdelemeyi daha ayrıntılı yapabilmek için öncelikle matematik felsefesi içinde matematiksel nesneyi kabul eden görüşlerin genel değerlendirmesini ve gruplaması yapılarak davranışçı ve yapılandırmacı görüşlerin belirlenen bakış açısında göre değerlendirmesi yapılacaktır. Bu irdelemeler sonucunda matematik eğitimi içinde matematiksel nesne anlayışının önemi irdelenerek öğretmenin matematiksel nesne anlayışının matematik öğretimini nasıl etkileyebileceğine dair sonuçlar tespit edilmeye çalışılacaktır.[1]

---

[1] Çalışmamız sırasında bazı özel durumlarla karşılaştık. Kaynaklarımız arasında bulunan "Matematiksellik ve Matematik Felsefesi" makalesi aralarında Özcan Özbilge ve Ünal Ufuktepe'nin de bulunduğu bir grup yazar tarafından *Araf* adlı e-dergi için hazırlanmış fakat daha sonra dergi kapatılmıştır. Yazı ise Ünal Ufuktepe'nin resmi web sitesine bulunmaktadır. Yazının tam künyesini talep etmemiz sonrasında Ünal Ufuktepe bunu araştırırken acı bir haberle karşılaşır ve şöyle yazar: "Sizin sayenizde yukardaki linkten çok kötü acı bir haberi okudum, sevgili dostumu Özcan Özbilgeyi 7 Mayıs 2009 tarihinde bir trafik kazası sonucu kaybetmişiz ve benim haberim bile yok. Şu an çektiğim acıyı ve hüznü size sözcüklerle anlatmam mümkün değil. Eğer bu yazımı kullanacaksanız bu yazıyı Özcan'nın güzel ruhuna, kalbine, bilincine adadığımı yazın lütfen." Biz de burada Özcan Özbilge'yi bu çalışma vasıtasıyla yâd ediyoruz.

# 1. BÖLÜM: MATEMATİK FELSEFESİNİN TEMEL SORUNLARI KAPSAMINDA MATEMATİKSEL NESNE

Tarih içinde matematiğin gelişmesi bilimsel gelişmelere önayak olmuş, bilimleri değiştirdiği gibi çağların ve tarihin değişiminin sebeplerinden birini oluşturmuştur. "Bilimsel Devrim ve Stratejik Anlamı" başlıklı eserinde İnönü, önemli matematiksel keşiflerin yol gösterdiği bilimsel gelişmelerin nasıl bilimsel devrime dönüştüğünü şöyle özetler:

> 1637'de Descartes'in *Yöntem Üzerine Nutuk* adlı ünlü felsefe eseri çıkıyor ve insanları mantıklı düşünmeye çağırıyor. Bacon ise1620 yılında *Novum Organum* adlı kitabında, insanın bilgilenerek güç kazandığını vurguluyor ve yeni bilgilerin ancak gözlem ve deneylerden tümevarım yoluyla çıkarılabileceğini anlatıyor. Descartes analitik geometriyi, Newton ve Leibniz diferansiyel ve integral hesabını icat ederek matematikte yeni ufuklar açıyorlar. Newton 1686'da *Tabiat Felsefesinin Matematiksel İlkeleri* adlı kitabıyla mekanikte Galileo'nun başlattığı atılımı sonuçlandırıyor; mekanik biliminin ilkelerini ortaya koyuyor; bu ilkelerle ve evrensel çekim yasasıyla hem dünya üzerindeki, hem göklerdeki tüm maddesel hareketleri açıklayabiliyor. 150 yıl içinde meydana gelen bu gelişmeler, 2000 yıldır doğuda, batıda çeşitli kurumlarda okutulmakta olan Aristoteles fiziğini, Ptolemaios astronomisini, Galenos ve İbni Sina tıbbını ortadan kaldırıyor. Onların yerini fizikte, astronomide, tıpta yeni buluşlara dayanan öğretiler alıyor. 2000 yıllık bir geleneğin 150 yılda değişmesi bir devrim niteliği taşıdığı için bilimsel bir devrimden bahsediliyor (İnönü, 2010: s. 21-22).

Fakat matematiğin gelişmesi ne demektir? Matematik nasıl gelişir, matematiğin gelişirken kullandığı araçlar nelerdir? Matematik yapmak ve geliştirmenin matematiğin doğası ile bağı nasıldır? Bunlara ek olarak diğer bir alan olan matematik eğitimi hakkında şu soruları sorabiliriz: Matematik eğitiminin matematiğin doğasını anlama ile bağları var mıdır? Varsa nasıldır? Matematik eğitimi tüm dünyada ve tüm tarihsel süreçler boyunca önemli ve zor muydu? Bilinen şu anekdot ilginçtir: "Uykusundan, düşman saldırısının başlaması nedeniyle uyandırıldığında Napolyon'un tedirginliğini, 'Hay Allah'ım, ben de matematik sınavı var sandım!' diye açığa vurduğu söylenir." (Yıldırım, 1996: s. 150). Savaşlardan korkmayan bu adamı matematikten korkutan şey neydi acaba? Platon akademisinin kapısına "Geometriyi bilmeyen içeri girmesin!" (Yıldırım, 1996: s. 25) yazarken yaşamı anlamak ile geometriyi nasıl örtüştürmüştür? Peki ya geometri yapmak ile geometrik nesnenin içkin özellikleri arasındaki bağlar nasıldır? Örneğin bu konuda Eucleides, MÖ 300 yıllarında, tüm dünyayı hala derinden etkileyen geometrisini (postulatları), çağdaşı matematikçi filozof Eudoxus'un ispatladığı teoremleri mantıksal ilişkiler içinde örgün biçime getirerek oluşturmuştur (Yıldırım, 1996: s. 26). Acaba geometri yapmanın koşulları geometrinin ne olduğunu açıklar mı? Geometri yapmanın koşulları değiştiğinde geometri nesnesinin içkin özellikleri, doğası ne kadar değişmiş olur? Matematik üzerine düşünmeye başladığımızda cevaplarını arayacağımız bu soruları oluşturabilir ve zamanla geliştirebiliriz. Fakat bildiğimiz bir şey var ki o da matematik bilgisi üzerine düşünmek, matematiğin doğasını anlamaya çalışmak, matematik yapmaktan farklıdır. Matematikle uğraşan düşünürler yaptıkları ya da o zamana kadar yapılan matematiğe bakıp tarih içinde onu tanımlaya girişmişlerdir. Büyük filozofların matematik üzerine soruşturmalar yürüttükleri görülmektedir. Platon, Aristoteles, René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz, David Hume, Immanuel Kant gibi filozofların matematiksel düşünce ve matematik bilgisi hakkında önemli görüşleri bulunmaktadır. Bu filozoflar matematiksel düşünceyi ve bilgisini kendi görüşleri çerçevesinde açıklamaya çalışmışlardır. Bunlardan başka, Gottlob Frege, Bertrand Russell, Henri Poincaré, David Hilbert, Luitzen Egbertus Jan Brouwer gibi matematikçi olan düşünürler de matematiğin doğası ve içkin yapısına dair önemli yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Çitil, "Matematik ve Felsefe" makalesinde "Matematiğe ve matematik felsefesine ciddi bir biçimde eğilmeksizin felsefe yapılabilir mi?" diye sormaktadır. Buna kısmen "evet" cevabı verilebilir fakat gözden kaçırılmaması gereken bir nokta vardır o da şudur:

> Görünüşte matematik ve matematik felsefesi ile ilgisi yokmuş gibi görünen bir alanda mesai yapmakta olan bir felsefeci, hem kendisinin hem de üzerinde tartışma yürüttüğü düşünürlerin, matematiğin mahiyeti üzerine belli bir kabulden hareketle felsefi konumlarını belirlemiş olduklarını fark etmek durumundadır (Çitil, 2013: s. 24).

Çitil'e göre felsefeci, yürütülen tartışmalar her ne alanda olursa olsun, söz konusu tartışmanın hangi zemine dayandığını anlamak için mantıkla dolayısıyla matematiksel mantıkla ilgili gelişmelere yabancı kalamayacağının farkında olmalıdır (Çitil, 2013: s. 24).

Çağdaş matematik felsefesi, genellikle Gottlob Frege (1848-925) ile başlatılır (P. Kitcher  ve W. Aspray'den akt. Gür, 2011: s. 22). "Frege modern mantığı geliştirmiş ve bu mantığın üzerine matematiğin temellerini oturtmaya çalışmıştır." Bu hedefle matematik felsefesi, matematiksel bilgiye temel arayışı olarak başlamıştır (Gür, 2011: s. 22). 19. yüzyıl sonlarında yaşanan ateşli tartışmaların başlattığı matematiğe temel arayışları, çağdaş anlamda matematik felsefesini başlatmış ve zamanla gelişen bu alanda, matematik bilgisi üzerine soruşturmalar devam etmiştir. Elbette matematik üzerine düşünme çok daha eskilere dayanır. Barker'a göre "Felsefe eski Yunan'da başladığından beri, matematik, felsefi problemlerin en büyük kaynaklarından biri olmuştur." (Barker, 2003: s. 3). Günümüzde ise hala matematik felsefesinin görevleri ve çözümleyemediği tartışmaları devam etmektedir.

Günümüz filozoflarından Maddy "Matematik filozofunun görevinin, matematiği reform etme değil, onu tanımlama ve açıklama olduğunu kabul ediyorum " der (Maddy'den akt. Gür, 2011: s. 12). Fakat tarihte matematiği tanımlamak oldukça güç olmuştur. Matematiğin adeta kutsal bir şey olduğunu ifade eden şu anonim söz çok ilginçtir: "Eksi çarpı eksi artı edecek, böyle yazılacak böyle bilinecek, kimse NEDEN demeyecek" (Baki, 2014: s. 12). Başlangıç tarihi tam olarak bilinmemesine karşılık ilkel sayma becerisini aşan matematiğin İÖ 5000 yıllarına uzanan bir tarihi olduğu düşünülmektedir. Antik yunan öncesinin tümü Sümer, Babil, Mısır, Hint ve Çin gibi doğu kültürlerinin bir ürünüdür. Başlangıçta arazi ölçümleri, alış-veriş veya basit hesap işlemleri gibi pratik ihtiyaçların giderilmesi için geliştirilen matematik Antik Yunan ile yeni bir kimliğe kavuşur (Yıldırım, 1996: s. 19). Mantıksal çıkarım yöntemlerinin deneyimsel ve gözlemsel matematiğe üstün sayıldığı dönemde Eucleides, Thales ve Pythagoras gibi düşünürler matematiğe sistematik bir biçim kazandırmışlardır. İspatlama yöntemlerinin geliştiği bu dönemde akıl yürütmeyi gözleme ve deneye üstün görmüşlerdir. Platon'a göre "matematik yetkin bilginin biricik örneğidir" (Yıldırım, 1996: s. 25). Matematiğe hesaplamalar noktasında önemli bir yol aldıran büyük matematikçi K. F. Gauss'a (1777-1855) göre ise "Matematik bilimlerin sultanı, hesap ise onun tacıdır."[2] Buluşları ile dünyanın başını döndüren Galileo (1564-1642) ise matematik için, "Evren matematiğin dili ile yazılmıştır; harfleri üçgen çember ve diğer geometrik nesnelerdir. Bunları bilmedikçe onun bir

[2] İsmihan Yusubov, *Matematik Güzeldir-Anlamanın Sevinci ve Kederi*, İstanbul: Bilim ve Gelecek Kitaplığı, 2008, s. 179-180.

sözcüğünü bile anlamayız. Matematiğin dilini bilmeyen için evren içinden çıkılmaz karanlık bir labirent gibidir." (Yıldırım, 2011: s. 45) demiştir.

Matematiğe dair birçok efsanevi görüş de vardır:

> Matematik soyut ve insan varlığının/bedeninin dışındadır.
> Matematiğin nesnel bir varlığı vardır. Bu evrenin ve olası tüm evrenlerin yapısını oluşturur, insandan ve olası tüm diğer varlıklardan bağımsızdır ve onlara aşkındır.
> Matematik, mantığı bile karakterize eder ve böylelikle aklın kendisini yapılandırır.
> Matematiği öğrenmek, dolayısıyla doğanın dilini öğrenmektir. Bu dil, öyle bir düşüncedir ki, evrendeki ileri bir zekaya sahip herhangi bir varlık tarafından paylaşılabilir olmalıdır. (Kuryel, 2013: s. 13).

Öte yandan matematiğin hatalar barındırabileceğini ifade eden Handal'a göre; "tüm bilimlerin en mükemmeli" (Lakatos), "tüm bilimlerin anası" (Mura), "tüm bilimlerin kraliçesi" (McGinnis, Randy, Shama, McDuffie, Huntley, King, & Watanabe) gibi benzetmelerle matematiğin hatasız ve mükemmel bir disiplin olduğu gösterilmeye çalışılmıştır (Handal, 2009: s. 1). Ama matematikçiler yaptıkları işi tanımlamaya devam etmişlerdir: Bir matematikçi olan De Corte için "yaşamın soyutlanmış biçimi" Baki'ye göre ise matematik; "tüm olası örüntülerin incelenmesidir" (Altun, 2009, s. 1). Yine bir matematikçi olan Ufuktepe ise, matematiği şöyle tanımlamıştır: "Matematik, Eucleides Geometrisi, Cebir, Grup Teorisi, Analiz, Reel Analiz, Karmaşık Analiz, Olasılık, Fonksiyonel Analiz, Diferansiyel Denklemler, Eucleides-dışı Geometri ve daha nice disiplinlerin ortak özelliği ve birleşimidir" (Ufuktepe, 1995: s. 1). Türk Milli Eğitim Bakanlığı (1996) tarafından matematiğin tanımı ise şöyle yapılmıştır: "Matematik; düşüncenin tümdengelimli bir işletim yolu ile sayılar, geometrik şekiller, fonksiyonlar, uzaylar vb. soyut varlıkların özelliklerini ve bunlar arasında kurulan ilişkileri inceleyen bilimler grubuna verilen genel addır." (Altun, 2009: s. 1). *Oxford Sözlüğü*'nde, "sayı, miktar ve uzay bilimi"dir; *The American Heritage*'ta tanım "miktar ve kümelerin arasındaki ilişkileri sayı ve sembol kullanarak araştırır" biçiminde verilmişken *TDK Türkçe Sözlüğü*'ne göre "Aritmetik, cebir geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı, riyaziye" biçimindedir (Gür, 2011: s. 17). Matematiğin ne olduğuna dair Cemal Yıldırım şöyle yazar:

> Matematik nedir? (…) Hemen belirtmeli ki, sürekli çabalara karşın, bu soruya yetkili kafaların üzerinde birleştiği bir yanıt henüz verilememiştir. Körlerin dokunarak tanılamaya çalıştıkları fil gibi: Matematik, kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zekâ oyunu; kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniği. Matematikçilerin gözünde ise matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemi. Matematiği "bilimlerin kraliçesi" sayanlar yanında, hizmetinde görenler de var. Hatta onu ne olduğu, neyle uğraştığı belli olmayan, salt bir zihinsel çıkarım ya da dönüştürme işlemi diye niteleyen, ya da karmaşık kavramsal bir labirente benzeten saygın filozoflara rastlamaktayız (Yıldırım, 1996: s. 12).

Ünlü matematikçi filozof Leibniz, felsefe ve matematiği ayrılmaz görür ve şu tarihi sözleri eder: "Matematik olmaksızın, felsefenin derinliklerine nüfuz edemeyiz. Felsefe olmaksızın, matematiğin derinliklerine nüfuz edemeyiz. İkisi olmaksızın, hiçbir şeye nüfuz edemeyiz" (Leibniz'den akt. Gür, 2011: s. 1).

Sürekli gelişen, dönüşen ve böylece değişen bir alan olan matematiğin tamamını kapsayacak bir tanım bulunamayacağı düşünülebilir fakat matematiğin doğasını anlama çalışmaları matematik felsefesi içinde de devam edecektir kuşkusuz. Yine bir matematik felsefecisi olan Körner matematik felsefesinin matematik teoremlerini doğrudan aktarmadığını dile getirir. Tymoczko ise matematik felsefesinin insanoğlunun nasıl matematik yaptığını ve bu disiplinin temel özelliklerini ortaya çıkardığını söyler (Gür, 2011: s. 12). Günümüzün bir matematik eğitimcisi ve matematik felsefecisi olan Paul Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education* adlı eserinde, matematik felsefesinin şu sorularla ilgilendiğini söyler: "Matematiksel bilginin temeli nedir?, Matematiksel gerçeğin doğası nedir?, Matematiksel gerçekleri ne karakterize eder?, Bu iddiaların gerekçeleri nelerdir?" (Ernest, 1991: s. 3). Imre Lakatos (1922-1974) ise bir kısım felsefeciyi eleştirerek, matematik felsefesinin matematik tarihine ve tecrübi bilgiye dayanması gerektiğini savunur. Ona göre, "Felsefenin yol göstericiliğinden yoksun matematik tarihi *körleşmekten*, matematik tarihindeki enteresan gelişmelere sırt çeviren matematik felsefesi de *koflaşmaktan* kurtulamaz." (Lakatos'tan akt. Gür, 2011: s. 404).

Imre Lakatos ve Ludwig Wittgenstein'in (1889-1951) yaklaşımını esas alan Ernest matematik felsefesinin alanını genişleterek, matematik felsefesinin şu on üç sorun ile ilgilenmesi gerektiğini belirtir:

1. Matematiksel bilginin gerekçelendirilmesi;
2. Matematiksel nesnelerin niteliği ve ontolojik konumu;
3. Matematiğin bizden ve zamandan bağımsız olduğunu ileri süren Platonculuğun bu kadar makul ve başarılı bir bakış olmasının nedenlerinin açıklanması;
4. Matematikçinin pratiği ile matematiğin kendi niteliğinin (ne olduğunun) ilişkisi;
5. Öznel matematiksel bilgi ile kabul görmüş matematiksel bilginin ilişkisi;
6. İnsanın mevcut matematiği nasıl öğrendiği;
7. İnsanın matematiksel bilgiyi yeni bir bilgiye nasıl dönüştürdüğü;
8. Matematiksel bilginin gelişimi;
9. Dil, matematik ve (kil tabletlerinden bilgisayara kadar) bilgi teknolojilerinin birbiriyle ilişkisi;
10. Tarihin, matematik felsefesini nasıl aydınlattığı;
11. Matematik ile diğer bilgi alanları, değerler, kültür ve tecrübe ilişkisi;
12. Saf (pür) matematiğin, bilim ve "gerçek" hayatta uygulamalarının çok kullanışlı olmasının açıklanması;
13. Matematiksel bilginin nasıl değerlendirildiği veya takdir topladığı, değerlendirme sürecinde değerlendirme sürecinde herhangi bir ölçütler topluluğunun olup olmadığı (Ernest'ten akt. Gür, 2011: s. 14).

Matematik felsefesi için yeni bakış açıları önerdiği "Matematik Felsefesinin İhyası İçin Bazı Öneriler" adlı makalesinde, günümüz matematik felsefecisi Reuben Hersh, matematik felsefesinin yeni bir başlangıca ihtiyacı olduğunu savunur (Hersh, 2004: s. 399-427). Onun gibi düşünen başka yazarlar da vardır. Örneğin Carlo Celluci'ye göre "Matematik felsefesinin hala yeni bir başlangıca gereksinimi vardır, çünkü iki temel sınırlamaya sahiptir." (Celluci, 2013: s. 73). Bunlardan ilki, matematik felsefesi, matematiğin doğası sorununa diğer her şeyden yalıtılmış biçimde yaklaşılabileceğini varsayar. İkincisi ise, matematiksel düşünceyi hangi bilişsel süreçlerin mümkün kıldığını dikkate almadan bu soruna değinilebileceği kabul edilir. (Celluci, 2013: s. 73-74). Buna göre, matematiksel düşünmeye insanın bilişsel yapısından bağımsız yaklaşabilir ve saf matematiksel düşünce bu çerçevede değerlendirilebilir. Matematik felsefesinin sorunlarını bu aşamada iki temel soruna indirgeyebiliriz:

1. Matematiksel epistemolojinin nasıl olanaklı olduğu, matematiksel düşüncenin ve matematiksel nesnenin ontolojik mekânının ne olduğu ve matematiksel nesnenin nasıl tanımlandığına ilişkin sorunlar.
2. Matematikle insanın etkileşiminin oluşturduğu sorunlar.

Bu maddelerden yola çıkarak matematik felsefesini ilgilendiren iki temel sorundan bahsedebiliriz. İlki "matematiksel düşünce", ikincisi "matematiksel bilgi". Matematiksel düşünce problemi; matematiğin varlığına, saf matematiksel epistemolojinin içkin yapısına dair olan ve ona ulaşılmasının mümkün koşullarına ya da onu üretmenin mümkün koşullarına, ulaşılan ya da üretilen bilginin varlıksal niteliğine dair olandır. Matematiksel bilgi problemini ise; hali hazırda olan matematiğin kullanımının yaşamla örtüşmesine, öğrenilmesi ve öğretilmesine dair olan sorunlar oluşturur. Bu çalışmanın amacını bu çerçevede şöyle tekrar vurgulayabiliriz: "Matematiksel bilgi"nin ve "matematiksel düşünme"nin öğretilmesini, "matematiksel düşünce içindeki matematiksel nesne"nin varlıksal niteliğine yönelik bakış açısının nasıl etkilediğinin aydınlatılması. Çitil bu konuda "matematik felsefesinin, genelde de felsefenin nesneye, nesnenin kuruluşuna ve düşünceye konu edilişine ilişkin ilgisinin artmasının kendi deneyimimizi anlamamıza yardımcı olacağına inanıyoruz." (Çitil, 2012: s. 8) demektedir. Bu ilginin artmasının matematik felsefesinde olduğu gibi matematik eğitiminde de önemli olduğu inancındayız. Bu nedenle matematiksel nesnenin tasarımının veya kuruluşunun matematik eğitimi içinde nasıl şekillendiğini bunu incelemeyi amaç edindik. Bu bakış açısı ile önce matematiksel nesnenin kuruluşunun klasik felsefede, matematik/felsefe okulları içinde ve sonrasında da günümüz matematik felsefesi içinde nasıl olduğunu inceleyelim.

## 1.1. Matematiksel Nesne Sorunu

Matematiksel ifadeler bir nesne midir? Eğer nesneyseler onlar nasıl nesneleşmektedirler? Nesne olunduğunda hangi özelliklere sahip olunur? Bir şeyi nesneleştiren öz nedir? Matematiksel ifadeleri bir matematiksel bir nesne haline getirmeye çalışan görüşler arasında da onların nasıl bir nesne olduğu konusunda görüş ayrılıkları oluşmuştur. İlk bakışta matematiksel neneleri soyut nesne olarak değerlendirebiliriz fakat bu yaklaşım o soyut nesnenin kaynağı konusunda aydınlatıcı değildir. Matematiksel nesnenin görüngüsel nesneye ancak ilksel biçimiyle ve zaman zaman gönderme yapabildiğini söyleyen Kanat, onun matematiksel kiplikteki bilginin nesnesi olduğunu ve kendi bilgisini kendi kavramlarına denk düşen imlerle ortaya koyduğunu söyler (Kanat, 1997: s. 117-118). Çalışmamızda tarihteki çeşitli matematik nesne görüşlerine değinilerek Kant'ın *sentetik a priori* olan matematiksel nesne görüşü ve Frege'nin *mantıksal nesne* olarak açıkladığı matematik nesne anlayışını ayrıntılı incelenecektir.

### 1.1.1. Matematiksel Nesne Hakkında Görüşler

Aristoteles *Metafizik* kitabında, matematiğe kendini adayan ilk insanlar olarak bahsettiği Pythagorasçılar'ın, matematiğin ilkelerini her şeyin ilkeleri olarak gördüklerini yazar. Onlara göre sayılar doğaları gereği ilk[3] (şeyler) olduklarından, var olan veya varlığa gelen şeylerle sayılar arasında ateş, toprak ve su arasında olduğundan daha fazla benzerlik bulunmaktadır. Onlara göre sayıların bir özel biçimi adalet, diğer bir biçimi ruh ve akıl, bir diğer biçimi ise uygun zamandır. Bunlar gibi diğer bütün şeyler sayılarla ifade edilebilir. Onlar sayıların öğelerinin her şeyin öğeleri olduğunu ve bütün göğün bir ahenk ve sayı olduğunu düşünmüşlerdir. Pythagorasçılar şeylerin sayıların "taklit edilmesi" ile var olduklarını söylemişlerdir (Aristoteles, 2010: s. 99-110). Arslan'a göre, onlar bununla, "şeylerin duyusal ve dış doğalarının sayısal özellikte olan iç doğalarına uyduğunu söylemek istemişlerdir." (Aristoteles, 2010: s. 111). Platon ise sadece bir ad değişikliği ile sayıların idealardan "pay alma" yoluyla var olduklarını söylemektedir. Fakat idealardan pay almanın veya onların taklit edilmesinin niteliği, Aristoteles'e göre Platon ve Pythagorasçılar tarafından çözülmemiş bir konudur. Platon duyusal şeyler ve ideaların dışında matematiksel nesnelerin varlığını kabul eder. "Bunlar ezeli-ebedi ve hareketsiz olmaları bakımından duyusal nesnelerden; ideanın kendisinin biricik, bireysel ve tek bir gerçeklik olmasına karşılık, birden fazla sayıda olmaları bakımından İdealardan ayrılan 'aracı' gerçekliklerdir." (Aristoteles, 2010: s. 108-112). Yine Arslan'a göre Platon,

[3] . Sayı
. . Doğru
. . . Yüzey
. . . . Cisim
Pythagorasçılar için bu on nokta her şeyi içine alan mükemmel sayıdır ve sayı, bu büyüklüklerin ilkidir (Aristoteles, 2010: s. 101).

matematiği, idealar ile duyusal şeyler arasında aracı olarak görür ve bu sistemi "mathematika" kuramı olarak adlandırır. İdeal büyüklüklerin matematiksel büyüklüklerle ilişkisi, ideal sayıların matematiksel sayılarla ilişkisinin aynıdır. Duyusal varlığın İdeaya indirgenmesi "mathematika"lar aracıyla olmaktadır (Aristoteles, 2010: s. 112). İdealar diğer şeylerin nedenleri olmalarından dolayı Platon, onların öğelerinin her şeyin öğeleri olduğunu düşünmektedir:

> Böylece İdeaların ilkeleri, madde olarak Büyük ve Küçük olan, formel töz olarak da Bir olan'dır. Çünkü (ideal) sayılar Büyük ve Küçük olan'dan hareketle ve Büyük ve Küçük olan'ın Bir olan'dan pay almasıyla meydana gelmektedir (Aristoteles, 2010: s. 112).

Arslan'ın yorumuna göre, Aristoteles'in *Ruh Üzerine* kitabında verdiği biçimiylegöre Platon'un *varlıklar hiyerarşisi* şöyledir:

| | |
|---|---|
| İdeal Sayılar<br>İdeal Büyüklükler | İdealar |
| Matematiksel Sayılar<br>Matematiksel Büyüklükler<br>Duyusal Şeyler | *Metaksy* (Aracı Gerçeklikler) |

(Aristoteles, 2010: s. 112-113).

Burada duyusal şeyler ile idealar arasında bir geçiş için matematiğin aracı olarak kullanıldığı gösterilmektedir.

Pythagorasçılar sayılar ile "şey"leri bir olarak görürken Platon onları birbirinden ayırır. Platon'un Pythagorasçılardan farklı olarak Bir olan'ı ve sayıları şeylerden ayırmasının ve İdeaları ortaya atmasının nedeni, mantıksal düzene ilişkin araştırmalarıdır (Aristoteles, 2010: s. 99-114). Arslan'ın bu konuda yaptığı açılım şöyledir:

> Sokrates'in *Phaidon*'da ilk defa ortaya attığı tanımlar yönteminde,(…) şeyleri, "olaylar" (*erga*) bakımından değil, kavramlar ve tanımlar (*logoi*) bakımından göz önüne almaktadır. Bu kavramlar Platon'da mantıksal bir araştırmanın hareket noktası ödevini görürler. Bu araştırma onları konuşmada, düşüncede sahip oldukları karşılıklı ilişkilerine göre düzenlemekle sonuçlanır. Tanımlar yöntemine sadık olan Platon, o halde, Pythagorasçı görüşü iki noktada terk edecektir: Birincisi olarak o, sayının şeylerin doğasının kendisini teşkil ettiğini kabul etmesinin imkansız olduğunu itiraf etmekteydi. İkinci olarak, belli bir sayı, artık bir şeyin

> özünü ifade edemezdi. Aristoteles'in (…) işaret ettiği gibi (…) her iki öğretide de birlik, şeylerin tözüdür, bir niteliği değildir ve sayılar, duyusal şeylerin tözünün nedenidir (Aristoteles, 2010: s. 114).

Aristoteles tözü iki bakımdan ele alır. İlki, töz var olmak için başka bir şeye gereksinim duymamak, kendi başına bağımsız olarak var olmak bakımından "asıl var olan"dır. İkincisi ise töz bir şeyi o şey yapan şeydir; yani bir şeyin formu, özü ya da neliğidir (Özcan, 2011: s. 41-43). Yine Arslan'ın yorumuna göre; Aristoteles matematiksel şeylerin, ne duyusal varlıkların tözleri ne de duyu-üstü gerçekler olduğunu söyler. Ona göre matematiğin konusu duyusaldan ayrı varlıkların değil, duyusal şeylerin incelenmesidir: "Yalnız duyusal bir maddeye ve bu maddeyle birlikte bulunan niteliklere sahip olması bakımından değil, büyüklük ve şekle sahip olması bakımından duyusal şeylerin incelenmesidir" (Aristoteles, 2010: s. 531).

Matematiksel nesnenin varlığı 20. yüzyılda matematik felsefesinin başlıca konusu olmuştur. Bu anlamda iki ana soru vardır: Onun ontolojisi, yani matematik ne tür nesneler hakkındadır? İkincisi ise onun epistemolojisi, yani matematiği nasıl bilebiliriz? Fakat 17. ve 18. yüzyılda Descartes, Locke, Hume ve Kant, matematiksel nesnenin varlığı sorununun matematiğin konusu dışında olduğunu düşünmüşlerdir. Bir rasyonalist olarak Descartes, matematiksel bilginin evrensel ve akıl yönüne vurgu yaparak onun nesnelerinin de zihinsel ve dolayısıyla değişmez olduğunu söylerken, bir başka rasyonalist olan Leibniz de, matematiksel bilginin deneyimden bağımsız akıl bilgisi olduğunu (*truth of reason*) ve ama analitik olduğunu iddia etmiştir. Matematiksel doğruların çelişmezlik yasası temelinde ispatlanabileceğini öne süren Leibniz, bunlar arasında bir özdeşlik olduğunu belirtir: "Zorunlu hakikatler, içerdikleri terimlerin tahliliyle ispatlanabilen özdeş doğrulardır; tıpkı cebirde nasıl değerler yerine konulduğunda özdeşliğe yahut eşitliğe ulaşılması gibi. Yani, evrensel hakikatler, çelişmezlik ilkesine dayanır." (Yalçın, 2003a: s. 130). Hatta Leibniz, bazen evrensel ve zorunlu hakikatlerin sadece matematikle elde edilebileceğini söyler: "Leibniz'e bakılırsa, zorunlu ile evrensel hakikatlere yalnızca salt matematikte, özellikle aritmetik ile geometride ulaşılabilir." (Yalçın, 2003a: s. 130). Bu kimliği dolayısıyla matematiksel yargıların empirik dünyayla bir ilişkisinin olması imkânsızdır, zira empirik dünyanın nesneleri zorunlu ve ezeli olmayıp mümkün ve değişkendir (Yalçın, 2003a: s. 130). Descartes aynı zamanda "aritmetik, geometri ve bu türden diğer konuların” uğraştığı şeylerin “doğada olup olmamasına gerçekten “çok aldırış etmemek” gerektiğini belirtir. Bununla birlikte Platon problemleri çözmek için hipotezlerin nasıl bulunacağı hakkında bir açıklama yapmazken, hipotezlerin sonuçlarının birbiriyle uyumlu olduğunu, fakat deneyimle uyum içinde olduklarının bir garantisini vermediklerinin altını çizer (Celluci, 2013: s. 77-82). Matematiksel nesnelerin yaşamla nasıl uyumlu olabildiği sorunu hala tartışılmakla birlikte cevabı aranan diğer bir soru ise şudur: “Matematiksel nesne insan zihninin bir ürünü müdür?” yoksa “Matematiksel nesneleri zihinsel etkinliklerimizden ve kararlarımızdan bağımsız ve nesnel olarak var olan soyut nesneler midir?” Celluci’ye göre matematiksel nesnelerin zihinsel etkinliklerimizden ve kararlarımızdan bağımsız ve nesnel olarak var olduğunu destekleyen bilimsel bir kanıt yoktur. Ona göre matematiksel nesneler insanların problemleri çözmek için geçici olarak oluşturdukları hipotezlerdir ve bunlar yalnızca onu üreten ve kullananların zihninde vardırlar (Celluci, 2013: s. 81). Matematiksel nesnenin neliğine dair görüş öne süren Platonculuk, realizm ve nominalizmi bu içerik bağlamında inceleyelim.

Platon diyaloglarında bir kavramın, eylemsel “içeriği” ile onun aslında “ne” olduğunun farkını vurgular. Örneğin onun, erdemli davranışı “*erdemli olmak”*tan ve erdemliliği, “*erdemli olmayı öğretmek*”ten ayırdığını Protagoras diyaloğunda görmekteyiz. Platon diyaloglarında kavramsal bilginin önemini vurgulamaktadır. Çotuksöken *Felsefi Söylem Nedir?* kitabında bunu şöyle dile getirir:

> ‘Varolanı varolan yapan nedir?’, ‘Varolanı varolan yapan nasıl bilinebilir’, ‘Bu bilindiği takdirde başkalarına nasıl aktarılabilir?’, ‘Nesnellik nasıl sağlanabilir?’ türünden sorularla Platon’un temel kaygılarını dile getirmek olanaklı gibi görünüyor. Başka bir deyişle Platon, öznel bilginin sınırlarının ötesine geçmek istiyor ve öznel bilgi ancak varolanın, tek tek varlıkların, nesnelerin ‘işte o’ olmalarını sağlayan bir temel, bir ilke, biçim, İdea, *eidos*, bulunduğunda, ona ulaşıp dile getirildiğinde nesnelliğe kavuşabilecektir. Tekil varlığın temeli öylesine etkin bir şeydir ki o, tekil şeyin dışındadır, dışında olmalıdır; sanki içinde olursa bir ilke, bir biçim, bir neden olması mümkün olmayacak ve yine duyulur olanla karışıyor gibi görünecektir; oysa o salt düşünür olandır; saf, katışıksız bir biçimde varolanın dışında, ama onu asıl varedendir (Çotuksöken, 2000: s. 64).

Bu açıklamada vurgulandığı gibi "salt düşünülür olan" Platon tarafından önemsenir ve bu yüzden matematik saf düşünülür olan olduğundan duyusal olanın dışında tutularak biricik görülür. Platonculuğa göre matematiksel nesne, zaman, zihin ve dilden bağımsız bir şekilde varlığını sürdürür (Gür, 2011: s. 19). Soyut nesneler, örneğin sayılar ise "olgusal dünya ile nedensel ilişkisi olmayan, varlığı düşüncemizden bağımsız yetkin 'form' ya da 'idea'lar" dır. Biz, onları, algımızla değil aklımızın daha önceden idealar dünyasını deneyimlemiş olmasından ötürü biliriz (Yıldırım, 1996: s. 57).

> Örneğin, $\pi$ sayısı Platonculara göre, "evrensel" bir nesne olarak sürgit varolmuştur. Matematikçinin onu bilmesi bir gözlem ya da araştırmanın sonucu değil, bir çağrışım, hatırlama ya da iç kavrayışın sonucudur (Yıldırım, 1996: s. 57).

Matematikçilerin çoğunun yaygın olarak Platoncu olduğu kabul edilir. Hatta Hersh'e göre, birçok çalışan matematikçi, hafta içi Platoncu, hafta sonları biçimci olduğu noktasında hemfikirdir. Ona göre matematikçi matematik yaparken, özelliklerini belirlemeye uğraştığı şeyin nesnel bir gerçeklik olduğundan emindir. Fakat daha sonra kendisinden bu gerçekliğin felsefi yönü istendiğinde ise, beklenenin aksine ona inanmıyormuş gibi davranmayı en kolayı olarak görmektedir (Hersh, 2011: s. 376).

Brown ise, Platonculuğun çekirdeğinin şu maddelerden oluştuğunu belirtir:

1- Matematiksel nesneler gerçektirler ve bizden bağımsız olarak vardırlar.

2- Matematiksel nesneler, zaman ve mekânın dışındadırlar.

3- Matematiksel varlıklar, bir bakıma soyuttur bir bakıma soyut değildir. (Matematiksel varlıklar, fiziksel bir varlığa sahip olmama manasında soyutturlar, fakat sözgelimi 2 sayısının tikel olması, evrensel olmaması manasında soyut değillerdir.)

4- Matematiksel nesneleri sezebilir ve matematiksel hakikati kavrayabiliriz.

5- Matematik empirik değil, *a priori*'dir (tecrübeden bağımsız olarak ulaşılabilen bilgi).

6- *A priori* olmasına rağmen matematiğin, kesin doğru olması gerekmez.

7- Platonculuk, diğer görüşlerden daha fazla, matematiksel hakikati arama tekniklerine açıktır (Brown'dan akt. Gür, 2011: s. 20).

Fakat bu görüşlerden matematiğin kesin olmayacağını söyleyen 6. maddeye bütün Platoncular katılmaz. "Safkan" Platoncuların bir kısmına göre matematik kesin doğru bilgiye sahiptir. Bununla birlikte Platonculuk, matematiksel nesnenin nasıl var olduğu ve bizim onlar hakkında nasıl bilgi sahibi olduğumuz hakkında açıklama getirmemekle birlikte matematikçiler arasında fazlaca kabul gören yaygın bir görüştür. Hatta Bernays'ın deyimiyle Platonculuk matematikte "taht kurmuştur" (Gür, 2011: s. 21).

Matematikte "realizm"in sözlük anlamı, "özel olarak sayıların, genel olarak da matematiğin nesnelerinin, onları yaratmak yerine, keşfeden zihinden bağımsız olarak varolduğunu savunan görüş"tür; "realizm"in diğer bir tanımı ise "Dünyada kipsel olgular, yani '…zorunlu olarak y'dir' veya '…nin y olması mümkündür' benzeri önermelerle betimlenen, dilimizden ve düşüncemizden bağımsız olgular bulunduğu görüşü"dür (Cevizci, 2003: s. 343). Yıldırım ise realizmi, "soyut nesneleri somut nesneler gibi nesnel gerçekliğin bir parçası sayma" olarak açıklamaktadır (Yıldırım, 1996: s. 57).

> Realizmin temel ilkeleri şunlardır:
> 1. Biz kişiler; nesneler gibi birçok şeyin gerçek olarak varoldukları bir dünyada yaşamaktayız.
> 2. Gerçek nesneler, onların varlıklarına ve yararlarına ilişkin istek ya da tercihimize bağlı olmaksızın vardır.
> 3. Bu nesnelerin bilgisine aklımızı kullanarak ulaşmak mümkündür.
> 4. Bu nesneler ilişkin bilgiler, bunların bağlı olduğu kanunlar ve bunların birbiriyle ilişkileri insan davranışlarına yol gösteren en güvenilir olgulardır.
>
> Özetle realizm, gerçekliğin nesnel bir düzeni olduğunu ve insanların bu gerçekliğin bilgisine ulaşma yetilerinin bulunduğunu ileri süren bir felsefe olarak tanımlanabilir. Dahası bu felsefe gerçekliğin bilgisini kurallar halinde belli bir düzene sokarak ifade etmek gerektiğini ileri sürer (Gutek, 2006: s. 36).

Gutek'e göre realizmin babası Aristoteles'tir. "Platon, mükemmel form veya düşüncelerin mutlak dünyası üzerine düşünürken; Aristoteles, doğal ve sosyal olgular dünyasını araştırmak için yaygın gözlem yöntemlerini kullanmıştır." Bu gözlem ve araştırmaların sonucunda Aristoteles, gerçeklik ve olasılığın bileşimi olarak tanımlanan varlık'ı ortaya çıkaran bir metafizik sistem kurmuştur. Ona göre gerçeklik tam ve mükemmelken, olasılıkta mükemmel olma potansiyeli vardır (Gutek, 2006: s. 37).

Modern realizmde sayı, bir tür "gözlem"le doğada bulduğumuz, varlığı bizden bağımsız bir nesnedir. Matematikçinin onu buluşu yeni bir böcek türünü keşfeden biyoloğun yaptığı türden bir iştir. Platonculuk kısmında da bahsi geçen $\pi$ sayısı, örneğin Platonculukta çağrışım ya da hatırlamayla bulunurken realizme göre bütün çemberlerin çapları arasında algılanan değişmez ilişkiyi belirleyen sayıdır. Bu, insan düşüncesinin bir ürünü, bir kavram ya da isteğe göre oluşturulmuş bir simge değildir (Yıldırım, 1996: s. 57). Fakat "nokta"ya ilişkin olarak matematik felsefesi içinde bazı karışıklıklar vardır. Örneğin Paul Bernays (1888-1972) "Matematikteki Platonculuk Üzerine" makalesinde, Eucleides'in "iki nokta bir çizgiyle birleştirilebilir" ifadesi ile Hilbert'in "verilen iki nokta için, her iki noktanın üzerinde olduğu düz bir çizgi vardır" aksiyomunu karşılaştırır ve Hilbert'in "vardır" ifadesini düz çizgiler sisteminde var olma anlamında kullandığını söyler. Bernays'a göre bu durum "nesneleri konuyu yansıtan bütün bağlarından kopuk" olarak görmeye dayanır ve bu özellikle Platon felsefesinde öne sürüldüğü için de bu eğilimi o, "Platonculuk" olarak adlandırılır (Bernays, 2011: s. 144). Daha sonra Bernays görüşlerini şöyle sürdürür:

> Şimdiye kadar biz düşüncenin bir alanının ideal bir izdüşümünden daha fazlasını iddia etmeyen sınırlı bir Platonculuktan sadece bahsettik. Ama sorun burada değil. Birkaç matematikçi ve filozof, matematiğin bütün nesnelerini ve bağıntılarını içeren ideal bir nesneler dünyasının var olduğunu ileri sürerek, Platonculuğun metotlarını kavramsal bir realizm anlamında yorumlamışlardır. Özellikle Russell-Zermelo paradoksunu çevreleyen karşıtlıklar tarafından savunulamaz kılınan şey, bu mutlak Platonculuktur (Bernays, 2011: s. 147).

Mutlak Platonculuğu terk etmemiz gerektiğini düşünen Bernays, Frege'nin saf mantığı matematiksel nesne evreninin genel kuramı olarak görüp aritmetiği saf mantıktan çıkarmaya çalışma girişimini mutlak Platoncu olarak değerlendirmiştir. Daha sonra oluşan Russell-Zermelo çelişkileri, bu mutlak Platoncu girişimin temellerini sarsmasına rağmen mutlakçılar, bazı başlangıç varsayımları kabul ederek aritmetiği mantık sistemine dahil etme girişiminden vazgeçmemiştir. Fakat böylece saf mantık karakterinden uzaklaşmıştır (Bernays, 2011: s. 156).

Platonculuğu realizm olarak kullanan başka yazarlar da vardır. Günümüz yazarlarından Penelope Maddy "Kümeler ve Sayılar" yazısında "Platonizm" veya başka bir ifade ile “realizm” olarak ifade ettiği felsefi görüş hakkında “Platonizm demekten çekiniyorum”, çünkü “Matematiksel nesneler evrensel veya tikel midirler?”, “Zamanda ve mekânda yerleri var mıdır?” konularında önceden hüküm veriliyor gibi davranılabilir demektedir (Maddy, 2011: s. 273). Ona göre:

> “Realizm” kelimesi, felsefede en azından üç temel amaca hizmet eder. Bunlar;
>
> (1) Evrenseller (tümeller) problemiyle alakalı müzakerelerde, nominalizm ve kavramcılığa tezat düşer. (Buna realizm1 diyelim.)
>
> (2) Dış dünyanın varlığı ile alakalı tartışmalarda, fenomenalizm (görüngübilim) ile tezat düşer. (Buna realizm 2 diyelim.)
> (3) Kuramsal varlıkların ontolojik durumlarım incelerken, işlemsellik ve araçsalcılığa tezat düşer. (Buna da realizm 3 diyelim.)
> Matematik felsefesindeki görüşler çoğunlukla realizm olarak adlandırılırlar. Çünkü bu görüşler matematikteki ontolojik soruları, genel felsefi realizmlerce içerilen soruların özel durumları veya benzerleri olarak kabul edilir (Maddy, 2011: s. 275).

“Platonculuğu” realizm anlamında kullanan diğer bir yazar yapısalcılığın teorisyenlerinden Michael Resnik’tir. “Modeller Bilimi Olarak Matematik: Ontoloji ve Referans” adlı makalesinde Resnik, “Ben bir Platoncuyum” der. Sonra bir dipnotta “‘Platoncu’ terimini günümüz matematik felsefesinde yaygın olarak kullanılan soyut matematiksel nesneler hakkındaki realizm yerine kullanıyorum; bununla Platon’un idealar kuramını kabul ettiğim anlaşılmasın” diyerek “Platonculuk” terimini realizmi anlatmak için kullandığını açıkça ifade eder (Resnik, 2011: s. 299).

Matematikte realizmi savunan G. H. Hardy ve Kurt Gödel gibi seçkin matematikçiler de vardır. Onlara göre, matematik gerçek dünyadan uzak soyut görünümüne karşın, temelde doğa bilimlerinden farksızdır. Yani matematiğin algılanabilen nesneleri ve bu nesnelerin nesnel gerçekliği vardır. Frege’nin realist görüşleri matematik felsefesi içinde önemli bir yer tutar. Ona göre, içeriği ve anlamı olmayan bir simge sıradan bir işarettir ve bu tür anlamsız işaretlerle bir aritmetik sistem kurmaya olanak yoktur, bundan olsa olsa simgesel bir oyun oluşturulabilir. Frege, net olarak matematiğin tüm diğer kavramları gibi sayıların da keşfedildiğini söylemektedir. Matematikçilerin sayıları tanımlamayla oluşturduğu düşüncesini reddederek şöyle demektedir:

> Nasıl ki coğrafyacı, "sınırlarını çizgilerle gösterdiğim şu alana 'Sarı Deniz' adını veriyorum" dediğinde bir deniz yaratmıyorsa, matematikçi de tanımlama becerisiyle herhangi bir şey yaratmaz. (…….) Kâğıt üstüne çizilmiş küçük çembersel bir şekil, l'e eklendiğinde 1 veren özelliğini tanımlamayla kazandırdığımız savını, bilimsellik görünümü altında 'batıl inanç' sayıyorum. O şekil 'sıfır' adını almadan önce, öyle bir özelliği taşıyan bir, yalnızca bir nesnenin var olduğunu ortaya koymamız için gerekir. Bu nedenle ne sıfırı, ne de herhangi başka bir sayıyı yaratmaya olanak yoktur (Frege'den akt. Yıldırım, 1996: s. 60).

Benzer biçimde Russell da realist görüşlerini dile getirir:

> Aritmetik, Kolomb'un Amerika'yı keşfi anlamında bir keşiftir. O nasıl kızılderilileri yaratmadıysa, biz de sayıları yaratmış değiliz. (...) Bir şey varolduğu için düşünülebilir; varolma düşünülmüş olmanın sonucu değil, ön-koşuludur" (Russell'dan akt. Yıldırım, 1996: s. 57).

Frege'nin realist bakış açısını eleştirenler olmuştur. Yıldırım, Frege'nin realizmi olarak ifade ettiği görüşünü, Platoncu realizm olarak değerlendirmekte ve onun "varolanı keşfetme" düşüncesine bir soruyla karşılık vermektedir: Peki biz nasıl bir gözlem ve deneyimle sıfırı keşfedebiliriz? Hiçbir matematik tarihinin sıfırın ya da $\pi$ sayısının gözlem ya da deneyimle bulunduğunu yazmadığını savunarak eklemektedir:

> Bu tür nesneler insan zekâsının çevreyle ilişki ve etkileşimi içinde oluşan kavramlardır. Sıfır sayısı ne gözlemle bulduğumuz, ne de Einstein'ın dediği gibi, düşüncenin özgürce yarattığı bir nesnedir. Sıfır, içinde yer aldığı sayı dizgesinin iç zorunluğu altında uyum arayan insan zekâsının bir ürünüdür. Matematikçi "sıfır" denilen nesneyi, araştırma sürecinde, daha önce oluşturulmuş sayısal ilişkilerin bir gereği olarak ortaya koymuştur (Yıldırım, 1996: s. 60).

Nominalizm (adcılık), Platonculuğa karşı bir duruş olarak 1970'li yıllarda gündeme gelmiştir. Bu görüşe göre, soyut nesnelerin hiçbir gerçekliği yoktur; onlar yalnızca "birer isim ya da düpedüz birer sözcük" olmaktan öte bir şey değildir. Yalnızca tikel somut nesnelerden oluşmuş olan evrende soyut/evrensel nesneler, örneğin "5 diye bir nesne yoktur" ama 5 kalem veya 5 kitap veya 5 defter vardır. Oysa realizm için söz konusu nesneler, "5'in gözlemlenen birer örneği"dir. Somut-soyut ayırımı da aslında tikel-tümel ayırımından başka bir şey değildir (Yıldırım, 1996: s. 57).

Yıldırım'a göre, soyut nesnelerin varlığını kabul etmeyip, olabildiğince onları dile getirmeyen bazı empiristler realistlerden çok nominalistlere yakın dururlar. "Nominalistler gibi onlar da matematiği içerikten yoksun, salt mantıksal bir sistem sayma eğilimindedirler. Onlara bakılırsa, matematikçi sayı, küme, fonksiyon türünden nesne ve ilişkilerle değil, belli formel kurallar çerçevesinde birtakım simge ve formüllerle uğraşan biridir." (Yıldırım, 1996: s. 57-58). Nominalizmin, metafizikten kaçınanlar için çekici bir yanı olmasına rağmen yetkin bir yaklaşım sunamadığına değinen Yıldırım, matematikte soyut, bilimdeyse kuramsal nesnelerden söz etmeksizin bir gelişme göstermenin, hatta konuşmanın bile mümkün olmadığını belirtir. Yaptığı "soyut-kuramsal nesne ayrımı" bağlamında kuramsal nesneleri bilimin "olmazsa olmazı" gören Hartry Field'e göre, soyut nesnelerin kabulü ise ne bilim ne de matematik için gereklidir (Yıldırım, 1996: s. 58). Field realizmin içinde matematiğin gerçekliği açıklamak için bizi matematiksel varlıklara inanmaya zorladığını söyler. Fakat standart matematiksel teoremlerin doğru olduğu varsayımının, matematiksel varlıkların var olduğu varsayımına göre daha açık bir şekilde gösterilmesi zordur. Bu, filozoflardan daha çok matematikçilerin belirleyeceği bir durumdur. O halde bu standart matematik gerçekten doğru değilse bizim onu doğru olacak şekilde düzenlememiz gerekir. Bu durum bize yeni bir matematiğe ihtiyacımızın olduğunu gösterir (Field, 2011: s. 237-238).

> Matematiksel varlıklar hakkındaki şüphenin asıl nedeni bu varlıkların bilgi kuramı veya referans kuramı ya da inanç-içerik kuramına çıkardıkları güçlük olabilir. Platoncu düşünceye göre matematiksel önermelerimizin doğruluk değerleri, uzay zamanın dışındaki bir dünyaya ait olan Platoncu varlıkları kapsayan gerçeklere bağlıdır. Platoncu dünyadaki varlıklar ile bizim aramızda nedensel bağlar yoktur. Öyleyse o dünyada ne olduğuyla ilgili herhangi bir bilgiye nasıl sahip olabiliriz? Ve belki de daha temel olarak "iki" gibi özel bir kelimenin ya da özel bir inancın beynimizin bir durumunun o dünyadaki nesnelerin mutlak sonsuzluğundan belirli bir tanesi *olması* veya *onun yerine geçmesi* nasıl mümkün olabilir? Bu soruları cevaplamak için bizimle bu Platoncu dünya arasında biraz *fiziksel–olmayan bağlantı*, biraz *mistik zihinsel kavrayışın* olması gerekir gibi görünüyor (Field, 2011: s. 257).

Yıldırım'a göre ise "(…) Platoncu ontolojiye düşme korkusu soyut nesneleri yadsımak için zorlayıcı bir neden olmamalıdır.". Bu türden nesnelerin kavramsallaştırılması, Yıldırım için, hem böyle bir ontolojiye düşmeyi gerektirmez hem de empirist yaklaşımla hiç de uyumsuz değildir (Yıldırım, 1996: s. 58).

Diğer bir matematiksel nesne anlayışı "yapısalcılık"[4] tır. Birbirine tümüyle ters düşen realizm ile nominalizm arasında yer alan yapısalcılıkta soyut nesneler, ne realistlerin savundukları gibi bizden bağımsız, doğada var olan nesnelerdir ne de nominalistlerin ileri sürdükleri gibi yalnızca birer isimden ibarettir. Bu görüşe göre, soyut nesneler insan zekâsının çevreyle olan sürekli etkileşimi içinde oluşturduğu betimleyici ya da açıklayıcı kavramlardır. Tüm kavramlar gibi matematiksel kavramların da kökeni empirik yaşantımızdadır. Örneğin, sayı yaşantımıza giren çokluk ve büyüklükleri belirleme aracı olarak oluşturulmuştur. Doğada bulunan sayılar değil sayılabilen çokluklardır. Bu yüzden sayılar, sayılabilen nesneler üzerinde yürütülen sayma işleminin bir ürünüdür. "Çevremizdeki çoklukları sayma, büyüklükleri ölçme ihtiyacı insanoğlunu nicel kavramlar oluşturmaya zorlamıştır." (Yıldırım, 1996: s. 58). Onlara göre matematiksel nesneler modeller içindeki konumlardır. Örneğin doğal sayıların özü, o sayının diğer doğal sayılarla ilişkisinde yatar. Yapısalcılığın önemli temsilcilerinden Michael Resnik meşhur bir makalesinde şöyle yazar:

> İddia ediyorum ki matematikte, yapılar içerisinde dizili "içkin" niteliklere sahip nesnelerimiz yoktur, sadece yapılarımız vardır. Matematiğin nesneleri yani matematiksel sabitlerimizin ve nicelik belirleyicilerimizin işaret ettiği varlıklar, yapı içindeki yapısız noktalar veya konumdadır. Yapının içerisindeki bir konum olmaları itibariyle yapının dışarısında bir hüviyetleri veya özellikleri yoktur (Resnik, 2011: s. 301).

Resnik'e göre sayılar gibi matematiksel nesnelerin kümelerle özdeşleştirilmesi sadece yapılar arası ilişkilerdir. O, epistemolojik nedenlerden ötürü "yapılar (strüktürler)" yerine, matematiksel modellerden (*mathematical patterns*) ve bunların konumlarından bahsetmeyi daha anlamlı bulduğunu da belirtir. Matematiksel modellerin konumlarını soyut varlıklar olarak gören Resnik kendini Platoncu olarak tanımlayıp, bunu günümüzde yaygın olarak kullanılan soyut matematiksel nesneler

[4] Cemal Yıldırım'ın *Matematiksel Düşünme* kitabında "*structures*" "yapımcılık" olarak çevrilmiştir. Fakat bu sözcüğün Türkçedeki yaygın çevirisi ve bu çalışmamızda "Modern Matematik Felsefesindeki Gelişmeler" bölümünde de değinileceği üzerine yaygın kullanımı "Yapısalcılık" olduğu için burada anlam kargaşası yaşanmamak adına aynı çeviri kullanılmıştır.

hakkındaki realizm yerine kullandığını söyler. Ona göre matematik, soyut varlıkların yani maddesel ve zihinsel olmayan, uzayda ve zamanda bulunmayan şeylerin bilimidir. Ona göre sayı kuramının küme kuramı içindeki gelişimi, sayı kuramının küme kuramına indirgenmesidir. Bu durumda kümeler belli bir modeldeki konumlar olduğundan sayıların gerçekten küme olup olmadıkları hakkındaki endişeler yersizdir (Resnik, 2011: s. 299-331).

### 1.1.2. Immanuel Kant'ta Matematiksel Nesne

Kant'ın kurduğu matematiksel nesneyi ifade etmek için önce Kant'ın epistemolojisi ve matematik nesnesinin ontolojisini tanımlayan bilgi kuramına ve sonrada kurduğu yeni metafiziğinin genel kavramlarına değinelim.

#### 1.1.2.1. Kant'ın Epistemolojisinin Temel Çerçevesi

"Kant'ın transsendental felsefesinin ana problemi kısaca 'Nesne nedir?' olarak ifade edilebilir. Nesne nedir ve nasıl oluşur?" (Koç, 2012: s. 49). Kant, yirminci yüzyıl matematik felsefesindeki temel tartışmaların birçok açıdan mimarı olmuştur. Kant'ın matematiğin *sentetik a priori* olduğu tezi kimilerince eleştirilmiş, kimilerince de onaylanmıştır. Gür Kant'ın görüşünü şöyle özetlemiştir:

> Kant'a göre, içimizde kendiliğinden ve doğuştan var olan uzay ve zaman sezgisi nesnelerin görünüşlerini algılamamızın zorunlu koşullarını oluşturur. Ancak bu sezgiler sayesinde nesnelerin bize görünüşleri hakkında bilgi sahibi olabiliriz, nesnelerin kendileri ise bizim için meçhuldür. Nesneler bu sayede kavramsallaştıktan sonra nesneler arasındaki ilişkileri duyularımız sayesinde anlarız (Gür, 2012: s. 80-81).

Kısaca özetlediğimiz bu görüşü daha ayrıntılı olarak ele alacağız. Şimdi Kant'tan önceki matematiksel bilgi kuramına değinelim.

Batı felsefe tarihinde özellikle empiristler, matematiksel doğruların analitik yani bilgimizi genişletmeyen *a priori* önermeler olduğunu öne sürmüşlerdir. Örneğin David Hume (1711-1776), matematiksel önermelerin "fikirler arası ilişkiler"i ifade ettiğini ve bu nedenle de bilgi vermediğini iddia etmiştir. Ancak bu görüşte bir sorun vardı. Nasıl oluyor da bilgi vermeyen bir niteliğe sahip olan matematik, empirik ve sentetik olan yani bilgimizi genişleten doğal bilimin dili oluyordu? Bu soru Batı felsefe tarihinde birçok filozof tarafından sorulmuş ama tatmin eden bir yanıt henüz bulunabilmiş değildir. Bu sorunsala bir yanıt da büyük Alman filozofu Kant'tan gelmiştir. Kant bu soruya matematiksel yargıların analitik olmadığını söyleyerek kendi bilgi kuramı çerçevesinde yanıt aramıştır. Kant'a göre matematiksel önermeler, evrensel ve zorunludur, yani *a priori*dir. Aynı zamanda bilgimizi genişletirler yani sentetiktirler. Kant'ın terimleriyle söylersek matematiksel önermeler "*sentetik a priori*"dir (Yalçın, 2003a: s. 128-129).

#### 1.1.2.2. Kant'ın Transsendental Felsefesi

Kant'ın metafiziği sağlam bir bilim olarak kurulmayı hedeflemiştir. Öyle ki, bu tasarıyla, kendinden önceki tüm metafiziği geçersiz bırakacağı gibi, kendisinden sonra da artık nasıl metafizik yapılabileceğinin bir modelini ortaya koyduğunu, dahası bu zeminin en sağlam taşlarını döşediğini düşünmektedir.

> Kant'a göre geleneksel metafiziğin bitmez tükenmez tartışmalarında ana malzemeyi oluşturan idealar, formlar, tözler (ruh, evren, madde, uzay, zaman, Tanrı gibi) hatalı bir yaklaşımla, onlara bağımsız bir gerçeklik atfedilerek, yani tözleştirilmiş olarak ele alınmışlar, bu yaklaşım da metafiziği çıkmaz yollara sürüklemiş ve böylece esasa ait olanı boş laftan, gerçek ve nesnel olanı "hayali görünüş"ten ayırt edecek bir ölçü ortaya konamamıştır (Gözkân, 2008: s. 25).

"Sonu gelmeyen çatışmaların olup bittiği savaş alanı" adını verdiği metafiziğin asıl sorunu, Kant'a göre, insan aklının, her türlü deneyimin olanağını aşan idealar ve ilkelerle yola çıktığında, başvurabileceği bir denektaşının, bir ölçü noktasının bulunmayışıdır. Oysa Kant'a göre aklın, bu idealar ve ilkelerle bağlantısının ne olduğu iyice araştırılıp ortaya serilmeden, metafiziğin bir adım bile atması olanaksızdır.

Eski Yunan felsefesindeki geleneksel metafiziğe bakılacak olursa onun, duyusal algıların konusu olan nesneleri, yani hissedilir dünyayı ele almadığı gibi algılar üzerinden elde edilen bir bilgi olmadığı da görülür. Bu yüzden o, zamana tabi olanın bilgisi olmayıp, zamana tabi olmayanı, yani değişmeyeni, düşünülür veya akledilir dünyayı nesne edinir ve onun bilgisine (*episteme*) yönelir; bu yolla değişime tabi olanların temelindeki ilkelere de, ilk ilkeleri (*arche*) görme aracılığıyla yönelmiş olur. Böylece algıların aşılarak, zamana tabi olmayan nesnelerin "görülme", temaşa edilme (*contemplatio*) faliyeti, "aracısız görme" *(intuitus*) olarak ifade edilir. Bu "aracısız görme" ise insanda var olan bir olanaktır ve eğitimle, düşünme terbiyesiyle gerçekleşebilir. Bu eğitim ve düşünme faaliyetinin adı Platon'daki adı "diyalektik"tir. Diyalektik, duyuları aşan nesnelerin, "görülebilme"si, ayırt edilebilmesi ve bunların sağlam bilgisinin (*episteme*) edinilebilmesini sağlayan düşünme tarzı ve yöntemidir (Gözkân, 2008: s. 25-26).

Kant, yaşadığı dönemde kendi ifadesi ile kimsenin sormadığı şu soruyu sorar: "Metafizik olanaklı mıdır ve olanaklı ise nasıl?" Bu soruyu sormayı ise şöyle ifade eder: "İnsan, aklı kurmaya öylesine heveslidir ki, kulenin katlarını çıktıktan sonra temelinin nasıl atıldığını görmek için onu yeniden yıktığı çok olmuştur." Metafiziğin şimdiye kadar çıkılan kulelerini yıkıp temelini yeniden kurduğunu iddia eder Kant ve böylece yeni bir metafizik doğar aklın sınırlarını araştıran (Kant, 2000: s. 4).

Çitil ise modern dönemde metafiziği şöyle betimler:

> Modern dönemde süregelen tartışmalarda metafiziğe ilişkin konular genel metafizik *(metaphyscia generalis)* ve özel metafizikler *(metaphyscia specialis)* olarak sınıflandırılmaktadır. Genel metafizik tümeller varlığı ve mahiyeti, bireylerin varlığı, özdeşliği, zaman içinde özdeşliği, önermelerin varlığı ve mahiyeti nedensellik, uzay veya zamanın mahiyeti, olanaklı evrenler vb. konuları; özel metafizikler ise genel olarak zorunlu varlık (Tanrı), zihin veya ruh ve evren üzerine tartışmaları içermektedir (Çitil, 2013: s. 38).

Bilginin kaynağı açısından irdelemelerini sürdüren Kant'a göre, metafizik bilginin kaynakları deneyime (tecrübeye) bağlı olmadığı için o, temel kavramlarını ve önermelerini deneyimden almaz. O halde fiziğin temelini oluşturan dış deneyim ya da, psikolojinin temelini oluşturan iç deneyim bu bilginin temelini oluşturamaz. Demek ki metafizik bilginin temeli *a priori* bilgi, saf anlama yetisi ve saf akıl bilgisidir.

Eğer bir bilginin bilim olarak serimlenmesi isteniyorsa, her şeyden önce onu diğer bilgilerden ayıranın, yani ona özgü olanın kesinlikle belirlenebilmesi gerekir.

Bu özgülük,

1) Bilgi nesnesi

2) Bilginin kaynağı
3) Bilgi türü açısından farklılıklar ortaya koymalıdır (Kant, 2000: s. 14-15).

Kant'ın transsendental felsefesinde matematiksel nesneyi nasıl kurduğunu anlamak için onun zaman ve uzay sezgisinin incelenmesi gerekir. Kant'taki "Raum", İngilizceye Werner S. Pluhar tarafından "space" olarak çevrilmiş olup Türkçedeyse iki ayrı karşılığa sahiptir: ilki, Türkiye Felsefe Kurumu tarafından *Gelecekte Bilim Olarak Ortaya Çıkabilecek Her Metafiziğe Prolegomena* adlı eserin çevirisinde "uzam" olarak, diğeri ise Aziz Yardımlı tarafından çevrilen *Arı Usun Eleştirisi* adlı eserde "uzay" olarak. Ayrıca Kant için *a priori* bilgi ilkeleri olan "zaman ve uzay" sezgileri Kurumca "görü formları", Yardımlı tarafından ise "arı sezgi biçimleri (s.79)" olarak kullanılmakta, bu yüzden de *Prolegomena*'da bulunan "saf görü", Yardımlı çevirisinde "saf sezgi" olarak geçmektedir.

### 1.1.2.3. *A Priori* Bilginin Olanaklılığı İçin Arı Sezgi Biçimleri: Uzay ve Zaman

Kant, "Arı Usun Eleştirisi" adlı yapıtında Yardımlı'nın çevirisi ile "Aşkınsal Öğeler Öğretisi" *(Transcendental Doctrıne of Elements)* bölümünde "uzay" sezgisni aşkınsal olarak ifade etmekte ve tanımlamaktadır. Uzay sezgisine ulaşmadan önce bizi bu kavrama götürecek ve Kant'ın metafiziğini anlamamızı sağlayacak olan kendi tanımlarına Yardımlı'nın çevirisi ve Pluhar'ın İngilizce çevirisi üzerinden değinelim.

Kant'a göre, sezgi (*intuition)*; düşüncenin, nesne ile bilgi arasında kurulan bağlantıda göz önüne tuttuğu araçtır. Fakat sezgi ancak nesneler bize verildiği sürece ve nesnenin zihni belli bir şekilde etkilemesi yolu ile olanaklıdır. "Duyarlılık *(sensibility)"*; nesnelerin bizi etkileyiş kipi yoluyla tasarımları alma yetisidir. Bir nesnenin tasarım yetisi üzerindeki etkisi o nesne tarafından etkilenmekte olduğumuz sürece "duyum (*sensation)"* olur. Kendini duyum yoluyla nesne ile ilişkilendiren sezgiye "deneyimsel sezgi (empirical intuition)" ve bu sezginin belirlenmemiş nesnesine "görüngü (*appearance)"* denir. Görüngüde duyuma karşılık düşene onun "özdeği *(matter)"*, ama görüngü çoklusunu belli ilişkiler içinde düzenlenebilir kılanı ise "görüngünün biçimi *(the form of appearance)"* olarak kabul eder Kant (Kant, 2010, 1996: B34).

> Duyumların düzenlenebilme ve belli bir biçimde koyulabilmelerinin biricik olanağı olan şeyin kendisi yine bir duyum olamayacağı için, bize tüm görüngünün özdeği yalnızca *a posteriori* verilse de, biçimi tüm duyumlar için anlıkta *a priori* hazır yatıyor olmalı ve buna göre tüm duyumdan ayrı olarak irdelenebilir olmalıdır (Kant, 2010, 1996: B34).

Kant, "arı olma"yı içinde duyuma ait hiçbir şey barındırmama hali olarak açıklar. Buna göre duyusal sezgilerin arı biçimi zihinde *a priori* bulunur ve görüngülerin tüm çoklusu belli ilişkiler içinde bu biçim altında sezilir. Arı duyarlılığın bu biçiminin kendisine "arı sezgi" de (*pure intuition)* denir. Yani, zihnin bir cismin tasarımında duyuma ait olan deneyimsel sezgiler olan sertlik, renk vb. özellikleri çıkardığımızda yine de geriye, töz, kuvvet, bölünebilirlik, uzam ve şekil gibi insanda hazır bulunan saf sezgiler bulunur. Bunlar duyumların edimsel bir nesnesi olmaksızın bile, zihinde yalnızca duyarlılığın bir biçimi olarak *a priori* yer alır (Kant, 2010, 1996: B35).

Kant, *a priori* duyarlılığın tüm ilkelerinin bilimine *"aşkınsal estetik"* (*transcendental aesthetic)* demektedir. Aşkınsal estetikte önce duyarlılığı yalıtacağız, yani zihnin kavram yoluyla düşündüğü her şeyi ayıracağız, böylece geriye deneyimsel sezgi kalacak, daha sonra duyuma ait olan her şeyi ayıracağız ve böylece geriye sadece duyarlılığın *a priori* olarak sağlayabileceği tek şey olan arı sezgi ve görüngülerin biçimi kalacaktır. Saf *a priori* bilgi ilkeleri olarak iki arı duyusal sezgi biçiminin diğer bir deyişle uzay ve zamanın bulunduğunu göstereceğiz (Kant, 2010, 1996: B37).

#### 1.1.2.3.1. Uzay

Kant'ın uzay tasarımı, dış nesnelerin görünüşlerini algılamamızın zorunlu koşulu olmasından dolayı onun teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Uzay insanda kendiliğinden olmakla birlikte *sentetik a priori* bilgi nesnenin oluştuğu mekân olarak sonsuz veri toplama ve onları sentezleme yeridir. Bu yüzden uzay sezgisini daha iyi anlayabilmek için onun özelliklerini maddeler ile ele alalım ve böylece Kant'ın saf *a priori* sezgi olarak tanımladığı bu kavramın olanaklarını daha net görelim.

1. Dış duyu aracılığıyla nesneleri dışımızda ve hepsini uzayda tasarımlarız (B38).
2. Uzayda nesnelerin şekil, büyüklük ve birbirleriyle ilişkileri belirli ya da belirlenebilirdir (B38).
3. Uzay içimizde sezilemez (B38).
4. Uzay dış deneyimlerden türetilen deneyimsel sezgiden oluşan bir kavram değildir. Uzay tasarımı hali hazırda zemin olarak bulunuyor olmalıdır (B38).
5. Uzay tüm dış sezgilerin temelinde yatan zorunlu *a piriori* bir tasarımdır. Onda bir nesnenin olmadığı tasarlanabilir ama hiçbir zaman bir uzayın olmadığı tasarlamaz. Öyleyse görüngülerin olanağının koşulu olarak görülmelidir. *A priori* bir tasarımdır ki zorunlu olarak dış görüngülerin temelinde yatar (B39).
6. Uzay genel olarak şeylerin, ilişkilerin evrensel bir kavramı değil ama arı bir sezgidir. Tek bir *a priori* sezgi tüm uzay sezgsinin temelinde yatar. Tüm geometrik ilkelerin çizimlerinin olanağı bu *a priori* zorunluluk üzerine dayanır. Eğer bu uzay tasarımı *a posteriori* kazanılan bir kavram olarak genel dış deneyimden türetilebiliyor olsaydı, o zaman matematik belirlemenin ilk ilkeleri algılardan başka bir şey olmazdı. Deneyimden öğrenilen yalnızca tümevarım yoluyla türetilen göreli evrenselliktir. Buna göre yalnızca şimdiye dek gözlenenlere göre üç boyuttan daha çoğunu kapsayan hiçbir uzayın bulunmadığı söylenebilirdi (B40).
7. Uzay verili sonsuz bir büyüklük olarak tasarımlanır. Uzay tasarımının kökeni bir kavram değil, *a priori* bir sezgidir. Sezgilerin ilerlemesinde sınırsızlık olmasaydı, ilişkilerin hiçbir kavramı onların sonsuzluğu ilkesini veremezdi (B40). Kant'ın örneği ile "uzay üç boyutludur" önermesi deneyimsel sezgi veya deneyim yargısı olamaz, arı bir sezgi olmalıdır. Bu durum gösteriyor ki; bir doğrunun sonsuza kadar uzatılabileceği veya bir noktadan eşit uzaklıkta noktaların bulunabilmesi ve bunların tümünün düşünüldüğünde bir çember oluşturması veya bir bütün kendini oluşturan parçaların her birinden fazladır bilgisine ulaşabilmek *a priori* bir bilgi olarak arı sezgi ile olacaktır (B41).
8. *A priori* bilginin olanaklı olması için uzay tasarımımızın kökeni sezgi olmalıdır. Çünkü salt bir kavramdan o kavramın ötesine geçen hiçbir önerme çıkarılamaz ki geometride olan şey budur (B41).
9. Uzay herhangi bir kendinde şeyin özelliğini temsil etmediği gibi onları birbirleri ile ilişkileri içinde de sunmaz (B43).

10. Uzay dış duyunun tüm görüngülerinin biçiminden duyarlılığın öznel koşulundan başka bir şey değildir. Eğer biz nesneler tarafından etkilenebilmenin biricik öznel koşulundan uzaklaşacak olursak, uzay tasarımı tüm anlamını yitirir (B42).

O halde diyebiliriz ki uzay zemin olarak bizde zaten bulunur ve bu anlamıyla herhangi bir deneyime dayanmadığı için saf *a priori* bir sezgidir. Bizde bu saf sezgi ile üç boyutluluğu ya da "noktaların birleşiminden doğrular oluşur" gibi deneyime bağlı olmayan temel varsayımları anlar ve kavrarız. Uzayda dış duyunun tüm görüngüleri bulunur ve bu görüngüler nesneler tarafından etkilenebilmenin öznel koşullarını oluşturur. Böylece nesneler tarafından etkilenebilmenin öznel koşulları oluşur. Yani bilginin öznel koşullara bağlı oluşunun sebebi, uzay tasarımının görüngüler toplamına bağlı olarak öznel yapısından kaynaklanmasıdır. Böylece, çalışmamız için önemli olan öznel bilgi üretimi sürecinin temeldeki dayanaklarını göstermiş oluruz.

#### 1.1.2.3.2. Zaman

Kant'ın nesne tasarımının önemli ikinci temel dayanağı "zaman" sezgisidir. Kant için bu kavram yine dış nesnelerin görünüşlerini algılamamızın zorunlu koşulu olmasından dolayı önemlidir. Yine bu saf *a priori* sezgiyi somutlaştırabilmek için maddeler şeklinde özetleyelim.

1. Zaman herhangi bir deneyimden türetilmiş deneyimsel sezgi olan bir kavram değildir (B47).
2. Zaman tüm sezgilerin temelinde yatan zorunlu bir tasarımdır (B47).
3. Zamanın salt bir boyutu vardır. Değişik zamanlar eşzamanlı değil ardışıktır. Bu değişik uzayların ardışık değil eşzamanlı olmaları gibidir (B48).
4. Zaman kökensel tasarım olarak sınırsız olarak verili olmalıdır (B48).
5. Zaman tasarım bir *a priori* (iç) sezgi olmasaydı, örneğin aynı şeyin tek bir yerde varlığı veya yokluğu bir ve aynı nesnede birleşmeleri olanağını kavranabilir kılamazdı (B49).
6. Değişimler yalnızca zamanda olanaklıdırlar, öyleyse zaman edimsel (tasarımlı karşıtı) bir şeydir çünkü değişim edimseldir. Öyleyse iç deneyim açısından öznel olgusallığı vardır (B54).

Zaman sezgisi de Kant için saf *a priori* bir sezgi olarak insanda hali hazırda bulunur. Bizim nesnelerin değişimlerini anlayabilmemiz ancak saf zaman sezgisi ile mümkündür ve bu kavram deneyimden bağımsız olarak insanda var olan bir sezgidir. Kant'a göre bu saf sezgisine sahip olmasaydık, değişen bir dış nesnenin aynı nesne olduğunu kavrayamaz ve dolayısıyla değişimi fark edemezdik. Değişimi anlayabilmek kişinin görüngü toplamına ait olduğundan zaman öznel olgusallığa sahiptir. Bu durum yine kişinin bilgi üretimindeki öznel koşullarının dayanaklarını göstermektedir.

#### 1.1.2.4. Kant'ta Nesnenin Tasarımı

Kant'a göre bilgi, bilen özne ile "kendinde şeyler"in *(Noumena)* etkileşiminin bir sonucudur. Zihnimiz, bilginin içinde şekillendiği *a priori* formları (zaman ve uzay) ve kavramları (kategoriler) ile saf ilkeleri oluştururken kendinde şeyler de hissetme yetisini etkileyerek bilginin içeriğini sağlarlar. Kant'a göre bilgi, iki farklı yetinin etkileşiminden oluşur. Bunlar hissetme/duyarlılık *(Sinnlichkeit)* ve anlama *(Verstand)* yetileridir. Kant, bilgi nesnesi olan dünyaya "görüngüler dünyası" *(Phenomena)* adını verir. Kant'ın transsendental felsefesinde nesneleri kendinde şeyler olarak bilmek olanaksızdır. İki bilgi yetimizden hissetme yetisi, pasif bir yeti olup "kendinde şeyler"den aldığı "görüler"i *(Anschauungen)* saf zaman ve uzay formları içerisinde düzenleyip onlara birlik kazandırırken, anlama yetimiz ise sahip olduğu saf kavramlar yani kategoriler yardımıyla bu görüleri bilince taşır yani onları bilmemizi sağlar. Başka bir ifadeyle söylersek, hissetme yetimiz vasıtasıyla nesneler bize verilirken, anlama yetimizle de bunları bir kavram altına getiririz, yani onları düşünürüz. Bu iki yeti birbirinin işini yapamadığı gibi biri olmadan öteki işe yaramaz; bilgi ancak bu ikisinin işbirliği sonucu meydana gelir. Yani Kant'a göre görü ve kavram olmadan bilgi mümkün değildir. Ona göre: "İçeriksiz düşünceler boş, kavramsız görü ise kördür." Kant, bilgi edinme sürecinin üç katmanlı bir sentez süreci olduğunu söyler. Sentez ise duyulardan alınan görülerin birbiriyle iletişime geçmesi, düzenlenmesi ve nihayet bir kavram altına getirilmesi işlemidir. Bu sentezleme işlemini hayal gücü yetimiz yapar. Bu yeti hissetme yetimiz ile anlama yetimiz arasında bir köprü vazifesi görür. Duyulardan gelen görüler ile anlama yetisinin sağladığı saf kavramlar bir transsendental şema yardımıyla birbirine bağlanır. Kant hayal gücünü "ruhumuzun derinliklerinde yer alan hemen hemen hiç farkında olmadığımız, ruhumuzun kör ama vazgeçilmez bir fonksiyonu" olarak tanımlar. İfade ettiğimiz gibi, duyulardan gelen görüler bir birliğe ve bütünlüğe sahip değildir; onlara birlik ve bütünlük veren ve sonra da bir kavram altına getiren bu sentezleme işini yapan transsendental hayal gücü yetisidir. "Başka bir deyimle, Kant'a göre doğanın kendisinde birlik ve düzen mevcut değildir; doğaya kavramlar vasıtasıyla düzen ve birlik veren bizim zihnimizdir." Kant'a göre, zaman ve uzayın kaynağı insan zihnidir ve bu nedenle de a *prioridir* (Yalçın, 2003: s. 132-133).

Kant'a göre yargı üç aşamalı sentez ile gerçekleşir. Bu aşamalar şunlardır: 1) Birinci Aşama: "Görüde Kavrayışın Sentezi", 2) İkinci Aşama: "Hayal Gücünde Yeniden Üretimin Sentezi", 3) Üçüncü Aşama: "Bir Kavramda Tanımanın Sentezi". Sentezin birinci aşaması, temsillerin içsel formda yakalanması ve kendisine bir bütünlük verilmesiyle ilgilidir. Sentezin bu aşamasında "düzenleme", "bağlama" ve "taşıma" işlemleri gerçekleştirilir (Özdemir, 2015: s. 48). Sentezleme işleminin ilk basamağında, hissetme yetimiz vasıtasıyla alınan izlenimler *(impressions)* bir kurala ya da ilkeye göre ilişkilendirilir ve onlara birlik verilir. İkinci basamakta ise bu alınan izlenimler, transsendental hayal gücü tarafından yeniden üretilir ve onlara yeniden birlik verilir. Son olarak, kendilerine birlik verilen bu görüler bir kavram altına getirilir ki, bu aslında onların bilince taşınmasıdır. Bir şeyin bilince taşınması ise o şey hakkında bilgi sahibi olmamız demektir. Transsendental felsefede bilgi sadece yargılardan meydana gelir. Bir yargı ise bir kavram ve bir nesneyi içinde kuran ve barındıran bir bütündür/birliktir (Yalçın, 2003a: s. 132-133).

Saf anlama yetisinin kavramlarına *a priori* olarak dayanan deneyimin olanağını ortaya koymak için yargıda bulunmanın özelliğini ve anlama yetisinin ondaki çeşitli öğelerini eksiksiz bir çizelgede sunar Kant.

Tablo 1.1. Anlama Yetisi Kavramlarının (Kategorilerin) Transsendental Çizelgesi

| 1. Niceliğe Göre | 2.Niteliğe Göre | 3. İlişkiye Göre | 4. Kipliğe Göre |
|---|---|---|---|
| Birlik (ölçü) | Gerçeklik | Töz | Olanak |
| Çokluk (büyüklük) | Olumsuzlama | Neden | Varoluş |
| Tümlük (bütün) | Sınırlandırma | Birliktelik | Zorunluluk |

Kant'ın ontolojisinin en temel unsuru yargıdır. Ona göre bağımsız nesne ve kavram mümkün değildir. Nesne de kavram da ancak yargı içerisinde ortaya çıkar. Yargılar insanın düşüncelerine bağımlı oldukları için düşünen hiçbir varlık olmadığı zaman ne nesne, ne de kavram mümkündür (Yalçın, 2003: s. 133). Yargı, ise bir birliktir. Birliğin kaynağı ise insan ruhunda olan benlik bilincidir ve bu birlik yargı içinde kategoriler ile sağlanır. Kategoriler ancak düşüncenin fonksiyonları olan saf yargılar içinde tespit edilebilir (Koç, 2012: s. 50).

#### 1.1.2.5. *A Priori* Bilginin Gerekliliği Üzerine

Nesneler, Kant'a göre, bize verili tek şey olan onların görüngülerinin en aydınlık bilgisi yoluyla bile hiçbir zaman bilinemez (B61). Örneğin "İki doğru çizgi yoluyla bir uzay çevrelenmez, dolayısıyla da onlarla herhangi bir şekil olanaklı değildir" önermesini alın ve bunu doğru çizginin ve iki sayısının kavramlarından türetmeye çalışın. Ya da "üç doğru çizgiyle bir şekil olanaklıdır" önermesini alın ve aynı şeyi yapmayı yalnızca bu kavramlarla deneyin. Tüm uğraşınız boşa gidecek ve sezgiye başvurmak zorunda kaldığınızı göreceksiniz, tıpkı geometride her zaman yapıldığı gibi. Öyleyse kendinize sezgide bir nesne vermeniz gerekir; ama bu ne tür bir sezgidir, bir arı *a priori* sezgi mi, yoksa deneyimsel bir sezgi mi? Eğer İkincisi ise, bundan hiçbir zaman evrensel olarak geçerli bir önerme doğamaz (…) ; çünkü deneyim hiçbir zaman böyle bir şey veremez. Öyleyse kendinize sezgide *a priori* bir nesne vermeli ve sentetik önermenizi bunun üzerine kurmalısınız. Eğer bir *a priori* sezme yetiniz olmasaydı; eğer bu öznel koşul biçim açısından aynı zamanda bu (dış) sezginin kendisinin nesnesini olanaklı kılan biricik evrensel *a priori* koşul olmasaydı; eğer nesne (üçgen) özneniz ile ilişki içinde olmaksızın kendinde bir şey olsaydı, o zaman nasıl diyebilirdiniz ki bir üçgen çizmek için öznel koşullarınızda zorunlu olarak yatan şey zorunlu olarak kendinde üçgene de ait olmalıdır (Kant, 2010, 1996: B65-66)?

#### 1.1.2.6. Analitik ile Sentetik ve *A Priori* ile *A Posteriori* Yargılar

Metafizik bilgi sadece *a priori* yargıları içermelidir diyen Kant'ın analitik ve sentetik, *a priori* ve *a posteriori* arasında *Prolegomena*'da yaptığı ayrımı şöyle bir tablo ile gösterebiliriz:

Tablo 1.2. Önermelerin Sınıflandırılması

| Önermenin Özne ve Yüklem İlişkisi Açısından İncelenmesi | | Önermenin Doğruluğu Açısından İncelenmesi | |
|---|---|---|---|
| Analitik | Sentetik | *A Priori* | *A Posteriori* |
| Bilgiyi açıklar | Bilgiyi genişletir | Temellendirmek için deneye ihtiyaç duymayan | Temellendirmek için deneye ihtiyaç duyan |
| Kökeni akıldır | Kökeni deneyimdir | İçseldir | Doğruluğu deneyimle ölçüldüğü için dışsaldır. |
| Yüklem öznenin bir özelliğidir. | Yüklem öznenin bir özelliği değildir. | | |
| Çelişmezlik ilkesine bağlıdır. | Çelişme İlkesinden başka bir ilkeye gereksinim duyarlar. | | |

Kant için analitik yargılar, yüklemde, öznenin kavramında zaten var olan ama pek o kadar açık ve bilinçli düşünülmemiş olandan başka hiçbir şeyin içerilmediği yargılardır. Örneğin "Bütün nesneler yer kaplar." dediğimde, "nesne" kavramım hiçbir şekilde genişlemeyecek sadece onu çözümlemiş olacağım. Çünkü yer kaplama o yargıdan önce, açıkça söylenmese bile, gerçekte "nesne" kavramında zaten düşünülmüş olacaktır. Bununla birlikte analitik yargılar çelişme ilkesine dayanırlar. Doğru bir analitik yargının yüklemi zaten önceden öznenin kavramında düşünüldüğünden, o özne hakkında çelişmeye düşmeden değillenemez. Aynı şekilde, onun tersinin değilinde özne değillenmek zorundadır. "Her cisim yer kaplar" ve "yer kaplamayan cisim yoktur" gibi önermelerde bu böyledir (Kant, 2000: s. 14-15).

Kant tüm sentetik önermeleri, kökeni deneyime dayalı *a posteriori* olanlar ve saf anlama yetisinden ve akıldan kaynaklanan kesin *a priori* olanlar olmak üzere ikiye ayırır. Her ikisi de tek başına çelişme ilkesinden kaynaklanmaz. Onlar çelişme ilkesinden türetilmiyor olsalar bile ona aykırı bir durum oluşturmazlar fakat başka ilkeleri de gerektirirler. Kant deneyim ve matematik yargıları sentetik yargılar olarak değerlendirir. Ona göre sentetik yargılar analitik yargılar gibi çelişme ilkesi ile kavranamaz. Bu yargılar deneyimin tanıklığına ihtiyaç duyarlar. Matematiksel çıkarımların zorunluklu kesinliğin yapısı gereği çelişme ilkesine göre belirlenmesinden dolayı Kant'a göre matematikçiler şimdiye kadar tüm matematik ilkelerini de çelişme ilkesinden bilinebileceğini düşünerek yanılmışlardır. Deneyimsel olmayan asıl matematik yargılar ise saf *a priori*dir. Çünkü saf *a priori* yargılar deneyimden çıkarılamayan zorunluluklardır. Saf matematik bilgisi, kavramlardan değil sadece kavramların oluşturulmasından hareket etmesi yönüyle diğer tüm *a priori* bilgilerden ayrılır (Kant, 2000: s. 16-18). Aritmetiğin *sentetik a priori* oluşunu bir örnekle Kant aşağıdaki gibi açıklar:

> Başlangıçta, 7 + 5 = 12 önermesinin çelişme ilkesinden çıkan yedi ve beş kavramlarının toplamı olan, sırf analitik bir önerme olduğu belki düşünülebilir. Ne var ki, dikkatle bakıldığında görülür ki, 7 ve 5'in toplamı kavramı, her iki sayının bir tek sayıya birleştirilmesinden başka bir şey içermemektedir; ikisini kapsayan bu bir tek sayının ise ne olduğu hiç mi hiç düşünülmüyor. On iki kavramı, benim sadece yedi ile beşin birleştirilmesini düşünmemle hiçbir şekilde düşünülmüş olmaz; ve ben böyle bir olanaklı toplam kavramımı istediğim kadar öğelerine ayırayım, yine de onun içinde on ikiyi bulamam. Bunların ikisinden birini karşılayan görünün yardımıyla, söz gelişi beş parmağımızla veya (SEGNER'in Aritmetiğinde olduğu gibi) beş noktayla, böylece de görüde verilen beşin birimlerinin teker teker yedi kavramına eklenmesiyle, bu kavramların ötesine gitmek gerekir. Demek ki 7 + 5 = 12 önermesiyle insan kendi kavramını genişletir ve birincisine, onda düşünülmeyen bir kavram ekler, yani aritmetik önerme her zaman sintetiktir (Kant, 2000: s. 17).

Bu durum "5+7=12" olma eşitliğinde çelişki yasası geçerli değildir, biçiminde yorumlanabilir. Çünkü bu yasada yüklem öznenin bir özelliğidir ve öğelerine ayrılarak analiz edilebilir. Yani çelişme yasasına göre "5+7" on iki ise, on iki olanın yalnızca "5+7" olması gerekir. Bir analitik önerme bilginin tanımına ulaşmaya çalışır. Yani bilgiyi açıklar, genişletmez. Oysa on ikinin tanımı "5+7" değildir veya "12"nin açıklanması sadece "5+7" değildir. "12"nin "5"in üzerine "7" sayılarak bulunması Kant için bilgimizin genişletilmesidir bu durumda da bu önermenin bir analitik önerme olması beklenemez. Hatta Kant büyük sayılarda bunun daha net göründüğünü söyler:

> Bunun farkına, büyük sayılar örnek alındığında daha iyi varılır; çünkü burada açıkça ortaya çıkar ki, biz kavramımızı istediğimiz kadar evirip çevirelim, görünün yardımı olmadan, sırf kendi kavramlarımızı öğelerine ayırmamızla toplamı hiçbir zaman bulamayız (Kant, 2000: s. 17).

Kant geometrinin önermelerinin de *sentetik a priori* önermeler olduklarını iddia eder:

> Aynı şekilde Saf Geometrinin de hiçbir ilkesi analitik değildir. İki nokta arasında çizilen doğrunun en kısa çizgi olduğu önermesi, sintetik bir önermedir. Çünkü benim "doğru" kavramım nicelikle ilgili hiçbir şey içermez, sadece bir niteliği içerir. "En kısa" kavramı tamamıyla ona eklenir ve "doğru çizgi" kavramının öğelerine ayrılmasından çıkarılamaz. O halde burada görünün yardımı gereklidir; ancak onun aracılığıyla sintez olanaklıdır (Kant, 2000: s. 17).

#### 1.1.2.7. Saf Matematik Nasıl Olanaklıdır?

Matematik bilgi, kavramını *a priori* olarak ilk önce görüden alır. Dolayısıyla deneyimsel görüde değil, saf olanda somut olarak kurulmak zorundadır. Fakat bu kurulumun olması için onun temelinde herhangi bir saf görü bulunmalıdır. Eğer biz bu saf görüyü ve onun olanağını ortaya çıkarabilirsek, saf matematikteki *sentetik a priori* önermelerin, böylece de bu bilimin kendisinin nasıl olanaklı olduğunu kolayca açıklarız. Bu durumda karşımıza "Saf Görü nasıl olanaklıdır?" sorusu çıkar. Görü, nesnenin varlığına doğrudan doğruya bağımlı olan bir tasarımdır. "Büyüklük", "neden" gibi kavramların bile önem ve anlam kazanabilmeleri için somut olarak belirli bir şekilde kullanılmaları gerekir. Yani nesnenin görüsü nesnenin kendisinden nasıl önce gelir (Kant, 2000: s. 30-31)?

> Benim görümün nesnenin gerçekliğinden önce gelmesi ve *a priori* bilgi olarak gerçekleşmesi sadece bir tek şekilde olanaklıdır: eğer benim öznem tüm gerçek izlenimlerinden önce gelen ve nesneler tarafından uyarılmamı sağlayan duyusallığın biçiminden başka hiçbir şey içermezse (Kant, 2000: s. 31).

Şeyleri *a priori* görmemizi sağlayan, sadece duyusal görünün biçimidir; ama bu sayede nesneleri kendi başlarına oldukları gibi değil, bize (duyularımıza) göründükleri gibi bilebiliriz. Uzam ve zaman görüleri matematiğin ve zorunluluklu ve zorunlu olan tüm bilgilerin temelinde yer alır. Çünkü matematik bütün kavramlarını önce görüde ve saf matematik de saf görüde kurmak zorundadır. Çünkü saf görü, analitik olarak, yani kavramları öğelerine ayırarak değil, sadece sentetik yoldan ilerleyebilir. Geometri uzamın saf görüsünü temel alır. Aritmetik kendi sayı kavramlarını, zaman içinde birbirini izleyen birimlerin eklenmesiyle meydana getirir. Bir çizginin sonsuza kadar uzatılmasını *(in indefinitum)* veya bir dizi değişikliğin sonsuza dek sürdürülmesini talep edebilmek, kendi başına hiçbir şeyle sınırlandırılmamış olması bakımından sırf görüye eklenebilecek bir uzam ve zaman tasarımını şart koşar; çünkü bu tasarım kavramlardan hiçbir zaman çıkarılamaz. Demek ki gerçekten matematiğin temelinde, onun sentetik ve zorunluluklu olarak geçerli önermelerini olanaklı kılan saf *a priori* görüler bulunur. Böylece uzam ve zamanın transsendental türetimi, aynı zamanda saf matematiğin olanağını da açıklar. Saf matematiğin, daha doğrusu saf geometrinin, sırf duyu nesnelerine yönelmesi koşuluyla nesnel gerçekliği olabilir. Bunlarla ilgili temel ilke de şudur: duyusal tasarımlamamız hiçbir şekilde kendi başına şeylerin tasarımlanması değil, sadece onların bize göründükleri gibi tasarımlanmasıdır. Bundan da şu çıkar: Geometri zorunlu olarak uzamda —bu nedenle de uzamda bulunabilecek her şeyde— geçerlidir, çünkü uzam, tüm dış görünüşlerin biçiminden başka bir şey değildir (Kant, 2000: s. 32-37).

> Eğer duyular nesneleri kendi başlarına oldukları gibi tasarımlamak zorunda olsalardı, bu bambaşka olurdu. Çünkü o zaman geometricinin, çeşitli özellikleriyle birlikte *a priori* olarak temel aldığı uzamın tasarımından, şimdi ondan çıkarılmakta olan her şeyin doğada da tam böyle olması gerektiği çıkarılamayacaktı (Kant, 2000: s. 37).

Bu kanıtlama gösteriyor ki duyular, bize hiçbir zaman ve hiçbir durumda kendi başına şeylerin bilgisini sağlamaz, sadece onların görünüşlerini bilgimize sunar. Ama bu görünüşler sadece duyusallığın tasarımları olduğundan, "içinde bulundukları uzamla birlikte bütün cisimler, bizdeki tasarımlardan başka bir şey sayılmamalıdır ve düşüncelerimizden başka hiçbir yerde de yokturlar. İşte bu, açıkça bir idealizm değil midir?" Öteki yandan bizim bilgimizin dışımızda kendi başlarına cisimler vardır.

Onları duyusallığımızı etkilemelerinin bize sağladığı tasarımları aracılığıyla biliriz. Bu ise nesnenin görünüşüdür. Bu ise idealizmin tam tersidir (Kant, 2000: s. 38).

Duyusal bilgi, şeyleri oldukları gibi değil, duyularımızı uyardıkları gibi sunar; böylece de onun aracılığıyla anlama yetisine düşünmesi için, şeylerin kendisi değil, sırf görünüşler verilir. Verilen görünüşler duyulara, yargı ise anlama yetisine dayanır. Yani görünüşten nesnel bir yargıya varmak sadece anlama yetisi ile olur. Anlama yetisi bu öznel tasarımlama biçiminin nesnel sanılmasını önlemeye dikkat etmezse, kolaylıkla yanlış bir yargı ortaya çıkabilir. Duyularımızın görülerini uzay ve zaman içinde tüm bilginin bağlantılılığı kurallarına göre bir deneyimde birleştirmezsek aldatıcı bir kuruntu ortaya çıkabilir. Bu yalnızca anlama yetisindeki duyusal tasarımlarla ilgilidir (Kant, 2000: s. 40-41).

Kant kendi idealizmini Descartes'ın ve Berkeley'in idealizminden ayırır:

> Benim idealizm dediğim, şeylerin varlığıyla ilgili değildi (oysa şeylerin varlığından şüphe etmek, alışılagelen anlamda idealizmi oluşturur); bundan şüphe etmek ise benim hiçbir zaman aklıma bile gelmedi. Ben sadece, şeylerin duyusal tasarımından ve bu arada ve her şeyden önce **uzam ve zamandan** şüphe ettim (Kant, 2000: s. 43).

Kant'ta nesnenin mekanı yargı, yargının mekanı ise düşüncedir. Yargı insan düşüncesinin bir ürünüdür. Dilsel bir varlık veya dile ait bir unsur değildir. Nesne ve kavram yargı içinde ortaya çıkar. Bu yüzden yargıdan bağımsız bir nesne veya kavramdan bahsedemeyiz. Fakat önce yargı ortaya çıkmalıdır ki nesne ve kavrama bu yargı içinde bakabilelim (Koç, 2003: s. 52). O halde Kant'ın meşhur sözünü burada bir kez daha ifade edelim: "görü olmaksızın kavramlar boş, kavramlar olmaksızın görü kördür." (Çitil, 2012: s. 115).

### 1.1.3. Gottlob Frege'de Matematiksel Nesne

Modern matematik felsefesinin Gottlob Frege ile başlatıldığını söylemiştik. Realist olan Frege'ye göre, matematikçi hakkında konuştuğu nesneleri yaratmaz ya da icat etmez. Onlar kendilerinin keşfedilmesi ve betimlenebilmesi için orada beklerler.

Matematikçi bir keşif yolculuğundadır (Barker, 2003: s. 129). Frege'nin matematiksel nesne anlayışını daha iyi aktarabilmek için önce onun kuramlarına değinelim. Çalışmaları iki alan üzerine kuruludur.

1. Mantık ve matematik üzerine düşünceler
2. Dildeki anlamlılığa ilişkin dizgesel sav.

Frege'yi kendinden önceki düşünürlerden ayırt eden şey, mantığa, mantıkla doğal dilin ilişkisine olan farklı yaklaşımıdır. "Bu yaklaşım, mantıkta bir devrime karşılık gelecek ve Frege'yi modern simgesel mantığın kurucu babası yapacaktır." (Gözkân, 2008: s. 13). Bununla birlikte Frege'nin dilin derin mantıksal yapısını araştırması yeni felsefi soruşturmalara kapı aralamıştır. Bu araştırmalardan etkilenen Wittgenstein, ünlü eseri olan *Tractatus* ile Mantıkçı Pozitivizm ve Analitik Felsefenin kurulmasına zemin hazırlamıştır (Gözkân, 2008: s. 14-15; Rossi, 2001: s. 3). Frege'nin açtığı bu yol Thomas S. Khun'un (1922-1996) *Bilimsel devrimlerin Yapısı'*nda bahsettiği paradigma değişimini anımsatır. Kuhn'a göre bilimsel devrim, pozitivistlerin iddia ettiği gibi olgulara olgu ekleyerek bilgi evrenini genişletmek değildir. Tam tersine bilim tarihinin de gösterdiği gibi yeni bir kuram, mevcut kuramdan bazı şeyler alsa bile onları yeni bir anlam çerçevesi (Kuhn'un deyimiyle "paradigma") içine sokarak, eski kuramsal çerçeveyi reddedip yeni olgular ve problem çözme teknikleri sunar (Yalçın, 2003b: s. 47). Denkel'e göre Frege, Descartes'ı andıran bir biçimde, kendisinden sonra gelen felsefi düşüncenin "paradigma"sını değiştirmiştir (Denkel, 1989: s. 24). Frege'nin *Kavram Yazısı* (*Begriffsschrift)* kitabı modern mantığa doğru atılmış önemli bir adımdır. Bochenski, mantık bilimine büyük katkıları olan bu kitabın, ancak klasik mantığın temellerini atan Aristoteles'in *Birinci Analitikler'i* ile karşılaştırılabileceğini ve Frege'nin Aristoteles'ten bu yana gelmiş geçmiş en büyük mantıkçı olduğunu ifade eder (Gözkân, 2008: s. 19). Yaptığı devrimsel ilerlemelerden ötürü sıklıkla Aristoteles ile kıyaslanmış olan Frege pek çok disiplinin babası olarak adlandırılmıştır: modern mantık, biçimsel anlam bilim (formel semantik), dil felsefesi ve matematik felsefesi. Salerno'ya göre "bu disiplinleri tanımlamaya kadar varan felsefi sorunları değil, bunları çözmek için gereken yöntembilimi de daha önce bir benzerine rastlanmayan bir açıklıkla ortaya konmuştur. Bu yöntembilim mantıktır, onun en çok değer verilen aracı." Frege'nin aritmetiğin mantığa indirgenebilir olduğu tezine mantıkçılık (logicism) deniyor. Frege'nin başlangıçta ortaya koyduğu, “aritmetiğin kavramları saf mantıksal terimler cinsinden tanımlanabilirler ve aritmetiğin temel yasaları da sadece mantığın yasaları kullanılarak ispatlanabilirler” teorisi Bertrand Russell tarafından tespit edilen bir paradoksla karşılaşır (Salerno, 2001: s. 13-14). Yaşadığı dönemde çok da anlaşılamayan Frege yaptıklarına olan inancını üvey oğluna yazdığı mektupta dile getirir:

> Yazdığım kağıtları iyi koru. Hepsi altın değerinde değilse bile, içlerinde altın var. İnanıyorum ki onların içinde, bir gün şimdi olduklarından çok daha değerli görülecek şeyler var. Hiçbir şeyin kaybolmamasına özen göster (Frege’den akt. Salerno, 2011: s. 19).

#### 1.1.3.1. Frege’de Dil-Mantık İlişkisi

Frege, mantığı, doğal dilin zemininde onu çözümleyerek aramıştır. (Frege’den akt. Gözkân, 2008: s. 14). Ona göre “(…) mantıkçının önemli görevlerinden biri, dilin düşünüre kurduğu tuzaklara dikkat çekmektir.” (Frege’den akt. Gözkân, 2008: s. 23).

> Felsefenin görevlerinden biri, kavramların ilişkilerinde gündelik dilin kullanımından kaçınılmaz olarak kaynaklanan yanılgıları ortaya çıkararak ve düşünceyi dilsel kullanım araçlarıyla zehirlenmekten kurtararak, sözcüklerin insan aklı üzerindeki egemenliğine son vermektir (Frege’den akt. Gözkân, 2008: s. 23).

Bu durumda “Doğal dilin sınırları içinde kalarak ama aynı zamanda onu aşarak çözümlemenin aracı nedir?” sorusu önemli bir soru haline gelir. İşte Frege, modern mantığın kurucu metni olan *Begriffsschrift*’te ve diğer metinlerinde bu sorunun cevabını arar. Bu araca ilişkin olarak şöyle demektedir:

> Dilimiz mantıksal açıdan daha yetkin olsaydı, belki de mantığa ihtiyacımız kalmazdı ya da mantığı dilden okurduk. Fakat bu durumda olmaktan uzağız. Mantıksal çalışma, büyük ölçüde, doğrudan dilin mantıksal noksanlarına yönelik bir mücadeledir ve henüz kaçınılmaz bir araçtır. Mantıksal çalışmalarımız tamamlandığında ancak daha yetkin bir alete kavuşacağız (Frege’den akt. Güven, 2012a: s. 137).

Felsefi düşünme tarihini kabaca şu üç aşamayla ifade edebiliriz: İlki Platon’dan Kant’a kadar olan dönemdir. Bu dönemde gerçekliğin dayanağının aşkın (*transcendent*) ve insan aklının dışında bir mekândan olduğu ifade edilir. İkinci dönem ise Kant'ın Transandantal Felsefesiyle başlayan dönemdir. Bu dönemde gerçekliğin dayanağı özne ve öznenin akli düzleminde yer alır. Üçüncü dönem ise gerçekliğin dayanağı dil düzleminde aranır. Bu yüzden bu döneme "dile dönüş" *(linguistic turn*) adı verilmiştir. "Dile dönüş", dil ortamının gerçeklikle düşünme arasında sadece saydam bir aracı ortam olmadığını, bizzat bu ortamın felsefe meseleleri adı verilen meselelerin ortaya çıkmasını sağlayan bir zemin olduğunu, bu zeminin bizzat kendisinin yapısı anlaşılmadan felsefe meselelerinin asıl doğalarının da anlaşılamayacağını ileri süren anlayıştır. Frege ile dilin mantıksal derin yapısının araştırılması bu üçüncü dönemin başlamasına neden olmuştur. Frege yaptığı açılımla dünyayı dil üzerinden açılımlayan Wittgenstein'ı da derinden etkilemiştir (Gözkân, 2008: s. 14-23).

Dil araştırmaları Rossi'ye göre sentaktik, semantik ve pragmatik eksenlere ayrılan üç boyutlu bir konu alanı olarak ele alınabilir. Uzun zaman boyunca mantığın kapsamına dilin yalnızca sentaktik yönüne ağırlık verildi. Rossi analitik felsefenin dil soruşturmalarını üç kuşakta inceler. Frege ile başlayan ve Russell ile devam eden filozofların bulunduğu ilk kuşak filozoflar, dilin sentaktik görünümünü önemseyerek doğal diller yerine mantığı; geç dönem Wittgeinstein'dan etkilenen ikinci kuşak filozoflar dilin pragmatik yönünü önemseyerek mantık yerine doğal dilleri; daha sonra ise Quine gibi filozofların içinde bulunduğu üçüncü kuşak filozoflar, dilin semantik yönünü önemseyerek doğal dillerin mantıksal olarak formelleştirilmesini önermişlerdir. Öte yandan, sembolik mantık, semantik boyutu dikkate almaya olanak tanımıyordu. "Dilin tüm sentaktik, semantik ve pragmatik görünüşlerinin mantığın 'sorumluluğunda olduğu'nun ortaya çıkması için; mantığın gelişmesi, açılarak çeşitlenmesi ve birbirlerinden en farklı bir 'mantıklar' çoğulluğunun oluşması gerekecekti." (Rossi, 2001: s. 3-6).

### 1.1.3.2. Frege'de Anlam Problemi: Anlam ve Yönletim Üstüne

Frege "sayal (kardinal sayı) kavramını elde edebilmek için önce bir sayısal eşitliğin anlamını saptamamız gerekir" (Frege, 2008: s. 155) der. Bu yüzden onun anlam problemine değineceğiz.

Frege'nin 1892'de yazdığı "Anlam ve Yönletim Üstüne (*Über Sinn und Bedeutung*)" makalesi, İngilizceye "*Sense and Denotation*" veya "*Sense and*

*Reference*” başlığıyla çevrilmiş. Ayrıca bu ifade Türkçeye Bülent Gözkân tarafından: “Anlam ve Gönderim”, Şule Elkatip ve Arda Denkel tarafından: “Anlam ve Yönletim Üstüne” *,* Şahabettin Yalçın tarafından “Anlam ve Gönderme” , Yalçın Koç tarafından “Anlam ve Atıf” ve Ayhan Dereko tarafından “Duyum ve Gönderge” olarak çevrilmiştir. “*Sinn*”in çevirisinde genel olarak anlaşma var gibi görünse de en son çeviri kitap olan *Frege'ye Dair'*de adlı kitapta Ayhan Dereko tarafından, Türkçedeki çağrışımları çok esnek olduğu gerekçesiyle “anlam”ın yerine “duyum” kullanılması tercih edilmiştir. Frege “*Sinn und Bedeutung*” derken ne demek istemektedir? Türkçe karşılığında uzlaşmaya varılamaması nedendir? Bunu irdeleyelim ve cevabı bulana kadar “*Sinn und Bedeutug*” olarak kullanalım. Bu makale, ilk makalesi olan “Kavram Yazısı”nı *(Begriffsschrift)* 1879'da yazdığı ve son makalesi “Bileşik Düşünce” *(Gedankengefüge)* de 1923'te yazdığı düşünüldüğünde, Frege'nin başlangıç makalelerinden sayılacaktır. Joseph Salerno makaleye dair şunları söyler:

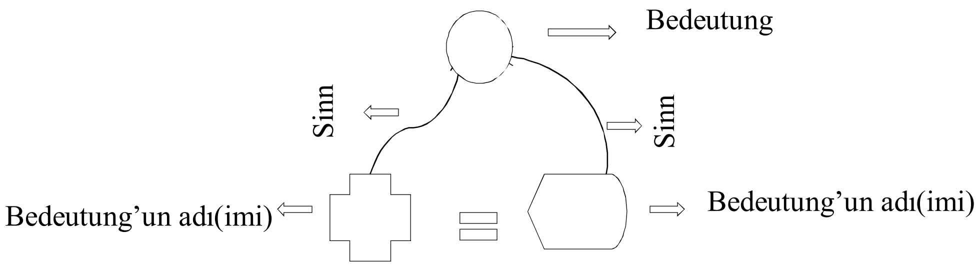
> Frege bu makalede, dilsel anlamların kendi başlarına var olan bağımsız nesnele olduklarını ortaya koymaktadır; yani düşünce ve konuşmanın anlambilimsel içerikleri ne bu düşünce ve konuşmanın hakkında olduğu durumlar/olaylar koşullardır, ne de bu düşünce konuşma ile birleştiğimiz/bağladığımız /psikolojik hallerdir. Bunun yerine, Frege'nin bakış açısına göre (anlambilimse) içerik, zihin ve dünya arasında zorunlu bir ara bölgedir. Birçok düşünür bu görüşleri bugün de hala yararlı ve doğru buluyor. Ve her ne kadar birçoğu da Frege'nin sonuçlarına katılmıyor olsa da, “Duyum ve Gönderge Üzerine”nin anlama ve referansa dair çağdaş kuramların baskın ilham kaynağı (ya da tahrik kaynağı) olduğu konusunda şüphe yoktur. Bu sebepten dolayı “Duyum ve Gönderge Üzerine” bugün bildiğimiz biçimiyle Dil Felsefesinin doğuşu olarak kabul edilmektedir (Salerno, 2011: s. 23).

Bu makalede Frege, özdeşlik bağıntılarını anlambilimsel (semantik) bir problem olarak inceler. “a=b” eşitlik bağıntısı bir özdeşlik özelliği nasıl sağlamakta yani “a” ve “b”den biri diğerinin yerine nasıl kullanılmaktadır? Bu özdeşlik, nesneler arasında mı, yoksa nesnelerin adları arasında mı kurulan bir özdeşliktir? Eğer bu özdeşlik “a” ve “b”nin gösterdiği adlar arasındaki bir özdeşlik olsaydı, “a=a” ve “a=b” aynı şeyler olmak zorunda kalırdı. Yani görüldüğü üzere, sembol olarak “a”, sembol olarak “b”den farklı yazılıyor olduğundan, adlar arasında bu özdeşliğin oluşması mümkün değildir. Bir sembol/im yalnızca kendisi ile özdeş olabilir. “a=a” ise *a priori* olarak doğrudur ve Kant açısından değerli bilgimizi genişletmeyen analitik bir yargıdır. Peki, “a=b” ne zaman doğru olacaktır? Böyle bir özdeşlik (a ile b’nin çakışması ““*Über Sinn und Bedeutung*” birinci dipnot*)* nasıl mümkündür? Böyle bir eşitlik *a priori* olarak saptanamaz ve bilgimizin içeriksel açıdan genişlemesine yol açar. Bu önerme Kant açısından analitik bir önerme değildir. “a=b” eşitliği, sembol olarak “a”nın ve sembol olarak “b”nin aynı nesneyi imlediği anlamına gelecektir. Bu eşitlik bağıntısı, bu imler yalnızca herhangi bir şeyi, üstelik aynı şeyi adlandırdıkça, belirttikçe geçerli olur. “Buna, imlerin her ikisinin belirtilen nesne ile bağıntısı aracılık ederdi.” (Frege, 1989: s. 7). Fakat bir olay ya da bir nesneyi bir şeyin imi olarak kullanmak alıkonulamaz keyfi bir durumdur. Yani bu durumda “a=b” eşitliği, sembollerin bağıntılı olduğu nesneler özdeş (tamamen aynı, çakışık) olduğu sürece bir özdeşlik ifadesi olacaktır. Örneğin bütün üçgenler için üç kenarortayın kesim noktası tektir. Biz bu kesim noktasını birden fazla farklı biçimde ifade edebiliriz. Örneğin bir ABC üçgeninde;

i. A köşesinden ve B köşesinden indirilen kenarortayların kesim noktası
ii. B köşesinden ve C köşesinden indirilen kenarortayların kesim noktası

Bu iki ifade de tanımları gereği aynı nesneyi gösterecektir. O halde, bu aynı noktanın birden fazla biçimde ifadesi mümkün ise bu ifadeler arasında bir eşitlik; fakat gösterdikleri nesne (yani söz konusu kesim noktası) bakımından özdeşlik vardır. İşte burada Frege, bu iki ifadenin gösterdiği/imlediği o nesneyi (kesim noktasını), onların *“Bedeutung”*u olarak adlandırmaktadır. O, bu iki ifadenin *“Bedeutung”*larının aynı ama “*Sinn”*lerinin farklı olduğunu belirtmektedir. Yani, bu ifadelerin bize anlatmak istedikleri nesnenin kendisi “*Bedeutung*”; bu nesneye ulaşmak için izlenen yol ise, “Sinn” olacaktır. Bunu şöyle resmedebiliriz:

Şekil 1.2. Anlam ve Yönletimin Görsel İfadesi




> Bir im, onun anlamı ve onun yönletimi arasındaki bağlantı o türden bir bağlantıdır ki, imin karşılığında bir anlam, onun karşılığında da belirli bir

> yönletim vardır; fakat herhangi bir yönletimin (bir nesne) imi bir tane değildir (Frege, 1989: s. 8).

Burada yazının devamını okumayı zorlaştırmamak amacıyla *"Sinn"* ve *"Bedeutung"* için birer Türkçe kelime tercih etmek gerekmektedir. Bu nedenle bundan sonra "Sinn" için, bir içerik açıklama olduğundan "anlam"; ve "*Bedeutung"* içinse, anlamlı bir cümleyi veya bir özel adı bir nesneye yöneltme/yönlendirme yaptığından dolayı, "yönletim" çevirisi tercih edilecektir.

Bir özel adın anlamı, o dili bilen kişilerce kolayca kavranır. Fakat bu anlam; eğer varsa bu anlamın belirttiği yönletimin tam kapsamlı bilgisini vermeyecektir. Bu bakımdan anlam, yönletimi bir tek yönü ile aydınlatır. Burada Frege'nin "özel ad" ifadesini Arda Denkel şöyle açıklamaktadır:

> Fregeye göre, "Tunca keldir" ve "kan kırmızıdır"daki "Tunca" ve "kan" birer özel addırlar ve birer "nesneye" yönletirler. Eğer "güzellik geçicidir" veya "Frege'nin etkisi büyük olmuştur" demiş olsaydık, "güzellik" ve "Frege'nin etkisi" birer nesneye yönleten özel ad olmuş olacaktı (Denkel, 1989: s. 26 ).

Bu durumda onun "özel ad"dan bir kavramın adını ifade etmekte olduğunu anlamaktayız. Buradan da şu sonuca ulaşabiliriz: Kavramların isimleri onları bir yönüyle ifade edecek, ancak tam ve eksiksiz olarak anlatamayacaktır. Bu yüzden de bir kavramın birden fazla adı bulunacaktır. Frege bu durumun elbette istisnalarının olacağını da belirtir:

> Eksiksiz bir imler topluluğunun toplamına ait her dile getirişe belirli bir anlam elbette karşılıklı olmalıdır; fakat doğal diller genellikle bu koşulu yerine getirmezler ve aynı sözcük eğer aynı bağlamda aynı anlama sahipse bununla yetinmeliyiz. Belki de denebilir ki, özel ad yerini tutan, dilbilgisi kurallarına göre iyi kurulmuş her dile getiriş her zaman bir anlama sahiptir. Fakat bu, o anlama, bir yönletimin de karşılıklı olması demek değildir (Frege, 1989: s. 8).

Bu duruma örnek "Dünyaya en uzak gök cismi" verilebilir. Bu ifadenin bir anlamı vardır ama bir yönletimi bulunmamaktadır. Çünkü o nesneyi tam bulduğunuzu düşündüğünüzde, o cisimden daha uzak bir tanesini bulabilirsiniz. Her seferinde bir sonraki gök cismi mümkündür. Bu nesnenin bilinebilirliği mümkün değildir. Bu konuda Frege “Bir anlamı kavrarken, bir yönletim kimseye kesinlikle garanti edilemez” demektedir (Frege, 1989: s. 8). Öte yandan Frege, kişinin gördüğü veya deneyimlediği şeyi, anlam ve yönletimden başka bir noktada tutmakta, buna da “tasarım *(Vorstellung)”*[5] adını vermektedir. Frege bir imin yönletimini ve anlamını, onun çağrıştırdığı tasarımdan ayırt eder. Eğer bir imin yönletimi duyular tarafından algılanabilir nesne ise, onun kişideki tasarımı, onun sahip olduğu duyu izlenimlerinin anıları ile hem içinde hem de dışında yerine getirdiği edimlerden doğan içsel bir imgedir. Böyle bir tasarım duyguyla doymuş olduğundan ayrı ayrı parçalarının netliği değişir ve salınır. Aynı anlam her zaman, hatta aynı insanda bile, aynı tasarım ile bağıntılı değildir. Tasarım özneldir. Yani tasarımlar kişiler arasında farklılıklar gösterir. Doğal olarak bu durumda aynı anlamla ilişkilendirilen tasarımlarda farklılıklar çıkar. Bunu açıklamak için şu örneği verir Frege: Bir ressam, bir binici ve bir zoolog belki de “Bucephalus” adına ilişkin olarak farklı tasarımlara sahiptir. Bu tasarım, birçoklarının ortak malı olabilecek ve bu yüzden de tikel anlığın bir parçası ya da kipi olmayan anlamla arasında özsel bir fark oluşturur. “Çünkü kimse insanlığın bir kuşaktan diğerine aktarılan ortak bir düşünceler birikimine sahip olduğunu kolaylıkla yadsıyamaz.” (Frege, 1989: s. 9; 1984: s. 160).

Tasarım, anlam ve yönletimin birbirinden ayrı olduğunu Frege şöyle bir örnekle somutlaştırmak ister. Bir teleskop yardımıyla Ay gözlemi yapan biri olsun. Burada Ay bu gözlemin nesnesi olacak ve “Ay” sözcüğünün/iminin yönletimine denk düşecektir. Bu yönletim teleskopun iç tarafına izini düşürdüğü gerçek imgenin ve gözlemcinin retinal imgesinin aracılığıyla gözlemin nesnesidir. Bu durumda teleskopun merceğinde oluşan imge “Ay”ın anlamı, gözlemi yapan kişinin retinasında oluşan imge ise bu kişinin Ay’a ilişkin tasarımı veya deneyimidir. Teleskopta oluşan imge gözlemcinin bakış açısına bağımlıdır ama yine de birkaç gözlemci tarafından kullanılabildiğinden nesneldir. Onu birkaç gözlemcinin kullanabilmesi sağlansa bile, her bir gözlemci kendi retinalarına düşen imgelere sahip olacaklardır. Böylece gözlemcilerin, gözlerinin biçimlerinin faklı olması nedeniyle geometrik bir uygunluk

[5] İngilizceye çevirisi “*idea*”, “*associated conception*” veya “*represantation*” olarak yapılan ve Türkçeye Şule Elkatip ve Ayhan Dereko tarafından “ide” olarak çevrilen kelime, Frege’nin kullanımı ile “*die Vorstellung*”dur. Öte taraftan Kant “öznel tasarım” için bu kelimeyi kullanmış ve bu Aziz Yardımlı ve Felsefe Kurumu tarafından “tasarım” olarak ve ayrıca Bülent Gözkan tarafından da *‘Aritmetiğin Temelleri*’nde yine “tasarım” olarak çevrilmiş olduğundan, burada “ide” yerine “tasarım” kelimesinin kullanımı yeğlenmiştir.

başarılamaz bundan dolayı gözlemler arasında gerçek bir örtüşme yakalanamaz. Frege, "iki kişinin aynı anlamı kavramasına engel yoktur; ama aynı tasarıma sahip olamazlar" diyerek anlamın nesnelliğine ve aynı zamanda tasarımın öznelliğine vurgu yapmaktadır (Frege, 1989: s. 9; 1984: s. 160-161). Frege, *Aritmetiğin Temelleri'*nde, "tasarım" terimini, bir sözcüğü duyduğumuz veya okuduğumuzda zihnimizde oluşan öznel bir imge, psikolojik bir unsur, öznel bir çağrışım olarak kullandığını ifade eder:

> Öznel anlamda bir tasarım, psikolojik çağrışım yasalarını ilgilendiren bir şeydir; duyusal imgesel bir yapısı vardır. Nesnel anlamda tasarım, mantığa aittir ve ilkece duyusal değildir; her ne kadar nesnel bir tasarıma gönderen sözcüğe, genellikle öznel bir tasarım eşlik ediyor olsa da, bu onun gönderimi değildir. Öznel tasarımlar, çoğu zaman gösterilebilir ki, farklı insanlarda birbirlerinden farklıdır; nesnel tasarımlar ise tüm insanlarda aynıdır. Nesnel tasarımlar nesnelere ve kavramlara ayrılabilir. Karışıklığı önlemek için, ben "tasarım" sözcüğünü yalnızca öznel anlamında kullandım. Kant, bu sözcüğe her iki anlamı da [Bedeutung] verdiği için öğretisinin, öznel, idealist bir yan taşıdığı varsayılmış ve bu, gerçek görüşünün anlaşılmasını zorlaştırmıştır. Burada göz önünde tutulan ayrım, psikoloji ile mantık arasında yapılan ayrım kadar haklı bir ayrımdır. Bunları her zaman keskin bir şekilde birbirlerinden ayırmak gerekir (Frege, 2008: s. 121).

Frege'ye göre mantıksal bir dilin inşa edilmesiyle, hem dilin mantıksal formunu psikolojik olandan ayırmak mümkün olacaktır, hem de doğal dilin gramerine dayanan ve mantıksal derin yapıyı örten görünüşteki kılıfı çözebilmek ve onun asli öğelerine ayırabilmek mümkün olacaktır (Gözkan, 2008: s. 21). Frege, tasarımın nasıl gerçekleştiği ve onun tasarımı kendi başına bir nesne olarak nasıl ele alınabileceği konusu ile ilgili olaraksa "(...) bunun peşine düşmek bizi konumuzun çok uzağına götürür (…)" diyerek nesnel olanı açıklamayı tercih etmiştir. (Frege, 1989: s. 9; 1984: s. 160-161).

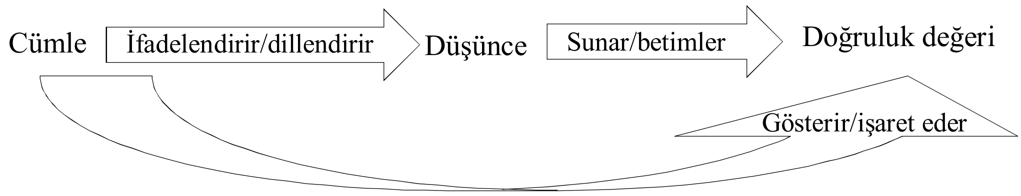
Frege'nin tasarımlar üzerinde durmayı tercih etmemesi, mantık kurallarının doğasına ve nesnel, olan genel geçerliliği olan bilgiye yönelmemizi sağlamak için midir? Olanaklı durumların hesabı olan mantık, düşünmenin kurallarını ortaya çıkarmaktadır. Bu kurallar insani bir tasarı mıdır? Yoksa var olanın doğasını keşfetme midir? Örneğin, bir geometrik şeklin çevresini nasıl buluruz? Frege'nin böyle bir soru karşısında cevabı, "var olanı keşfetme" olacaktır. Gerçekten de biz bir geometrik cismin çevresini hesaplarken etrafını adımlarız ve attığımız adımların miktarının art arda gelmesinin toplam miktarını bulmaya çalışırız. Bu bakımdan Frege, nesnel olan bilgiye ulaşabilmek için öznel olan tasarımla ilgilenmeyi tercih etmemiştir. Böylece bir anlamın tasarımına sahip olan kişinin bu tasarımının diğer gözlemciler için aynı olmadığını ama onun nesnesi açısından aynı olduğunu söyleyebiliyoruz. O halde anlam bir nesnenin nesnel bilgisidir. Aynı nesnenin birden fazla anlamı olabilir. Fakat o anlamın insanlardaki tasarımları farklı olacaktır. Sözcükleri, onların dile getirişlerinden ayırt edebiliriz. Bu farklılık tasarıma ya da anlama ait olacak, o sözcüğün yönletimi bundan etkilenmeyecektir. Bir sözcüğün kendisi ile tasarımı arasındaki kesin olmayan bağlantı birinci düzeye ilişkin bir bağlantıdır. Bu, orijinal bir metin ile çevirisi arasında olan veya şiir dilinin anlama katmak istediği renkleme ve tonlamalarda olduğu türden bir ilişkidir. Bu türden bir bağıntı nesnel değildir. Yani her dinleyici ya da okuyucu, ozanın ya da okuyucunun esinlemesine ve tonlamasına göre onu yeniden yaratır. Fakat Frege tasarımlara ve deneyimlemeye ve de bunların nasıl gerçekleştiğine dair açılım getirmeyi psikolojizme düşmemek için girmeyeceğini ifade etmiştir.

Bir özel ad, diyebiliriz ki kendi anlamını *dile getirir* ve kendi yönletiminin (yönletimi varsa) *yerine durur* onu *belirtir*. Yönletimi olup olmadığını bilmediğimiz özel adlarda yalnızca anlamla yetinmek zorunda kalabiliriz. Peki, bir adın değil de bütün bir dilsel tümcenin anlam ve yönletimi nasıl bulunur? Frege böyle bir cümlenin düşünce içerdiğini söyler. Düşünceyi ise "öznel düşünmenin yerine getirilmesi değil, ama onun, birkaç düşünürün ortak malı olabilme niteliği bulunan, nesnel içeriği" olarak ifade eder (Frege, 1989: 9. Dipnot). Şimdi önce bir tümcenin bir yönletimi olduğunu varsayalım. Şimdi burada, tümce içindeki bir sözcüğü/terimi, aynı yönletime sahip fakat farklı anlamı olan bir sözcükle/terimle değiştirdiğimizde cümlenin yönletimi değişmeyecektir. Frege bu bağlamda şöyle bir değerlendirme yapar:

> "Sabah yıldızı Güneş tarafından aydınlatılan bir cisimdir" tümcesindeki düşünce "Akşam yıldızı Güneş tarafından aydınlatılan bir cisimdir" tümcesindekinden farklıdır. Akşam yıldızının sabah yıldızı olduğunu bilmeyen bir kimse bu düşüncelerden birini doğru, ötekini de yanlış sanabilir. Bundan dolayı düşünce tümcenin yönletimi olamaz, anlam olarak görülmesi daha uygundur (Frege, 1989: s.10).

O halde düşünce, cümlenin anlamıdır. Yani biz bir cümlenin ne anlama geldiğini anladığımızda o cümlenin bahsettiği düşünceyi de anlamış oluyoruz. Dahası, Frege'ye göre, böyle bir cümlenin kendisi için bir yönletimin de bulunması beklentisi içinde oluruz; eğer onun bir cümlenin bir yönletimi yoksa (bilinemiyorsa) o zaman yüklemi uygulayamaz hale geliriz. O zaman da o tümcenin anlamı, dolayısıyla düşüncesi bizim için değerini yitirir. Tümcenin bize anlattığı düşüncenin değerini yitirmemesi önemliyse ve tümcenin doğruluk değeri aranıyorsa onun yönletimine ihtiyaç duyarız. Biz şiir veya bir edebi metinde onun doğruluk değeri ile ilgilenmeyiz. Fakat eğer bilimsel bir inceleme söz konusu ise o zaman tümcenin doğruluk değeri yani yönletiminin varlığı bahsi geçen düşüncenin değeri, kaybetmemesi için değer kazanır. O halde diyebiliriz ki cümlenin doğruluk değeri onun yönletimini oluştururur. Doğruluk değeri yalnızca "doğru" ve "yanlış" olarak ifade edilebilir. Bir tümcenin bir parçasının yerine aynı yönletime sahip bir başka ifade konduğunda, cümlenin doğruluk değeri yani onun doğruluğu veya yanlışlığı değişmeyecek ve bu da bize tümcenin doğruluk değerinin onun yönletimi olduğunu gösterecektir. Fakat, bir cümlenin tek başına yönletimi, yani doğruluk değeri tek başına bilgi vermez. Ancak bir cümlenin yönletimi/doğruluk değeri ile birlikte olan düşünce bilgi verir. Düşüncenin doğruyla olan bağıntısı anlam ile yönletim arasındaki bağıntı gibi değil de, özne ve yüklem arasındaki bağıntı gibidir. Bir tümcenin doğruluk savı onun biçiminden doğar. Bu yüzden özne ile yüklem (mantıksal açıdan anlaşıldığında) düşüncenin öğeleridir. Yine de düşüncenin doğruyla ilişkisini, öznenin yüklemle olan ilişkisi ile karıştırmamak gerekir. "Özne ile yüklemi birleştirerekten kişi yalnız bir düşünceye ulaşır, asla anlamdan yönletime, bir düşünceden onun doğruluk değerine, geçmez" (Frege, 1989: s. 12). Bunlar aynı düzeyde devinir, yani bir düzeyden diğerine geçilmez. Salerno, bir cümlede, düşünceden doğruluk değerine geçişi şöyle şematize etmektedir.

Şekil 1.3. Salerno'nun Düşünceden Doğruluk Değerine Geçiş Tablosu (Salerno, 2011: s. 93).



Frege düşünceden doğruluk değerine geçişi *yargı* olarak ifade etmektedir. Kişi yargıyı, doğruluk değeri içerisinde, parçaların ayrımları olarak ifade edebilir. Bu ifade ediş düşünceye bir daha geri dönerek ortaya çıkarabilir.

Frege çeşitli anlambilimsel (semantik) sorular üzerinde durmaktadır. Anlambilimsel tartışmalar, burada, tezimizin konusunun kapsamından çok uzaklaşılmayacak biçimde ele alınacaktır yalnızca. Frege yan cümlelerin de doğruluk değerlerini irdelediği görülür. Bir cümle içinde, aynı yönletime sahip bir açıklayıcı yan cümlenin anlamının bir düşünce olmayıp yalnızca onun bir parçası olduğunu belirten Frege'ye göre, bu yan cümlelerin yönletim olarak da doğruluk değeri yoktur. Yani "Gezegen yörüngelerinin elips biçiminde olduğunu keşfeden her kimse yokluk içinde öldü." (Frege, 1989: s. 15) cümlesinde, "gezegen yörüngelerinin elips biçiminde olduğunu keşfeden her kimse" ifadesi ana cümle içinde bir yan cümledir ve bu düşüncenin yönletimi Kepler'dir. Fakat bu cümledeki düşünce ana cümledeki "yokluk içinde öldü" ifadesine yalnızca aracılık etmektedir. Bu yüzden yan cümlenin doğruluğu ya da yanlışlığı ana cümlenin doğruluk değerini etkilemeyecektir. Yani yan cümlenin yönletim olarak bir doğruluk değeri yoktur.

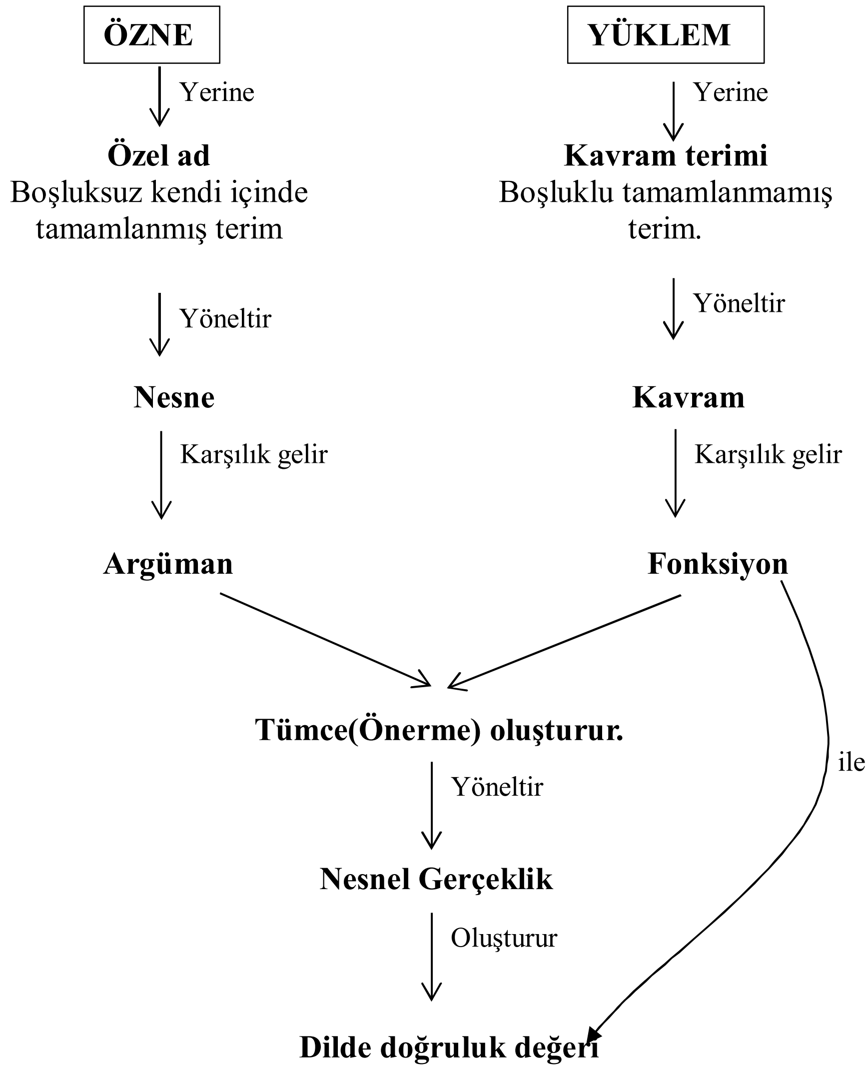
Son olarak "a=a" ve "a=b"nin farklı bilgi değerlerine sahip olduğunu fark ettiğimizde, amaç da bilgi edinmek olduğundan, cümlenin anlamını yani onunla ifade edilen düşünceyi, yönletimi ile yani onun doğruluk değeri ile birlikte ele almalıyız. Eğer "a=b" ise "a" ve "b"nin anlamları farklı, yönletimleri aynıdır. Bundan dolayı bu bağıntının doğruluk değeri "a=a" bağıntısınınki ile aynıdır. Fakat, "a=b"de dile getirilen düşünce "a=a"nınkinden farklıdır. O durumda her iki cümle aynı bilgi değerine sahip olamaz. Eğer "yargı" kavramını düşünceden doğruluk değerine geçiş olarak anlarsak bu cümlelerin yargılarının da farklı olduğunu söyleyebiliriz. Frege böylece bir eşitlikten bir özdeşlik ifadesine geçmiş ve böylece "a=a" gibi analitik bir yargının doğruluk değeri ile "a=b" gibi bilgimizi genişletmeyi başaran böyle bir ifadenin doğruluk değerlerini aynı olarak bulmuştur (Frege, 1989: s. 11-23; 1984: s. 161-177). Frege analitik bir doğruluğu, bu doğruluğun gerekçelendirmesinde aramaktadır. Bu yolda son olarak ulaşılan yalnızca mantık yasaları ve tanımlar ise ona göre bu doğrular analitik doğrulardır (Frege, 2008: s. 89). Bu sebepten dolayı "a=b" yargısında doğruluk değeri açısından özdeşlik ilkesine ulaşılabilmesi bu yargının analitik yargı olduğunu gösterir.

### 1.1.3.3. Kavram ve Nesne Üzerine

Frege, sözcük ve tümce anlamlılığını birbirinden ayırt ederek inceler. Bir sözcüğün anlamını onun tümceye yaptığı katkı açısından da ele alır. Cümle anlamlılığını özellikle "Kavram ve Nesne Üzerine" makalesinde irdeleyen Frege, orijinal adı *"Über Begriff und Gegenstand"* olan ve 1892'de yazdığı makalesinde bazı düzeltmeler yapar. Burada, *Aritmetiğin Temelleri*'ni yazdığı sırada "Anlam ve Yönletim Üstüne" makalesini henüz yazmadığı için, "mümkün bir yargının içeriği" ifadesinde, sonradan ayırt ettiği "düşünce" ve "doğruluk değeri" terimlerini bir tuttuğunu dile getirir (Frege, 2010: s. 110). Frege'ye göre tümcelerin düşünceleri doğruluk değerlerine yönletilir. O, tümce içinde klasik anlamda bildiğimiz özneye "özel ad", yükleme ise "kavram terim" demektedir. Kavram terimleri bir kavrama yönletirken özel adlar bir nesneye yönletir (Denkel, 1989: s. 26). Frege bunu şöyle dile getirir: "Kavram bir yüklemin yönletimidir [*Bedeutung*]; nesne ise hiçbir durumda bir yüklemin yönletiminin bütününü oluşturmayıp ancak bir öznenin yönletimi [*Bedeutung*] olabilir." (Frege, 2010: s. 110). Frege için yöneltimi nesne olan özne "doygun tamamlanmış" bir terimdir. Fakat yönletimi kavram olan yüklem "boşluklu tamamlanmamış" terimdir. Bir tümce ise böylesi boşluklu bir çatının, boşluksuz bir öğe ile doldurulması sonucunda kurulur. Dolayısıyla Frege'ye göre tümceler ve yüklemler, özel adlarla her ikisi de tamamlanmış şeyler olmalarından dolayı benzeşirler. Öznenin yüklemi doldurarak bir bütün (tümce) oluşturmasının, bunların bir arada durabilmelerinin nedeni özellikle anlamsaldır. Frege'ye göre, tümce doğruluk değerine yönletim yapar. Kuvvetli bir realist olan Frege açısından yönletilen her şey tam anlamıyla nesnel ve gerçektir. Dolayısıyla gerçekliği oluşturan öğeler, nesneler, kavramlar, "Doğru" ve "Yanlış" yine bir nesneden oluşur. Gerçeklikteki bir nesnenin mutlaka somut ve fiziksel bir şey olma zorunluluğu yoktur. Somut olmaması, bir nesnenin gerçekliğini azaltmaz. Aynı şekilde kavram da gerçektir ve anlıktan bağımsız bir ilkedir. Tüm doğru tümceler aynı "Doğru" ya, tüm yanlış tümceler aynı "Yanlış"a yönletilirler. Bu kuramı ortaya atarken Frege kendi matematiksel fonksiyon modelinden yararlanır. Kavramı fonksiyona karşılık olarak, nesneyi ise argümana karşılık olarak düşünen Frege, fonksiyonun değerine karşılık olarak ise, dilde doğruluk değerini önerir. Matematik ile dili böylece aynı yapı içinde kavrar.

Aralarındaki fark sadece fonksiyonların birinde "matematiksel" diğerinde ise "önermesel" olmasıdır. Peki, biz düşüncenin yönletildiği doğruluk değerine nasıl ulaşırız? Eğer yönletilen nesne, yönletilen kavramın kaplam alanı altına düşüyorsa elde edilen önerme doğru, değilse yanlıştır (Denkel, 1989: s. 26-28). Şimdi bütün bu yazdıklarımızı aşağıdaki özet tabloyla gösterebiliriz:

Şekil 1.4. Frege'de Özne Yüklem Bağlamı




Kavramlara karşılık gelen fonksiyonlar farklı değerlere sahiptir. Bu değerlere Frege, değer alanı *(Werthverlauf )* adını verir. Diğer taraftan bu değerler, aynı zamanda doğruluk değerlerine de karşılık gelir. Frege'ye göre "Bir kavram, değeri her zaman doğruluk-değeri olan bir fonksiyondur." (Gözkân, 2008: s. 44). Bu durumda diyebiliriz ki her fonksiyon ya da kavramı, altına düşecek argümanları ya da nesneleri, doğru veya yanlış yargılar olarak ikiye ayırır. Frege, kardinal sayıların tanımı içinde önemli bir yer tutan birinci düzey kavramlarla, ikinci düzey kavramları ayırt eder. Nesnelerin altına düştükleri kavramlar, birinci düzey kavramlardır. Örneğin; "Jena bir üniversite kentidir" tümcesinde, "'Jena' kentine gönderen özel adla adlandırılan nesne, 'üniversite kenti olma' kavramının (birinci-düzey) altına düşmektedir." (Gözkân, 2008: s. 47). Yani nesnelerin özelliklerini olan kavramların vasıflarını ifade eden kavramlar birinci düzey kavramları oluşturacaktır. Örneğin "insan" nesnesine ait "iki ayaklı olma", "memeli" olma kavramları birinci düzey kavramlardır. Öteki taraftan kavramlar arasında da ilişkiler, yani birinci düzey kavramlarla, ikinci düzey kavramlar arasında "altında kapsanma" ilişkisi vardır. Örneğin; "4'ün en az bir karekökü vardır" tümcesinde "vardır" yükleminin yönelttiği kavram, "4'ün karekökü olma" kavramına yüklenmektedir. Burada "vardır" yüklemi 2 veya -2 ye değil doğrudan "4'ün karekökü olma" kavramına aittir. Yani "4'ün karekökü olma" kavramının "boş" olmadığını, altına en az bir nesne düşebilen bir kavram olduğunu ifade etmektedir. Böylelikle "vardır" yüklemi, kavramın altına düşen nesnelerin özelliklerini değil bizzat kavramın kendisinin bir özelliğini dile getirmektedir. Birinci düzey bir kavramın özelliğini dile getiren bir kavram ondan daha üst bir düzeyde olacağından ikinci düzey bir kavramdır (Gözkân, 2008: s. 44-48). Frege, daha sonra da dile getireceğimiz gibi, kardinal sayıları ikinci düzey kavramlar olarak tanımlamaktadır

#### 1.1.3.4. Frege'de Düşünceler ve Düşüncenin Nesnelliği

Bir iddia belirten cümle düşünce içerir ve düşünce bir cümle anlaşıldığında idrak edilendir. Örneğin; Bucephalus'un savaşta öldüğü ve 2+2=4 olduğu , "Bucephalus savaşta öldü" ve "2+2=4" cümleleriyle ifade edilen düşüncelerdir. Bir cümle ile ifade edilen düşüncenin, cümlenin kendisinden farklı bir şey olduğuna dikkat etmek önemlidir (Salerno, 2011: s. 47). Bir düşüncenin bu düşünceyi ifade eden cümlenin yönletimi değil onun anlamına karşılık geldiğini daha önce belirtmiştik. Frege "düşünceler" hakkında "Anlam ve Yönletim"in dipnotunda "Bir düşünceden benim anladığım öznel düşünmenin yerine getirilmesi değil, ama onun, birkaç düşünürün ortak malı olabilme niteliği bulunan, nesnel içeriğidir." (Frege, 1989: s. 22) demişti. *Kavram Yazısı*'ndan (B*egriffsschrift)* itibaren nesnelliğin peşinde olan Frege, bu bakımdan düşüncenin nesnelliğini her fırsatta dile getirmiştir. "Eğer, öznel olandan büsbütün kurtulmak istiyorsak, bilgiyi bilineni oluşturan değil, zaten olanı yakalayan bir etkinlik olarak düşünmeliyiz.” (Frege’den akt. Güven, 2012: s. 185). Yani, özneden bağımsız olan nesnellik, Frege’ye göre, “onu yakalayabilmeye elverişli tüm akıllı varlıklar [*Vernunftwesen*] için tam olarak aynı olan şey”, “çok sayıda kimsenin ortak malı [*Eigentum*] olmaya elverişli” olandır (Frege’den akt. Güven, 2012a: s. 185). Frege bilgideki nesnelliği düşünceler olarak belirler (Güven, 2012a: s. 186). Gözkân ise düşüncedeki nesnelliği şöyle açıklamaktadır:

> Düşüncedeki mantıksal veya nesnel öğe, içeriğin dışlanmasıyla (veya soyutlanmasıyla) elde edilen değildir, ama psikolojik öğelerin dışlanmasıyla elde edilendir. Frege'nin önceleri Boole'a daha sonra da Hilbert'in formalizmine itiraz ettiği nokta, içeriğin tümüyle göz ardı edilmesi ve sadece forma bakılmasıdır (Gözkân, 2008: s. 21).

Salerno da “düşünceler” hakkında bazı çıkarımlarda bulunur:

> 1. Düşünceler bireysel bir zihinde mahrem bir tarzda ikamet etmezler, tersine özneler arası erişilirdirler (yani, aynı düşünce birçok farklı zihin tarafından tekrar ve tekrar edinilebilir ve ifade edilebilir) (Salerno, 2011: s. 63).

Bu sav Frege'nin nesnelliğe dair genel kuramının da en önemli öğesidir. Frege, düşüncelerin iletilebilmesinin mümkün olduğunu dile getirir. Bu yüzden onun çalışması bu imkânı açıklama girişimi olarak da anlaşılabilir. Düşünceler nesnel olduğu sürece de iletişim, bir şeyin doğru olduğunu söyleyebilme yeteneği, anlatılmak isteneni başkalarına aktarabilme yeteneği ve söylenenle uyuşan veya çelişen bir dinleyici bulunması imkanını içeren bir etkinlik olur (Salerno, 2011: s. 64).

> 2. Düşünceler bireysel düşünme edimlerinden bağımsız olarak var olurlar (yani, düşünme ne bir düşünceyi varlığa getirebilir ne de onun varlığını devam ettirebilir; bir düşünce, biz onu düşünelim ya da düşünmeyelim var olur) (Salerno, 2011: s. 64).

Düşünceler zihinden bağımsız yani düşünme eylemine bağlı değildir. Yani düşünceler bireysel düşünme edimleri olarak tanımlanamazlar veya düşünceler, düşünme edimlerine bağımlı kabul edilemezler. Bunu Frege şöyle ifade eder:

> Bir kişi bir şeyi görür, bir fikre sahip olur, bir düşünceyi idrak eder veya düşünür. Bu kişi bir düşünceyi idrak ettiğinde veya düşündüğünde onu

> yaratmaz, zaten var olan bir şeyle sadece ilişki içine girmiş olur-bir şeyi görmekten veya bir fikre sahip olmaktan farklı bir ilişki içine (Frege'den akt. Salerno, 2011: s. 65).

Salerno'ya göre, düşüncelerin "üretilemez" ve "yaratılamaz" olmasının nedeni düşüncelere erişme yolumuz ile kendi zihinsel hallerimize erişme yolumuz arasındaki farklılıkta yatıyor olmalıdır. Başka bir deyişle öznel olan hiçbir şey nesnel olanı varlığa getiremez. Frege düşünme ile düşünce arasındaki bağı reddettiğini şöyle yazar (Salerno, 2011: s. 65-67).

> [Biz] düşünmeyi düşünceler üreten bir süreç gibi kabul edemeyiz. Bu, bir düşünceyi bir düşünme edimi ile özdeşleştirmek kadar hatalı olacaktır, öyle ki bir düşüncenin düşünmeyle olan ilgisi bir sıçrayışın sıçrama ile olan ilgisi gibi olur. Bu görüş bizim konuşma tarzlarımızın birçoğu ile uyum içindedir. Çünkü aynı düşüncenin hem bu kişi hem de şu kişi tarafından edinildiğini söylemiyor muyuz? Ve her bir kişinin aynı düşünceyi tekrar ve tekrar edindiğini? Şimdi, eğer düşünceler ancak düşünmenin bir sonucu olarak varlığa gelebiliyorlarsa veya eğer düşünme tarafından oluşturuluyorlarsa, bu durumda, aynı düşünce var olacak, sonra yok olacak ve sonra tekrar var olacak ki bu saçmadır. Nasıl ki, bir ağaca bakmakla onu yaratmış olmuyorsam veya bir kalemi elime almakla onun varlığına sebep olmuyorsam, aynı şekilde, bir düşünceyi düşünmekle de onu üretmiş olmam (Frege'den akt. Salerno, 2011: s. 67).

Düşüncelerin var olması düşünmeye bağlı değildir diyen Frege, düşüncelerin nasıl ve neyle yakalandığını ise açıklamaz. Ama düşünceler kamusal erişime açıktır; bundan ötürüdür ki Frege, onların zihinden bağımsız bir şekilde nesnel olduklarını dile getirmektedir (Salerno, 2011: s. 68).

> 3. Bir düşüncenin doğruluğu (veya yanlışlığı), bizim onu doğru (veya yanlış) saymamızdan bağımsızdır. Yani, doğru bir düşünce, biz onu yanlış saysak bile ve hatta bu düşünceyi bugüne dek hiç aklımıza getirmemiş olsak bile, doğru olacaktır (Salerno, 2011: s. 64).

Düşüncenin doğruluğu veya yanlışlığı bizim onu belirlememize bağlı değildir diyen Frege realist bakış açısını "Mantık (*Logic*)" makalesinde şöyle vurgular:

> Bir doğa yasası bizim icat ettiğimiz bir şey değildir, bizim keşfettiğimiz bir şeydir; ve nasıl ki, Arktik Okyanustaki izole olmuş bir ada, birileri onu görmeden önce çok uzun zamandır orada durur ise, doğa yasaları da böyledir; ve matematiğin yasaları da, sadece keşfedildikleri günden beri değil, her zaman geçerliydiler. Bu bize, bu düşüncelerin, eğer doğruysalar, bizim onları bilip tanımamızdan bağımsız şekilde doğru

> olmakla kalmadıklarını, ayrıca, bizim onları böyle düşünmemizden de bağımsız olduklarını gösteriyor (Frege'den akt. Salerno, 2011: s. 68).

Matematiğin yasalarının bizim onu yaratmamıza bağlı olmadığını, zaten onların var olduklarını ve sadece keşfederek onları bilebileceğimizi ifade eder Frege. Biz Dünya'nın Güneş'ten sonraki ikinci gezegen olduğunu inansak bile o Güneşten sonraki üçüncü gezegen olmaya devam edecektir. Bu yüzden biz doğruluğu elde edebileceğimiz veya edemeyeceğimiz bir şey olarak görür, inandıklarımızın doğru olanlarla aynı olduklarını umut ederiz. Bazen de inandıklarımızın doğruya denk düşmediğini kabulleniriz. "Doğruluk" kavramı ile "doğru kabul edilebilirlik" kavramlarını birbirinden ayırmak gerekir. Çünkü gerçekte doğru olmayıp doğru kabul edilmişler olmuştur. Örneğin herkes dünyanın yuvarlak olmadığına inansaydı bile o yuvarlak olmaya devam edecektir. Düşüncelerin doğruluk değeri ise mutlaktır. Yani "Ben Texas'tayım" tümcesinin ifade ettiği düşünce, sizin Texas'ta olduğunuzda veya olmadığınızda farklı düşünce belirtir. Bu sebeple oradaysanız doğru orada değilseniz yanlış olacak ve bu mutlak bir şekilde değişmeyecektir. Doğruluk veya yanlışlık öznellikten bağımsızdır. O halde düşüncelere sahip fikirlerin çarpışması, birinin doğru diğerinin yanlış olması ile mümkündür. Böyle olmasa mantıksal zeminde tartışmak mümkün olamayacaktır (Salerno, 2011: s. 68-75). Frege'ye göre *düşünceler,* için ne dış dünyadaki şeylerin kendileri ne de iç dünyamızdaki tasarımların kendileridir. Bu yüzden o, düşünceler için üçüncü bir alan [*Reich*] tanımlar. "Bu alanda yer alan *düşünceler*; duyularla algılanamamak bakımından tasarımlarla, 'bilinç içeriğine ait olmak için bir sahip olana gereksinim duymamak bakımından da dış şeylerle' ortaktır." (Güven, 2012a: s. 192).

#### 1.1.3.5. Frege de Doğruluk ve Yargı

Eğer bir düşünce bir tasarım olsaydı o zaman düşüncelerin dünyanın temsil ettikleri kısmı ile "benzer göründükleri" (veya yeterince andırdıkları) zaman doğru olduklarına inanmaya yönlendirilirdik diyen Frege, doğruluğa ilişkin böyle herhangi bir karşılık-gelme kuramına karşı çıkar. O, karşılık-gelmeyi, iki şey (temsil ve bunun temsil ettiği şey) arasında bir ilişki olmasına karşın, "Bu cümle doğrudur"da olduğu gibi, doğruluk yükleminin uygulanmasının cümlenin karşılık geldiği iddia edilen bir ikinci şeye asla işaret etmediği konusunda eleştirir. Frege şöyle yazar:

> Sıradan bir şey, görünür ve dokunulur bir şey olarak bir resim, gerçekten doğru olan bir şey olarak; ve bir taş ya da bir yaprak ise doğru olmayan bir şey olarak ele alınabilir mi? Açıktır ki biz bir resmi, böyle bir niyet bulunmadıkça, doğru olmakla niteleyemeyiz. Bir resmin anlamı bir şeyi, temsil etmesidir. (Hatta kendi başına bir ideye bile doğru diyemeyiz; ancak bu ideyi bir şeye karşılık getirmeye ilişkin bir niyetimiz varsa, bu niyetimize nispetle bunu yapabiliriz.) Buradan hareketle doğruluğun, bir resim ile bu resmin tasvir ettiği şey arasındaki bir karşılıklılıktan ibaret olduğunu varsaymak mümkündür. Şimdi, karşılık-gelme bir ilişkidir. Ama bu durum "doğru" sözcüğünün kullanımıyla karşıtlık oluşturur, çünkü bu sözcük ilişkisel bir terim değildir ve bir şeyin karşılık geleceği başkaca hiçbir şeyi imlemez. Bir resmin Cologne Katedralini temsil etmek için yapıldığını bilmediğimde, bu resmin doğruluğuna karar vermek için onu neyle kıyaslayacağımı da bilmem (Frege'den akt. Salerno, 2011: s. 78).

Buradan çıkarılacak sonuç, bir ilişki en az iki nesne arasında (veya bir nesne ile kendisi arasında) kurulur. Bir ilişkisel cümleyi anladığımızda, örneğin, "Frege, Ludwig'den kısadır" cümlesinde, ilişkiye sokulan her iki nesne yani Frege ve Ludwig de bilinmiş olur. "x doğrudur" biçimindeki bir cümleyi anlamak, x'den ve x'in belirlediği nesnelerden başka bir şeyi idrak etmeyi gerektirmediğine göre, doğruluğun ilişkisel olmadığını söyleyebiliriz. Bununla birlikte özdeşlik ilişkisi bir nesne ile kendisi arasında bir ilişki halidir. Örneğin, "Süpermen ile Clark Kent özdeştir." Yani doğruluğun da bir nesne ile kendisi arasında bir ilişki olduğunu savunmak mantıksal olarak mümkündür. Ama Frege'nin dile getirdiği üzere bir karşılık-gelme olan ilişkisel bir cümlede bahsi geçen iki nesneyi idrak edememememiz kusurundan kaçılamayacaktır. Frege, hiçbir şeyin kendisinden başka bir şeye mükemmel bir biçimde karşılık gelmediğine dikkati çeker. Bu yüzden doğruluk, gerçekliğe karşılık-gelme değildir, çünkü doğruluk ilişkisel değildir ve çünkü doğruluk derecelendirilemez (Salerno, 2011: s. 78-82). Ayrıca Frege doğruluğun tanımlanamayacağını da şöyle ifade eder:

> (...)doğruluğu tanımlamaya yönelik başka herhangi bir girişim de çöker. Çünkü bir tanım belirli niteliklerin belirlenmesini gerektirir. Ve uygulamada herhangi bir özel durumda bu niteliklerin bulunduğunun doğru olup olmadığı sorusu daima gündeme gelecektir. Dolayısıyla bir daire etrafında dönmeye başlayacağız. Bu yüzden "doğru" sözcüğünün içeriğinin kendine has bir türden ve tanımlanamaz olması muhtemel görünmektedir (Frege'den akt. Salerno, 2011: s. 82-83).

Frege doğruluğun bir özellik olamayacağını da söyler. Bir önermeye doğrudur özelliğinin katılmasının onun içeriğine yeni bir anlam katılmayacağını savunur. Yani doğruluk, üç önemli nedenden ötürü kendi türüne hastır:

> 1. Doğruluk (döngüselliğe düşmeden) tanımlanamaz.
> 2. Doğruluk, bir özellik bir nesneye yüklendiği her defasında, isnat edilir.
> 3. Doğruluk-yüklemi "doğrudur"un uygulanması, fazladan bir içerik eklemez (Salerno, 2011: s. 86).

Bu durumda doğruluğun ne olduğuna ilişkin olarak Frege şunları söylüyor:

> (…) bir cümlenin doğruluk değerini onun yönletimini oluşturan şey olarak kabul etmeye doğru yönlendiriliyoruz. Bir cümlenin doğruluk değeri ile, onun doğru ya da yanlış sayıldığı koşulları anlıyorum. Bu ikisinden başka ilave doğruluk değerleri yoktur. Kısalık adına bir tanesine "Doğru" ve ötekine "Yanlış" adını veriyorum. Sözcüklerinin yönletimi ile ilgili olan her bildiri cümlesi demek ki bir özel ad olarak görülmelidir ve yönletimi de, eğer varsa, ya "Doğru"dur ya da "Yanlış". Bu iki nesne, bir şeyin doğru olduğuna hükmeden herkesçe, örtük biçimde de olsa, tanınır/kabul edilir (Frege'den akt. Salerno, 2011: s. 90-91).

Buna göre, bütün doğru ifadeler aynı şey hakkındadır. Frege, yönletimi aynı olan cümlelerin birbirinden ayrı şeyler söyleyebildiklerini düşündüğümüzde bu sonucun çok rahatsız edici bir sonuç olmayacağını ümit eder. Yani, cümleler aynı nesneyi adlandırırken farklı düşünceleri ifade edebilirler ve o nesne hakkında yanlış ya da doğru cümleler kurulabilir. Frege'ye göre, doğruluğu ararken, anlam ve yönletimin her ikisi de gereklidir. Bir cümlenin yönletimi onun doğruluk değeri olduğunda bütün doğru veya yanlış cümleler aynı yönletime sahiptir. Buradan hareketle şu sonucu çıkarabiliriz: Cümlenin yönletiminde kendine özgü/özel olan her şey elenmiştir/silinmiştir. Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, Frege sadece bir cümlenin yönletimiyle ilgi kurmayız der. Bununla birlikte sırf düşünce de kendi başına bir bilgi vermez; düşüncenin ancak yönletimi, yani doğruluk değeri, ile birlikte olduğunda bir bilgi vereceğini savunur Frege (Salerno, 2011: s. 91-93). Daha önce de dile getirdiğimiz gibi Frege, düşünceden doğruluk değerine (yani anlamdan yönletime geçişi *yargı* olarak ifade etmektedir. Tümcenin ise yargı içeriğinin dilsel bir temsili olduğunu düşünen Frege'ye göre yargıda bulunduğumuzda düşünceleri üretmeyiz, nesnel düşünceleri sadece kavrarız (yakalarız). Bu durumda insanlar tasarımların sahibi ve taşıyıcısı olmakla birlikte, nesnel düşüncelerin taşıyıcısı ve sahibi değildir

(Gözkân, 2008: s. 36). Frege, "Düşünceler *(Der Gedanke)*" makalesinde, yakalamaya ve yakalanana dair şu açıklamayı yapar:

> Burada 'kavrama, yakalama' dile getirişi, 'bilinç içeriği' dilegetirişi kadar eğretilemelidir. Dilin doğası bundan başkasına izin vermiyor. Elimde tuttuğum şeye, kesinlikle elimin içeriği olarak bakılabilir; ama o, farklı bir anlamda elimin içeriğidir ve elime, elimi meydana getiren kemiklerin, kasların ve onların bağlantılarından çok daha yabancı bir şeydir (Frege'den akt. Gözkân, 2008: s. 36).

Burada vurgulanan nokta, yakalanan düşüncelerin zihnin bir parçası olduğu, ancak onu oluşturan parçalardan biri gibi ona yakın bir parçası olmayıp ona yabancı olandır. Frege, "Düşünceler"de, düşünce, yargı ve bildirim tümcesi arasındaki ayrımlarını şöyle yapıyor: ilki, "düşüncenin kavranışı (yakalanması)-düşünme"; ikincisi, "bir düşüncenin doğruluğunun tanınması-yargı"; üçüncüsü ise, "bu yargının ortaya konuşu-bildirim tümcesi" (Gözkân, 2008: s. 37). Yargıyı, yargı içeriği ve bu içeriğin dile getirilişi olarak ayıran Frege, bunu, nesnel olanı, öznel ve psikolojik olandan ayırmak için yapmaktadır (Gözkân, 2008: s. 21). Ona göre yargı içeriğinin nesnel olması gerekirken, mantık ise, yargının kavramsal içeriği ve içeriğin mantıksal bağıntıları yani çıkarımlarla ilgili olmalıdır. Çıkarımlar, önermeler (veya düşünce içerikleri) arası bağıntılarla kurulduğuna göre, bu durum "Bir mantıksal çıkarımda önermelerin birbirleriyle bağlantılı olmasını sağlayan şey anlam mıdır?" sorusunu akla getirir (Gözkân, 2008: s. 37). Frege "Kavram Yazıları" nda (*Begriffsschrift),* "Yunanlılar, Persleri Platea'da yendiler" tümcesiyle, "Persliler, Plataea'da Yunanlılara yenildiler" tümcelerinin düşünce içeriklerinin aynı olduğunu dile getirmiştir. Yani mantıksal çıkarımlar, sadece görünüşteki farklılıklarla iş göremez. Onun asıl farklılıklara, asıl benzerliklere ve asıl bağıntılara gereksinimi vardır. Bundan ötürü mantıksal çıkarımın asıl gereksindiği şey yargı içeriğidir. Yani doğal dilin farklı dile getirişlerinin aynı anlama gelmesi, doğal dile ait bir dile getirişin sadece mantıksal çıkarımda bir rolü olan içeriğini dikkate almak, geri kalanını elemek anlamına gelir. O halde mantıksal çıkarım bir yargı içeriğinin sınırlarını da belirler. Yani mantık, dile getirişlerle değil, yargı içerikleriyle ile ilgilidir. "Bu bakımdan 'önermeyi', yargının olanaklı düşünce içeriği olarak tanımlamak mümkündür." (Gözkân, 2008: s. 38). Demek ki aynı yargı içeriği, dil içinde farklı görünümlere sahip tümcelerle ifade edilebilir (Gözkân, 2008: s. 38).

#### 1.1.3.6. Frege'de Mantık-Matematik İlişkisi

Frege'nin en büyük iddiası matematiğin mantığa indirgenebileceğine dairdi.

> Matematik ile başladım. Bu bilimde daha sağlam temeller için çaba göstermek bana en acil gereksinim olarak göründü. Kısa sürede anladım ki, sayı bir yığın, bir şey dizisi veya bir yığma ait bir özellik değildir; sayma işleminin sonucunda ulaştığımız sayı hakkında bir bildirimde bulunduğumuzda, bir kavram hakkında bildirimde bulunmuş oluruz. Dilin mantıksal yetersizliği böyle araştırmalar için ciddi bir engel oluşturuyordu. Buna *Begriffsschrift* (Kavram Yazısı) ile bir çare buldum. Böylelikle matematikten mantığa geçmiş oldum (Frege'den akt. Gözkân, 2008: s. 19).

Frege için, aritmetiğin kavramlarının saf mantıksal kavramlar aracılığıyla tanımlanması ve aritmetiğin yasalarının sadece mantık yasalarından türetilebilmesi, aynı zamanda henüz bulunmamış matematiğin temelleri sorunsalına da çözüm bulma çabasıdır (Gözkân, 2008: s. 19). Frege "Aritmetiğin Temmeleri"nde mantık incelemelerini yalnızca dilsel bir çözümleme olarak önermez. "Mantık açısından ve kanıtlama keskinliği gözüyle bir kavramdan istenebilecek olan tek şey, onun uygulanmasındaki sınırların keskin olması, yani her bir kavramın bu nesnenin altına düşüp düşmediğine kesin olarak karar verebilmemizi sağlamasıdır." (Frege, 2008: s. 169). Frege'nin Kantçı anlamda bir metafizikçi olduğunu söyleyen Gözkân'a göre, onun dilsel bir çözümleme olmayan hedefi, mantıksal nesnelerin mekânının belirlenmesi, böylelikle de bu nesnelerin gerçek doğalarının açıklığa kavuşturulmasıdır. "Dolayısıyla, Frege'nin dilin mantıksal çözümlemesine girişme amacını, dilbilimsel bir çözümleme ya da bir anlam çözümlemesi değil, nesnelerin dilde kendilerini gösterme biçimi üzerinden onların asli doğasına yönelen bir inceleme olarak görmek daha doğru olacaktır." (Gözkân, 2008: s. 39). Frege'ye göre, gerekçelendirmesi gereken tüm doğruluklar şunlardır:

1. Kanıtlaması yalnızca saf mantıksal açıdan verilebilenler,
2. Deneyim olgularıyla desteklenmesi gerekenler.

Aritmetik yargılarının bunlardan hangisine ait olduğunu bilmek için, tüm tikelleri aşan düşünme yasalarının kullanıldığı çıkarımlar yardımıyla aritmetikte nereye ulaşılabileceğini görmek gerekmektedir. Frege sayı kavramına, sıra bağıntısını mantıksal sonuç çıkarma bağıntısına indirgeyerek ulaştığını söyler. Bu indirgeme girişiminde, duyusal olan her şeyi dışarıda bırakarak yeni bir mantık notasyonuna, ama daha önemlisi farklı bir yargı, kavram ve nesne anlayışına yönelen Frege, bir bilimin saf mantıkla güvenceye alınmış temellerini oluşturma çabasında olmuştur (Gözkân, 2008: s. 39). Bu hedefle sayı kavramını görü (*anschauung-intuition*) zemininden kopartarak sadece mantık temeline oturmaya ve onu kavramsal olarak tanımlamaya girişen Frege, bununla Mill gibi deneyimselcilerin önerdiği *a posteriori* sayı nesnesine, ayrıca Kant'ın önerdiği a *priori* görü zeminine dayanan *sentetik a priori* sayı nesnesine karşı çıkmıştır. Frege'nin bu çabasının başarıya ulaşmasının anlamı ise, aritmetiğin yasalarının analitik olduğunun ve sayının, sadece *a priori* bir nesne değil, aynı zamanda mantıksal bir nesne olduğunun da ortaya konmasıdır (Gözkân, 2008: s. 19). Frege aritmetiğin yargılarının analitik nitelikte olduğunu şöyle belirtir:

> Bunun anlamı, bu sorunun psikoloji alanından çıkarılması ve eğer söz konusu doğruluk matematiksel bir doğruluksa, onun matematik alanına bağlanmasıdır. Aslında sorun, tümcenin kanıtlanmasını ortaya koymak ve onu ilksel doğruluklara [*Urwahrheiten]* kadar izlemektir. Bu yolda, sonunda karşımıza sadece genel mantık yasaları ve tanımlar çıkıyorsa, ulaştığımız doğruluk analitik bir doğruluktur; şunu da aklımızda tutmalıyız ki, tanımlardan herhangi birinin kabul edilebilirliğinin dayandığı tüm tümceler de hesaba katılmalıdır. Bununla birlikte, eğer bir kanıtlamayı sadece genel mantıksal doğruluklarla yapabilmek mümkün değilse ve bunun için özel bir bilim alanının doğrulukları da gerekiyorsa, bu tümce sentetik bir tümcedir. Çünkü bir doğruluk *a posteriori* ise, onun kanıtlanması olgulara başvurulmadan yapılamaz; yani, tikel nesneler hakkında bildirimler içerdiği, kanıtlanamayan ve tümel olmayan doğruluklara başvurduğu için. Buna karşılık, kanıtlanması tümüyle tümel yasalar aracılığıyla yapılabiliyorsa ve bu yasaların kendileri de kanıtlanamıyor ve de kanıtlama gerektirmiyorsa, bu doğruluk *a priori*dir (Frege, 2008: s. 90-91).

Bununla birlikte Frege, *Aritmetiğin Temelleri* adlı eserinde "*A priori* ile *a posteriori*, sentetik ile analitik arasındaki ayrımlar, benim düşünceme göre, yargının içeriğiyle ilgili değil, yargıda bulunmanın gerekçelendirilmesi ile ilgilidir" (Frege, 2008: s. 89) demektedir. Analitik yargıyı yargıda bulunmanın gerekçesi olarak gören Frege'nin bu tür bir yargıda bulunmanın gerekçesini temellere ve o temellerde de ispata ve gerekçelendirmelere ihtiyaç duymayan *a priori* doğruluklara dayandırıyor olması, açık bir şekilde aritmetik yargıları analitik yapmaktadır. Öteki taraftan Frege, geometrinin *sentetik a priori* olduğu görüşünde Kant ile aynı fikirdedir. Ayrıca Frege, dilin düşünceye kurduğu tuzaklardan dili arındırmak da ister. Ona göre, doğal dil veya gündelik dil psikolojik yaklaşımlarla örtülmüştür. Bu yüzden de doğal dil mantıksal yasaları ve onların bağıntılarını yeterli hassasiyetle ortaya koyamaz. Daha öncede söylediğimiz gibi öznel tasarımlara *(Vorstellung)* dayanan, psikolojik kökenli tüm öğeler mantıktan ayıklanmalıdır. Mantıksal zemin arama çalışmalarında, Frege'nin üç ana hedefi vardır:

> (1) Aritmetiğin kavramlarını (sıralı dizi, sayı ve büyüklük gibi kavramları) açıklığa kavuşturmak,
>
> (2) Aritmetiğin üzerinde yükseldiği temel varsayımları açık ve belirgin hale getirmek,
>
> (3) Geri kalan bütün matematiksel doğrulukları türetip kanıtlamaya yarayacak kesin ve kusursuz bir ispat kavramı geliştirmek (Salerno, 2011: s. 14).

Aritmetiğin mantığa indirgenebileceği görüşü, "mantıksalcılık" olarak bilinen, matematiğin felsefi temelleri hakkındaki üç ana görüşten biridir. Frege'nin ilk eseri olan *"Kavram Yazısı"*nın ana hedefi bu bakımdan mantığın yeni bir yaklaşımla ele alınmasıdır. Bu kitabında Frege, doğruluk fonksiyonlarına dayalı önermeler mantığını, niceleyiciler ve yüklemler mantığına genişletilmiş, matematiksel dizi kavramını ve saf biçimsel çıkarımın mümkün olduğu saf biçimsel sistem anlayışını tanımlamıştır. Frege "*Boole'un Mantıksal Hesabı"* makalesinde "(...) en başından beri aklımda olan, içeriğin ifade edilmesidir; (...) ama bu içeriğin doğal dille ifade edilenden daha açıkça ve hassasiyetle ortaya konması gerekir" (Gözkân, 2008: s. 20) diye yazmaktadır. Bu içerik yargının kavramsal içeriğidir veya düşünce içeriğidir (Gözkân, 2008: s. 19-25).

Frege, Kant'ın transsendantal felsefesinden derinden etkilenmiştir. Bu yüzden *Aritmetiğin Temelleri,* Frege'nin "yalnızca şükran dolu hayranlıkla bakabileceğimiz" dediği Kant'ın büyük otoritesiyle bir hesaplaşma olarak da görülebilir. Frege, Kant'ın analitik ve sentetiği birbirinden ayırmasıyla büyük hizmet yaptığını ve geometrinin doğruluklarını *sentetik ve a priori* olarak belirleyerek onların gerçek doğalarını ortaya koyduğunu söyler. "Kant için önemli olan sentetik *a priori* yargıların varlığıdır; bunlar sadece geometride mi vardır, yoksa aritmetikte de mi vardır meselesi daha az önemlidir" diyen Frege, Kant'ın aritmetiğe ilişkin görüşlerini eleştirmektedir (Gözkân, 2008: s. 25).

## 1.2. Matematiğin Temellerine İlişkin Felsefi Görüşler

Günümüz matematik felsefesinin "matematiksel nesne" sorunundan başka diğer önemli bir sorunu da "matematiğin temellendirilmesi" sorunudur. Kimi düşünürlerin matematiğin bir temele ya da temellendirilmeye gereksinimi olmadığını savlayarak böyle bir soruna tepki göstermelerine karşın, Frege ve ardılları bunu, çözüm üretilmesi gereken önemli bir sorun saymışlardır. Öte yandan, matematiğin temellerinin aydınlatılması ya da onun türetilebileceği bir zeminin açığa çıkarılması amacıyla yürütülen soruşturmaların, "matematiksel nesne"ye ilişkin tartışmalarla da ilişkili olacağı, matematiğin neliğini belirleyecek bir temellendirmenin onun nesnesini de belirleyeceği açıktır.

Matematiğin zaman içindeki değişimleri/dönüşümleri düzenli bir gelişim göstermemiştir. Yaşanan gelişmelerle matematik kimi bunalımlara düşmüş ve bu bunalımlı durumlardan çıkış yolları aramıştır. Matematiğin tarihsel sürecindeki bunalımları, Yıldırım'a göre dört ana başlık altında toplanabilir:

> (1) $\sqrt{2}$ gibi rasyonel olmayan sayıların yol açtığı, başlangıçta "olanaksız" ya a "saçma" sayılan negatif (-1) ve sanal ($\sqrt{-1}$) sayıların ortaya çıkmasıyla süren bunalım;
> (2) Başlangıçta sağlam bir temele oturtulamayan ve kavramsal belirsizlik içinde kalan diferansiyel ve integral hesapların yol açtığı bunalımlar;
> (3) Eucleides'in 5. Postulatına ilişkin kuşku ve doyumsuzluktan kaynaklanan, Eucleides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla büyüyen bunalım;
> (4) Kümeler teorisinde baş gösteren paradoksların yarattığı, daha sonra Gödel teoremleriyle yeni bir boyut kazanan bunalım (Yıldırım, 1996: s. 75).

İki tamsayının oranı olarak yazılamayan $\sqrt{2}$ gibi sayılarla karşılaştıklarında Pytagorasçılar (İÖ 5. yüzyıl), bunu nasıl ifade edeceklerini bilemedikleri bu durumu bir sır olarak saklamışlardır başlangıçta. Kenarı bir birim olan karenin köşegeni bir doğru parçasıdır fakat rasyonel bir ifadesi yoktur. Bu, ciddi bir çıkmaz olmuştur onlar için. Arkasından gelen Elea'lı Zenon'un paradoksları da bu bunalımı derinleştirmiştir. Zeno'a göre, aralarında belli bir mesafe ile harekete geçen tavşan önündeki kaplumbağayı yakalayamaz. Ona göre, tavşan gitmesi gereken yolun önce $\frac{1}{2}$'sini gitmesi gerekir, ondan da önce $\frac{1}{4}$'ünü, ondan da önce $\frac{1}{8}$'ini,…. ve böylece sonsuza dek bölünebilen aralıkları koşması gerekir ki, bunu sonlu sürede gerçekleştirmesi olanaksızdır. Yani tavşan hiçbir zaman kaplumbağayı yakalayamaz. Fakat bu paradoks daha sonra çözümlenir. Bir mesafenin sonsuz bölünebilir olması o mesafenin sonsuz olduğu anlamına gelmeyecektir, bu yüzden bu paradoks bir çıkarsama hatasıdır (Yıldırım, 1996: s. 75-76).

Modern matematik geleneğinde iki düşünce saklıydı: Biri Antik Yunan matematiğinden kaynaklanan ispata dayalı geometri, diğeri Hint ve İslam matematiğinde ön plana çıkan sayı kavramı ve ona dayalı cebir. Bugün bildiğimiz matematiği ise 17. yüzyılda gerçekleşen önemli iki önemli gelişmeye borçluyuz. Bunlardan ilki Descartes'ın (1596-1650) birbirinden tümüyle ayrı görünen aritmetik ve geometriyi birleştirme çabası sonucunda "analitik geometri"nin keşfi, diğeri ise Newton ve Leibniz'in birbirinden bağımsız oluşturdukları "sonsuz küçükler hesabı"dır. Analitik geometrinin keşfi aynı zamanda "değişken", "fonksiyon", "fonksiyonel bağımlılık" gibi kavramların belirginleşmesine ve cebrin analize dönüşmesine olanak sağlamıştır. Bu ilerleme Antik dönemde görülen sıkı ispat yöntemlerinin göz ardı edildiği, matematiğin mantıktan çok sezgi, imge ve deneyime bağlı bir çalışma görünümüne dönüştüğü bir süreci oluşturmuştur. Leibniz, Bernoulli ve Euler gibi ünlü matematikçiler yanlışlığı bugün bilinen düşünceler öne sürmüşler ve neredeyse "yasa tanımazlık" diyebileceğimiz bir süreç yaşamışlardır. Diferansiyel ve entegral hesaplarının fizikte ve astronomideki başarılı uygulamalarının verdiği iyimser havayla çalışmaları hemen uygulamaya koyma çabaları 18. yüzyıl sonlarına kadar devam etmiştir. Bu iyimser havadan olsa gerek, ne analitik geometri ne de sonsuz küçükler hesabı bir temele oturtulmamıştır. İşte ikinci bunalım da, böylece diferansiyel hesapların anlam ve dayanaklarına duyulan kuşku ve tedirginlikten kaynaklanmıştır (Yıldırım, 1996: s. 77).

Diğer bir bunalım 20. yüzyılda ortaya çıkan kendi içinde tutarlı Eucleides-dışı geometrilerle kendini göstermiş, Eucleides geometrisinin iki bin yılı aşkın bir süredir taşıdığı "biricik geometri" kimliği sarsıntıya uğramış, matematikçileri ve sonrasında felsefecileri bu konuda düşünmeye sevk etmiştir. Yıldırım'a göre kendi içinde tutarlı farklı geometrilerin var oluşunun anlamı açıklığa kavuşturulmalıdır. Bu birçok geometrinin varlığı Eucleides geometrisine duyulan koşullanmaları derinden sarsmış ve “doğruluk” kavramının kendisini tartışmaya açmıştır (Yıldırım, 1996: s. 80).

Nihayet 20. yüzyılda ise Cantor’un “kümeler teorisi” ile ortaya çıkan paradokslar matematiğin temellerini araştırmaya iter düşünürleri. Bu arayışın başında Frege vardır. “Matematiğin mantıksal temellerini derinlemesine irdeleyen Frege, aritmetiğe, geometrinin eriştiği düzeyinbde ötesinde bir ‘ispat bilimi’ kimliği kazandırmayı uğraşının başlıca amacı saymıştı” (Yıldırım, 1996: s. 82).

Frege aritmetiğin temellerinin henüz kurulmamış olmasını bir skandal olarak görür:

> Matematikte sayının ne olduğu üzerinde bugüne değin bir açıklığa ulaşılmamış olması bir skandaldır. Sayının herkesin kabul ettiği bir tanımının olmayışı hoş karşılanabilirdi, yeter ki, sorun üzerinde genel bir anlayış olsaydı. Oysa, sayının bir nesneler kümesi mi, yoksa karatahta üstünde insan eliyle çizilen bir şekil mi; gelip geçici bir icat mı, yoksa sonsuza dek sürecek bir varlık mı (…) olduğu bile belirlenmiş değildir. (…) Matematik kendi önermelerinin içeriğini oluşturan düşünceyi, daha doğrusu inceleme konusunu bilmemekte, uğraştığı nesnelerin doğasını anlamaktan uzak kalmaktadır. Peki, bu bir skandal değilse nedir? (Frege’den akt. Yıldırım, 1996: s. 90).

“Temelcilik” kelimesini ilk kez Lakatos kullanır (Gür, 2011: s. 30). Sayıya ve aritmetiğe temel arayışı sorunu, modern matematik felsefesinin oluşmasına sebep olduğu gibi, hala ortaya atılan yeni önerilerle çözüme kavuşmuş gibi de görünmemekte ve hala üzerine düşünülecek bir sorun olarak tartışılmaktadır. Aritmetiğe temel bulma çabası içindeki düşünürler özellikle üç öğretide toplanıyor. Bunlar, Frege ve Russell’ın öncülüğünde, aritmetiği mantıksal bir zemine oturtmaya çalışan “mantıkçılık (*logicism*)”, David Hilbert öncülüğünde, matematiğin soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistem olduğunu iddia eden tutarlılık arayışı içindeki “biçimcilik (*formalism*)” ve L. E. J. Brouwer, öğrencisi Heyting ile ünlü matematikçi H. Poincaré öncülüğünde, kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi, matematiğin tek geçerli yöntemi sayan “sezgicilik (*intuitionism*).”

### 1.2.1. Mantıkçılık

Mantıkçılık (*logicism*), katıksız (pür) matematiğin, mantığın bir kolu olduğunu iddia eden, aritmetiğin tüm yasalarının yalnız mantıktan türetilebileceğini ya da mantığa "indirgenebileceği"ni savunan bir düşünce okuludur (Gür, 2011: s. 30; Barker, 2003: s. 131). Frege'nin öncülüğünde belirgin bir hal alan mantıkçılık, kökenleri açısından daha eskilere dayanmaktadır. Yıldırım'a göre İÖ 4. yüzyılda matematikte Yunan düşüncesi olgunluk çağına erişir. "Thales ile başlayan matematiğin, mantıksallaşma süreci, Pythagorasçılarla Eudoxus'un önemli katkılarını yüklenerek sonunda Eukleides geometrisinde en yetkin örneğiyle günümüze ulaşır" (Yıldırım, 1996: s. 25).

> Gerçekten de söz konusu yüzyılda İÖ 384-322 yılları arasında yaşamış olan- Aristoteles mantık bilimini kurmuş; Eukleides ise İÖ 300'de İskenderiye'de yazdığı on üç ciltten oluşan kitabı *Elementler*'de geometriyi, mantıksal kesinliğe sahip, matematiksel bir ispat çerçevesi olarak dedüktif çıkarımlı, aksiyomatik bir yapıya oturtmuştur (Kutlusoy, 2013: s. 129).

Eucleides geometrisinde tanımsız olan "nokta" (Özmantar, Bozkurt, 2013: s. 440) 17. yüzyılda Descartes'ın "Kartezyen Devrimi" ile analitik düzlem üzerinde mantıksal bir açılıma ulaşmış olmakla birlikte, doğru ve eğrilerin cebirsel ifadeleri formüle edilmiştir (Yıldırım, 1996: s. 77). Eucleides geometrisi içinde "bir noktanın hiçbir parçası yoktur" olarak ifade edilen *nokta,* analitik geometri içinde "koordinatları verilerek tanımlanabilen yere nokta denir" olarak ifade edilmiş ve böylece tanımsızlıktan bir tanıma ulaşmıştır (Doğan, 2013: s. 198-200). TDK'ya göre tanım; "mantık kurallarına uygun olarak fiziksel ya da düşüncel herhangi bir konuyu ayırt etme, bulma ya da kurma; bilime yeni girmiş olan bir terimin anlamını açıklama ya da bilimde varolan bir terimin anlamını belirlemedir."[6] Buradan çıkarabiliriz ki Descartes, Eucleides'in ispatsız kabul gören postulatlarla belirlenmiş "nokta", "doğru" gibi kavramları mantıksal bir zeminde açıklamıştır. Ona göre:

> Basit kavramların birleştirilmesiyle oluşan karmaşık düşüncelerin şüpheli olmasının sebebi, gerçekte basit, açık (Fr. claire) ve seçik (Fr. distince)

---

[6] http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.552bdba445a9d7.63502987, 13.04.2015.

> olmayışları ile hangi basit kavramlardan, hangi düzene göre birleştirildiklerinin farkında olunamamasıdır. Böylece algılamadan akıl yürütmeye değin idrakteki kesinliğin kıstasları; basitlik, açıklık, seçiklik ve düzenliliktir (Türker, 2002: s. 259).

Matematiğin 20. yüzyılda mantıksal zeminde açıklanması çabaları matematiksel bilginin niteliğini açıklamakla da örtüşür. Bu bakış açısıyla düşünürler önce kendi "bilgi" içeriklerini sonra matematiksel bilgiyi kurdukları bu bakış açısından yararlanarak açıklarlar. Aristoteles'in öncülüğünü yaptığı Eski Yunan düşüncesinde bilgi, öznel izlenimlere dayalı deneyim ile elde edilirdi. Sonrasında 17. yüzyılda sonralarında İtalya'da Galileo, İngiltere'de Bacon tarafından bilginin kazanımını, doğrudan doğruya nesnelerin gözlemlenmesiyle oluşan deneyim yolu ile değil, nesnelerin birbiri üzerindeki etkilerinin gözlemlenmesiyle oluşan deneyim yoluyla olduğunu iddia edilmiştir. Arkasından D. Hume bilginin üretiminde tümevarım ilkesinin geçerli olduğunu ve dünya üzerindeki hiçbir bilginin kesin olamayacağını savunmuştur (Hacıkadiroğlu, 2002: s. 33-45). Bunun üzerine nesnel bilgiyi arayan Kant, kendinden önceki metafiziği alt üst etmiş ve neden ile etki arasındaki bağlantının, alışkanlıktan çıkan bir öznel zorunluluk olduğunu kabul eden Hume'un aksine, kavrayıştan çıkan bir nesnel zorunluluk olduğunu savunarak, bilgi üretiminde insan aklını ve insanı aktif kılmıştır. Kant'ın bilimlerden dönemin metafiziğini arındıran yeni biliminde, bilginin üretimi saf görü (saf sezgi) temellidir. Bilgi, uzay ve zaman görü formlarıyla ile duyusallığımızın ve anlama yetimizin birlikte çalışması sonucunda ortaya çıkmaktadır. Kant, aritmetiğin en temel nesnesi olan sayının, yine bu koşullar altında aynı yetilerin saf görü biçimlerinin ve kategorilerinin kendiliğinden yaptığı işbirliği sonucunda inşa edildiğini ve böylece deneyime bağlı nesnel bilgiye ulaşıldığını açıklamaktadır. Bu yöntemle Kant, matematiğin önermelerini de tıpkı bilimin önermelerinde olduğu gibi görü temelli *sentetik a priori* olarak kabul etmektedir. Bu fikri eleştiren Frege ise matematiksel nesnenin üretiminde matematiği duyusallıktan tamamen arındırmak ve nesneyi tümüyle mantıksal kılmak istemektedir. Fakat Frege'den önce çağdaşı R. Dedekind'in aritmetiği mantıksal bir yapıda ele aldığını ve Frege'nin görüşlerinden yararlandığı (Gür, 2012: s. 119), 17. yüzyılda Gottfried Wilhelm Leibniz'in (1646-1716) mantıkçılık tezini andıran düşünceler ileri sürdüğü bilinmektedir (Yıldırım, 1996: s. 88). Leibniz 1714 yılında yazdığı *Monadoloji* adlı eserinde, "hiçbir sınır, yâdsıma ve çelişki taşımayan şeyin olanaklılığını hiçbir şey engelleyemez" demektedir (Leibniz, 2009: s. 21). Ona göre, "doğruluktan ziyade hislerin egemen olduğu fikir kavgalarının son bulması için düşüncenin matematikselleştirilmesi gerekmektedir" (Gür, 2012: s. 70). Matematiksel doğruluklar hakkında ise Leibniz şöyle söylemektedir:

> Bir doğru zorunlu olduğunda, bu doğruya ait neden, ancak en basit düşünce ve doğrular ilk kaynaklarına dek çözümlenerek bulunabilir. Böylece, matematikçiler çözümleme yöntemiyle, "kurgusal teorem"leri ve "pratik ilke"leri tanımlara, aksiyom ve koyutlara dek indirgerler (Leibniz, 2009: s. 18).

Mantık ve matematiğin sentezleme çalışmalarının modern tarihi, Leibniz ile başlatılır. Fakat George Boole (1815-1864), cebirsel dilin temellerini atmış ve bütün bir matematiğin mantığın temeli olduğunu söyleyerek, mantığın felsefenin değil matematiğin bir parçası olduğunu savunmuş ve *Mantık Cebri'*ni kurmuştur (Türker, 2012: s. 335). Arkasından gelen Frege ve sonrasında Russell ise, tersine bütün matematiği mantığa indirgemeye çalışmıştır.

Sistematik bir girişim olarak matematiğin mantıksal ilkelerden türetilmesine çalıştığı *Aritmetiğin Temelleri* kitabı henüz baskıdayken Frege, Bertrand Russell (1872-1970) tarafından üretilen bir paradoksla karşılaşır. Frege sayıyı Cantor'un kümeler teorisinden yararlanarak temellendirmeye denemiştir. Bu durumda kendi kendisinden bahseden, örneğin "kümelerin kümesi" gibi kümeler mantıksal ilkeler üzerinden üretilemez; bu da paradoksal bir durum oluşturur. Fakat Russell kendi ürettiği paradokstan kurtulmanın çaresini de arar ve A. N. Whitehead (1861-1947) ile birlikte, yazdıkları, sembolik mantığın klasiği olarak da değerlendirilen üç ciltlik kitapları *Principia Mathematica'*yı yazarlar (Kutlusoy, 2013: s. 128). Russell'ın paradoksun çözümü için ortaya attığı "tipler teorisi", kendi kendinin üyesi olan kümeleri dışarıda tutarak paradoksları engellemektedir (Gür, 2012: s. 31). Ancak, bu kitap kullanışlılık açısından eleştirilmiş, hatta Doksiadis ve arkadaşlarının yazdığı, modern matematik felsefesinin tarihini karikatür ile anlatan *Logicomix*'te Russell, *Principia Mathematica'nın* eleştirisini yazan Gödel'in her satırı okuduğunu görünce ona "Aman Tanrım size madalya verilmeli" diyerek şaşkınlığını gizleyememiştir (Doksiadis ve ark., 2012: s. 273).

Russell, “Matematiksel Mantığın Felsefi Önemi” makalesinde, sonsuzluğu ve süreklilik problemlerini mantıksal zeminde çözümlediğini iddia eder. Ayrıca pür matematiğin genel itibariyle değişkenler ve mantıksal sabitlerle ifade edilebilir olduğunu savunur. Matematiksel bilginin olasılığının, hem empirizmi hem de idealizmi reddettiğini ifade eder (Russell, 2011, s. 101-112). Frege’nin pür matematiği, mantıksal kurallarla temellendirme girişimine bu çalışmada ayrıca yer verilecektir. Matematiğin önermelerinin analitik olduğunu başta Leibniz (Gür, 2012, s. 73) daha sonra Frege, Russell ve sonrasındaysa Ramsey, Hahn, Carnap gibi düşünürler savunmuştur (Waismann’dan akt. Yıldırım, 1996, s. 92). Bu görüşü eleştiren birçok düşünür de olmuştur. Gür, bu konuda “felsefi başarısızlığına rağmen mantıkçı küme kuramcılığı günümüzde de matematik felsefesinde baskın konumdadır” (Gür, 2011: s. 32) demektedir. Öyle ki, Kitcher da, bu durumu, “Matematiksel felsefenin son otuz yılı, Frege’ye bir dizi dipnottan ibarettir” biçiminde özetlemektedir (Hersh’ten akt. Gür, 2011: s. 32).

### 1.2.2. Biçimcilik

“Biçimcilik *(formalizm)* popüler terimlerle ifade edersek, matematiğin kâğıt üzerindeki işaretlerle oynanan oyun olduğunu iddia eder” (Gür, 2011: s. 32). Biçimcilere göre matematik, soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistemdir ve içerikten yoksundur. Onlar ancak bir teoremin tanımında, ispatında veya bir problemin çözümünde kullanıldıklarında anlam ve içerik kazanırlar. Biçimcilik Alman matematikçi David Hilbert (1862-1943) ile anılır. O matematiği sağlam temellere oturtmaya çalışırken matematiği, aritmetik ve mantığın aksiyomları ile sınırlı tutarak tamlık özelliğine sahip simgesel bir sisteme dönüştürür. Hilbert, *Geometrinin Temelleri*(1899) adlı çalışmasında Eucleides geometrisine yeniden aksiyomatik bir yapı kazandırır. Geometrideki başarısını ve birikimini, bir program içerisinde matematiğin diğer dallarında da kullanmak isteyen Hilbert’e göre teoremin amacı, kanıtlama yönteminin tutarlılığını bir daha tartışılmayacak biçimde ortaya koymaktır (Baki, 2014: s. 24-25). Böylece o, kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar ile sezgicilerin klasik matematiğe yönelttikleri eleştiriler karşısında matematiğin tutarlılığını güvence altına alacaktır. Hilbert ve onu izleyenlere göre matematik, mantığa indirgenerek değil, simgesel aksiyomatik bir yapıya dönüştürülerek temellendirilebilirdi. Onlara göre klasik matematiğin tutarlılık ispat yöntemleri yetersizdi. Hilbert'e göre soyut aksiyomatik bir yapıya ihtiyaç vardı. Örneğin, "1+1=2" eşitliğinde "1+1" ve "2"ye, birbirinin yerine kullanabileceğimiz simgelerden başka bir anlam taşımadıkları gözüyle bakılmalıydı. Hâlbuki klasik matematikte tutarlılık yoklaması, yorum ya da yine tutarlı başka bir alanı model alma yöntemine dayanıyordu. Aritmetiğin tutarlığı için tutarlı olduğu varsayılan geometri, geometrinin tutarlılığı için ise aritmetik model alınarak tutarlılık yoklanıyordu. Bu durum tutarlılığı göreceli olmaktan kurtaramazdı (Yıldırım, 1996: s. 94). Hilbert'in mezar taşında kazılı olan "Bilmek zorundayız, bileceğiz"(Barrow'dan akt. Gür, 2011: s. 33) sözünü yine kendisi şöyle açıklamıştır:

> Gerçekte matematiksel bir problemi alt etmenin en çekici ana nedenlerinden biri daima içimizdeki şu çığlığı hissetmemizdendir: problem işte ortada, hadi cevabını bul, onu sadece düşünerek bulabilirsin, çünkü matematikte bilinemeyecek diye bir şey yoktur (Hilbert'ten akt. Gür, 2011: s. 33).

Biçimcilik temelde iki türe ayrılabilir. Biri "terim biçimciliği", diğeri "oyun biçimciliği". Terim biçimciliğine göre, matematiğin bir konusu vardır ve matematiksel önermeler ya doğrudur ya da yanlıştır. Oyun biçimciliğini ise günümüz matematik felsefecisi Shapiro şöyle betimler: "Matematik ne hakkındadır? Hiçbir şey. Sayılar, kümeler vs nedir? Bunlar var değiller veyahut olmamalıdırlar. Matematik nasıl bilinir? Matematiksel bilgi nedir? Bu, oyunun kurallarının veya bu kurallara göre belirlenen hareketlerin bilgisidir" (Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 33).

> John von Neumann, Hilbert'in programını dört basamakta özetlemektedir:
>
> 1. Matematik ve mantıkta kullanılan bütün sembolleri belirlemek.
> 2. Klasik matematikte bu sembollerle elde edilen "anlamlı" diyebileceğimiz bütün teoremleri veya formülleri netleştirmek.
> 3. Klasik matematikte "ispatlanabilir" diye bilinen formülleri inşa edebilecek bir inşa prosedürü sağlamak.
> 4. Klasik matematiğin bu formüllerini veya ispatlarını, aritmetiğin metotlarının sonlu uygulamalarıyla kontrol etmek (Gür, 2011: s. 33-34).

Fakat mekanik bir ispat yöntemi öneren 4. maddeyi von Neumann ve Shapiro gibi yazarlar eleştirmiştir. Yine bir matematik eğitimcisi ve matematik felsefecisi olan Ernest biçimciliğin, anlamdan arındırılmış bir sistem kurma ve matematiğin kendi içindeki tutarlılığını gösterme çabası içinde olduğunu dile getirir (Gür, 2011: s. 34). Hilbert'in ortaya koyduğu bu program 1931'de henüz yirmi dört yaşındaki Kurt Gödel (1906-1978) tarafından bir darbe yer. Gödel, aritmetik için bir temel olmaya yetecek kadar karmaşık bir sistemin eksiksiz olamayacağını saptamıştır (Cryan ve diğerleri, 2010: s. 34). Gödel'in "eksiklik teoremi"ne daha sonra tekrar değinilecektir.

### 1.2.3. Sezgicilik

Sezgiciler *(intuitionism)* de mantıkçı ve biçimciler gibi matematikte kesinlik ararlar. Onlar matematiksel kesinliği, insanın matematiksel tümevarım yeteneğine bağlar, matematiksel keşif sürecinde sezginin rolü üzerine odaklanırlar (Baki, 2014: s. 25). Hem mantıkçılara hem de biçimcilere karşı çıkan sezgiciler, matematiksel nesne ve yapıların (*structures*) varlık sorununu ön plana çıkararak, kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi matematiğin tek geçerli yöntemi olarak kabul ederler. Aynı zamanda onlar, sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin, sezgisel olarak doğal sayılar üzerine kurulabileceğini savunurlar (Yıldırım, 1996: s. 97). En ünlü sezgiciler Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), öğrencisi Arend Heyting (1898-1980) ve ünlü matematikçi Henri Poincaré'dir (1854-1912). Brower'ın 1907'de yayımlanan çalışması bu yolda atılmış ilk önemli adım olmakla birlikte, sezgici düşüncenin kökenini Kant'a, hatta Antik Yunan'a kadar götürenler de vardır (Yıldırım, 1996: s. 97-98). Brouwer, biçimcilik ile sezgiciliğin arasındaki farkın matematiksel kesinliğe bakış açılarından kaynaklandığını söyler. Ona göre, sezgiciler kesinliğin "insan zihninde", biçimciler ise "kağıt üstünde" var olduğuna inanırlar. Ayrıca Brouwer klasik matematik görüşün matematiksel nesnelerin bizim dışımızda ve bizden bağımsız olarak var olduğunu ve matematiksel doğruların nesnel olduğunu iddia eden metafiziksel bir prensibe dayandığını belirtir. Heyting ise matematiğin herhangi bir metafiziksel ilkeye dayanmaması gerektiğini vurgular (Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 35-36). Barker, *Matematik Felsefesi* kitabında metafizikten arınma düşüncesinin kökenlerini Kant ile ilişkilendirir. Kant'a göre en son sayı yoktur, onu sayabilen olmamıştır. Bundan dolayı sonsuz sayılar da olamaz.

Çünkü sonsuzca büyüğü saymak olanaksızdır. Benzer şekilde geometride de sonsuzca uzun bir çizgi çizemeyiz. O, sonsuz *edimsel* (*actual*) öğretiden ziyade, "olanak halinde (*potential*) sonsuz" adı verilen öğretiyi ya da "belirsiz (*indefinite*) bütünlükler" öğretisini kabul eder. Brouwer, Barker'a göre Kant'ın sayı matematiğinin çıkış noktası olan "saf görü"sünü savunur ve bundan dolayı yaptıkları felsefenin adına "sezgicilik" der (Barker, 2003: s. 123). Sezgiciler, sonsuz kümelerin inşa edilebilir, belirgin tanımlarının verilemeyeceği düşüncesiyle, klasik matematikte geçerli sayılan pek çok ispatı reddetmişlerdir. Örneğin ikiz asalların sonsuz olduğu savı klasik matematikte doğruluk değeri olan bir önerme iken, sezgiciler tarafından, doğruluğu verilmedikçe, doğruluk değerinden söz edilemez (Yıldırım, 1996: s. 97-98). Benzer şekilde, reel sayıların, doğal sayılardan daha çok olduğunu savunan Cantor'un görüşünü birçok matematikçi benimserken, sezgiciler aynı sebepten dolayı buna karşı çıkarlar. Onların bakış açısından, sayılar hakkındaki herhangi bir matematiksel önemenin doğru olduğunu haklı olarak söylemeden, onun oluşturucu bir ispatına sahip olamayız (Barker, 2003: s. 122-125).

19. yüzyılın son çeyreğinde L. Kronecker sezgiciliğin temel savlarını dile getirir. Ona göre matematiğin temelleri, sezgisel olarak oluşan doğal sayılar ve onlara dair işlemlerde aranmalıdır. Matematikte tanım ve ispatlar, ancak sonlu adımla inşa edilebilir ise geçerli sayılmalıdır. Geçersiz bir işlem olarak "olmayana ergi" yöntemini gösteren Kronecker'a göre bu yöntem, bir nesnenin varlık ispatını (ya da bir teoremin doğruluğunu), o nesnenin yok (ya da önermenin yanlış) sayılması durumunda ortaya çıkan çelişkiye dayanmaktadır. Böylece bahsi geçen nesne (ya da teorem) sonlu adımla kurulamamış olmakta, bu yüzden de bu yöntem geçerli bir kanıt sağlayamamış olmaktadır. Diğer bir düşünür Eucleides-dışı geometriler üzerine de çalışmış olan H. Poincaré'dir. O matematiksel her kavramın belirtik bir tanımlamaya elverişli olmasını ister. Bu yüzden Cantor'un kümeler teorisindeki bazı kavram, teorem ve yöntemlerin geçersiz olduğunu ve matematiksel düşünmenin gerçek aracının matematiksel indüksiyon olduğunu savunur (Yıldırım, 1996: s. 97-98). Poincaré matematiksel kesinliği, matematiğin dedüktif olduğu savıyla değil de, "matematiksel indüksiyon (tümevarımsal)" ilkesinin bir ürünü olarak görerek bu ilkenin "akıl" ya da sezgiden kaynaklandığını savunmuştur. Ona göre sezgiye yer vermeyen bir matematikte yeni buluşlara gitme şöyle dursun, ispat bile yapılamaz. Matematiksel indüksiyon ilkesine

başvurmadan matematiği mantığa indirgemeye imkan yoktur. Bu ilke olmaksızın yapılan indirgeme döngüsel bir çıkarım olmaktan öteye gidemeyecektir. Ona göre sezgiye yer vermeyen matematikte yeni buluşlara gitme şöyle dursun, ispat bile yapılamaz. (Yıldırım, 1996: s. 91). Matematiksel yaratmayı bilinçaltı süreçleri üzerinden açıkladığı "Matematiksel Yaratma" makalesinde Poincaré, matematiksel yaratma sürecinin herkes tarafından gerçekleştirilemeyeceğine, belli bir birikmişliğe ihtiyaç olduğunu ve yaratım sürecinin bilinen belli mantıksal süreçlerle gelişmediğine dikkat çeker.

> Gerçekten, matematik yalnızca herkesin kabul ettiği mantık kurallarıyla yürümüş olsaydı, ya da bağlı olduğu kanıtlar tüm normal insanlar için ortak olan ilkelere dayansaydı, o zaman, bu kadar çok kimsenin matematikten uzak durması nasıl açıklanabilirdi (Poincaré, 1996: s. 240)?

1960'lı yılların sonunda ise Bishop, klasik matematik ve sezgici matematiğin ortak yönlerini alarak mantığın üçüncü yasası olan "üçüncü halin olanaksızılığı" ilkesini reddetmiştir (Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 35). Çünkü o, klasik matematikte olan her önermenin ya doğru ya da yanlış olacağı fikrine karşı çıkar. Sezgici, üçüncü bir olasılığı tanır ve ne doğruluğa ne de yanlışlığa sahip anlamlı önermelerin pekâlâ olabileceğini savunur (Barker, 2003: s. 126). Bishop, hem klasik matematik görüşün hem de sezgici matematik görüşün ortak yönleriyle sezgiciliği revize etmiş ve onu inşacılık (constructivism) olarak adlandırmıştır. Daha sonra bu inşacı programı analize uygulamaya da çalışmıştır. Günümüzde Michael Dummett gibi filozoflar, inşacılığın değişik biçimlerini savunmaktadırlar.

### 1.2.4. Temelci Görüşlere Dair Yapılan Eleştiriler

Mantıkçıların çalışmaları matematiksel mantık alanında önemli ilerlemeler sergilemişlerse de sert eleştirilere maruz kalmıştır (Gür, 2012: s. 125). Matematiksel kesinliği, insan aklının bir yetisi veya sezgisi sayan Poincaré gibi düşünürler, matematiği totolojik bir dizge sayan mantıkçılık tezine karşı çıkmışlardır. Ayrıca biçimci Hilbert'te göre matematik mantığa indirgenerek değil, sistematik bir simgesel aksiyomatik sistemle temellendirilebilir. Sezgiciler ise hem mantıkçılığa hem de biçimciliğe karşı çıkarak sezgiye yer vermeyen bir akıl yürütmede yeni buluşların olamayacağını ve ispatların yapılamayacağını savunurlar. Yıldırım'a göre mantıkçılar, Kant'ın tam tersine, matematiğin bir konusu olmadığı, yalnızca analitik nitelikte kavramsal ilişkilerle uğraştığı sayıltısından hareket ediyorlardı. Mantıkçılara göre matematiksel doğruluğun kesinliği, matematiğin tümüyle dedüktif olan mantıksal temelinden kaynaklanan totolojik bir kesinliktir. Mantıkçılığa karşı çıkan isimlerden biri de Wittgenstein'dır. Wittgenstein, "mantık, matematiği anlamamız için yeterli bir araç değildir, olsa bile bizim mantık bilgimiz bu iş için yeterli değildir" demektedir. Wittgenstein'ı izleyen Waismann'ın da itirazları vardır mantıkçılığa. Ona göre, matematiği totolojilerden ibaret görmek yanlıştır (Yıldırım, 1996: s. 91-92).

> Matematik mantığın bir kolu değil, tümüyle bağımsız, kendi kurallarına dayanan bir çalışmadır. Matematiğin mantığa indirgenmesiyle daha sağlam temel kazanacağı inancı, bütünüyle bakıldığında, sadece bir yanılgıdır. (…) Bize kalırsa, matematik, serbestçe seçilen birtakım varsayımlardan çıkarımlar geliştiren bir dizi dedüktif sistemden oluşur. Mantık o sistemlerden yalnızca biri olup, onlardan hiçbirinden daha önemli değildir. (…) Biz aritmetiğin kurallarını bularak betimleyebiliriz; ama bu kuralları temellendiremeyiz. Bulunacak bir temel başka bir temeli gerektireceğinden işin içinden çıkamayız (Waismann'dan akt. Yıldırım, 1996: s. 92).

Yıldırım'a göre sayıları, salt mantıksal olduğu kuşkulu olan kümeler teorisine indirgemenin matematiğe daha sağlam bir temel oluşturduğu pek çok kişi tarafından kuşku konusudur. Yıldırım'a göre, her şeyden önce kümeler teorisinin, matematiğin değil mantığın bir parçası olduğu ortaya konmalıdır. Çünkü kümeler teorisinin kendisi çeşitli yönlerden yetersizlik içermektedir. Bu teori kimi varlık varsayımlarının yanı sıra, süreklilik (*continuum*) hipotezi türünden belirsiz önermeler de içermektedir. Onun yol açtığı ve yol açabileceği paradokslara kesin çözüm bulunduğu ileri sürülemez (Yıldırım, 1996: s. 92). Tutarlılığı ve tamlığı ispatlanan teorileri kategorik bir dizgede göstermek isteyen biçimcilik ise 1931'de Gödel tarafından yazılan bir makale ile umut kırıcı bir darbe yer. Bu çalışmaya göre, biçimciliğin tamlık ve tutarlılık ilkelerinin son derece basit dizgeler dışında gerçekleşme olanağı yoktur. Diğer bir değişle, böylece aritmetik dahil matematiğin hiçbir dalında tutarlılığın, o dizgenin elverdiği yöntemle ispatlanmayacağı ortaya konmuş olmaktadır. Örneğin, Peano aksiyomlarını mantık ilkeleriyle birleştirerek aritmetikte A dizgesini oluşturalım; şimdi bu A'nın tutarlılığını (A gerçekten tutarlı ise) A'nın terimleriyle dile getirilen bir yöntemle ispatlanamayacağını ortaya koymuştur Gödel. Bunu öğrendiğinde Hilbert'in yaşadığı hayal kırıklığı, Frege'nin Russell'ın ürettiği paradoksu öğrendiğinde yaşadığı hayal kırıklığını anımsatır (Yıldırım, 1996: s. 95). Gödel'in söz konusu makalesinin yayımlanması, aritmetiğin tutarlılığının sağlanmaya çalışıldığı bir döneme rastlar. Gödel'in ortaya koyduğu sonuçlarla Hilbert'in programının, yani doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizge ile tüm önermelerin kanıtlanamayacağı ve karar verilemeyen önermelerin mutlaka bulunacağı gösterilmiş olur. Bu ispat ile Aristoteles'ten beri bilinen, ilk ilkelerden yola çıkılarak oluşturulabilecek sağlam bir tümdengelimli dizge kurma ideali de sarsılmış olur. Bununla birlikte kuramsal fiziğin tam olarak aksiyomatikleştirilmesini sınırlandırmış olur (Gözkân, 2010: Sunuş xv-xvi).

> Gödel'in çalışmasından çıkan genel sonuç matematiğin mutlak sınırlarının çizildiği anlamına gelmiyor. Kendisi de bir Platoncu Gerçekçi olan Gödel'in açısından değerlendirerek şu yorum yapılabilir: Eğer matematiksel nesneler bizim tanımlarımızdan ve inşamızdan bağımsız olarak varsalar, matematikte karar verilemezliğe, tam olmamaya neden, matematiğin kendinden, kendi nesnelerinden gelen bir şey olmayabilir. Sorun bizim matematiğin nesnelerini aksiyomatikleştirmemizdeki sınırlardadır (Gözkân, 2010: Sunuş xvii) .

"Von Neumann, Gödel'in çalışmalarının önemini ilk fark eden matematikçilerden biridir" (Barrow'dan akt. Gür, 2011: s. 37). Öyle ki bu teoremden sonra biçimcilik görüşünü terk etmiş ve bu teoremin olası sonuçlarını incelemeye başlamıştır. Gödel'in teoremi kimi düşünürlerce çeşitli şekillerde yorumlanmıştır. Örneğin Lucas ve Pensore gibi yorumcular, bu teoremin, informel aritmetiksel ispatlamanın bir makineden her zaman daha hızlı olacağı anlamına geldiğini savunmuşlardır. Webb gibi yorumcular ise bu düşüncelere katılmayıp, bu teoremin mekanizmi desteklediğini iddia etmişlerdir (Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 37). Barrow'a göre ise, Russell ve Wittgenstein, Gödel'in çalışmalarını tam olarak anlamamış; Hilbert ise sonuçlarla ilgilenmemiştir (Gür, 2011: s. 37). Yıldırım'a göre biçimcilik Gödel'den önce de çok benimsenen bir öğreti değildir. Ona göre, "matematiğe, tutarlılığın ispatı ya da başka nedenle de olsa içeriksiz, formel bir oyun gözüyle bakmak pek çok matematikçinin içine sindiremediği bir tutumdur" (Yıldırım, 1996: s. 95). Gür'e göre, son yıllarda, dünyada, özellikle Amerika'da eğitim fakültelerinde, biçimcilikten uzaklaşılmakta ve matematik eğitiminde daha somut ve uygulamaya dönük yaklaşımlar güçlenmektedir (Gür, 2011:

s. 38). Lakatos ise biçimciliğin, matematik tarihi ile matematik felsefesi arasındaki bağları koparttığını savunur. Biçimcilere göre matematik tarihi yoktur. Lakatos'a göre ise, matematik tarihinden yoksun bir matematik felsefesi koflaşmaktan kurtulamaz. Ona göre biçimcilik, ucu çok gerilere uzanan "bağnaz" diyebileceğimiz bir felsefe zincirinin son halkasıdır ve biz iki bin yılı aşkın bir süredir bağnazlarla kuşkucuların tartışmalarına tanık olmaktayız. Bu büyük tartışmada matematik, bağnazların övünç kalesi olmuştur ve ona göre buna karşı çıkmanın zamanı gelmiştir (Lakatos'tan akt. Yıldırım, 1996: s. 96). Diğer taraftan sezgiciliğin varlık ispatını inşa yöntemine bağlı tutması, klasik matematikte geçerli sayılan pek çok ispatın geçersiz olmasına neden olmuş ve matematiği önemli ölçüde sınırlamıştır. Bunlardan biri, sonsuzlar kümesi söz konusu olduğunda "üçüncü halin olanaksızlığı" ilkesinin geçerliliğini yitirmesidir. İki değerli mantık sonlu kümeler çerçevesinde insan dilinin evriminin bir ürünüdür. Fakat ispatı sonlu adımda inşa edilemeyen önermeler için yalnız "doğru" ya da "yanlış" demek yersizdir. Bu tür durumlar için "belirsiz" gibi üçüncü bir durum ortaya çıkacaktır ki buda sezgicilerin üç değerli bir mantık öngörmesi demektir. *Principia Mathematica*'da çelişmezlik ilkesi ile üçüncü halin olanaksızlığı ilkeleri mantıksal olarak birbirine dönüştürülebilen özdeş ilkelerdir. Fakat sezgici anlayışta buna olanak yoktur. Sezgici Heyting "matematiğin temelini mantık olarak aldığımızda, onun da, ilkeleri matematiksel ilkelerden daha karmaşık olan bir temele ihtiyacı olacaktır" demektedir. Ona göre matematiksel inşa öylesine doğrudan, öylesine açık olmalıdır ki, ona yeniden bir temel arama gereği duymayalım. O, "Bir çıkarımın geçerli olup olmadığını mantık olmadan da anlayabiliriz; bunun için açık, bilimsel bir kavrayış yeterlidir" demektedir. Sezgiciler için matematiğin temeli doğal sayılardır. Doğal sayılar ise çocuklar tarafından bile çok rahat anlaşılmakta olduğundan, bu denli açık, basit ve alışık olduğumuz nesneleri, daha basit nesnelere indirgeme çabası boşunadır. Sezgiciliğin koyduğu bunca sınırlamalar içinde, mevcut matematiğin tümüyle kapsanamaması ve dışlanan bölümlerin olması sezgiciliğin taşıdığı bir sakıncadır. Bir diğer sakınca ise sezgiciliğin istenen saydamlıkta olmaması, dolayısıyla değişik yorumlara yol açan bir bulanıklık içinde olmasıdır. Bu durum, sezgiciliğin anlaşılması zor bir yaklaşım olduğunu düşünenlerle, metafizik gibi gizemli bir öğreti olduğunu görenlerin oluşmasına neden olmuştur (Yıldırım, 1996: s. 100-101). Ernest'e göre, bu üç anlayışın ortak özelliği olan matematiğe sağlam bir temel bulma iddiası epistemolojik olarak çökmüş gibi görünse de temelcilerin çalışması matematiksel açıdan verimli olmuştur. Shapiro'ya göre ise, mantıkçılık, felsefi ve matematiksel olarak ölmemiştir ve hala canlı bir araştırma alanıdır (Ernest ve Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 39). Temel arayışı tartışmaları eski canlılıklarını artık korumamakla birlikte tartışmalar bugün de sürmektedir. Günümüz filozoflarından Hilary Putnam bu konuda şöyle demiştir:

> Filozoflar ile mantıkçılar son elli yıl boyunca matematiğe bir "temel" bulma yolunda öylesine yoğun bir çaba içine girmişlerdir ki, yalnızca birkaç cılız ses matematiğin bir temele gereksinmesi olmadığını söyleme cesaretini gösterebilmiştir. Ben bu cılız seslere katılmak istiyorum. Kanımca matematik açıklık gerektiren bir konu değildir; temellendirilmesine ilişkin bir bunalımı da yoktur. Dahası, matematiğin temeli olmadığı gibi, bir temele ihtiyacı olduğunu da sanmıyorum (H. Putnam'dan akt. Yıldırım, 1996: s. 101).

Putnam'a benzer bir şekilde, mantıkçı Church de, 1962'de matematiğin temelleri hakkındaki görüşlerini şöyle açıklıyordu: "Matematik için herhangi bir temel [tayini] (…) belli bir döngü içerisindedir. Yani kendileri belli bir temele dayanmayan, iman veya sezgi olarak kabul edilecek bazı ön kabuller her zaman olacaktır" (Ernest'ten akt. Gür, 2011: s. 40).

## 1.3. Günümüz Matematik Felsefesindeki Gelişmeler

Matematik felsefesinin 20. yüzyıldaki gelişimine bakıldığında, yüzyılın ilk dönemlerinin daha çok matematikçiler tarafından, ikinci döneminin ise daha çok filozoflar tarafından şekillendirildiği görülür. İlk dönemde, matematiğin temelleri gibi sorunlar ile tanım, teorem ve ispatın ne olduğu gibi konular incelenmiştir (Gür, 2011: s. 40). Gödel'in "eksiklik teoremi" bu soruşturmaların bir örneğidir. Gödel bu teoremde, "Doğru formüle edilmiş matematiksel önermenin kendisi ya da yanlışsa değili her zaman ispatlanabilir mi?" sorusunun cevabını aramış ve tüm soruların cevaplarının bulunamayacağı sonucuna ulaşmıştır (Doksiadis ve ark., 2012: s. 286). İkinci dönemde ise, özellikle matematik eğitimi merkezde yer almış ve matematik daha da çok filozoflar tarafından ele alınarak yorumlanmıştır. Böylece de "daha felsefi" sorunlar üzerinde yoğunlaşılmıştır. Platonculuk, matematiksel realizm ve ontoloji soruşturmaları II. Dünya Savaşı dönemi sonrasında yaşanan tartışmalara yön vermiş ve bu dönemde daha dikkatli üretilmiş argümanlar ve kavramsal analizler ile daha dar problemlerle uğraşılmış, böylece matematik felsefesi, filozofların tarzına daha yaklaşmıştır (Gür, 2011: s. 41). Yirminci yüzyılda bilgisayar sistemlerinin gelişmesi ve 1976'da "dört renk sanısı"nın bilgisayarla çözülmesi ile ispatın ne olduğu, bilgisayar ispatının kabul edilip edilemeyeceğine ilişkin tartışmalar da yaşanmıştır. Hersh bu konuda bir ironiye dikkat çeker: Onlarca yıl kimi matematik filozofları, "geçerli bir ispatın herhangi bir mekanik yolla kontrol edilebilmesi"nden söz ettiler; şimdi bilgisayar tarafından uzun yıllardır çözülemeyen bir sorunun çözümüne "Bu bir ispat değildir!" diye karşı çıkmaktadırlar (Gür, 2011: s. 41). Tüm bunlar göz önüne alınacak olursa, yirminci yüzyılın matematik felsefisinde yaşanan gelişmeler doğrultusunda ortaya atılan önemli görüşlerden bazılarına değinilmesinde yarar vardır.

### 1.3.1. Quine'ın Matematik Üzerine Görüşleri

Yirminci yüzyılının önemli analitik filozoflarından biri olarak kabul edilen Willard Van Orman Quine'ın (1908-2000) matematik felsefesi kapsamında geliştirdiği önemli görüşleri vardır. Quine, Kant tarafından ifade edilen, "olgulardan bağımsız olarak bilinebilen" ve "olgular aracılığıyla bilinebilen" biçimindeki analitik-sentetik ayrımına, empirizmin bir "dogma"sı olarak karşı çıkar. Ona göre, "dil ve dünya faktörleri birbirine düğümlenmiş gibi iç içe geçmiştir ve bu ikisi arasında keskin bir ayrım yoktur." Bundan dolayı bir cümlenin dilsel nedenlerden ötürü doğru olduğunu veya analitik oluğunu söylemenin bir mantığı yoktur. Quine diğer taraftan "indirgemecilik"e karşı çıkar. İndirgemeciliğe göre, anlamlı her bir cümle bunların mantıksal inşalarına denktir. Bu da anlamlı bir cümlenin, doğrudan tecrübe yoluyla doğrulanabilir cümlelerin mantıksal bir kombinasyonu olması gerektiği gibi bir başka "dogma"yı oluşturur. Quine, bu dogmalar yerine "dikişsiz ağ (*seamless web*)" benzetmesini önerir. Ona göre, inanç sistemimiz bir ağ oluşturur ve bu sistemde her inanç başka bir inançla bağlantılıdır. Bu bağlantıların bazıları mantıksal, bazıları dilsel, vb. gibidir. "Tecrübe ile doğrulanabilen, yani tecrübe ile ilişkili olan inançlar ağın sınırındadır. Yeni gözlemler sayısız bağlantılar arasında değişiklik meydana getirir ve bu bağlantılar arasında yeni bir dengeye ulaşılana dek sürer." Quine'ın bu bütüncül (holistik) görüşü, deneyimle doğrulanabilen anlamlı her cümlenin zorunlu olarak sahip olduğu mantıksal bir kombinasyon dogmasını dolayısıyla reddeder. Bununla birlikte Quine, holizm ve empirizme dayanarak matematiğin bilimde uygulaması bulunan kısımlarını kabul eder (Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 43). Quine'ın bu görüşleri birçok eleştiri almıştır. Örneğin Hersh, Quine'ın matematiksel gerçeklik, ancak fiziksel gerçeklik ile bilinebilir şeklindeki görüşüne karşı çıkmıştır (Gür, 2011: s. 44).

### 1.3.2. Yeni-Fregeciler

1950'li ve 1960'lı yıllarda, yeni-Fregeci yaklaşımların eski temelci yaklaşımların yerini aldığı görülmektedir. Yeni-Fregecilere göre, Zermelo-Fraenkel aksiyom kümelerinin bir uzantısı olan küme kuramı bütün matematik için temel oluşturmaktadır. Onlara göre tüm bir matematik, küme kuramının içine gömülüdür ve özelde sayılar, genelde ise tüm matematiksel varlıklar kümelerden ibarettir (Kitcher ve Aspray'den akt. Gür, 2011: s. 44). Şimdi, Frege'nin matematiğe yaklaşımını esas alan çalışmalar günümüzde de devam etmektedir. Crispin Wright, Bob Hale ve Neil Tennat bu konuda anılabilir. Bu bağlamda yeni-mantıkçılık şu iki önerme ile karşımıza çıkar:

1. Matematiğin önemli bir özü *a priori* olarak bilinebilir.
2. Bu matematik, ideal ile yani bizden bağımsız matematiksel nesnelerle ilgilenir.

"Yeni mantıkçılara göre, matematiksel dili kullanırken demek istediğimiz şeyin bilgisi sayesinde, soyut gerçekliğin bilgisine ulaşırız." diyen Shapiro'ya göre bu görüşler, matematiğin *a priori* olduğunu ve nesnel doğrulara sahip olduğunu belirten ama geleneksel görüşü bırakmak istemeyen fakat ontolojik realizmin karşılaştığı epistemolojik sorunlardan kaçınmak isteyenler için caziptir (Shapiro'dan akt. Gür, 2011: s. 44).

"Matematiksel doğruların, geçerli ve bu nedenle yanılmaz, sarsılmaz ve nesnel oluğunu savunan bakış açısına 'mutlakçılık' denmektedir." Yaygın olarak kabul gören mutlakçılık 20. yüzyılın başından itibaren matematikte çıkan karışıklık ve çelişkilerden dolayı eleştirilmeye başlanmıştır (Gür, 2011: s. 48). Bu eleştirilerden biri, matematik felsefesinde 1970'lerden günümüze kadar yazılmış en önemli makalelerden biri olarak görülen, Paul Benacerraf'ın "Matematiksel Hakikat (1983)" adlı makalesidir. Bu makalede Benacerraf bir ikilemi tartışır: "(…) matematiksel doğruluk hakkındaki en iyi görüşlerimiz, matematiksel bilgi hakkındaki görüşlerimiz ile uyuşmamaktadır.” (Kitcher ve Aspray’den akt. Gür, 2011: s. 46). Ona göre, doğru olan matematik cümleler, doğruluklarını, matematiksel nesnelerin özelliklerinden ve birbiriyle olan ilişkisinden alır. Böylece matematiksel nesneler zaman ve mekândan bağımsız görünürler. Bu durumda, bu nesneler ve insan arasında herhangi bir bağ yoktur. O halde en iyi bilgi kuramımıza göre, matematiksel bilgi imkânsızdır. Bu makaleden sonra yazılan birçok makale bu ikileme yanıt bulmak için yazılmıştır. Bazı filozoflar ise, insan bilgisinin koşullarını daha iyi belirleyen bilgi kuramlarının bizden bağımsız matematiksel nesneleri anlamamızı sağlayacağını düşünerek yeni-Fregeciliğin bu ikilemden etkilenmediğini ileri sürmüşlerdir. Kimi filozoflar ise bu ikilemi derinleştirerek yeni-Fregecilikte revizyonlar önermişlerdir (Kitcher ve Aspray’den akt. Gür, 2011: s. 46).

### 1.3.3. Adcılar

1960’lı ve 70’li yıllarda, Platonculuğa ciddi eleştiriler getirilmiş ve bu eleştiriler matematik felsefesinin günümüzdeki şekillenmesinde önemli rol oynamıştır. Platonculuğa karşı çıkanlardan biri, 1970’li yıllarda, matematiği adcılar *(nominalist)* bir biçimde savunan Chihara’dır. Onun çalışması nominalizme olan ilgiyi artırmıştır. Zaruriyet (*indispensability*) tartışması olarak bilinen, “Matematik bilim için temel teşkil eder mi?” sorusuna Quine ve Putnam’ın “evet” yanıtını vermesi ve nominalist Field’ın buna karşı çıkıp, “hayır” demesi ile başlayan tartışma hala günümüzde de devam etmektedir. “Nominalistler, sayılar ve kümeler gibi matematiksel nesneleri varsaymaksızın, nasıl bir matematiğin bilim için gerekli olduğunu göstermeye çalışmaktadırlar” (Brown, Kitcher ve Aspray’den akt. Gür, 2011: s. 45).

Kitcher ve Aspray’e göre çağdaş nominalizm, Chihara, Gottlieb ve Field’ın her birinin öncülüğünü yaptığı üç farklı biçimde karşımıza çıkar.

> Chihara, soyut nesnelerin varlığı kabul edilerek kurulan cümlelerin, ifadelerin sadece dilsel varlıklar olarak yeniden inşa edilebileceğini iddia eder. Chihara’ya göre, matematiksel dil öyle sistemleştirilebilir ki matematiksel nesnelere gizliden veya açıktan bir referans söz konusu olmaz. Fakat burada, Chihara’nın, sisteminde, tümevarım ve bütünlük aksiyomlarının her ikisini de kabul ettiğini belirtelim. Dolayısıyla

> Shapiro’nun belirttiği gibi Chihara doğruluk-değeri açısından realist yani ona göre matematiksel cümleler zihin ve matematikçiden bağımsız nesneler bir doğruluğa sahiptir (Shapiro’dan akt. Gür, 2011: s. 45). Gottilieb ise, matematiksel nesnelerden kaçınmak için “ve”, “veya” ve “bazı” türü önerme eklemi ve niceleyicileri yeniden yorumlamayı önerir. (Kitcher ve Aspray’den akt. Gür, 2011: s. 45). Field’ın “kurguculuk (*fictionalism*)” olarak adlandırdığı görüşe göre, edebi kurgu ürünü olan “Oliver Twist” neyse, sayılar ve kümeler de aynı konumdadır (Shapiro’dan akt. Gür, 2011: s. 45).

Hersh’e göre, kurgucuların, matematiksel nesnelere bir varlık atfetmeden, onların bir “kurgu ürünü” olduğu kabul edilip bilim yapılabileceği iddiası hala tartışılmaktadır (Gür, 2011: s. 46).

### 1.3.4. Yapısalcılar

Yapısalcılık (*structuralism*), Kitcher ve Aspray’e göre, Benacerraf’ın “doğal sayıları, küme kuramının desteklediği ihtimallerden hangisi ile tanımlayacağız?” sorusuna tepki olarak doğmuştur. Çünkü Ernst Zermelo ve John von Neumann doğal sayıların küme kuramıyla gösterimini farklı iki biçimde yapmıştır. Zermelo, 0’ı boş küme $\phi$, 1 sayısını $\{\phi\}$, 2 sayısını $\{\{\phi\}\}$, 3’ü $\{\{\{\phi\}\}\}$, … olarak; von Neumann ise 0’ı $\phi$, 1 sayısını $\{\phi\}$, 2 sayısını $\{\phi,\{\phi\}\}$, 3 sayısını $\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$, … olarak göstermiştir. Bu gösterimlerden hangisinin kabul edilmesi gerektiği sorusuna cevap vermek için ortaya çıkan yapısalcı yaklaşımın ana destekleyicileri olaraksa Benacerraf, Hellman, Resnik ve Shapiro sayılabilir. Shapiro’ya göre, “yapısalcılık matematiği örüntü, model, kalıp ve şablon gibi anlamlara da gelen ‘*pattern*’ bilimi olarak tanımlamaktadır.” Çoğu yapısalcı, matematiğin her cümlesinin bizden bağımsız olarak doğru veya yanlış olduğundan ve doğal sayılar arasında ontolojik bir bağın bulunduğundan söz eder. Onlara göre bir doğal sayının özü, o sayının diğer doğal sayılarla ilişkisinde yatar. Aritmetiğin içeriği, kendisi gibi basit soyut yapıda olan herhangi bir sonsuz dizide gözlemlenebilir. Bundan dolayı, “2” sayısı doğal sayılar yapısındaki 2. konumdan veya “5” sayısı, doğal sayılar yapısındaki 5. konumdan ibarettir. Diğer bir deyişle “7” sayısını asal sayı kılan bu sayının kendi özellikleri değil bu yapı içindeki konumu veya sırasıdır (Shapiro’dan akt. Gür, 2011: s. 47).

Yukarıda Benacerraf ile somutlaştığı gibi yapısalcılar mutlakçı yaklaşımı eleştirirler. Onlarınkinden başka önemli bir mutlakçılık eleştirisinin ise yarı-deneyimciler tarafından yapıldığı görülür.

### 1.3.5. Yarı-Deneyimci Görüş

Bu yaklaşım, matematikte kesinlik ve mükemmelliği arayan mutlakçılara karşı oluşturulmuş görüşlerden Imre Lakatos'un (1922-1974) yarı-deneyimci yaklaşımı (*quasi-empiricism*) altında incelenebilir. Buna göre:

> Matematik, matematikçilerin yaptığı bir şeydir ve herhangi bir insan etkinliğinde veya ürününde olabileceği gibi matematikte de kusurlar görülebilir. Lakatos'a göre, matematik felsefesi tarih, yöntem ve yanlışlanabilir bilgi kuramı boyutlarında ele alınmalıdır. Bir başka deyişle, insan etkinliği olarak matematik, kendi tarihinden ayrı düşünülemez ve tarihsel süreç içinde evrimleşen matematikçiler arasındaki bir diyalog olarak görülmelidir. Sosyal ve kültürel bir ürün olması nedeniyle matematikçiler yanılabilir ve ürünleri de mükemmel olmayabilir (Baki, 2014: s. 26).

Matematikte oluşturulan ürünler, yeni keşifler ve yorumlarla son haline ulaşır. Bundan ötürü de, bu yaklaşım çerçevesinde, ürünlerin mükemmelliklerinin araştırılması yerine onların uygulanabilirliklerine bakılmasının daha uygun olacağı savunulmaktadır (Baki, 2014: s. 26).

> Klasik bilgi kuramı en az 2000 yıldan beri fen bilimlerinde ve matematikte etkili bir şekilde yerini almış ve idealleştirilmiştir. Bu ideal kuram (Euclid bilgi kuramı) tümdengelimcidir ve onun kanıtları şüphe götürmezdir. Bu kurama göre doğrular, tümdengelimci çıkarsamaların bir ürünüdür ve doğruluklarının başka yöntemlerle sınanmasına gerek yoktur. Yarı deneyimci yaklaşım, matematiksel doğrulukların bu şekilde bize aktarılmasına karşı çıkar. Yanlışlanabilirlik kavramına vurgu yapar. Euclid bilgi kuramında bir kavram, çıkarsamalar yoluyla kanıtlanamıyorsa yanlıştır. (…) Yarı-deneyimci sistemdeyse kuramlar ispatlanmaz, açıklanır ve doğrulukları onaylanır. Böyle bir sistemde kuramların karşıt örnekleri bulunamadığı sürece doğrulukları varsayımlara ve tahminlere bağlıdır (Baki, 2014: s. 26).

Lakatos'a göre ispat; akıl yürütme, eleştirme, karşıt örnek bulma ve çürütme etkinlikleriyle tamamlanır ve matematik de doğa bilimleri gibi *yanılabilir*dir. Lakatos matematikteki yanılabilirliği, Karl Popper'ın (1902-1994) "eleştirel yanılabilirlik" kavramını matematik felsefesine uyarlayarak geliştirmiştir (Ernest'ten akt. Gür, 2011: s. 48). Popper'ın *Sanılar ve Çürütmeler* kitabını çağrıştıran *İspatlar ve Çürütmeler*'de Lakatos, Popper'ın doğa bilimleri için uyguladığı metodolojiyi matematiğe uyarlar (Kitcher ve Aspray'den akt. Gür, 2011: s. 48). Lakatos'un yöntemi Popper'ın benzetmesinde olduğu gibi bireyin üçüncü dünyasında yer alır. Popper'ın "Üç Dünya" kuramı açısından matematik, bilim, sanat ve felsefe gibi, kültür alanını oluşturan üçüncü dünyada bulunur:

> Popper üç dünya ayırt etmektedir: Birinci Dünya, doğal çevremizi oluşturan nesne ve olguları; İkinci Dünya, insanın duyma, düşünme, bilgi edinme, değerlendirme, karar verme gibi öznel süreçleri; Üçüncü Dünya, insanın ikinci Dünya'da oluşturup açığa vurduğu, ama giderek nesnel ve özerk kimlik kazanan kültürel yapıt ve süreçleri kapsamaktadır. Matematik (bilim, din, dil, sanat, felsefe, vb. ile birlikte) Üçüncü Dünya'nın bir parçasıdır. Bu dünyanın en önemli özelliği, İkinci Dünya'dan kaynaklanmasına karşın, öznel yaşamdan bağımsız, nesnel ve özerk olmasıdır (Yıldırım, 1996: s. 61).

Öte yandan, Baki'ye göre gelenekselciler (*conventionalists*), mutlakçılar ve yarı-deneyimcilerin tersine matematiğin bilgilerinin ve doğruluklarının dilbilim geleneklerinden etkilendiğini savunurlar. Mantığın doğrulukları ise analitiktir. Bunun sebebi önermelerin taşıdığı anlamlardır (Baki, 2014: s. 27).

> Wittgenstein'a göre, mantığın üzerine inşa edilen matematiksel doğrulukların kaynağı, dilbilim geleneğidir ve matematik, dil oyunlarının koleksiyonudur. Doğruluk, yanlışlık ve kanıt hakkındaki düşünceler kabul edilen geleneksel dilbilim kurallarına ve oyunlarına bağlıdır. Temellerinin kullanılan dilin kurallarına indirgenmesi, matematiksel bilginin gelişmesine izin verir. (…) Matematik ve mantıksal doğrular, dilin kabul edilen kurallarına ve gramerine bağlıysa ve bu durumda doğrular dilin kurallarını ve gramerini bozuyorsa yanlışlanabilirlikleri söz konusudur. Eğer bir kanıt dilin kurallarına uyuyorsa onun yanlışlanabilirliği söz konusu değildir. Wittgenstein'ın matematiksel doğrulukla ilgili bu yaklaşımı Russell'ın matematiksel doğruluğu mantığa indirgeyerek sağlama alma çabasını çağrıştırmaktadır (Baki, 2014: s. 27).

# 2. BÖLÜM: MATEMATİK EĞİTİMİNDE MATEMATİKSEL NESNE

Bu bölümde matematik eğitimi içindeki matematiksel nesne anlayışlarını gün ışığına çıkarmak ve bunların öğretim biçimlerine yansımalarını tespit edebilmek amacıyla öncelikle bilgiye bakış çerçeveleri ve bu çerçevelerden yararlanarak temellerini eğitim felsefesi görüşlerinden alan öğretim teorileri incelenecektir. Burada amacımız, tanımladığımız öğretim teorilerine matematatik felsefesi gözlüğünden bakabilmek ve öğretim terorileri içindeki matematik felsefesi bakış açısı dayanaklarını keşfedebilmektir. Bu amaçla bu bölümümüzün içeriğini iki başlık altında inceleyeceğiz. İlki "Eğitim Felsefeleri ve Öğretim Kuramları Bağlamında Matematik Eğitimi" ve diğeri "Matematik Eğitimi Felsefesinde Matematiksel Nesne" başlıklarıdır.

## 2.1. Eğitim Felsefeleri ve Öğretim Kuramları Bağlamında Matematik Eğitimi

Eğitimi "insanı kültürel hayata hazırlayan tüm sosyal süreçler" (Gutek, 2006: s. 5) olarak belirlediğimizde, onun -felsefe, psikoloji, sanat, doğa bilimleri, teknoloji gibi- insan üretimlerinden etkilenmemesi elbette beklenemez. Felsefenin de bir düşünme alanı olduğu göz önüne alındığında tüm üretimlerin temelinde yer alacağı açıktır. Matematik eğitimine ilişkin olarak pek çok felsefi sorgulamanın yapıldığı, en az iki bin yıldır temel ders olarak okutulan okul matematiği üzerine büyük filozofların çeşitli görüşler geliştirerek önerilerde bulunduğu görülmektedir. Örneğin Platon'un geometri eğitimini tüm eğitim alanlarının üstünde tuttuğunu daha önce dile getirmiştik. Ona göre geometri var gücüyle öğretilmesi gereken bir alandır. Platon'a göre eğitim ruhun kendi gücünü "iyi"ye yöneltir, geometri ise düşünme gücünü geliştirir (Platon, 2012: s. 236, 246). Günümüzde matematik eğitimcilerinin en önemli kaygılarından biri, öğrencilerin matematiği öğrenirken kavramlar ve sistemler arasındaki ilişkileri kurabilmelerinin, kavramalar arası düşünebilmelerinin gerçekleşmesine ilişkindir (TTKB, 2011: s. 4). Benzer kaygıları Platon'un *Devlet*'inde Sokrates ve Glaukon arasındaki şu diyalogda da görüyoruz:

> - Peki, onlara şunu sorsak ne dersin Glaukon: "Ey yüce bilginler, sizin üstünde tartıştığınız hangi sayılardır? Sizin anlattığınız gibi birbirine tam eş ve parçalara ayrılmaz birimler nerede bulunur?" Buna verecekleri karşılık ne olabilir sence?
> - Bunlar, yalnız düşünceyle kavranan ve başka hiçbir türlü ele alınamayan sayılardır, derler sanrım.
> - Görüyorsun ki bu bilim, gerçekten vazgeçemeyeceğimiz bir bilim. Çünkü insanı öz varlığa erdirmek için salt kavramları kullanmaya zorluyor (Platon, 2012: s. 246).

Diyalog, aritmetik ve geometri eğitiminin ne denli önemli olduğu ve onu öğrenmenin düşünme yetisini nasıl geliştirdiği, bu yüzden matematiğin bu hedefle öğretilmesinin büyük önemi vurgulanarak sürdürülür:

> - Şunu da fark etmişsindir, herhalde: Doğuştan sayı bilgisine yatkın olanlar, öteki bütün bilimleri çabuk kavrarlar. Kalın kafalılar da zar zor bu bilgiyi edindikleri zaman, başka yararları olmasa bile, düşünme güçlerini artırmış olurlar.
> - Orası öyle.
> - Sonra, sayılar kadar insana kafa işlettiren bilim de az bulunur.
> - Doğru.
> - Bütün bu sebeplerle, sayılar biliminden vazgeçemeyiz, tersine en iyi kafaları onunla besleyeceğiz (Platon, 2012: s. 246).

Diyaloğun devamında ise matematiğin ve ona bağlı olarak geometrinin, dönemin "teknolojik" gelişmelerindeki "kullanılabilirliği" açısından önemine dikkat çekilir. Bu, günümüz matematik eğitimcilerinin, matematikle ilgili olarak "diğer alanlarda kullanımın önemi"ne (TTKB, 2011: s. 4) yaptıkları vurguyla yine ortaklaşmaktadır.

> - Demek ki öğretimimizde ilk kullanacağımız bilimi bulduk. Ona bağlı bir bilim daha var. Bakalım o nasıl işimize yarayabilir?
> - Hangi bilim, geometriyi mi demek istiyorsun?
> - Ta kendisi.
> - Savaşla ilgisi bakımından işimize yarayacağı su götürmez. Bir orduyu yerleştirmede, kaleleri elde etmede, orduyu yayma ve toparlamada, çatışmalarda olsun, yürüyüşlerde olsun, orduyu gerekli düzenlere sokmada, bir komutan ne kadar geometri bilirse o ölçüde ustadır (Platon, 2012: s. 246).

Yaklaşık 2400 yıl önce "bizim güzel devletimizin yurttaşlarına geometriyi yabana atmamalarını var gücümüzle öğütleyeceğiz" (Platon, 2012: s. 247) diyen Platon'un çağrısı, çağdaş dünyamızın matematik eğitimcilerinin çağrısı gibidir. İnsanlık tarihinde bu denli önemsenen bir alanda, 20. yüzyılın başlarında pozitivizmin yerini post-pozitivizme bırakması ve bilginin doğasına yönelik bakış açısının değişmesi ile matematiksel bilginin öğretimi için yeni, çağdaş eğitim kuramları oluşturulmuştur. Matematik eğitiminin felsefi dayanakları bu bakımdan bilginin doğasına yönelik olarak geliştirilen bakış açılarında aranmalıdır. Çalışmamızın bu bölümünde, bu doğrultuda öncelikle bilgiye bakış açıları, daha sonra dayanakları bu bakış açıları olan eğitim felsefesi teorilerine değinilecek ve son olarak bu felsefi bakış açılarından yola çıkan ve motivasyonunu psikolojiden alan öğrenme kuramları ele alınacaktır. Çünkü eğitimin iki önemli dayanağı vardır. Birincisi bilgi nesnesinin neliği diğeri bilgi nesnesini elde etme biçimi. Bu yüzden bilgi nesnesine bakış açılarını eğitim felsefesi ile belirlerken bilgi nesnesini elde etme biçimini öğretim teorileri belirleyecektir. Bu çerçevede çalışmamızda eğitim felsefesi bakış açıları ve öğretim teorileri değerlendirilecektir.

### 2.1.1. Bilginin Doğası Üzerine

MS 1500 yıllarında Rönesans'la birlikte Avrupa'nın din, politik düşünce ve örgütlenme, sanat, ekonomik etkinlik, felsefe, vb. gibi alanlarda reform yaşaması sonucunda, Ortaçağ Avrupası'nda metafiziğe dayanan egemen dünya görüşü, eleştirel ve bilimsel bir bakış açısına dayanan yeni bir dünya görüşüne dönüşmeye başlamıştır. Ardından, 17. ve 18. yüzyılda yaşanan Aydınlanma dönemi ile birlikte "akıl çağı" denen dönem başlar. Bu dönemde, Tanrının ellerinde olan insanın, kendi aklını kullanarak kendisini geliştirebileceği savunulmuş ve mutluluğun, "doğru aklın" insani, tinsel ve doğal düzene uygulanması ile elde edilebileceği varsayılmıştır. Bu çağda, Galileo ve Newton pozitivist paradigmanın temelini oluşturan ilk çağdaş bilimsel düşüncenin şekillenmesine, Bacon, Descartes ve Kant modern felsefe, matematik ve mantığın biçimlenmesine, Martin Luther Protestan devrimle dinlerin reformasyonuna, Voltaire ve Rousseau devletin rolü ve devlet-birey ilişkisine yönelerek bugünkü çağdaş demokrasilerin temel ilkelerinin saptanmasına, Locke ve Hume da felsefenin temel sorunlarının giderilmesinde bilginin ne olduğu ve nasıl üretildiğine yönelerek deneyimcilik ve gerçekçiliğin ilkelerinin formüle edilmesine önayak olmuşlardır. Öte yandan, pozitivist/akılcı paradigmaya alternatif olarak yükselmeye başlayan paradigmanın kökleri yirminci yüzyılın başlarına dayanır. Bu dönemde yine önemli bilimsel gelişmeler yaşanır. Örneğin fizikte Einstein'ın "Görelilik Kuramı"nda gözlemcinin süreçteki etkisinin belirlenmesi, eski paradigmanın önemli temel taşlarından birini yerinden oynatır. Bunun yanı sıra Heisenberg'in "belirsizlik ilkesi"nde nesnenin mikroskobik ayrıntılar haricinde ışıktan etkilenmesinden dolayı gözlemlenememesi pozitivit/akılcı paradigmanın nesnellik ilkesinin sorgulanmasına neden olur. John Bell evrenin bağımsız ve ayrı parçalardan oluşmadığını iddia ederken onu izleyen David Bohm, bütüne ait gerçekliğin parçada gizli olduğunu iddia eder ve böylece yeni paradigma olan pozitivizm-sonrası paradigmasının, yani "post-pozitivizm"in yolu açılmış olur (Yıldırım &Şimşek, 2011: s. 23-28). Biri diğerini yadsıyarak oluştuğu için, pozitivist ve post-pozitivist bilgi kuramları arasındaki farklılıklar ve doğal olarak onların bilginin doğasına ve eğitime ilişkin görüşleri karşılaştırmalı olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

Tablo 2.1. Pozitivizm ve Post-Pozitivizm Ayrımı

| Pozitivizm | Post-Pozitivizm |
|---|---|
| **Bilimsel bilgi mutlaktır.**<br>Bilimsel doğrular tek ve mutlaktır. Bu anlamda bilginin mutlaklığı ve değişmezliği savunulur. | **Bilimsel bilgi mutlak değildir.**<br>Bilimsel doğrular tek ve mutlak değildir. Elde edilen doğrular mutlak gerçeklik değildir, yanılabilir ve yanlışlanabilir. |
| **Doğru, kişiye göre değişmez.**<br>**(Nesnel Bilgi)**<br>Bilimsel bilgi içinde üretildiği toplumun inanç ve değerlerinden etkilenmez. Örneğin bir deneyin sonucu onu yapanın niyetinden etkilenmez. Bu yüzden gözlemci ile gözlenen kesin sınırlarla ayrılmıştır ve nesnel bilgiye ulaşılmaya çalışılır. | **Doğru, kişiye göre değişir.**<br>**(Öznel Bilgi )**<br>Bilimsel bilginin değeri kullanılan bilimsel yönteme ve bilimin içinde yapıldığı toplumun ve tarihin koşullarına bağlıdır. Gözlemci gözlemden soyutlanmış değildir. Nesnellik değil bakış açısı hâkimdir. |

| Hiyerarşik Düzen | Heterarşik Düzen |
|---|---|
| Sistemler en basitten en karmaşığa kadar hiyerarşik bir şekilde sınıflandırılır. Evren mekaniktir ve belli bir düzen (kozmos) içindedir. Bilimsel süreç evrimseldir. Bu yüzden gelecek yön belirlidir ve sistemlerin davranışları önceden kestirilebilir. Evrensel yasalar üzerinden hareket edilir. | Sistemler, hiyerarşik değildir. Etkileşim ve hareketlerle belirlenen heterarşik bir düzene sahiptir. Her şey birbiri ile ilintili olduğu için evren düzen değil karmaşa (kaos) içindedir. Bilimsel süreç devinimseldir. Doğanın koşullarından dolayı gelecek ve yön belirsizdir. Ancak olasılıklar bilinebilir. Duruma özgü bulgular üzerinden hareket edilir. |
| **Nedensellik İlişkisi** | **Karşılıklı Nedensellik İlişkisi** |
| Eğer parçalar arasında nedensellik ilişkisi biliniyorsa bu ilişkinin sonuçları da açıklanabilir. A, B'ye neden olur. | İlişkiler karşılıklı etkileşim içinde doğrusal olmayan bir nedensellik sergiler. Yani A ve B karşılıklı etkileşerek birlikte evrimleşir. |
| **Eğitime Yönelik Farklılıklar** | |
| **Pozitivizm** | **Post-Pozitivizm** |
| Nesnel bilgiye ulaşmaya çalışır. | Öznel bilgiye önem verilir. |
| Bilgi öğrenci tarafından keşfedilendir. | Bilgi öğrenci tarafından oluşturulandır. |
| Doğru kabul edilen evrensel yasaların öğretilmesi için öğretim yapılır. | Eğitim konularını derinliğine anlayabilmek için öğretim yapılır. |
| Bilgi gelecekte kullanılmak için öğrenciye edindirilir. | Bilgi, yeni bilgi öğretmek için öğrenciye edindirilir. |
| Bilgilenme, bilimin öğretmen tarafından öğrenciye aktarılmasıyla gerçekleşir. | Bilgilenme, bilim ve öğrenci arasındaki etkileşme sonucu oluşur. |
| Eğitimde sadece sayısal ve sözel zekanın gelişimi amaçlanır. | Eğitimde çok yönlü zeka gelişimi amaçlanır. |

(Yıldırım &Şimşek, 2011: s. 31; Özden, 2014: s. 7-10).

Çalışmamızda pozitivist ve post-pozitivist yaklaşım ayrımı, bilgi nesnesine bakış açısından bizi iki ayrı kutba yönlendirir. İlki pozitivist yaklaşımın belirlediği doğruların kişiye göre değişmediği nesnel bilgi kabulü diğeri ise doğruların kişiye göre değiştiği öznel bilgi kabulüdür. Bu yaklaşımları matematik felsefesi içinde de gözlemlemek mümkündür. Bilgiyi mutlak ve değişmez kabul eden pozitivist yaklaşımın bilgi nesnesine bakış açısını, matematik felsefesi içinde bilgiyi insana bağlı kılmayan realist yaklaşımın matematiksel nesne anlayışında gözlemlenebilirken diğer taraftan bilimsel bilginin mutlak olmadığını savunan post-pozitivist yaklaşımın bilgi nesnesine bakış açısını, matematik felsefesi içinde matematiği tarihsel süreçle evrimleşen matematikçilerin bir diyaloğu ve insanın bir etkinliği olarak yanlışlanabilir bilgi kuramı olduğunu savunan yarı-deneyimcilerin matematiksel nesneye yaklaşımında ve bununla birlikte bilginin özneye bağımlı olmasından ötürü Kant'ın belirlediği *sentetik a priori* bilgi nesnesinde gözlemlemek mümkündür. Bu ayrımı daha da genelleştirirsek çalışmamızda daha önce belirttiğimiz Celluci'nin sorularına geri dönmüş oluruz. "Matematiksel nesne insan zihninin bir ürünü müdür?" yoksa "Matematiksel nesneler zihinsel etkinliklerimizden ve kararlarımızdan bağımsız ve nesnel olarak var olan soyut nesneler midir?" Bu sorular iki farklı fikri açığa çıkarır. İlki matematiksel nesnenin insan zihninin etkinliği ve kararlarından bağımsız ve nesnel olduğu, diğeri ise matematiksel nesnelerin insan zihninin üretimine ve kararlarına bağımlı olduğu fikridir. Bunlardan ilkini pozitivist yaklaşım, diğerini post-pozitivist yaklaşım temsil ederken, matematik felsefesi içinde ilkini bilginin nesnelliğini gerçek dünyadan aldığını kabul eden Frege, ikincisini bilginin insan üretimi ve etkinliğine bağlı olduğunu açıklayan Kant ile bağlantılandırabiliriz. O halde biz çalışmamızın bundan sonraki kısmını bu bakış altında devam ettirebiliriz.

İnsanlığın yeni buluşlar karşısında gereksinmelerinin değişmesi felsefi anlamda paradigmaların değişimine sebep olmuş ve bu değişim diğer alanlarda olduğu gibi eğitimde yeni bakış açılarının gelişmesine önayak olmuştur. Bu yüzden, felsefenin bir kolu olan eğitim felsefesi içinde, felsefi akımlardan etkilenen eğitim teorileri oluşmuştur. Eğitim teorilerinin temellerini ve bakış açılarını belirleyen eğitim felsefesi akımlarını burada özetleyelim.

### 2.1.2. Eğitim Felsefesi Teorileri

Eğitim sürecinde, içerik, süreç ve çıktılarının oluşturulması, işlemesi ve değerlendirilmesi gibi süreçlerde, sosyoloji, psikoloji, siyaset, ekonomi vb. değişik disiplinlerden yararlanır. Felsefe ise bütün bu süreçlere ve ilişkilere bütüncül baktığı için felsefe ile eğitimin etkileşmesi kaçınılmazdır. Böylece eğitim felsefe etkileşiminin eğitim alanında uygulanışı eğitim felsefesi olarak görülebilir (Kazu'dan akt. Erkılıç, 2008: s. 3). Bu bakış açısıyla eğitim felsefesinin görevlerini şöyle özetleyebiliriz:

1. Farklı disiplin ve yaklaşımların eğitim alanına uyarlanmasında birlikteliğin oluşturulması;
2. Eğitimin, planlama, yönetim ve değerlendirilmesinde kılavuzluk edilmesi;
3. Eğitimin amaç, içerik ve değerlendirme süreçlerinde yol gösterici olması;
4. Sosyal, siyasal yapı ve eğitim programı uyuşumunun sağlanmasına katkıda bulunması ve bu hedefle eğitimin amaçlarını etkileyen ve belirleyen unsur olması (Erkılıç, 2008: s. 3).

Eğitim felsefesi kapsamında geliştirilen akımları, "daimicilik (*perennialism*)", "ilerlemecilik (*progressivism*)", "yeniden yapılandırmacılık ve inşacılık (*reconstructionism*)", "esasicilik (*essentialism*)" ve "politeknik eğitim" olmak üzere beş alt başlıkta toplamak olanaklıdır.

#### 2.1.2.1. Daimicilik

Daimicilik (*perennialism*) felsefesinin temelinde klasik realizm bulunur, ancak bu yaklaşım ayrıca idealist felsefeden de etkilenmiştir. Bundan dolayı tutucu, gelenekçi ve esnek olmayan bir felsefe olarak bilinir (Wiles ve Bondi'den akt. Erkılıç, 2008: s. 9).

Yukarıda matematiksel nesneye yönelik farklı bakış açıları irdelenirken, Platon'un idealizminin ve babası Aristoteles olarak görülen realizmin matematiksel nesne anlayışları daha önce verilmişti. Bu noktada da idealizmin ve realizmin eğitime yansımaları ana hatlarıyla ele alınacaktır. Bu, daimiciliğin dayanaklarını göstereceği gibi onun eğitim metotları hakkında da bilgi vermiş olacaktır.

#### 2.1.2.1.1. İdealizm ve Eğitim

İdealist bir eğitimde öğrenciler doğruyu aramaya teşvik edilir. Aranan bu doğruya göre yaşamak için insanların her şeyden önce doğruya ulaşmak istemesi ve bunun için çaba sarf etmesi gerekir. Bu eğitim biçimi, daha önce de kısmen belirttiğimiz gibi, kişiyi ideal olana yani "iyi", "doğru" ve "güzel"e yöneltmeyi amaçlar. Burada öğrenciler için eğitimin ana hedefleri:

1) Öğrencilerin doğuştan getirdikleri yetileri öğrenme süreçlerinde ortaya çıkarılmalı;
2) Öğrencilere bilmeleri, paylaşmaları ve kişiliklerini belirlemeleri için sosyal bir kurum olarak okul, kültürel mirası oluşturan değerleri öğretmelidir (Gutek, 2006: s. 26).

İdealistler, eğitim politikası gereği mesleksel eğitimin genel eğitime göre öncelikli bir konumda olmasına karşı çıkarlar. Bunu Platon'un *Devlet*'inde yukarıda bahsi geçen diyaloğun devamında görebiliriz:

> - Doğrusunu istersen, bu işler için birazcık geometri ve hesap bilmek yeter. Acaba bu bilimi daha derinlere götürmek bize başka kazançlar sağlar mı? Onunla "iyi" ideasını daha kolay görebilir miyiz? Bunu düşünmemiz gerekir. Bizim asıl aradığımız, ruhun en mutlu varlığın bulunduğu yere yönelmesi, değil mi?
> - Haklısın.
> - Geometri, bizi öz varlıkla karşılaşmaya zorluyorsa, yarar işimize. Yok, yalnız doğup ölen şeylerle yetiniyorsa, işimize gelmez (Platon, 2012: s. 246).

Bu diyalogdan da anlaşıldığı üzere idealist bir bakış açısıyla eğitim sadece ideal olana yaklaşmak için yapılır. Yoksa görülür olan düzeyinde kalmak eğitimin asıl amacı değildir.

İdealist bir eğitimde düşünme süreci temelde, öğrenen kişinin yaşadıklarına ve davranışlarına ilişkin olarak yaptığı içgözlem ve açıklamalara dayanır. Mutlak akıldaki evrensel doğrulardan dolayı herkeste bulunan doğrular vardır. Burada, aynı zamanda, bilgilerin "birbirini takip eden" ve "birikerek çoğalan" bir yapıda olduğu da kabul edilir. Öğrenenin kendini tanımlamasını sağlayacak içgüdü ve içgözlem yetileri uyarılır ve öğrenme içten dışa doğru gerçekleşmiş olur. Bu yüzden Sokrates'in kendi deyişiyle "ebelik"[7], çağdaş adıyla "Sokratik doğurtma yöntemi" idealist eğitim anlayışına uygun bir ders işleme biçimidir (Gutek, 2006: s. 28-30). Platon'un *Menon* diyaloğunda, anımsanacağı gibi, Sokrates bir köleye, onu sorunun çözümüne ulaştıracak sorular sorarak, bir geometri sorusu çözdürür. Bu yöntemde, kişinin, kendi içindeki zaten bilmiş olduklarından yola çıkarak yeni bilgiyi üretmesi sağlanır. İdealist bir eğitim modelini özetlersek:

1. Eğitim insandaki potansiyeli temellendirme ve geliştirme sürecidir.
2. Öğrenme, öğrencinin zihnindeki doğruları hatırlaması için uyarılma sürecidir.
3. Öğretmen bireyselliğin en iyi ve en yüksek ifade biçimi olan değerlerin taşıyıcısı olarak ahlaki ve kültürel bir model olmalıdır (Gutek, 2006: s. 33-34).

Platon'un matematiksel nesnelerin varlığını, duyusal şeyler ve ideaların dışında kabul ettiğine daha önce değinmiştik. Bu nesneler ezeli-ebedi ve hareketsiz olmaları bakımından duyusal nesnelerden ayırt edilebilirlerdi. Platon matematiği idealar ile duyusal şeyler arasında aracı olarak görüyordu ve bu bakımından matematiksel nesneler idealar ve duyusal şeylerin arasında yer alıyordu. Yani ona göre matematik nesneler insandan bağımsız, duyusal olanla idealar arasında bir gerçekliktir. Bundan dolayı biz bu görüşü kendi yaptığımız ayrıma göre değerlendirirsek idealist bir eğitim anlayışında matematiksel nesnenin, insan zihninin etkinliği ve kararlarından bağımsız olduğu savunulabilir. Bu durumda bu görüşe göre, matematik eğitimi içinde öğrenciler, matematik teoremlerini mutlak doğrular olarak görerek öğrenirler ve onları öğrenmenin idealara ulaşabilmenin bir yolu olarak değerlendirirler. Bilgiye ulaşma yolu olarak Platon'un "ebelik" yöntemi dediği hatırlama yöntemi kullanılacağı düşünebilir. Bu duruma öğretmen "ebe" görevini üstlenecek ve öğrencilere bilgiye ulaşabilmeleri (hatırlayabilmeleri) için sorular soracaktır.

[7] Sokrates'in bilinen yazılı eseri olmadığı ve onun görüşlerini Platon'un diyaloglarından öğrendiğimiz için, "ebelik" yönteminin Platon'a mı yoksa Sokrates'e mi ait olduğu bilinmemektedir.

#### 2.1.2.1.2. Realizm ve Eğitim

Platon'un mükemmel form ve düşüncelerin mutlak dünyası üzerine kurduğu felsefesinden sonra öğrencisi Aristoteles, olgular dünyasını araştırmak için gözlem yöntemini kullanmıştır. Ona göre gerçeklik tam ve mükemmelken, olasılıkta mükemmel olma potansiyeli bulunur (Gutek, 2006: s. 38-39).

Aristoteles'e göre eğitim ve öğretim bilgi demektir. Bilgi doğru ve her yerde aynı olandır. Bundan dolayı eğitim her yerde aynı olmalıdır. Herhangi bir ders tüm kişiler için hazırlanmalıdır. Eğer bir doğru her zaman aynı doğruysa belirli sosyal, siyasal ve ekonomik şartlar altındaki okulların yönetimsel detayları da aynı olacaktır. Aristoteles'e göre eğitim insanların mutluluğa (*eudaimonia*'ya) ulaşmalarını sağlayan bir araçtır. Eğitim süreci insanı mükemmelleştirir ve böylelikle tam/mükemmel akla sahip olan insan mükemmel insandır. Platon gibi Aristoteles de aritmetik ve geometri gibi "zihni mükemmelleştiren" eğitimi önemser (Gutek, 2006: s. 41-43).

Daha önce de belirttiğimiz gibi realizmde "gerçeklik" insandan bağımsız ve insanın dışında nesneler olarak vardır. Bundan ötürü bilmek, insan zihniyle, onun dışındaki dünyanın birbirini etkilemesi yoluyla bir nesne hakkında bilgi edinmektir. (Gutek, 2006: s. 45). O yüzden gerçekliği görebilmek için o gözlemlenir ve bu gözlemlerden sonuçlar çıkarılır. Gözlemci gerçekliğe ilişkin bir yapıyı keşfetmeye çalışan bir kâşif gibidir. Araştırmacı dikkatli bir araştırma ile nesnelerin yapılarını keşfedebilir ve onların birbirleriyle nasıl bir etkileşim içinde olduklarını bilebilir. Bununla da nesneler arası etkilerden ortaya çıkan kurallar oluşturulabilir. Realist bir ders programında kişiye gerçeği öğretecek en iyi ve etkili yol, o gerçeğin sistematik olarak düzenlenmiş bağıntılı disiplinler aracılığı ile araştırılmasıdır.

Realist okuldaki öğretimde, öğrenciye öğretmen tarafından bazı bilgilerin ve yeteneklerin kazandırılması hedeflenir. Öğretmen konular hakkında bilgili olan kişidir ve öğrencinin yeteneklerinin sınırlarını da bilir. Böylece öğretim, öğretmenin sahip olduğu bilgilerin öğrenciye aktarılması haline gelir. Bununla birlikte realist öğretmen öğrencileri öğrenmeye nasıl motive edeceğini de bilir. Aynı zamanda öğretmen, ders anlatma, tartışma veya deney ve gözlem gibi çeşitli yöntemleri bir arada kullanarak, öğrencinin önceki eğitimine, bilgi birikimine en uygun şekilde ders işler. İdeal bir öğretim yöntemi, uzmanların veya bilim adamlarının araştırma sonuçlarına dayalı olarak tespit edilmelidir. Kökenleri Aristoteles felsefesine dayanan bu eğitimin ana hedefi, bilgiyi kullanmak, bilgiyi keşfetmek ve onu başka alanlara transfer etmektir (Gutek, 2006: s. 44-56).

Modern realizmde sayı türünden nesnelerin gözlemle doğada bulduğumuz, varlığı bizden bağımsız nesneler olduğuna daha önce değinmiştik. O halde yaptığımız ayrım açısından bu görüşe göre matematiksel nesneler insan zihninin etkinliği ve kararlarından bağımsız ve nesneldir. O halde bu görüşte bir matematik eğitiminde gözlem yolu ile herkes için geçerli olan mutlak doğrular bulunmaya, keşfedilmeye çalışılır. Söz konusu eğitim olduğunda belli başlı kabullerin geçerli olması için öğretim teorilerinin öğretim sürecini belirleyecek görüşler ileri sürmesi gerekir. Daha önce de belirttiğimiz gibi eğitimin bilgi nesnesine bakış açısı ve bilgi nesnesine ulaşma biçimi olarak iki unsuru vardır. Realist bilgi anlayışı gözlem ile bilgiye ulaşılabileceğini savunur fakat özellikle aritmetik üstü teoremlerin doğada gözlemle bulunamayacağı aşikârdır. Ancak kavramlar arası bir gözlem gerekir. Yani matematiksel nesnelerin gerçeklikleri realizme göre kabul edildikten sonra bu nesneler arasındaki bağlantıların gözlemi sonucu akıl yürütme ve çıkarımlar ile yeni nesneleri üretimi söz konusu olur.  Bu durumda diyebiliriz ki realist eğitim anlayışındaki reel gerçekliğe dair gözlemlerin yapılabilmesi, ancak matematiksel nesnelerin reel gerçekliği kabul edilerek olanaklı olur. Daha önce söylediğimiz gibi Platoncu görüş, matematiksel nesnenin reel gerçekliğini kabul ettiğinden matematik felsefesi içinde günümüzün birçok yazarı, bu görüşlerin birini, diğerinin yerine kullanıldığını hatta Bernays'in, realist olduğu kabul edilen Frege'nin aritmetiği saf mantıktan türetme girişimini mutlak Platonculuk olarak değerlendirdiğini ifade etmiştik. Buradaki realizm sadece Aristoteles'in kastettiği reel dünyanın yani duyulabilir olanın gerçekliğinin kabulü üzerine değildir. Bu görüşe göre matematiksel nesneler insandan bağımsız kendi başlarına tıpkı idealar gibi zaman, zihin ve dilden bağımsız bir şekilde varlığını sürdürebilir olması dolayısıyla Platoncu bir yöne sahiptirler. Bundan dolayı Platoncu realizm, realist anlamda Platonculuk gibi ifadelerle adlandırılmıştır. Bu bakımdan daimicilik eğitim felsefesi, matematik felsefesi içindeki mutlak Platonculuk veya realist bakış açısı ile bilgiye bakışı açısından aynılaşır. Bu eğitim görüşü bilginin mutlak ve herkes için geçerli doğruluklar olarak kabul edilmesi açısından öğretim teorilerinden davranışçılığa temel olmuştur.

#### 2.1.2.2. İlerlemecilik

İlerlemecilik (*progressivism*) felsefesi özünde pragmatik felsefeye dayanır ve değişim ile gelişim odaklıdır. Kökleri 18. yüzyıl Aydınlanma dönemine kadar uzanan eğitim felsefesi teorisi, dönemindeki geleneksel eğitimin tutuculuğuna, aşırı disiplin ve dayatmacılığına bir tepki olarak doğmuştur. Bu akımın savunucuları arasında bulunan ve pragmatik kuramın öncülerinden olan John Dewey (1859-1952) *Yarınların Okulları* kitabıyla dönemin geleneksel eğitimine karşı çıkar. İlerlemeciler, değişimi denetleyerek toplumu yeniden yaratmayı, demokrasiyi egemen kılmayı hedeflerler. Onlara göre demokrasi ve yardımlaşma birbirini tamamlayan unsurlardır. Çünkü ideal demokrasi tecrübelerin paylaşımı olduğundan, demokrasi, eğitim ve büyüme birbirleriyle ilişkilidir. Öğrenciler herhangi bir ideolojinin esiri olarak değil özgürce ve demokratça yetiştirilmelilerdir. Yaşamı öğrenme ise deneme ve yanılmalarla mümkündür. Birey yaşantılar yoluyla kendini gerçekleştirebilir. Bununla birlikte klasik içerik reddedilmez ama sürekli geliştirilmeli ve yeniden düzenlenmelidir (Erkılıç, 2008: s. 12; Arslanoğlu, 2012: s. 129-130).

> İlerlemeciliğin şu temel ilkelere dayandığı söylenebilir:
> • Eğitimin amacı bireyi yaşama hazırlamak değil; eğitim sürecinin yaşamın kendisi olmasıdır.
> • Öğrenme süreçleri çocuğun ilgileriyle ilişkili olmalıdır. Problem çözme yoluyla öğrenme izlenmelidir.
> • Öğrencilerin eğitim etkinliklerinin merkezinde yer almaları amaçlanır.
> • Anlamlı bilgi, kendisiyle bir şey yapılabilen bilgidir.
> • Bireyin gelişimine en uygun ortam demokratik ortamdır.
> • Öğrenci eleştiri ve özeleştiriye açık yetiştirilmeli ve eğitim süreci demokratik olmalıdır.
> • Öğretimin amaçları öğretme ve öğrenme süreçleri öğrencilerin çıkar ve ilgilerine göre oluşturulmalıdır.
> • Öğretmenin görevi yönlendirmek değil, öneride bulunmaktır. Öğretmen eğitim sürecinde rehberlik, yol göstericilik ve kılavuzluk rolleri yüklenir
> • Okul bu havayı yaşatacak biçimde düzenlenmelidir.
> • Okul rekabetten çok; işbirliğini teşvik edici olmalıdır (Erkılıç, 2008: s. 12).

Bu felsefe kimilerince hayalci olmakla eleştirilmiştir. Onlara göre okul özel amaçlar için oluşturulmuş yapay bir ortamdır. Okulların gerçek yaşam yerine geçmesi oldukça güç olduğundan, bunun uygulanması pek mümkün görünmemektedir. Fakat Dewey'nin 1930'lu yıllarda Türkiye'ye geldiği ve Köy Enstitülerinin teorisyeni olduğu da bilinmektedir. Dünyada tek ve biricik olan bu girişim, yarattığı geniş yankıyla hala tartışılmaktadır (Erkılıç, 2008: s. 13).

Bu felsefe pragmatist bir bakış açısıyla toplumun ihtiyaçlarına yöneldiği için bireyi ön plana çıkarmış ve onun etkinliği ve üretimini önemsemiştir. Bu yüzden bilgiye bakış açısında bilgiyi insan zihninin bir ürünü ve insanın öznelliğine ait olduğu görüşü benimsemiştir. Bu bakış açısı matematik felsefesi içinde matematiği matematikçilerin bir etkinliği olarak değerlendiren yarı-deneyimciliğin kabullerinde görebiliriz. Bu bakımdan ilerlemecilik eğitim felsefesi görüşünün bu kabullerini daha sonra değineceğimiz yapılandırmacılığın temel felsefi kabullerinde görmek mümkündür. O halde bu eğitim felsefesinin matematik eğitimi açısından yapılandırmacılık başlığı altında değerlendirebiliriz.

#### 2.1.2.3. Yeniden Yapılanmacılık ve İnşacılık

Yeniden oluşturmacılık (*reconstructionism*) felsefesi, Amerika'nın 1929'daki ekonomik bunalımından sonra ortaya çıkan yeniden yapılanma ihtiyacından dolayı geliştirilmiştir. Yeniden yapılanmanın en iyi yolu eğitimi yapılandırmaktı. İdeolojik olarak modern liberalizmden ve yazılmış ütopyalardan etkilenmiş olan yeniden yapılanmacılığın temelleri pragmatik felsefeye dayanır. İlerlemecilik felsefesi ile benzerliklerinden ötürü bir bakıma ilerlemeciliğin devamı olarak görülebilir. Dewey 1920'de *Felsefede Yeniden Yapılanma* eserinde bu kavramı kullanır (Erkılıç, 2008: s. 13; Arslanoğlu, 2012: s. 136). Yeniden oluşturmacılık o zamana kadar gelen eğitim felsefelerini şu noktalarda eleştirmiştir:

- Geleneksel olarak tüm yaklaşımların eğitimi psikolojik yaklaşımla ele almaları eksik bir anlayıştır. Çünkü eğitim antropolojiye dönük olmalıdır.
- Eğitime aktarmacılık işlevi yüklenmemelidir. Çünkü toplumun ve bireyin yaratıcılığı önemsenmeli eğitimin toplumsal ve bireysel kazanım odaklı olması beklenmelidir.
- Toplum dinsel, kültürel, ekonomik, sosyal vb. tüm alanlarda sürekli değişim içindedir.

- Temelde dayanılacak hiçbir mutlak bulunmadığı için temel olarak toplumun kültürel ve sosyolojik yapılandırılması amaçlanmalıdır (Erkılıç, 2008: s. 13).

Amacı yeni bir sosyal düzen oluşturmak olan yeniden yapılandırmacılık, öğretmenin tamamen nesnel olması gerektiğini savunan eğitim kuramlarına karşı çıkmıştır. Bu yaklaşıma göre eğitim kapsamında belirli inanç ve değerler bulunmalıdır. Eğitimin amaçları, hedefleri, konuları ve yöntemleri belirli ölçütler ile belirlenir. Bu bağlamda okulun tamamıyla tarafsız olduğu ve aynı zamanda bütün gerçekliği içerdiği iddia edilemez. Eğitimcilerin temel görevi, okulu yönlendiren temel ilke ve kabulleri aydınlatmak olmalıdır (Gutek, 2006: s. 349). Bu eğitim biçimi, eğitim alanında kullanılabilecek geçerliliğe sahip yüksek bulguların bulunmadığı ve bu nedenden ötürü antropolojik değerlerin kullanılmadığı konusunda eleştirilmiştir. Aynı zamanda eğitimin bir altyapı kurumu olmasına rağmen ekonomiden bağımsız bir toplumu yeniden yapılandırmaya yetmeyeceği konusunda da eleştirilmiştir (Erkılıç, 2008: s. 14).

Bütün sosyal sistemler kendilerini yenileyebilmek ve değişen koşullara ayak uydurabilmek zorundadır. Çünkü ancak bu şekilde etkililiklerini ve varlık sebeplerini sürdürebilirler. Koşullara uyum sağlayamayanlar ise çökmeye mahkum olurlar. Bu yüzden değişim/dönüşüm zamanlarında ekonomik, sosyal ve kültürel kurumlar kendilerini yenileyerek, değişip çeşitlenen gereksinimlere ve oluşan yeni beklentilere karşılık vermek durumunda kalırlar (Özden, 2014: s. 11). Türkiye'de ise 1980'li yıllardan itibaren genel olarak bir "yeniden yapılanma" ihtiyacından söz edildiği bilinmektedir. O tarihten beri eğitim ve diğer alanlarda özel sektör ve kamu kuruluşları yeniden yapılanarak değişen ihtiyaç ve beklentilere daha etkili bir şekilde karşılık vermeyi denemektedirler. "Yeniden yapılanma, sistemin değişen ihtiyaç ve beklentiler karşısında yapısal değişiklikler yaparak işlevselliğini sürdürme, ayakta kalma çabasıdır." (Özden, 2014: s. 11-12).

Bu eğitim felsefesi ilerlemeciliğin devamı olarak görüldüğü için bilgiye bakış açısı bakımından onunla arasında bir paralellik kurulabilecek ve orada kabul edilen bilginin insan zihninin bir ürünü olduğu fikri burada da kabul görecektir. Bu görüşten etkilenen öğretim teorileri, toplumun temel ihtiyaçları doğrultusunda yeniden şekillenebilecektir. Günümüzde bu eğitim felsefesi görüşünden etkilenen öğretim teorisyenlerinin teknoloji ve sanayi odaklı öğretim teorileri geliştirdiği gözlemlenmektedir. Bu teoriler özellikle günümüz ihtiyaçlarına karşılık verecek şekilde iktisadi hesaplamalar ve olasılık hesaplarını matematik eğitimi müfredatları içinde bulunmasını önemsemiş bu anlamada teknolojiye ayak uydurabilen hesaplamalar ve tahminler kurabilen öğrencilerin yetiştirilmesini önemsemişlerdir.

#### 2.1.2.4. Esasicilik

Esasicilik (*essentialism*) felsefesi, 1930'larda, bir felsefeye dayanmaktan çok bir eğitim hareketi olarak çıkmış ve daha çok realist felsefeden etkilenmiştir (Erkılıç, 2008: s. 10; Arslanoğlu, 2012: s. 132). Bu eğitim hareketi, Amerika'da 1938'de kurulan Ulusal Eğitim Birliği tarafından, Amerika'daki ilkokul öğrencilerinin bilgi düzeyinin düşük olması, yüksekokul öğrencilerinin temel konulardaki eksiklikleri, okuma yazma bozuklukları ve aritmetikteki yetersizliklerinden dolayı başlatılmıştır. Bu olumsuz durumun nedenleri ise şöyle ifade edilmiştir:

1. İlerlemeci bakışlı eğitim teorilerinin özü, temeli zayıflatması;
2. Okullardaki akademik standartların gevşetilmesi.

Bu bağlamda ilerlemeciler, çocuğun özgürlüğüne, ilgilerine ve oyuna çok fazla önem verip; gösterilmesi gereken çaba ve çalışmayı ihmal ettikleri için eleştirilmişlerdir (Gutek, 2006: s. 290).

Bu görüş çerçevesinde, okulun temel görevi çocuğa bağımsız gerçekliğin öğretilmesidir. Öğrenme güçtür ve bu yüzden disiplinli çalışmayı gerektirir. Bundan ötürü de okul zihinsel disiplinin geleneksel yöntemlerini devam ettirmelidir. Eğitimde girişim öğrencide değil öğretmendedir. Öğrenmenin özü ise belirlenmiş bir içeriğin özümlenmesi ve kavranmasıdır. Bu bakış açısı ile esasicilik eğitim uygulaması katı, kuralcı, disiplinci ve gelenekçidir. Bunun sonucu olarak öğretmen odaklı aktarmacı bir yöntem gelişmiştir. Öğrencinin problem çözme becerileri geliştirilmezken ezberin ve tekrarın üzerinde durulması tutuculuğu oluşturmuştur. Sınıf ve okul yönetiminde sürekli denetim ile ölçme ve değerlendirmede gelenekçi anlayış hâkim olmuştur (Erkılıç, 2008: s. 11). Esasiciliğin katı disiplini ve öğretmenin konu odaklı salt var olanı anlatımıyla gerçekleşen eğitimi, demokrasi için zorunlu bulunan özgür davranmayı ve eleştirel düşünmeyi engelleyeceği ve öğrencilerin güdülenmesini olumsuz yönde etkileyebileceği için eleştirilmiştir (Erkılıç, 2008: s. 11).

Bu eğitim felsefesi ilerlemeciliğe bir tepki olarak doğduğu için bilgiye bakış açısı bakımından onun tersi bir tutum takınmıştır. Yani realist bir tavırla bilgi öğretmenin denetiminde öğrencinin üretiminden bağımsız, öğrenilmesi gereken bir bütün olarak görür. Bu yaklaşım öğretim teorilerinden davranışçılığı belirleyecektir. Bu çerçevede matematik eğitimi açısından düşünüldüğünde ise matematik bilgileri öğrenci zihninin üretiminden bağımsız mutlak doğrular olarak vardırlar.

#### 2.1.2.5. Politeknik Eğitim

Politeknik eğitim, diyalektik materyalist felsefeye dayanmış ve genel olarak reel sosyalist ülkelerde uygulama olanağı bulmuştur. Temelinde madde ve onun doğurduğu çelişki yatar. Bu eğitimin temsilcileri Diderot, Holbach, Marx ve Engels'tir. "Eğitimin genel amacı insanlar arasında barışı, kardeşliği ve adaleti sağlayarak sömürüye son verilmesine katkı vermektir" (Türkoğlu'ndan akt. Erkılıç, 2008: s. 14).

Yaşam boyu eğitimi, bilimselliği, demokratikleşmeyi, üretim için eğitimi ve çok yönlü gelişimi ilke edinmiş olan politeknik eğitim, diyalektik materyalist felsefeye dayandığı için üretim içinde çok yönlü bir gelişimi amaçlar (Sönmez'den akt. Erkılıç, 2008: s. 14).

Politeknik eğitim şu temel ilkeleri benimsemektedir:

- Uygulama ve kuram arasındaki bütünlük sağlanmalıdır.
- Okul bir endüstri kurumu gibi üretim merkezi olmalıdır.
- Kolektif bilincin oluşturulması için birlikte çalışma ve üretimde
- bulunma etkinliklerine yer verilmelidir.
- Kişilik eğitimi önemsenmelidir.
- Diyalektik akıl yürütme öğretilmelidir.
- İdeolojik eğitim yapılmalıdır.
- Beden ve sanat eğitimi yapılmalıdır.
- Politeknik eğitimde ölçme ve değerlendirme öğrencinin diyalektik akıl yürütmeyi kullanıp kullanmadığı, üretime katkısı, kolektif çalışma gücü ve topluma katkısı gibi konuları içermektedir (Erkılıç, 2008: s. 14).

Bu anlayış daha sonraları tüm Batı ve Doğu toplumlarında destek bulmuştur. Fakat kapitalist toplumlarda politeknik eğitim Marksist değil, genelde uygulama ağırlıklı iş eğitimi odaklı eğitim süreçleri olarak gerçekleşmiştir (Erkılıç, 2008: s. 14).

Bu felsefi bakış açısı matematik eğitimi açısından özelleşmemiş, eğitimin geneline odaklanmış ve ideolojik eğitimi önemsemiştir. Fakat kuram ile uygulama arasında sıkı bağların kurulduğu bu çerçevede, öğrencilerin matematiği bir teoriler bütünü olarak görmemelerini hedefler olarak yorumlanabilir. Eğer bu görüş matematik eğitimi açısından değerlendirilirse varlığı kabul edilen reel dünyanın bilgisine öğrencilerin gözlemle keşfetmelerine imkân tanıyarak matematik nesneye ulaşılabileceği düşünülebilir. Çünkü bilgi nesnesinin insan üretiminden bağımsız bir gerçeklik olarak kabul eden maddeci bu görüşte öğrencinin öğreneceği kavramlar ile günlük yaşamın bağlantılarının diyalektik biçimde kurularak ve bu bağlantıları öğrencinin keşfine imkân tanıyarak oluşması beklenir.

### 2.1.3. Öğrenme Teorileri

Bilginin nasıl oluştuğu konusunda mutlak bir uzlaşı olmadığı gibi öğrenmenin nasıl olduğu konusunda da mutlak bir uzlaşı yoktur. Buna karşın bilginin açıklanmasına paralel olarak öğrenme teorileri de geliştirilmiş ve bazı ortak açıklamalar yapılabilmiştir. Örneğin öğrenme yaklaşımları, öğrenmeyi, davranış değişikliği olarak görmüşlerdir. Bazı yaklaşımlar, öğrenmenin, dıştan gelen etkilere verilen tepkilerle, bazıları ise bireyin çevresi ile aktif etkileşiminin sonucu gerçekleştiği fikrinde birleşirler (Baki, 2014: s. 166). Bunlarla ilişkili olarak da birçok öğretim teorisi ortaya atılmıştır. Bu öğretim metotlarının başlıcaları; etki-tepki prensibine dayanan "davranışçı yaklaşım"; etkiye karşı davranışın daha detaylı ve bütüncül olarak incelenmesi gerektiğini savunan "bütünlükçü yaklaşım (*Gestalt*)"; davranışın pasif olmadığını, özümseme ve uyarlamayla bilişsel süreçlerle gerçekleşebildiğini savunan "bilişsel gelişmeci yaklaşım"; kısa süreli bellekten uzun süreli belleğe geçişin nasıl mümkün olduğunu açıklayan "bilgi-işlemci yaklaşım"; öğrenmenin motivasyonunu ve amacını vurgulayan "işlevselci (fonksiyonalist) yaklaşım"; bilginin insandan bağımsız olmadığını ve onun kişinin kendisi tarafından üretildiğini savunan "yapılandırmacı yaklaşım (*constructivism*)" olarak sayılabilir (Baki, 2014: s. 166-177). Fakat biz çalışmamızda genel olarak bilgi nesnesine, özel olarak matematiksel nesneye bakış açılarını yakalayabilmek için öğretim kuramlarından "davranışçı" ve "yapılandırmacı" teorilerin üzerinde karşılaştırmalı olarak duracağız. Bunun nedeni, daha önce de değindiğimiz üzere çalışmamız gereği bilgi nesnesinin neliğine dair bakış açılarını iki başlık altında incelememizdir. İlki matematiksel nesnenin insan zihninin etkinliği ve kararlarından bağımsız ve nesnel olduğu, diğeri ise matematiksel nesnelerin insan zihninin üretimine ve kararlarına bağımlı olduğu görüşünü ortaya koymaktaydı. Matematik eğitimi teorilerinin yirminci yüzyılda geliştirilmeye başlandığı, bununla birlikte matematik eğitiminin uygarlıklar tarihi ile başlatılabileceği düşünüldüğünde sadece matematik eğitimi teorilerini incelemek bu anlamada yetersiz kalacaktır. Bu yüzden çalışmamızda genel olarak eğitim felsefesi yaklaşımlarından etkilenen öğretim teorilerinin matematik eğitimine yansımalarını belirleyerek, bu teorilerin bilgiye bakışları ekseninde matematiksel nesneyi nasıl kavradıkları tespit edilmeye çalışılacaktır. Bu hedefle tarih içinde en uzun süre kullanılan ve kökenleri realizme dayanan "davranışçı" yaklaşımla, bilgi nesnesini açıkça ortaya koyan, günümüzde pek çok ülkede 2005'ten itibaren kullanılan ve felsefi dayanaklarını post-pozitivizmden alan "yapılandırmacı (*constructivist*)" yaklaşım üzerinde durulacak ve bu iki kuram arasındaki farklılıklar karşılaştırılarak netleştirilecektir.

#### 2.1.3.1. Davranışçı Yaklaşım

Davranışçılar, canlıyı etkileyen dış uyarıcılara karşılık verilen tepkiler sonucu davranışların oluştuğunu varsayarlar (Baki, 2014: s. 166). Öğrenme ise uyarıcı ile davranış arasında bir bağ kurularak gerçekleşir (Özden, 2014: s. 21). Organizmayı harekete geçiren ses, ışık, resim, koku gibi iç uyarıcıların yanı sıra biyolojik, fizyolojik, psikolojik, vb. iç uyarıcılar da davranışı etkiler (Baki, 2014: s. 166). Davranışçı kuramların en bilineni Ivan Pavlov'un (1849-1936) köpeklerin salgı sistemi üzerine yaptığı çalışmalarda, köpeğin sadece yiyecek getirildiğinde değil, yiyeceği kendisine getiren kişiyi gördüğünde de salgı salgıladığını fark etmesi üzerine geliştirdiği *klasik koşullanma*dır. Öğrenmeyi bu türden bir tepki olarak açıklayan Guthrie, öğrenmedeki tüm zihinsel öğeleri reddederek, öğrenmenin sadece uyaran ve tepki arasındaki ilişkiden ibaret olduğunu dile getirmiştir (Özden, 2014: s. 21).

Uyarıcı-tepki-pekiştireç döngüsüne bağlı klasik koşullanmada insanlar daha çok korkma, kaygı duyma, sevme veya bağlanma gibi duyuşsal davranışları öğrenebilir. Fakat yüksek düzeyde zihinsel faaliyet gerektiren karmaşık bilgilerin öğrenme süreçlerini bu şekildeki klasik koşullanma ile açıklayamayız. Davranışçı yaklaşımın diğer bir öğrenme kuramı *edimsel koşullanma*dır. Bu kuram, Edward Thorndike'ın (1874-1949) kalıcı öğrenmenin nasıl gerçekleştiği üzerine kedilerle yaptığı deneylerden hareket eden B. Frederic Skinner (1904-1990) tarafından ortaya konmuştur. Bu kurama göre öğrenme, koşullanma ve model alma olarak açıklanmıştır. İnsanlar yeni davranışı eski davranışın sonucuna göre düzenler. Bu görüşe göre, insanlar, aynı koşullar altında aynı davranışı gösterebilirler. Örneğin olumlu sonuçlar alındığında olumlu davranış devam ettirilirken, olumsuz sonuçlar alındığında ise o davranıştan uzaklaşılır. Aynı şekilde birey gözlem ve taklit yoluyla da öğrenir; etrafındaki olumlu sonuçlarını gözlemlediği olumlu davranışları taklit ederken olumsuzları taklit etmez. Taklit yoluyla kazanılan davranışlar çok kez tekrarlandığında mükemmellik kazanır, pekiştirilir. Bu öğrenme biçiminde olumlu sonuçlar pekiştireçler olarak kullanılır ve öğrenim için gerekli koşulları oluştururlarken (Baki, 2014: s. 167), kişinin bilişsel süreçleri ihmal edilir. Çalışmamız bağlamında, matematiksel nesneye bakış açısını anlayabilmek için davranışçı yaklaşımın bilgiye bakışını incelememiz gerekmektedir. Davranışçılığın bilgi, gerçeklik, doğruluk ve öğrenmeye ilişkin temel savları hakkında eğitim bilimci Bünyamin Yurdakul şu tabloyu oluşturmuştur:

Tablo 2.2. Davranışçı Yaklaşımın Temel Savları (Yurdakul'dan akt. Aydın, 2012: s. 110).

| **Değişkenler** | **Davranışçılık** |
|---|---|
| Bilgi | · Bireyden bağımsızdır.<br>· Bilişin dışında nesnel bir gerçekliktir.<br>· Dış dünyada hazır ve birey tarafından erişilebilir niteliktedir.<br>· Dış dünyanın kopyası ya da bir kişiden diğerine geçen edilgen bir emilimdir. |
| Gerçeklik | · Ontolojik bir gerçeklik söz konusudur.<br>· Dış dünya ile iç dünyanın (bilişin) ayrımıdır. |

| | |
|---|---|
| Doğruluk | • Deneysel süreçlerle elde edilen ve bireyden bağımsız nesnel olarak indirgenen sonuçlardır. (Evrensel tek doğru)<br>• Mükemmel bilgiyi oluşturmaktadır. |
| Öğrenme | • Dış dünya gerçekliğinin bireye aktarımıdır.<br>• Var olan nesnel bilgilerle bilir hale gelmektir.<br>• Gerçekliğin baskısı altındadır.<br>• Doğrudan öğretimle gerçekleşir.<br>• Belirli bir bilgi birikiminin öğrenilmesine ve her birimin bir sonrakini nasıl etkileyeceğinin mekanik olarak kestirimine dayanır.<br>• Sınırlı etkinlik dizgelerinin ve maniple edilmiş sınırlı yaşantıların tasarımıyla bilgi birikiminin birbirinin üzerine kurulmasıyla oluşur. |

Burada dikkat edilmelidir ki, bu yaklaşım çerçevesinde öncelikle hayvan deneylerinden yola çıkılarak bir öğrenme teorisi kurulmuştur. Edimsel koşullanmaya göre insan, bilgiyi üreten değil, var olan bilgiyi gözlem, tekrar ve pekiştireçlerle edinendir. Bu yüzden de insan, pasif alıcı olarak kurulmuştur. Bilgiyi üretmeyecek olan insan doğal olarak onu dışarıda bulacak ve reel dünyanın gerçekliğini kabul edecektir. Öğretmen ise dışarıda var olan mutlak bilgiyi öğrenciye aktaran olacaktır. Bilginin mutlak oluşu, onun insan üretiminin dışındaki gerçeklikte var olmasında aranabilir. O halde, davranışçı yaklaşımda, bilginin ontolojik dayanağı gerçek dünya iken, epistemolojik dayanağı ise evrenselci-nesnelci, pozitif bilim anlayışıdır; buradaki nesnelciliğe ise realizm dayanak olmaktadır.

Çalışmamızın bu bölümünde birbirinden ayırt ettiğimiz iki bakış açısı bakımından davranışçılığı yorumlarsak, bilgi nesnesinin insan zihninin üretiminden bağımsız bir şekilde gerçeklik alanında bulunduğunu kabul ettiği için, onun felsefi dayanakları realizmin kabulleri olacaktır. Eğitim felsefesi dayanaklarını ise bu çerçevede gerekçelerini daha önce de dile getirdiğimiz üzere daimicilik ve esasicilik oluşturmaktadır. Davranışçı yaklaşım ile yapılan bir matematik eğitimi, matematik teoremi ve kavramlarını bilen öğretmenin bilgiyi almaya hazır bekleyen öğrencilere bilgisini aktarması ile gerçekleşir. Öğretmen öğrenmenin gerçekleşmesi için sürekli tekrarlar ve alıştırmalar yaparak öğrencilere pekiştireçler verir. Böylece öğrenci yeni alacağı bilgiyi benzer alıştırmalar ile pekiştirir. Fakat bütün bu süreçler içinde matematik kavramlarının derinlemesine irdelenmesi, yani diğer kavramlarla olan bağlarının ortaya çıkarılması ve bu bağlar aracılığı ile öğrencilerin yeni hipotezler ve teoremler kurması pek mümkün olmaz. Üstelik diğer kavramalarla ilişkilendirilmeden öğrenildiği ve pekiştirildiği düşünülen bilgilerin kalıcılığı bir sorun olarak ortaya çıkar. Çünkü bilginin kalıcılığı, öğrencinin öğrendiklerinin diğer kavramlarla bağlarını kurmasıyla olanaklı olacaktır. Bu ise o bilgi nesnesinin taşınabilirliği demektir. Yani öğrenilen bir kavram sayesinde başka bir kavrama ulaşılması ve bu yeni kavramı oluşturan alt kavramların öğrenciler tarafından fark ediliyor hatta onlar tarafından yönlendiriliyor olması, o bilgi nesnesinin bir kavram içinden başka bir kavram altına taşınabildiğini gösterecektir. Öğrenci bu taşıma işlemi ile yeni kavrama ulaştığında kavram kendinden uzaklaşarak onun için taşınabilir bir nesne olduğu düşünülebilir. Bunu matematiksel kavramların matematiksel nesneleşmesi olarak yorumlayabiliriz. Davranışçılıkta öğrenci bilgiye kendi ulaşmadığı için matematiksel kavramlar kendi için taşınabilir birer nesne değildir. Bu yaklaşımda matematiksel nesne, insan üretiminden bağımsız ve nesnel olmasının yanı sıra öğretmenin güdümünde taşınabilir bir nesne olarak da tanımlanmakta, öğrencilerin bu taşıma işlemi sürecinde ise pasifliği kabul edilmektedir.

Bu yaklaşımın matematik felsefesi ile bağlarına daha sonra değinilecektir.

#### 2.1.3.2. Yapılandırmacı Yaklaşım

20. yüzyılın ortalarından itibaren, eğitim bilimlerinde evrenselci-nesnelci pozitivist bilim anlayışının ürünü sayılan davranışçı yaklaşım eleştirilmeye, tekilci-öznelci ve post-pozitivist yeni bilim anlayışına uygun öğrenme yaklaşımları ileri sürülmeye başlanır. Bu yaklaşımların en ünlüsü yapılandırmacılıktır (*constructivism*); o, bilime ve bilimsel yönteme ilişkin görüşleri açısından tekilci-öznelci bilim anlayışını felsefi zeminde savunmaya yönelen post-pozitivist bir temele sahiptir (Aydın, 2012: s. 9). Pozitivist yaklaşımın nesnel bilgiye odaklandığını ve bilginin mutlak olduğunu savunduğunu daha önce belirtmiştik. Baki'ye göre, nensel bilgiye odaklanan mutlakçılar, sürecin başlangıcıyla değil, çıkarsamalarla, son şekli verilen bilgiyle ilgilenirler. Onlar, insan emeğinin bir ürünü şeklinde oluşan bilgiyi matematik felsefesinin meselesi kabul etmezler. Onlara göre bu en fazla psikolojinin ve sosyal bilimlerin meselesi olabilir. Sezgiciler ise başlangıçta mutlakçı bir arayış içinde

olmalarına rağmen (çalışmamızda “sezgiciler”i mutlakçı felsefe okulları arasında saymıştık), bu konuda biçimci ve mutlakçılardan ayrılırlar. Bu ayrılış ise matematikte yapılandırmacılığın oluşmasına yol açmıştır. Yapılandırmacıları mutlakçılardan ayıran en önemli nokta, yapılandırmacıların bilginin oluşumu konusunu bir ölçüt olarak kabul etmeleridir. Onlar mutlakçıların tersine bilginin insanda yapılandırıldığını iddia ederler. Bu anlamda yapılandırmacılık bilen insanı, bilmeye çalışan insanı ve dolayısıyla öznel olsa da bilginin oluşumunu dikkate alır. Bunun yanı sıra, daha önce de ifade ettiğimiz gibi, günümüzün matematik felsefesi akımlarından yarı-deneyimciler de bilginin nasıl büyüdüğü ve nasıl geliştiği sorusunu tartışmalarının odağına almışlardır. Onlara göre bilgi kuramı sadece durağan formülleştirmeye yoğunlaşır ve dinamik yönü göz ardı ederse bilgi yeterince açıklanamamış ve tüm çerçeve gerektiği kadar aydınlatılamamış olur. Yani, bilgi kuramı (epistemoloji), bilginin özüyle, bilginin doğuşu, değişimi ve gelişimiyle ilgilenmek zorundadır. Bu anlamda yarı-deneyimciler bilginin sadece tanımlanmış son haline bakan mutlakçı yaklaşımları eleştirmektedirler (Baki, 2014: s. 27-28). Baki’ye göre, “Locke ve Kant gibi geleneksel filozoflar, bilgi kuramının genel ilgi alanlarının meşruluğunu ve gerekliliğini kabul ederken; Dewey, Wittgenstein, Kuhn ve Lakatos gibi modern filozoflar da bilgi kuramının ilgilendiği bilginin doğuşu, değişimi ve gelişimi aşamalarını önemli görmektedirler.” (Baki, 2014: s. 28). Yarı-deneyimciler, matematiği soyut ve ayrık bir bilim olarak gören mantıkçıların aksine bilgiyi süreklilik gösteren bir ürün olarak görürler. Onlara göre matematiksel bilgi sadece fen bilimlerinde olduğu gibi deney ve çıkarsama yoluyla ortaya çıkmaz. Onlar, matematiksel bilginin insan emeğinin ve sosyal etkileşim sürecinin bir ürünü olarak oluşumuna dikkat çekip, matematiği sosyal bilimlerden ayrı tutmazlar. Böyle olması matematik felsefesi alanını daraltmaz. “Bu yönüyle özellikle sosyal yapılandırmacılar ve dilbilimin geleneklerinin matematiksel bilginin oluşumunda etkisi olduğuna işaret eden gelenekselciler de benzer pozisyon alırlar” (Baki, 2014: s. 28-29).

Yapılandırmacılık, aslında sadece bir öğrenme kuramı değildir; içerisinde pek çok alt anlayış barındırmaktadır. Fakat yapılandırmacılığın tüm türleri, nesnel gerçekliğin bilinemeyeceği ve bilginin göreceli olduğu konusunda birleşmektedir. Bu yüzden onlar bilginin nesnelliği, evrenselliği ve bu ikisine dayanan üst anlatılara ve bilimin egemenliğine karşı çıkmaktadırlar (Aydın, 2012: s. 48). “Üst anlatı (*meta-narrative*)” ifadesi ilk kez Jean F. Lyotard tarafından 1967'de basılan *Postmodern Durum* adlı eserde kullanılır. Lyotard'ın üst anlatımları şöyle açıklanmıştır:

> Üst anlatım, efsanevi görüşleri içeren bir anlatımdır; bu anlatımın kapsamı felsefeyi, araştırmaları, politikayı ve sanatı içerecek, birbiri ile ilişkilendirecek, hepsinden öte bunlara birleştirici bir yön verecek kadar geniş ve anlamlıdır. Lyotard, üst anlatıma örnek olarak dünya üzerinde Tanrı'nın hakim olduğunu anlatan Hristiyan dininin anlatımını, sınıf çekişmesini ve devrimi anlatan Marksist politik anlatımını ve Aydınlanma'nın rasyonel gelişimi aktaran entelektüel anlatımını gösterir. Lyotard, postmodern çağı, "Üst Anlatımlara Karşı Kuşku İçinde Olma Çağı" olarak tanımlamıştır. Lyotard, bütün insanların bu anlatımlara inanmayı kestiğini iddia etmemiş, ancak bu anlatımların artık işe yaramadığını iddia etmiştir; bunun sebebi olarak üst anlatımların çokluğunu ve hepsinin bilinmişliğini göstermiştir (Wolter'den akt. Aydın, 2006: s. 41).

Günümüz teologlarından olan Mohler üst anlatıların varlığını eleştirir:

> Bütün büyük felsefi sistemler artık ölmüştür; bütün kültürel anlatımların sınırına gelinmiştir; elimizde kalan tek şey farklı insan gruplarının ve kültürlerin gerçek olarak kabul edip inandığı küçük hikayelerdir, evrensel gerçek -üst anlatı- iddiaları baskıcıdır, totaliterdir ve karşı konulması gerekir (Mohler'den akt. Aydın, 2012: s. 41).

Üst anlatılara karşı çıkarak bireyselliği ve hatta yerelliği ön plana çıkaran yapılandırmacılık, evrensel nitelikli bir eğitim programı anlayışını eleştirerek eğitim bilimleri alanında, birey ve yerel kültürel merkezli bir program savunmaktadır. Bu anlamda çoğulcu bir eğitim programı oluşturulmasına olanak sağlanmıştır (Aydın, 2012: s. 48).

Yapılandırmacı teorisyenlerden G. E. Hein, epistemolojik açıdan iki temel sonuca varır:

1. Bilgi bireysel ve toplumsal bir insan sürecidir.
2. Öğrenme bir anlam oluşturma etkinliğidir.

Fakat yapılandırmacılık içinde bilginin inşası ve anlam oluşturma süreçleri birbirinden farklı olarak açıklanabilmiştir. Bunlar, bilişsel, toplumsal ve radikal yapılandırmacılık olarak ayrılırlar.

### 2.1.3.2.1. Bilişsel Yapılandırmacılık

Jean Piaget'nin (1896-1980) adı bilişsel yapılandırmacılıkla birlikte anılır. Piaget'ye göre, bilginin zihinde inşası ve anlam oluşturma, insanın gelişim evreleri ve bilişsel yapılarında meydana gelen değişimlerle ilgili bir durumdur. Piaget, gelişmekte olan çocukların bilişsel-zihinsel yapılara sahip olduklarını ve bu yapıların fiziksel ve mantıksal-matematiksel deneyimler yoluyla eylem içinde evirildiğini savunan evrimci-genetik bir epistemoloji geliştirir. O, bilişsel yapıların başlangıçta sadece refleks, emmek, tutmak gibi ilksel eylemlerle ortaya çıktığı yönünde, pek de doyurucu olmayan açıklamalar yapar. Ancak, Piaget, çocukların daha sonraki süreçte oluşturdukları bilişsel yapıların, geçirdikleri gelişim evrelerine paralel olarak evirildiğini ileri sürmektedir. Bu evirilme süreci, plastik bir balonun süreç içerisinde havayla şişirilmesini andırır. Piaget, bilginin zihinde inşasını açıklamak için, "özümleme", "uyarlama" ve "denge" gibi biyolojik kavramlara başvurur. Ona göre, öğrenen kişi, gelişiminin her evresinde, kendindeki bilişsel yapılar aracılığıyla çevresiyle etkileşim içerisindedir. Yani, kişi eğer herhangi bir deneyimle daha önce karşılaşmışsa, onu anlamlandırmada sıkıntı çekmeden geçmiş bilişsel yapısına başvurarak bunu açıklayabilecektir. Yaşanan deneyim var olan bilişsel yapı tarafından özümsenecek ve zihinsel denge korunacaktır. Ya da yaşanılan deneyim yeni bir deneyim ise yani var olan bilişsel yapıyla örtüşmüyorsa, biliş tarafından özümsenemediği için bilişte bir dengesizlik durumu yaşanacaktır. Bu dengesizliği çözmek için zihin, deneyimi uyumlulaştırmak ve dengesizliği yok etmek için yeni bir bilişsel yapı oluşturacaktır. Piaget'ye göre her yeni karşılaşılan deneyimde bu süreç tekrar edecek, yani özümleme, uyumlulaştırma ve dengeleme her seferinde yinelenecektir. Bu süreçte, özne ve öznenin bilişsel yapısı oldukça etkindir; gerçekliği düzenler ve ona onda olmayan zaman, mekan, niceliksel birimler, nedensellik ilişkisi gibi yeni unsurlar ekler (Aydın, 2012: s. 14-17). Bütün bu süreç ve gerçekliğe onda olmayan yeni unsurların katılması Kant'ın *sentetik a priori* bilgi nesnesini ifade ediyor gibidir. Piaget'ye göre:

> İki tür deneyim vardır: Fiziksel ve mantıksal-matematiksel deneyim. Fiziksel deneyim, klasik deneyim kavramının karşılığıdır. Bu tür deneyimle, (...) nesneler üzerinde eylemde bulunarak, nesnelerin kendisinden soyutlanmış özsel bilgi oluşur. Sözgelimi, çocuk nesneleri eline alarak, fiziksel deneyim yoluyla, bu nesnelerin ağırlıklarını, özgül

> ağırlığı denk olan nesnelerin hacim ilişkilerini vb. kavrar. Mantıksal-matematiksel deneyim, nesneler üzerindeki eylemden oluşmakla birlikte, nesnenin değil, eylemin soyutlanmasıyla elde edilir. Bu durumda, eylem, nesnelere kendilerinin sahip olmadıkları özellikler verir. (...) Çocuk tarafından çakıl taşları sayılırken, keşfedilen sayı ve düzen (...) çakıl taşlarının özellikleri değildir; (...) deneyim, otantik olarak mantıksal-matematikseldir, öznenin eylemiyle ilişkilidir, nesneyle değil (Piaget'den akt. Aydın, 2012: s. 17).

Anlaşıldığı üzere, Piaget'ye göre nesneyi değil, eylemi soyutlayan mantıksal-matematiksel özellikler, nesneye eylem sırasında özne tarafından eklenir. Aynı şekilde, onun mekan ve mekânsal ilişkilerinin dış dünyadan değil özneden ve onun nesneyle ilişkisinden kaynaklandığı ve bunu nesneye öznenin empoze ettiği görüşü Kant'ın bilgi görüşü ile uyuşmaktadır. Piaget'ye göre, kişideki mekan sezgisi, nesnelerin özelliklerinin yorumu ya da algısından kaynaklanmaz. Onun kaynağı nesneler üzerinde etkinlikte bulunmaktır. Bu sezgi, sadece fiziksel gerçeklikten çıkarsanmaz, bir dizi hazır yapılar aracılığıyla fiziksel gerçekliği zenginleştirir ve geliştirir. Bu yüzden mekânsal kavramlar, içselleştirilmiş eylemlerdir. Piaget, mekansal sezgiyi Kant'ın duyarlılığın formu saymasının nedenini, mekanın, monolitik ve tekdüze karakterine bağlar ve buna da hak verir. O halde Piaget'ye göre, duyum ve algıdan gelmeyen bilgiler de vardır. O, örneğin, hız, mekan, zaman ve nedensellik kavramlarının bütünüyle algıya indirgenemeyeceğini, bunu önceleyen mantıksal-matematiksel ilişkiler kümesinin bulunduğunu belirtir (Aydın, 2012: s. 18-19) ve şöyle der:

> Bilginin çeşitli biçimleri, hiçbir zaman sadece duyumdan ya da algıdan türemez; bunların yanı sıra eylem şemalarından ya da çeşitli düzeylerdeki işlemsel şemalardan da türer ve bu şemaların ikisi de, sadece algılara indirgenemez. (...) Algı, duyumsal bilginin derlenmesinden ibaret değildir, kararların ve çıkarsama öncesi sezgilerin rol oynadığı, eylem ya da işlem şemalarının algı üzerindeki etkilerine bağlı bir etkin düzenleme sürecini gerektirir. İşte bu nedenle, her türlü bilgimizin ya da en azından deneysel bilgimizin duyumsal kökeni olduğu yolundaki klasik ve basit görüş, bu bölümün başında belirttiğimiz gibi masal olarak ele almak, konuyu abartmak sayılmaz. (...) (Bilginin oluşması), nesnenin sağladığı bilgiler ile öznenin hareketleri ya da işlemleri arasında bir işbirliğini gerektirir. (...) Bilimsel bilgi, ortaya çıktığı her alanda, işlemsel yapısı gereği, eylemden kaynaklanan insan zekasını yansıtır. Bilgiyi duyumsal köken varsayımının yaptığı gibi sadece edilgin bir kayıt rolüne indirgemeye çalışmak, bilgi, zeka ve eylemin oluşturduğu sınırsız verimli yapının özelliğini budamak demektir (Piaget'den akt. Aydın, 2012: s. 19).

Piaget aynı zamanda Kant'ın nesnenin bilinemezliği, yani *kendinde şey* kavramına da hak verir. Ona göre, bilginin, özde zihinsel yapıların bir ürünü olduğu ve içsel sayıldığı için, nesnel gerçeklikle tam olarak örtüşüp örtüşmediğini saptamanın bir yolu yoktur. Çünkü gerçeklikle insan doğrudan değil, her defasında zihinsel şemaları aracılığıyla temas eder; bundan ötürü de onun kendinde nasıl bir şey olduğunu bilme olanağına sahip olamaz.

Piaget'nin yaklaşımının özünü aşağıdaki tabloda görmek olanaklıdır:

Tablo 2. 3. Bilişsel Yapılandırmacılığın temel varsayımları (Aydın, 2012: s. 20).

| **J. Piaget** | **Temel Varsayımlar** |
|---|---|
| | 1. İnsan zilini ve biyolojik organizmalar benzer biçimde işler. Çünkü her ikisi de sürekli çevreyle etkileşim içerisinde organize olmuş sistemlerdir.<br>2. Bilgi, bireyin çevreyle etkileşiminin bir ürünüdür ve birey tarafından, bilişsel yapılar aracılığıyla yapılandırılır.<br>3. Bilişsel gelişim, özde düşünsel-mantıksal gelişimi ifade eder ve çocukluktan erişkinliğe doğru gidildikçe mantıksal düşünme ağır basar.<br>**Bilişsel Gelişimin Sonuçları:**<br>• Eylem şemalarının oluşması, somut ve soyut işlemler.<br>**Bilişsel Gelişimin Öğeleri:**<br>• Özümleme, uyumlulaştırma ve dengeleme.<br>4. Mantıksal düşünme yeteneği, akran ve öğretmen ile etkileşimle desteklenerek fiziksel nesnelerin deneyimlenmesini sağlar.<br>5. Öğrenme, bireyin zihninde gerçekleşen bireysel-bilişsel yapılardan etkilenen bir süreçtir ve öğrenmede, özümleme, uyumlulaştırma ve dengeleme önemli bir rol oynar.<br>6. Biliş nesneye onda olmayan yeni özellikler iliştirir. |

#### 2.1.3.2.2. Toplumsal Yapılandırmacılık

Kant'ın kategorilerinden derin izler bulunan Piaget'nin bilişsel yapılandırmacılığını, Lev Semyonovich Vygotsky (1896-1934), bilgi ve anlam oluşturmada bireyi, toplumsal süreçlerden daha fazla ön plana çıkardığı gerekçesiyle eleştirir ve bu süreçlere göndermede bulunan yeni bir kuram oluşturur.

Marksist geleneğin etkisindeki Vygotsky, bilginin inşası ve anlam oluşturmada iki önemli olguya dikkat çeker. Ona göre bilginin inşasında, sosyal öğrenmelerin, yani arkadaşların ve çevredeki büyüklerin yanı sıra, bu dış dünya ile etkin bir biçimde teması olanaklı kılan psikolojik araçların önemli yeri vardır. Çocuk doğrudan deneyimlediği kavramların içeriğini, çevresiyle doğrudan doğruya etkileşmesi sırasında kendince deneyimledikleriyle doldurur. Bu yüzden, bu yaklaşımda, anlam oluşturma ve öğrenmede öykünmeye ve model almaya ayrı bir önem verilir. Piaget'nin tersine öğretimin, gelişimin önünde onun yönlendiricisi olması gerektiği savunulur. Bunlar ışığında Vygotsky'nin kuramının bilgi açısından dört temel sonucu bulunur:

a. Bilgi, kültürel bir anlama sahiptir. Bundan dolayı bilginin yapılandırılmasında dil ve kültür işlevseldir.
b. Kültürce yapılandırılan anlam, çocukların yetişkinlerle etkileşimi sonucu içselleştirilir.
c. Bilgi, dil ve sembollerle ifade edilir. Bu yüzden dil öğrenimi bilginin yapılandırılmasında etkilidir.
d. Piaget'nin savunduğu gibi insan gerçeklikle doğrudan temas edemez. İnsan dil ve kültür aracılığıyla bilgiyi yapılandırır (Aydın, 2012: s. 21-23).

#### 2.1.3.2.3. Radikal Yapılandırmacılık

Adı radikal yapılandırmacılıkla özdeşleşen Ernst von Glasersfeld, bilginin inşası ve anlamın oluşması konusunda, Piaget'den esinlenmiş ama onu aşan yeni bir yanıt verir. Ona göre, nesnel bilginin olanağı yoktur. Bilgi, bilenin zihinsel yapısına bağımlıdır. Fakat bilgi oluşturma, dışsal gerçekliğin bilince baskısının bir sonucu değildir. Birey sadece, duyu organları aracılığıyla aldığı duyum izlenimleri ile temas halinde olduğu düşüncelere sahiptir. Yani bilgi çevreye uyum sağlama sürecidir. Glasersfeld, Kant'ın *numen-fenomen* ayrımına dayanarak, diğer yapılandırmacılar gibi Kant'ın "kendinde şey"inin, yani ontolojik gerçekliğin bilinemeyeceğini, sadece görünüşün, bir diğer deyişle fenomenin bilinebileceğini belirtmektedir. Şöyle söyler: "Her ne kadar bizim dışımızda, orada duran bir nesnel gerçekliğin bulunması olası olsa da, bilgi bu nesnel gerçekliği yansıtmaz. Bilgi açıkçası, bizim deneyimlerimiz tarafından oluşturulmuş, düzenlenmiş ve organize edilmiş bir dünyayı yansıtır." (Glasersfeld'den akt. Aydın, 2012: s. 24).

Şimdi, radikal yapılandırmacılıktan çıkarılabilecek sonuçlar şöyle verilebilir:

1. Ontolojik gerçeklik, yani "kendinde şey" bilinemez.
2. Bilgi, görünüşe ait öznel bir duyumdur, çevreye uyumda işlevseldir.
3. Bireylerin inşa ettikleri, görünüşe ilişkin farklı inançlar karşılaştırılamaz, yani hangisinin daha doğru olduğu saptanamaz (Aydın, 2012: s. 24-25).

#### 2.1.3.2.4. Yapılandırmacılığın Değerlendirmesi

Yapılandırmacı kuramların ortak özelliklerinden oluşturulmuş ve yukarıda davranışçılık için sergilenen tabloya benzer bir tabloyu, yapılandırmacılık için Yurdakul şöyle vermiştir:

Tablo 2.4. Yapılandırmacılıüğın temel savları (Yurdakul'dan akt. Aydın, 2012: s. 110).

| **Değişkenler** | **Yapılandırmacılık** |
|---|---|
| Bilgi | • Bilişin dışında var olan, bireyden bağımsız bir olgu değildir.<br>• Duruma özgü, bağlamsal ve bireysel anlamların görünümüdür.<br>• Bireylerin nesneler üzerindeki etkinlikleriyle oluşur.<br>• Sosyal etkileşimden ve bireysel anlamların yaşayabilirliğini değerlendirmekten doğar. |
| Gerçeklik | • Aynı sosyal ortam içinde bulunan bireylerin kendi dünya parametrelerini tanımlamak için oluşturduğu zihinsel anlamlardır.<br>• Dış dünyadan ayrılan bir iç dünya (biliş) yoktur. |

| | |
|---|---|
| Doğruluk | • Bireyin kendi anlamlarıyla “diğer”inin anlamlarının çelişmemesidir (çoklu bakış açısı).<br>• Diğerlerinin anlamlarına karşı bireyin kendi anlamalarını test etmesidir (sosyal anlam birliği). |
| Öğrenme | • Bireysel bilişte oluşan öznel anlamların sosyo-kültürel bağlamda özneler arası süreçlerle yeniden oluşturulmasıdır.<br>• Anlamlıdır ve gerçek bir bağlamdan türer.<br>• Çevre koşullarından bağımsız gerçekleşen anlamın, bakış açısı kazanma ya da yeniden yapılandırma süreci olarak, oluşu ve sonuçları hiçbir zaman kontrol edilemez.<br>• Gerçek yaşam durumlarında ve bağlam merkezli zengin yaşantılar sayesinde kurulan özgün ilişkilerle oluşur.<br>• Çok değişkenli ve değişkenlerin birbirini nasıl etkilediğinin yordanması zor olan, döngüsel ve holografik bir olgudur. |

Görüldüğü gibi matematik eğitimi, öncelikle bilgiye yaklaşım biçimi, sonra eğitim felsefesi ve öğretim teorileri ışığı altında benimsenen bir bakış açısı ile şekillenmektedir. Bunun yanı sıra, günümüzde, matematik eğitimi felsefesi kapsamında matematik eğitimine yönelik olarak çağdaş yaklaşımların da geliştirildiği görülmektedir.

Yapılandırmacı bilgi teorisine bağlı öğretim teorisi bilgi nesnesini insan zihninin bir ürünü olarak saydığı ve bu anlamda Kant’ın *sentetik a priori* bilgi nesnesini kabul ettiği için eğitim süreci içinde öğrencinin bilgiyi yapılandırma süreçlerini önemser. Bu bakımdan öğrencinin bilgiyi kendi ürettiğini kabul eder. Bu hedefle öğrencinin kendi üretimine imkan tanıyacak etkinliklerle dersler işlenir (Akar &Şener, 2014: s. 71). Matematik eğitimi içinde bu etkinlikler, kavramlar arası bağların kurulması ve öğrencinin bildiği kavramlardan bilmediği kavramlara doğru bir yapılandırma sürecini yaşayabilmesi için çok önemlidir. Matematiksel nesnenin Kant’ın ifadesi ile saf görüye bağlı oluşu, “bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember oluşturur" gibi kimi kabulleri açıklar. Fakat bilginin sentetik yönü onun üretim sürecinde deneyimi zorunlu kılar. Bu kabuller üzerine oluşturulacak yeni teoremler için matematiksel deneyimler gereklidir. Bu fikirlerden etkilenen Piaget'ye göre, mantıksal-matematiksel özellikler, nesnenin soyutlanması ile elde edilmez. Ona göre bu özellikler mantıksal-matematiksel nesnenin değil eylemin soyutlanması sırasında nesneye özne tarafından eklenir. O halde özne bu özellikleri eylem esnasında edinir. Bu yüzden eğitim sürecine, öğrencinin deneyimleyebileceği veya daha önceden bildiği deneyimlerden yola çıkılarak başlanır. Bu matematiksel deneyimin lise müfredatı içinde sayılar, kümeler, fonksiyonlar gibi aritmetik düzeyindeki konularda öğrencilerin deneyimleyebileceği yaşamsal örnekler üzerinden konu işlenmesi mümkündür. Bu tip bir deneyim süreci öğrencinin bir kavramdan diğer bir kavrama ulaşırken kendi bilgi nesnesini taşıyabilmesine imkân tanır. Örneğin "çemberin merkezinden geçen kirişi onun en uzun kirişidir" teoreminin matematiksel ispatını yaparsak; çemberin merkezini tepe noktası kabul eden ve tabanının köşe noktaları çemberin üzerinde olan ikizkenar üçgenler çizeriz. Sonra ikiz kenarları aynı, yani çemberin yarıçapı olan üçgenlerin yükseklikleri küçüldükçe çemberin kirişi olan taban uzunluğunun büyüdüğü görülebilir. O halde en küçük yüksekliğe sahip üçgeni belirleriz. Bu durumda yüksekliği sıfır aldığımızda çemberin çapına ulaşmış oluruz ki o da çemberin en uzun kirişi olacaktır. Böyle bir ispatlama öğrencilere sunulursa bu davranışçı yaklaşımla konunun anlatımı olacaktır. Fakat yapılandırmacı teorenin içinde, bu üçgenlerin çizilebileceği düşüncesinin öğrenci tarafından ifade edilmesini sağlayacak özel sorular öğrencilere yöneltilir. Sonra öğrencilerden bu koşullara uygun üçgenler çizmeleri istenir. Çizilen üçgenlerin yükseklikleri buldurulur ve yükseklik ile taban arasındaki ters orantı öğrencilere keşfettirilir. Nihayetinde öğrenci yüksekliğin en küçük olması gerektiğini düşünür. Öğretmen o durumda en küçük uzunluğun kaç birim alınabileceğini sorar. Buradan öğrencinin üçgenin yüksekliğini sıfır alarak en uzun kirişin çap olduğu bilgisine ulaşacağı beklenir.

Böyle bir deneyimsel süreç, çemberlerden önce işlenmiş ikizkenar üçgen bilgi nesnesinin kullanılmasını gerektirir. Bu anlamda bu tip etkinlikler bilgi nesnesinin taşınabilirliği açısından ve öğrencinin kendi bilgisine ulaşması ve bundan dolayı o bilgiyi sahiplenmesi açısından önemlidir. Öğretmen bu süreçlerde sadece yönlendiren, öğrencinin kendi kavramına ulaşması için yol gösterendir. Bu hedefle öğretmen, öğrenciye onu yeni kavrama götürecek özel soruları bulup sorar. Yeni bir kavrama geçişin ardından o kavrama ait işlemsel soruların çözümüneyse öğrencilerin genelde kendiliğinden geçmesi beklenir. Yani öğrencinin kavramı elde ettiğinde o kavrama ait işlemsel soruların nasıl çözüleceğini öğretmenden görmeden kendisi o soruları çözmeye başlaması umulan sonuçlardan biridir. Öğrencilerin yeni bir kavrama ulaştıktan sonra o kavrama ait işlemsel soruların çözümlerine kendiliğinden geçişin aksadığı durumların nedenleri çok değişkenli olmasından ötürü pek çoktur. Bunlar, yapılan etkinliğin yeterli olmayışı, öğretmenin uygulama hataları ya da eğitim materyallerindeki eksiklikler olabileceği gibi sınıfın çok kalabalık veya eğitim yapılacak öğrencilerin düzeylerinin birbirinden çok farklı olması gibi unsurlar da olabilir. Ayrıca, müfredat içinde işlenmesi planlanan matematik konuları, öğrencinin kısa ders saati içinde yapılandırmasına fırsat veremeyecek kadar karmaşık düzeyde olabilir. Örneğin lise müfredatında türev, integral, logaritma gibi aritmetik üstü konuların yapılandırma süreçlerinde yaşanacak matematiksel deneyim için yapılacak etkinliklerin günlük yaşamsal örnekler üzerinden yapılması ya mümkün değildir ya da kurulabilecek örneklerin arkasından işlemsel soruların çözümüne geçiş kolay değildir. Çünkü aritmetik düzeydeki işlemlerin verilen örneklerle paralelliği kolayca kurulabilirken, aritmetik üstü konulardaki işlemler daha kompleks olduğu için geçiş daha zordur. Bu tip geçişliliğin zor olduğu her adımda öğretmen sorunun nasıl çözüleceğini anlatan, öğrenci ise onu öğrenen bir konuma geri dönmek zorunda kalır ki bu durum öğrencinin o kavramı taşınabilir hale getirmesini yani kendi için nesneleşmesini engelleyici bir tutumdur. Çünkü öğrencinin elde ettiği düşünülen kavrama ait işlemsel sorular hakkında bir fikri yoktur. Öğrenci soruların çözümünü ayrıca dinlemiştir bu durumda başlangıçta yapılacak matematiksel etkinliğin bir önemi kalmamakla birlikte öğrenci hatta öğretmen için birer zaman kaybı gibi görülmesi olasıdır. Kendiliğinden sorularını çözemediği yeni başlıkların ve ilişkilerin içine taşıyamadığı kavramlar veya matematiksel nesneler, öğrenci için taşınabilir değildir. Bu tip durumlar eğitim yöntemini davranışçı bir biçime dönüştürerek öğrenciyi soru biçimlerinin çözümünü ezberlemeye yöneltecektir. Bu sorunlardan kurtulabilmek için yaşanması istenen matematiksel deneyimin iki biçimde gerçekleştirilmesi gerekir. Birincisi gerçekten o kavramın algısına ulaşabilecek kadar, bir matematikçi gibi, yeterli bir deneyim yaşanacaktır. Fakat örneğin logaritma kavramını matematiğe kazandıran John Napier'in (1550-1617) uzun yıllar süren çalışmasında oluşturduğu algıya veya integrali insanlığa armağan eden Newton'un üç saatlik uykularla ulaştığı algıya, kısa ders saatleri içinde ulaşmanın mümkün olamayacağı aşikârdır. O halde bunun için diğer bir çözüm kavramlar arası bağlar hakkında yapılabilecek etkinliklerdir. Fakat burada dikkat edilmelidir ki kavramlar arası bağların geçişi mantıksal düzeydeki çıkarımlar ile yapılabilir. Yani etkinliklerimiz mantıksal bir zeminde ilerleyerek kurulur ve bu mantıksal dizgeden soruların çözümüne geçiş yine çıkarımlar ile yapılabilir. Bunu örneklendirmek için yukarda verdiğimiz "çemberin merkezinden geçen kirişi onun en uzun kirişidir" örneğine tekrar dönelim. Böyle bir örnekte mantıksal bir çıkarım için kirişin tanımından yola çıkarak düşünülmeye başlanabilir. "Kiriş, çember üzerindeki iki noktanın birleştirilmesi ile oluşturulmuş doğru parçasıdır." O halde "Çember üzerinde seçilen herhangi bir noktaya en uzak olan nokta hangisi olabilir?" sorusu sorulur. Eğer seçilen noktanın hemen yanındaki noktalardan birini seçmiş olsak yan yana iki nokta olduğu için en kısa kirişi elde ederiz. Seçtiğimiz noktanın her iki yanı olmak üzere en yakın iki noktası vardır. O halde bu noktalardan uzaklaşarak kirişimizi büyültebiliriz. Zihnimizde bu en yakın iki noktadan eşit ve açısal olarak uzaklaşmaya devam ederiz. Açısal olarak belirlediğimiz noktanın her iki yönden açıldığımızda ve açılar üst üste geldiğinde, çember merkezinden alınmış 180 derecelik iki merkez açıyı çizerek görebiliriz. Bu durumda bazı sonuçlar çıkacaktır. Öncelikle seçtiğimiz noktadan en uzak nokta merkez açıdan dolayı merkeze göre simetri olan noktadır. O zaman bu iki nokta birleştirilince kirişin merkezden geçeceği aşikârdır. Bu iki noktanın altında ve üstünde kalan merkez açı ölçüleri yani majör ve minör açıları eşittir, merkeze göre simetri alındığı için iki yarıçap uzunluğundadır gibi sonuçlara ulaşmak artık olasıdır. Böyle bir düşünce, öğrenciye yaptırılan çizimler yani yaşatılan bir deneyim sonucunda elde edilen bir sonuç değil, başlangıçta kabul edilen tanımlar üzerinden sürdürülen akıl yürütmenin bir sonucudur. Bu tip bir mantıksal çözümlemeyi yapılandırmacı öğretim teorisi reddetmeyecek hatta özellikle aritmetik üstü konular için kullanmaktan kaçamayacaktır. Bu süreçte ise yapılandırmacılık, Kant'ın ifadesiyle doğruluğu için deneyimin tanıklığına ihtiyaç duyan matematiksel bilginin sentetik yönü ve Piaget için matematiksel özellikleri kazanmak için gereken matematiksel deneyimin gerekliliğini göz ardı ederek onu daha çok analitik bir süreç haline getirecek ve yapılandırmacılığın bu anlamda temel kabullerden uzaklaşmasına neden olacaktır.

## 2.2. Matematik Eğitimi Felsefesinde Matematiksel Nesne

Bu bölümde matematik felsefesi ile matematik eğitimi arasındaki bağları kurma çabası içindeki matematik eğitimi felsefesi çalışmalarını ve bu çabaların matematik eğitimine yapabileceği katkıları ele alacağız.

Bir sosyal yapılandırmacı teorisyeni olup, *Matematik Eğitiminin Felsefesi*'ni yazan ve günümüzde hala matematik eğitimi felsefesi çalışmalarına devam eden Paul Ernest'e göre, matematik eğitimi felsefesi, matematik felsefesi ve matematik eğitimi arasındaki ilişkileri kurmakla yükümlüdür. Epistemolojik tartışmaların eğitimin dinamiti olduğunu savunan Ernest için eğitim, bu tartışmalarla geliştirilebilir, yenilenebilir. Bu yüzden ona göre matematik pedagojisi matematik felsefesine dayanır (Ernest, 2003: s. 1). Öte yandan Hersh de, matematiği biçimsel olarak ifade edilmiş aksiyomlardan yapılan biçimsel çıkarımlar olarak gören dogma çerçevesinde liselerdeki matematik eğitimi için sürdürülen tartışmaların, yalnızca pedagojik temelli olduğunu savunur. Yani Hersh, sadece müfredatta "bu öğretilmek için uygun değildir" ya da "bunun öğretim yolu yanlıştır" biçiminde yürütülen pedagojik tartışmaların, hiçbir katkı yapmayıp matematik eğitimi soruşturmalarını sonuçsuz bırakacağını düşünmektedir. Ona göre öğrencilere *gerçek şey*den daha azını öneren bu felsefi dogma irdelenmez ise okullardaki biçimciliğin eleştirmenleri kaliteden verilen bir ödünü savunur hale geleceklerdir. Hersh'e göre asıl mesele, "en iyi öğretim yolunun ne olduğu" gibi pedagojik sorunların çözümlerini aramak değil, "matematiğin gerçekten ne ile ilgili olduğu" sorusunun yanıtını aramaktır. Ona göre biçimciliğin pedagojideki itibarını azaltmak için matematiğin doğasının biçimsel tasviri mutlaka sorgulanmalıdır. Bundan başka, Hersh, lise düzeyindeki matematik öğretimi için yürütülen tartışmaların, matematiğin doğasına dair problemlerle yüzleşilmeden bir çözüm üretemeyeceğini de bildirir. Ona göre, biçimci, temel matematiği güvenli hale getirmek için onu bir oyuna çevirmiş, fakat diğer taraftan mantıkçı temel ise onu güvenli kılmak amacıyla bir totolojiye dönüştürmeye çalışmıştır. Bununla birlikte, yine Hersh'e göre, matematiği sarsılmaz doğruluğun kaynağı olarak saptama zorunluluğunu terk edersek, matematiğin doğasını insanın zihinsel etkinliğinin belli bir ürünü olarak kabul edebiliriz (Hersh, 2011: s. 379-401).

Çalışmamız bu anlamada matematik eğitimi için de öncelikle matematiğin doğasına eğilinmesi gerektiği savunusundadır. Bu doğrultuda şimdiye kadar önce matematik felsefesinin ana sorunları kapsamında çeşitli felsefi anlayışların matematiksel nesneye bakış açıları incelenmiş, daha sonra da eğitim felsefeleri ve öğrenme teorileri çerçevesinde matematik eğitiminin eleştirel bir değerlendirmesi yapılmıştır. Bu bölümdeyse söz konusu felsefi anlayışlar matematiksel nesnenin varlıksal durumuna ilişkin olarak geliştirdikleri görüşler açısından sınıflandırılarak karşılaştırmalı olarak serimlenecek; matematiksel nesneye ilişkin olarak açık bir görüş belirtmeyen kimi yaklaşımlarsa yine bu çerçevede yorumlanarak değerlendirilecektir. Ardından, bu felsefi anlayışların ilişkilendirildiği öğrenme teorilerinin (davranışçılığın ve yapılandırmacılığın) ontolojik ve epistemolojik dayanakları temelinde matematiksel nesneye yönelik savları netleştirilmeye çalışılacaktır. Son olarak da, sorgulamalar aracılığıyla matematiksel nesneye ilişkin olarak varılacak saptamaların matematik eğitiminin belirlenmesinde ne denli önemli bir işleve sahip olduğu aydınlatılacaktır.

### 2.2.1. Matematiksel Nesnenin Belirlenmesi

Matematik eğitimi söz konusu olduğunda matematiğin doğası/neliği ile matematiğin nesnesi arasındaki sıkı ilişki iyice belirginlik kazanır. Matematik eğitimine ilişkin soruşturmaların öncelikle matematiğin nasıl bir etkinlik alanı olduğunu belirlemeleri, bunun için de matematiksel nesnenin neliğinin aydınlatılmasına yönelmeleri kaçınılmazdır. Çünkü matematiğin doğasının belirlenmesi, ancak, matematiksel nesnenin doğasının belirlenmesiyle olanaklı olur. Bunu amaç edinerek, matematiğin nesnesinin hem varlıksal bakımdan hem de nelik açısından belirlenmesi yolunda buradaki iki alt bölümden ilkinde, matematiksel nesnenin varlık durumuyla ilgili tartışmaları, ikincisindeyse davranışçı ve yapılandırmacı öğretim kuramlarının matematiğin nesnesine/doğasına ilişkin yaklaşımlarını ele almaktayız.

#### 2.2.1.1. Matematiksel Nesnenin Varlıksal Durumuyla İlgili Tartışmalar

Matematiksel nesneler, yukarıda serimlenenlerden anımsanacak olursa, Pythagorasçılar için "şeylerin taklit edilmesi"; Platon için "idealar ile duyusal şeyler arasındaki aracı gerçekler"; Aristoteles içinse "ne duyusal varlıkların tözleri ne de duyu üstü gerçekler olup, sadece duyusal olanlar"dır. Bu durumda Antik felsefede matematiksel nesnenin bir gerçeklik olarak var oluşu, Pythagorasçılarınkinin ve Aristoteles'inkinin tersine Platon'un yaklaşımında görülmektedir. Daha sonra 17. yüzyılda Descartes, matematiksel bilginin evrensel ve ussal yönüne vurgu yaparak, onun nesnelerinin de zihinsel ve dolayısıyla değişmez olduğunu söyler. Leibniz'e göre de, matematiksel bilgi deneyimden bağımsız bir akıl bilgisi olduğu için bu bilginin empirik dünyayla bir ilişkisi yoktur. Çünkü empirik dünyanın nesneleri zorunlu ve ezeli olmayıp, mümkün ve değişkendir. Matematik bilgisi ise zorunlu ve evrensel hakikatlerdir. Yani Leibniz ve Descartes, empirik dünyanın bilgisine akıl yoluyla ulaşabileceğini savunurken matematiksel bilgiyi bir hakikat olarak gerçek dünyanın nesnesinden ayırmaktadırlar. Daha sonra 18. yüzyıldaysa İngiliz empiristlerinden Hume, matematiksel doğruların analitik yani bilgimizi genişletmeyen *a priori* önermeler olduğunu ve onların sadece "fikirler arası ilişkiler"i dile getirdiğini ileri sürerek, matematiksel nesnelerin ontolojik anlamda nesnel gerçekliğini reddeder. Fakat analitik yargıların bilgimizi genişletmeyen yargılar olduğunun kabul edildiği bir dönemde Hume'un analitik *a priori* olarak kabul ettiği matematiksel yargıların bilgimizi genişletiyor olması çelişik bir durum oluşturmakta idi. Bu çelişik duruma Kant'ın saf görü temelli *sentetik a priori* bilgi anlayışı çözüm önerisi olarak gelir. Kant matematiksel bilgiyi tanımlamakla birlikte onun ontolojik gerçekliğini tartışmaz. Fakat matematik ona göre, diğer bilgiler gibi insanın kendi ürettiği bir şeydir. Bu üretim süreçleri daha önce de değindiğimiz gibi öğretim teorilerinden yapılandırmacılıkta kullanılır. "Matematiksel nesnenin gerçekliği" sorunu ise 19. yüzyıl sonunda mutlakçı okullar tarafından tartışılır. Matematiksel gerçekliğin ontolojik anlamdaki varlığı, realist matematikçiler ile dile getirilir. Frege, Russell, Gödel gibi realist matematikçi filozoflar, matematiksel bilginin insan tarafından üretiliyor olması düşüncesine karşı çıkarlar. Onlara göre matematiksel nesneler analitik yargılardır ve insan üretiminden bağımsız nesneler olarak vardırlar. Frege'nin bu bağlamda nesnel bilgiye ulaşma çabaları, o bilgiler için duyusal ve düşünsel mekândan başka üçüncü bir mekân *Reich* alanı belirlemesi ile sonuçlanır. Ona göre düşünceler oradadır ve insanlar orada duran düşünceleri keşfederler. O düşünceler ise doğasal olanın nesnel bilgileridir. Bu anlamda matematiksel bilgi keşiften ibarettir. Öte yandan, yine mutlak doğruyu bulma çabasındaki diğer bir görüş olan nominalizm (adcılık) görüşüne göre, evrende yalnızca somut nesneler vardır, soyut nesneler gerçeklikten yoksundur. Matematiksel nesneler, bu durumda, yalnızca birer sözcükten, bir addan ibarettir. Diğer bir matematiksel nesne anlayışı olan yapısalcılık ise, soyut nesneleri insan zekâsının çevreyle olan sürekli etkileşimi içinde oluşan kavramlar olarak görürler. Fakat birçok yapısalcıya göre, doğruluk ya da yanlışlık insandan bağımsız olarak vardır. Bu yüzden yapısalcıların bir kısmı için matematiksel nesnelerin insandan bağımsız bir ontolojik gerçekliği vardır. Bununla birlikte matematiğin temellerini arayan mantıkçılar ve biçimciler dışında sezgiciler için matematiksel nesnenin insandan bağımsız varlığından söz edilemez. Çünkü sezgiciler için matematiksel gerçeklik ancak insanın sezgileri ile elde edilebilendir, bu bakımdan da insan üretimine bağımlıdır. Çağdaş matematik felsefecilerinden Quine da insandan bağımsız matematiksel nesnenin varlığını düpedüz bir dogma olarak görmekte ve bu türden savları reddetmektedir. Matematiği dil-dünya bağlamı içinde inceleyen Quine, yalnızca fiziksel gerçeklikle örtüşenleri matematiksel gerçeklik olarak alır. O halde, ona göre doğruluk veya yanlışlık, sadece fiziksel olanla uyumlu oluşa veya olmayışa göre belirlenebilir. Son olarak, matematik için yapılandırmacı öğretim kuramının felsefi temellerini veren yarı-deneyimciler, matematiği, matematikçilerin ortaya koyduğu bir üretim olarak görüp doğrulanabilir/yanlışlanabilir olarak değerlendirmektedirler. O halde, onlar için, doğruluk ve yanlışlık insana bağlı bir sonuçtur.

Şimdi, tüm bunların toparlayıcı bir özetini vermek amacıyla, matematik felsefecilerini, matematiksel nesnenin insan üretiminden bağımsız olarak var olduğunu kabul edenler ile kabul etmeyenler şeklinde iki ana gruba ayırabiliriz. Matematik felsefesi yaklaşımlarını da bu ayrıma göre şöyle sınıflandırabiliriz:

Tablo 2.5. Matematik Felsefesi İçinde Matematik Nesneye Bakış Açıları

| **Matematiksel nesne insan üretiminden bağımsız olarak vardır.** | **Matematiksel nesne insan üretiminden bağımsız olarak yoktur.** |
|---|---|
| -Platonculuk<br>-Matematiksel Realistler (Frege, vb.)<br>-Bazı Yapısalcılar<br>-Biçimciler (Soyut Nesneler Olarak) | -Kant'ın Transsendental Felsefesi<br>-Sezgiciler<br>-Yarı-Deneyimciler |

Bu tabloyla iyice netlik kazandığı üzere, hem matematiksel nesne sorunuyla hem de matematiğin temelleri sorunuyla ilgili yaklaşımlar, bu sınıflandırma kapsamında bir arada yer almakta. Daha öncede vurguladığımız gibi bu iki sorun, matematik felsefesinin birbiriyle sıkı ilişkideki iki ana sorunudur. Matematiğin temellerine yönelik bir soruşturmanın, matematiksel nesnenin ne türden bir varlığı sahip olduğu (ya da var olup olmadığı) konusuna verilen cevaplarla belirlendiği matematik felsefesi içinde gözlemlenebilir. Örneğin Frege'nin matematiksel nesnenin ne olduğunu açıklarken araştırmanın kökenlerinde rastladığı mantıksal ilkeler matematiğin kökenlerine dair yanıtlar bulmasına yol açmıştır. Bu anlamda matematiğin temellerini açıklayan biçimcilerin, soyut nesnelerin varlığını kabul etmeleri gerekçesi ile matematiksel nesnelerin insan üretiminden bağımsız varlığını onayladığı yönünde bir değerlendirme yapılabilir.

#### 2.2.1.2. Davranışçı ve Yapılandırmacı Öğretim Teorilerinin Matematiğin Nesnesine/Doğasına İlişkin Yaklaşımları

Bu bölümde matematiksel nesnenin varlığının insan üretimine bağımlı olup olmamasıyla ilgili kabullere dayanan yukarıdaki ayrımdan beslenen davranışçı ve yapılandırmacı öğretim teorilerini, matematiğin doğasını açıklamaya çalışan matematik felsefesi açısından değerlendirmeye çalışacağız.

Davranışçı yaklaşımda bilginin konusu/nesnesi, bilişin dışında nesnel bir gerçeklik olarak dış dünyada hazır ve öznenin erişimine (bilebilmesine) açık bir şekilde durur. Bu çerçevede doğruluk da insanın zihinsel süreçlerinden bağımsız, nesnel olarak belirlenir. Bu açıklamalar doğrultusunda davranışçı yaklaşımın bilgi nesnesinin ontolojik gerçekliği, gerçek dünya iken bilgiye bakışı pozitivist bir yaklaşıma sahiptir. Eğitim felsefesi açısından ise davranışçılığın, bilginin insan üretimi dışında bir gerçekliğe ilişkin olduğu görüşüyle daimicilikle, aynı zamanda doğrulukların herkes için geçerli olduğu kabulü ve mutlak doğrulukları arayışı açısından esasicilikle örtüştüğüne değinmiştik. Matematik felsefesi açısından değerlendirdiğimizdeyse nesne anlayışının Frege'nin tanımladığı matematiksel bilgi nesnesi ile paralellik taşıdığı belirginleşir. Çünkü Frege de matematiksel gerçekliğin insan üretiminden bağımsız bir gerçeklik alanına ait olduğunu savunmaktadır. Aynı zamanda davranışçılık öğretim teorisinin bilgiye bakışını matematik felsefesi içindeki biçimciliğin bilgi görüşü ile de örtüştürebiliriz. Aslında biçimcilik, matematiksel nesnenin nasıl elde edildiğine dair görüş belirtmemiştir. Daha önce belirttiğimiz üzere, biçimcilere göre matematik, soyut nesneleri ve bu nesneler arasındaki ilişkileri konu edinen simgesel bir sistemdir. Bu anlamda içerikten/anlamdan yoksundur. Fakat matematiksel nesneler ancak bir teoremin tanımında, ispatında veya bir problemin çözümünde kullanıldıklarında anlam ve içerik kazanırlar. Onlara göre, matematiksel nesneler soyut nesneler olarak insan üretiminden bağımsız nesnel biçimde bir bütünlüğe "tamlık"a sahiptir. Bu kabule dayanarak biçimcilik felsefi görüşünü mutlak bilgi arayışı içindeki davranışçılık ile örtüştürebiliriz.

Öteki taraftan yapılandırmacılığın, bilginin bireylerin nesneler üzerindeki etkinlikleriyle oluştuğunu ve insan üretiminden bağımsız olmadığını kabul edişi Kant'ın sentetik *a priori* bilgi nesnesi kabulü ile daha önce de dile getirildiği gibi, post-pozitivist bilgi anlayışıyla örtüştüğünü gösterir. Eğitim felsefesi açısından yapılandırmacı eğitimin, felsefi temellerini oluşturan ilerlemecilik ve yeniden yapılanmacılık ile bilgi nesnesine bakış açıları aynılaşır. Matematik felsefesi açısından, kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi matematiğin tek geçerli yöntemi sayan sezgiciler, matematiksel gerçekliğe sadece sezgilerle ulaşılabileceğimizi savunarak bilgi nesnesine ulaşma yönteminde insanı ve onun sezgilerini ön plana çıkarmışlardır. Böylece bilgi nesnesi insan sezgilerine bağımlı olarak üretilebilecektir. Bu bakış açısı yapılandırmacılığın matematik felsefesi açısından temelini oluşturmuştur. Aynı zamanda yarı-deneyimcilerin, sosyal ve kültürel bir ürün olması nedeniyle matematiğin yanılabilir ve yanlışlanabilir olduğunu ileri sürmeleri ve matematiksel kuramların açıklama ve doğrulama yöntemiyle doğruluklarını onaylamaları da yapılandırmacı öğretim teorisinin doğruluk anlayışıyla benzeşmektedir. Yapılandırmacı teoride daha önce değinildiği üzere doğruluk, yalnızca bireyin kendi anlamlarını diğerlerinin anlamlarına karşı test etmesidir. O halde, bilginin mutlak olmadığını benimsemesinden ve onu ispatlamak yerine açıklamaya çalışmasından dolayı yarı-deneyimci matematik felsefesi görüşü, yapılandırmacı kuramın doğruluk anlayışıyla bir benzerlik sergilemektedir.

Bütün bu açıklamalardan yola çıkarak, yapılandırmacı teorinin matematiksel nesnesinin saf görü temelinde Kant'ın *sentetik a priori* yargılarınca oluşturulan nesne olduğu belirlemesini yaparken, davranışçılık öğretim teorisinin matematiksel nesnesini ise mantıksal çıkarımlara dayanan, nesnelliğini gerçek dünyadan alan, insan üretiminden bağımsız *analitik a priori* yargıların oluşturduğu mantıksal nesne olarak ifade edebiliriz. Matematiksel nesnenin öğrenci tarafından elde edilmesi yapılandırmacı teoride yalnızca öğretmenin yönlendirmeleri ile olurken, davranışçı yaklaşımdaysa matematiğin nesnesinin öğrenci tarafından öğrenilmesi öğretmenin aktarımı ile gerçekleşmektedir.

Şimdi, buraya dek yaptığımız tüm incelemeler sonucunda, ilgili felsefi yaklaşımlarla ilişkilendirilebilen söz konusu iki öğretim teorisinin ontolojik ve epistemolojik açıdan (yani bu kuramların gerçekliğe, bilgiye, eğitime, matematiğe, matematiğin nesnesine ve bilgisinin edinimine ilişkin bakışları bakımından) karşılaştırıldığı aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz:

Tablo 2.6. Davranışçı ve Yapılandırmacı Yaklaşımların Felsefi Temelleri

| | **Davranışçı Yaklaşım** | **Yapılandırmacı Yaklaşım** |
|---|---|---|
| **Gerçekliğin Ontolojisi** | Gerçek Dünya | İnsan Zihni |
| **Bilgiye Bakış** | Pozitivist | Post-Pozitivist |
| **Eğitim Felsefesi Temelleri** | -Daimicilik<br>-Esasicilik | - İlerlemecilik<br>-Yeniden Yapılanmacılık |
| **Matematik Felsefesi Temelleri** | -Matematiksel Realizm<br>-Biçimcilik | -Sezgiciler<br>-Yarı-Deneyimciler |
| **Matematiksel Nesne Anlayışı** | Mantıksal çıkarımlara dayanan, insan üretiminden bağımsız *analitik* yargıların oluşturduğu nesnel mantıksal nesne | Saf görü temelli *sentetik a priori* yargıların oluşturduğu insan üretimine bağımlı öznel matematiksel nesne |
| **Matematiksel Bilgiye Ulaşma Yolu** | Öğretmenin anlatımı | Öğrencinin üretmesi |

Bilgiye yönelik bakışları açısından pozitivist ve post-pozitivist epistemolojik temelli yaklaşımlar olarak ayırt ettiğimiz davranışçı ve yapılandırmacı öğretim kuramlarının kendilerine özgü avantajları ve dezavantajları vardır. Öncelikle dile getirmeliyiz ki, "(…) bilim yapmak için dış dünyanın gerçekliğine (realizm) ve dış dünyanın doğru bilgisinin elde edilebileceğine inanmak ve belli ölçülerde bunu temellendirmek bir zorunluluktur ve bu felsefi arka plan görmezden gelinerek bilim eğitimi yapılamaz." (Aydın, 2012: s. 79). Bu amaç doğrultusunda bilimsel eğitim anlayışını göz ardı etmemek ve dış dünyanın kendi doğrularının peşinden gidebilmek bilimsel bakış açısının gereğidir. Bu hedefle davranışçı yaklaşımın realist bakış açısı önemsenmelidir. Fakat öğrenciler, bilgileri aktarma yöntemi ile edindiklerinden, kavramlar arası bağları kuramayıp, dolayısıyla önceki bilgilerini yeni bir kavram için kendi becerileriyle kullanamadıklarından, bu bilgiler onlar için birer taşınabilir bilgi nesnesi haline gelemeyecektir. Bu durum, öğrenciler için anlam oluşturma, analiz yapma gibi sonuçlar açısından bir dezavantaj oluşturacaktır. Öte yandan, bilginin kişiden uzaklaşıp (ki Piaget'ye göre bu, eylemin soyutlamasıdır) taşınabilir bir nesne haline gelmesini yapılandırmacı yaklaşım çerçevesinde görmemiz mümkündür. Ancak, yapılandırmacılıkta, daha önce ifade ettiğimiz "üst anlatılar"ın dikkate alınmaması ve her öğrencinin neredeyse kendi doğrularını oluşturabileceği bir sisteme doğru gidilmesi, örneğin "sigara içmek kötüdür" gibi bazı temel kabullerin bile olmaması, eğitim bağlamında düşünülmesi gereken bir konudur.

### 2.2.2. Matematik Eğitiminin Önemli Bir Bileşeni Olarak Matematiksel Nesne

Matematiksel nesnenin neliği matematiğin neliğini, matematiğin neliği de matematik eğitiminin neliğini belirlediği için matematiksel nesneyi matematik eğitiminin önemli bir bileşeni olarak görmekteyiz. Bundan ötürü de matematik eğitimi söz konusu olduğunda, öncelikle matematiksel nesnenin varlıksal durumuna, ne türden bir varlığa sahip olduğuna ilişkin olarak yürütülecek soruşturmaların sonucunda bir anlayışın geliştirilmesi zorunluluğu var. Onun ardındansa bu anlayışla uyumlu olacak biçimde matematiksel nesnenin nasıl bir nesne olduğunun belirginleştirilmesi gerekiyor. Bu şekilde hem varlığı hem de neliği açısından belirlenen matematiksel nesnenin, matematik eğitiminin öğretilen/öğrenilen nesnesi de olarak matematik eğitiminin doğasını belirleyeceği için, bu doğrultuda ancak, bir matematik eğitimi yaklaşımı benimsenebilecek ya da geliştirilebilecektir.

Şimdi, matematik felsefesi ve eğitim felsefesinin matematik eğitimi ile bir araya getirildiği bu çerçevede matematiksel nesne anlayışlarının belli türden öğretim yöntemlerini zorunlu kılıp kılmadığını tartışalım.

Öğretmen odaklı davranışçılıkta bilen öğretmendir ve öğrenciler Özden'in ifadesi ile "boş küpler" olarak bilgiyi almaya hazır pasif alıcılar olarak kabul edilir. Matematiksel nesneler, öğrencinin ürettiği değil öğrendiği nesnelerdir. Öğrencinin bilgisi ders saatleri içinde sadece öğretmenin, bilmesi için ona verdiği kadarıdır. Bu tutumda öğrenci reel dünyanın nesnel gerçekliğini kabul eder ve onu elde etmeye çalışır. Öğrenci odaklı yapılandırmacılıkta ise öğretmen, öğrencinin zihnini öğrenmesi gerekene yavaş yavaş yapılandırabilmesi için ona imkan tanıyıcı süreçleri belirler. Bu süreçleri tanımlayan Piaget'ye göre, öğrenci, karşılaştığı yeni bir durum karşısında yaşadığı bilişsel uyumsuzluğu, yeniden uyuma çevirecek süreçleri, öğretmenin rehberliğinde yaşayarak bilgiye ulaşır. Bu anlamda ulaştığı bilgi öğrencinin öznel zihni yapısının bir ürünüdür. Bundan dolayı matematiksel nesne öğrencinin zihninde ürettiği bir nesnedir. Bunu bütün öğrenciler için düşündüğümüzde her bir öğrenci kendi kavramına kendi öznelliği içinde ulaşmış olmaktadır.

Yapılandırmacılıkta bilgi nesnesine nasıl ulaşıldığı Kant tarafından ayrıntılı bir şekilde açıklanmış ve bu yaklaşım kabul edildiği için yapılandırmacılığın öğretim süreci deneyimsel bir yapılanma süreci olarak belirlenmiştir. Yani temelinde yatan Kantçı felsefi bakış açısı onun öğretim teorisini belirlemiştir. Öte taraftan, davranışçı yaklaşımın matematik nesnesine bakışında Frege'nin mantıksal nesnesini yakalamış olmamıza rağmen, bilgiyi elde etme yönteminde yani öğretimin öğretmen odaklı oluşunu, çalışmamızda geniş yer verdiğimiz Frege'nin düşüncelerinden yakalayamıyoruz. Frege, kendisini psikolojiye düşüreceğini düşündüğü için bu konuya girmemiş, buna ilişkin olarak herhangi bir fikir belirtmemiştir. Fakat bununla birlikte Frege, bilgi nesnelerinin, düşünceler alanında, herkesin yakalamasına açık, onları keşfetmesine elverişli bir şekilde bulunduklarını ifade etmiştir. Eğer Frege'nin bu yaklaşımı matematik eğitimi açısından davranışçılarca benimsenmiş olsaydı, onlara göre nesnelliği kabul edilen bilgi nesnesini öğrencilerin kendilerinin yakalamasına açık olması gerekirdi. Oysa davranışçı yaklaşımda bilgi nesnesi realist bakış açısı ile öğretmenin güdümünde olduğundan ona ulaşmak öğretmenin imkânlarıyla kısıtlıdır. Bu durumda davranışçılıkta bilgi nesnesinin edinme yöntemlerinin o bilgiye bakış açısı olan felsefi dayanaklarına dayanmadığı gerekçesiyle bir uyumsuzluk gözlenir. Bu durum davranışçılığın bir bilgi teorisi değil bir öğretim teorisi olmasıyla ilgili olduğu savunulabilir. Hâlbuki yapılandırmacılık bir bilgi teorisi de ortaya koyduğundan, bilgiye bakışı ve onun öğretimi ve elde edilmesi açısından kendi felsefi dayanaklarıyla tutarlı bir bütünsel yaklaşım oluşturmaktadır. Bu çerçevede davranışçılık, matematiksel nesneye bakışı açısında Frege'nin anlayışı ile örtüşürken bilgiyi elde etme açısından Frege'den uzaklaşmaktadır. Çalışmamız boyunca Frege'nin matematiksel nesneye dair oldukça önemsediğimiz görüşlerini öğretim basamağı için değerlendirecek olursak, onun kastettiği matematiksel düşüncelerin öğrenciler tarafından yakalanmasına, onların bilgi nesnesini "gerçek bir gölü keşfeder gibi" keşfetmesine imkân verecek bambaşka bir öğretim biçiminin geliştirilmesi gerekir. O halde, matematik felsefesi içinde birçok matematikçinin çalışmamızda da daha önce dile getirdiğimiz gibi realist olduğu düşünüldüğünde ve bu görüşün Frege ile birlikte anıldığı da göz önüne alındığında, diyebiliriz ki bu bakışın matematik öğretim teorisi oluşturulmayı beklemektedir.

Bilgiye ve nesnesine bakışları açısından matematik felsefesine bakıldığında Frege ve Kant'ı karşı karşıya getirmiş oluruz. Frege'nin bilgi nesnesinin ancak var olan düşünceler alanından keşfedilerek yakalanacağını savunması, buna karşılık Kant'ın bilgi nesnesini insanın üretimine bağımlı kılması, yani onu düşünen insanın kendi yetilerine bağlı icadı olarak görmesi, matematiksel nesnenin bir keşif mi, yoksa bir icat mı olduğu tartışmalarına da taşır bizi. Bu tartışmayı, bu çerçevede, matematik öğretimi kapsamında değerlendirdiğimizde, yapılandırmacılıkta öğrencinin bir matematikçi gibi kendi bilgi nesnesini icat ettiği, fakat realist bakış açısını benimsemiş bir matematik felsefesi yaklaşımında ise öğrencinin bilgi nesnesini keşfetmesi gerektiği söylenebilir.

Bu konuda Hersh, matematiksel nesneleri insanların icat ettiğini ifade eder. Bunuınla birlikte ona göre, "(…) matematiksel nesneler bir kere var olmalarından itibaren, bizim keşfetmekte büyük zorlukla karşılaşabileceğimiz, lakin bizim onlar hakkındaki bilgimizden bağımsız olarak bulunan iyi-belirlenmiş özelliklere sahip olmaktadırlar" demektedir (Hersh, 2013: s. 369). Bu görüş Frege'nin nesnel düşünceler alanı ile uyuşmaktadır. Bunu şöyle örneklendirebiliriz: "1" Frege için mantıksal bir nesne iken, Hersh için bir icattır. Fakat "1+2+3+4+…+100" gibi ardışık toplamlarda orta değere göre simetrik iki sayının toplamının aynı olduğu düşüncesi (yani, 1+100=2+99=3+98=...=50+51=101), biz onu fark etmesek bile oradadır ve doğrudur. Büyük matematikçi Carl F. Gauss (1777-1855), bunu, -rivayete göre dokuz yaşında iken- keşfetmiş ve günümüzde ardışık sayıların toplamlarında kullandığımız Gauss yöntemlerini üretmiştir. Matematiksel düşüncelerin bizim keşfimize açık olduğu fikri her iki yazarda da gözlemlenebilir. Buradan dolayı "bilinen kavramlar arasındaki ilişkilerin keşfedilebiliyor olması o kavramların kendilerinin de keşfedilmiş olmasını gerektirir mi?" sorusunu sorabiliriz. Örneğin, ardışık sayılar arasındaki ilişkilerin keşfedilebiliyor oluşu, "1" sayı nesnesinin de bir keşif olduğu bilgisini verir mi? Bunu incelemek için şöyle bir örnek üzerinde düşünelim. Bir α ve β açısının sinüs ve kosinüs tanımlarından ve daha önceki bilgiler olan Pisagor bağıntısı ve kosinüs teoremlerinden yararlanarak cos(α-β) açılımına ve daha sonra cos(α+β) ve cos(α-β) açılımlarından yararlanarak [cosα+cosβ]'nın açılımına ulaşabilirsiniz. Bu durum, açıktır ki, kavramlar arası bağların fark edilmesi ya da keşfedilmesi ile mümkündür. Eğer biz trigonometrik fonksiyonları zaten tanımlamışsak, "$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha . cos\beta + sin\alpha . sin\beta$" gibi bir eşitliği artık icat olarak göremeyiz. Çünkü bu eşitliğin, biz onu fark etmesek bile doğruluğu kesin ve mümkündür. Eğer bu eşitliği fark etmemiş ve kullanmamış olsaydık bile o, potansiyel olarak var olmaya devam edecekti. Bu işlemsel sonuçlar Frege için çıkarımsal özelliklerinden ve yargıda bulunmanın gerekçelendirilmesi ile ilgili olduğundan analitik yargılardır. Fakat Kant'a göre analitik yargılar, çelişmezlik ilkesine göre oluşup bilgimizi genişletmeyen yargılardır. O yüzden bu tür durumlara o, bir "yöntem tasarımı" demekte ve bunları kavram şemaları ile açıklamaktadır. Kant saf görü temelinde oluşturulamayan işlemler için şu açıklamayı yapar:

> Böylece, birbiri ardına beş nokta koyacak olursam, ….., bu beş sayının bir imgesidir. Buna karşı, salt genel olarak bir sayıyı düşünecek olursam, bu ister beş ister yüz olsun, bu düşünce daha çok bir çokluğu (örneğin bin) belli bir kavrama uygun olarak bir imgede tasarımlamak için bir **yöntem** tasarımıdır, bu imgenin kendisi değil, çünkü böyle bir sayı durumunda imgeyi ancak güçlükle göz önüne getirebilir ve kavram ile karşılaştırabilirim. İmgelem yetisinin bir kavrama imgesini sağlamaya yönelik bu evrensel işleminin bu tasarımını bu kavramın şeması olarak adlandırıyorum (Kant, 2010: 206-207).

Şimdi, bir konu alanındaki ilk matematiksel nesneye yönelmek istediğimizde, örneğin "ilk trigonometrik fonksiyonlara nasıl ulaşırız?" gibi bir soru sorabiliriz. Bir trigonometrik fonksiyonun tanımını henüz yapmadan onu kullandığımız bilinmektedir. Örneğin bir dik üçgenin kenarları arasındaki ilişkiler, yaşamın gerçekliğinde tanımlanmadan kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin henüz tepe noktasına ulaşılmamış bir dağın yüksekliğinin, güneşin ve uzunluğu belli bir çubuğun yardımıyla bu bağıntılar kullanılarak bulunduğu bilinmektedir. M.Ö 276-196 yıllarında yaşamış Eratosthenes, açısal ilişkilerden yararlanarak dünyanın çevre uzunluğunu günümüz değerlere yakın bir şekilde hesap etmiştir. O halde bu ilişkilerin en başına dönerek ilk soruyu sorabiliriz: "Açı, bir keşif midir, icat mıdır?" Bilgi nesnesini edinme süreçlerinin tamamına icat diyen ve felsefenin prensi olarak bilinen Kant "Bir filozof için, daha önce kendilerini dağınık bir şekilde —onları somut olarak kullanırken— ona göstermiş kavram ve ilkelerin çeşitliliğini bir tek *a priori* ilkeden türetebilmekten, böylece de her şeyi bir bilgide birleştirebilmekten daha fazla arzulanabilecek bir şey olamaz." (Kant, 2000: s. 75) demiştir. Kant'ın bu arzusunun etkileyici bir tutku olmakla birlikte eylemsel gerçekliğe ne kadar uygun olduğu düşündürücüdür. Daha öncede ifade ettiğimiz gibi öğrencinin aritmetik üstü konularda bir matematikçi gibi davranması ve o bilgiyi zihninde yapılandırıp icat etmesi pek olası değildir. Bilindiği üzere, matematik eğitimi için izlenmesi gereken bir müfredat vardır ve öğrencinin bu müfredatın içinde geleceği mümkün noktalar önceden belirlenmiştir. Bu yüzden öğrencilerin kendi bilgilerini edinme süreçlerini yaşadıkları yapılandırmacı öğretim teorisinde, onların birbirinden kopuk bambaşka noktalara ulaşmaları beklenmez. Bunun için öğretmen yönlendirme yapar fakat öğrencinin zihni özgürleşeceği için şimdiye kadar kimsenin fark etmediği sonuçlara ulaşması olasıdır. Bu keşif sürecinde kavramlar arası bağları kurarken daha önce elde ettiği bilgi nesnesini yeni keşifler için kullanabiliyorsa o kendi bilgisini taşınabilir olması o bilginin kendinden uzaklaştığını ve artık onun için nesneleştiği anlamına gelecektir. O halde bahsi geçen iki bakış açısında kavramlar arası bağların keşfi kabul gören bir durumdur. O halde bu bakış açılarında ilk matematiksel nesnesinin kuruluşu aşamasında farklılıklar görülür. Aritmetiğin temelinde bulunan kardinal sayıların bu anlamda bir mantıksal nesne mi yoksa insan zihninin üretimi mi olduğunu Frege ve Kant'ın verdiği cevaplar üzerinden inceleyelim:

Frege'nin kardinal sayıları elde edebilmek için öncelikle sayısal eşitliğin anlamını saptamaya yöneldiğini daha önce ifade etmiştik. O, "Bir sayı hakkında öznel bir tasarımımız yoksa onu nasıl elde edebiliriz; o bize nasıl verilmiş olur?" sorusunu sorar. Sayıyı elde edebilmek için sayı sözcüğünün geçtiği tümcenin anlamını açıklamak gerekir. Çünkü sayı sözcüklerinin tümce bağlamında ancak gönderimleri vardır. Bu sözcükler, tümcede, kendi başına duran nesnelerin yerine dururlar. Frege'ye göre; bir nesnenin tanımı o nesne hakkında bir iddiada bulunmaz, sadece onu gösteren sembolün anlamını açıklar. Bu tanım yapıldıktan sonra, tanımın kendisi nesne hakkında bir yargıya dönüşür ve artık nesnenin kendisini ortaya koymaz, sadece onun hakkında bir bildirimde bulunur. Bu durumda tanım, nesneden uzaklaşır. O halde, tanım ile nesne arasındaki bağları kurabilmek için, o nesnenin tek bir şekilde verilebileceğini kabul etmeliyiz. Ancak böylelikle o nesneye dair yapılan bildirimlerin eşitliğinden bahsedebiliriz (Frege, 2008: s. 155-161). Bu Frege'nin "Anlam ve Yönletim Üstüne" makalesinde eşitliği nasıl ürettiği açıklaması gibidir. Yani bildirimlerin eşitliği, ancak bildirimlerin yönletimi olan nesnelerin özdeşliği ile mümkündür. Bütün eşitlikleri o nesnelerin özdeşliğinden oluştururuz.

Frege'ye göre kavram bir nesne hakkında bildirimde bulunurken, sayı ise bir kavram hakkında bildirimde bulunur. O, bundan ötürü sayıyı kümeler kuramına dayandırarak temellendirir. Sayıyı küme kavramı ile tanımlayabilmek için Frege, önce sayısal bir eşitliği saptamak ister. Kardinal sayıların birer mantıksal nesneye dönüşmesi için, önce o mantıksal bir çıkarım yapmalıdır. Bu yüzden temel kabullere ihtiyaç duyar. Bunun için de Hume'un ilkesinden yaralanır: "İki sayı, birinin bir birimi diğerinin bir birimine karşılık gelecek şekilde bir araya gelmişlerse onların eşit olduklarını söyleyebiliriz." (Hume'dan akt. Frege, 2008: s. 156). Frege bununla, bir bağıntı altında iki küme arasında birebir eşleme yapılabildiğini kabul eder. Buradan da, bir kavramın altına düşen nesnelerle başka bir kavramın altına düşen nesneleri birebir eşleyebilme olanağı varsa bu iki kavram eş sayılıdır sonucuna ulaşır. Sonuçta da eş sayılı kavramından yaralanarak kardinal sayıyı tanımlar: "F kavramına ait olan bir sayal (kardinal) sayı, 'F kavramıyla eş sayılı' kavramının kaplamıdır." (Frege, 2008: s. 162). Artık bu bilgiden dolayı sayıları Cantor'un kümeler kuramına bağlı bir şekilde temellendirerek mantıksal olarak ifade edebiliriz. Örneğin "0, 'kendisiyle aynı olmayan' kavramına ait olan sayma sayısı"dır. "Kendisiyle aynı/özdeş olamayan" bir şey söz konusu olamayacağı için bu kavramın kaplamı altında herhangi bir nesne bulunmaz. O halde bu, yani boş küme "0" sayısını gösterecektir. Artık sıfırı tanımladıktan sonra "1" sayısını, elde ettiğimiz bu mantıksal nesne yardımıyla üretebiliriz. Bu yüzden "1" bizim için "'0'la aynı olan' kavramına ait olan sayı"dır (Frege, 2008: s. 172). Biraz önce sıfırı elde ettiğimiz için, sıfırla aynı olan kavramı kullanabiliriz ve bu tek türlüdür, bu yüzden "1" sayısını verecektir (Frege, 2008: s.

161-172). Aslında burada Frege, günümüzün deyişiyle "denklik sınıfları"nı ifade etmiş olmaktadır. "0, 'kendisiyle aynı olmayan' kavramına ait olan sayma sayısıdır" derken içinde hiçbir eleman bulunmayan bütün kümeler "0" sayısını verecektir, diyebiliriz. Bunu devam ettirirsek, içinde bir eleman bulunan bütün kümeler "1" sayısını, içinde iki eleman bulunan bütün kümeler "2" sayısını, … verecektir. Bu şekilde başlangıç varsayımlarından yola çıkılarak yapılan belli çıkarımlar sayesinde kardinal sayılar ele geçirilir. Böylece Frege zaten var olan nesnelerin, yine zaten var olan kendileriyle "aynı olma" ve "aynı olmama" düşüncelerini yalnızca düşünceler alanından yakalamış, bu yakalama ve temel varsayımlar yardımıyla mantıksal bir nesne olan sayıları görünür kılarak açığa çıkarmış olur.

Şimdi de Kant'a göre kardinal sayılar nasıl inşa ediliyor onu inceleyelim. Kant *Prolegomena*'da bu konuyla ilgili olarak şu açıklamayı yapar:

> Geometri uzamın saf görüsünü temel alır. Aritmetik kendi sayı kavramlarını, zaman içinde birbirini izleyen birimlerin eklenmesiyle meydana getirir (…) Ama her iki tasarım da sırf görüdürler; çünkü eğer cisimlerin ve onların değişimlerinin (hareketlerinin) deneysel görülerinden tüm deneysel olan, yani duyumlamaya ait olan her şey çıkarılırsa, geriye yine de bunların temelinde *a priori* olarak bulunan ve saf görüler olan, bu nedenle de kendileri hiçbir zaman çıkarılamayacak olan uzam ve zaman kalır (Kant, 2000: s. 32, §10).

Buradan da anlaşılacağı üzere Kant, sayının zaman ve uzay saf görüleri içinde tasarımlanmasını kaçınılmaz bulmaktadır. Birbirine eklenen birimler 1'i, 2'den ayırt etmemizi sağlayacak bir sentezlemeye girerler. Kant'a göre sayı tasarımı anlama yetisinin saf kategoriler çizelgesinde nicelik başlığı altındaki tümlük kategorisine aittir. Önce zaman görüsünde birlik kategorisi altına düşen birimler yakalanır. Bir birimin başka birimlerle birlikte ve ilişkisel olarak düşünülmesi çokluk kategorisinde değerlendirilir. Bütün bu ilişkisel durumların belli bir düzenekte ifade edilmesi ise tümlük kategorisi altında yapılır (Güven, 2012b: s. 314). Anlama yetisinde yapılan sentezleme sonrasında sentez-şema bağıntısı kurulur. Şema, sentez işlemi sonucunda gerçekleşen üretimin kuralıdır. Böylece şema yardımıyla kavramın görüde nasıl üretileceği belirlenir. Bu bakımdan bir sayıya işaret eden bir resim sayının şemasından farklıdır. Sayılar, görüden yola çıkılarak ve saf görü formları kullanılarak üretilebildiği için sentetik ve *a priori*dir. Görüler ve saf görü formları olmadan Kant için hiçbir nesnenin bilgisine ulaşamayız. Bu yüzden Kant için bütün süreç bir üretim bir tasarımdır. Daha önce de Yurdakul'un sözleriyle ifade ettiğimiz gibi yapılandırmacılara göre, "bireysel bilişte oluşan öznel anlamların sosyo-kültürel bağlamda özneler arası süreçlerle yeniden oluşturulması" dolayısıyla öğrencinin kendi öznel bilgisine ulaşması söz konusudur. Bu ise öğrencinin zihinsel sürçlerle aslında kendini yeniden üretmesidir.

Kant böylece matematiksel nesne üretimini insan ait özelliklere bağlı kılarak, matematiğin dedüktif yapıdaki mantıksal çıkarımlarının ilksel olarak hem *a priori* hem de *sentetik* yapıda olduğunu savunur.

# SONUÇ

Çalışmamızın en önemli sonucu önce matematiksel nesnenin neliğinin belirlenmesinin matematik eğitimi yöntemlerini belirleyeceği savunusudur. Aynı zamanda ülkemizde, lise düzeyinde matematik eğitiminde davranışçılıktan yapılandırmacılığa geçiş süreci içinde yaşanan bazı aksaklıkların felsefi temellerini araştırma hedefi ile ortaya konmuş çalışmamız, matematik eğitimini matematik felsefesi bakış açılı bir değerlendirme sunmaktadır.

Ülkemizde Cumhuriyet'in ilk yıllarındaki ilerlemecilik akımının etkisiyle köy enstitüleri oluşturulur. Köy enstitülerin kapatılması sonrasında zamanla eğitim sisteminde esasicilik ve daimicilik felsefelerinin etkili olduğu söylenebilir (Erkılıç, 2008: s. 16). Bu eğitim sistemlerinde, sürekli doğru kabullerin tekrarlandığı öğretim programları, ezbercilik, kültür aktarmacılığına odaklanma, konuyu ve öğretmeni merkeze alan eğitim anlayış ve uygulamaları bu bağlamda gözlemlenenlerdir. Bu programların genel anlayışının bilgi aktarmacılık ve ezberlemeye dayalı olması dolayısıyla eğirim sisteminin ilerlemecilikten uzaklaştığı gözlenmiştir (Sarpkaya'dan akt. Erkılıç, 2008: s. 16). Sonrasında eğitimde 2005 yılında Türkiye'de, dünyada ise Amerika, Yeni Zelanda, İsrail, Kanada, İsviçre, Avustralya (Matthews'den akt. Aydın, 2012: s.13) gibi ülkelerde ilk ve orta öğretim programlarında yapılandırmacı odaklı sisteme geçilmiştir. Yapılandırmacılık öğrenci odaklı olmasına karşın yukarıda da belirttiğimiz gibi öğrenciyi yönlendirme aşamasında öğretmene oldukça fazla görevler veren bir sistemdir. Ülkemizde yapılandırmacılık içinde öğretmenin bu sisteme hazırlığına yönelik çalışmalar yeterli olmadığı gibi Milli Eğitim Bakanlığınca hazırlanan yapılandırmacı bakış açılı lise matematik kitaplarının okullarda etkili kullanılmadığını gözlemlemek mümkündür. Bu eğitim politikalarının değişimini yani yapılandırmacı eğitim yöntemlerinin ilköğretim düzeyinde kullanıldığı tespit edilebilirken lise düzeyinde tam donatılamayan öğretmenin, sınıflarında süreci yönetmekte sorunlar yaşadığı hatta bu sistemi ve bakış açısını reddetmeye varan tepkilerle karşıladığı ifade edilebilir. Bunun neticesi olarak ülkemizde lise düzeyi matematik eğitimi çoğunlukla davranışçı yaklaşım olan anlatımlar ve teori ispatlarıyla yapıldığı gözlemlenebilir.

Çalışmamızda lise matematik eğitiminde daha önce yaşanmış matematik eğitim modelleri ile günümüz eğitim modelleri arasındaki matematiksel nesne anlayışları incelenmiştir. Bu doğrultuda birinci bölümünde matematik felsefesi kapsamındaki matematiksel nesne anlayışları ele alınmıştır. Görevinin matematiği tanımlama ve açıklama olduğu kabul edilen matematik felsefesinin, günümüzde kimi filozoflara göre bazı yenilenmelere gereksinimi olduğunu daha önce dile getirdik. Buna göre matematiğin kendi içindeki neliği sorunsalı ve onun insanla etkileşimi sonucunda oluşan sorunlar matematik felsefesi kapsamında irdelenmelidir. Böyle bir kapsam gösterir ki matematik eğitimi sorunları matematik felsefesi bakış açısı ile değerlendirilebilir ve çözüm yolları önerebilir. Bu savımız matematik eğitimi tartışmalarının sadece pedagojik düzeyde çözülemeyeceğini savunan matematik filozofu Hersh'i destekler biçimdedir. Matematik felsefesinin önemli bir bileşeni olan matematiksel nesnenin neliği konusu önce Pythagorasçılar, Platon ve Aristoteles gibi Antik filozofların görüşleri ile incelenmiştir. Bütün göğün bir ahenk ve sayı olduğunu düşünen Pythagorasçılar,  tüm her şeyin, sayıların "taklit edilmesi" ile var olduklarını söyleyerek matematiksel nesneyi "şey"lerle bir olarak görürler. Platon'da  ise sayılar idealardan "pay alma" ile var olur ve ezeli-ebedi olma özellikleri ile matematiksel nesneleri duyusal olanla idealar arasında aracı gerçeklikler olarak görerek "şey"ler ile matematiksel nesneleri birbirinden ayırır. Realizmin babası Aristoteles ise matematiksel nesneleri ne "şey"lerle bir sayar ne de "şey"lerden ayırır. Ona göre matematik "şey"lerin incelenmesidir. Bu ayrım çalışmamızda nasıl bir araya geldiklerini belirginleştirdiğimiz birbirine zıt iki görüşü bir araya getiren matematik felsefesi içindeki Platoncu realizm görüşünü açıklar. Buna göre Platoncu realizmde, matematiksel nesneler, Platoncu bakışla insan üretiminden bağımsız bir gerçeklik olarak vardır ve varlığı Aristoteles bakışıyla "şey"lerin varlığına bağlıdır. 17. yüzyılda Descartes, matematiksel nesnelerinin zihinsel nesneler olduğu dolayısıyla değişmez olduğu fikrinde iken Leibniz matematiğin analitik yapıda olduğunu iddia ederek evrensel doğruluklara yalnız matematikle ulaşılacağını ileri sürmüştür. Bunun yanısıra Descartes matematiksel bilgilerin uğraştığı şeylerin doğada olup olmamasına aldırış etmemek gerektiğini söylerken Leibniz matematiksel bilgilerin akılsal olmaları dolayısıyla empirik dünyayla bir ilişkisinin olmasının imkânsız olduğunu savunur. Bu anlamda Descartes ve Leibniz'in görüşlerinde matematiksel bilgilerin saf akılsal ürünler olarak duyusal olandan ayrıştırıldığını, fakat bu ayrışma sonucunda matematiksel nesnelerin insan üretiminden bağımsız nesnel gerçeklikler olarak birer bilgi nesnesi olduklarını göremeyiz. Matematiksel nesnelerin varlığını açıklayan Frege ile başlatılan Platoncu realizm, Bernays'in ifadesi ile matematiğin nesnelerini ve bağıntılarını içeren ideal bir nesneler dünyasının var olduğunu ileri sürerek, Platonculuğun metotlarını kavramsal bir realizm anlamında yorumlamıştır. Bu durumda matematiksel nesneler insan üretiminden bağımsız var kılınmış ve o nesnelerin elde edilmesinin bir keşif süreci ile olabileceği savunulmuştur. Bu konuda Frege, nasıl bir gölü keşfedip ona "sarı deniz" dediğimizde onu yaratmış olmuyorsak matematiksel nesnelerin de yaratılmadığını savunmuştur. Frege için iki tür bildirimde bulunan yargı cümleleri vardır. Birincisi nesneler hakkında bildirimde bulunanlar, ikincisi kavramlar hakkında bildirime bulunanlar. Frege sayıların kavramlar hakkında bildirimde bulunan ifadeler olduğunu savunur. Ona göre sayılar bir insan icadı değil kavramlar arası bir keşiftir. Fakat bu düşünce örneğin sıfırın doğadan keşfedilemeyeceği gibi gerekçelerle eleştirilmiştir. Yıldırım bu konuda sıfırın keşfedilemeyeceğini ya da insan zihninin bir ürünü olmadığını savunurken onun sayısal ilişkilerin bir gereği olarak ortaya konması gerektiğini ileri sürer. Frege ise sayıların bu ilişkilerden oluşmasını bilimsellik altında bir batıl inanç olarak ifade eder. Burada dikkat edilmelidir ki Frege, eğer sayısal ilişkilerden ötürü sıfırın varlığını ortaya koyacaksak "sıfır" özelliğini taşıyan bir nesneye sahip olmamız gerektiğini söyler. Böyle bir nesne bulunamayacağı için "1"in varlığından "sıfır"ı üretmiş olamayacağımızı savunur. Frege açısından bu durum şöyle düşünülebilir: "Sıfır" özelliğine sahip bir nesne doğada bulunamaz; bu olsa olsa "yokluk" olacaktır. Yani o, bir nesnenin özelliği değil kavramsal bir ifade olarak kabul edilecek ve bu kavram hakkında bir bildirimde bulunulucaktır. "Yokluk" ise keşfedilmesi gereken bir düşünce olacaktır bizim için. O halde "yokluk" bir nesnenin özelliği olarak değil kavramsal düzeyde gözlemle keşfedilebilir ve ifadelendirilebilir. *Aritmetiğin Temelleri'*nde Frege; sıfırı "'kendisiyle aynı olmayan' kavramına ait olan sayal sayı" olarak belirtir. Yani ortaya çıkan çelişik durumun oluşturduğu sayı sıfırdır.

Bu düzeyde mantıksallaştırılan matematiğin insandan bağımsız gerçekliğe sahip olduğu düşüncesine tepki gecikmeden nominalistler tarafından yapılır. Onlara göre matematiksel nesneler yalnızca birer sözcükten ibaret olmalarından dolayı bir gerçekliğe sahip değildir. Yıldırım'a göre matematikte soyut, bilimdeyse kuramsal nesnelerden söz etmeksizin bir gelişme göstermek mümkün değildir, fakat nominalist Field'e göre soyut nesnelerin kabulü ne bilim ne de matematik için gereklidir. Ona göre Platoncu realizm görüşü realizmin içinde matematik gerçekliği açıklamak için bizi matematiksel varlıklara inanmaya zorlar. Fakat teoremlerin doğruluğunu daha açık bir şekilde göstermek onların var olduğunu göstermekten daha zordur. Matematiksel nesnelerin varlığı problemi bu karşı çıkışlarla birlikte oluşmuş olur. Bu sorunsala bir de yapısalcılar tarafından verilen cevaplar eklenir. Yapısalcılar birbirine zıt bu iki görüşün tam ortasında yer alarak matematiksel nesneleri insan zekâsının çevreyle olan sürekli etkileşimi içinde oluşturduğu betimleyici ya da açıklayıcı kavramlar olarak değerlendirirler. Bu açıklama çalışmamızda değinildiği gibi daha sonraki süreçte yapısalcılar içinde bir ayrıma neden olmuştur. Matematik yapılardan oluştuğunu savunarak bazı yapısalcılar matematiğin her cümlesinin bizden bağımsız olarak doğru veya yanlış olduğunu ileri sürüp, içkin matematiksel nesnelerin değil matematiksel yapıların varlığını kabul etmişler ve bu yapıların dışında matematiksel nesnelerin bir özelliğinin olmadığını savunmuşlardır. Bununla birlikte Benacerraf'a göre, doğru olan matematik cümlelerin, doğruluklarını, matematiksel nesnelerin özelliklerinden ve birbiriyle olan ilişkisinden almaları onları zaman ve mekândan bağımsız kılar ve bu durum matematiksel nesneleri insanlar ile aralarındaki bağı koparır. Bu bakış açısı kimi yapısalcı matematik filozofunu yapısalcı görüş hakkında yeni revizyonlara sevketmiştir. Bununla birlikte yeni-Fregeciler arasında matematiksel yapıların varlığını kabul eden bu konuda yeni Fregeciliğin yeni revizyonlara ihtiyacı olduğunu savunanlar olmuştur. Bu yorumlamaların günümüze kadar devam ettiği söylenebilir.

Çalışmamızın ana hedefi davranışçı ve yapılandırmacı öğretim teorilerindeki matematiksel nesne anlayışlarını yakalamaktır. Bu hedefle bir sonraki bölümde yapılandırmacılığın matematiksel nesneye bakış açısını yakalayabilmek için Kant'ın matematiksel nesne anlayışını inceledik. Kant'a göre nesnelerin kendileri bizim tarafımızdan bilinemezken onları içimizde kendiliğinden ve doğuştan var olan uzay ve zaman sezgisi ile algılayabiliriz. Bunlar nesneleri algılamamızın zorunlu koşullarıdır. Kant deneyimin bilgisinin nasıl elde edilebileceğine dair kurduğu epistemolojisinde, matematiksel doğrulukların analitik *a priori* olduğunu ve bu anlamda bilgimizi genişletmeyen fikirler arası ilişkiler olduğunu savunan empiristlerden Hume'u eleştirir ve matematiksel doğrulukların bilimin doğrulukları olarak kullanılabilmesi için başka bir yapıda olduklarını düşünür. O, bu matematiksel doğrulukların *a priori* olmalarının yanı sıra sentetik doğruluklar olması gerektiğini savunur. Bu yönü ile matematiksel doğruluklar bilgimizi geliştiren ve genişleten, ona değer katan doğruluklardır. Kant'ta saf uzay sezgisi formu tüm görüngü biçimlerini biriktiriken saf zaman görüsü sezgisi bu görüngü biçimlerinin ardıllığını belirleyerek değişimin algılanmasını sağlar. Kant'ta bilgi nesnesi insandaki hissetme ve anlama yetilerinin etkileşimi sonucu oluşur. Hissetme yetisi "kendinde şeyler"den aldığı "görüler"i *(Anschauungen)* saf zaman ve uzay formları içerisinde düzenleyip onlara birlik kazandırırken, anlama yetimiz ise sahip olduğu saf kavramlar yani kategoriler yardımıyla bu görüleri bilince taşır yani onları bilmemizi sağlar. Tüm sentezleme ve tüm görüngü biçimlerine birlik verilmesi sürecinde insanda bulunan özel yetiler ve saf sezgiler kullanıldığı için oluşan bilgi nesnesi *a priori* doğruluğa sahipken görüngü biçimlerinin varlığı aynı zamanda o bilginin sentetik bir doğruluk olmasını zorunlu kılar. Fakat saf sezgilerle kavranan saf *a priori* doğruluklar da vardır. Örneğin bir doğrunun sonsuza kadar uzatılabileceği yargısı uzay ve zaman saf sezgileri altında oluşan birlik sayesinde algılanır. Kant buna saf matematik demektedir. Ona göre saf matematik olanaklı olmasa o zaman deneyimsel sezgi ile elde edebileceğimiz matematiksel bilgi de olanaklı olmayacaktır. Kant'ta nesnenin mekanı yargı, yargının mekanı ise düşüncedir. Bu durumda yargıdan bağımsız nesne düşünülemez. O halde buradan çıkarabiliriz ki Kant'ta matematiksel nesneler, duyusal nesnelerin bize göründükleri biçimlerinin tasarımları olan sentetik *a priori* yargılardır. Kant, matematiğin teoremlerindeki zorunluklu çıkarımları analitik yargılar olarak değerlendirir. Fakat ona göre, mantıksal çıkarımlarda zorunluklu çıkarımların olması matematiğin üretildiği ilkelerin de zorunluklu analitik yapıda olacağı anlamına gelmez. Kant'a göre, matematiksel nesnelerinin matematik ilkeler ile tasarımlanması hem insanın yetilerine bağlı *a priori* zorunluluğu hem de duyusal sezgiler ile kavranan öznel koşulların birlikteliği ile mümkün olur ve matematiksel nesneler bu yüzden sentetik *a priori* yargılar olarak kabul edilebilir.

Çalışmamızda daha sonraki bölümde matematiksel nesnelerin insana özgü yeti ve özelliklerle tasarımlanabileceğini savunan Kant'ın bu görüşlerini eleştiren Frege'nin görüşleri ele alındı. Matematiksel nesnelerin insan tasarımı olamayacağını savunarak onların nasıl şeyler olduğunu araştırırken bu araştırmanın kökenlerinde mantık ilkelerine ulaşan Frege'nin karşısına anlam problemi çıkar. Frege'nin bu problem çerçevesinde amacı, matematiği yapabilmeye devam edebilmemiz için gerekli olan matematiksel eşitliklerin nasıl mümkün olduğunu araştırmaktır. Bu açılım dilsel anlamda da bir çözümleme getirdiğinden, felsefe tarihindeki çağdaş dil felsefesi alanı Frege'nin bu anlam problemine yönelik çözümlemesi ile başlatılır. Frege bir adın anlamını ve o adın yönlettiği nesneyi birbirinden ayırır. Burada dikkat edilmelidir ki eğer bir ad duyusal olana ait bir özel ad ise adın yönletimi duyusal alandan bir nesne olurken matematiksel ifadelerde yönletimin gösterdiği nesneler tüm matematiksel nesnelerin bulunduğu düşünceler alanındaki nesnelerdir. Frege'ye göre farklı adlarla ilişkilendirilen bir eşitlikte ilişkilendirilen adların anlamları farklı ama yönletimlerindeki nesneler aynıdır. Bir eşitlikte ilişkilendirilen adlların yönletimleri özdeş ise kullanılan eşitlik mümkün olur ve böylece eşitlik bağıntısı özünde bir özdeşlik bağıntısını barındırır. Eğer eşitliğin ifade ettiği önerme düzeyinde değerlendiriliyorsa eşitliğin anlamı düşünce, yönletimi ise doğruluk değeri olacaktır. Bu durumda doğruluk değerleri aynı olan cümlelerin yönletimleri de aynı olacaktır. Öte taraftan doğruluk değeri açısından değerlendirilen bir bileşik cümlenin bileşenleri, doğruluk değerleri özdeş olan başka cümleler ile değiştirilebilir. Yönletimleri aynı olan ifadeler ve cümlelerin biri diğerinin yerine kullanılabilmesi matematik yapılmasını olnaklı kılar ve eşitliklerin temeli incelendiğinde bir özdeşlik ilkesine yani mantık ilkesine ulaşabiliriz. Frege, bir yargının analitik olmasının o yargının gerekçelendirilmesi ile ilgili olduğunu kabul eder. Bu durumda, bir doğruluğun gerekçelendirilmesinde en son aşama olarak eşitliklerin yönletimleri olan doğruluk değerlerine ve doğruluk değerlerinin özdeşliğine ulaşılabiliyorsa bu bahsi geçen doğruluğun gerekçelendirilmesi olacağı için bu doğruluklar analitik doğruluk olacaktır. Çalışmamızda Frege'de kardinal sayıların belirlenimleri yapmak amacıyla onun yargı nesnesini nasıl belirlediğini inceledik. Bu incelemede çalışmamız için çıkarılabilecek önemli sonuç, matematiksel nesnelerin nesneler hakkında değil kavramlar hakkında bildirimde bulunan ikinci düzey yargılar olduğu düşüncesidir. Bununla birlikte Frege'de düşünceler düşünme eyleminden bağımsız ve nesneldirler. Ontolojik gerçekliği ise duyusal ve düşünsel alan olmayan üçüncü bir alan olan *Reich* alanıdır. Bu, Frege'de matematiksel nesneleri insan düşüncesinden koparıp kendi gerçekliği içinde kabul etmesine neden olur. Bu yüzden doğruluklar da o düşüncelerin belirlediği doğruluklar olacağından nesnel olmakla birlikte zamana, mekâna, insanın etkinliklerine ve öznelliğine bağlı değildir. Frege bütün bu düşünceler altında aritmetiğin temelerinde bulduğu mantık ilkelerini matematik üretmenin ilkeleri olarak kabul ederek bütün bir matematiğin mantıktan türetildiği savını öne sürer. Bu durum ise matematiğin temelleri problemini ortaya çıkarır. Bu sorunsala mutlakçı okullar olarak anılan mantıkçılık, biçimcilik ve sezgicilik okullarından cevaplar gelir. Mantıkçılık, değindiğimiz gibi, matematiğin mantık ilkelerinden türetilebileceğini ve teoremlerin mantık ilkeleri ile ispatlanabileceğini savunurken biçimciler matematiğin soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistem olarak tamlığını savunmuşlar, tüm ispatların matematiğin kendi içinde kalarak yapılabileceği savını öne sürmüşlerdir. Fakat çok geçmeden biçimcilerin bu düşüncesi Gödel tarafından matematiğin bir tamlık oluşturamayacağı ispatı ile çökertilir. Sezgiciler ise tüm ispat ve türetmeler için tek geçerli yolu insan sezgileri olduğu savunusuyla matematiksel nesnelerin insanın sezgileri ile elde edileceği görüşünü benimsemişlerdir. Bu görüşün, ilerleyen başlıklarda da değinildiği üzere, yapılandırmacılığın temellerinde yer aldığı gözlemlenmiştir. Çalışmamızın devamında günümüz filozofların görüşlerine yer verilmiştir. Quine matematiğin dil ve dünya faktörlerinin etkileşmesi ile oluştuğunu savunarak, doğrulukta analitik-sentetik ayrımı yapılmasını uygun bulmaz. Günümüz filozoflarıyla birlikte Frege'nin görüşlerini savunanlar, nominalistler ve yapısalcılar arasında revizyonlar yapılmasını önerenler olmuştur. Yapısalcılık ile Fregecilik birbirine daha yaklaşırken, nominalistler matematiğin bilim için temel teşkil edemeyeceği savunusuyla günümüz tartışmaları içerisinde yer almaya devam etmişlerdir. Matematik doğrulukların mutlaklığı üzerine yapılan tartışmalar daha da gelişerek yarı-deneyimcilerin savunduğu matematiğin bir insan etkinliği olduğu bundan dolayı matematiksel bilginin yanlılabileceği savunusuna kadar ulaşır. Nominalistler matemaiksel nesnenin varlığını kabul etmezken yarı-deneyimciler matematiksel nesneleri insanın üretimi olarak kabul ederler. Bu anlamda çalışmamamız içinde gerekçeleriyle belirlediğimiz gibi yapılandırmacılık matematik felsefesinin temel görüşlerinden biri olmuştur.

Çalışmamızın ikinci bölümünde ise matematik felsefesinin matematiksel nesne anlayışlarının matematik eğitimi içinde belirlenmeye çalışıldı. Bunun için matematik eğitim teorilerinin bilgiye felsefi bakış açıları pozitivizm ve post-pozitivizm başlıkları altında incelenerek aralarındaki ayrımlar belirlenmiştir. Bu inceleme bize göstermiştir ki bu bakış açılarına göre matematiksel nesnenin varlığı iki biçimde mümkün olmaktadır. İlki matematiksel nesnelerin insanın üretiminden bağımsız varlığının kabulü, diğeri ise insan üretimi ve etkinliklerine bağımlı bir matematiksel nesnenin var oluşu. Daha sonra bu ayrım çerçevesinde daimicilik, ilerlemecilik, yeniden yapılanmacılık ve inşacılık, esasicilik ve politeknik eğitim görüşleri incelenerek bu eğitime felsefi bakış açıları tanıtılmıştır. Bu inceleme sonucunda daimicilik, esasicilik ve politeknik eğitim görüşleri matematiksel nesneyi insan üretimine bağlı kılmadan kabul ederken, ilerlemecilik, yeniden yapılanmacılık ve inşacılık eğitim görüşleri insanı aktif kılarak onun üretimine ve etkinliğine bağlı olan matematiksel nesneyi kabul etmiştir. Bu bakış açısı ile öğretim teorilerinden davranışçılık ve yapılandırmacılık ayrıntılı olarak irdelenmiş ve bu öğretim teorilerinin matematiksel nesne anlayışları tespit edilmeye çalışılmıştır. Bütün bu incelemelerin sonucunda ülkemizdeki matematik eğitimi içinde matematiksel bilgi nesnenine bakış açıları da netleştirilmeye çalışılmıştır.

Bilgiye bakışı açısından eğitim felsefesi temellerini esasicilik ve daimicilikte bulan davranışçı öğretim biçiminin, öğretmeni bilginin otoritesi sayarak bilgiyi öğrencinin üretiminden bağımsız kılmış olduğu ve realist bakış açısını benimsemiş olduğu çalışmamız içinde gösterilmiştir. Fakat davranışçı yaklaşımın bir bilgi teorisi olmamasından dolayı matematiksel nesneye bakış açısında matematik felsefesindeki realist anlayışla bilgiyi elde etme yöntemleri konusunda aynılaşmadığı fark edilmiştir. Çünkü matematik felsefesi içindeki realist anlayışın temsilcisi Frege, bilgiyi nesnel düşüncelerin içeriği olarak tanımlamaktadır. Düşünceler nesnelliğini var olandan almakta olduklarından bu nesnel düşünceler ancak yakalanarak keşfedilecektir. Fakat realist anlayışın var olandan keşfetme süreçleri davranışçı yaklaşımda gözlenmediği için davranışçılık bir öğretim metodu olarak bu anlayışı tam olarak yansıtamamaktadır. Bu anlayışta matematiksel nesne öğrencinin üretimine bağımlı kılınmadığı gibi onun keşfine de kapalıdır.

Öteki taraftan yapılandırmacılığın bir bilgi teorisi olması dolayısıyla altında yatan bilgiye bakış felsefesinin onu edinme yöntemleri ile paralelliği gözlemlenmiştir. Yani yapılandırmacılık, bilgiye post-pozitivist bir yaklaşımla onu insanın üretimine bağlamış, insanın varlığıyla var kılmıştır. İnsanın bakış açısına göre değişen doğrulukları benimsemiştir. Halbuki realist bakış açısında doğruluk, bilgi gibi nesnel ve herkes için geçerli olandır. Çalışmamızda post pozitivizim bakış açısı, yapılandırmacı bilgi teorisi temellerinde gözlemlenmiştir. Ayrıca yapılandırmacılığın eğitim felsefesi temellerinin ilerlemeci ve yeniden yapılandırmacı görüşlerinden aldığı tespit edilmiştir. Bu görüşün matematik nesnesine bakış açısı dayanaklarında Kant'ın *sentetik a priori* yargısında görülür. Bu bakışa göre matematiksel nesne insanda hali hazırda bulunan zaman ve uzay saf görü formları yardımıyla üretilir. Yani bilgi, insan üretimi, insanın bir icadı olarak tarif edilebilir. Öğrenci bu bakımdan bir matematikçi gibi matematiksel bilgiyi icat eder, üretir. Fakat bu süreç çalışmamızın başında da dile getirildiği gibi ülkemizde 10. sınıftan itibaren gösterilen aritmetik üstü konularda, kavramlar arası bağların öğrenciler tarafından yapılandırılma süreçleri olarak işler. Yapılandırmacılığın bu yapılandırma süreçleri, temellerini Kant ve Piaget'nin görüşlerinde yakaladığımız matematiksel bir deneyim ile yapılır. Çalışmamızın başında bir çıkış noktası olarak belirlediğimiz yapılandırmacı matematik eğitiminin öğretmenler tarafından istenildiği gibi yönlendirilememe durumlarının oluşması bu deneyimin üzerinedir. Bu süreçte beklenen, öğretmenin önceden belirlediği matematiksel deneyim, öğrencinin var olan bilgisini yapılandırarak yeni kendi matematiksel nesnesine ulaşmasıdır. Aritmetik düzeyde işlenen konularda belirlenen matematiksel deneyim, öğrenciyi bir matematikçi gibi düşünme imkanını sağlarken, aritmetik üstü konularda, kavramlar arası bağların kurulması ve mantıksal çıkarımların belirginleşmesi öğrencinin bir matematikçi gibi üretmesinden daha çok kavramlar arası bağların keşfedilmesine yöneltir. Bu durumda süreci belirleyen öğretmene önemli görevler düşer. Çünkü kavramlar arası bağların öğrenciler tarafından keşfedilme süreçleri günlük yaşam örneklerinden çıkamadığı için öğretmen açısından bu etkinliği belirlemek daha zorlaşır. Zorlaştığı bu tip durumlarda ise öğretmen konuyu anlatan ve öğrenci konuyu dinleyen olarak davranışçı yaklaşıma geri dönülür. O halde bu çalışmada matematiğin kavramlar arası bağlarının öğrenci tarafından keşfedilme süreçlerinin yaşandığı etkinliklerin belirlenmesi gerektiği savunulabilir. Bunun yanısıra öğrenci kavramsal bağların keşfi sırasında kendi matematiksel bilgisini yeni kavramlara taşıdığı için taşınabilirlik açısından elde ettiği bilgiyi nesneleştirir. Böylece bilgi kendisinden uzaklaşır ve elde ettiği bir nesneye dönüşür. Örneğin, üslü sayılara ilişkin matematiksel bilgisi kendi için nesneleşmiş olan bir öğrenci bunu logaritma konusu içine taşıyabilir ve bu bağları kendisi kurabilir. Öğretmenin ise bu süreci belirleyen olarak yapılandırmayı başarabilecek etkinlikleri kurması gerekir. Bu durum başlangıçta sorduğumuz matematiksel ifadelerin öğrenci için nasıl nesneleştiğine dair sorularımıza bir cevap oluşturmaktadır. O halde diyebiliriz ki aritmetik üstü konularda öğrenci, matematiksel süreç içinde kendi bilgisini üretirken kavramlar arası bağları keşfediyordur. Kant *Prolegomena*'da matematiksel çıkarımların zorunluklu kesinliğinin yapısı gereği çelişme ilkesine göre belirlenmesinden dolayı matematik ilkelerinin de çelişme yasasına göre belirlendiği konusunda matematikçilerin yanıldığını ifade eder. Fakat görüldüğü üzere lise matematik eğitimi içinde aritmetik üstü konuların işlenmesinde çelişme yasasına göre belirlenen zorunluklu çıkarımlar öğrenci tarafından belirlenir. O halde matematik felsefesi içinde önemli bir sorun olan matematiksel nesnelerin keşif mi ya da icat mı olduğu problemi matematiksel nesnenin ilk kavramları açısından önem kazanır. Bundan ötürü çalışmamızda aritmetiğin temeli olan kardinal sayının Frege çözümüyle mantıksal olarak ve Kant tarafından belirlenen süreçlerle nasıl üretildiği incelenmiştir.

Bütün bu açıklamalardan yola çıkılarak matematik eğitiminde mantıksal çıkarımlardan uzaklaşılamayacağı ve kavramlar arası bağların keşfinin önemsenmesi gerektiği söylenebilir. O halde ilksel anlamda matematiksel nesnenin bir keşif olduğunu kabul eden Frege'nin yaklaşımlarının ve nesnelliği ve mantıksallığı olan nesne belirlenimlerinin matematik eğitiminde kabul edilebilir bir temel olacağı savunulabilir. Bu yaklaşımın eğitimde kullanılması, öğrenciye matematiksel nesne ve cümlelerin anlam ve yönletimine ilişkin farkındalık kazandıracak biçimde öğretim metotlarının geliştirilmesi, bu ayrımı yaptıracak etkinliklerin düzenlenmesi gerektiği önerilebilir. Böylece öğrencilerin yaşadıkları matematik deneyimlerinin mantıksal nesneyi yakalayabilecekleri bir süreç olacağı düşünülebilir. Eğer öğrenciler kavramlar arası gözlem yaparak ve yapılan gözlem ile yeni kavramlar kurarak öğreniyorlar ise bu durum öğrencinin kendi öznelliğinin bir üretimi olarak değerlendirilemez kanımızca. Bu ancak kendisine ait olmayan ancak var olan mantıksal bağların yakalandığı anlamına gelecek bu anlamda matematiksel nesnelerin kişinin kendisinden bağımsız varlığı kabul edilecektir. Ayrıca bu durum, öğrencilerin matematiksel düşünceleri matematiksel düşünme etkinliğinden ayırarak matematiksel bilgi edinmelerine olanak verecek, Frege'nin düşünceler alanının öğrenciler tarafından keşfedilmesine olanak sağlayacaktır. Bu tercih ise etkinliklerin biçimini daha önce verdiğimiz örnekte olduğu gibi değiştirecektir. Buradan yola çıkabileceğimiz gibi matematiğin neliği hakkında yapacağımız kabulümüzün, matematik eğitim biçimimizi değiştireceğini savunabiliriz. Dolayısıyla Hersh'in savunduğu gibi matematik eğitimine yalnızca pedogojik olarak yaklaşmanım matematik eğitimi soruşturmalarını sonuçsuz bırakacağı fikrine katılmaktayız. Çünkü önce matematiğin ne ile ilgili olduğunu belirlememizin matematik öğretim biçimimizi de belirleyeceği kanısındayız.

# KAYNAKLAR

Akar, K. Gülseren & Şener, Beyhan. (2014). " Students' Development of The Relationship Between The Cartesian Product, Relation and The Definition of Function". *International Journal of Educational Studies in Mathematics.* 1 (1), 69-89.

Altun, Murat. (2009). *Liselerde Matematik Eğitimi*. Bursa: Aktüel Alfa Akademi, 3. Basım.

Aristoteles. (2010). *Metafizik*. Çev. A. Arslan. İstanbul: Sosyal Yayınları, 4. Basım.

Arslanoğlu, İbrahim. (2012). *Eğitim Felsefesi.* Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Aydın, Hasan. (2006). "Eleştirel Aklın Işığında Postmodernizm, Temel Dayanakları ve Eğitim Felsefesi". *Eğitimde Politika Analizleri ve Stratejik Araştırmalar Dergisi*, Cilt 1, Sayı 1, s. 27-48.

Aydın, Hasan. (2012). *Felsefi Temelleri Işığında Yapılandırmacılık.* İstanbul: Nobel Akademik Yayıncılık.

Baki, Adnan. (2014). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı, 5. Basım.

Barker, Stephen F. (2003). *Matematik Felsefesi.* Çev. Y. Dursun. Ankara: İmge Kitabevi.

Bernays, Paul. (2011). "Matematikteki Platonculuk Üzerine". Ed. B. S. Gür, Çev. C. Kayan. & B. Gür. *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayınları, s. 143-162.

Celluci, Carlo. (2013). "Matematik Felsefesi: Yeni Bir Başlangıç Yapmak". Çev. B. Kuryel. *Felsefelogos*, Yıl 17, Sayı 49, s. 73-93.

Cevizci, Ahmet. (2003). *Felsefe Terimleri Sözlüğü*. İstanbul: Paradigma Yayınları.

Cryan, Dan, Shatıl, Sharron ve Mayblin, Bill. (2010). *Mantık.* Çev. N. Elhüseyni. İstanbul: NTV Yayınları.

Çitil, A. Ayhan. (2012). *Matematik ve Metafizik*. İstanbul: Alfa Basım Yayım.

Çitil, A. Ayhan. (2013). "Matematik ve Felsefe". *Felsefelogos*, Yıl 17, Sayı 49, s. 23-52.

Çotuksöken, Betül. (2000). *Felsefi Söylem Nedir?* İstanbul: İnkılap Kitabevi.

Denkel, Arda. (1989). "Frege'nin Dil Felsefesi: Ana Çizgiler". *Felsefe Tartışmaları,* 5. Kitap. İstanbul: Kent Basımevi, s. 24-46.

Doğan, Mustafa. (2013). "Nokta, Doğru Parçası, Işın, Düzlem ve Uzay Kavramları." *Tanımları ve Tarihsel Gelişmesiyle Matematiksel Kavramlar*. Ed. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice, Ankara: Pegem Akademi, s. 198-220.

Doksiadis, Apostolos., Papadimitriv, Hristos H. (2012). *Logicomix*. Çev. Ö. Özgür. İstanbul: Albatros Yayıncılık.

Erkılıç, T. Akman. (2008). "Felsefi Akımlar ve Eğitim Felsefesi Akımları". Ed. A. Boyacı. *Eğitim Sosyolojisi ve Felsefesi*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayını No: 973. http://home.anadolu.edu.tr/~aboyaci/ders/eb/kaynaklar/T_Erkilic.pdf (Erişim Tarihi: 14.07.2015).

Ernest, Paul. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. The Taylor & Francis E-Library. (2015). https://p4mriunpat.files.wordpress.com/2011/10/the-philosophy-of-mathematics-education-studies-in-mathematicseducation.pdf (Erişim Tarihi: 13.04.2015).

Ernest, Paul. (2003). *Mathematics, Education and Philosophy.* The Taylor & Francis E-Library. (2015). http://www.amazon.com/Mathematics-Education-Philosophy-International-Perspective/dp/0750705698 (Erişim Tarihi: 13.04.2015).

Field, Hartry. (2011). "Matematikte Realizm ve Karşı-Realizm".Ed. B. S. Gür, Çev. M. Özlük.& B. Gür. *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayınları, s. 237-273.

Frege, Gottlob. (1984). *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy.* Ed. B. Mc Guinness. New York: Basil Blackwell Publisher.

Frege, Gottlob. (1989). "Anlam ve Yönletim Üstüne." Çev. Ş. Elkatip. *Felsefe Tartışmaları,* 5. Kitap. İstanbul: Kent Basımevi, s. 7-23.

Frege, Gottlob. (2008). *Aritmetiğin Temelleri Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme.* Çev. B. Gözkân. İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Frege, Gottlob. (2010). "Kavram ve Nesne Üzerine". Çev. İ. İnan & B. Turan. *Felsefe Tartışmaları,* 44. Kitap. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, s. 103-119.

Gözkân, Bülent. (2008). "Sunuş: Frege ve Aritmetiğin Temelleri". *Aritmetiğin Temelleri Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme.* İstanbul: Yapı Kredi Yayınları, s. 13-69.

Gözkân, Bülent. (2010). "Sunuş: Gödel Kanıtlaması". *Gödel Kanıtlaması.* İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 3. Basım.

Gutek, Gerald. L. (2006). *Eğitime Felsefi ve İdeolojik Yaklaşımlar*. Ankara: Ütopya Yayınevi, 3. Basım.

Gür, Bekir. (2011). *Matematik Felsefesi*. Ankara: Kadim Yayınları, 3. Basım.

Gür, Bekir. (2012). "*Matematik Belası" Üzerine*. İstanbul: Nesin Yayıncılık.

Güven, Özgüç. (2012a). *Kant, Bolzano Ve Frege'de Yargıların Temellendirilmesi Ve A Priorilik Sorunu.* Doktora Tezi. Danışman: Ş. Ural. İstanbul: İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Güven, Özgüç. (2012b). "Kant'ta Sayının Temellendirilmesi". Ed. Y. Yüksel. *Şafak Ural'a Armağan,* İstanbul: Alfa Basım yayın, s. 311-319.

Hacıkadiroğlu, Vehbi. (2002). "Eski Yunan'dan Günümüze Felsefe". F*elsefe Tartışmaları,* 29. Sayı. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, s. 33-45.

Handal, Boris. (2015). "Matematik Pedagojisi ve Felsefesi". Ed. P. Ernest. Çev. S. Ö. Bütüner. *Philosophy of Mathematics Education Journal.* https://www.academia.edu/3436104/Philosophies_and_Pedagogies_of_Mathematics (Erişim tarihi: 05.06.2015).

Hersh, Reuben. (2011). "Matematik Felsefesinin İhyası İçin Bazı Öneriler". Ed. B. S. Gür, Çev. M. Özlük.& B. Gür. *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayınları, s. 399-427.

İnönü, Erdal. (2010). *Bilimsel Devrim ve Stratejik Anlamı*. İstanbul: Cumhuriyet Kitapları, 3. Basım.

Kanat, Celal. A. (1997). "Matematiksel Bilginin Neliği ve Öğeleri Üstüne". *Felsefe Tartışmaları,* 21. Kitap. İstanbul: Kent Basımevi, s. 117-120.

Kant, Immanuel. (2000). *Gelecekte Bilim Olarak Ortaya Çıkabilecek Her Metafiziğe Prolegomena*. Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu, 4. Basım. (İlk Basım:1783-1788, Berlin).

Kant, Immanuel. (2010). *Arı Usun Eleştirisi*. Çev. A. Yardımlı. İstanbul: İdea Yayınevi, 3. Basım. (İlk Basım: 1781-1787).

Kant, Immanuel. (1996). *Critique of Pure Reason.* Çev. W. S. Pluhar. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Koç, Yalçın. (2012). "Matematiğin Ontolojisi Bakımından Kant ile Frege Karşılaştırılması". *Felsefe Arkivi Dergisi*. İstanbul: İstanbul Üniversitesi Yayınları, s. 49-54.

Kuryel, Beno. (2013). "Matematik Tarihi ile Felsefenin Bütünlüğü Etnomatematik ve Matematik Kaygısı". *Felsefelogos,* Yıl 17, Sayı 49. İstanbul: Kenan Ofset, s. 9-22.

Kutlusoy, Zekiye. (2013). "Mantık-Matematik İlişkisi Üzerine." *Kaygı*, 20. Sayı. Bursa*:* Uludağ Üniversitesi Felsefe Dergisi, s. 127-138.

Leıbnız, G. Wilhelm. (2009). *Monodoloji ya da Felsefenin İlkeleri.* Çev. O. Ürek. İstanbul: Özal Matbaası. (İlk basım: 1714).

Maddy, Penelope. (2011). "Kümeler ve Sayılar". Ed. B. S. Gür, Çev. M. Özlük.& B. Gür. *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayınları, s. 273-297.

Özcan, Muttalip. (2011). *Aristoteles Felsefesi: Temel Kavramlar ve Görüşler*. Ankara: Özkan Matbaacılık.

Özdemir, Mehmet. (2014). *Kant'ta Aritmetiğin Sentetik A Priori Olarak Olanaklılığının Matematik Felsefesi Açısından Önemi ve Matematik Eğitimine Yapabileceği Katkılar*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Danışman: Z. Kutlusoy. İstanbul: Maltepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Özden, Yüksel. (2014). *Öğrenme ve Öğretme*. Ankara: Pegem Akademi,12. Basım.

Özmantar, M. Fatih &Bozkurt, Ali. (2013). "Tanımsızlık ve Belirsizlik: Kavramsal ve Geometrik Bir İnceleme". *Tanımları ve Tarihsel Gelişmesiyle Matematiksel Kavramlar*. Ed. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice, Ankara: Pegem Akademi, s. 437-461.

Poincaré, Henri. (1996). "Matematiksel Yaratma." Çev. C. Yıldırım. *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi, 2. Basım (İlk Basım: 1988).

Platon. (2012). *Devlet.* Çev. S. Eyüboğlu & M. Ali Cimcoz. İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.

Resnik, Michael. D. (2011). "Modeller Bilimi Olarak Matematik: Ontoloji ve Referans". Ed. B. S. Gür, Çev. M. Özlük.& B. Gür. *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayınları, s. 299-331.

Rossi, Jean-Gérard. (2001). *Analitik Felsefe*. Çev. A. Altınörs. İstanbul: Paradigma Yayınları.

Russell, Bertrand. (2011). "Matematiksel Mantığın Felsefi Önemi". Ed. B. S. Gür, *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayınları, s. 101-112.

Salerno, Joseph. (2011). *Frege'ye Dair*. Çev. A. Dereko. Ankara: Birleşik Yayınevi.

Türker, Sadık. (2002). *Aristoteles Gazzâlî ile Leibniz'de Yargı Mantığı.* Ankara: Dergah Yayınları.

Türker, Sadık. (2012). "George Boole ve Mantık Cebri" Ed. Y. Yüksel, *Şafak Ural'a Armağan.* İstanbul: Alfa Basım Yayım, s. 331-372.

Ttkb (2005). "Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 Ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı" (Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı)

Ttkb (2011). "Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 Ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı" (Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı) http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72 . (Erişim Tarihi: 10.07.2015).

Ttkb (2013). "Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 Ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı" (Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı)

Ufuktepe, Ünal. (1995). "Matematiksellik ve Matematik Felsefesi". *Araf e-dergi*, Sayı: 4/ Ekim 1995. http://homes.ieu.edu.tr/uufuktepe/utepe954.html 10.04.2015

Yalçın, Şahabettin. (2003a). "Kant'ta Matematiğin Felsefi Temelleri". *Felsefe Dünyası.* Kırıkkale: Kırıkkale Üniversitesi Yayınları, 2003/ 1, Sayı 37, s. 128-143.

Yalçın, Şahabettin. (2003b). "Frege: Semantikten Matematiğe Paradokslar". *Felsefe Tartışmaları,* 30. Kitap. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, s. 47- 60.

Yıldırım, Cemal. (1996). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi, 2. Basım (İlk basım: 1988).

Yıldırım, Cemal (2011). *Bilim Felsefesi.* İstanbul: Remzi Kitabevi, 15. Basım (İlk basım: 1973).

Yıldırım, Ali. & Şimşek, Hasan. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık, 8. Basım.

# ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: BEYHAN ŞENER

Doğum Tarihi: 03.09.1978

E-mail: beyhansener@yahoo.com.tr

Telefon: +90-505-728-50 98

**ÖGRENİM DURUMU**

| | |
|---|---|
| Yüksek Lisans<br>2012-2015 | Maltepe Üniversitesi –Sosyal Bilimler Enstütüsü<br>Felsefe Bölümü<br>Eğitim Felsefesi Programı<br>Tez Adı: : Matematik Eğitimi Bağlamında Matematiksel Nesnenin Varlıksal Niteliği Üzerine<br>Tez Danışmanı : Zekiye Kutlusoy |
| Lisans<br>1996-2002 | İstanbul Universitesi-Fen Fakültesi<br>Matematik Bölümü |
| Pedogojik Formasyon<br>2001 | İstanbul Universitesi-Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi-<br>Eğitim Bilimleri Bölümü |
| **ESERLER** | |
| A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler | Karagöz Akar Gülseren, ŞENER BEYHAN (2014). Students' Development of The Relationship Between The Cartesian Product, Relation and The Definition of Function. International Journal of Educational Studies in Mathematics, 1(1), 69-89., Doi: doi.org/10.17278/ijesim.2014.01.006, (Kontrol No: 1490828) |
| B. Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler | 1. ŞENER BEYHAN, Karagöz Akar Gülseren (2012). Fonksiyon tanımının Geogebra yardımıyla grafikler üzerinden yapılandırılması. 11. Matematik Sempozyumu of Matematikçiler Derneği (MAT-DER), (Kontrol No: 1494521) |

| | |
|---|---|
| | 2. ŞENER BEYHAN, Karagöz Akar Gülseren (2012). Kartezyen çarpım-bagıntı-fonksiyon kavramlar arası iliskiler ve farklılıkları degerlendirme çalısması ve Geogebra etkinlikleri. 11. Matematik Sempozyumu of Matematikçiler Dernegi (MAT-DER), (Kontrol No: 1494527) |
| | 3. ŞENER BEYHAN, Karagöz Akar Gülseren (2015). Olanaklı Durumlar Hesabı: Ise ve Ancak ve Ancak Baglaçlarının Doğası Üzerine. Türk Bilmat-2, (Kontrol No: 1495423) |

## GÖREVLER

| | |
|---|---|
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2014-2015) | Merkür Eğitim Danışmanlık |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2013-2014) | Özel Çekmeköy Bican Uğur Dershanesi |
| Araştırma Asistanı (2012-2013) | Boğaziçi Üniversitesi- Eğitim Fakültesi- Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Öğretmenliği Bölümü- Matematik öğretmenliği Programı-BAP Projesi |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2011-2012) | Özel Çokar Anadolu Lisesi |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2011-2010) | Özel Mef Lisesi |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2007-2010) | Özel Kültür Fen Lisesi |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2006-2007) | Özel Fenerbahçe Spor Kulübü Lisesi |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2004-2006) | Özel Metot Dergisi Dershanesi |
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği (2003-2004) | Özel Çağfen Dershanesi |

| | |
|---|---|
| Matematik ve Geometri Öğretmenliği<br>(2002-2003) | Özel Tansel Dershanesi |

## BAŞARILAR

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu “Ortaöğretim Araştırma Proje Yarışması”

Danışman Öğretmenliğimde;

| | |
|---|---|
| 2008 | Kesin Renk Bul Problemi (Sergilenmeye layık bulundu) |
| 2010 | Öklid Dışı Geometrilerin Görsel Modelleri (Sergilenmeye layık bulundu) |
| 2012 | Poncelet’in Uçuşan Kelebekleri (Bölge İkinciliği) |
| 2012 | Öklid Dışı Geometriler Ve Öklid Çokgenleri İle Öklid Dışı Düzlem Üretme (Sergilenmeye layık bulundu) |