KUANTUM TEKİLLİK ANALİZİNİN MATEMATİKSEL TEMELLERİ:

HORAVA- LİFSHİTZ TEORİSİNDEKİ UYGULAMALARI

Mert Mangut

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özay Gürtuğ

İstanbul

T.C. Maltepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran, 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mert MANGUT'un " Kuantum Tekillik Analizinin Matematiksel Temelleri:Horava-Lifshitz Teorisindeki Uygulamaları " başlıklı tezi 08/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Maltepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans/Doktora tezi **oy birliğiyle** / ~~**oy çokluğuyla**~~ olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı. Adı ve Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Özay GÜRTUĞ	....
Üye	: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI	....
Üye	: Prof. Dr. Kamuran SAYGILI	K. Saygılı ....

Prof.Dr. İlter BÜYÜKDIĞAN

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

Bu tezin bana ait özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; çalışmanın Maltepe Üniversitesinde kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" ile tarandığını ve öngörülen standartları karşıladığını beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

08/06/2018

Mert Mangut

ii

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu ve araştırma problemini bana veren, araştırmalarım sırasında hep yanımda olarak bana matematiksel fiziğin derinliklerini ve bilimsel problemlerin tespiti ile çözümünü öğreten danışmanım sayın Prof. Dr. Özay Gürtuğ'a (Maltepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Fakültesi), bana verdiği lisansüstü dersler ile yüksek matematiksel analizi ve ileri topolojiyi öğreten sayın Prof. Dr. Hüseyin Çakallı'ya (Maltepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Fakültesi), kendisinden aldığım diferansiyel geometri dersleri ile bana verdiği özel problemler ve tavsiyeler sonucunda bana diferansiyel geometriyi öğreten sayın Prof. Dr. Kamuran Saygılı'ya (İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi), ayrıca hayatım boyunca yanımda olarak verdiğim kararlar ve tercihlerimde beni hep destekleyerek tüm fedakarlıklar ile beni okutan sevgili anneme en içten duygularımla teşekkür ederim.

Mert Mangut

Haziran, 2018

ÖZ

Kuantum Tekillik Analizinin Matematiksel Temelleri: Horava – Lifshitz Teorisindeki Uygulamaları

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2018

Hazırlayan: Mert Mangut

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Özay Gürtuğ

Bu tezde, kuantum tekillik analizinin matematiksel dayanak noktaları ve bu analizin matematiği ele alınarak Horava – Lifshitz teorisindeki uygulaması yapılmıştır. İlk olarak, gerekli matematiksel altyapı olan; topolojik uzaylar, metrik uzaylar, vektör uzayları, normlu uzaylar, iç çarpım uzayları ve Hilbert uzayı gözden geçirilerek temel teoremler ispatlanarak, gerekli temel tanımlar yapılmıştır. İkinci olarak ise, uzay – zaman tekillikleri tanımlanarak kuantum tekillik analizinin dayandığı matematiksel temel ve kriterler verilerek, operatörlerin özde (essentially) self – adjointliğinin belirlenmesi için gerekli teoremlerin ispatları yapılmış ve bu analizin iki temel metodu olan özde (essentially) self – adjointliğin temel kriteri ve Weyl limit noktası – limit çemberi kriteri, ispatları ile verilmiştir. Daha sonra uygulama, önemli bir alternatif gravitasyon teorisi olan Horava – Lifshitz teorisinde yer alan Kehagias – Sfetsos küresel simetrik karadelik çözümünün çıplak tekillik şartı çerçevesinde yapılarak, Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinden elde edilen diferansiyel operatörlerin uzaysal kısmının özde (essentially) self – adjointliği bu iki farklı metot ile incelenmiştir. Yapılan analizde klasik olarak tekil olan uzay – zaman yapısının kuantum mekaniksel olarak tekil olmadığı gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: 1. Hilber uzayı; 2. Özde – self adjointlik; 3. Kuantum tekillik; 4. Horava – Lifshitz gravitasyon teorisi; 5. Klein – Gordon denklemi; 6. Dirac denklemi

ABSTRACT

Mathematical Foundations of Quantum Singularity Analysis: Applications in Horava – Lifshitz Theory

Master of Science

Mathematics

Maltepe University Graduate School of Science and Engineering, 2018

Mert Mangut

Thesis Advisor: Prof. Dr. Özay Gürtuğ

In this thesis, the mathematical foundations of quantum singularity analysis together with its application in Horava- Lifshitz gravity theory is considered. First, the necessary background including topological spaces, metric spaces, vector spaces, normed spaces, inner product spaces and Hilbert spaces are reviewed and basic theorems are proved. Secondly, the definion of space – time singularities and quantum singularities are given. The essential theorems required for essentially self – adjointness of operators are proved. These theorems are known as the basic criterion of essentially self – adjointness and Weyl limit point – limit circle criterion. Finally, the naked singularity in spherically symmetric solution of Kehagias – Sfetsos metric within the context of Horava – Lifshitz gravity theory is probed with bosonic and fermionic fields obeying Klein – Gordon and Dirac equation. Analysis have revealed that the classical singularity becomes quantum mechanically non – singular.

Keywords: 1. Hilbert spaces; 2. Essentially self – adjointness; 3. Quantum singularity; 4. Horava- Lifshitz gravity theory; 5. Klein – Gordon equation; 6. Dirac equation

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümelerinden herhangi birisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$C([a,b],\mathbb{R})$	$[a,b]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyonlar uzayı
$C([a,b],\mathbb{C})$	$[a,b]$ aralığından $\mathbb{C}$ ye sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^k([a,b],\mathbb{R})$	$f \in C([a,b],\mathbb{R})$: $1 \leq n \leq k$ f^n var ve $f^n \in C([a,b],\mathbb{R})$
$C_0^\infty(a,b)$	(a,b) de kompakt ve her mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar uzayı

ÖZGEÇMİŞ

Mert Mangut

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Derece	Yıl	Üniversite, Enstitü/Fakülte, Anabilim/Anasanat Dalı
Y.Ls.	2018	Maltepe Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Ls.	2015	İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Ls.	2015	İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Fizik Bölümü

Alınan Burs ve Ödüller

Yıl	Burs/Ödül
2015	İstanbul Üniversitesi Fakülte Birinciliği Onur Ödülü
2015	Türk Eğitim Vakfı (TEV) Üstün Başarı Ödülü

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı: İstanbul 1993 Cinsiyet: Erkek

Yabancı diller : İngilizce

GSM / e-posta: 0532-711-20-79 / mertmangut@gmail.com

1. GİRİŞ

Einstein'ın genel görelilik teorisinin en önemli öngörüleri arasında, karadelilikler, kütle çekim dalgaları ve uzay – zaman tekillikleri gelmektedir. Daha bir kaç yıl öncesine kadar karadelik yada kütleçekim dalgaları, kuramsal matematiksel fizik konuları arasındaydı. Ancak, 14 Eylül 2015 tarihinde, LIGO detektörleri tarafından ilk kez, kütleçekim dalgalarının varlığı tespit edilmiştir. Detektörlerin tespit ettiği bu kütleçekim dalgaları, iki devasa karadeliğin çarpışması neticesinde, uzay – zaman dokusunda oluşan dalgalardı. Böylece, bu tarihe kadar kuramsal olan bu iki öngörü artık deneylerle varlığı kanıtlanmış fiziksel gerçeklerdir. Einstein'nın genel görelilik teorisinin bu iki fiziksel gerçekle ilişkili bir diğer henüz kanıtlanmamış öngörüsü ise uzay – zaman tekillikleridir. Her karadeliğin merkezinde barındırdığı bu tekillikler aslında karadeliklerin sahip olduğu kuvvetli çekim alanlarının kaynağıdır. Bu tekillikler aslında tam olarak anlaşılmış değildirler. Bundan dolayıdır ki, bu uzay – zaman tekilliklerinin anlaşılması için bilim insanları inanılmaz efor sarf etmektedirler. Kimilerine göre, Einstein teorisinin zayıf noktasıdır. Bunun en önemli sebebi Einstein genel görelilik teorisinin, görece daha makro ölçekteki fiziksel objelerin (yıldızların, galaksilerin, vb.) dinamiğini tasvir edebilirken, görece daha küçük ölçeklerdeki dinamiği tasvir edememesidir. Bunun bir sonucu olarak da, uzay – zaman tekilliklerinin meydana geldiği görece bu mikro ölçeklerde Einstein'ın genel görelilik teorisi yetersiz kalmaktadır.

Bu tekil noktalar, Einstein teorisine göre fiziksel parametrelerin örneğin; enerji, kuvvet gibi fiziksel gözlemlenebilir parametrelerin ıraksaması, bir başka deyişle fizik yasalarının çalışmadığı noktalar olarak bilinir.

Bu temel problem, günümüz matematiksel fizikçilerinin ilgilendiği, çözmeye çalıştığı ve yoğun araştırmaların yapıldığı bir alan olarak karşımızdadır. Bu mikro ölçekteki fiziği betimlemek için kuantum alan teorisine başvurmak bu problemi çözmenin en gerçekçi adımıdır [5]. Ancak, henüz literatürde tutarlı bir kuantum gravitasyon alan teorisi bulunmamaktadır. Bundan dolayı alternatifler geliştirilmiş ve / veya geliştirilmeye devam etmektedir. Bunlar arasında, sicim teorisi (String Theory), loop kuantum gravitasyon teorisi (loop quantum gravitation theory) ve son yıllarda oldukça popüler olan Horava – Lifshitz teorisi örnek gösterilebilir.

Bu tezin araştırma konusunu, Horava – Lifshitz gravitasyon teorisinin, küresel simetrik çözümü olan Kehagias – Sfetsos karadelik çözümünün belirli parametrelerinde ortaya çıkan çıplak tekilliklerin, kuantum mekaniksel olarak incelenmesi oluşturmuştur. Kehagias – Sfetsos çözümü iki parametreli bir çözümdür. Bu parametrelerden bir tanesi kütle ile ilişkili M parametresi diğeri ise kuantum etkileri betimleyen ω parametresidir. Eğer, $\omega M^2 \geq 1/2$ ise çözüm bir karadeliği tasvir etmekte, eğer $\omega M^2 < 1/2$ olduğunda ise bir çıplak tekilliği tasvir etmektedir. Bu durum Penrose'un kozmik sansür hipotezine aykırılık teşkil etmektedir ve fizik dünyasında sevimsiz istenmeyen bir durumdur. Ancak, gözlemsel bir takım sonuçlar [15], [16], [17]; ω parametresinin çıplak tekillik içeren değerlerini dışlamamaktadır. Bu nedenle, Kehagias – Sfetsos çözümünde ortaya çıkan bu çıplak tekilliklerin incelenmesi önem arz etmektedir.

Bu tezde, oluşan bu çıplak tekillikler kuantum mekaniksel olarak incelenmiştir. Bu inceleme, R.M. Wald tarafından ortaya atılan [26] ve Horowitz – Marolf tarafından geliştirilen [10] ve literatürde Horowitz – Marolf kriteri olarak bilinen bir yöntemle yapılmıştır. Bu yönteme göre tekillik, kuantum alanlarla sonda (probe) edilmekte ve bu alanları tasvir eden matematiksel uzaysal operatörlerin özde (essentially) self – adjointliği araştırılmaktadır. Buna göre operatörün özde (essentially) self – adjoint olması durumunda, operatörün genişlemesi tek türlü olarak belirlendiğinden dalgaların zamandaki evrimi öngörülebilmektedir. Böylelikle fizik yasaları geçerliliğini yitirmemektedir. Ancak, operatör özde (essentially) self – adjoint değilse, dalgaların zamandaki evrimi öngörülememektedir. Bunun en önemli nedeni, operatörün tek türlü bir genişlemesi olamamasıdır. Böyle bir durumda, söz konusu uzay – zaman kuantum mekaniksel olarak da tekil olur.

Bu tezin ilk bölümünde, kuantum tekilliğin matematiksel alt yapısı derinlemesine incelenmiş ve konu ile ilgili tüm tanımlar yapılıp, gerekli teoremler ispatları ile verilmiştir. İkinci bölümde, bir operatörün özde (essentially) self – adjointliğinin analiz edilebilmesi için iki farklı teorem verilmiştir. Bu teoremler özde (essentially) self – adjointliğin temel kriteri ve Weyl limit noktası – limit çemberi kriteridir. Üçüncü bölümde, kuantum tekilliğin genel tanımı ile Horowitz – Marolf kriteri tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde, Horava – Lifshitz gravitasyon teorisinin küresel simetrik çözümü olan Kehagias – Sfetsos karadelik çözümünde oluşan çıplak tekillik, Klein – Gordon ve Dirac denklemlerinin çözümleri olan, sırasıyla, bosonik ve fermiyonik alanlarla incelenmiştir. Son bölümde ise çalışmanın sonucu verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. X herhangi bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir τ topluluğu eğer;

1) X ve $\emptyset, \tau$ ya aittir,

2) τ nun herhangi iki elemanının kesişimi τ ya aittir,

3) τ nun elemanlarının herhangi bir ailesinin birleşimi τ ya aittir.

özelliklerini sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji, (X,τ) ikilisine de topolojik uzay denir. [13]

Tanım 2.2. X herhangi bir küme olsun. $X \times X$ den $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi için aşağıdaki özellikleri sağlayan d fonksiyonuna X için bir metrik veya X üzerinde bir metrik denir:

1) $d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\forall x\,, y \in X \ için \ d(x,y) = d(y,x)$

4) $\forall x, y, z \in X \ için \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Bir d metriği ile bir X kümesine bir metrik uzay denir ve (X,d) bir metrik uzay veya kısaca X bir metrik uzay denir. [13]

Tanım 2.3. (X,d) metrik uzay ve (x_n) X uzayında bir dizi olmak üzere

$$\forall \varepsilon > 0 \ için \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ ve \ \forall n \geq N_\varepsilon \ iken \ d(x_n, x) < \varepsilon$$

koşulunu sağlıyorsa (x_n) dizisi $x \in X$ elemanına yakınsar denir. Bu durumda (x_n) dizisine yakınsak dizi ve x elemanına ise (x_n) dizisinin limiti denir. [7]

Tanım 2.4. (X,d) metrik uzay ve (x_n) X uzayında bir Cauchy dizisi ise

$$\forall \varepsilon > 0 \ için \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ ve \ \forall n, m \geq N_\varepsilon \ iken \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

koşulu sağlanır. [7]

Tanım 2.5. (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak dizi ise X uzayı tam' dır denir. [7]

Tanım 2.6. (X, d) bir metrik uzay $x_0 \in X$ ve reel bir $r > 0$ sayısı olmak üzere,

1) $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, r) < r\}$

2) $B[x_0, r] = \{x \in X : d(x_0, r) \leq r\}$

3) $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, r) = r\}$

kümelerine sırasıyla x merkezli r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi denir. [7]

Tanım 2.7. (X, d) bir metrik uzay $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall\, a \in A$ için

$$B(a, r) \subset A$$

olacak şekilde, a noktasına bağlı, bir pozitif r reel sayısı bulunabiliyorsa A kümesine d metriğine göre açık küme denir. [13]

Teorem 2.8 (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır:

a) X ve $\emptyset$ açık kümelerdir.

b) X in iki açık alt kümesinin kesişimi yine açık bir kümedir.

c) X in herhangi sayıda açık alt kümelerinin birleşimi yine açık bir kümedir.

[13]

İspat. a) $\forall\, x \in X$ için $B(x, r) \subset X$ yazılabileceğinden X kümesi açıktır. $\emptyset$, boş kümesinin açık olduğunu göstermek için $\emptyset$ nin açık olmadığını varsayalım. Bu takdirde $\emptyset$, boş kümenin hiç elemanının olamayacağı gerçeğine aykırı bir durum çıkar ki bu ise çelişkidir. O halde $\emptyset$ boş kümesi açık kümedir.

b) X in iki açık alt kümesi A_1 ve A_2 olsun. A_1 ile A_2 nin her ikisinin de boş olmadıklarını kabul edebiliriz. Çünkü aksi takdirde en az biri boş küme ise kesişim boş olacağından açık olacaktır. Şimdi $A_1 \cap A_2$ nin açık küme olduğunu göstermek için herhangi bir $x \in A_1 \cap A_2$ alalım. Bu takdirde $x \in A_1$ ve $x \in A_2$ dir. A_1 açık olduğundan,

$$B(x, r_1) \subset A_1$$

olacak şekilde bir r_1 reel sayısı ve A_2 açık olduğundan,

$$B(x, r_2) \subset A_2$$

olacak şekilde bir pozitif r_2 reel sayısı vardır. Dolayısıyla,

$$B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset A_1 \cap A_2$$

bulunur. $r = min(r_1, r_2)$ denilirse,

$$B(x, r) \subset A_1 \cap A_2$$

bulunur. Bu ise $A_1 \cap A_2$ nin açık bir küme olması demektir.

c) X in açık kümelerinin herhangi bir sınıfı $\{A_i : i \in I\}$ olsun. Birleşimi oluşturan kümelerin en az birinin boş olmadığını kabul edebiliriz. Aksi takdirde birleşim kümesi boş küme olacağından birleşim açık olacaktır. Şimdi $\bigcup_{i\in I} A_i$ nin açık olduğunu göstermek için herhangi bir $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ alalım. Bu takdirde, $x \in A_{i_0}$ olacak şekilde bir i_0 vardır. A_{i_0} kümesi açık olduğundan, $B(x, r_{i_0}) \subset A_{i_0}$ olacak şekilde bir pozitif r_{i_0} vardır. Buradan,

$$B(x, r_{i_0}) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

bulunur ki bu da $\bigcup_{i\in I} A_i$ nin açık olmasını verir.

Sonuç 2.9 Bir (X, d) metrik uzayında X in d metriğine göre bütün açık alt kümelerinin sınıfını τ ile gösterirsek, τ tanım 2.1 deki özellikleri sağlayacaktır. O halde (X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin τ sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Böylece bir (X, d) metrik uzayından (X, τ) topolojik uzayı elde edebilmekteyiz. Bu topolojik uzaya d metriğinden elde edilen topolojik uzay denir ve (X, d) metrik uzayına da (X, τ) topolojik uzayını doğurur denir. [13]

Tanım 2.10. Bir vektör uzayı (lineer uzay), V üzerinde tanımlı $+$ ve $\cdot$ işlemler ile birlikte aşağıdaki aksiyomları sağlayan elemanların kümesidir.

1) Eğer x ve y, V nin herhangi iki elemanı ise $x + y$ de V nin elemanıdır.

a) V deki her x ve y için, $x + y = y + x$.

b) V deki her x, y ve z için, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

c) V deki her x için, $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir 0 elemanı bulunur.

d) V deki her x için, $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir $-x$ elemanı bulunur.

2) α herhangi bir sayı ve x, V nin herhangi bir elemanı ise $\alpha \cdot x$ de V nin elemanıdır.

a) Herhangi bir α ve β sayıları ve V deki her x için, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

b) V deki her x için, $1 \cdot x = x$.

c) Herhangi bir α sayısı ve V deki her x ve y için, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

d) Herhangi iki α ve β sayıları ve V deki her x için, $(\alpha \cdot (\beta \cdot x)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

Burada V nin elemanlarına vektörler ve $\alpha, \beta, \ldots$ sayılarına skalerler denir. Eğer α reel sayı ise V ye reel lineer (vektör) uzay, eğer α kompleks ise V ye kompleks lineer (vektör) uzay denir. [1]

Tanım 2.11. V bir vektör uzayı ve $\mathbb{F}$ bir cisim, $\emptyset \neq M \subset V$ olmak üzere

$i)$ $\forall\, x, y \in M, x + y \in M$

$ii)$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{F}$ ve $\forall\, x \in M, \alpha x \in M$

koşulları sağlanıyorsa M ye V nin bir alt vektör uzayı denir. Bu durumda toplama fonksiyonu $V \times V$ den $M \times M$ ye ve skalerle çarpma fonksiyonu $\mathbb{F} \times V$ den $\mathbb{F} \times M$ ye kısıtlanırsa $(M, V, +, \cdot)$ kendi başına bir vektör uzayı olur. [1]

Tanım 2.12. Bir V vektör uzayındaki $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörlerinden oluşan bir A kümesini ele alalım. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ skalerler olmak üzere,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$$

eşitliği, ancak ve ancak, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ olması halinde gerçekleniyorsa, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörleri, diğer bir deyişle A kümesi, lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlı' dır denir. [7]

Tanım 2.13. n pozitif tamsayı olmak üzere, bir V vektör uzayı lineer bağımsız n tane vektör içeriyor ve $n+1$ ya da daha fazla sayıda vektörü lineer bağımlıysa, bu V vektör uzayı sonlu boyutlu' dur denir. n sayısına V nin boyutu adı verilir ve $n = dim\,V$ olarak yazılır. Tanım olarak, $V = \{0\}$ uzayı sonlu boyutlu olup $dim\,V = 0$ dır. Eğer bir V uzayı sonlu boyutlu değilse, sonsuz boyutlu uzay olarak adlandırılır. [7]

Tanım 2.14. Bir V vektör uzayının alt kümesi olan E vektör uzayının span'ı aşağıdaki şekilde tanımlanan E nin elemanlarının sonlu lineer kombinazonlarının kümesidir,

$$span(E) = \left\{ x \in V : x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\, , n \in \mathbb{N}\, , \alpha_j \in \mathbb{F}\, , e_j \in E \right\}.$$

Eğer $span(E) = V$ ise E kümesi V uzayını gerer denir. [30]

Tanım 2.15. $\emptyset \neq E$ kümesi V vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer E kümesi lineer bağımsız ve $span(E) = V$ ise E kümesine Hamel bazı denir. [30]

Örnek 2.16. Aşağıda bazı Hamel bazlarına örnekler verilmiştir;

1) $\mathbb{R}^n$ uzayındaki her baz Hamel bazıdır.

2) $E = \{1, x, x^2, \dots\}$ kümesi bütün polinomların uzayı için bir Hamel bazıdır.

[30]

Lemma 2.17. E, bir V vektör uzayının bir Hamel bazı ise herhangi bir $x \in V$ elemanı; $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{F}$ ve $e_j \in E$ olmak üzere,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

şeklinde tek türlü yazılır. [30]

İspat. Kabul edelim ki herhangi bir $x \in V$ elemanı, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ ve $x = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\alpha_j}\, e_j$ şeklinde iki farklı yazılışı olsun. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\alpha_j} e_j \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \widetilde{\alpha_j}) e_j = 0$$

elde edilir ve lineer bağımsızlıktan $\alpha_j = \widetilde{\alpha_j}$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.18. Aşağıda bazı temel vektör uzaylarına örnekler verilmiştir;

1) $\mathbb{R}^n$ bir reel vektör uzayıdır.

2) $\mathbb{C}^n$ bir kompleks vektör uzayıdır.

3) Aşağıdaki şekilde tanımlanan tüm polinomların kümesi bir vektör uzayıdır,

$$P = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \,:\, \alpha_k \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

4) Aşağıdaki şekilde tanımlanan tüm sınırlı dizilerin kümesi bir vektör uzayıdır,

$$\ell^\infty(\mathbb{F}) = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{F}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}.$$

5) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan p ninci kuvveti toplanabilir dizilerin kümesi bir vektör uzayıdır,

$$\ell^p(\mathbb{F}) = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{F}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

6) $C[0,1]$, $[0,1]$ kapalı aralığındaki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı bir vektör uzayıdır.

[30]

Aksiyom 2.19. (**Maksimal Aksiyom**) $\mathcal{S}$, E kümesinin bir alt kümelerinin kümesi olsun ve $\mathfrak{U}$, $\mathcal{S}$ tarafından kapsanan bir zincir olsun. Bu takdirde $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{S}$ olacak şekilde maksimal bir $\mathfrak{M}$ zinciri vardır. [4]

Teorem 2.20. L, E vektör uzayının lineer bağımsız alt kümesi ve S kümesi L yi içeren ve E yi geren bir alt küme olmak üzere, E uzayında bir B bazı vardır ki $L \subseteq B \subseteq S$ dir. [4]

İspat. S nin bütün lineer bağımsız alt kümelerini $\mathcal{S}$ ile temsil edelim ve $\mathfrak{U} = \{L\}$ olsun. Maksimal aksiyom gereğince maksimal bir $\mathfrak{M}$ zinciri vardır ki $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{S}$ dir.

$$B = \bigcup \{m : m \in \mathfrak{M}\}$$

olmak üzere $L \subseteq B \subseteq S$ buluruz. Ayrıca B, lineer bağımsızdır çünkü B nin elemanlarının herhangi sonlu lineer kombinazonu $\mathfrak{M}$ nin kümelerinin sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır, dolayısıyla en büyükleri içinde kapsanır. Son olarak S nin her elemanı B nin elemanlarının lineer kombinazonlarıdır, eğer öyle olmasaydı, $B \cup \{x\}$, $\mathfrak{M}$ ye eklenebilirdi ve bu ise $\mathfrak{M}$ nin maksimal olması ile çelişirdi.

Sonuç 2.21. Her vektör uzayı bir Hamel bazına sahiptir.

Tanım 2.22. Bir X vektör uzayı ve bunun Y ve Z gibi iki alt uzayı verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in X$ elemanı, $y \in Y$ ve $z \in Z$ olmak üzere, $x = y + z$ şeklinde tek bir gösterime sahip ise, X vektör uzayı, Y ve Z alt uzaylarının direkt toplamıdır denir ve $X = Y \bigoplus Z$ olarak yazılır. [7]

Tanım 2.23. Bir X vektör uzayının verilen x ve y gibi iki elemanını birleştiren doğru parçası; $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $(\alpha \in \mathbb{R},\ 0 \leq \alpha \leq 1)$ şeklindeki bütün $z \in X$ elemanlarından oluşan küme olarak tanımlanır. X in bir M alt kümesi verilmiş olsun. Her $x, y \in M$ için x ve y yi birleştiren doğru parçasını M de içeriyorsa, M kümesi konvekstir denir. [1]

Tanım 2.24. V reel veya kompleks vektör uzayı olsun. V üzerinde bir norm V üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan negatif olmayan reel değerli $\|.\|$ fonksiyonudur:

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;\ \alpha \in \mathbb{F}$

4) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

V üzerinde bu şekilde belirlenen bir norm ile birlikte V vektör uzayına normlu uzay denir ve kısaca $(V, \|.\|)$ şeklinde gösterilir. V üzerinde bir norm, V üzerinde, $d(x, y) = \|x - y\|;\ \forall x, y \in V$ ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından üretilen (doğrulan) metrik olarak adlandırılır. [1]

Örnek 2.25. Aşağıda bazı temel normlu vektör uzayları verilmiştir;

1) $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı aşağıdaki normlar ile bir normlu vektör uzayıdır:

$$a)\ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$b)\ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty$$

$$c)\ \|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|\,.$$

2) $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\ell^p(\mathbb{F})$ vektör uzayı aşağıdaki norm ile bir normlu vektör uzayıdır:

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

3) $\ell^\infty(\mathbb{F})$ vektör uzayı aşağıdaki norm ile bir normlu vektör uzayıdır:

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\,.$$

4) $C[0,1]$ vektör uzayı aşağıdaki normlar ile bir normlu vektör uzayıdır:

a) Supremum norm olarak bilinen aşağıdaki norm,

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

b) L^1 norm olarak bilinen aşağıdaki norm,

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|dt$$

c) L^2 norm olarak bilinen aşağıdaki norm,

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

[30]

Tanım 2.26. Bir $x_0 \in V$ noktası ve reel bir $r > 0$ sayısı verilmiş olsun. Buna göre, üç tip küme tanımı yapılır:

1) $B(x_0; r) = \{x \in V : \|x - x_0\| < r\}$ $\quad$ (*Açık Yuvar*),

2) $B[x_0; r] = \{x \in V : \|x - x_0\| \le r\}$ $\quad$ (*Kapalı Yuvar*),

3) $S(x_0; r) = \{x \in V : \|x - x_0\| = r\}$ $\quad\quad\quad (Yuvar\ Yüzeyi).$

Her üç kümede de x_0 merkez, r ise yarıçap olarak adlandırılır. [7]

Tanım 2.27. Bir V normlu uzayı ve bunun bir M alt kümesini göz önüne alalım. Eğer M kümesi her bir noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa M kümesi açık' tır denir. K, V nin bir alt kümesi olsun. Eğer, K nın V deki tümleyeni, yani $K^C = V \backslash K$ açık ise K ya kapalı' dır denir. [7]

Tanım 2.28. ε yarıçaplı bir $B(x_0; \varepsilon)$ açık yuvarına, x_0 ın ε – komşuluğu denir. [7]

Tanım 2.29. M, V normlu uzayının bir alt kümesi olsun. V nin (M nin noktası olabilen ya da olamayan) bir x_0 noktasını ele alalım. Eğer, x_0 ın her bir komşuluğu, x_0 dan farklı en az bir $y \in M$ noktası içeriyorsa, x_0 noktasına, M nin bir yığılma noktası (ya da M nin bir limit noktası) adı verilir. M nin noktalarıyla, M nin yığılma noktalarından oluşan kümeye ise M nin kapanışı denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir. $\overline{M}$, M yi içeren en küçük kapalı kümedir ve $\overline{M}$ kümesi, M kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin kesişimine eşittir. [7]

Tanım 2.30. Bir V normlu uzayının bir M alt kümesi verildiğinde eğer $\overline{M} = V$ ise, M kümesi V de yoğun' dur denir. [7]

Teorem 2.31. M, V normlu uzayının bir altkümesi olsun. M kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $M = \overline{M}$ olmasıdır. [7]

İspat. M kümesi kapalı olsun. $\overline{M}$, M yi içeren en küçük kapalı küme olduğundan $M \subseteq \overline{M}$ dır. $\overline{M} \subseteq M$ olduğunu göstereceğiz. M kümesi kapalı olduğundan $\overline{M}$ ın tanımı gereğince $\overline{M} \subseteq M$ elde edilir. Sonuç olarak $M = \overline{M}$ bulunur.

Tersine olarak, $M = \overline{M}$ ise, $\overline{M}$ kümesi kapalıdır. Sonuç olarak M kümesi kapalıdır.

Tanım 2.32. Bir X metrik uzayında, bir $x \in X$ elemanından, boş olmayan bir $M \subset X$ alt kümesine olan δ uzaklığı,

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M \neq \emptyset} d(x, \tilde{y})$$

olarak tanımlanır. Bu tanım, normlu bir uzayda,

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M \neq \emptyset} \|x - \tilde{y}\|$$

şekline dönüşür. [7]

Tanım 2.33. $(V, \|.\|)$ normlu uzay ve (x_n) V uzayında bir dizi olmak üzere

$$\forall\varepsilon > 0 \ için \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ ve \ \forall n \geq N_\varepsilon \ iken \ \|x_n - x\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlıyorsa (x_n) dizisi $x \in V$ elemanına yakınsar denir. Bu durumda (x_n) dizisine yakınsak dizi ve x elemanına ise (x_n) dizisinin limiti adı verilir ve kısaca, $x_n \to x$ yazılır. (x_n) dizisi yakınsak değilse ıraksak' tır denir. [31]

Teorem 2.34. Normlu uzaylarda yakınsak her dizinin limiti tektir. [31]

İspat. (x_n) yakınsak ve (x_n) dizisinin x ve y gibi iki limiti olsun. Yani,

$\forall\varepsilon > 0 \ için \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ ve \ \forall n \geq N_\varepsilon$ iken $\|x_n - x\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$
$\forall\varepsilon > 0 \ için \ \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} \ ve \ \forall n \geq N'_\varepsilon$ iken $\|x_n - y\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$

yazabiliriz. $N''_\varepsilon = max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ alalım.

$$\|x - y\| = \|x_n - x - x_n + y\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n - y\| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$$

$\|x - y\| < \varepsilon \ \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ olduğundan $\|x - y\| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ olur ve ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 2.35. M, bir $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $\overline{M}$ bu kümenin kapanışı olsun. Buna göre,

a) $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter koşul M de $x_n \to x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisinin varolmasıdır.

b) M nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul ise, $x_n \in M$ ve $x_n \to x$ ise $x \in M$ olmasıdır.

[7], [23]

İspat. a) $x \in \overline{M}$ olsun. $x \in M$ ise, bu tip bir dizi $(x, x, \dots)$ dizisidir. $x \notin M$ ise, x, M nin bir yığılma noktasıdır. O halde, her bir $n = 1, 2, \dots$ için, $B(x; 1/n)$ yuvarı, bir $x_n \in M$ elemanı içerir ve $n \longrightarrow \infty$ için ${}^{1}/_{n} \to 0$ olduğundan, $x_n \to x$ olur.

Tersine olarak, (x_n), M de ve $x_n \dashrightarrow x$ ise, $x \in M$ olur, ya da x in her komşuluğu $x_n \neq x$ noktalarını içerir; dolayısıyla, x, M nin bir yığılma noktasıdır. Buna göre, kapanışın tanımı gereğince, $x \in \overline{M}$ dir.

b) M nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $M = \overline{M}$ olmasıdır. O halde (a) dan açık bir şekilde ispatlanmış olur.

Tanım 2.36. $(V, \|.\|)$ normlu uzay ve (x_n) V uzayında bir Cauchy dizisi ise

$$\forall \varepsilon > 0 \ için \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ ve \ \forall n, m \geq N_\varepsilon \text{ iken } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

koşulu sağlanır. [31]

Teorem 2.37. $(V, \|.\|)$ normlu uzayında her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. [31]

İspat. (x_n) yakınsak olsun yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ ve $\forall n \geq N_\varepsilon$ iken $\|x_n - x\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ dur. Göstermemiz gereken ifade, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ ve $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ iken $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

$\|x_n - x_m\| = \|x_m - x_n + x - x\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$ olur ve ispatı tamamlamış oluruz.

Tanım 2.38. $(V, \|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak dizi ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. [7]

Örnek 2.39. Aşağıda bazı temel Banach uzayları verilmiştir;

1) $\mathbb{R}^n$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

2) $\mathbb{C}^n$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

3) $\ell^p(\mathbb{F})$ normlu uzayı üzerinde tanımlı standart ℓ^p normuna göre bir Banach uzayıdır.

4) $\ell^\infty(\mathbb{F})$ normlu uzayı üzerinde tanımlı standart ℓ^∞ normuna göre bir Banach uzayıdır.

5) $C[0,1]$ normlu uzayı üzerinde tanımlı supremum normuna göre bir Banach uzayıdır.

[7]

Teorem 2.40. Bir V tam normlu uzayının bir M alt uzayının da tam olması için gerek ve yeter koşul M nin V de kapalı bir küme olmasıdır. [7], [23]

İspat. M tam normlu uzay olsun. Dolayısıyla, her $x \in \overline{M}$ için, M de x e yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. Ayrıca (x_n) bir Cauchy dizisi ve M tam normlu uzay olduğundan, (x_n) dizisi M de yakınsak olduğundan limiti tektir. Dolayısıyla $x \in M$ yazabiliriz. Bu ise, $x \in \overline{M}$ nin keyfi olarak seçilmiş olması nedeniyle, M nin kapalı olduğunu ispatlar.

Tersine olarak, M kapalı bir küme ve (x_n) M de bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre, $x_n \to x \in V$ yazabiliriz. Bu ise, $x \in \overline{M}$ sonucunu gerektirir. Ve, kabul gereği, $M = \overline{M}$ olduğundan, $x \in M$ bulunur. O halde, keyfi olarak alınan (x_n) Cauchy dizisi M de yakınsamaktadır. Bu da M nin tam normlu uzay olmasını ispatlar.

Tanım 2.41. $(V, \|.\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. Eğer V, $\forall x \in V$ için bir tek (α_n) skaler dizisi var olmak üzere,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \right\| \to 0 \;\; (k \to \infty)$$

olacak şekilde bir (e_n) dizisi içeriyorsa bu (e_n) dizisine V nin bir Schauder bazı denir. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ serisine x in (e_n) ile açılımı denir ve

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

şeklinde yazılır. [7]

Örnek 2.42. $\ell^p(\mathbb{F})$ vektör uzayı, $e_n = (\delta_{nj})$, n. terimde 1 ve diğer terimlerde 0 olan e_n dizisi ile bir Schauder bazına sahiptir ve açık olarak bu dizi,

$$e_1 = (1,0,0,0, \dots)$$

$$e_2 = (0,1,0,0, \dots)$$

$$e_3 = (0,0,1,0, \dots)$$

$$\vdots$$

şeklinde yazılır. [7]

Tanım 2.43. V reel veya kompleks vektör uzayı olsun. V uzayı üzerinde bir iç çarpım, V uzayındaki vektörlerin her sıralı çiftini bir skalerle eşleyen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:

1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Böyle bir iç çarpım ile donatılan V uzayına bir iç çarpım uzayı denir. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ formülü V üzerinde bir norm ve $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ formülü V üzerinde bir metrik belirtir. [7]

Örnek 2.44. Aşağıda bazı temel iç çarpım uzayları verilmiştir;

1) $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı aşağıdaki iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,.$$

2) $\mathbb{C}^n$ vektör uzayı aşağıdaki iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \,.$$

3) $\ell^2(\mathbb{F})$ vektör uzayı aşağıdaki iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \,.$$

4) $1 \leq p < \infty$ için,

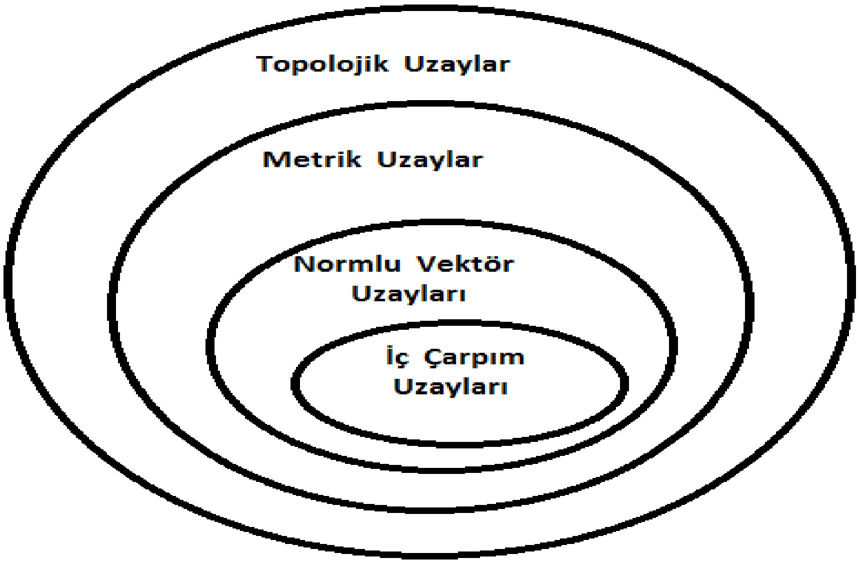
$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} < \infty$$

olmak üzere tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(I)$ şeklinde gösterilir. $L^2(a,b)$ uzayı aşağıdaki iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \,.$$

[30]

Sonuç 2.45. Topolojik uzaylar, metrik uzaylar, normlu vektör uzayları ile iç çarpım uzayları arasındaki kapsama ilişkilerini aşağıdaki gibi bir diyagramda toparlayabiliriz,



Şekil 2.1 Uzaylar arasındaki kapsama ilişkileri

Tanım 2.46. Bir V iç çarpım uzayının x ve y gibi iki elemanı verildiğinde, eğer,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

ise, x elemanı y elemanına dik (ortogonal)' tir denir. Ve $x \perp y$ şeklinde yazılır. Benzer şekilde, $A, B \subset V$ altkümeleri verildiğinde, eğer, $\forall\, a \in A$ için $x \perp a$ ise, $x \perp A$ ve $\forall\, a \in A$ ve $\forall\, b \in B$ için $a \perp b$ ise $A \perp B$ yazılır. [7]

Tanım 2.47. $\emptyset \neq E$ kümesi bir V iç çarpım uzayının bir alt kümesi olsun. $\forall\, e \in E$ için $\|e\| = 1$ ve $\forall\, e_1, e_2 \in E$ için $e_1 \neq e_2$ iken $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ ise E kümesine ortonormal küme denir. [30]

Örnek 2.48. $L^2(-\pi, \pi)$ uzayındaki

$$E = \left\{ f_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesi her x için:

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^2 \, dx = 1$$

ve $n \neq m$ olmak üzere,

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\overline{f_m(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = 0$$

olduğundan $L^2(-\pi,\pi)$ uzayında ortonormal bir kümedir. [30]

Teorem 2.49. V bir iç çarpım uzayı olmak üzere, iç çarpım uzayı üzerindeki bir norm, paralelkenar eşitliği olarak bilinen

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \qquad x,y\in V$$

eşitliğini gerçekler. [7]

İspat. $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle$ $+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,x\rangle-\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle=2(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle)=$ $2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ ve eşitliği ispat etmiş oluruz.

Teorem 2.50. (Cauchy - Schwarz Eşitsizliği) Eğer x ve y, V iç çarpım uzayının herhangi iki elemanı ise,

$$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$$

eşitsizliği gerçeklenir. [7]

İspat. $y=0$ olması halinde, $\langle x,0\rangle=0$ olduğundan ifade gerçeklenir. $y\neq 0$ olsun. Her α skaleri için,

$$0\le\|x-\alpha y\|^2=\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle=\langle x,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha[\langle y,x\rangle-\bar{\alpha}\langle y,y\rangle]$$

yazabiliriz. Buradan, $\bar{\alpha}={\langle y,x\rangle}/{\langle y,y\rangle}$ alınırsa köşeli parantezli ifadeyi yok olur

ve geriye kalan eşitsizlik,

$$0\le\langle x,x\rangle-\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle=\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

dir. Bu ifadeyi $\|y\|^2$ ile çarpıp, son terimi sola geçirdikten sonra karekök alınırsa eşitsizliği ispat etmiş oluruz.

Teorem 2.51. (**Bessel Eşitsizliği**) V bir iç çarpım uzayı ve $E=(e_k)_{k=1}^{\infty}$ bir ortonormal dizi olmak üzere, $\forall x\in V$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\le\|x\|^2$$

eşitsizliği gerçeklenir. [30]

İspat. $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \, , x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \rangle$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

ifadenin sağ tarafı negatif olamayacağından dolayı,

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

olur ve dolayısıyla $n \to \infty$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

elde edilir.

Sonuç 2.52. Bessel eşitsizliğinin aşağıdaki eşitlik durumu,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$

Parseval bağıntısı olarak bilinir. [30]

Tanım 2.53. V uzayı, üzerinde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ formülü ile belirlenen norma göre tam ise V uzayına Hilbert uzayı denir. [7]

Örnek 2.54. Aşağıda bazı temel Hilbert uzayları verilmiştir;

1) $\mathbb{R}^n$ aşağıdaki iç çarpım ve norma göre bir Hilbert uzayıdır,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ , \qquad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \right)^{1/2} .$$

2) $\mathbb{C}^n$ aşağıdaki iç çarpım ve norma göre bir Hilbert uzayıdır,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\,, \qquad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

3) $\ell^2(\mathbb{F})$ aşağıdaki iç çarpım ve norma göre bir Hilbert uzayıdır,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}\,, \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

4) $L^2(a, b)$ aşağıdaki iç çarpım ve norma göre bir Hilbert uzayıdır,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\,, \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

[30]

Lemma 2.55. Bir V iç çarpım uzayındaki her w için, $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ ise $v_1 = v_2$ dir. Özel olarak, $\forall w \in V$ için $\langle v_1, w\rangle = 0$ olması $v_1 = 0$ olmasını gerektirir. [7], [23]

İspat. Kabul gereği, her w için, $\langle v_1 - v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle - \langle v_2, w\rangle = 0$ dir. $w = v_1 - v_2$ için, bu eşitlik $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ sonucunu verir. Buna göre, $v_1 - v_2 = 0$, dolaysıyla $v_1 = v_2$ bulunur. Özel olarak, $w = v_1$ olmak üzere, $\langle v_1, w\rangle = 0$ eşitliği, $\|v_1\|^2 = 0$ yani $v_1 = 0$ verir.

Lemma 2.56. Bir V iç çarpım uzayında, $x_n \longrightarrow x$ ve $y_n \longrightarrow y$ ise $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ dir. [7]

İspat. $n \longrightarrow \infty$ için, $y_n - y \to 0$ ve $x_n - x \to 0$ ile Cauchy - Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} 0 \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\le |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |x_n - x, y| \\ &\le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0. \end{aligned}$$

Tanım 2.57. $X \neq \emptyset$, H Hilbert uzayının bir alt kümesi olsun. X nin ortogonal tümleyeni $X^\perp$, $X^\perp = \{u \in H: \langle u, x\rangle = 0, \forall x \in X\}$ şeklinde tanımlanır. [7]

Önerme 2.58. $X \neq \emptyset$, H Hilbert uzayının bir alt kümesi olsun. X nin ortogonal tümleyeni $X^\perp$, H nin kapalı bir alt vektör uzayıdır. [30]

İspat. $x, y \in X^\perp$ alınması halinde, $\forall\, v \in X$ ve $\forall\, \alpha, \beta$ skalerleri için,

$$\langle \alpha x + \beta y, v\rangle = \alpha\langle x, v\rangle + \beta\langle y, v\rangle = 0$$

olur ve dolayısıyla $\alpha x + \beta y \in X^{\perp}$ olduğundan, $X^{\perp}$ bir vektör alt uzayıdır. Şimdi kabul edelim ki $u_n \to u \in H$ olacak şekilde bir $u_n \in X^{\perp}$ dizisi var olsun. Dolayısıyla, $\forall\, x \in X$ için,

$$\langle u, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} u_n\, , y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n\, , y\rangle = 0$$

olduğundan, $x \in X^{\perp}$ olur ve $X^{\perp}$ kapalıdır.

Teorem 2.59. (**Minimumlaştıran Vektör**) X bir iç çarpım uzayı ve $M \neq \emptyset$ iç çarpımla doğrulan metriğe göre tam olan konveks bir alt küme olsun. Bu durumda, verilen $\forall x \in X$ için, $\delta = \inf_{\tilde{y}\in M}\|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$ olacak şekilde bir tek $y \in M$ vardır. [7], [23]

İspat. Varlığının ispatı, infimum tanımı gereğince, M de $\delta_n = \|x - y_n\|$ olmak üzere, $\delta_n \to \delta$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi vardır. Şimdi bu (y_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $y_n - x = v_n$ yazarsak, $\|v_n\| = \delta_n$ ve M kümesi konveks olduğundan $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ dir. Dolayısıyla $\|v_n - v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta$ elde ederiz. Ayrıca, $y_n - y_m = v_n - v_m$ dir. Buna göre, paralelkenar eşitliği gereğince,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 &= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)\\ &\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)\end{aligned}$$

yazabiliriz ve $\delta_n \to \delta$ olduğundan (y_n) in bir Cauchy dizisi olduğu ortaya çıkar. M tam olduğundan (y_n) yakınsaktır. $y_n \to y \in M$ diyelim. $y \in M$ olduğundan, $\|x - y\| \geq \delta$ dır. Ayrıca,

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$$

bulunur ki bu da, $\|x - y\| = \delta$ olduğunu gösterir.

Tekliğinin ispatı, $y \in M$ ve $y_0 \in M$ in her ikisisinin de, $\|x - y\| = \delta$ ve $\|x - y_0\| = \delta$ eşitliklerini gerçeklediklerini varsayıp, $y = y_0$ olduğunu gösterelim. Parelelkenar eşitliği gereğince,

$$\begin{aligned}\|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2\\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2\\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\|^2\end{aligned}$$

yazabiliriz. Sağ tarafta, $\frac{1}{2}(y + y_0) \in M$ olup dolayısıyla, $\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\| \geq \delta$ dır. Bu ise, $2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2 \left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ sonucuna ulaştırır. Buna göre, $\|y - y_0\| \leq 0$ olur. Aşikar olarak $\|y - y_0\| \geq 0$ dır. Dolayısıyla zorunlu olarak eşitlik ortaya çıkar ve $y = y_0$ bulunur.

Lemma 2.60. X bir iç çarpım uzayı ve $M \neq \emptyset$ iç çarpımla doğrulan metriğe göre tam olan konveks bir altküme olsun. Y, X in tam olan konveks bir alt uzayı ve $x \in X$ sabit olsun. Bu durumda, $z = x - y$, Y ye ortogonaldir. [7], [23]

İspat. $z \perp Y$, değil ise, $\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$ olacak şekilde bir $y_1 \in Y$ vardır. Açıkça görüldüğü gibi, $y_1 \neq 0$ dır; aksi halde $\langle z, y_1 \rangle = 0$ olması gerekirdi. Ayrıca herhangi bir α skaleri için,

$$\begin{aligned}
\|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha}\langle z, y_1 \rangle - \alpha[\langle y_1, z \rangle - \bar{\alpha}\langle y_1, y_1 \rangle] \\
&= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha}\beta\alpha\left[\bar{\beta} - \bar{\alpha}\langle y_1, y_1 \rangle\right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\bar{\alpha} = \bar{\beta}\big/\langle y_1, y_1 \rangle$ seçmemiz halinde, köşeli parantez içindeki ifade sıfırdır. Ayrıca teorem 2.59 den, $\|z\| = \|x - y\| = \delta$ yazabiliriz, ve buna göre eşitlik,

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2$$

sonucunu verir. Ancak, bu sonuç olanaksızdır; çünkü, $y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$ olmak üzere, $z - \alpha y_1 = x - y_2$ yazabiliriz ve dolayısıyla, δ nın tanımı gereğince, $\|z - \alpha y_1\| \geq \delta$ dır. O halde, $\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$ ifadesi geçerli olamaz dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.61. (**Projeksiyon Teoremi**) Y bir H Hilbert uzayının kapalı herhangi bir konveks alt uzayı olsun. Bu durumda, $H = Y \oplus Z$, $Z = Y^{\perp}$ dir. [7], [23]

İspat. H ın tam ve Y nin kapalı olması halinde Y de tamdır. Y konveks olduğundan, teorem 2.59 ve lemma 2.60, $\forall x \in H$ için $x = y + z$, $z \in Z = Y^{\perp}$ olacak şekilde bir $y \in Y$ nin varlığını gerektirir. Tekliğini ispat etmek için, $y, y_1 \in Y$ ve $z, z_1 \in Z$ olmak üzere, $x = y + z = y_1 + z_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $y - y_1 = z - z_1$ olmaktadır. $z_1 - z \in Z = Y^{\perp}$ iken, $y - y_1 \in Y$

olduğundan, $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ olduğu ortaya çıkar. Bu $y = y_1$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $z = z_1$ dir.

Lemma 2.62. Y, H Hilbert uzayının kapalı bir alt uzayı ise $Y = Y^{\perp\perp}$ dir. [7], [23]

İspat. $x \in Y \Rightarrow x \perp Y^{\perp} \Rightarrow x \in Y^{\perp\perp}$. Dolayısıyla $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Karşıt olarak, $x \in Y^{\perp\perp}$ alalım. $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ olmak üzere projeksiyon teoremi gereğince, $x = y + z$ yazabiliriz. $Y^{\perp\perp}$ bir vektör uzayı olduğundan ve $x \in Y^{\perp\perp}$ olduğundan $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$ olur ve dolayısıyla $z \perp Y^{\perp}$ dir. Ancak, projeksiyon teoremi gereğince $z \in Y^{\perp}$ dir. O halde $z \perp z$ olup, $z = 0$ olur ve dolayısıyla $x = y$ bulunur, yani $x \in Y$ dir. Sonuçta $Y^{\perp\perp} \subset Y$ bulunur ve $Y = Y^{\perp\perp}$ dir.

Lemma 2.63. H bir Hilbert uzayının herhangi bir $M \neq \emptyset$ alt kümesi verildiğinde, M nin $span$'ının H da yoğun olması için gerek ve yeter koşul $M^{\perp} = \{0\}$ olmasıdır. [7], [23]

İspat. $x \in M^{\perp}$ olsun ve $V = spanY$ nin H da yoğun olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $x \in \bar{V} = H$ olmak üzere V de, $x_n \longrightarrow x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. $x \in M^{\perp}$ ve $M^{\perp} \perp V$ olduğundan, $\langle x_n, x \rangle = 0$ dır ve ayrıca $\langle x_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, x \rangle$ olduğundan, $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ ve dolayısıyla $x = 0$ bulunur. Bu sonuç $M^{\perp} = \{0\}$ olduğunu ispatlar. Karşıt olarak $M^{\perp} = \{0\}$ olsun. $x \perp V$ ise $x \perp M$ olup, dolayısıyla $x \in M^{\perp}$ ve $x = 0$ bulunur. Buna göre $V^{\perp} = \{0\}$ elde edilir. V, H nın bir alt uzayı olduğundan $Y = \bar{V}$ olmak üzere projeksiyon teoreminden $\bar{V} = H$ elde edilir.

Tanım 2.64. Bir T operatörünün tanım ($D(T)$ veya $Dom(T)$) ve görüntü ($R(T)$ veya $Ran(T)$) kümesi aynı cisim üzerinde lineer uzaylarsa ve cisimdeki her α skaleri ve T nin tanım kümesindeki her x, y vektör çifti için

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

koşullarını gerçekliyorsa T operatörüne lineer operatör denir. [7]

Tanım 2.65. T nin sıfır uzayı $\big(N(T)\big)$, $Tx = 0$ koşulunu gerçekleyen tüm $x \in D(T)$ elemanlarından oluşur. [7]

Tanım 2.66. $I_X : X \to X$ birim operatörü, her $x \in X$ için, $I_X x = x$ eşitliği ile tanımlanır. I_X yerine kısaca I yazılırsa; o halde $Ix = x$ olur. [7]

Tanım 2.67. $0 : X \to Y$ sıfır operatörü, her $x \in X$ için, $0x = 0$ eşitliği ile tanımlanır. [7]

Tanım 2.68. X, $[a,b]$ üzerinde tanımlı tüm polinomlardan oluşan vektör uzayı olsun $(\cdot)$ notasyonu, t ye göre türevi göstermek üzere, her $x \in X$ için,

$$Tx(t) = \dot{x}(t)$$

olmak üzere, X üzerinde bir lineer T operatörü tanımlanabilir. Bu T operatörü X i kendi üzerine dönüştürür. [7]

Tanım 2.69. X bir vektör uzayı olmak üzere, $KerT = \{x : Tx = 0\ , x \in X\}$ şeklinde tanımlanan kümeye T operatörünün çekirdeği denir. [30]

Tanım 2.70. T_1 ve T_2 gibi iki operatör verilmiş olsun. Eğer bu iki operatör aynı $D(T_1) = D(T_2)$ tanım bölgesine sahip ise ve her $x \in D(T_1) = D(T_2)$ için $T_1x = T_2x$ oluyorsa, T_1 ve T_2 operatörleri eşittir denir ve $T_1 = T_2$ yazılır. [7]

Tanım 2.71. $T : D(T) \to Y$ operatörünün bir $B \subset D(T)$ altkümesine olan kısıtlaması, $T|_B$ ile gösterilen ve $T|_B : B \to Y, \forall\, x \in B$ için $T|_B x = Tx$ şeklinde tanımlanan bir operatördür. [7]

Tanım 2.72. $T : D(T) \to Y$ operatörünün bir $M \supset D(T)$ kümesine olan genişlemesi, $\tilde{T}|_{D(T)} = T$, yani $\forall\, x \in D(T)$ için $\tilde{T}x = Tx$ olacak şekilde tanımlanan bir $\tilde{T} : M \to Y$ operatörüdür. [7]

Teorem 2.73. T lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

a) $R(T)$ değer bölgesi bir vektör uzayıdır.

b) $dim\, D(T) = n < \infty$ ise, $dim\, R(T) \leq n$ dir.

c) $N(T)$ sıfır uzayı bir vektör uzayıdır.

[7], [23]

İspat. a) Her hangi $y_1, y_2 \in R(T)$ elemanlarını alıp, her hangi α, β skalerleri için, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ olduğunu göstereceğiz. $y_1, y_2 \in R(T)$ olduğundan, uygun $x_1, x_2 \in D(T)$ elemanları için, $y_1 = Tx_1$ ve $y_2 = Tx_2$ yazabiliriz. Ayrıca $D(T)$ bir vektör uzayı olduğundan $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$ dir. T nin lineerliği nedeniyle de, $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$ olur. O halde, $y_1, y_2 \in R(T)$ dir. $y_1, y_2 \in R(T)$ elemanları ve alınan skalerler keyfi seçildiğinden, bu sonuç $R(T)$ nin bir vektör uzayı olduğunu ispatlar.

b) $R(T)$ den keyfi bir biçimde, $n+1$ tane, $y_1, \dots, y_{n+1}$ elemanını seçelim. Buna göre, $D(T)$ deki bazı $x_1, \dots, x_{n+1}$ elemanları için, $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ yazabiliriz. $dim\, D(T) = n$ olduğundan, $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ kümesi lineer bağımlı olmalıdır. Dolayısıyla, hepsi birden sıfır olmayan bazı $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ skalerleri için,

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

yazabiliriz. T lineer ve $T0 = 0$ olduğundan, T nin her iki yana uygulanması

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$$

sonucunu verir. Bu ise, α_j lerin hepsinin birden sıfır olmaması nedeniyle, $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ kümesinin lineer bağımlı olduğunu gösterir. $R(T)$ nin bu altkümesinin keyfi bir biçimde seçildiğini hatırlarsak, $R(T)$ nin $n+1$ ya da daha fazla sayıda eleman içeren lineer bağımsız bir altkümeye sahip olmadığını sonucuna varırız. Bunun anlamı, tanım gereği, $dim\, R(T) \leq n$ olduğudur.

c) Her hangi $x_1, x_2 \in N(T)$ alalım. Buna göre, $Tx_1 = Tx_2 = 0$ dır. T lineer olduğundan, her hangi α, β skalerleri için,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0$$

yazabiliriz. Bu da, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $N(T)$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.74. X ve Y normlu uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ $D(T) \subset X$ olmak üzere, lineer bir operatör olsun.

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye T operatörünün grafiği denir. [7]

Tanım 2.75. $\Gamma(T)$, $X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise T ye kapalı lineer operatör denir. [7]

Önerme 2.76. H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve G, $H_1 \times H_2$ nin bir alt kümesi olmak üzere; G kümesi bir operatörün grafiğidir ancak ve ancak $G \subset H_1 \times H_2$ ve $(0, g) \in G$ iken $g = 0$ dır. [29]

İspat. Eğer G bir operatörün grafiği ise, açık bir şekilde ifade sağlanır. Tersine, $G \subset H_1 \times H_2$ ve $(0, g) \in G$ iken $g = 0$ sağlansın ve

$$D(T) = \{\, f \in H_1 \,;\ \exists\, g \in H_2 \ \text{öyle ki}\ (f, g) \in G \,\}$$

olsun. Hipotez gereği, f ile ilişkili olan g tektir ve $D(T)$ bir alt uzaydır. Eğer $D(T)$ de $Tf = g$ ise T lineerdir. Böylece, T, H_1 den H_2 ye bir operatördür ve grafiği G dir.

Tanım 2.77. Bir T operatörünün, tanım kümesindeki farklı noktalara farklı görüntüler karşılık geliyorsa, yani, her hangi $x_1, x_2 \in D(T)$ için,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$$

oluyorsa, T operatörüne bire – bir operatör adı verilir. $\forall\, y \in R(T)$ için $\exists\, x \in D(T), Tx = y$ ise T operatörüne örten operatör denir. [7]

Tanım 2.78. T bire – bir operatör olmak üzere, $\forall\, y_0 \in R(T)$ elemanını, $Tx_0 = y_0$ olacak şekilde, $x_0 \in R(T)$ üzerine dönüştüren,

$$T^{-1}: R(T) \longrightarrow D(T)$$

$$y_0 \longrightarrow x_0$$

T^{-1} operatörüne, T nin tersi denir. Dolayısıyla, $\forall\, x \in D(T)$ için $T^{-1}Tx = x$ ve $\forall\, y \in R(T)$ için $T^{-1}Ty = y$ dir. [7]

Teorem 2.79. V ve Z, her ikisi de reel yada kompleks, iki vektör uzayı olsun. Tanım kümesi $D(T) \subset V$ ve değer kümesi $R(T) \subset Z$ olan lineer bir $T : D(T) \to Z$ operatörü olsun. Eğer T^{-1} mevcut ise, lineer bir operatördür. [7], [23]

İspat. T^{-1} in mevcut olduğunu kabul edip, lineer olduğunu gösterelim. T^{-1} in tanım kümesi $R(T)$ olup, bir vektör uzayıdır. Her hangi $x_1, x_2 \in D(T)$ elemanlarıyla ve bunların görüntüleri olan, $y_1 = Tx_1$ ve $y_2 = Tx_2$ elemanlarını göz önüne alalım. Buna göre, T^{-1} mevcut olduğundan $x_1 = T^{-1}y_1$ ve $x_2 = T^{-1}y_2$ yazabiliriz. T lineer olduğundan, her hangi α ve β skaleri için,

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

yazabiliriz. $x_j = T^{-1}y_j$ olduğundan,

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2$$

elde ederiz. Bu da T^{-1} in lineer olduğunu ispatlar.

Teorem 2.80. $T : X \to Y$ ve $S : Y \to Z$ iki terslenebilen lineer operatörler olsun. (burada X, Y ve Z birer vektör uzayıdır). Bu durumda, ST çarpımının (bileşiminin) tersi olan $(ST)^{-1} : Z \to X$ operatörü mevcut olup,

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

dir. [7], [23]

İspat. $T : X \to Y$ ve $S : Y \to Z$ iki terslenebilen lineer operatörler olduğundan $ST : X \to Z$ operatörü terslenebilirdir. Dolayısıyla $(ST)^{-1}$ mevcuttur. Buna göre, I_Z, Z üzerindeki birim operatörü olmak üzere, $ST(ST)^{-1} = I_Z$ yazabiliriz. Eşitliğin her iki yanına S^{-1} i uygulayıp, $S^{-1}S = I_Y$ (Y üzerindeki birim operatörü) olduğundan,

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}$$

elde ederiz. Bu kez de T^{-1} i uygulayıp, $TT^{-1} = I_X$ eşitliğini kullanırsak, $T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.81. $T : X \to Y$ terslenebilen lineer bir operatör olmak üzere $(T^{-1})^{-1} = T$ dir. [7]

İspat. T terslenebilen lineer bir operatör olduğundan, $TT^{-1} = I_X$ dir. $(TT^{-1})^{-1} = (T^{-1})^{-1}T^{-1} = I_X$ yazabiliriz ve sağdan T operatörünü uygularsak, $(T^{-1})^{-1}T^{-1}T = I_X T = T$ elde ederiz. $TT^{-1} = I_X$ eşitliğini kullanırsak, $(T^{-1})^{-1} = T$ olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.82. X normlu uzay ve T lineer operatör olmak üzere, $x \neq 0$ için;

$$Tx = \lambda x$$

koşulunu sağlayan λ sayısına T operatörünün özdeğeri, x e ise λ ya uygun özvektörü denir. [1]

Tanım 2.83. H bir Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ bir operatör olmak üzere, $\lambda \in \mathbb{C}$ için $(T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün rezolvent operatörü denir ve

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

olarak gösterilir. [1]

Tanım 2.84. H bir Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ bir operatör olmak üzere, T operatörünün rezolvent operatörünün mevcut ve sınırlı olduğu tüm kompleks λ sayılarının kümesine T operatörünün rezolvent kümesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir, yani

$$\rho(T) = \left\{ \lambda : \begin{array}{r} i.\ R_\lambda(T) \text{ mevcut} \\ ii.\ R_\lambda(T) \text{ sınırlı} \\ iii.\ \overline{D(R_\lambda(T))} = H \end{array} \right.$$

olarak tanımlanır. [8]

Tanım 2.85. H bir Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ bir operatör olmak üzere, $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$ kümesine T operatörünün spektrumu denir. [8]

Tanım 2.86. H bir Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ bir operatör olmak üzere, T operatörünün rezolvent operatörünün mevcut olmadığı tüm λ kompleks sayılarının kümesine T operatörünün özdeğerler kümesi adı verilir ve $\sigma_d(T)$ olarak gösterilir, yani

$$\sigma_d(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(T) \text{ mevcut değil}\}$$

şeklinde tanımlanır. [8]

Tanım 2.87. H bir Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ bir operatör olmak üzere,

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda : \begin{array}{r} i.\ R_\lambda(T) \text{ mevcut} \\ ii.\ R_\lambda(T) \text{ sınırlı} \\ iii.\ \overline{D(R_\lambda(T))} = H \end{array} \right.$$

kümesine T operatörünün sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(T)$ olarak gösterilir. [8]

Sonuç 2.88. H bir Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ bir operatör olmak üzere, tanımlardan $\sigma_d(T) \subset \sigma(T)$ ve $\sigma_c(T) \subset \sigma(T)$ olduğu açıktır. [8]

Tanım 2.89. X sonlu boyutlu normlu uzay olmak üzere, $X_1 \subset X$ alt uzayı ve T lineer operatörü için;

$$T(X_1) = \{Tx : x \in X_1\} \subset X_1$$

koşulu sağlandığında X_1 e T operatörü için invaryant alt uzay denilir. [9]

Teorem 2.90. X sonlu boyutlu normlu uzay ve T bir lineer operatör olmak üzere, T nın farklı özdeğerlerine uygun olan özvektörleri lineer bağımsız bir sistem oluşturur. [9]

İspat. $\lambda_k \in \sigma_d(T), (k = \overline{1,s})$ T nin farklı özdeğerleri, $x_k \in X, (k = \overline{1,s})$ uygun özvektörleri olsun. $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $s = 1$ için $Tx_1 = \lambda_1 x_1$ koşulunu sağlayan x_1 vektörü sıfırdan farklı olduğundan $\{x_1\}$ sistemi lineer bağımsız olur. $s = 2$ için $Tx_i = \lambda_i x_i, (i = 1,2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ koşulunu sağlayan $\{x_1, x_2\}$ sistemi lineer bağımlı olsaydı, bazı $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ sayıları için, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ bağıntısı sağlanırdı. Bu bağıntıya T yi uygularsak, $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$ olur. Şimdi kabul edelim ki, ilk bağıntıda $\alpha_1 \neq 0$ olsun. O halde ilk bağıntıyı λ_2 ile çarpıp ikinci bağıntıdan çıkarırsak, $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0$ buluruz ki, bu da $\lambda_1 \neq \lambda_2, x_1 \neq 0$ ve $\alpha_1 \neq 0$ koşulları ile çelişki oluşturmaktadır. Demek ki,

$\{x_1, x_2\}$ sistemi lineer bağımlı değildir. Teoremin ispatı tümevarım uygulamakla tamamlanır.

Sonuç 2.91. n boyutlu X normlu uzayında etki gösteren lineer bir T operatörünün n tane farklı özdeğeri olduğunda, onun özvektörleri X de bir baz oluşturur. [9]

Tanım 2.92. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer, $\forall\, x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde, reel bir c sayısı varsa, T operatörü sınırlı' dır denir. $\forall\, x \in D(T)$ ve $\|x\| = 1$ olmak üzere, en küçük c sayısına operatörün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir. Kısaca, $\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$ yazılır. [7]

Örnek 2.93. Normlu bir $X \neq \{0\}$ uzayı özerindeki $I : X \to X$ birim operatörü sınırlı olup, $\|I\| = 1$ normuna sahiptir. [7]

Örnek 2.94. Normlu bir X uzayı üzerindeki $0 : X \to Y$ sıfır operatörü sınırlı olup, $\|0\| = 0$ normuna sahiptir. [7]

Örnek 2.95. X, $j = [0, 1]$ üzerindeki tüm polinomlardan oluşan ve $\|x\| = max|x(t)|$, $t \in j$ ile verilen norma sahip bir normlu uzay olsun. $(\cdot)$ notasyonu, t ye göre türevi göstermek üzere, X üzerindeki $Tx(t) = \dot{x}(t)$, T türev operatörü lineer olduğu halde sınırlı değildir. Çünkü, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x_n(t) = t^n$ alalım. Bu durumda, $\|x_n\| = 1$ dir ve $Tx_n(t) = \dot{x}_n(t) = nt^{n-1}$ olur; dolayısıyla, $\|Tx_n\| = n$ bulunur. $n \in \mathbb{N}$ keyfi olarak alındığından, bu sonuç, $\|Tx_n\| \leq c$ olacak şekilde bir c sayısının var olmadığını gösterir. Dolayısıyla T nin sınırsız olduğu ortaya çıkar. [7]

Tanım 2.96. Projeksiyon teoremi, $P : H \to Y$ öyle ki $x \to y = Px$ şeklinde bir operatör tanımlamaktadır. P ye, H nın Y üzerine izdüşüm operatörü denir. Açıkça görüldüğü gibi, P, sınırlı lineer bir operatördür. P, H yı Y üzerine, Y yi kendi üzerine dönüştürür ve $P^2 = P$ dir. [7]

Tanım 2.97. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olmak üzere, $\forall\, x \in X$ için $\|Tx\| = \|x\|$ ise T ye izometrik operatör denir. $T : X \to Y$ operatörü bire – bir, örten ve lineer olan bir izometrik operatör ise T ye izometrik izomorf operatör denir. Eğer X ve Y arasında bir izometrik izomorf dönüşüm varsa X ve Y ye izometrik izomorf uzaylar denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir. [1]

Teorem 2.98. T sınırlı lineer bir operatör olsun. Buna göre, $x \in D(T)$ olmak üzere, $x_n \to x$ ise $Tx_n \to Tx$ dir. [7]

İspat. $x_n \to x$ ve T sınırlı lineer bir operatör olmak üzere, $n \to \infty$ için,

$$0 \leftarrow 0 \leq \|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\|\|x_n - x\| \to 0$$

dolayısıyla $Tx_n \to Tx$ dir ve ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 2.99. $N(T)$ sıfır uzayı kapalıdır. [7]

İspat. $\forall\, x \in \overline{N(T)}$ için, $N(T)$ de, $x_n \to x$ olacak şekilde, bir (x_n) dizisi vardır. Dolayısıyla, $Tx_n \to Tx$ yazabiliriz. Ayrıca, $Tx_n = 0$ olduğundan, $Tx = 0$ dır; dolayısıyla, $x \in N(T)$ olur. Buna göre, $x \in \overline{N(T)}$ nin keyfi olarak seçildiğini düşünürsek, $N(T)$ nin kapalı olduğu ortaya çıkar.

Tanım 2.100. T operatörünün tanım kümesi $D(T)$ olmak üzere, eğer T operatörü, $x_n \in D(T)$, $Tx_n \to y$ ve $x_n \to x$ ise $x \in D(T)$ ve $Tx = y$ özelliğini sağlıyorsa T ye kapalıdır denir. [29]

Tanım 2.101. T operatörünün kapalı bir genleşmesi mevcut ise T operatörüne kapatılabilir denir. Her kapalı operatörün en küçük kapalı genleşmesi mevcuttur, buna T operatörünün kapanışı denir ve $\bar{T}$ olarak yazılır. [29]

Teorem 2.102. $\Gamma(T)$, bir T operatörünün grafiği olmak üzere, eğer T operatörü kapatılabilir ise $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$ dır. [29]

İspat. Eğer S, T nin herhangi bir kapalı genişlemesi ise, $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(S)$ dir. Sonuç olarak, $\overline{\Gamma(T)}$ alt kümesi, önerme 2.76 gereğince bir R operatörünün grafiğidir. Buna göre, $R \subset S$ ayrıca R kapalıdır. Böylelikle, R, T nin en küçük kapalı genişlemesidir, dolayısıyla $R = \bar{T}$ dır ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.103. X ve Y iç çarpım uzayları ve $Q : X \to Y$, sınırlı lineer bir operatör olsun. Buna göre,

$i)$ $Q = 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $\langle Qx, y\rangle = 0$ olmasıdır.

$ii)$ X kompleks ve $\forall x \in X$ için $\langle Qx, y\rangle = 0$ ise, $Q = 0$ dır.

[7], [23]

İspat. $i)$ $Q = 0$ ise $\forall x$ için $Qx = 0$ olup bu durumda,

$$\langle Qx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$$

olmasını gerektirir. Tersine olarak, $\forall\, x, y$ için, $\langle Qx, y\rangle = 0$ olması, $\forall x$ için $Qx = 0$ sonucunu verir ve tanım gereğince, $Q = 0$ dir.

ii) Kabul gereği, $\forall v = \alpha x + y \in X$ için, $\langle Qv, y\rangle = 0$; yani,

$$0 = \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle$$
$$= |\alpha|^2\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, y\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle$$

dir. Sağ taraftaki iki terim, kabul gereği sıfırdır. $\alpha = 1$ alırsa,

$$\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0$$

bulunur. $\alpha = i$ ise, $\bar{\alpha} = -i$ olup,

$$\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0$$

bulunur. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa, $\langle Qx, y\rangle = 0$ olur ve i) den de $Q = 0$ elde edilir.

Tanım 2.104. $D(f)$ tanım bölgesi, normlu bir V uzayında, değer bölgesi ise, bu normlu V uzayının skaler cismi içinde bulunan, sınırlı lineer bir operatöre, sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir. Dolayısıyla $\forall\, x \in D(f)$ için, $|f(x)| \leq c\|x\|$ olacak şekilde reel bir c sayısı vardır. Ayrıca, f in normu;

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|=1}} \|f(x)\|.$$

[7]

Tanım 2.105. (**Sesquilineer Fonksiyonel**) X ve Y, aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $X \times Y$ üzerinde bir h sesquilineer fonksiyoneli, $\forall x$, $x_1, x_2 \in X$ ve $\forall y, y_1, y_2 \in Y$ ve $\forall \alpha\,, \beta$ skalerleri için,

a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

d) $h(x, \beta y) = \bar{\beta} h(x, y)$

şeklinde bir, $h : X \times Y \to \mathbb{F}$ operatörüdür. X ve Y normlu uzaylar ise $\forall x, y$ için, $|h(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$ olacak şekilde reel bir c sayısı varsa, h a sınırlıdır denir ve

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\in X-\{0\} \\ y\in Y-\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x,y)|$$

sayısına da h nın normu denir. [7]

Teorem 2.106. (**Riesz Teoremi**) Bir H Hilbert uzayı üzerinde, her sınırlı lineer f fonksiyoneli, iç çarpım cinsinden ifade edilebilir, yani, z, f e bağımlı olmak üzere, $f(x) = \langle x, z\rangle$, f tarafından tek türlü belirlenmiş olup, $\|z\| = \|f\|$ normuna sahiptir. [7], [23]

İspat. İspat üç aşamada yapılır. $i)$ f nin $f(x) = \langle x, z\rangle$ şeklinde bir gösterime sahip olduğunun gösterilmesi. $ii)$ z nin tek olduğunun gösterilmesi. $iii)$ $\|z\| = \|f\|$ formülünün sağlandığının gösterilmesi. Buna göre,

$i)$ $f = 0$ ise, $f(x) = \langle x, z\rangle$ ve $\|z\| = \|f\|$, $z = 0$ almamız halinde gerçeklenir. $f \neq 0$ alalım. Öncelikle ispatta kullanmak için, $f(x) = \langle x, z\rangle$ gösteriminin sahip olması halinde z nin hangi özelliklere sahip olması gerektiğini bulalım. İlk olarak, $z \neq 0$ dır; çünkü, aksi halde, $f = 0$ olması gerekir. İkinci olarak, $f(x) = 0$ koşuluna uyan her x için, $\langle x, z\rangle = 0$ dır; yani, f in $N(f)$ sıfır uzayındaki bütün x ler için, $\langle x, z\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla, $z \perp N(f)$ dir. Bu durum, $N(f)$ ve bunun ortogonal tümleyeni olan $N(f)^{\perp}$ uzayını göz önüne alırsak, $N(f)$ bir vektör uzayı olup, kapalıdır. Ayrıca, $f = 0$ olması, $N(f) \neq H$ ve dolayısıyla projeksiyon teoremi gereğince, $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$ olmasını gerektirir. Buna göre, $N(f)^{\perp}$, bir $z_0 \neq 0$ elemanını içerir. $x \in H$ keyfi olmak üzere, $v = f(x)z_0 - f(z_0)x$ yazalım. Bu ifadeye f i uygulayarak,

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0$$

elde ederiz. Bu ise, $v \in N(f)$ olduğunu gösterir. $z_0 \perp N(f)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, z_0\rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0\rangle - f(z_0)\langle x, z_0\rangle \end{aligned}$$

buluruz. Buradan, $\langle z_0, z_0\rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ olduğunu da göz önüne alarak $f(x)$ i çözersek,

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}\langle x, z_0\rangle$$

olur. Bu ise,

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0\rangle} z_0$$

olmak üzere, $f(x) = \langle x, z \rangle$ şeklinde yazılabilir. Böylece, $x \in H$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

ii) Şimdi de $f(x) = \langle x, z \rangle$ ifadesindeki, z nin tek olduğunu ispatlayalım. $\forall x \in H$ için,

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$$

olsun. Bu durumda, her x için, $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ dır. Özel olarak, $x = z_1 - z_2$ seçersek, $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0$ buluruz. Dolayısıyla, $z_1 - z_2 = 0$; yani, $z_1 = z_2$ elde edilir ve bu sonuç ispatı tamamlar.

iii) Son olarak $\|z\| = \|f\|$ ifadesini ispatlayalım. $f = 0$ ise, $z = 0$ olup ifade gerçeklenir. $f \neq 0$ olsun. Bu durumda $z \neq 0$ dır. $x = z$ alınmak üzere $f(x) = \langle x, z \rangle$ den ve f in norm tanımından,

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\|\|z\|$$

elde ederiz. Bu ifadeyi $\|z\| \neq 0$ ile bölersek, $\|z\| \leq \|f\|$ buluruz. Ayrıca, $f(x) = \langle x, z \rangle$ den ve $\text{Cauchy} - \text{Schwarz}$ eşitsizliğinden,

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\|\|z\|$$

dir. Bu ise, $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|$ sonucunu gerektirir. Dolayısıyla, $\|z\| = \|f\|$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.107. (**Riesz Gösterimi**) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve

$$h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{F}$$

sınırlı sesquilineer fonksiyonel olsun. Bu durumda, $S : H_1 \to H_2$, sınırlı lineer bir operatör olmak üzere, h, $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$ şeklinde bir gösterime sahiptir. S, h tarafından tek olarak belirlenmiş olup, normu $\|S\| = \|h\|$ dır. [7], [23]

İspat. $\overline{h(x, y)}$ yi göz önüne alalım. Üst çizgi nedeniyle, bu ifade y ye göre lineerdir. Riesz teoreminin uygulanabilirliğini sağlamak için, x i sabit tutalım. Bu durumda, y değişken olmak üzere bir gösterim elde ederiz; $\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle$ diyelim. Buna göre, $h(x, y) = \langle z, y \rangle$ yazabiliriz. Burada, $z \in H_2$ tek olup, sabit tuttuğumuz $x \in H_1$ e bağlıdır. x değişken olmak üzere, $h(x, y) = \langle z, y \rangle$ ifadesinin, $z = Sx$ ile verilen bir $S : H_1 \to H_2$ operatörünü tanımladığını buluruz. Dolayısıyla $h(x, y) = \langle z, y \rangle$ ifadesinde $z = Sx$ yazarsak, $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$ ifadesini elde ederiz ve ispatın ilk kısmını ispatlamış oluruz.

S lineerdir. Çünkü, S in tanım kümesi H_1 vektör uzayı olup, $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$ ifadesinden ve sesquilineerlikten, H_2 deki her y için,

$$\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle = h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)$$
$$= \alpha\langle Sx_1, y\rangle + \beta\langle Sx_1, y\rangle$$
$$= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y\rangle$$

yazılabilir ve dolayısıyla, $S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2$ elde edilir ve bu da S nin lineerliğini ispat eder.

S, ayrıca, sınırlıdır. Çünkü, $S = 0$ aşikar halinin dışında,

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{|\langle Sx, Sx\rangle|}{\|x\|\|Sx\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|$$

elde ederiz. Bu ise, sınırlı olduğunu kanıtlar. Ayrıca, Cauchy $-$ Schwarz eşitsizliğinden,

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{\|Sx\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} = \|S\|$$

dir ve dolayısıyla, $\|h\| = \|S\|$ ispatlanmış olur.

Son olarak S tekdir. Çünkü, $\forall x \in H_1$ ve $\forall y \in H_2$ için,

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

olacak şekilde, lineer bir $T : H_1 \to H_2$ operatörünün varolduğunu kabul edersek, $\forall x \in H_1$ için, yurakıdaki ifadeden $Sx = Tx$ olduğunu buluruz ve dolayısıyla, $T = S$ dir.

Teorem 2.108. H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere, $T : H_1 \to H_2$, sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda, T nin T^* Hilbert – Adjoint operatörü, $\forall x \in H_1$ ve $\forall y \in H_2$ için, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ olacak şekilde bir $T^* : H_2 \to H_1$ operatörü olmak üzere, T nin, T^* Hilbert – Adjoint operatörü tektir ve $\|T^*\| = \|T\|$ normuna sahip sınırlı lineer bir operatördür. [7], [23]

İspat. İç çarpımın temel özellikleri ve T nin lineer olması nedeniyle,

$$h(x, y) = \langle y, Tx\rangle$$

formülü, $H_1 \times H_2$ üzerinde, sesquilineer bir fonksiyonel tanımlar. Çünkü,

$$h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle$$
$$= \langle y, \alpha Tx_1 + \beta Tx_2\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\langle y, Tx_1\rangle + \beta\langle y, Tx_2\rangle$$

$$= \bar{\alpha}h(y, x_1) + \bar{\beta}h(y, x_2)$$

dir. Ayrıca, h sınırlıdır. Çünkü, Cauchy − Schwarz eşitsizliğinden,

$$|h(x,y)| = |\langle y, Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$$

yazabiliriz. Bu ayrıca, $\|h\| \leq \|T\|$ sonucunu da verir. Bunu yanı sıra,

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{\|x\|\|y\|} \geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Tx\neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|x\|\|Tx\|} = \|T\|$$

den, $\|h\| \geq \|T\|$ elde ederiz ve $\|h\| = \|T\|$ sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla h için bir Riesz gösterimi yazabiliriz; S yerine T^* yazarsak, $h(x,y) = \langle T^*y, x\rangle$ elde ederiz. Ve sonuçta, $T^* : H_2 \to H_1$ in, $\|T^*\| = \|h\| = \|T\|$ normuna sahip olan ve tek olarak belirli sınırlı lineer bir operatör olduğunu biliyoruz. Bu sonuç, $\|T^*\| = \|T\|$ ifadesini ispatlar. Ayrıca, $h(x,y) = \langle y, Tx\rangle$ ifadesi ile $h(x,y) = \langle T^*y, x\rangle$ ifadesini karşılaştırırsak, $\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle$ olduğunu buluruz. Eşlenik alarak ta $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ elde ederiz ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.109. (**Hilbert − Adjoint Operatörün Özelikleri**) H_1 ve H_2 , Hilbert uzayları, $S : H_1 \to H_2$ ve $T : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer operatörler ve α herhangi bir skaler olsun. Buna göre,

a) $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$, $x \in H_1$ ve $y \in H_2$

b) $(S+T)^* = S^* + T^*$

c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$

d) $(T^*)^* = T$

e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

f) $T^*T = 0 \iff T = 0$

g) $(ST)^* = T^*S^*$, $H_1 = H_2$ olmak üzere,

dir. [7]

İspat. a) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ ifadesini kullanırsak,

$$\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

b) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ ifadesinden, $\forall x, y$ için,

$$\langle x, (S+T)^*y\rangle = \langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx. y\rangle$$

$$= \langle x, S^*y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = \langle x, (S^* + T^*)y\rangle$$

yazılır. Buna göre, $\forall y$ için tanım gereğince $(S+T)^*y = (S^* + T^*)y$ olup, bu da tanım gereğince $(S+T)^* = S^* + T^*$ dir.

c) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ ifadesinden, $\forall x, y$ için,

$$\langle (\alpha T)^*y, x\rangle = \langle y, (\alpha T)x\rangle = \langle y, \alpha(Tx)\rangle = \bar{\alpha}\langle y, Tx\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\langle T^*y, x\rangle = \langle \bar{\alpha}T^*y, x\rangle$$

yazılır ve buradan, $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$ bulunur.

d) $(T^*)^*$, T^{**} olarak yazılır ve $\forall x \in H_1$ ve $\forall y \in H_2$ için, $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$ ile $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ den,

$$\langle (T^*)^*x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

yazılabileceğinden, $(T^*)^* = T$ bulunur.

e) $T^*T : H_1 \to H_1$ ve $TT^* : H_2 \to H_2$ dir. Cauchy − Schwarz eşitsizliğinden,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2$$

yazılabilir. Normu 1 olan bütün x ler üzerinden supremum alırsak, $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ elde ederiz. Ayrıca, $\|T^*\| = \|T\|$ bilgisini kullanarak;

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$$

de yazabileceğimizden, $\|T^*T\| = \|T\|^2$ bulunur. Buna ek, T yerine, T^* alarak ve yine $\|T^*\| = \|T\|$ bilgisini kullanarak,

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$$

yazılır ve $T^{**} = T$ bilgisinden, $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$ bulunur.

f) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$ bilgisini kullanarak, $T^*T = 0 \Leftrightarrow 0 = \|T\| \Leftrightarrow T = 0$ bulunur.

g) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ ifadesinden,

$$\langle x, (ST)^*y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*\rangle$$

sonucunu verir. Buna göre, $(ST)^* y = T^* S^* y$ olup, bu ise, tanım gereğince $(ST)^* = T^* S^*$ dir.

Tanım 2.110. T operatörünün tanım kümesi olan $D(T)$ kümesi, H Hilbert uzayında yoğun bir alt küme olsun. Eğer $\forall x, y \in D(T)$ için,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

gerçekleniyorsa T operatörüne simetrik operatör denir. [7]

Tanım 2.111. Bir H Hilbert uzayında, sınırlı lineer bir $T : H \to H$ operatörü verilmiş olsun.

$i)$ $T^* = T$ ise, T ye self – adjoint ya da Hermitian

$ii)$ $T^* = T^{-1}$ ise, T ye üniter (T terslenebilir)

$iii)$ $TT^* = T^*T$ ise, T ye normal operatör adı verilir.

[7]

Sonuç 2.112. Tanım gereğince T self – adjoint operatör ise T simetriktir. [7]

Sonuç 2.113. T nin $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ olarak tanımlanan T^* Hilbert – adjoint operatörü, T self – adjoint ise tanım gereği, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ şekline dönüşür. [7]

Sonuç 2.114. Tanım gereğince T, self – adjoint ya da üniter ise, T normaldir. [7]

Örnek 2.115. $I : H \to H$ birim operatörü ise, $T = \alpha i I$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ olmak üzere, $T^* = -\alpha i I$ dır ve dolayısıyla, $TT^* = T^*T = \alpha^2 I$ olup, T operatörü normal olup, buna karşılık, $T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{\alpha} i I$ olması ile beraber, $T^* \neq T = \alpha i I$ dır. Dolayısıyla, bir normal operatör, self – adjoint ya da üniter olmak zorunda değildir.

Teorem 2.116. $T : H \to H$, bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

$i)$ T, self – adjoint ise, $\langle Tx, x \rangle$, $\forall x \in H$ için reeldir.

$ii)$ H kompleks ve $\langle Tx, x \rangle$, $\forall x \in H$ için reel ise, T operatörü self – adjointtir.

[7], [23]

İspat. $i)$ T self – adjoint ise, her x için,

$$\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle$$

dir. O halde, $\langle Tx, x\rangle$, kendisinin kompleks eşleniğine eşittir, yani reeldir.

$ii)$ $\langle Tx, x\rangle$, $\forall x$ için reel ise,

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$0 = \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle = \langle (T - T^*)x, x\rangle$$

olup, H ın kompleks olması nedeniyle buradan, $T - T^* = 0$ dir.

Teorem 2.117. Bir H Hilbert uzayı üzerinde, sınırlı self – adjoint lineer iki S ve T operatörlerinin çarpımın self – adjoint olması için gerek ve yeter koşul operatörlerin komütatif (değişmeli) olmasıdır. [7]

İspat. $(ST)^* = T^*S^* = TS$ dir. Buna göre, $ST = (ST)^* \Leftrightarrow ST = TS$ dir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.118. H bir Hilbert uzayı ve T, $T : H \to H$ bir operatör olsun. T, self – adjoint ise; T operatörünün özdeğerleri reel sayılardır. [1]

İspat. T self – adjoint operatör, λ, T nin özdeğeri ise, öyle $0 \neq x \in D(T)$ vardır ki, $Tx = \lambda x$ dir. Sonuncu eşitliği sağdan x ile iç çarparsak, $\langle Tx, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 \implies \lambda = \frac{\langle Tx,x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$ olur.

Teorem 2.119. H bir Hilbert uzayı ve T, $T : H \to H$ bir operatör olsun. $x_1, x_2 \in H$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$, T nin iki özdeğeri olmak üzere, $Tx_1 = \lambda_1 x_1$ ve $Tx_2 = \lambda_2 x_2$ ise $x_1 \perp x_2$ dir. [1]

İspat. $Tx_1 = \lambda_1 x_1$ ifadesini sağdan x_2 ile ve $Tx_2 = \lambda_2 x_2$ ifadesini soldan x_1 ile iç çarpıp, taraf tarafa çıkarırsak,

$$\langle Tx_1, x_2\rangle - \langle x_1, Tx_2\rangle = \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle - \overline{\lambda_2}\langle x_1, x_2\rangle$$

ve $T = T^*$ olduğundan bu eşitliğin sol tarafı sıfırdır. Diğer taraftan özdeğerler reel olduğuna göre $\overline{\lambda_2} = \lambda_2$ dir ve eşitlik $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$ şeklinde yazılır ki, buradan da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ koşulu gereğince, $\langle x_1, x_2\rangle = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$ dir.

Teorem 2.120. (**Üniter Operatörün Özellikleri**) H bir Hilbert uzayı olmak üzere, $U : H \to H$ ve $V : H \to H$ operatörleri üniter olsunlar. Buna göre,

a) U izometriktir; dolayısıyla $\forall x \in H$ için $\|Ux\| = \|x\|$,

b) $H \neq \{0\}$ olmak üzere, $\|U\| = 1$,

c) U^{-1} üniter,

d) UV üniter,

e) U normal,

f) Bir kompleks H Hilbert uzayında, sınırlı lineer bir T operatörün üniter olması için gerek ve yeter koşul, T izometrik ve üzerine,

dir. [7]

İspat. a) $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$ dır. Dolayısıyla, $\|Ux\| = \|x\|$ dir.

b) $\|Ux\| = \|x\|$ dan $\|U\| = 1$ dir.

c) $(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}$ dir. Dolayısıyla, U^{-1} üniterdir.

d) $(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$ dir. Dolayısıyla, UV üniterdir.

e) $U^{-1} = U^*$ ve $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ olduğundan, U normaldir.

f) T nin izometrik ve üzerine olduğunu varsayalım. İzometri bire – bir olmayı gerektirir, ve dolayısıyla, T, bire – bir ve üzerinedir. $T^* = T^{-1}$ olduğunu gösterelim. İzometri nedeniyle,

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$$

yazabiliriz. Buna göre, $\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$ ve buradan, $T^*T - I = 0$ olup $T^*T = I$ bulunur. Buradan da,

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I$$

elde edilir. Bu iki ifadeden, $T^*T = TT^* = I$ ve dolayısıyla $T^* = T^{-1}$ bulunur; yani T üniterdir.

İspatın tersi, T üniter ise a) gereğince izometrik ve tanım gereğince üzerinedir.

Tanım 2.121. H bir Hilbert uzayı, $A, B : H \to H$ iki operatör ve $U : H \to H$ bir üniter operatör olmak üzere,

$$A = UBU^{-1} \qquad \text{veya} \qquad A = U^{-1}BU$$

ise A ve B operatörleri H Hilbert uzayında üniter denk operatörler denir ve $A \sim B$ olarak gösterilir. [8]

Teorem 2.122. H bir Hilbert uzayı, $A, B : H \rightarrow H$ iki operatör ve $U : H \rightarrow H$ bir üniter operatör olmak üzere, $A \sim B$ ise $R_\lambda(A) \sim R_\lambda(B)$ dir. [8]

İspat. $A \sim B$ ise $A = UBU^{-1}$ dir ve $A - \lambda I = UBU^{-1} - \lambda I$ yazabiliriz. Buradan da, $A - \lambda I = U(B - \lambda I)U^{-1} \Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} = \mathrm{U}(B - \lambda)^{-1}U^{-1}$ elde ederiz ve bu da $R_\lambda(A) \sim R_\lambda(B)$ olduğunu ispatlar.

Sonuç 2.123. H bir Hilbert uzayı, $A, B : H \rightarrow H$ iki operatör ve $U : H \rightarrow H$ bir üniter operatör olmak üzere, $A \sim B$ ise $\rho(A) = \rho(B)$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $\sigma_d(A) = \sigma_d(B)$ ve $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$ dir. [8]

3. STONE TEOREMİ VE ÖZDE SELF – ADJOİNTLİĞİN TEMEL KRİTERLERİ

Bu bölümde, Stone teoremi anlatılmış ve bir operatörün özde self – adjoint olması için temel kriter verildikten sonra özde (essentially) self – adjointlik için bir başka analiz olan, Weyl limit çemberi ile Weyl limit noktası durumları anlatılarak bazı gerekli teorem ve tanımlar verilmiştir.

Önerme 3.1. H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve T, H_1 den H_2 ye yoğun tanımlı bir operatör olsun. Bu durumda,

1) $KerT^* = (Ran\, T)^{\perp}$,

2) Eğer $D(T^*)$ yoğun ise, $T \subset T^{**}$,

3) T operatörü sınırlıdır ancak ve ancak T^* sınırlıdır. Bu durumda;
$$\|T^*\| = \|T\|$$
dir.

[29]

İspat.

1) Bir $\varphi \in H_1$ vektörü, $(Ran\, T)^{\perp}$ kümesine aittir ancak ve ancak
$$\langle \varphi, T\psi \rangle = 0; \text{ her bir } \psi \in D(T).$$

Bu ifade açık bir şekilde $\varphi \in D(T^*)$ ve $T^*\varphi = 0$ ifadesine eşdeğerdir. Bir başka değişle, $\varphi \in KerT^*$.

2) $g \in D(T^*)$ ve $f \in D(T)$ olsun, bu durumda,
$$\langle f, T^*g \rangle = \langle Tf, g \rangle.$$

Bu ifade g nin $D(T^*)$ da sürekli olduğunu gösterir. Buna göre, $f \in D(T^{**})$ ve $T^{**}f = Tf$. Dolayısıyla, $T \subset T^{**}$ dır.

3) Her bir $f \in H_1$ ve $g \in H_2$ için,
$$|\langle g, Tf \rangle| \leq \|f\|\|T\|\|g\|$$

dir. Bu ifade f nin H_1 de sürekli olduğunu gösterir. Buradan, $D(T^*) = H_2$ dir ve

$$|\langle T^* g, f\rangle| \leq \|f\| \|T\| \|g\|.$$

Bu eşitsizlik T^* operatörünün $\|T^*\| \leq \|T\|$ ile sınırlı bir operatör olduğunu gösterir. Bu işlem T^* a uygulandığında, T^{**} ın $\|T^*\|$ normu ile sınırlı olduğunu gösterir. Ancak 2) gereğince, $T = T^{**}$ dır ve bu $\|T\| \leq \|T^*\|$ anlamına gelir. Dolayısıyla, $\|T\| = \|T^*\|$ dır.

Teorem 3.2. H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve T, H_1 den H_2 ye yoğun tanımlı bir operatör olsun. Bu durumda,

1) T^* operatörü her zaman kapalı bir operatördür.

2) T operatörü kapatılabilirdir ancak ve ancak $D(T^*)$ yoğundur. Bu durumda, $\bar{T} = T^{**}$ dır.

3) Eğer T operatörü kapatılabilir ise $(\bar{T})^* = T^*$ dır.

[29]

İspat. U, $H_1 \times H_2$ den $H_2 \times H_1$ e ;

$$U(\varphi, \psi) = (-\psi, \varphi)$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. $U^*(\psi, \varphi) = (\varphi, -\psi)$ olduğundan $U^* = U^{-1}$ dir. Bu gösteriyor ki $U^*U = UU^* = I$. Sonuç olarak, eğer E, $H_1 \times H_2$ nin bir alt uzayı ise,

$$U(E^\perp) = U(E)^\perp$$

ve ayrıca,

$$U^{-1}(E^\perp) = U^{-1}(E)^\perp$$

dir.

1) Bir (φ, ψ) sıralı ikilisi $U\big(\Gamma(T)\big)^\perp$ ye aittir ancak ve ancak

$$\langle (\varphi, \psi), (-T\eta, \eta)\rangle = 0$$

her bir $\eta \in D(T)$, bir başka ifade ile,

$$\langle \psi, \eta\rangle = \langle \varphi, T\eta\rangle$$

her $\eta \in D(T)$, yani, $(\psi, \varphi) \in \Gamma(T^*)$. Dolayısıyla,

$$\Gamma(T^*) = U\big(\Gamma(T)\big)^{\perp}.$$

Buradan, $\Gamma(T^*)$ kapalı ve T^* operatörü kapalıdır.

2) Eğer $D(T^*)$ yoğun ise $(T^*)^*$ operatörü iyi tanımlıdır, 1) den dolayı kapalıdır ve önerme 3.1 dan dolayı T nin genişlemesidir. Böylece T operatörü kapalı genişleme içerir, yani T kapatılabilirdir. Karşıt olarak, eğer $D(T^*)$ yoğun değil ise, öyle bir $0 \neq \varphi \in \big(D(T^*)\big)^{\perp}$ vardır ve buradan $(\varphi, 0) \in \Gamma(T^*)^{\perp}$ dır. Sonuç olarak, $(0, \varphi) = U^{-1}(-\varphi, 0) \in U^{-1}(\Gamma(T^*)^{\perp}) = U^{-1}\big(\Gamma(T^*)\big)^{\perp}$. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} U^{-1}\big(\Gamma(T^*)\big)^{\perp} &= U^{-1}(U(\Gamma(T))^{\perp})^{\perp} \\ &= U^{-1}\big(U(\Gamma(T)^{\perp\perp})\big) \\ &= \Gamma(T)^{\perp\perp} \\ &= \overline{\Gamma(T)}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\overline{\Gamma(T)}$, bir $\varphi \neq o$ ile $(0, \varphi)$ yi içerir. Böylece önerme 2.76 gereğince, $\overline{\Gamma(T)}$ bir operatörün grafiği değildir. Bu nedenle, T kapatılabilir değildir.

Şimdi $\bar{T} = T^{**}$ olduğunu gösterelim. 1) deki U ile izlediğimiz yolu izlersek, H_2 den H_1 olan her S operatörü için,

$$U^{-1}\big(\Gamma(S)\big)^{\perp} = \Gamma(S^*).$$

Yani,

$$\overline{\Gamma(T)} = U^{-1}\big(\Gamma(T^*)\big)^{\perp} = \Gamma(T^{**}).$$

Buradan $T^{**} = \bar{T}$ olduğu ispatlanmış olur.

3) $T^* = \overline{T^*} = T^{***} = (\bar{T})^*$ dır.

Tanım 3.3. Bir T operatörün kapanışı, $\bar{T}$ self – adjoint ise T operatörüne özde self – adjoint $(essentially\ self-adjoint)$ denir. [28]

Önerme 3.4. Bir T operatörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşul $T \subseteq T^*$ olmasıdır. [28]

İspat. $T \subseteq T^*$ ise, $D(T) \subseteq D(T^*)$ ve $\forall x \in D(T)$ için $Tx = T^*x$ dir. $\forall x, y \in D(T) \subseteq D(T^*)$ olmak üzere, $\langle Tx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \langle x, T^{**}y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, dolayısıyla T simetriktir. Karşıt olarak, T simetrik ise açık bir şekilde $T \subseteq T^*$ dir.

Önerme 3.5. Bir T simetrik operatörü her zaman kapatılabilirdir ve aşağıdakiler sağlanır:

1) T operatörü simetriktir, ancak ve ancak $T \subseteq T^{**} \subseteq T^*$.

2) T operatörü simetrik ve kapalıdır, ancak ve ancak $T = T^{**} \subseteq T^*$.

3) T operatörü self – adjointtir, ancak ve ancak $T = T^{**} = T^*$.

4) T operatörü özde self – adjointtir, ancak ve ancak $T \subseteq T^{**} = T^*$.

[28]

İspat. T operatörü simetrik, $D(T) \subseteq D(T^*)$ olduğundan yoğun tanımlıdır ve ayrıca T^* da yoğun tanımlıdır. Önerme 3.2, 2) gereğince T operatörü T^{**} kapanışı ile kapatılabilirdir. Böylece T^*, T nin bir genişlemesi ve T^{**} en küçük genişlemelerinden birdir, böylelikle 1) sağlanır. Eğer T hali hazırda kapalı ise 2) sağlanır ve eğer $T = T^{**}$ ise de 3) sağlanır. Son olarak T özde self – adjoint olsun. $\bar{T} = T^{**}$ self – adjointtir. Böylece, $(T^{**})^* = (T^*)^{**} = \overline{T^*} = T^*$. Karşıt olarak, eğer $T^{**} = T^*$ ise $\bar{T} = T^{**}$ self – adjointtir.

Önerme 3.6. Eğer T özde self – adjoint ise tek bir self – adjoint genişlemesi içerir. [29]

İspat. Eğer S, T nin bir self – adjoint genişlemesi ise, S teorem 3.2 gereği kapalıdır ve böylece $T^{**} = \bar{T} \subset S$. Ancak, tanım gereğince $T \subset S$ ise $S^* \subset T^*$. Böylece, $S = S^* \subset T^* = T^{***} = T^{**}$. Dolayısıyla $S = T^{**} = \bar{T}$.

Teorem 3.7. H bir Hilbert uzayı ve T, H da simetrik bir operatör olmak üzere aşağıdakiler denktir.

$i)$ T self – adjointtir.

$ii)$ T kapalı ve $Ker(T^* \pm iI) = \{0\}$.

$iii)$ $Ran(T \pm iI) = H$.

[29]

İspat. $i) \Rightarrow ii)$: Eğer T self – adjoint ise teorem 3.2 gereği kapalıdır. Bundan başka, eğer $(T^* + iI)\varphi = 0$ ise $T\varphi = -i\varphi$ ve $\langle T\varphi, \varphi\rangle = i\langle \varphi, \varphi\rangle$ bununla beraber $\langle \varphi, T\varphi\rangle = -i\langle \varphi, \varphi\rangle$. Dolayısıyla $\langle T\varphi, \varphi\rangle = \langle \varphi, T\varphi\rangle$ olduğundan $\varphi = 0$ dır. $T^* - iI$ içinde benzer ispat geçerlidir.

$ii) \Rightarrow iii)$: $Ran(T \pm iI)^{\perp} = Ker(T \mp iI)^* = Ker(T^* \mp iI) = \{0\}$ olduğundan $Ran(T + iI)$ yoğundur. Göstermemiz gereken, $Ran(T + iI)$ nin kapalı olduğudur. Bunun için, (φ_n), $D(T)$ de bir dizi olsun öyle ki $\left((T + iI)\varphi_n\right)$, bir $\psi \in H$ ya yakınsasın. T simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned}\|(T + iI)\varphi_n\|^2 &= \|T\varphi_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 + \langle T\varphi_n, i\varphi_n\rangle + \langle i\varphi_n, T\varphi_n\rangle \\ &= \|T\varphi_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 - \langle i\varphi_n, T\varphi_n\rangle + \langle i\varphi_n, T\varphi_n\rangle \\ &= \|T\varphi_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2.\end{aligned}$$

Bu gösteriyor ki, (φ_n) dizisi, bir limit φ ye yakınsar ve $(T\varphi_n)$ de yakınsar. Çünkü, yukarıdaki ifadede φ_n yerine $\varphi_n - \varphi_m$ yazılırsa her iki dizininde Cauchy dizisi olduğu görülür. T kapalı olduğundan $\varphi \in D(T)$ ve $T\varphi = limT\varphi_n$ dir. Dolayısıyla, $\left((T + iI)\varphi_n\right)$ dizisi $\psi = (T + iI)\varphi$ ye yakınsar ve böylece $\psi \in Ran(T + iI)$ dır. Aynı ispat $Ran(T - iI)$ içinde geçerlidir.

$iii) \Rightarrow i)$: Eğer $\varphi \in D(T^*)$ ise hipotez gereği $\eta \in D(T)$ öyle ki, $(T^* \pm iI)\varphi = (T \pm iI)\eta$. $D(T)$ de T^*, T ile çakışık olduğundan, $(T^* \pm iI)(\varphi - \eta) = 0$ ve $\eta - \varphi \in Ker(T^* \pm iI)$. Ancak, önerme 3.1 ve hipotez gereğince $Ker(T^* \pm iI) = Ran(T \mp iI)^{\perp} = \{0\}$. Dolayısıyla $\eta = \varphi$. Sonuç olarak, $D(T^*) = D(T)$ ve böylece T self – adjointtir.

Sonuç 3.8. (Özde Self – Adjointliğin Temel Kriteri) H bir Hilbert uzayı ve T, H da simetrik bir operatör olmak üzere aşağıdakiler denktir.

$i)$ T özde self – adjointtir.

$ii)$ $Ker(T^* \pm iI) = \{0\}$.

$iii)$ $Ran(T \pm iI)$ yoğundur.

[29]

İspat. $i) \Rightarrow ii)$: Eğer T özde self – adjoint ise $\bar{T}$ self – adjointtir. Teorem 3.7 gereğince, $Ker(\bar{T}^* \pm iI) = \{0\}$ dır. Ancak, teorem 3.2 gereğince $\bar{T}^* = T^*$.

$ii) \Rightarrow iii)$: $Ran(T \pm iI) = Ker(T^* \mp iI)^{\perp} = H$ olduğundan, $Ran(T \pm iI)$ yoğundur.

$iii) \Rightarrow i)$: $\varphi \in D(T^*)$ ise $D(T)$ de bir (η_n) dizisi vardır öyle ki $\left((T - iI)\eta_n\right)$ dizisi $(T^* - iI)\varphi$ ye yakınsar. Ancak, T simetrik olduğundan,

$$\|(T - iI)\eta_n\| = \|T\eta_n\|^2 + \|\eta_n\|^2.$$

Dolayısıyla, her iki $(T\eta_n)$ ve (η_n) dizisi de H da yakınsaktır. $\eta = lim\eta_n$ olsun. T simetrik olduğundan kapatılabilirdir ve dolayısıyla $\eta \in D(\bar{T})$ olmak üzere $\bar{T}\eta = limT\eta_n$ dir. Bu gösteriyor ki $(\bar{T} - iI)\eta = (T^* - iI)\varphi$. Dolayısıyla $(T^* - iI)(\eta - \varphi) = 0$ ve böylece $\eta = \varphi$ dir. Buradan $\varphi \in D(\bar{T})$, böylece $D(T^*) = D(\bar{T})$ dolayısıyla T özde self – adjointtir. Aynı ispat $Ran(T + iI)$ içinde geçerlidir.

Tanım 3.9. T simetrik bir operatör olsun. Bu durumda,

$$N_+ = \{\psi \in D(T^*), T^*\psi = Z_+\psi, ImZ_+ > 0\}$$

ve

$$N_- = \{\in D(T^*), T^*\psi = Z_-\psi, ImZ_- < 0\}$$

$Z_+ = i\lambda, Z_- = -i\lambda$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, ifadelerine T operatörünün defekt alt uzayları denir. [19]

Tanım 3.10. $n_+(T) = dim[N_+]$ ve $n_-(T) = dim[N_-]$ sayılarına T operatörünün defekt indisleri denir. [19]

Sonuç 3.11. T , H Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve $\lambda = 1$ olmak üzere, $n_+(T) = n_-(T) = 0$ ise T operatörü özde self – adjointtir.

Tanım 3.12. T, H Hilbert uzayında simetrik bir operatör olmak üzere; $T^*\phi^\pm = \pm i\phi^\pm$, $\phi^\pm \in H$ ve U, $Ker(T^* - i)$ den $Ker(T^* + i)$ ye bir izometri olmak üzere, T nin genişletilmiş tanım kümesi,

$$D^U = \{\psi = \phi + \phi^+ + U\phi^- : \phi \in D(T)\}$$

dir. [14]

Örnek 3.13. $H = L^2(0,1)$ olmak üzere,

$$D(T) = C_0^\infty(0,1)$$

$$Tf = -i\frac{df}{dx}$$

şeklinde tanımlanan T operatörünü ele alalım.

İlk önce T operatörünün simetrik olduğunu gösterelim. $\forall f, g \in D(T)$ için,

$$\langle g,Tf\rangle=\int_0^1\bar{g}(-if')dx=\underbrace{-igf|_0^1}_{=0}+i\int_0^1\bar{g}'fdx=\int_0^1\overline{-ig'}fdx=\langle Tg,f\rangle$$

dolayısıyla T operatörü simetriktir. Ayrıca; C_0^∞, $L^2(0,1)$ de yoğun olduğundan, T, $L^2(0,1)$ de yoğun tanımlıdır.

Şimdi, T operatörünün Hilbert – Adjoint operatörünü bulalım. $\forall f\in D(T)$ için $\langle g,Tf\rangle=\langle g^*,f\rangle$ olacak şekilde, $(g,g^*)\in D(T^*)\times L^2(a,b)$ çiftleri için,

$$\langle g^*,f\rangle=\langle g,Tf\rangle=\langle g,-if'\rangle=-i\langle g,f'\rangle=-i\int_0^1\bar{g}f'dx$$

$$=\underbrace{-igf|_0^1}_{=0}+i\int_0^1\bar{g}'fdx=\int_0^1\overline{-ig'}fdx=\langle -ig',f\rangle$$

olur ve dolayısıyla, $T^*g=-ig'$ dir. Eğer $g_1\in L^2(0,1)$ ve $g_1^*=-ig'\in L^2$ ise,

$$\langle g_1^*,f\rangle=\langle -ig_1',f\rangle=i\langle g_1',f\rangle=\langle g_1,-if'\rangle=\langle g_1,Tf\rangle$$

dolayısıyla g için gerekli bir sınır koşulu bulunmamaktadır. Sonuçta,

$$D(T^*)=\{g\in L^2(0,1):\ g'\in L^2(0,1)\}$$

$$T^*g=-i\frac{dg}{dx}$$

olur ve T operatörü self – adjoint değildir.

Şimdi, $Ker(T^*\pm i)$ bulalım,

$$(-ig'\mp ig)=0\ \Rightarrow\ g'=\mp g\ \Rightarrow g=e^{\mp x}$$

dir. $U: e^{-x}\to e^{i\gamma-1}e^x$, $\gamma\in\mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan U, $Ker(T^*-i)$ den $Ker(T^*+i)$ ye bir izometridir. Çünkü,

$$\left\|e^{i\gamma-1}e^x\right\|=\sqrt{\int_0^1|e^{i\gamma-1}e^x|^2dx}=\frac{1}{\sqrt{2}e}\sqrt{e^2-1}=\|e^{-x}\|$$

dir. Dolayısıyla, T nin genişletilmiş tanım kümesi,

$$D^\gamma=\left\{f+e^{-x}+e^{i\gamma-1}e^x: f\in D(T)\right\}$$

olarak belirlenir. Ayrıca, $\psi\in D^\gamma$ olmak üzere,

$$\psi(0)=f(0)+1+e^{i\gamma-1}=1+e^{i\gamma-1}$$

$$\psi(1) = f(1) + e^{-1} + e^{i\gamma} = e^{-1} + e^{i\gamma}$$

dır ve buradan,

$$\psi(1) = \frac{e^{-1} + e^{i\gamma}}{1 + e^{i\gamma - 1}} \psi(0)$$

bulunur.

$$\left| \frac{e^{-1} + e^{i\gamma}}{1 + e^{i\gamma - 1}} \right| = 1$$

olduğundan,

$$\psi(1) = e^{i\theta} \psi(0), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, T operatörünün self – adjoint genişlemesi,

$$D(T_\theta) = \{\psi(x) \in L^2(0,1) : \psi' \in L^2(0,1), \psi(1) = e^{i\theta}\psi(0)\}$$

$$T_\theta \psi = -i\psi'$$

dir. Yukarıdaki şekilde tanımlanan T operatörü Fizik de tek boyutta momentum operatörü olarak bilinir. [14], [11]

Tanım 3.14. T operatörü sonlu boyutlu Hilbert uzayında bir self – adjoint operatör olsun. Kabul edelim ki, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ self – adjoint T operatörünün özdeğerleri, $\{e_i\}_{i=1}^n$ ise onlara uygun özvektörlerden oluşmuş bir baz olsun. e_i nin doğurduğu T ya göre invaryant alt uzayı E_i, bu alt uzaya ortogonal projeksiyon operatörünü P_i ile temsil edersek, T operatörü için,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$$

spektral ayrılışını yazabiliriz. [9]

Sonuç 3.15. T operatörü sonlu boyutlu Hilbert uzayında bir self – adjoint operatör olsun. T self – adjoint olduğundan T nın λ_i özdeğerleri reeldir ve dolayısıyla sıralanabilirlerdir. Bunların $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ biçiminde sıralandığını kabul edelim. P_i projeksiyonlarını kullanarak,

$$E_{\lambda_0} = 0$$

$$E_{\lambda_1} = P_1$$

$$E_{\lambda_2} = P_1 + P_2$$

$$\vdots$$

$$E_{\lambda_n} = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

projeksiyonlarını tanımlayalım. Buradan,

$$P_1 = E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}$$

$$P_2 = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$$

$$\vdots$$

$$P_n = E_{\lambda_n} - E_{\lambda_{n-1}}$$

olur. Dolayısıyla,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \lambda_1\left(E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}\right) + \lambda_2\left(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}\right) + \cdots + \lambda_n\left(E_{\lambda_n} - E_{\lambda_{n-1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}\right)$$

dir ve $\delta E_{\lambda_i} = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$ denilirse,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta E_{\lambda_i}$$

bulunur. Ayrıca bu gösterim ile herhangi $x, y \in H$ için,

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \delta E_{\lambda_i} x\,, y\rangle$$

olur. Bu ifade Riemann – Stieltjes integrali ile

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\langle E_\lambda x, y\rangle$$

şeklinde yazılır ve ayrıca

$$\|Tx\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 d\|E_\lambda x\|^2.$$

[7]

Tanım 3.16. $U(t)$ tek parametreli fonksiyon operatörü olsun. Buna göre,

$i)$ Her bir $t \in \mathbb{R}$ için, $U(t)$ üniter operatör ve $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için $U(t+s) = U(t)U(s)$ ve $U(0) = I$

$ii)$ $\psi \in H$ ve $t \to t_0$ ise $U(t)\psi \to U(t_0)\psi$.

ise $U(t)$, sürekli tek parametreli üniter grup olarak adlandırılır. [18]

Teorem 3.17. A, H Hilbert uzayında self – adjoint bir operatör olsun. $U(t) = e^{itA}$ olmak üzere, $\forall \psi \in D(A)$ için,

$$\frac{U(t)\psi - \psi}{t} \underset{t \to 0}{\to} iA\psi$$

dir. [18]

İspat. $\forall \psi \in D(A)$ için,

$$\lim_{t \to 0} \left\| \left(A - \frac{e^{itA} - 1}{it} \right) \psi \right\|^2 = \lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \left| 1 - \frac{e^{it\lambda} - 1}{it\lambda} \right|^2 d\|E_\lambda x\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \to 0} \lambda^2 \left| 1 - \frac{e^{it\lambda} - 1}{it\lambda} \right|^2 d\|E_\lambda x\|^2 = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.18. (**Stone Teoremi**) $U(t)$, H Hilbert uzayında sürekli tek parametreli üniter grup olsun. Bu durumda, H da $U(t) = e^{itA}$ olacak şekilde tek bir self – adjoint A operatörü vardır. [28]

İspat. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ve $\varphi \in H$ için, $\varphi_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)U(t)\varphi dt$ integralini tanımlayalım. $U(t)$ ve $f(t)$ nin tanımı gereği bu integral iyi tanımlıdır. $\forall \varphi \in H$ için φ_f ve $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ nin sonlu lineer kombinazonlarının kümesi D olsun ve $\int_{-\infty}^{\infty} j(x)dx = 1$ olacak şekilde $j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu için $j_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} j(\frac{\epsilon}{x})$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre,

$$\|\varphi_{j_\epsilon} - \varphi\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} j_\epsilon(x)U(t)\varphi dt - \varphi \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} j_\epsilon(x)U(t)\varphi dt - \varphi \int_{-\infty}^{\infty} j_\epsilon(x)dt \right\|$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} j_\epsilon(x)(U(t)\varphi - \varphi)dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} j_\epsilon(x)\|(U(t)\varphi - \varphi)\|dt$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} j_\epsilon(t)dt \right) \sup_{t \in [-\epsilon,\epsilon]} \|(U(t)\varphi - \varphi)\| = \sup_{t \in [-\epsilon,\epsilon]} \|(U(t)\varphi - \varphi)\|$$

olur ve $U(t)$ tek parametreli üniter grup olduğundan, $\epsilon \to 0$ için $\varphi_{j_\epsilon} \to \varphi$ dir. Dolayısıyla D, H da yoğundur.

$\varphi_f \in D$ için,

$$\left(\frac{U(s)-I}{s}\right)\varphi_f = \left(\frac{U(s)-I}{s}\right)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)U(t)\varphi dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{U(s+t)-U(t)}{s}\right)\varphi dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{U(s+t)}{s}\varphi dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{U(t)}{s}\varphi dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\frac{U(t)}{s}\varphi dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{U(t)}{s}\varphi dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f(t-s)-f(t)}{s}\right)U(t)\varphi dt \underset{s\to 0}{\to} -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)U(t)\varphi dt = \varphi_{-f'}$$

dolayısıyla $s \to 0$ için $\left(\frac{f(t-s)-f(t)}{s}\right)$, $-f'(t)$ ye düzgün yakınsar.

Şimdi, D de $\tilde{A}\varphi_f = -i\varphi_{-f'}$ olacak şekilde bir $\tilde{A}$ operatörünü tanımlayalım. $U(t) : D \to D$ ve $\tilde{A} : D \to D$ dir. Ayrıca,

$$U(s)\varphi_f = U(s)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)U(t)\varphi dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)U(t+s)\varphi dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t-s)}_{:=g(t)} U(t)\varphi dt = \varphi_g$$

ve

$$\tilde{A}U(s)\varphi_f = \tilde{A}\varphi_g = -i\varphi_{-g'} = -iU(s)\varphi_{-f'} = U(s)\tilde{A}\varphi_f$$

dir. $\tilde{A}$ simetriktir. Çünkü,

$$\langle \tilde{A}\varphi_f, \varphi_g\rangle = \lim_{s\to 0}\langle\left(\frac{U(s)-I}{is}\right)\varphi_f, \varphi_g\rangle$$

$$= \lim_{s\to 0}\langle\varphi_f, \left(\frac{I-U(-s)}{is}\right)\varphi_g\rangle$$

$$= \langle\varphi_f, -i\varphi_{-g'}\rangle = \langle\varphi_f, \tilde{A}\varphi_g\rangle.$$

Şimdi sonuç 3.8 i kullanarak $\tilde{A}$ operatörünün özde self – adjoint olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\psi \in D(\widetilde{A^*})$ için $\widetilde{A^*}\psi = i\psi$ olsun. Her bir $\varphi \in D(\tilde{A}) = D$ için,

$$\frac{d}{dt}\langle U(t)\varphi, \psi\rangle = \lim_{s\to 0}\langle \frac{U(t+s) - U(t)}{s}\varphi, \psi\rangle$$

$$= \lim_{s\to 0}\langle \frac{U(s) - I}{s}\underbrace{U(t)\varphi}_{\in D}, \psi\rangle$$

$$= \langle i\tilde{A}U(t)\varphi, \psi\rangle = i\langle U(t)\varphi, \widetilde{A^*}\psi\rangle$$

$$= i\langle U(t)\varphi, i\psi\rangle = \langle U(t)\varphi, \psi\rangle\,.$$

Dolayısıyla, $f(t) = \langle U(t)\varphi, \psi\rangle$ kompleks değerli fonksiyon olmak üzere, $f' = f$ adi diferansiyel denkleminin çözümü, $f(t) = f(0)e^t$ dir. Diğer taraftan $U(t)$ üniter ve dolayısıyla normu 1 dir. $f(t)$, pozitif ve negatif t için sınırlı olur ve bu ancak $f(0) = 0 = \langle \varphi, \psi\rangle$ için mümkündür. D, H da yoğun ve φ keyfi olduğundan, $\psi = 0$ dir. Benzer ispat $\widetilde{A^*}\psi = -i\psi$ için de yapılır ve sonuç 3.8 den $\tilde{A}$, D de özde self – adjointtir, yani $A := \bar{\tilde{A}}$ self – adjoint.

Şimdi, $V(t) = e^{itA}$ yı tanımlayalım ve D de $U(t)$ ile $V(t)$ nin çakıştığını gösterelim. $\varphi \in D$ olsun. Teorem 3.17 den, $\varphi \in D(A)$, $V(t)\varphi \in D(A)$ olmak üzere $V'(t)\varphi = iAV(t)\varphi$ dır. Ayrıca, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $U(t)\varphi \in D \subseteq D(A)$ dır. Eğer $w(t) = U(t)\varphi - V(t)\varphi$ alınırsa, $w(t)$, $U(t)$ ve $V(t)$ nin tanımı gereği H de diferansiyellenebilir. Dolayısıyla,

$$w'(t) = i\tilde{A}U(t)\varphi - iAV(t)\varphi = iAw(t)$$

olur ve buradan,

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = -i\langle Aw(t), w(t)\rangle + i\langle w(t), Aw(t)\rangle = 0$$

ve tanım gereği, $w(0) = 0$ olduğundan, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $w(t) = 0$ dır. Sonuçta, $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall \varphi \in D$ için $U(t)\varphi = V(t)\varphi$ bulunur. D, H de yoğun olduğundan $\forall t \in \mathbb{R}$ için $V(t) = U(t)$ dir.

Son olarak tekliğini gösterelim, A ve B, $e^{iBt} = U(t) = e^{iAt}$ olacak şekilde iki self – adjoint operatör olsunlar. Teorem 3.17 den $A = B$ bulunur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.19. $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $(\,'\,)$ notasyonu x e göre türevi göstermek üzere, $-\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$ difarensiyel denkleminin $\forall\lambda$ için tüm çözümleri

$x = 0$ da ($x = \infty$ da) $L^2(a,b)$ uzayındaysa, $V(x)$ e limit çemberi durumundadır denir. Aksi halde $x = 0$ da ($x = \infty$ da) $V(x)$ e limit noktası durumundadır denir. [19]

Teorem 3.20. (**Lagrange Özdeşliği**) $x \in C([a,b],\mathbb{C})$, $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ ve $q \in C([a,b],\mathbb{R})$ olsun. ($'$) notasyonu t ye göre türevi göstermek üzere,

$$Tx = -(p(t)x')' + q(t)x$$

T operatörü verilsin. $x\,, y \in L^2(a,b)$ olmak üzere,

$$\{x,y\}(t) = p(t)\left[\overline{y'(t)}x(t) - \overline{y(t)}x'(t)\right]$$

$\{x,y\}(t)$ tanımlansın. Bu durumda,

$$\bar{y}(Tx) - \overline{(Ty)}x = \{x,y\}'$$

dir. [6]

İspat. p ve q reel olduğundan, $p = \bar{p}$ ve $q = \bar{q}$ olur. Sonuçta;

$$\begin{aligned} \bar{y}(Tx) - \overline{(Ty)}x &= \bar{y}[-(px')' + qx] - [-(p\bar{y}')' + qy]x \\ &= (p\bar{y}')'x - \bar{y}(px')' = [(p\bar{y}')x - \bar{y}(px')]' \\ &= [p(\overline{y}'x - \bar{y}x')]' = \{x,y\}' \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 3.21. $x\,, y \in L^2(a,b)$ olmak üzere, Lagrange özdeşliğinin a dan b ye integralini alırsak,

$$\langle Tx, y\rangle - \langle x, Ty\rangle = \{x,y\}(b) - \{x,y\}(a)$$

Green formülünü elde edilir. [6]

Teorem 3.22. (**Weyl Limit Noktası − Limit Çemberi Kriteri**) $V(x)$, $(0,\infty)$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere, $V(x)$ hem sıfırda hem sonsuzda limit noktası durumunda ise $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ operatörü $C_0^\infty(0,\infty)$ da özde self – adjointtir. [19]

İspat. Eğer $V(x)$ hem sıfırda hem sonsuzda limit çemberi durumda ise H operatörünün defekt indisleri $(2,2)$ dir. Eğer $V(x)$ bir noktada limit çemberi, diğer noktada limit noktası ise H operatörünün defekt indisleri $(1,1)$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $V(x)$ hem sıfırda hem sonsuzda limit noktası durumunda olsun. $f, g \in D(H^*)$ ve $\{f,g\}(\infty) = \lim_{b \to \infty}\{f,g\}(b)$ ile $\{f,g\}(0) = \lim_{a \to 0}\{f,g\}(a)$ limitleri mevcut olmak üzere, sonuç 3.21 den;

$$\{f,g\}(\infty) - \{f,g\}(0) = \langle H^* f, g\rangle - \langle f, H^* g\rangle$$

yazabiliriz ve eğer yukarıda ki ifadenin sol tarafının sıfıra eşit olduğunu gösterirsek H operatörünün özde self – adjoint olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi, $c \in (0,\infty)$ seçelim. B, H nın $C_0^\infty(0,c) \subset L^2(0,c)$ olmak üzere kısıtlaması ve

$$D(A) = \{\varphi :\ \varphi \in C^\infty(0,c);\ \text{sıfır civarında}, \varphi = 0, \varphi(c) = 0\}$$

için $A = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ olsun. $B \subset A$ olduğundan $\bar{B} \subset \bar{A}$ dır. $\varphi'(c) \neq 0$ olması nedeniyle tüm fonksiyonlar $D(\bar{A})$ da dır ve $\bar{A}$, $\bar{B}$ ın uygun bir simetrik genişlemesi olduğundan dolayı, fonksiyonlar $D(\bar{B})$ da değillerdir.

$$-\varphi'' + V\varphi = \pm i\varphi$$

denkleminin çözümleri, c civarında L^2 dir ama sadece bir tanesi sıfır civarında L^2 dir. Dolayısıyla, B nin defekt sayısı (1,1) dir. Sonuçta, $\bar{A}$ operatörünün defekt indisleri (0,0) olur yani $\bar{A}$ operatörü self – adjointir.

Şimdi, $f, g \in D(H^*)$ olsun ve $f(c) + f_1(c) = 0$, $g(c) + g_1(c) = 0$ olacak şekilde $f_1, g_1 \in C_0^\infty(0,\infty)$ seçelim. $f_2 = f + f_1$ ve $g_2 = g + g_1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} -\{f,g\}_0 &= \{f_2, g_2\}_c - \{f_2, g_2\}_0 \\ &= \langle \bar{A} f_2, g_2\rangle - \langle f_2, \bar{A} g_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

olur. Çünkü, $f_2, g_2 \in D(A^*) = D(\bar{A})$ dir. Dolayısıyla, $\{f,g\}_0 = 0$ bulunur ve benzer ispat ile $\{f,g\}_\infty = 0$ bulunur.

Tanım 3.23. $\varphi''(x) = V(x)\varphi(x)$ diferansiyel ifadesinin en az bir çözümü ∞ civarında (veya 0 civarında) L^2 değilse $V(x)$, ∞ da (veya 0 da) tamdır denir. [19]

Teorem 3.24. $\varphi''(x) = V(x)\varphi(x)$ diferansiyel ifadesinde $V(x)$, $(0,\infty)$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve kabul edelim ki,

$$i)\ V(x) \geq -M(x)$$

$$ii)\ \int_1^\infty (M(x))^{-1/2}\, dx = \infty$$

$$iii) \quad {M'(x)}\Big/{(M(x))^{3/2}} \; ; \quad \infty \text{ civarında sınırlı}$$

şartlarını sağlayan pozitif diferansiyellenebilir bir $M(x)$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda $V(x)$, ∞ da limit noktası durumundadır. [19]

İspat. $\varphi''(x) = V(x)\varphi(x)$ diferansiyel ifadesinin iki çözümünün de ∞ da L^2 olmadığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Eğer $0 < c_1 < c < \infty$ ve u, ∞ da L^2 olan reel bir çözüm ise,

$$-K_1 \equiv \int_{c_1}^{\infty} u^2(x)dx \;\leq -\int_{c_1}^{c} u^2(x)dx \;\leq \int_{c_1}^{c} \frac{V(x)u^2(x)dx}{M(x)} = \int_{c_1}^{c} \frac{u''(x)u(x)}{M(x)}dx$$

olur ve kısmi integrasyon ile her c için,

$$-\frac{u'(x)u(x)}{M(x)}\bigg]_{c_1}^{c} + \int_{c_1}^{c} \frac{(u'(x))^2}{M(x)}dx - \int_{c_1}^{c} \frac{u'(x)u(x)M'(x)dx}{(M(x))^2} \leq K_1$$

bulunur. Ayrıca $iii)$ şartını kullanırsak,

$$\int_{c_1}^{c} \frac{u'(x)u(x)M'(x)dx}{(M(x))^2} \leq K_2\left(\int_{c_1}^{c} \frac{(u'(x))^2}{M(x)}dx\right)^{1/2} \left(\int_{c_1}^{c} (u(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

olacak şekilde K_2 yi buluruz.

Kabul edelim ki, $\int_{c_1}^{\infty} \frac{(u\prime(x))^2}{M(x)}dx = \infty$ olsun. Bu durumda son eşitsizlik, u nun kabulü ve ikinci eşitsizlikten, $u'(x)u(x)$ ifadesi ∞ civarında pozitif olur yani $u'(x)$ ve $u(x)$ her zaman aynı işaretli olmak zorundadır ve bu durum u nun ∞ civarında L^2 olması nedeniyle mümkün değildir. Dolaysıyla, $\int_{c_1}^{\infty} \frac{(u\prime(x))^2}{M(x)}dx < \infty$ dur.

Şimdi kabul edelim ki, φ ve ψ, $-\varphi'' + V\varphi = 0$ denkleminin ∞ civarında L^2 olan iki lineer bağımsız çözümü olsun. Bu durumda φ ile ψ nin reel değerli ve $\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = 1$ olduğu kabul edilebilir ve bu kabulden,

$$\left(\frac{1}{M(x)}\right)^{1/2} = \frac{\varphi(x)\psi'(x)}{(M(x))^{1/2}} - \frac{\varphi'(x)\psi(x)}{(M(x))^{1/2}}$$

bulunur ve $\int_{c_1}^{\infty} \frac{(u\prime(x))^2}{M(x)}dx < \infty$ ifadesi dikkate alınırsa,

$$\int_{c_1}^{\infty}\left|\frac{\varphi(x)\psi'(x)}{(M(x))^{1/2}}-\frac{\varphi'(x)\psi(x)}{(M(x))^{1/2}}\right|dx<\infty$$

bulunur ama $\left(\frac{1}{M(x)}\right)^{1/2}$ ifadesi $ii)$ den dolayı $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir değildir ve bu son bulunan ifade ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.25. $V(x)$, $(0,\infty)$ aralığında diferansiyellenebilir ve $[1,\infty)$ aralığında bir K ile sınırlı olsun. Kabul edelim ki,

$$i)\ \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}}=\infty$$

$$ii)\ V'(x)\big/|V(x)|^{3/2}\ ;\ \infty \text{ civarında sınırlı}$$

olsun. Bu durumda $V(x)$, ∞ da limit noktası durumundadır. [19]

Teorem 3.26. V sıfır civarında sürekli ve pozitif olsun. Eğer sıfır civarında $V(x)\geq\frac{3}{4}x^{-2}$ ise $-d^2/dx^2+V(x)$ diferansiyel ifadesi, sıfır da limit noktası durumundadır. [19]

İspat. $c>0$ olmak üzere, $V(x)=c/x^2$ olsun. Bu durumda $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ ve $\alpha_2=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$ olmak üzere x^{α_1} ve x^{α_2}, $-\varphi''(x)+\left(c/x^2\right)\varphi(x)=0$ diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümüdür. x^{α_1}, sıfır civarında her zaman L^2 dir ama x^{α_2}, sıfır civarında L^2 dir ancak ve ancak $\alpha_2>-\frac{1}{2}$ dir. $\alpha_2>-\frac{1}{2}$ dir ancak ve ancak $c<\frac{3}{4}$ dür. Dolayısıyla $-\varphi''(x)+\left(c/x^2\right)\varphi(x)=0$ diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü sıfır civarında L^2 dir ancak ve ancak $c<\frac{3}{4}$ dür. Sonuç olarak, $V(x)\geq\frac{3}{4}x^{-2}$ ise $-d^2/dx^2+V(x)$ diferansiyel ifadesi, sıfır da limit noktası durumundadır.

4. UZAY – ZAMAN TEKİLLİKLERİ

Einstein'ın genel görelilik teorisinin önemli öngörülerinden biri olan karadeliklerin isim babası John Archibald Wheeler, Einstein' nın genel görelilik teorisini tasvir ederken, " madde; içinde bulunduğu uzay – zamanı nasıl bükeceğini, bükülen uzay – zaman ise maddeye bu uzay – zaman yapısı içinde nasıl hareket edeceğini söyler. " olarak ifade etmiştir. Bu yorum, aslında, Newton mekaniği ile Einstein' ın genel görelilik teorisi arasındaki en büyük ayrımı da ortaya koymaktadır. Einstein'ın genel görelilik teorisine göre, yerçekimi, uzay – zamanı bükmektedir ve ışığın da dahil olduğu tüm cisimler eğri bir uzay – zaman yapısı içinde hareket etmektedir.

Eğri bir uzay – zaman yapısı Riemann geometrisi kullanarak ifade edilebilir. Einstein genel görelilik teorisinin inşa edildiği uzay – zamanı; C^{∞} sınıfında Hausdorff manifoldu M ile Lorentz metriği $g_{\mu\nu}$ tasvir eder. Bu tanıma göre uzay – zaman içerisinde herhangi bir tekilliğin olmaması öngörülmektedir. Ancak, Einstein denklemlerinin kesin çözümleri uzay – zaman tekilliklerini öngörmektedir. Bu tekil noktalarda, fiziksel parametreler ıraksamakta ve bilinen fizik kuralları geçerliliğini yitirmektedir. Bir başka ifadeyle, parçacıkların zamandaki evriminin bilinemeyeceği uzay – zamandaki deliklerdir veya jeodeziklerin bitim noktalarıdır. Bu durum, klasik fiziğin en önemli problemidir.

Uzay – zaman tekillikleri, klasik ve kuantum tekillikleri olarak iki ana gruba ayrılır. Klasik tekillikler, G.F.R. Ellis ve B.G. Schmidt tarafından üç grupta sınıflandırılmıştır [12]. Buna göre, uzay – zaman tekillikleri; kuasi – sürekli tekillikler, skaler olmayan eğrilik tekillikleri ve skaler eğrilik tekillikleri şeklindedir.

Kabul edelim ki q tekil bir nokta olsun, eğer $R_{abcd,e_1e_2\dots e_k}$ Riemann tensörünün PPON (Parallelly – Propagated – Orthonormal) çatısında ki tüm elemanlarının türevleri q tekil noktasında ıraksıyorsa, bu q tekil noktasına kuasi – sürekli tekillik denir. Bu tip tekillikler en zayıf tekillikler sınıfına girer. Eğer Riemann tensörünün bazı bileşenlerinin türevleri q tekil noktasında sınırsız ise bu q tekil noktasına skaler olmayan eğrilik tekilliği denir. Eğer, Riemann tensörünün bütün skalerleri q tekil noktasında sınırsız ise, bu q tekil noktasına skaler eğrilik tekilliği denir ve bu tür tekillikler diğer tekillikler içinde en kuvvetli olan tekilliklerdir çünkü bu tekillikler genişletilemez ve gravitasyonel alan, enerji yoğunluğu ve med cezirsel kuvvetler bu tekilliklerde ıraksarlar.

Küresel simetrik karadelik uzay – zamanında $r = 0$ noktası tekilliğin bulunduğu noktadır ve ufuk (ufuklar) tarafından örtülmüştür. Tekillikler, ufuk (ufuklar) tarafından saklandığı sürece R. Penrose'un henüz ispatlanmamış olan kozmik sansür hipotezi [25] ile çelişki oluşturmaz. Ancak, Einstein' nın genel görelilik teorisindeki bazı kesin çözümlerinde karadelik oluşmamakta ve tekil nokta ufuk (ufuklar) tarafından örtülmemektedir. Bu tekilliklere çıplak tekillikler [2] denir ve R. Penrose'un kozmik sansür hipotezine aykırılık teşkil ederler.

Çıplak tekilliklerin analiz edilmesi ve anlaşılması genel göreliliğin çözülmeyi bekleyen belli başlı problemlerinden biridir. Çıplak tekillikler, küresel simetrik çözümlerde $r = 0$ noktasında bulunmaktadır, dolayısıyla çok küçük bir uzunluk ölçeği karşımıza çıkmaktadır yani bu kadar küçük ölçeklerde doğru bir analiz klasik genel görelilik yerine kuantum gravitasyon teorisi ile yapılmalıdır. Ancak tutarlı bir kuantum gravitasyon teorisi mevcut değildir. Bu nedenle alternatif yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi de, R.M. Wald'ın (1980) de yaptığı çalışmadır [26] ve Wald'ın yaptığı çalışma, G.T. Horowitz ve D. Marolf (1995) tarafından [10] geliştirilerek, zamansal tekilliklere sahip olan statik uzay – zamanlarda Klein – Gordon denklemine uyan kuantum test parçacıklar ile analiz edilmiştir. Horowitz ve Marolf 'a göre uzay – zamanın tekil karakteri dalga fonksiyonun evrimindeki belirsizlik olarak tanımlanır. Yani uzay – zamanın tekil karakteri kesin belirsizlik yönünde olduğunda Klein – Gordon denkleminin çözümünden elde edilen uzaysal diferansiyel operatörün self – adjoint genişlemesi Hilbert uzayındadır ve bu durumda bu uzay kuantum mekaniksel olarak tekildir. Eğer operatörün bu genişlemesi tek ise bu uzay kuantum mekaniksel olarak süreklidir. Bu analiz literatürde Horowitz – Marolf kriteri [10] olarak bilinmektedir.

Bu analize temel teşkil eden en çarpıcı örnek olarak hidrojen atomunu örnek gösterebiliriz. Hidrojen atomu klasik olarak $r = 0$ noktasında tekildir. Ancak, Schrödinger dalga denklemi çözümlerine bakıldığı zaman, $r = 0$ noktasında süreklidir. Sonuç olarak, klasik olarak tekil olan bir yapı, kuantum mekaniksel olarak tekil olmayabilir.

4.1 Kuantum Tekilliklerin Matematiksel Analizi

ξ^{μ} bir Killing vektör alanıyla bir $(M, g_{\mu\nu})$ statik uzay – zamanı verilsin. t Killing parametresini, m bir sabiti ve Σ ise statik dilimi göstermek üzere; bu uzayda Klein – Gordon denklemi,

$$\left(\nabla^{\mu}\nabla_{\mu} - m^2\right)\psi = 0$$

dir ve bu denklem, $f = -\xi^{\mu}\xi_{\mu}$ ve D_i , Σ üzerinde uzaysal kovaryant türev olmak üzere,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \sqrt{f}D^i\left(\sqrt{f}D_i\psi\right) - fm^2\psi = -A\psi$$

formunda yazılabilir [10]. $H\left(L^2(\Sigma)\right)$, Σ üzerinde karesi integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı olsun. A operatörünün tanım kümesi $D(A)$, kapanışında uzay – zamanın tekilliklerini barındırmamak üzere ve uygun bir $C_0^\infty(\Sigma)$ kümesi için; A operatörü reel, pozitif ve simetriktir [10]. Dolayısıyla bu A operatörünün self – adjoint genişlemesi daima mevcuttur. Eğer A_E, A operatörünün tek self – adjoint genişlemesi ise A özde self – adjoint olarak adlandırılır. Sonuç olarak, Klein – Gordon denklemi,

$$i\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{A_E}\,\psi$$

olur ve bu diferansiyel denklemin çözümü ise,

$$\psi(t) = e^{-it\sqrt{A_E}}\,\psi(0)$$

dır. Eğer A operatörü özde self – adjoint değilse, yukarıda bulduğumuz dalga çözümünün zamanda ki evrimi belirsizdir ve bu durumda Horowitz – Marolf kriteri gereğince bu uzay – zaman kuantum mekaniksel olarak tekildir. Fakat, A operatörünün sadece bir tek self – adjoint genişlemesi var ise yani A operatörü özde self – adjoint ise, yukarıda bulduğumuz dalga çözümünün zamanda ki evrimi, başlangıç koşullarının bilinmesi halinde tek türlü olarak bulunur ve bu durumda Horowitz – Marolf kriteri gereğince bu uzay – zaman kuantum mekaniksel olarak süreklidir.

Dolayısıyla bu tekillik analizi doğrudan doğruya bulunan operatörün özde self – adjoint olup olmamasına dayanmaktadır. Bir operatörün özde self – adjoint olup olmadığını belirlemenin iki yolunun olduğu önceki bölümlerde anlatılmış ve gerekli teoremler ispatlanmıştır.

Bu yollardan ilki, elde edilen A operatörünün $N_\pm = Ker(A^* \pm i)$ defekt alt uzaylarının belirlenip ve bu alt uzayların boyutları olan $n_\pm(A) = \dim[N_\pm]$ defekt indislerinin her ikisinin de sıfır olduğunun bulunması yani özde self – adjointliğin temel kriterinin uygulanmasıdır. Dolayısıyla,

$$A^*\psi \pm i\psi = 0$$

denkleminin tüm çözümleri karesi integrallenebilir ise dolayısıyla Hilbert uzayına ait iseler A operatörü özde self – adjoint değildir. Fakat yukarıdaki denklemin çözümü karesi integrallenmez ise dolayısıyla Hilbert uzayına ait değil ise A operatörü özde self – adjointtir.

Bu yollardan ikincisi, $\psi \in D(A)$ için $A\psi = 0$ denkleminde elde edilen A operatörünü, $A = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ diferansiyel operatör formunda yazarak, Weyl limit çemberi – limit noktası olma kriterini kullanarak özde self – adjointliğin belirlenmesidir. Yani ∞ da ve 0 da limit noktası olma şartları uygulanıp gerekli sınır şartlarının bulunmasıdır.

5. HORAVA – LİFSHİTZ TEORİSİNDEKİ UYGULAMALAR

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde matematiksel temelleri verilen kuantum tekillik analizinin, Horava – Lifshitz (HL) teorisindeki uygulaması yapılacaktır. Bu uygulama, HL teorisinin küresel simetrik çözümü olan Kehagias – Sfetsos (KS) çözümünde, ortaya çıkan çıplak tekilliklerin, boson ve fermiyonlardan oluşan kuantum dalgaları ile analizini kapsamaktadır.

5.1 Kısaca Horava – Lifshitz (HL) Kütleçekim Teorisi:

Horava – Lifshitz (HL) kütleçekimi teorisi [24], henüz oluşturulmamış kuantum kütleçekimi teorisine alternatif bir model olarak ortaya çıkmıştır. Bu modelin en belirgin özelliği, yüksek enerji skalasında Lorentz invaryant olmayışıdır. Bir başka deyişle, Einstein'ın genel görelilik teorisinden ayrılır. Ancak, düşük enerji skalasında Lorentz invaryant olup Einstein'ın genel görelilik teorisiyle örtüşür.

Bu teori ile ilgili uzay – zaman metriği aşağıdaki şekilde yazılır:

$$ds^2 = -N^2dt^2 + g_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right),$$

burada g_{ij} metrik tensörü, N^i metrik fonksiyonu belirtir.

HL kütleçekimi teorisinin $3+1$ boyuttaki genel eylemi aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$S = \int dt d^3x \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2}\left(K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2\right) - \frac{\kappa^2}{2w^4} C_{ij}C^{ij} + \frac{\kappa^2\mu}{2w^2}\epsilon^{ijk} R_{il}^{(3)} \nabla_j R_k^{(3)l} \right.$$
$$- \frac{\kappa^2\mu^2}{8} R_{ij}^{(3)} R^{(3)ij} + \frac{\kappa^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}\left(\frac{1-4\lambda}{4}\left(R^{(3)}\right)^2 + \Lambda_W R^{(3)} - 3\Lambda_W^2\right)$$
$$\left. + \mu^4 R^{(3)} \right\}.$$

burada,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\right)$$

ikinci temel formu ve

$$C^{ij} = \epsilon^{ikl}\nabla_k\left(R_l^{(3)j} - \frac{1}{4}R^{(3)}\delta_l^j\right),$$

Koton tensörü olmak üzere; κ , λ ve w boyutsuz orantı sabitleridir. Öte yandan, μ ve Λ_W kütle boyutundaki sabitlerdir ve sırasıyla $[\mu] = 1$ ve $[\Lambda_W] = 2$ boyutundadır. Ayrıca, $\sqrt{g}$ metrik tensörün determinantını, ϵ^{ijk} levi – civita sembolünü, $R_{ij}^{(3)}$ üç boyutta Ricci tensörünü ve $R^{(3)}$ üç boyutta Ricci skalerini göstermektedir [24].

Bu tezin inceleme konusu olan Kehagias – Sfetsos (KS) küresel simetrik karadelik çözümü [3], HL teorisinin özel bir limitinden elde edilmiştir. Yukarıda verilen eylem tanımında $\Lambda_W \to 0$ alındığında, S eylemi,

$$S = \int dtd^3x\sqrt{g}N\left\{\frac{2}{\kappa^2}\left(K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2\right) - \frac{\kappa^2}{2w^4}C_{ij}C^{ij} + \frac{\kappa^2\mu}{2w^2}\epsilon^{ijk}R_{il}^{(3)}\nabla_j R_k^{(3)l}\right.$$
$$\left. - \frac{\kappa^2\mu^2}{8}R_{ij}^{(3)}R^{(3)ij} + \frac{\kappa^2\mu^2(1-4\lambda)}{32(1-3\lambda)}\left(R^{(3)}\right)^2 + \mu^4 R^{(3)}\right\}$$

eylemine indirgenir [3]. Düşük enerji skalasına karşılık gelen uzak mesafelerde $(r \to \infty)$, $\lambda = 1$ alındığında ve $x^0 = ct$ olmak üzere, yukarıdaki eylem, Einstein – Hilbert eylemine indirgenerek aşağıdaki şekliyle ifade edilir,

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^4x\sqrt{g}N\left(K_{ij}K^{ij} - K^2 + R^{(3)}\right)$$

burada $\lambda = 1$, $c^2 = \frac{\kappa^2\mu^4}{2}$ ve $G_N = \frac{\kappa^2}{32\pi c}$ [3].

KS, küresel simetrik bir çözüm bulabilmek için uzay – zaman metriğini aşağıdaki gibi almıştır [3].

$$ds^2 = -N(r)^2dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)\,.$$

Dolayısıyla sistemin Lagrangian yoğunluğu,

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa^2\mu^2}{16}\frac{N}{\sqrt{f}}\left\{\frac{(f-1)^2}{r^2} - 2\frac{(f-1)}{r}f' - 2\omega(1 - f - rf')\right\}$$

şeklinde belirlenir. Burada $(')$ notasyonu r ye göre türevi , $\omega = {}^{16\mu^2}\!/_{\kappa^2}$ ve boyutu $[\omega] = 2$ dir. Buradan alan denklemlerinin çözümü aşağıdaki gibi bulunmuştur [3].

$$N^2 = f = 1 + \omega r^2 - \sqrt{r(\omega^2r^3 + 4\omega M)}\,,$$

burada M boyutu $[M] = -1$ olan bir integrasyon sabitidir. Dolayısıyla metrik,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

şeklindedir. KS küresel simetrik karadelik çözümünün ufukları, $g_{tt} = 0$ metrik fonksiyonun kökleri bulunarak belirlenir ve dolayısıyla $\omega M^2 \geq \frac{1}{2}$ olmak üzere ufuklar,

$$r_{\pm} = M\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega M^2}}\right)$$

dir. KS küresel simetrik karadelik çözümünün Ricci skaleri, $1/_{r^{3/2}}$ fonksiyonu ile orantılı olduğundan, $r = 0$ noktası bu karadelik çözümü için ufuklar tarafından gizlenen doğru bir eğrilik tekilliği olmaktadır. KS küresel simetrik karadelik çözümünün ilgi çekici özelliği ise; büyük r, sabit ω veya büyük ω, sabit r limitinde Schwarzchild karadelik çözümüne indirgenmesidir.

KS küresel simetrik karadelik çözümünün metriğinin önemli özellikleri Newman – Penrose formalizmi ile gösterilebilir ve burada en dikkat edici özellik ω parametresinin kendisini etkin bir şekilde göstermesidir. Bu formalizm de 1 – form null tetratlar aşağıdaki gibi verilir [21]

$$l = dt - \frac{dr}{f(r)},$$

$$n = \frac{1}{2}(f(r)dt + dr),$$

$$m = -\frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta + isin\theta d\varphi),$$

$$\bar{m} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta - isin\theta d\varphi).$$

Bu tetratların sıfırdan farklı spin katsayıları, aşağıdaki gibi bulunmuştur. [21]

$$\beta = -\alpha = \frac{cot\theta}{2\sqrt{2}r},$$

$$\rho = -\frac{1}{r},$$

$$\mu = -\frac{f(r)}{2r},$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\frac{df(r)}{dr}.$$

Sıfırdan farklı Weyl ve Ricci skalerleri,

$$\Psi_2 = -\frac{M}{r^3}\left(1 + \frac{4M}{\omega r^3}\right)^{-1/2},$$

$$\phi_{11} = \frac{9M^2}{2r^6\omega}\left(1 + \frac{4M}{\omega r^3}\right)^{-3/2},$$

$$\Lambda = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{4M}{\omega r^3}\right)^{-1/2} + \frac{M}{r^3}\left(1 + \frac{4M}{\omega r^3}\right)^{-3/2} + \frac{5M^2}{2r^6\omega}\left(1 + \frac{4M}{\omega r^3}\right)^{-3/2}.$$

Sadece sıfırdan farklı Ψ_2 Weyl skaleri bulunduğundan bu uzay – zamanın karakteri Petrov – D tipidir. Son olarak yüksek ω limitinde yani $\omega >> 1$ durumunda Schwarzchild uzay – zamanında olduğu gibi Ricci skalerleri ϕ_{11} ve Λ sıfır olmakta, ve Ψ_2 Weyl skaleri ise $\Psi_2 \approx -\frac{M}{r^3}$ olmaktadır.

KS uzay – zamanında çıplak tekillik analizi yapılabilmesi için M parametresi ile ω parametresi $\omega M^2 < \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlamalıdır. Biz yapacağımız analizlerde $M = \frac{1}{2}$ alacağız ve bu seçim karşısında eşitsizlik $\omega < 2$ formuna indirgenecektir. Sonuç olarak analiz $\omega = 1$ seçilerek yapılacaktır. Dolayısıyla $\omega = 1$ ve $M = \frac{1}{2}$ seçiminde metrik fonksiyon,

$$f(r) = 1 + r^2 - \sqrt{r^4 - 2r}$$

formuna indirgenir.

5.2 KS Çıplak Tekilliğinde Kuantum Tekillik Analizi:

Daha önceki, bölümde klasik tekillikler ve kuantum tekillikler anlatılarak aralarında ki farklılıklar belirtilip, çıplak tekillikler açıklanıp, Horowitz – Marolf kriterinin dayandığı bir operatörün özde self – adjoint olup olmaması durumunda uzayın kuantum mekaniksel olarak tekil veya tekil olmaması durumu açıklanarak özde self – adjointliğin tahsisi için kullanılacak olan iki ayrı metot anlatılmıştı. Bu bölümde, HL teorisi içinde yer alan KS küresel simetrik karadelik çözümündeki çıplak tekilliğin kuantum mekaniksel olarak tekil olup olmadığını sırası ile bu iki yöntemi kullanarak analiz edeceğiz. Bu analiz iki farklı kuantum parçacığı kullanarak yapılacaktır. Bunlar, Klein – Gordon denklemini sağlayan bosonik parçacıklar ile Dirac denklemini sağlayan fermiyonik parçacıklardır.

5.3 Klein – Gordon Alanları:

İlk olarak Horowitz – Marolf kriterini uygulamak için fizikte spin – 0 skaler kütleli parçacığın zamanda evrimini veren Klein – Gordon denklemini aşağıdaki formda yazalım;

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right] - \widetilde{m}^2\right)\psi = 0\,,$$

burada g metrik tensörün determinantı, $g^{\mu\nu}$ kontravaryant metrik tensör, ∂_μ ile ∂_ν ; $\mu,\nu = t,r,\theta,\varphi$ indislerine göre türevler ve $\widetilde{m}$ skaler parçacığın kütlesidir. KS küresel simetrik uzay – zamanının metriğine göre metrik tensör, Einstein toplam notasyonu ile, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$; $\mu,\nu = t,r,\theta,\varphi$ olmak üzere,

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan $g_{\mu\nu}^{-1} = g^{\mu\nu}$ olduğundan ve $g = -r^4 sin^2\theta$ olmak üzere,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{f(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

dir. Metrik tensörün detarminantını Klein – Gordon denklemine yazılırsa denklem,

$$\left\{\frac{1}{r^2 sin\theta}\partial_\mu[r^2 sin\theta g^{\mu\nu}\partial_\nu] - \widetilde{m^2}\right\}\psi = 0$$

formuna indirgenir ve sırasıyla 0,1,2,3 ile t, r, θ, φ koordinatları temsil edilip denklemde ki bu koordinatlar üzerindeki Einstein toplamı açılırsa,

$$\begin{aligned}\Big\{\frac{1}{r^2 sin\theta}[&\partial_0 r^2 sin\theta g^{00}\partial_0 + \partial_1 r^2 sin\theta g^{10}\partial_0 + \partial_2 r^2 sin\theta g^{20}\partial_0 + \partial_3 r^2 sin\theta g^{30}\partial_0 \\ &+ \partial_0 r^2 sin\theta g^{01}\partial_1 + \partial_1 r^2 sin\theta g^{11}\partial_1 + \partial_2 r^2 sin\theta g^{21}\partial_1 \\ &+ \partial_3 r^2 sin\theta g^{31}\partial_1 + \partial_0 r^2 sin\theta g^{02}\partial_2 + \partial_1 r^2 sin\theta g^{12}\partial_2 \\ &+ \partial_2 r^2 sin\theta g^{22}\partial_2 + \partial_3 r^2 sin\theta g^{32}\partial_2 + \partial_0 r^2 sin\theta g^{03}\partial_3 \\ &+ \partial_1 r^2 sin\theta g^{13}\partial_3 + \partial_2 r^2 sin\theta g^{23}\partial_3 + \partial_3 r^2 sin\theta g^{33}\partial_3] - \widetilde{m^2}\Big\}\psi \\ &= 0\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Elde edilen son denkleme metrik tensörün bileşenleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\partial_0 r^2 sin\theta\left(-\frac{1}{f(r)}\right)\partial_0 + \partial_1 r^2 sin\theta f(r)\partial_1 + \partial_2 r^2 sin\theta\left(\frac{1}{r^2}\right)\partial_2\right.\right. \\ \left.\left. + \partial_3 r^2 sin\theta\left(\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\right)\partial_3\right] - \widetilde{m^2}\right\}\psi = 0\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan son denklemde türevler alınıp ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\left[-\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{2}{r}f(r)\frac{\partial\psi}{\partial r}+f'(r)\frac{\partial\psi}{\partial r}+f(r)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{cot\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]-\widetilde{m^2}\psi=0$$

denklemi elde edilir. Burada $(')$ notasyonu ile r değişkenine göre $f(r)$ fonksiyonun türevi temsil edilmiştir. Elde edilen son denklemde t koordinatına göre olan türev denklemin diğer tarafına atılıp ve denklemin her iki tarafı da $f(r)$ fonksiyonu ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=f^2(r)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{f(r)}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{f(r)}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{f(r)cot\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$
$$+f(r)\left(\frac{2f(r)}{r}+f'(r)\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}-f(r)\widetilde{m^2}\psi$$

ifadesi bulunur ve ikinci yöntem içinde bu ifadeyi kullanacağımız için bu ifadeyi $(*)$ ile gösterelim.

5.3.1 Metot I (Özde Self – Adjointliğin Temel Kriteri):

Özde self – adjointliğin temel kriterini, sonuç 3.8 i kullanarak özde self – adjointliğine bakılacak olan A operatörü aşağıdaki şekilde,

$$A=-f^2(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{f(r)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{f(r)}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{f(r)cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$-f(r)\left(\frac{2f(r)}{r}+f'(r)\right)\frac{\partial}{\partial r}+f(r)\widetilde{m^2}$$

bulunur. İlk olarak A operatöründen, $\Psi\in D(A^*)$ olmak üzere $(A^*\pm i)\Psi=0$ denklemini yazalım. Dolayısıyla,

$$\left\{f^2(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{f(r)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{f(r)}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{f(r)cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+f(r)\left(\frac{2f(r)}{r}+f'(r)\right)\frac{\partial}{\partial r}\right.$$
$$\left.-f(r)\widetilde{m^2}\pm i\right\}\Psi=0$$

bulunur. Ψ yi $\Psi=R(r)Y(\theta,\varphi)$ şeklinde ayrıştırıp ve denklemde yerine yazarsak,

$$f^2(r)Y(\theta,\varphi)\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{f(r)R(r)}{r^2}\frac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\frac{f(r)R(r)}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\frac{f(r)cot\theta R(r)}{r^2}\frac{\partial Y}{\partial\theta}$$
$$+Y(\theta,\varphi)\left(\frac{2f^2(r)}{r}+f(r)f'(r)\right)\frac{dR}{dr}-f(r)R(r)Y(\theta,\varphi)\widetilde{m^2}$$
$$\pm iR(r)Y(\theta,\varphi)=0$$

bulunur ve denklemin her iki tarafını ${r^2}/{f(r)R(r)Y(\theta,\varphi)}$ ile çarparsak,

$$\frac{f(r)r^2}{R(r)}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\frac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\frac{1}{sin^2\theta Y(\theta,\varphi)}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\frac{cot\theta}{Y(\theta,\varphi)}\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{R(r)}(2rf(r)+r^2f'(r))\frac{dR}{dr}-r^2\widetilde{m^2}\pm i\frac{r^2}{f(r)}=0$$

denklemi elde edilir. Tekillik r koordinatında olduğundan son bulunan diferansiyel denklemin r değişkeni üzerinden analiz yapılmalıdır, dolayısıyla ayrışım sabiti $l(l+1)$, $l\in\mathbb{N}$ alınıp ayrıştırılan diferansiyel denklem düzenlenirse,

$$R''+\frac{(r^2f(r))'}{f(r)r^2}R'+\left[\frac{-l(l+1)}{f(r)r^2}-\frac{\widetilde{m^2}}{f(r)}\pm\frac{i}{f^2(r)}\right]R=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin hem $+i$ hem $-i$ için bulunacak olan çözümleri $L^2(0,\infty)$, Hilbert uzayında değil ise yani karesi integrallenemez ise $n_+=n_-=0$ dır dolayısıyla sonuç 3.8 gereğince, A operatörü özde self – adjointtir. Sonuç olarak, $\mathcal{R}$ son bulunan radyal diferansiyel denklemin çözümü ve t sabit Σ_t, hiperyüzeyi üzerinde $(3+1)$ boyutta,

$$\|\mathcal{R}\|^2=\int_{\Sigma_t}\sqrt{-g}g^{tt}\mathcal{R}\mathcal{R}^*\,d^3\Sigma_t$$

şeklinde tanımlanan kare norm ∞ ise $n_+=n_-=0$ dır dolayısıyla A operatörü özde self – adjointtir.

Elde edilen son radyal diferansiyel denklem direkt analitik çözülemeyeceği için analiz $r\to0$ ve $r\to\infty$ limit durumlarında ayrı ayrı yapılmalı ve bu iki limit durumlarında bulunan çözümlerin en az birisinin karesi integrallenemez ise A operatörü özde self – adjointtir ve dolayısıyla Horowitz – Marolf kriteri gereğince uzay kuantum mekaniksel olarak tekil değildir, aksi durumda uzay kuantum mekaniksel olarak tekildir.

Öncelikle, metrik fonksiyon, $f(r)=1+r^2-\sqrt{r^4-2r}$ in sırası ile $r\to\infty$ ve $r\to0$ limitlerinde davranışını belirleyelim; $r\to\infty$ durumunda, $f(r)=1+r^2-r^2\sqrt{1+\frac{2}{r^3}}$ olmak üzere, r pozitif ve $r\gg1$ olduğundan ${2}/{r^3}\ll1$ olacağı için $(1+x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$, $|x|<1$ seri açılımından yararlanırsak,

$$f(r)=1+r^2-r^2\left\{1+\frac{1}{2}\frac{2}{r^3}+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{r^3}\right)^2+\cdots\right\}=1+r^2-r^2-\frac{1}{r}-\frac{1}{2r^4}-\cdots$$

elde ederiz ve dolayısıyla

$$f(r) \approx 1 - \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^{-4})$$

bulunur. Sonuçta, $r \to \infty$ limitinde metrik fonksiyonun davranışı $f(r) \approx 1 - \frac{1}{r}$ şeklindedir. $r \to 0$ durumunda, $f(r) = 1 + r^2 - \sqrt{2r}\sqrt{\frac{r^3}{2} + 1}$ olmak üzere, r pozitif ve $r \ll 1$ olduğundan ${r^3}/{2} \ll 1$ olacağı için yine yukarıdaki seri açılımdan yararlanırsak,

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 + r^2 - \sqrt{2r}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{r^3}{2} + \frac{1}{8}\frac{r^6}{4} + \cdots\right\} \\ &= 1 + r^2 - \sqrt{2r} - \frac{\sqrt{2}}{4} r^{7/2} - \frac{\sqrt{2}}{32} r^{13/2} - \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz ve dolayısıyla

$$f(r) \approx 1 - \sqrt{2r} + \mathcal{O}(r^2)$$

bulunur. Sonuçta, $r \to 0$ limitinde metrik fonksiyonun davranışı $f(r) \approx 1 - \sqrt{2r}$ şeklindedir.

Şimdi son bulunan radyal diferansiyel denklemi sırasıyla $r \to \infty$ ve $r \to 0$ limit durumlarında çözüp ve bu limit durumlarında elde edilen çözümlerin karesinin integrallenebilme durumunu inceleyelim;

$r \to \infty$ durumu; bu limitin fiziksel anlamı pozitif r nin çok büyük olmasıdır. Dolayısıyla bu limit durumunda yukarıda bu limit için yaklaşık olarak hesaplanan $f(r)$ metrik fonksiyonu alınarak son bulunan radyal diferansiyel denklem bu limit durumunda çözülecektir. Sonuç olarak metrik fonksiyon son bulunan radyal denkleme yazılırsa,

$$R'' + \frac{2r-1}{r^2-r}R' + \left[\frac{-l(l+1)}{r^2-r} - \frac{\widetilde{m^2}}{\left(1-\frac{1}{r}\right)} \pm \frac{i}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^2}\right]R = 0$$

elde edilir. Pozitif r nin çok büyük değerler limitini göz önüne aldığımız için, bu durumda baskın terimler, $\frac{2r-1}{r^2-r} \approx \frac{2}{r}$, $\frac{-l(l+1)}{r^2-r} \approx 0$, $\frac{\widetilde{m^2}}{\left(1-\frac{1}{r}\right)} \approx \widetilde{m^2}$ ve $\frac{i}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^2} \approx i$ olmak üzere, bulunan son diferansiyel denklem,

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left[-\widetilde{m^2} \pm i\right]R = 0$$

diferansiyel denklemine indirgenir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise, $\kappa = \sqrt{\pm i - \widetilde{m^2}}$ ve C_1 ile C_2 integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$R(r) = \frac{C_1}{r} sin\kappa r + \frac{C_2}{r} cos\kappa r$$

dir.

$r \to 0$ durumu; bu limitin fiziksel anlamı pozitif r nin çok küçük olmasıdır. Dolayısıyla bu limit durumunda yukarıda bu limit için yaklaşık olarak hesaplanan $f(r)$ metrik fonksiyonu alınarak son bulunan radyal diferansiyel denklem bu limit durumunda çözülecektir. Sonuç olarak metrik fonksiyon son bulunan radyal denkleme yazılırsa,

$$R'' + \left[\left(2r - \frac{5r^2}{\sqrt{2r}}\right)\frac{1}{r^2 - r^2\sqrt{2r}}\right]R' + \left[\frac{-l(l+1)}{r^2 - r^2\sqrt{2r}} - \frac{\widetilde{m^2}}{1-\sqrt{2r}} \pm \frac{i}{\left(1-\sqrt{2r}\right)^2}\right]R = 0$$

elde edilir. Pozitif r nin çok küçük değerler limitini göz önüne aldığımız için, bu durumda baskın terimler, $\left(2r - \frac{5r^2}{\sqrt{2r}}\right)\frac{1}{r^2-r^2\sqrt{2r}} \approx \frac{2}{r} + \frac{5}{2r} = \frac{9}{2}r$, $\frac{-l(l+1)}{r^2-r^2\sqrt{2r}} - \frac{\widetilde{m^2}}{1-\sqrt{2r}} \pm \frac{i}{\left(1-\sqrt{2r}\right)^2} \approx \frac{-l(l+1)}{r^2}$ olmak üzere, bulunan son diferansiyel denklem,

$$R'' + \frac{9}{2r}R' - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$$

diferansiyel denklemine indirgenir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise $\gamma_1 = \frac{1}{4}\left(-7 + \sqrt{49 + 16l(l+1)}\right)$, $\gamma_2 = -\frac{1}{4}\left(7 + \sqrt{49 + 16l(l+1)}\right)$ ve C_3 ile C_4 integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$R(r) = C_3 r^{\gamma_1} + C_4 r^{\gamma_2}$$

dir.

Şimdi, sırasıyla $r \to 0$ ve $r \to \infty$ limit durumlarında kare normu hesaplayarak çözümlerin Hilbert uzayına aidiyetlik durumunu inceleyelim.

$r \to 0$ durumunda r koordinatı hali hazırda çok küçük değerler limitinde olduğu için c çok küçük bir sayı olmak üzere kare norm,

$$\|R\|^2 \sim \int_0^c \frac{r^2|R|^2}{\left(1-\sqrt{2r}\right)} dr$$

dir ve bu limit için yukarıda bulduğumuz çözümde $l = 0$ alınırsa, $R(r) = C_3 + C_4 \big/ r^{7/2}$ olur ve bu durumda

$$\|R\|^2 \sim -32C_4^2 ln\left|2\sqrt{r}-\sqrt{2}\right| - {}^{16C_4^2\sqrt{2}}\!\Big/_{\sqrt{r}} + 16C_4^2 ln|r| - {}^{2C_4^2}\!\big/_{r^2} -$$

$$ {}^{2C_4^2\sqrt{2}}\!\Big/_{7r^{7/2}} - {}^{2C_4^2}\!\big/_{3r^3} - {}^{C_4^2}\!\big/_{r^4} - {}^{8C_4^2}\!\big/_{r} - {}^{8C_4^2\sqrt{2}}\!\Big/_{r^{3/2}} - {}^{4C_4^2\sqrt{2}}\!\Big/_{r^{5/2}} -$$

$$4C_3C_4\sqrt{2}ln\left|2\sqrt{r}-\sqrt{2}\right| - {}^{4C_3C_4}\!\Big/_{\sqrt{r}} + 2C_3C_4 ln|r| - {}^{C_3^2\sqrt{2}r^{5/2}}\!\Big/_{5} - {}^{C_3^2r^2}\!\big/_{4} -$$

$$ {}^{C_3^2\sqrt{2}r^{3/2}}\!\Big/_{6} - {}^{C_3^2 r}\!\big/_{4} - {}^{C_3^2\sqrt{2}\sqrt{r}}\!\Big/_{4} - {}^{C_3^2 ln\left|2\sqrt{r}-\sqrt{2}\right|}\!\Big/_{4} \;\Big|_0^\infty \rightarrow \infty$$

bulunur dolayısıyla çözüm Hilbert uzayına ait değildir. Ayrıca, $C_3 = 0$ ve $C_4 \neq 0$ durumunda da $\|R\|^2 \rightarrow \infty$ olur. Dolayısıyla bu limitte bulunan çözümün karesi integrallenemez yani Hilbert uzayına ait değildir.

$r \rightarrow \infty$ durumunda r koordinatı hali hazırda çok büyük değerler limitinde olduğu için c çok büyük bir sayı olmak üzere kare norm,

$$\|R\|^2 \sim \int_c^\infty \frac{r^3|R|^2}{(r-1)} dr$$

dir ve yukarıda bu limit için bulduğumuz çözümde, $C_1 = C_2 = 1$ seçilip integralde yerine yazılırsa,

$$\|R\|^2 \sim \int_c^\infty \left(\frac{r}{r-1}\right)(1 + 2sin\kappa r\, cos\kappa r)dr = \int_c^\infty \frac{rdr}{r-1} + \int_c^\infty \left(\frac{rsin2\kappa r}{r-1}\right) dr$$

elde edilir ve ilk integral

$$\int_c^\infty \frac{rdr}{r-1} = (r - 1 + ln|r-1|)\,\Big|_c^\infty \rightarrow \infty\,.$$

İkinci genelleştirilmiş integralin karakterini anlamak için öncelikle $sin2\kappa r = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n {}^{(2\kappa r)^{2n+1}}\!\Big/_{(2n+1)!}$ seri açılımını ikinci integralde yerine yazarsak,

$$\int_c^\infty \left(\frac{r}{r-1}\right)\left\{\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2\kappa r)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} dr = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2\kappa)^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_c^\infty \frac{r^{2n+2}}{r-1} dr$$

elde ederiz. $t = r - 1$ ve $a = 2n + 2$ olmak üzere yukarıdaki son integral

$$\int_c^\infty \frac{(t+1)^a}{t} dt$$

integrali gibi yazılırsa ve pozitif r nin çok büyük değerler limiti bölgesinde analiz yapıldığını göz önünde bulundurursak t de çok büyük değerler limitinde olmaktadır. Sonuç olarak, $0 \leq {t+1}/{t} \leq {(t+1)^a}/{t}$ eşitsizliği sağlanmaktadır ve

$$\int_c^\infty \left(\frac{t+1}{t}\right) dt = (t + ln|t|)\,|_c^\infty \;\to \infty$$

olduğundan karşılaştırma testi gereğince $\int_c^\infty \frac{(t+1)^a}{t} dt \to \infty$ ayrıca integralin önünde yer alan seri,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(2\kappa)^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| \cdot \left|\frac{(2n+1)!}{(-1)^n(2\kappa)^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|2\kappa|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

olduğundan d'Alembert oran testi gereğince mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır. Sonuç olarak iki integralde bu limitte ıraksamaktadır yani $\|R\|^2 \to \infty$ dir. Bu limitte bulunan çözümün karesi integrallenememektedir dolayısıyla Hilbert uzayına ait değildir.

Sonuç alarak, $n_+ = n_- = 0$ dır. Dolayısıyla sonuç 3.8 gereğince, A operatörü özde self – adjointtir. Bu bağlamda Horowitz – Marolf kriteri gereğince uzay kuantum mekaniksel olarak tekil değildir.

5.3.2 Metot II (Weyl Limit Noktası – Limit Çemberi Kriteri):

A operatörünün özde self – adjointliğini, Weyl limit noktası – limit çemberi kriteri, teorem 3.22 ile analiz edebilmek için $(*)$ ile temsil ettiğimiz ilk diferansiyel denklemi $r \to \infty$ ile $r \to 0$ durumlarında, $A = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ şeklinde bir operatöre dönüştürerek $r \to \infty$ için teorem 3.24 ü ve $r \to 0$ için teorem 3.26 i kullanarak A operatörünün özde self – adjointliğini belirleyelim. İlk olarak $(*)$ diferansiyel denklemini $\widetilde{\omega}$ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\psi = \frac{1}{r} e^{i\widetilde{\omega}t} R(r) Y(\theta, \varphi)$$

şeklinde değişkenlerine ayırırsak,

$$\begin{aligned}
f^2(r)\left[\frac{R''(r)}{r} - \frac{2R'(r)}{r^2} + \frac{2R(r)}{r^3}\right] Y(\theta,\varphi) + \frac{f(r)}{r^2}\frac{R(r)}{r}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2} \\
+ \frac{f(r)}{r^2 sin^2\theta}\frac{R(r)}{r}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial^2\varphi} + \frac{f(r)cos\theta}{r^2}\frac{R(r)}{r}\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \\
+ f(r)\left(\frac{2f(r)}{r} + f'(r)\right)\left(\frac{R'(r)}{r} - \frac{R(r)}{r^2}\right) Y(\theta,\varphi) \\
- f(r)\widetilde{m^2}\frac{1}{r} R(r) Y(\theta,\varphi) - \frac{1}{r}\widetilde{\omega^2} R(r) Y(\theta,\varphi) = 0
\end{aligned}$$

$(')$ notasyonu r ye göre türevi göstermek üzere, diferansiyel denklemi elde edilir. Analiz yine r koordinatı üzerinden yapılacağından, denklemin her iki tarafı $r^3/_{f(r)R(r)Y(\theta,\varphi)}$ ile çarpılıp ayrışım sabiti $2l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$ alınırsa ve ayrıştırılan diferansiyel denklem düzenlenirse,

$$R''(r) + \frac{f'(r)}{f(r)}R'(r) + \frac{1}{f(r)}\left[\frac{f'(r)}{r} - \frac{2l(l+1)}{r^2} - \widetilde{m^2} - \frac{\widetilde{\omega^2}}{f(r)}\right] = 0$$

radyal diferansiyel denklemi elde edilir.

İlk olarak $r \to \infty$ durumunu inceleyelim. Yapacağımız bu analizde $A = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ şeklinde bir operatör formu aradığımızdan son bulduğumuz radyal diferansiyel denklemde $dr_* = dr/_{f(r)}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu limit durumu için başta hesapladığımız metrik fonksiyonu ele alıp dönüşümde yerine yazarsak,

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)} \;\Rightarrow\; r_* = \int_0^r \frac{dr}{1-\frac{1}{r}} \;\Rightarrow\; r_* = r + ln|r-1|$$

şeklinde iki koordinat arasındaki bağıntıyı buluruz ve bu dönüşüm altında radyal diferansiyel denklem, yukarıda tanımlanan dönüşümün zincir kuralı yardımıyla türetilip, $d^2/_{dr_*^2} = f^2(r)\, d^2/_{dr^2} + f(r)f(r)'\, d/_{dr}$ şeklinde bulunan ifade ile düzenlenirse,

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + \frac{(r-1)}{r}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{2l(l+1)}{r^2} - \widetilde{m^2} - \frac{r\widetilde{\omega^2}}{r-1}\right]R = 0$$

diferansiyel denklemine indirgenir. Bu diferansiyel denklem r ve r_* olmak üzere iki değişken içermekte ve analiz bir değişken üzerinden yapılabileceği için bu denklem tek değişkene indirilmelidir. Bunun için $\ln(x) \leq x-1\,, x > 0$ standart logaritma eşitsizliğinden, $\ln(r-1) \leq r-2\,, r > 1$ eşitsizliğini elde edersek $r > r-2 \geq \ln(r-1)$ eşitsizliğini buluruz ve pozitif r nin çok büyük değerler limiti durumunda yani $r \gg 1$ da $r_* = r + ln|r-1|$ ifadesi bu bilgilerin sonucunda $r_* \cong r$ durumuna indirgenir ve dolayısıyla $d^2R/_{dr_*^2} \to d^2R/_{dr^2}$ dir. Sonuç olarak,

$$-\frac{d^2R}{dr^2} + \left[\widetilde{\omega^2} + F(r)\right]R = 0$$

$$F(r) = \frac{2l(l+1)(r-1)}{r^3} + \frac{(r-1)\widetilde{m^2}}{r} - \frac{(r-1)}{r^4}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. $V(r) = \widetilde{\omega^2} + F(r)$

$$V(r) \geq -\left\{\frac{1 + 2l(l + 1)}{r^3} + \frac{\widetilde{m^2}}{r}\right\}$$

yazılacağından teorem 3.24 ün (i) yargısındaki pozitif diferansiyellenebilen $M(r)$ fonksiyonu,

$$M(r) = \frac{1 + 2l(l + 1)}{r^3} + \frac{\widetilde{m^2}}{r}$$

şeklinde belirlenir. Teorem 3.24 ün (ii) yargısı, $r \geq 1$ için,

$$M(r) = \frac{1 + 2l(l + 1)}{r^3} + \frac{\widetilde{m^2}}{r} \leq \frac{1 + 2l(l + 1) + \widetilde{m^2}}{r} = S(r)$$

$$(S(r))^{-1/2} \leq (M(r))^{-1/2}$$

olmak üzere,

$$\int_1^\infty (S(r))^{-1/2} dr = \frac{2}{3}\left[1 + 2l(l + 1) + \widetilde{m^2}\right] r^{3/2} \Big|_1^\infty = \infty$$

olduğundan karşılaştırma testi gereğince,

$$\int_1^\infty (M(r))^{-1/2} dr = \infty$$

olur ve dolayısıyla sağlanır. Son olarak teorem 3.24 ün (iii) yargısı,

$$(M(r))' \Big/ (M(r))^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1 + 2l(l + 1)}{r} + \widetilde{m^2} r}}$$

∞ civarında sınırlı olduğu için sağlanır. Dolayısıyla teorem 3.24 gereğince A operatörü özde self – adjointtir.

Şimdi $r \to 0$ durumunu inceleyelim. Bu durum içinde bir önceki limit durumunda yapılan benzer dönüşümü, bu limit durumunun $f(r)$ metrik fonksiyonu ile yaparsak, $r_* = 1 - \sqrt{2r} - ln\left|1 - \sqrt{2r}\right|$ şeklindeki iki koordinat arasındaki bağıntıyı buluruz ve bu dönüşüm ile radyal diferansiyel denklem bir önceki durum ile benzer işlemler sonucunda,

$$\frac{d^2 R}{dr_*^2} + \left[1 - \sqrt{2r}\right]\left[-\frac{1}{r\sqrt{2r}} - \frac{2l(l + 1)}{r^2} - \widetilde{m^2} - \frac{\widetilde{\omega^2}}{1 - \sqrt{2r}}\right] R = 0$$

diferansiyel denklemine indirgenir. Bu diferansiyel denklem de r ve r_* olmak üzere iki değişken içermektedir ve analiz bir değişken üzerinden yapılabileceği için bu denklem tek değişkene indirilmelidir. Bunun için, $\ln\left(1 - \sqrt{2r}\right) =$

$-\sqrt{2r} - \left(\sqrt{2r}\right)^2 - \left(\sqrt{2r}\right)^3 - \cdots$ seri açılımını kullanırsak ve pozitif r nin $r \ll 1$ olduğu bu limit durumunda $\ln\left(1-\sqrt{2r}\right) \approx -\sqrt{2r} - \left(\sqrt{2r}\right)^2$ alabiliriz ve dolayısıyla, $r_* = 1 - \sqrt{2r} - ln\left(1-\sqrt{2r}\right) \approx 1 - \sqrt{2r} + \sqrt{2r} + 2r = 1 + 2r$ olur. Sonuç olarak, ${d^2R}/{dr_*^2} \to 2\,{d^2R}/{dr^2}$ olur ve

$$-\frac{d^2R}{dr^2} + \left[\widetilde{\omega^2} + F(r)\right]R = 0$$

$$F(r) = \frac{l(l+1)\left(1-\sqrt{2r}\right)}{r^2} + \frac{\left(1-\sqrt{2r}\right)\widetilde{m^2}}{2} + \frac{\left(1-\sqrt{2r}\right)}{2r\sqrt{2r}}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. $V(r) = \widetilde{\omega^2} + F(r)$ olmak üzere r nin $r \ll 1$ olduğu bu limit durumunda, ${l(l+1)}/{r^2}$ terimi en baskın terim olduğundan,

$$V(r) \sim \frac{l(l+1)}{r^2}$$

olur ve teorem 3.26 gereğince $l(l+1) \geq {3}/{4}$ için A operatörü özde self – adjointtir ve dolayısıyla Horowitz – Marolf kriteri gereğince uzay kuantum mekaniksel olarak tekil değildir.

Sonuç olarak, iki farklı yöntemle elde edilen A operatörü, özde self – adjoint olduğu için HL teorisi içinde yer alan KS küresel simetrik karadelik çözümündeki çıplak tekillik Horowitz – Marolf kriteri gereğince bu iki farklı yöntemle de kuantum mekaniksel olarak tekil değildir.

5.4 Dirac Alanları:

Fizikte spin – $1/2$ skaler kütleli parçacığın zamanda evrimini veren Dirac denklemi, kuantum tekillik analizi kriteri olan Horowitz – Marolf kriterinin dayandığı ${\partial^2\psi}/{\partial t^2} = -A\psi$ diferansiyel denklem formuna Newman – Penrose formalizmi kullanılarak indirilir. Bu formalizm ile Chandrasekhar tarafından

$$(D + \epsilon - \rho)F_1 + \left(\bar{\delta} + \pi - \alpha\right)F_2 = 0,$$

$$(\Delta + \mu - \gamma)F_1 + (\delta + \beta - \tau)F_2 = 0,$$

$$(D + \bar{\epsilon} - \bar{\rho})G_1 - (\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha})G_2 = 0,$$

$$(\Delta + \bar{\mu} - \bar{\gamma})G_1 - \left(\bar{\delta} + \bar{\beta} - \bar{\tau}\right)G_2 = 0,$$

F_1, F_2, G_1 ve G_2 dalga fonksiyonun bileşenlerini, $\epsilon, \rho, \pi, \alpha, \mu, \gamma, \beta$ ve τ spin katsayılarını , “ – “ notasyonu ile bunların kompleks eşleniklerini göstermek üzere Dirac – Chandrasekhar (CD) denklemleri olarak verilmiştir [27]. Bu uzay – zaman için başta verilen Newman – Penrose formalizmi ile hesaplanan sıfırdan farklı spin katsayılarını kullanarak CD denklemi,

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2}+k^2\right)Z_\pm = V_\pm Z_\pm\,,$$

$$V_\pm = \left[\frac{f(r)\lambda^2}{r^2} \pm \lambda\frac{d}{dr_*}\left(\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\right)\right].$$

diferansiyel denklemine indirilmiştir [20]. Burada, $Z_\pm = R_1 \pm R_2$ CD denkleminin iki çözümünün kombinasyonu, k ile λ ayrışım sabitleri, $f(r)$ metrik fonksiyon ve $d/dr_* = f(r)\,d/dr$ dir. Dolaysısıyla Horowitz – Marolf kriteri ile analiz edilecek A operatörü,

$$A = -\frac{d^2}{dr_*^2} + V_\pm$$

şeklinde belirlenmiş olur.

5.4.1 Metot I (Özde Self – Adjointliğin Temel Kriteri):

A operatörünün özde self – adjointliğini, özde self – adjointliğin temel kriteri, sonuç 3.8 ile analiz etmek için son bulunan operatörde r_* değişkeninden r değişkenine geçilirse, özde self – adjointliğine bakılacak olan A operatörü aşağıdaki şekilde

$$A = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{f(r)'}{f(r)}\frac{d}{dr} - \frac{1}{f(r)^2}\left[\frac{f(r)\lambda^2}{r^2} \pm \lambda f(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\right)\right]$$

bulunur. İlk olarak A operatöründen, $\psi \in D(A^*)$ olmak üzere $(A^* \pm i)\psi = 0$ denklemini yazalım. Dolayısıyla,

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{f(r)'}{f(r)}\frac{d}{dr} - \frac{1}{f(r)^2}\left[\frac{f(r)\lambda^2}{r^2} \pm \lambda f(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\right)\right] \pm i\right\}\psi(r) = 0$$

elde edilir. Bulunan bu son diferansiyel denklemde direkt analitik olarak çözülemeyeceği için $f(r)$ metrik fonksiyonun $r \to \infty$ ve $r \to 0$ limit durumlarında ele alınarak çözülecektir.

İlk olarak $r \to 0$ limit durumunu inceleyelim. Bu limit durumunda başta hesapladığımız $f(r)$ fonksiyonu kullanırsak, $(')$ notasyonu r ye göre türevi göstermek üzere,

$$\psi(r)'' - \frac{1}{\sqrt{2r}\left(1-\sqrt{2r}\right)}\psi(r)' + \left[\frac{-\lambda^2}{r^2\left(1-\sqrt{2r}\right)} \pm \lambda\left(\frac{3}{2\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{4r}\right) \pm i\right]\psi(r) = 0$$

diferansiyel denklemini buluruz. Pozitif r nin çok küçük değerler limitini göz önüne aldığımız için, bu durumda baskın terimler, $\frac{1}{\sqrt{2r}(1-\sqrt{2r})} \approx -\frac{1}{2r}$ ve $\frac{-\lambda^2}{r^2(1-\sqrt{2r})} \pm \lambda\left(\frac{3}{2\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{4r}\right) \approx \lambda^2 / \sqrt{2}r^{5/2}$ olmak üzere, bulunan son diferansiyel denklem,

$$\psi(r)'' + \frac{1}{2r}\psi(r)' + \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}r^{5/2}}\psi(r) = 0$$

denklemine indirgenir ve bu denklemin çözümü ise $\sigma = \lambda^2/\sqrt{2}$ ve C_5 ile C_6 integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$\psi(r) = C_5 r^{1/4} J_1\left(\frac{4\sqrt{\sigma}}{r^{1/4}}\right) + C_6 r^{1/4} N_1\left(\frac{4\sqrt{\sigma}}{r^{1/4}}\right)$$

olarak bulunur ve burada $J_{\nu=1}$ Bessel ile $N_{\nu=1}$ Neumann fonksiyonlarıdır. Yukarıda tanımı verilen kare norm bu çözüm için $\|\psi\|^2 < \infty$ olduğundan $r \to 0$ durumunda çözümün karesi integrallenebilirdir, dolayısıyla çözüm Hilbert uzayına aittir.

Şimdi $r \to \infty$ durumunu inceleyelim. Bu limit durumunda başta hesapladığımız $f(r)$ fonksiyonu kullanırsak,

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r(r-1)}\frac{d}{dr} - \frac{\lambda r}{(r-1)}\left[\frac{\lambda}{r^2} \pm \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{r}}}{r}\right)\right] \pm i\right\}\psi(r) = 0$$

diferansiyel denklemini buluruz. Pozitif r nin çok büyük değerler limitini göz önüne aldığımız için, bu durumda $\sqrt{r - 1/r^3} \to 0$, $1/r(r-1) \to 0$ ve $\lambda/r^2 \to 0$ olmak üzere, bulunan son diferansiyel denklem, $(')$ notasyonu r ye göre türevi göstermek üzere,

$$\psi(r)'' \pm i\psi(r) = 0$$

diferansiyel denklemine indirgenir ve bu denklemin çözümü ise $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(i \pm 1)$ ve C_7 ile C_8 integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$\psi(r) = C_7 sin\eta r + C_8 cos\eta r$$

olarak bulunur. Yukarıda tanımı verilen kare norm bu çözüm için $\|\psi\|^2 \to \infty$ olduğundan $r \to \infty$ durumunda çözümün karesi integrallenemezdir dolayısıyla çözüm Hilbert uzayına ait değildir.

Sonuç alarak, $n_+ = n_- = 0$ dır. Dolayısıyla sonuç 3.8 gereğince, A operatörü özde self – adjointtir. Bu bağlamda Horowitz – Marolf kriteri gereğince uzay kuantum mekaniksel olarak tekil değildir.

5.4.2 Metot II (Weyl Limit Noktası – Limit Çemberi Kriteri):

A operatörünün özde self – adjointliğinin, Weyl limit noktası – limit çemberi kriteri, teorem 3.22 ile analizi, yukarıda verilen CD denklemlerinden türetilen $A = -\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r)$ operatörünün, $r \to \infty$ için sonuç 3.25 ü ve $r \to 0$ için teorem 3.26 i kullanarak yapılacaktır.

İlk olarak $r \to \infty$ durumunu inceleyelim. Bu limit durumunda yukarıda $r_* \cong r$ ve limit fonksiyonu $f(r)$ belirlenmiş idi. Dolayısıyla bu limit durumunda,

$$V_\pm = \frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\lambda^2}{r^3} \pm \frac{3\lambda}{2\sqrt{r^6 - r^5}} \mp \frac{\lambda}{\sqrt{r^4 - r^3}}$$

olarak bulunur ve pozitif r nin çok büyük olduğu bu limit durumunda, baskın terimler, $\frac{3\lambda}{2\sqrt{r^6-r^5}} \approx \frac{3\lambda}{2r^3} \approx 0$, $\frac{\lambda}{\sqrt{r^4-r^3}} \approx \frac{\lambda}{r^2}$ ve $\frac{\lambda^2}{r^3} \approx 0$ olmak üzere, yukarıdaki fonksiyon;

$$V_\pm \approx \frac{\lambda^2}{r^2} \mp \frac{\lambda}{r^2}$$

fonksiyonunu indirgenir. Dolayısıyla, sonuç 3.25 ün (i) yargısı,

$$\int_1^\infty \frac{dr}{\sqrt{K - V_\pm}} = \int_1^\infty \frac{dr}{\sqrt{K - \frac{(\lambda^2 \mp \lambda)}{r^2}}} = \frac{1}{K}\sqrt{Kr^2 - (\lambda^2 \mp \lambda)}\;\Big|_1^\infty = \infty$$

olduğundan sağlanır. Ayrıca sonuç 3.25 ün (ii) yargısı,

$$V_\pm(r)'\left|V_\pm(r)\right|^{-3/2} = -2(\lambda^2 \mp \lambda)|(\lambda^2 \mp \lambda)|^{-3/2}$$

olduğundan sağlanır ve dolayısıyla sonuç 3.25 gereğince A operatörü özde self – adjointtir.

Şimdi $r \to 0$ durumunu inceleyelim. Bu limit durumunda yukarıda $r_* \cong 1 + 2r$ ve limit fonksiyonu $f(r)$ belirlenmiş idi. Dolayısıyla bu limit durumunda,

$$V_\pm = \frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2}\lambda^2}{r^{3/2}} \pm \frac{\lambda}{r^{3/2}\sqrt{8f(r)}} \mp \frac{\lambda f(r)}{r^2\sqrt{f(r)}}$$

olarak bulunur ve pozitif r nin çok küçük değerler limitini düşündüğümüzden $r \ll 1$, $(1+r)^n \approx 1 + nx$ yaklaşıklığını da göz önüne alırsak, yukarıdaki fonksiyonu,

$$V_{\pm} \approx \frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2}\lambda^2}{r^{3/2}} \mp \frac{\lambda}{\sqrt{8}r^{3/2}} \mp \frac{\lambda}{4r} \mp \frac{\lambda}{r^2} \mp \frac{\lambda}{\sqrt{2}r^{3/2}} \approx \frac{\lambda^2}{r^2} \mp \frac{\lambda}{r^2}$$

fonksiyonuna indirgeriz. teorem 3.26 gereğince $(\lambda^2 \mp \lambda) \geq 3/4$ için A operatörü özde self – adjointtir ve dolayısıyla Horowitz – Marolf kriteri gereğince uzay kuantum mekaniksel olarak tekil değildir.

Sonuç olarak, iki farklı yöntemle elde edilen A operatörü, özde self – adjoint olduğu için HL teorisi içinde yer alan KS küresel simetrik karadelik çözümündeki çıplak tekillik Horowitz – Marolf kriteri gereğince kuantum mekaniksel olarak tekil değildir.

6. SONUÇ

Bu tezde, alternatif gravitasyon teorilerinden olan Horava – Lifshitz gravitasyon alan teorisinin özel bir çözümü olan Kehagias – Sfetsos küresel simetrik karadelik çözümünün belli parametrelerinde ortaya çıkan çıplak tekillikler, kuantum mekaniksel olarak araştırılmıştır.

İlk olarak kuantum tekillik analizinin matematiksel altyapısı derinliğiyle araştırılmış ve bu analizin yapılmasını olanaklı kılan tüm teoremler ispatlanarak gösterilmiştir. Bunu yaparken, topolojik uzay yapılarından başlayarak Hilbert uzayına kadar gelen süreçteki temel teoremler, tanım ve ispatlarıyla gösterilmiştir.

Tezin bir sonraki aşamasında, kuantum tekillik kavramının ne olduğu ve klasik tekillik analizinden farklılığı ve gerekliliğinin önemi gösterilmiştir. Burada esas olan, uzay – zaman tekilliklerinin oluşturduğu ölçeğin Planck ölçeği mertebesinde olmasıdır. Bu ölçekteki analizlerde klasik fizik yöntemlerinin kullanılması olayın fiziğini doğru betimlemektedir. Bunun yerine, kuantum alan teorisi tercih edilmelidir. Ancak, tutarlı bir kuantum gravitasyon alan teorisi henüz mevcut değildir. Bu nedenle, alternatif yöntemler kullanılabilmektedir. Bunun gereği olarak bu tezde Wald tarafından ortaya atılan ve Horawitz – Marolf tarafından geliştirilen bir kriter ele alınmış ve bu kriterin matematiksel dayanakları ispatlanarak gösterilmiştir. Bu kriterin en belirgin özelliği klasik fizikte tekillik analizinde kullanılan parçacık sondası (probe) yerine kuantum alan sondasının kullanılmasıdır.

Bu gerçeğin ışığında, kuantum olarak bosonik ve fermiyonik kuantum alanlar ile çıplak tekillik incelenmiştir.

Bu inceleme, Horowitz – Marolf kriterinin bir gereği olan uzaysal, lineer – simetrik diferansiyel operatörün özde self – adjointliğinin iki farklı matematiksel teorem ile ki bu teoremler, özde self – adjointliğin temel kriteri ve Weyl limit noktası – limit çemberi kriteri, kullanılarak yapılmıştır. Spin – 0 (bosonik) alanları betimleyen Klein – Gordon denkleminden elde edilen uzaysal operatörün özde self – adjointliği iki farklı yöntemle incelenmiş ve özde self – adjoint olduğu ispatlanmıştır. Aynı şekilde spin – $1/2$ (fermiyonik) alanları betimleyen Dirac denkleminden elde edilen uzaysal operatörün özde self – adjoint olduğu ispatlanmıştır.

Bütün bu özde self – adjointlik analizinin fiziksel anlamı, çıplak tekilliğin kuantum alanlar kullanıldığı zaman, alanların uzaydaki evriminin mümkün olduğunu dolayısıyla klasik olarak tekil olan bu uzay – zaman yapısının kuantum mekaniksel olarak tekil olmadığıdır. Yapılan bu çalışma, Amerikan fizik derneğinin önemli bir dergisi olan Journal of Mathematical Physics dergisinin Nisan 2018 sayısında (59, 042503, 2018) yayımlanmıştır [22].

7. KAYNAKÇA

[1] A.N. Kolmagorov and S.V. Fomin, “ Introductory Real Analysis ”, Dover Publications, Inc. , New York, 0-486-61226-0, (1975)

[2] A. Ishibashi and A. Hosoya, “ Who’s Afraid of Naked Singularities “, Phys. Rev. D 60,104028, (1999)

[3] A. Kehagias and K. Sfetsos, " The black hole and FRW geometries of non-relativistic gravity", Phys. Lett. B 678, 123-126, (2009)

[4] A.P. Robertson and W. Robertson, “ Topological Vector Spaces “, Cambridge University Press, London, No:53, (1964)

[5] D. A. Konkowski. and T. M. Helliwell, " Understanding singularities - classical and quantum ", Int. Jour. Mod. Phys. A, 31, 1641007, (2016)

[6] E.A. Coddington and N. Levinson, “ Theory of Ordinary Differential Equations “ , Mc Graw – Hill, New York, 0-07-099256-8, (1972)

[7] E. Kreyszig, “ Introductory Functional Analysis with Applications “, John Wiley & Sons. Inc. , Canada, 0-471-50731-8, (1978)

[8] E. Bayram, “ Spektral Teori II “, Açık ders: https://acikders.ankara.edu.tr/course /view.php?id=874, Ankara Üniversitesi, (2018)

[9] İ. Yusubov ve M. Panahov, “ Lineer Cebir ve Sonlu Boyutlu Lineer Operatörler Teorisinin Elemanları “, Sakarya Yayıncılık, Sakarya, 975-8644-37-8, (2006)

[10] G.T. Horowitz and D. Marolf, “ Quantum Probes of Spacetime Singularities “, Phys. Rev. D 52, 5670-5675, (1995)

[11] G. Bonneau, J. Faraut and G. Valent, “ Self – Adjoint Extensions of Operators and The Teaching of Quantum Mechanics”, Am. J. Phys. , 69,322, (2001)

[12] G. F. R. Ellis, B. G. Schmidt, “ Classification of singular space-times “, GRG 10 (1979) 989–997.

[13] H. Çakallı, “ Genel Topolojiye Giriş”, İ.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul, 975-404-465-1, (1997)

[14] J. P. M. Pitelli and P. S. Letelier, " Quantum singularities in static spacetimes", Int. Jour. of Mod. Phys. D, 20, 729-743,(2011)

[15] L. Iorio and M. L. Ruggiero, “Phenomenological constraints on the Kehagias-Sfetsos solution in the Hoˇrava-Lifshitz gravity from solar system orbital motions,” Int. J. Mod. Phys. A 25, 5399–5408 (2010)

[16] L. Iorio and M. L. Ruggiero, “Horava-Lifshitz gravity: Tighter constraints for the Kehagias-Sfetsos solution from new solar system data,” Int. J. Mod. Phys. D 20, 1079–1093 (2011)

[17] M. Liu, J. Lu, B. Yu, and J. Lu, “Solar system constraints on asymptotically flat IR modified Hoˇrava gravity through light deflection,” Gen. Relativ. Gravitation 43, 1401–1415 (2011)

[18] M.H. Stone, “ On One – Parameter Unitary Groups in Hilbert Space “, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 33, No. 3, pp. 643-648, (1932)

[19] M. Reed and B. Simon, “ Methods of Modern Mathematical Physics II : Fourier Analysis, Self – Adjointness “, Academic Press, Inc. , New York, 0-12-585002-6(v.2), (1975)

[20] O. Gurtug and T. Tahamtan, " Quantum singularities in a model of f(R) gravity ",Eur. Phys. J. C 72, 2091 (2012)

[21] O. Gurtug, M. Halilsoy and S. Habib Mazharimousavi, " Quantum probes of timelike naked singularities in the weak field regime of f(R) global monopole spacetime ", J. High Energy Phys. 01, 178, (2014)

[22] O. Gurtug and M. Mangut, " Quantum Probe of Ho_rava-Lifshitz Gravity ", Journal of Mathematical Physics 59, 042503, (2018).

[23] Ö. Çakar, “ Fonksiyonel Analize Giriş I “, A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, No:3, (1996)

[24] P. Horava, " Quantum gravity at a Lifshitz point ", Phys. Rev. D 79, 084008 (2009)

[25] R. Penrose, “ Gravitational Collapse and Space-Time Singularities “ Phys. Rev. Lett. 14, 57 (1965)

[26] R. M. Wald, "Dynamics in nonglobally hyperbolic, static sapce-times", J. Math. Phys. (N.Y.) 21, 2082 (1980)

[27] S. Chandrasekhar, “ The Mathematical Theory of Black Holes “, Oxford University Press, Inc. , New York, 0-19-851291-0, (1992)

[28] S. Möller, “ Stone’s Theorem and Applications “, Bachelor’s Thesis, Lunds Universtitet, Lund, Sweden, (2010)

[29] S. Attal, “ Operator and Specral Theory “, Online course: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Op_and_Spect.pdf., Institut Camille Jordan, University of Lyon, (2013)

[30] V. Gelfreich, “ Functional Analysis I “, Online course: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Op_and_Spect.pdf., University of Warwick, (2010)

[31] W. Rudin, “ Principles of Mathematical Analysis “, Mc Graw – Hill, New York, 0-07-054235-X, (1976)