HELMHOLTZ DALGA DENKLEMİNİN ANALİZİ:

MAXWELL DENKLEMLERİ VE SİLİNDİRİK ELEKTROMANYETİK DALGALAR

İbrahim Bacanak

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özay Gürtuğ

İstanbul

T.C. Maltepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Ağustos, 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İbrahim BACANAK'ın "Helmholtz Dalga Denkleminin Analizi:Maxwell Denklemleri ve Silindirik Elektromanyetik Dalgalar" başlıklı tezi 15.08.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Maltepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans/Doktora tezi **oy birliğiyle / oy çokluğuyla** olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı. Adı ve Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Özay GÜRTUĞ	....
Üye	: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI	....
Üye	: Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ	....

Prof.Dr. İlter BÜYÜKDIĞAN

Enstitü Müdürü

	ŞEKİL ONAY SAYFASI	Doküman No	FR-105
		İlk Yayın Tarihi	20.12.2017
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	
		Sayfa	1/2

Revizyon Takip Tablosu

REVİZYON NO	TARİH	AÇIKLAMA
00	20.12.2017	İlk yayın.

ŞEKİL ONAY SAYFASI

11/09/2018

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE,
Aşağıda bilgileri bulunan lisansüstü öğrencinin tezi şekil yönünden tarafımca incelenmiş ve Enstitüye teslim edilmesi uygun bulunmuştur. Anabilim Dalı Başkanı Adı-Soyadı Prof. Dr. Hüseyin Çakallı İmza

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI SOYADI	İbrahim Bacanak
ÖĞRENCİ NUMARASI	161409103
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAMI	(✓) YÜKSEK LİSANS ( ) DOKTORA ( ) SANATTA YETERLİK
DANIŞMANI	Prof. Dr. Özay Gürtuğ
TEZ BAŞLIĞI	Helmholtz Dalga Denkleminin Analizi: Maxwell Denklemleri ve Silindirik Elektromanyetik Dalgalar
SAVUNMA TARİHİ	15/08/2018
e-posta	m-ibrahim-s@hotmail.com

İç Kapak	☑ Var ☐ Yok
Jüri Onay Sayfası	☑ Var ☐ Yok
Etik İlke ve Kurallara Uyum Beyanı	☑ Var ☐ Yok
İntihal Raporu	☑ Var ☐ Yok
Teşekkür Sayfası	☑ Var ☐ Yok
Öz (Başlık-Öz-Anahtar Sözcükler)	☑ Var ☐ Yok
Abstract (Title-Abstract-Key Words)	☑ Var ☐ Yok
İçindekiler	☑ Var ☐ Yok
Çizelgeler Listesi	☐ Var ☑ Yok
Şekiller Listesi (varsa)	☐ Şekil yok ☑ Uygundur ☐ Uygun Değildir
Kısaltmalar Listesi	☑ Var ☐ Yok
Tablolar Listesi (varsa)	☑ Tablo yok ☐ Uygundur ☐ Uygun Değildir

Hazırlayan	Kalite Koordinatörü	Kurumsal Yetkili
İlgili Birim	Dr. Öğr. Üyesi Şafak GÜNDÜZ	Prof. Dr. Belma AKŞİT

	ŞEKİL ONAY SAYFASI	Doküman No	FR-105
		İlk Yayın Tarihi	20.12.2017
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	
		Sayfa	2/2

Ekler Listesi (varsa)	☑ Ek yok ☐ Uygundur ☐ Uygun Değildir
Özgeçmiş	☑ Var ☐ Yok
Sayfa Genişliği	☑ Uygundur ☐ Uygun Değildir
Yazı Tipi	☑ Uygundur ☐ Uygun Değildir
Referans Kullanımı	☑ Uygundur ☐ Uygun Değildir
Kaynakça Yazımı	☑ Uygundur ☐ Uygun Değildir
Ekler (varsa)	☐ Ek yok ☑ Uygundur ☐ Uygun Değildir

Hazırlayan	Kalite Koordinatörü	Kurumsal Yetkili
İlgili Birim	Dr. Öğr. Üyesi Şafak GÜNDÜZ	Prof. Dr. Belma AKŞİT

ETİK İLKE VE KURALLARINA UYUM BEYANI

Bu tezin bana ait özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; çalışmanın Maltepe Üniversitesinde kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" ile tarandığını ve öngörülen standartları karşıladığını beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

15/08/2018

İbrahim Bacanak

Matematik Yüksek Lisans Tezi

ORIJINALLIK RAPORU

%16	%14	%7	%4
BENZERLIK ENDEKSI	İNTERNET KAYNAKLARI	YAYINLAR	ÖĞRENCI ÖDEVLERI

BIRINCIL KAYNAKLAR

1	www.slideshare.net İnternet Kaynağı	<%1
2	naturnett.org İnternet Kaynağı	<%1
3	syssci.atu.edu İnternet Kaynağı	<%1
4	Submitted to Leeds Metropolitan University Öğrenci Ödevi	<%1
5	web.uconn.edu İnternet Kaynağı	<%1
6	www.fusdweb.com İnternet Kaynağı	<%1
7	www.essexdpa.org İnternet Kaynağı	<%1
8	www.dgaspchr.ro İnternet Kaynağı	<%1
9	www.docstoc.com İnternet Kaynağı	<%1

Prof. Dr. Özay Gürtuğ

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu ve araştırma problemini bana veren, karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını benden esirgemeyerek bana matematiksel fiziğin çözüm metotlarını öğreten sayın Prof. Dr. Özay Gürtuğ 'a, verdiği lisansüstü dersler ile yüksek analizi ve diferansiyel denklem sistemlerini bana öğreten sayın Dr. Öğr. Üyesi Alemdar Demirel ‘e, kendisinden aldığım yüksek analiz dersi ile bana teorik matematiğin bazı uygulama yöntemlerini öğreten sayın Prof. Dr. Hüseyin Çakallı 'ya ve hayatımın her aşamasında yanımda olan bana hiçbir desteğini esirgemeyen, hiçbir söz ve kelimelerle ifade edemeyeceğim sevgili anneme ve babama en içten duygularımla teşekkür ederim.

İbrahim Bacanak

İstanbul, Ağustos 2018

ÖZ

Helmholtz Dalga Denkleminin Analizi:

Maxwell Denklemleri ve Silindirik Elektromanyetik Dalgalar

İbrahim Bacanak

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2018

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Özay Gürtuğ

Bu tezde, kısmi diferansiyel denklemlerin fizik ve mühendislik alanlarındaki uygulamaları kısaca ifade edilmiş olup bu uygulamalar arasından, Helmholtz denklemi detaylı bir şekilde araştırılarak kartezyen, silindirik ve küresel olmak üzere üç farklı koordinat sisteminde çözülüp, silindirik ve küresel koordinat sistemlerindeki çözümler, sırasıyla; Bessel ve Legendre polinomları cinsinden ifade edilmiştir. Uygulama örneği olarak da, silindirik elektromanyetik alanları tasvir etmede kullanılan ve yapısal olarak Helmholtz denkleminin kendisini ifade eden ikinci dereceden Maxwell denklemleri, silindirik koordinatlarda çözülüp; elektromanyetik dalga yayılımı olan TE ve TM modları dairesel bir dalga kılavuzunda ele alınarak oluşan dalga şekilleri maple yazılımı ile çizilmiştir.

Anahtar Sözcükler: 1. Adi diferansiyel denklemler; 2. Kısmi türevli diferansiyel denklemler; 3. Helmholtz dalga denklemi; 4. Bessel fonksiyonu; 5. Legendre fonksiyonu; 6. Elektromanyetik dalgalar; 7. Maxwell denklemleri

ABSTRACT

Analyses of Helmholtz Wave Equation: Maxwell Equations and Cylindrical Elektromagnetic Waves

İbrahim Bacanak

Master Thesis

Department of Mathematics

Maltepe University Graduate School of Science and Engineering, 2018

Thesis Advisor: Prof. Dr. Özay Gürtuğ

In this thesis, the application of partial differantial equations in physics and engineering is briefly explained. Among the others, the Helmholtz equation is investigated in details. Solutions to the Helmholtz equation in three different coordinates namely; the cartesian, cylindrical and spherical coordinates are obtained. Solutions in cylindrical and spherical coordinates are obtained in terms of Bessel and Legendre fuctions. As an application of Helmholtz equation, Maxwell equations which describes propagation of electromagnetic waves is solved in cylindrical coordinates. Propagation of TE and TM modes in a circular waveguide is considered.

Key Words: 1. Ordinary Differential Equations; 2. Partial Differantial Equations; 3. Helmholtz Wave Equation; 4. Bessel Function; 5. Legendre Function; 6. Electromagnetic Waves; 7. Maxwell Equations

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\vec{\nabla}$	Napla (gradyan) diferansiyel operatörü
∇^2	Laplace diferansiyel operatörü
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
J_n	n. basamaktan birinci dereceden Bessel fonksiyonu
N_n	n. basamaktan ikinci dereceden Neumann fonksiyonu
$\mathrm{H}_n^{(1)}$	n. basamaktan birinci dereceden Hankel fonksiyonu
$\mathrm{H}_n^{(2)}$	n. basamaktan ikinci dereceden Hankel fonksiyonu
P_n	Legendre fonksiyonu
Γ	Gamma fonksiyonu
$\vec{E}$	Elektrik alan
$\vec{B}$	Magnetik alan

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim Bacanak

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Derece	Yıl	Üniversite, Enstitü/Fakülte, Anabilim/Anasanat Dalı
Y.Ls.	2018	Maltepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
		Matematik Anabilim Dalı
Ls.	2014	Fatih Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
		Matematik Bölümü (İngilizce)

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı: İstanbul, 1989

Cinsiyet: Erkek

Yabancı diller: İngilizce

GSM / e-posta: 0541-773-86-20 / m-ibrahim-s@hotmail.com

1. GİRİŞ

Bu bölümde, konu ile ilgili temel bilgiler verilerek tezin konusunu teşkil elden Helmholtz dalga denkleminin genel halinin türetilmesi ile elde edilen bazı özel denklemler tanımlanacaktır.

1.1. Temel Kavramlar

Uygulamalı matematiğin odaklandığı konulardan biri olan diferansiyel denklemler, özellikle mühendislik alanındaki uygulamaları ile birçok fiziksel olayın tasvir edilmesinde önemli bir yer tutmaktadır. Zira, diferansiyel denklemler; değişime uğrayan olayların matematik terimleri ile ifade edilmesinde uzun yıllardır bilim adamları ve matematikçiler için güvenilir bir anahtar haline gelmiştir. Genel olarak diferansiyel denklemler şeklinde tasvir edilen bu denklemler, aslında Adi diferansiyel denklemler ve Kısmi türevli diferansiyel denklemler şeklinde 2 tür olarak karşımıza çıkmaktadır.

1.1.1. Adi Diferansiyel Denklemler

Eğer bir yada daha fazla bilinmeyen fonksiyonun (bağımlı değişken) olduğu bir denklem, tek bir bağımsız değişkenin türev veya türevlerinden oluşuyorsa; bu diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır ve normal tek değişkenli fonksiyon olduğunun anlaşılması için, türev operatörleri $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, y', y'', y''',$ vb. şeklinde ifade edilir. Bu tip denklemler, içerisinde bir yada daha yüksek mertebeden bilinmeyen fonksiyonun türev veya türevlerini barındıracağından, zamanla değişim meydana gelmiş ve oluşan her bir durum türev ile ifade edilerek yeni bir diferansiyel denklem oluşması için olanak sağlanmıştır.

Örneğin; $y = f(x)$ fonksiyonu istenildiği türeve kadar türevlenebilen ve bir bağımsız değişkene sahip bir fonksiyon olsun. Burada, x değiştikçe y 'de değişeceğinden ve değişimin olduğu her durum türev ile ifade edilebileceğinden x 'e göre bir türev vardır, türevin olduğu her olayda diferansiyel denklem olarak yazılabileceğinden; oluşabilecek diferansiyel denklemler $y = f(x)$ fonksiyonu için,

$x =$ bağımsız değişken

$y =$ bilinmeyen fonksiyon (bağımlı değişken)

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} =$ bilinmeyen fonksiyonun türevleri olmak üzere,

- $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}\right) = 0$ ise, homojen bir diferansiyel denklem şeklinde adlandırılan bu yapı; lineer veya non-lineer şeklinde
- $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}\right) \neq 0$ olması durumunda ise, homojen olmayan bir diferansiyel denklem şeklinde adlandırılan bu yapı da; yine lineer veya non-lineer şeklinde

toplamda dört farklı isimle tesmiye edilebilmektedir.

Diferansiyel denklemlerde lineerlik özelliğinin sağlanabilmesi için de, aşağıdaki her iki özelliğin gerçeklenmesi gerekmektedir. Bunlar,

i). Bilinmeyen fonksiyon ve tüm türevlerin birinci dereceden olması

ii). Bilinmeyen fonksiyon ile türevlerin çarpımının olmaması

şeklindedir.

O halde, genel şekli itibari ile bir diferansiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon ve türevlerin başındaki katsayıya göre,

- $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + ... + a_0 y = 0$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem,

  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + ... + a_0 y = P(x)$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem,

  $\exists \; a_n, a_{n-1,} a_{n-2}, ..., a_1 \neq 0$ ve $\forall \; a_n, a_{n-1,} a_{n-2}, ..., a_0 \in k$; $k =$ sabit sayı

- $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+a_{n-2}(x)y^{(n-2)}+...+a_0(x)y=0$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem,

  $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+a_{n-2}(x)y^{(n-2)}+...+a_0(x)y=P(x)$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem

  $\exists\ a_n(x),a_{n-1}(x),...,a_1(x)\neq 0$ ve $\exists\ a_n(x),a_{n-1}(x),a_{n-2}(x),...,a_0(x)\in P(x)$

şeklinde ifade edilebilir.

1.1.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Eğer bir yada daha fazla bilinmeyen fonksiyonun (bağımlı değişken) olduğu bir denklem, iki veya daha fazla bağımsız değişkenin türev veya türevlerinden oluşuyorsa; bu diferansiyel denklemlerdeki türevler artık kısmi türevler halini alır, denklem de kısmi türevli diferansiyel denklem olarak adlandırılır ve normal tek değişkenli türevlerden ayırmak, çok değişkenli fonksiyon olduğunu vurgulamak, değişkenlerden biri değişirken diğerinin sabit tutulduğunun anlaşılması için; türev operatörleri $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},z_x,z_y,z_{xx},z_{yy},z_{xy},z_{yx}$, vb. şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde, bu tip denklemlerde içerisinde bir yada daha yüksek mertebeden bilinmeyen fonksiyonun türev veya türevlerini barındıracağından, zamanla değişim meydana gelmiş ve oluşan her bir durum türev ile ifade edilerek yeni bir diferansiyel denklem oluşması için olanak sağlanmıştır.

Örneğin; $z=f(x,y)$ fonksiyonu n. mertebeden türeve kadar türevlenebilen ve iki bağımsız değişkene sahip bir fonksiyon olsun. Burada, x değiştikçe z ’de değişeceğinden ve değişimin olduğu her durum türev ile ifade edilebileceğinden x ’e göre bir türev vardır (y sabit); Aynı şekilde, y değiştikçe z ’de değişeceğinden y ’e göre de bir türev vardır (x sabit). Dolayısıyla, türevin olduğu her olayda diferansiyel denklem olarak yazılabileceğinden; oluşabilecek diferansiyel denklemler $z=f(x,y)$ fonksiyonu için,

$x, y =$ bağımsız değişken (çok değişkenli)

$z =$ bilinmeyen fonksiyon (bağımlı değişken)

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, ..., \frac{\partial^{(n)} z}{\partial x^k \partial y^\ell}, \frac{\partial^{(n)} z}{\partial y^t \partial x^s} =$ bilinmeyen fonksiyonun türevleri ($k + \ell = n$ ve $t + s = n$) olmak üzere,

- $F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx}, ..., z_{x^k y^\ell}, z_{y^t x^s}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, ..., \frac{\partial^{(n)} z}{\partial x^k \partial y^\ell}, \frac{\partial^{(n)} z}{\partial y^t \partial x^s}\right) = 0$ ise, homojen bir kısmi diferansiyel denklem şeklinde adlandırılan bu yapı; lineer veya non-lineer şeklinde

- $F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx}, ..., z_{x^k y^\ell}, z_{y^t x^s}\right) \neq 0 \Leftrightarrow$

$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, ..., \frac{\partial^{(n)} z}{\partial x^k \partial y^\ell}, \frac{\partial^{(n)} z}{\partial y^t \partial x^s}\right) \neq 0$ olması durumunda ise, homojen olmayan bir kısmi diferansiyel denklem şeklinde adlandırılan bu yapıda; lineer veya non-lineer şeklinde

toplamda dört farklı isimle tesmiye edilebilmektedir.

O halde, genel şekli itibari ile bir kısmi diferansiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon ve türevlerin başındaki katsayıya göre,

- $a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + a_{n-2} z^{(n-2)} + ... + a_0 z = 0$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer sabit katsayılı homojen kısmi diferansiyel denklem,

  $a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + a_{n-2} z^{(n-2)} + ... + a_0 z = P(x), Q(y), R(x, y)$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer sabit katsayılı homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem,

  $\exists \; a_n, a_{n-1,} a_{n-2}, ..., a_1 \neq 0$ ve $\forall \; a_n, a_{n-1,} a_{n-2}, ..., a_0 \in k$; $k =$ sabit sayı

- $a_n(x,y)z^{(n)} + a_{n-1}(x,y)z^{(n-1)} + a_{n-2}(x,y)z^{(n-2)} + ... + a_0(x,y)z = 0$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen kısmi diferansiyel denklem,

  $a_n(x,y)z^{(n)} + a_{n-1}(x,y)z^{(n-1)} + ... + a_0(x,y)z = P(x), Q(y), R(x,y)$ şeklinde n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem,

  $\exists\ a_n(x,y), a_{n-1}(x,y), a_{n-2}(x,y), ..., a_1(x,y) \neq 0$ ve

  $\exists\ a_n(x,y), a_{n-1}(x,y), a_{n-2}(x,y), ..., a_0(x,y) \in P(x), Q(y), R(x,y)$

şeklinde ifade edilebilir.

1.2. Helmholtz Diferansiyel Denklemi

1.2.1. Helmholtz Diferansiyel Denkleminin Genel Hali

Helmholtz dalga denklemi olarak bilinen yapı, genel olarak ikinci dereceden lineer değişken katsayılı kısmi türevli bir diferansiyel denklem olarak bilinmektedir. Bu diferansiyel denklem, yukarıda (1.1.1 ve 1.1.2 başlıkları altında) adi diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin her ikisinde de belirtildiği üzere, zamanla değişimin meydana gelmesinden ötürü oluşan her bir durumun türevle ifade edilmesiyle meydana gelen ve denklemin iki veya daha fazla uzaya (konuma) ait koordinatlarını belirten yere göre tüm bu değişkenlerin, zamana bağlı olduğu belirtilmiştir. Dolayısıyla, tezin konusunu teşkil eden bu yapı genel şekli itibari ile

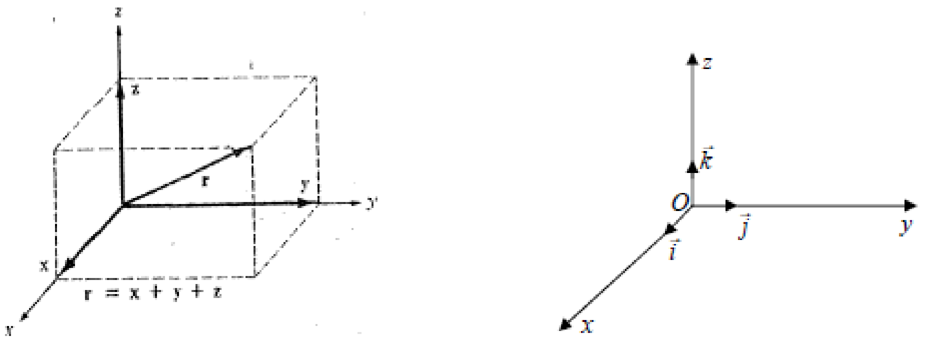
$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) + k^2(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t) + B(t)\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} + C(t)\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad (1.2.1)$$

şeklinde ifade edilir [1]. Burada; ∇^2 Laplace operatörünü (buda ikinci dereceden bir kısmı türev operatörüdür), ψ potansiyel fonksiyonu, $\vec{r}$ konuma ait koordinatları, t zamanı, A, B, C birer fonksiyonu ve k^2 de sabit bir sayıyı belirtmektedir. Eğer buradaki ψ potansiyel fonksiyonu üç boyutlu uzaya ait koordinatlardan oluşan bir fonksiyon ise, bu fonksiyon koordinatlardan dolayı konuma, türevden dolayı da zamana bağlı bir fonksiyondur ve ayrıca bu fonksiyon (∇^2 ikinci dereceden kısmi türev operatörü olduğundan) birinci ve ikinci kısmi türeve sahip bir fonksiyondur yani $\psi_{xx}, \psi_{yy}, \psi_{zz} \neq 0$ dır. O halde, $\vec{r}$ konum vektörü ve ψ potansiyel fonksiyonu kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki şekilde ifade edilebileceği kolayca gösterilebilir.

i). Bilindiği üzere, $\vec{r}$ konum vektörünün kartezyen koordinat sistemindeki gösterimi;

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.2.2}$$

şeklindedir. Burada; $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ büyüklüğü 1 br olan birim vektörleri ifade etmekte olup herhangi bir $\vec{r}$ konum vektörünün kartezyen bileşenlerinin hangi yönde olduğunu belirlemede kullanılmaktadır. Ayrıca, bu birim vektörlerin herhangi bir fiziksel boyutu $(m, kg, vb...)$ bulunmadığından, sadece ve sadece; vektörel fiziksel ifadelerin yönlerini belirtmede kullanılmaktadırlar. Dolayısıyla, bu konum vektörünün x, y ve z bileşenleri üç boyutlu kartezyen koordinatlardaki $\hat{i}, \hat{j}$ ve $\hat{k}$ yönlerindeki konumları belirtir ve aşağıda gösterildiği gibi de, eksenlerin kesiştiği O noktası referans alındığında koordinat sisteminde pozitif eksen istikametinde sırasıyla x, y ve z eksenleri boyunca uzanan yönlendirilmiş doğru parçalarının yönü $+$, bu yönlerin tersine olan yönler ise $-$ olarak alınır.



Şekil 1.2.1: Kartezyen koordinatlarda baz vektörler

Ayrıca, kartezyen koordinatlardaki konum vektörü $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ 'nin diferansiyel formda gösterimi, $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ şeklindedir.

ii). Eğer ψ fonksiyonu bir skaler (başlangıç noktası, yönü ve doğrultusu belli olmayan ve sonucu reel olan ifadeler) fonksiyon ve üç boyutlu bir uzayın her noktasında tanımlı ise $\psi = \psi(\vec{r})$ şeklinde ve ayrıca zaman bağımlılığı da varsa $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ olarak gösterilmektedir. O halde, zamandan bağımsız $\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z)$ potansiyel fonksiyonu için her iki tarafın diferansiyeli alındığında,

$$\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z) \tag{1.2.3}$$

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z} \right) dz \tag{1.2.4}$$

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz \tag{1.2.5}$$

elde edilen bu ifade, iki vektörün skaler çarpımı (iç çarpım) olarak aşağıdaki denklem (1.2.6) ‘deki gibi tanımlanabilir,

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k} \right) . \left(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \right) . \tag{1.2.6}$$

Bu tanımdan yola çıkıldığında, (1.2.6) ‘deki bu denklem aşağıdaki şekilde de yazılabilir,

$$d\psi = \left(\vec{\nabla} \psi \right) . d\vec{r} \; . \tag{1.2.7}$$

O halde, denklem bu şekilde yazıldığında; konum vektöründen ortaya çıkan $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$ vektörü, $\vec{\nabla} \psi$ sembolü ile gösterilir ve bu vektörün kartezyen bileşenleri de, $\vec{\nabla}$ Nabla diferansiyel operatörü (gradyan sembolü) kullanılarak aşağıdaki gibi

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \tag{1.2.8}$$

birinci mertebeden türev operatörü olarak tanımlanır. Tek başına bir anlam ifade etmeyen bu vektör, ancak skaler bir fonksiyona uygulandığında anlam kazanır ve skaler büyüklükleri vektörel büyüklüklere dönüştürmeye yaramaktadır. O halde, (1.2.1) ‘deki genel ifadedeki ikinci dereceden üç boyutlu ∇^2 Laplace diferansiyel operatörü de,

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right).\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.2.9)$$

iki vektörün iç çarpımı olarak bu şekilde tanımlanır.

Ayrıca, yukarıda 1.1.1 ve 1.1.2 başlıkları altında bahsedilen;

$y = f(x) \Rightarrow f(\vec{r}) \Rightarrow f(x,y) \Rightarrow$ iki boyutlu uzaya (konuma) ait koordinatları

$z = f(x,y) \Rightarrow f(\vec{r}) \Rightarrow f(x,y,z) \Rightarrow$ üç boyutlu uzaya (konuma) ait koordinatları

belirtir ve buradaki $\psi = \psi(\vec{r})$ de; ψ , f gibi bir fonksiyondur, değişken değildir.

1.2.2. Helmholtz Diferansiyel Denkleminin Özel Halleri

Zamana ve konuma bağlı olarak ifade edilen Helmholtz diferansiyel denkleminin genel halinin indirgenmesi ile elde edilen ve herbiri ayrı bir uygulama konusunun tezahürü olan özel denklemler, mühendislik bilim dalının birçok temel problemi tasvir etmektedir. Bu yol; matematiksel fizikte, teorik matematikte ve fiziksel problemlerde sık kullanılan bir yöntemdir ve bu metod sayesinde uygulamalı matematiğin, teorik fizik problemleri ile mühendislik alanındaki uygulamalarının nasıl bir bağıntısının olduğunu ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla, Hemholtz denkleminin en genel halini temsil eden (1.2.1) denkleminin indirgenmesi ile aşağıdaki gibi bazı özel denklemler tanımlanabilir.

1.2.2.1. Helmholtz Dalga Denklemi

Bu tezin konusunu teşkil eden ve Helmholtz dalga denklemi olarak bilinen yapı, yukarıda (1.2.1) deki genel ifadedeki ikinci dereceden lineer değişken katsayılı homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemde $A = B = C = 0$ ve $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ olmak şartı ile elde edilen yapıdır ve zamandan bağımsız olarak,

$$\nabla^2\psi(\vec{r})+k^2\psi(\vec{r})=0 \tag{1.2.10}$$

veya

$$\nabla^2\psi(x,y,z)+k^2\psi(x,y,z)=0 \tag{1.2.11}$$

şeklinde ifade edilir. Bundan sonraki bölümde; $\psi(\vec{r})=\psi(x,y,z)=\psi$ tanımı kullanılırsa,

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

denkleminde ∇^2 Laplace operatörü yerine yazıldığında,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi+k^2\psi=0 \tag{1.2.12}$$

veya

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{1.2.13}$$

denklemi elde edilir. Bu yapı klasik mekanik, kuantum mekaniği ve nötronların difüzyon teorisi gibi konularda karşımıza çıkar.

1.2.2.2. Laplace Denklemi

Eğer (1.2.10) deki kısmi diferansiyel denklemde k sabiti $k=0$ olarak alınırsa,

$$\nabla^2\psi(\vec{r})=0 \tag{1.2.14}$$

veya

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \tag{1.2.15}$$

denklemi elde edilir ki bu denklem Laplace denklemi olarak da bilinmektedir ve ikinci dereceden sabit katsayılı lineer homojen kısmi diferansiyel denklemlerin en genel gösterimini teşkil eden bu yapı, elektrostatik, magnetostatik, hidrodinamik, ısı iletimi, klasik gravitasyon teorisi; bu kapsama giren konuların başında gelmektedir.

1.2.2.3. Poisson Denklemi

Eğer (1.2.1) deki genel denklemde $k = B = C = 0$ olarak alınırsa, elde edilen denklem,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \tag{1.2.16}$$

şeklinde olur. Burada ve bundan sonraki bölümde; $\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t) = \psi$ tanımı kullanılıp ve ∇^2 Laplace operatörü yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = A(\vec{r}, t) \tag{1.2.17}$$

ikinci dereceden sabit katsayılı lineer homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin en genel gösterimini teşkil eden bu yapı, uygulamalı matematikte Poisson denklemi olarak bilinmektedir.

1.2.2.4. Dalga Denklemi

Eğer (1.2.1) deki genel denklemde $A = B = 0,\ k =$sabit $(k \neq 0)$ ve $C =$sabit $(C \neq 0)$ olarak alınırsa,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + k^2 \psi(\vec{r}, t) = C \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \tag{1.2.18}$$

veya

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = C \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{1.2.19}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem en genel, zamana bağımlı dalga denklemi olarak bilinmektedir ve sürekli ortamlar mekaniği, ses dalgaları, elektromanyetik teori; bu kapsama giren başlıca konular arasında yer almaktadır.

1.2.2.5. Difüzyon Denklemi

Eğer (1.2.1) deki genel denklemde $A = C = 0,\ \ k = \text{sabit}\ \left(k \neq 0\right)$ ve $B = \text{sabit}\ \left(B \neq 0\right)$ olarak alınırsa,

$$\nabla^2\psi\left(\vec{r},t\right) + k^2\psi\left(\vec{r},t\right) = B\frac{\partial\psi\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \tag{1.2.20}$$

veya

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = B\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.2.21}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, Difüzyon denklemi olarak bilinir ve ısı teorisi, gazların kinetik teorisi, nötronların transport teorisi gibi konularda karşımıza çıkar.

1.2.2.6. Isı İletimi Denklemi

Isı iletimi denklemi olarak bilinen denklem ise; (1.2.1) deki genel denklemde $k = C = 0$, kaynak terimi $A\left(\vec{r},t\right) = -\dfrac{1}{\chi}a\left(\vec{r},t\right)$, χ ısı iletkenliği katsayısı olmak üzere ve $\alpha = B^{-1} \Rightarrow B = \dfrac{1}{\alpha}$ ısı difüzleme katsayısı olarak tanımlanırsa,

$$\nabla^2\psi\left(\vec{r},t\right) = -\frac{1}{\chi}a\left(\vec{r},t\right) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \tag{1.2.22}$$

veya

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\chi}a\left(\vec{r},t\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.2.23}$$

şeklinde ifade edilir.

1.2.2.7. Schrödinger Dalga Denklemi

Kuantum mekaniğinin en temel denklemi olan Schrödinger dalga denklemi de; (1.2.1) deki genel denklemde $A = C = 0$, $B = \dfrac{2m}{i\hbar}$ sabit $(B \neq 0)$ ve $k(\vec{r},t) = -\dfrac{2m}{\hbar^2}U(\vec{r},t)$ şeklinde ψ potansiyel fonksiyonu ile orantılı bir terim olmak üzere,

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \frac{2m}{\hbar^2}U(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = \frac{2m}{i\hbar}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{1.2.24}$$

şeklinde olan Schrödinger denklemi düzenlendiğinde (her iki taraf $-\dfrac{\hbar^2}{2m}$ ile çarpılırsa),

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r},t)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2m}{i\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r},t)\psi = i^2\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r},t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.2.25}$$

veya

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + U(\vec{r},t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.2.26}$$

denklemi elde edilir.

Sonuç olarak, uygulamalı matematiğin anahtar konularından biri olan, genel olarak diferansiyel denklemler şeklinde adlandırılan ve iki veya daha fazla bağımsız değişkenin türevlenmesinin gösteriminde kullanılan kısmi türevli diferansiyel denkleme ait genel bir yapının indirgenmesinden elde edilen tüm bu denklemler, en genel denklemin özel halleri olup matematiksel fiziğin mühendislik temel alanındaki uygulamalarına karşılık gelmektedir. Bu tezde ise, Helmholtz denkleminin $\nabla^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0$ silindirik geometride elektromanyetik alan teorisinin tasvir edildiği Maxwell denklemlerine olan uygulamaları incelenecektir.

Bu bölümün araştırılmasında [1,2,3] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2. HELMHOLTZ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu tezin amacı, uygulamalı matematiğin odaklandığı konuların başında gelen kısmi diferansiyel denklemlerin özel bir hali olan ve birçok fiziksel olayın tasvir edilmesinde kullanılan Helmholtz dalga denkleminin çözümünü üç farklı koordinat sisteminde yapmak ve silindirik koordinat sisteminde elde edilen çözümü, elektromanyetik alanları tasvir eden Maxwell denklemlerinde (ki bu denklemde bir Helmholtz denklemidir) kullanarak silindirik elektromanyetik alanları incelemektir. Bu amaçla Helmholtz denkleminin kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlardaki çözümü bu bölümde incelenecektir.

2.1. Kartezyen Koordinat Sistemi

Helmholtz denkleminin kartezyen koordinatlarda,

$$\nabla^2\psi\left(\vec{r}\right)+k^2\psi\left(\vec{r}\right)=0 \tag{2.1.1}$$

veya

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{2.1.2}$$

şeklinde ifade edildiğini bir önceki bölümdeki (1.2.10) ve (1.2.13) denklemlerinde gösterilmişti. O halde, Helmholtz denkleminin kartezyen koordinatlarda çözümünün yapılabilmesi için; aşağıdaki Tanım 2.1.1 ve Teorem 2.1.1 ‘in bilinmesi gerekmektedir.

Tanım 2.1.1: $y=f\left(x\right)$ fonksiyonunun türevlendiği bir diferansiyel denklemde,

$y'=\dfrac{dy}{dx}$ ve $y=f\left(x\right)\Rightarrow f\left(\vec{r}\right)\Rightarrow f\left(x,y\right)$ olmak üzere, iki boyutlu bir uzayın her noktasında tanımlı bir skaler fonksiyon verilmişse ve bu fonksiyon $f\left(x,y\right)=X\left(x\right).Y\left(y\right)$ şeklinde diferansiyel denkleme ait çözümlerden birisi olarak hem x ’e, hemde y ’ye bağlı fonksiyonların çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa, bu diferansiyel denkleme değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem denir.

Dolayısıyla, Tanım 2.1.1 ‘e göre, Helmholtz denklemindeki üç boyutlu bir uzayın her noktasında tanımlı skaler ψ potansiyel fonksiyonu $\psi=\psi\left(\vec{r}\right)=\psi\left(x,y,z\right)$ şeklinde olduğundan, tanım gereği ψ fonksiyonunda bulunan değişkenlerin sırasıyla herbirinin ayrı ayrı birer fonksiyon olarak yazılabileceğinden ve bu fonksiyonların çarpılması ile $\psi(x,y,z) = X(x).Y(y).Z(z)$ şeklinde diferansiyel denkleme ait çözümlerden birisi elde edilebilir. O halde, Helmholtz denkleminin kartezyen koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile çözümlerinden birisi $\psi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ olarak varsayılır.

Teorem 2.1.1: $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ şeklindeki bir n. mertebeden (n tane lineer bağımsız {ortak} çözümü olan) homojen diferansiyel denkleminde, $y = \phi(x)$ fonksiyonu diferansiyel denklemi sağlıyorsa (ki diferansiyel denklemde yerine yazıldığında ifade sıfıra eşit çıkıyorsa);

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{2.1.3}$$

bu fonksiyon diferansiyel denklemin lineer bağımsız özel çözümlerinden birisidir denir ve bu diferansiyel denklemin tüm çözümleri $y_1, y_2, ..., y_n$ ise de, Wronskian determinantı

$$W\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ..... & y_n \\ y_1' & y_2' & ..... & y_n' \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ..... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.1.4}$$

olur. Dolayısıyla, tüm bu $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümleri bu diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri olarak tanımlanır ve genel çözüm olarak da,

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) \tag{2.1.5}$$

çözümlerin lineer kombinasyonu (n tane çözüm n tane parametreye bağlı) olarak bu şekilde ifade edilir. Buradaki $c_1, c_2, ..., c_n$ integral sabitleri (parametreler) dir. Ancak, bu sabitler; diferansiyel denklem sınır şartları ile birlikte verildiğinde bulunabilir.

Dolayısıyla, kabul edilen $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ çözümü Teorem 2.1.1 ‘e göre denklemi sağlayacağından; (2.1.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)$$

$$+k^2\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)=0 \qquad (2.1.6)$$

olur ve kısmi türev operatöründe 2. dereceden türev ilişkisi de,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

şeklinde olduğundan; elde edilen denklem,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)\right]$$

$$+k^2\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X'(x)Y(y)Z(z)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(X(x)Y'(y)Z(z)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(X(x)Y(y)Z'(z)\right)$$

$$+k^2\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{dX(x)}{dx}Y(y)Z(z)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{dY(y)}{dy}X(x)Z(z)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{dZ(z)}{dz}X(x)Y(y)\right]$$

$$+k^2\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)=0$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}Y(y)Z(z)+\frac{d^2Y(y)}{dy^2}X(x)Z(z)+\frac{d^2Z(z)}{dz^2}X(x)Y(y)$$

$$+k^2\left(X(x)Y(y)Z(z)\right)=0 \qquad (2.1.7)$$

şeklinde bulunmuş olur ve bundan sonraki bölümde; $X(x)=X$, $Y(y)=Y$ ve $Z(z)=Z$ tanımı kullanılırsa,

$$\frac{d^2X}{dx^2}YZ+\frac{d^2Y}{dy^2}XZ+\frac{d^2Z}{dz^2}XY+k^2XYZ=0 \tag{2.1.8}$$

ve k sabitinin yanındakiler yok edilirse (her taraf $1/XYZ$ ile çarpılırsa),

$$\frac{d^2X}{dx^2}\frac{1}{X}+\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{1}{Y}+\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}+k^2=0 \tag{2.1.9}$$

veya

$$\frac{d^2X}{dx^2}\frac{1}{X}+\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{1}{Y}+\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}=-k^2 \tag{2.1.10}$$

denklemi elde edilir. Burada, k sabit sayı olduğundan eşitliğin diğer tarafı da sabit sayı olmalıdır. Şu anda, hepsi bir bağımsız değişkene (tek değişkene) bağlı terim olduğundan; bu üç terime sırasıyla,

$$\underbrace{\frac{d^2X}{dx^2}\frac{1}{X}}_{-\ell^2}+\underbrace{\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{1}{Y}}_{-m^2}+\underbrace{\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}}_{-n^2}=-k^2$$

$-\ell^2,-m^2$ ve $-n^2$ sabitleri denilirse; $k^2=\ell^2+m^2+n^2$ eşitliği elde edilmiş olur ve oluşan ifadeler düzenlendiğinde (her iki taraf sırasıyla X,Y,Z fonksiyonları ile çarpılırsa),

$$\frac{d^2X}{dx^2}\frac{1}{X}=-\ell^2 \Rightarrow X''=-\ell^2X \Rightarrow X''+\ell^2X=0 \tag{2.1.11}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{1}{Y}=-m^2 \Rightarrow Y''=-m^2Y \Rightarrow Y''+m^2Y=0 \tag{2.1.12}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}=-n^2 \Rightarrow Z''=-n^2Z \Rightarrow Z''+n^2Z=0 \tag{2.1.13}$$

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit katsayılı üç homojen diferansiyel denklem elde edilir ve bu diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi için, aşağıdaki Teorem 2.1.2 ‘nin bilinmesi gerekmektedir.

Teorem 2.1.2: $y=f(x)$ olmak üzere, $a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+...+a_0 y=0$ şeklindeki n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemin çözümü için, denklemin mertebesi kadar lineer bağımsız çözümler bulunmaya çalışılır ve $y=e^{mx}$ şeklinde çözüm aranır. O halde, bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınıp denklemde yerine yazılırsa,

$$y'=me^{mx}$$

$$y''=m^2e^{mx}$$

$$y'''=m^3e^{mx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$y^{(n)}=m^ne^{mx}$$

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+...+a_0 y=0$$

$$a_n m^n e^{mx}+a_{n-1}m^{n-1}e^{mx}+a_{n-2}m^{n-2}e^{mx}+...+a_0e^{mx}=0$$

$$e^{mx}\left(a_n m^n+a_{n-1}m^{n-1}+a_{n-2}m^{n-2}+...+a_0\right)=0$$

denklemi elde edilir ve burada; eşitliğin sağlanabilmesi için, çarpanlardan biri daima sıfır olacağından ve e^{mx} her zaman için $e^{mx}>0$ olduğundan; diğer çarpan olan

$$a_n m^n+a_{n-1}m^{n-1}+a_{n-2}m^{n-2}+...+a_0=0$$

karakteristik denklemi sıfır olur ve n. dereceden bir bilinmeyenli bu denklemin n tane çözümü olacağından; oluşan bu yeni diferansiyel denklem olmayan n. dereceden bir bilinmeyenli (m) denkleminin kökleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ ise,

1. Durum:

Kökler birbirinden farklı ve reel ise, bu diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri;

$$y_1=e^{m_1x}$$

$$y_2=e^{m_2x}$$

$$y_3=e^{m_3x}$$

$$\dots\dots\dots..$$

$$y_n = e^{m_n x}$$

şeklinde olur ve Wronskian determinantı

$$W\left(y_1, y_2, y_3, ..., y_n\right) \neq 0$$

dır ve homojen çözüm y_h aşağıdaki gibi

$$y_h\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right) + c_3 y_3\left(x\right) + ... + c_n y_n\left(x\right)$$

şeklinde genel çözüm olarak bulunmuş olur.

2. Durum:

Bazı kökler eşit ise ve k tane $m_1 = m_2 = m_3 = ... = m_k$ eşit kök varsa, bu diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri;

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

$$y_2 = xe^{m_1 x}$$

$$y_3 = x^2 e^{m_1 x}$$

$$\dots\dots\dots\dots..$$

$$y_k = x^{k-1} e^{m_1 x}$$

şeklinde olur ve k tanesi yazılan ve toplamda n tane olan diğer çözümler ise,

$$y_{k+1} = xe^{m_{k+1}}$$

$$y_{k+2} = xe^{m_{k+2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$y_n = xe^{m}$$

şeklindedir ve Wronskian determinantı

$$W\left(y_1, y_2, y_3, ..., y_n\right) \neq 0$$

dır ve

$$y_h\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right) + c_3 y_3\left(x\right) + ... + c_n y_n\left(x\right)$$

şeklinde de genel çözüm bulunmuş olur.

3. Durum:

Bazı kökler kompleks ise ve iki tane kompleks kök varsa, bu diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri; her zaman için $m_1 = a + bi$ kök ise, $m_2 = a - bi$ eşleniği de kök olacağından birinci ve ikinci çözüm,

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bix} = e^{ax}\left(\cos bx + i \sin bx\right)$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax} e^{-bix} = e^{ax}\left(\cos bx - i \sin bx\right)$$

şeklinde bulunur ve iki tanesi yazılan ve toplamda n tane olan diğer çözümler ise (kökler birbirinden farklı olması durumunda),

$$y_3 = e^{m_3 x}$$

$$y_4 = e^{m_4 x}$$

…………….

$$y_n = e^{m_n x}$$

şeklinde olur. Eğer eşit kökler var ise, 2. durum da olduğu gibi çözümler bulunur ve Wronskian determinantı

$$W\left(y_1, y_2, y_3, ..., y_n\right) \neq 0$$

dır ve

$$y_h\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right) + c_3 y_3\left(x\right) + ... + c_n y_n\left(x\right)$$

şeklinde de genel çözüm bulunmuş olur.

Dolayısıyla, Teorem 2.1.2 ‘e göre artık 2. mertebeden lineer sabit katsayılı bu (2.1.11), (2.1.12) ve (2.1.13) homojen diferansiyel denklemlerinin çözümleri yapılabilir.

2.1.1. Kartezyen Koordinatlarda Hemholtz Denkleminden Elde Edilen Denklemlerin Çözümleri

2.1.1.1. İkinci Mertebeden Standart Lineer Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Bir önceki üst başlıkta Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun kartezyen koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan ve her biri 2. mertebeden standart lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem olan

$$X'' + \ell^2 X = 0 \tag{2.1.11}$$

$$Y'' + m^2 Y = 0 \tag{2.1.12}$$

$$Z'' + n^2 Z = 0 \tag{2.1.13}$$

bu üç denklemin genel çözümü, Teorem 2.1.2 ‘e göre sırasıyla aşağıdaki gibidir.

1. $X'' + \ell^2 X = 0$

İkinci mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denkleminde, $X = e^{mx}$ şeklinde çözüm aranır. Bu durumda, bu çözümün ardışık olarak türevleri alınıp yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$X'' + \ell^2 X = 0$$

$$m^2 e^{mx} + \ell^2 e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}\left(m^2 + \ell^2\right) = 0$$

denklemi elde edilir ve burada; eşitliğin sağlanabilmesi için, çarpanlardan biri daima sıfır olacağından ve $e^{mx} \neq 0$ (e^{mx} her zaman için $e^{mx} > 0$) olduğundan; diğer çarpan olan $m^2 + \ell^2 = 0$ karakteristik denklemi sıfır olacağından,

$$m^2 = -\ell^2 \Rightarrow m^2 = i^2\ell^2 \Rightarrow m = \sqrt{i^2\ell^2} \Rightarrow m_1 = i\ell \text{ ve } m_2 = -i\ell$$

şeklinde kökler bulunur ve bu kökler kompleks olduğundan, diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri;

$$X_1 = e^{m_1 x} = e^{i\ell x}$$

$$X_2 = e^{m_2 x} = e^{-i\ell x}$$

şeklinde olur ve Wronskian determinantı

$$W\left(X_1, X_2\right) \neq 0$$

dır ve

$$X_h\left(x\right) = c_1 X_1\left(x\right) + c_2 X_2\left(x\right)$$

$$X_{h_1} = c_1 e^{i\ell x} + c_2 e^{-i\ell x} \tag{2.1.14}$$

şeklinde genel çözüm, lineer bağımsız çözümlerinden oluşan çözümlerin lineer kombinasyonu olarak bu şekilde bulunmuş olur ve ayrıca bu çözüm aşağıda olduğu gibi

$$X_{h_1} = C_1 e^{\pm i\ell x} \tag{2.1.15}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Benzer şekilde,

2. $Y'' + m^2 Y = 0$ denkleminin genel çözümü de; $Y_{h_2} = c_3 e^{imy} + c_4 e^{-imy}$ (2.1.16)

$$Y_{h_2} = C_3 e^{\pm imy} \tag{2.1.17}$$

3. $Z'' + n^2 Z = 0$ denkleminin genel çözümü de; $Z_{h_3} = c_5 e^{inz} + c_6 e^{-inz}$ (2.1.18)

$$Z_{h_3} = C_5 e^{\pm inz} \tag{2.1.19}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, Helmholtz denkleminin kartezyen koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile genel çözümü,

$$\psi\left(x, y, z\right) = X\left(x\right) Y\left(y\right) Z\left(z\right)$$

$$\psi_{\ell mn}(x,y,z) = X_\ell(x) Y_m(y) Z_n(z)$$

$$\psi_h = X_{h_1} Y_{h_2} Z_{h_3}$$

$$\psi_h = \left(c_1 e^{i\ell x} + c_2 e^{-i\ell x}\right)\left(c_3 e^{imy} + c_4 e^{-imy}\right)\left(c_5 e^{inz} + c_6 e^{-inz}\right) \quad (2.1.20)$$

veya

$$\psi_h = C_1 e^{\pm i\ell x} C_3 e^{\pm imy} C_5 e^{\pm inz} \quad (2.1.21)$$

şeklinde olur ve bu ifade genişletilmiş olarak toplam sembolü ile ifade edilirse,

$$\psi_h = \sum_{\ell,m,n} C_1 e^{\pm i\ell x} C_3 e^{\pm imy} C_5 e^{\pm inz} \quad (2.1.22)$$

genel çözüm bu şekilde elde edilmiş olur ve ayrıca, burada serinin iç kısmı da düzenlenecek olunursa,

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ve $\vec{k} = \ell\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ olmak üzere,

$$\psi_h = C_1 e^{\pm i\ell x} C_3 e^{\pm imy} C_5 e^{\pm inz} = C_1 C_3 C_5 e^{\pm i\ell x} e^{\pm imy} e^{\pm inz} = A e^{\pm i(\ell x + my + nz)} = A e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}} \quad (2.1.23)$$

genel çözüm bu şekilde yazılabileceğinden; Helmholtz denkleminin kartezyen koordinatlardaki çözümü,

$$\psi = \sum_{\ell,m,n} A_{\ell mn} e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}} \quad (2.1.24)$$

genel olarak bu şeklinde bulunmuş olur.

2.2. Silindirik Koordinat Sistemi

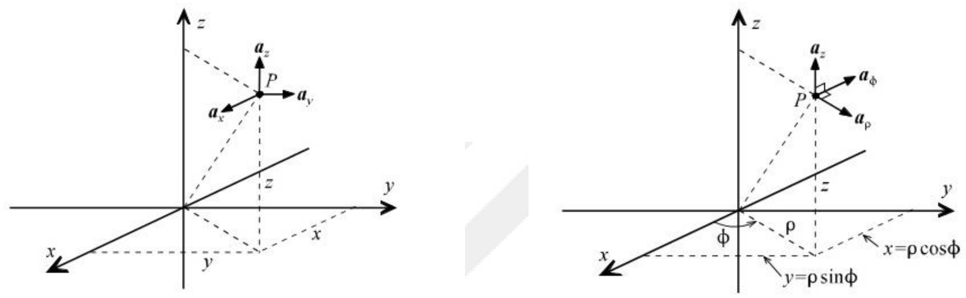
Helmholtz denklemi silindirik koordinatlarda,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.2.1)$$

veya

$$\nabla^2 \psi(\rho, \varphi, z) + k^2 \psi(\rho, \varphi, z) = 0 \quad (2.2.2)$$

şeklindedir ve ψ potansiyel fonksiyonunun kartezyen koordinatlarda diferansiyelinin alınması ile konum vektöründen ortaya çıkan $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ vektörün kartezyen bileşenlerinin, burada $\vec{\nabla}$ Nabla diferansiyel operatörü olarak tanımlanabilmesi için; kartezyen koordinatların silindirik koordinatlara göre dönüşümünün yapılması gerekmektedir. O halde,



(a) Kartezyen koordinatlar (b) Silindirik Koordinatlar

Şekil 2.2.1: Kartezyen ve silindirik koordinatlar

Burada; $\rho =$ silindirin yarıçapı, $\varphi =$ silindirin yarıçapının $(+x)$ ekseni ile yaptığı açı ve $z =$kartezyen koordinat ekseni olmak üzere,

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

şeklinde kartezyen koordinatlarda düzlem üzerinde bulunan $P(x, y, z)$ kesişim noktası, kutupsal koordinatlarla $P(\rho, \varphi, z)$ şeklinde silindirik koordinatlara dönüştürülmüş olur. Dolayısıyla, Nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ diferansiyel operatöründeki kısmi türevler de;

$$x = x(\rho, \varphi) \qquad y = y(\rho, \varphi) \qquad z = z$$

bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

- $x = x(\rho, \varphi)$ fonksiyonunda,

1. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}0$$

$$=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

2. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

şeklinde olur.

- $y=y(\rho,\varphi)$ fonksiyonunda ise,

1. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}0$$

$$=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

2. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

şeklinde bulunmuş olur.

- $z = z$ fonksiyonunda da,

1. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

2. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

bu şekilde olacağından ve, x ve y fonksiyonlarının (ρ, φ) değişkenlerine bağlı ifadeleri de;

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

şeklinde olduğundan,

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, fonksiyonların 1. dereceden ve 2. dereceden türev ilişkilerine bakıldığında; ρ değişkeninin sırasıyla x ve y değişkenlerine göre türev değerleri,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$x^2 + y^2 = u$ denilirse,

$$\rho = (u)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_x = \left((u)^{\frac{1}{2}}\right)' u_x = \left(\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \left(x^2 + y^2\right)' = \frac{2x}{2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi$$

$$\rho_y = \left((u)^{\frac{1}{2}}\right)' u_y = \left(\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \left(x^2 + y^2\right)' = \frac{2y}{2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho} = \sin\varphi$$

şeklinde olur ve diğer değişken olan φ değişkeninin de, sırasıyla x ve y değişkenlerine göre türev değerlerine bakılacak olunursa da,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\frac{y}{x} = u$ denilirse,

$$\varphi = \arctan(u)$$

$$\varphi_x = \frac{u_x}{1+u^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\varphi_y = \frac{u_y}{1+u^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

φ ‘nun x ’e ve y ’ye bağlı türev değerleri bu şekilde bulunmuş olur. Dolayısıyla, bu bulunan değerler silindirik koordinatlarda tanımlanan Helmholtz denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$\nabla^2\psi(\vec{r})+k^2\psi(\vec{r})=0$$

$$\nabla^2\psi(\rho,\phi,z)+k^2\psi(\rho,\phi,z)=0$$

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi+k^2\psi=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right)\cos\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\sin\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\right)\sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\sin\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\right)\frac{\cos\varphi}{\rho}\right]$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}(\cos\varphi)+0+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{\rho^2}\right)\right)\cos\varphi+\\ \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\rho}(\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(-\sin\varphi)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi.\rho}{\rho^2}\right)\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}(\sin\varphi)+0+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\right)\right)\sin\varphi+\\\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\rho}(\sin\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\cos\varphi)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi.\rho}{\rho^2}\right)\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\end{array}\right]$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\left(\cos^2\varphi\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\right)\right)+\\\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\rho}\left(-\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\left(\sin^2\varphi\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\right)\right)+\\\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\rho}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\left(\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

olur ve eşit kısmi türev operatörleri ortak paranteze alınırsa,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}+\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}-\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\rho}\left(-\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\right)$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\left(\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\rho^2}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

olur ve $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ trigonometrik özdeşliği kullanılıp gerekli sadeleşmeler yapıldığında,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{2.2.3}$$

denklemi elde edilir ve bu ikinci dereceden ρ kısmi türev operatörünün bulunduğu kısım aşağıdaki şekilde yazıldığında,

$$\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{2.2.4}$$

ve ifade $1/\rho$ parantezine alındığında,

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{2.2.5}$$

denklemi bulunur ve tersi kendisine eşit olan denklem,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{2.2.6}$$

en son hali ile bu şekilde ifade edilmiş olur.

Dolayısıyla, aynen kartezyen koordinat sisteminde yapıldığı gibi; Tanım 2.1.1 ‘e göre Helmholtz denkleminin silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile çözümlerinden birisi $\psi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ olsun ve kabul edilen $\psi(\rho,\phi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ çözüm, Teorem 2.1.1 ’e göre denklemi sağlayacağından; (2.2.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\big(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\big)\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\big(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\big)\\&+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\big(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\big)+k^2\big(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\big)=0\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

olur ve kısmi türev operatöründe 2. dereceden türev ilişkisi de,

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

şeklinde olduğundan; elde edilen denklem,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho R'(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)\right]+k^2\left(\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho R'(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(R(\rho)\Phi'(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}'(z)\right)$$

$$+k^2\left(R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}R(\rho)\mathrm{Z}(z)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d\mathrm{Z}(z)}{dz}R(\rho)\Phi(\varphi)\right]$$

$$+k^2\left(R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}R(\rho)\mathrm{Z}(z)+\frac{d^2\mathrm{Z}(z)}{dz^2}R(\rho)\Phi(\varphi)$$

$$+k^2\left(R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)\right)=0 \qquad (2.2.8)$$

şeklinde bulunmuş olur ve bundan sonraki bölümde; $R(\rho)=R,\ \Phi(\varphi)=\Phi$ ve $\mathrm{Z}(z)=\mathrm{Z}$ tanımı kullanılırsa,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\Phi\mathrm{Z}\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}R\mathrm{Z}+\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz^2}R\Phi+k^2R\Phi\mathrm{Z}=0 \qquad (2.2.9)$$

veya

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\Phi\mathrm{Z}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}R\mathrm{Z}+\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz^2}R\Phi+k^2R\Phi\mathrm{Z}=0 \qquad (2.2.10)$$

olur ve k sabitinin yanındakiler yok edilirse (her taraf $1/R\Phi\mathrm{Z}$ ile çarpılırsa),

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}+\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}+k^2=0 \tag{2.2.11}$$

veya

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}+\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}=-k^2 \tag{2.2.12}$$

denklemi elde edilir. Burada, k sabit sayı olduğundan eşitliğin diğer tarafı da sabit sayı olmalıdır. Şu anda, sadece bir bağımsız değişkene (tek değişkene) bağlı terim z bağımsız değişkeninin olduğu terim olduğundan; O halde, bu terim yalnız bırakılırsa,

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}+k^2}_{-\ell^2}=\underbrace{-\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}}_{-\ell^2}$$

ve her iki taraf $-\ell^2$ sabitine eşittir denilirse, bu eşitlikten

$$-\frac{d^2Z}{dz^2}\frac{1}{Z}=-\ell^2 \tag{2.2.13}$$

ve

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}+k^2=-\ell^2 \tag{2.2.14}$$

veya

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-\ell^2-k^2 \tag{2.2.15}$$

(2.2.13) ve (2.2.15) denklemleri ortaya çıkar ve (2.2.15) denklemindeki $-\ell^2-k^2$ toplamı sabit sayı olduğundan bu ifadeye,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=\underbrace{-\ell^2-k^2}_{-m^2} \tag{2.2.16}$$

$-m^2$ sabiti denilirse; $m^2 = \ell^2 + k^2$ eşitliği elde edilmiş olur ve buradan

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-m^2 \qquad (2.2.17)$$

şeklinde (2.2.17) denklemi elde edilir. Burada, m sabit sayı olduğundan eşitliğin diğer tarafı da sabit sayı olmalıdır. Şu anda, hiçbir terim bir bağımsız değişkene (tek değişkene) bağlı olmadığından; φ bağımsız değişkeni oluşturmak için, (2.2.17) denkleminde her iki taraf ρ^2 ile çarpılırsa,

$$\rho^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\rho^2\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-m^2\rho^2$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-m^2\rho^2 \qquad (2.2.18)$$

ve oluşan φ bağımsız değişkeninin olduğu terim sadece bir bağımsız değişkene sahip olduğundan; O halde, bu terim

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}+\underbrace{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}}_{-n^2}=-m^2\rho^2 \qquad (2.2.19)$$

$-n^2$ sabitine eşittir denilirse,

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-n^2 \qquad (2.2.20)$$

(2.2.20) denklemi elde edilmiş olur ve son hali ile denklem,

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}-n^2=-m^2\rho^2$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R}=-m^2\rho^2+n^2 \qquad (2.2.21)$$

bu şekilde bulunmuş olur. Dolayısıyla, Helmholtz denkleminden silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile bazı denklemler elde edilmiş olur. O halde, bulduğumuz bu denklemler özetlenecek olunursa,

1. $$\frac{d^2 Z}{dz^2}\frac{1}{Z} = \ell^2 \tag{2.2.13}$$

2. $$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi} = -n^2 \tag{2.2.20}$$

3. $$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R} = -m^2\rho^2 + n^2 \tag{2.2.21}$$

$$k^2 = m^2 - \ell^2$$

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit veya değişken katsayılı üç homojen diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Dolayısıyla, Teorem 2.1.2 ‘e göre 2. mertebeden lineer sabit katsayılı bu (2.2.13) ve (2.2.20) homojen diferansiyel denklemlerinin çözümleri yapılabilir. Ancak (2.2.21) denkleminin çözümü için ise, Ek bölümünde açıklanan 4.1, 4.2 ve 4.3 Teoremlerinden yararlanılacaktır.

2.2.1. Silindirik Koordinatlarda Helmholtz Denkleminden Elde Edilen Denklemlerin Çözümleri

2.2.1.1. İkinci Mertebeden Standart Lineer Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Bir önceki üst başlıkta Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan üç denklemden iki tanesi 2. mertebeden standart lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem olan

$$\frac{d^2 Z}{dz^2}\frac{1}{Z} = \ell^2 \tag{2.2.13}$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi} = -n^2 \tag{2.2.20}$$

bu (2.2.13) ve (2.2.20) denklemlerinin genel çözümü, Teorem 2.1.2 ‘e göre sırasıyla aşağıdaki gibidir.

1. $\dfrac{d^2Z}{dz^2}\dfrac{1}{Z}=\ell^2$

denkleminde ifade düzenlendiğinde (her iki taraf Z ile çarpılırsa),

$$\frac{d^2Z}{dz^2}=\ell^2 Z$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-\ell^2 Z=0$$

$$Z''-\ell^2 Z=0 \tag{2.2.22}$$

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilir ve bu (2.2.21) denklemin genel çözümü de, Teorem 2.1.2 ‘ye göre bölüm 2.1 ‘in son kısmında açık olarak yapıldığı gibi; $Z=e^{mz}$ şeklinde aranan çözümün ardışık olarak türevleri alınıp denklemde yerine yazıldığında,

$$Z_h(z)=c_1Z_1(z)+c_2Z_2(z)$$

$$Z_{h_1}=c_1e^{\ell z}+c_2e^{-\ell z} \tag{2.2.23}$$

şeklinde genel çözüm, lineer bağımsız çözümlerinden oluşan çözümlerin lineer kombinasyonu olarak bu şekilde bulunmuş olur ve ayrıca, bu çözüm aşağıda olduğu gibi; hem

$$Z_{h_1}=C_1e^{\pm\ell z} \tag{2.2.24}$$

şeklinde de ifade edilebilir, hem de

$$\sin\ell z=\frac{e^{\ell z}-e^{-\ell z}}{2i} \text{ ve } \cos\ell z=\frac{e^{\ell z}+e^{-\ell z}}{2} \text{ olmak üzere,}$$

Euler açılımı kullanılarak bu ifadeler düzenlenirse,

$$2i\sin \ell z = e^{\ell z} - e^{-\ell z}$$

$$2\cos \ell z = e^{\ell z} + e^{-\ell z}$$

ve elde edilen bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$2i\sin \ell z + 2\cos \ell z = 2e^{\ell z}$$

$$e^{\ell z} = \cos \ell z + i\sin \ell z$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla, $e^{-\ell z} = \cos \ell z - i\sin \ell z$ olacağından;

$$c_1 e^{\ell z} + c_2 e^{-\ell z} = c_1\left(\cos \ell z + i\sin \ell z\right) + ic_2\left(\cos \ell z - i\sin \ell z\right)$$

$$= \left(c_1 + c_2\right)\cos \ell z + i\left(c_1 - c_2\right)\sin \ell z$$

eşitliği elde edilmiş olur. Burada; $c_1 + c_2 = d_1$ ve $i\left(c_1 - c_2\right) = d_2$ şeklinde tanımlanırsa, çözüm fonksiyonun bir diğer gösterimini de;

$$Z_{h_1} = c_1 e^{\ell z} + c_2 e^{-\ell z}$$

$$Z_{h_1} = d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z \qquad (2.2.25)$$

olarak da ifade edilebilir.

2. $\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\dfrac{1}{\Phi} = -n^2$

denkleminde ifade düzenlendiğinde (her iki taraf Φ ile çarpılırsa),

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -n^2\Phi$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0$$

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0 \qquad (2.2.26)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilir ve benzer şekilde Teorem 2.1.2 ‘e göre,

$\Phi'' + n^2\Phi = 0$ denkleminin genel çözümü de; $\Phi_{h_2} = c_3 e^{in\varphi} + c_4 e^{-in\varphi}$ (2.2.27)

$$\Phi_{h_2} = C_3 e^{\pm in\varphi} \quad (2.2.28)$$

olarak bulunmuş olur.

2.2.1.2. Silindirik Bessel Diferansiyel Denkleminin Çözümü

Bir önceki üst başlıkta Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan üç denklemden bir tanesi de 2. mertebeden standart lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem olan

$$\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho \frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R} = -m^2\rho^2 + n^2 \quad (2.2.21)$$

bu (2.2.21) denklemin genel çözümüne geçilmeden önce ifade düzenlenirse (her taraf R ile çarpılırsa),

$$\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho \frac{dR}{d\rho}\right] = \left(-m^2\rho^2 + n^2\right)R$$

$$\rho\left(\frac{dR}{d\rho} + \rho\frac{d^2R}{d\rho^2}\right) = \left(-m^2\rho^2 + n^2\right)R$$

$$\left(\rho\frac{dR}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}\right) = \left(-m^2\rho^2 + n^2\right)R$$

$$\left(\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \left(-m^2\rho^2 + n^2\right)R = 0$$

$$\left(\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(m^2\rho^2 - n^2\right)R = 0 \quad (2.2.29)$$

veya

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(m^2\rho^2 - n^2\right)R = 0 \quad (2.2.30)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi elde edilir ve bu tip denklemlere Bessel diferansiyel denklemi denir. Burada; m sabiti $m^2 > 0$ dır. Eğer bu 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde,

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(m^2\rho^2 - n^2\right)R = 0$$

ρ^2 olmasaydı (sabit olsaydı), bu denklemin çözümü için; Ek bölümde detaylı bir şekilde açıklanan Teorem 4.1 kullanılabilirdi. Bu yüzden, bu tip diferansiyel denklemlerin çözümü için, Ek ‘deki kuvvet serisi metodu ($a = 0$ ise, Maclaurin serisi; $a \neq 0$ ise, Taylor serisi Teorem 4.2 veya Frobenius serisi Teorem 4.3) kullanılır.

Dolayısıyla, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 ‘e göre; 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen silindirik Bessel diferansiyel denkleminin kuvvet serisi ile çözüm yöntemine geçilmeden önce (2.2.30) ’deki Bessel denklemi standart form şeklinde yazılırsa,

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(m^2\rho^2 - n^2\right)R = 0$$

Bessel diferansiyel denklemindeki ρ bağımsız değişkenini $m\rho = x$ ($m =$ sabit) olacak şekilde x değişkenine bağlı olarak tanımlanırsa ($m\rho = x$ şeklinde ρ değişkeninin x değişkenine dönüşümü yapılırsa),

$m\rho = x$

$\rho = \dfrac{x}{m}$ olur ve

$R = R(\rho)$ fonksiyonun türevlerinin, $R = R(x)$ fonksiyonunun türevlerine dönüşümü de;

$$R' = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho} \qquad R'' = \frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)\frac{dx}{d\rho}$$

$$= \frac{dR}{dx}.m \qquad = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho}\right)\frac{dx}{d\rho}$$

$$= R'.m \qquad = \frac{d}{dx}\left(R'.m\right).m$$

$$= \left(R''.m \right).m$$

$$= R''.m^2$$

şeklinde olacağından; bulunan bu ifadeler (2.2.30) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{x}{m} \right)^2 R''m^2 + \left(\frac{x}{m} \right) R'm + \left(m^2 \left(\frac{x}{m} \right)^2 - n^2 \right) R = 0$$

$$x^2 R'' + xR' + \left(x^2 - n^2 \right) R = 0 \qquad (2.2.31)$$

olarak Bessel diferansiyel denklemi standart form şekline getirilmiş olur ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzrere, Teorem 4.3 'deki 2. Metod 'a (Frobenius metodu) göre bu diferansiyel denklemin silindirik koordinatlardaki çözümü için; (2.2.31) denkleminde her iki taraf x^2 'ye bölünürse,

$$R'' + \frac{x}{x^2} R' + \frac{\left(x^2 - n^2 \right)}{x^2} R = 0$$

$$R'' + \frac{1}{x} R' + \frac{\left(x^2 - n^2 \right)}{x^2} R = 0 \qquad (2.2.32)$$

$$R'' + P(x) R' + Q(x) R = 0$$

şeklinde elde edilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen Bessel diferansiyel denkleminde, $P(x)$ ve $Q(x)$, $x = 0$ noktasında analitik değil ($x = 0$ tekil nokta) olduğundan; denklem

$$R'' + \frac{p(x)}{x} R' + \frac{q(x)}{x^2} R = 0$$

şeklinde yazıldığında, $p(x)$ ve $q(x)$, $x = 0$ noktasında analitik ve

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = \lim_{x \to 0} (x - 0) \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow p_0$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} (x - 0)^2 \frac{\left(x^2 - n^2 \right)}{x^2} = -n^2 \Rightarrow q_0 ;\ n = sabit$$

şeklinde her iki ifadenin de limit değerleri var olduğundan; $P(x)$ ve $Q(x)$, $x=0$ noktasında tekil nokta olacağından, Frobenius seri çözümü yapılabilir. O halde, indis denkleminin kökleri,

$$r(r-1)+p_0 r+q_0=0$$

$$r(r-1)+1.r+\left(-n^2\right)=0$$

$$r^2-r+r-n^2=0$$

$$r^2-n^2=0$$

$$r^2=n^2$$

$$r=\sqrt{n^2}$$

$$r_1=n \text{ ve } r_2=-n$$

şeklinde bulunur ve Teorem 4.3 ‘deki indis köklerinin (a) kısmında belirtilen durum şartlarına göre,

$r_1>r_2$ için $r_1-r_2=n-(-n)$

$= 2n \notin \mathbb{Z}^+$ olduğundan,

$$R_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r_1}$$

$R_2=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}=\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x^{\lambda+r_2}$ şeklinde çözüm aranır (demek diferansiyel denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlaması demektir).

O halde, 1. çözüm (R_1) için ifadenin ardışık olarak türevleri alınıp (2.2.31) denkleminde yerine yazılırsa,

$$R_1=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r}$$

$$R_1'=\sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r) a_\lambda x^{\lambda+r-1}$$

$$R_1'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r-2}$$

$$x^2\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r-2}\right)+x\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r-1}\right)$$

$$+\left(x^2-n^2\right)\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}\right)=0$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r+2}-n^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}=0$$

denklemi elde edilir ve hepsinin ortak toplamda toplanabilmesi için; $x^{\lambda+r}$ nin kuvvetleri eşit hale getirilirse, denklem

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r+2}-n^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}=0$$

$\lambda \to \lambda-2$ yazılırsa

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=2}^{\infty}a_{\lambda-2}x^{\lambda+r}-n^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}=0$$

halini alır. Burada; hepsinin aynı indise getirilebilmesi için, toplamlar istenilen indise kadar terimleri açık olarak toplam dışına yazıldığında;

$$(0+r)(0-1+r)a_0x^{0+r}+(1+r)(1-1+r)a_1x^{1+r}+(0+r)a_0x^{0+r}+(1+r)a_1x^{1+r}-n^2\left(a_0x^{0+r}\right)$$

$$-n^2\left(a_1x^{1+r}\right)+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+a_{\lambda-2}x^{\lambda+r}-n^2a_\lambda x^{\lambda+r}\right]=0$$

$$r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{1+r}+ra_0x^r+(r+1)a_1x^{1+r}-n^2a_0x^r-n^2a_1x^{1+r}$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda+(\lambda+r)a_\lambda+a_{\lambda-2}-n^2a_\lambda\right]x^{\lambda+r}=0$$

$$\left[r(r-1)a_0+ra_0-n^2a_0\right]x^r+\left[r(r+1)a_1+(r+1)a_1-n^2a_1\right]x^{1+r}$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda+(\lambda+r)a_\lambda+a_{\lambda-2}-n^2a_\lambda\right]x^{\lambda+r}=0 \qquad (2.2.33)$$

denklemi elde edilir ve ifadenin sıfır olabilmesi için, x^{λ} nin bütün katsayılarının (her bir terimin tek tek) sıfır olması gerektiğinden;

$$\left[r(r-1)a_0 + ra_0 - n^2 a_0\right]x^r = 0 \tag{2.2.34}$$

$$\left[r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - n^2 a_1\right]x^{1+r} = 0 \tag{2.2.35}$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_{\lambda} + (\lambda+r)a_{\lambda} + a_{\lambda-2} - n^2 a_{\lambda}\right]x^{\lambda+r} = 0 \tag{2.2.36}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, bu eşitlikler sırasıyla incelenecek olunursa;

1. $$\left[r(r-1)a_0 + ra_0 - n^2 a_0\right]x^r = 0$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında (ifade sabit değer olan a_0 parantezine alınırsa),

$$\left[a_0\left(r^2 - r + r - n^2\right)\right]x^r = 0$$

$$\left[a_0\left(r^2 - n^2\right)\right]x^r = 0$$

$$a_0\left(r^2 - n^2\right) = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada; eşitliğin sağlanabilmesi için, çarpanlardan biri daima sıfır olması gerektiğinden ve $a_0 \neq 0$ için ($a_0 = 0$ kabul edilmesi durumunda bütün terimler 0 çıkacağından ve çözüm bulunamayacağından; $a_0 = 1$ kabul edilirse),

$$r^2 - n^2 = 0$$

$$r^2 = n^2$$

$$r_1 = n \text{ ve } r_2 = -n$$

olarak indis denkleminin kökleri bulunmuş olur.

2. $$\left[r(r+1)a_1+(r+1)a_1-n^2a_1\right]x^{1+r}=0$$

ifadesinde de gerekli düzenlemeler yapıldığında (ifade sabit değer olan a_1 parantezine alınırsa),

$$\left[a_1\left(r^2+r+r+1-n^2\right)\right]x^{1+r}=0$$

$$\left[a_1\left(r^2+2r+1-n^2\right)\right]x^{1+r}=0$$

$$a_1\left(r^2+2r+1-n^2\right)=0$$

denklemi elde edilir. Burada; bu eşitliğin sağlanabilmesi için, indis köklerinin denklemi sağlaması gerektiğinden ve $r_1=n$ ve $r_2=-n$ için, $r^2+2r+1-n^2=0$ eşitliği gerçeklenmediğinden; $a_1=0$ olması gerekmektedir.

3. $$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda+(\lambda+r)a_\lambda+a_{\lambda-2}-n^2a_\lambda\right]x^{\lambda+r}=0$$

ifadesi için de gerekli düzenlemeler yapıldığında (ifade sabit değer olan a_λ parantezine alınırsa),

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[a_\lambda\left(\lambda^2+\lambda r-\lambda+\lambda r+r^2-r+\lambda+r-n^2\right)+a_{\lambda-2}\right]x^{\lambda+r}=0$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[a_\lambda\left(\lambda^2+2\lambda r+r^2-n^2\right)+a_{\lambda-2}\right]x^{\lambda+r}=0$$

$$a_\lambda\left(r^2+2\lambda r+r^2-n^2\right)+a_{\lambda-2}=0;\ \lambda\geq 2$$

ifadesi elde edilir ve elde edilen bu ifadeye göre, terimlerin ortak toplamda toplanabilmesi için, yapılan dönüşüm $(\lambda\to\lambda-2)$ geri alınırsa; $\lambda\to\lambda+2$ yazılırsa,

$$a_{\lambda+2}\left((\lambda+2)^2+2(\lambda+2)r+r^2-n^2\right)+a_{\lambda+2-2}=0;\ \lambda+2\geq 2$$

$$a_{\lambda+2}\left((\lambda+2)(\lambda+2+2r)+r^2-n^2\right)+a_\lambda=0;\ \lambda\geq 0$$

$$a_{\lambda+2}\left((\lambda+2)(\lambda+2+2r)+r^2-n^2\right)=-a_\lambda\,;\ \lambda\geq 0$$

$$a_{\lambda+2}=-\frac{a_\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+2r+2)+r^2-n^2}\,;\ \lambda\geq 0 \qquad (2.2.37)$$

şeklinde bir tekrar ilişkisi (recurrence relation) elde edilir. Dolayısıyla,

1. Çözüm: $r_1=n$ için;

$r=n$ kökü, (2.2.37) ‘daki tekrar bağıntısında yerine yazılırsa,

$$a_{\lambda+2}=-\frac{a_\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+2n+2)+n^2-n^2}\,;\ \lambda\geq 0$$

$$=-\frac{a_\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+2n+2)};\ \lambda\geq 0,\ \lambda\neq 2$$

eşitliği elde edilir ve

$\lambda=0$ için, $a_2=-\dfrac{a_0}{(0+2)(0+2n+2)}$

$$=-\frac{a_0}{2(2n+2)}$$

$$=-\frac{1}{2.2(n+1)}\ ;\ a_0=1 \text{ idi.}$$

$$=-\frac{1}{2^2 1!(n+1)}$$

$\lambda=1$ için, $a_3=-\dfrac{a_1}{(1+2)(1+2n+2)}$

$$=-\frac{a_1}{3(2n+3)}\ ;\ a_1=0 \text{ idi.}$$

$$=0$$

$\lambda = 2$ için, $a_4 = -\dfrac{a_2}{(2+2)(2+2n+2)}$

$$= -\frac{a_2}{4(2n+4)}$$

$$= -\frac{a_2}{4.2(n+2)}$$

$$= -\frac{-\dfrac{1}{2^2 1!(n+1)}}{2^2.2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2^2 2^2 2.1!(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2^4 2!(n+2)(n+1)}$$

$\lambda = 3$ için, $a_5 = -\dfrac{a_3}{(3+2)(3+2n+2)}$

$$= -\frac{a_3}{5(2n+5)}$$

$$= 0$$

$\lambda = 4$ için, $a_6 = -\dfrac{a_4}{(4+2)(4+2n+2)}$

$$= -\frac{a_4}{6(2n+6)}$$

$$= -\frac{a_4}{6.2(n+3)}$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{2^4 2!(n+2)(n+1)}}{2.3.2(n+3)}$$

$$= -\frac{1}{2^4 2^2 3.2!(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$= -\frac{1}{2^6 3!(n+3)(n+2)(n+1)}$$

…………….

şeklinde devam eden a_n sabitleri bulunur ve bu sabitlerin bütün terimleri genel olarak,

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p}\, p!(n+p)(n+p-1)(n+p-2)...(n+3)(n+2)(n+1)} \;\; ; \;\; p = 1,2,3,...$$

şekilde yukarıdaki (2.2.38) ‘daki gibi ifade edilebilir ve bu bağıntıyı daha kompakt bir formda yazabilmek için, aşağıda Teorem 2.2.1 ‘de tanımlanan Gama fonksiyonunun özelliğinin bilinmesi gerekmektedir.

Teorem 2.2.1: $\Gamma(z)$ Gama fonksiyonu olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.....n}{z(z+1)(z+2)...(z+n-2)(z+n-1)(z+n)} n^z \;\; ; \;\; z \neq 0,-1,-2,...$$

şeklinde tanımlan gamma fonksiyonunda $z \to z+1$ yazıldığında,

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.....n}{(z+1)(z+2)(z+3).....(z+n-1)(z+n)(z+n+1)} n^{z+1}$$

eşitliği elde edilir ve bu ifade de; pay ve payda z ile çarpıldığında,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.....n}{(z+1)(z+2)(z+3).....(z+n-1)(z+n)(z+n+1)} n^{z+1} . \frac{z}{z}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.....n}{z(z+1)(z+2)(z+3).....(z+n-1)(z+n)} n^z \, \frac{nz}{(z+n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.....n}{z(z+1)(z+2)(z+3).....(z+n-1)(z+n)} n^z \, \frac{nz}{(z+n+1)}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.....n}{z(z+1)(z+2)(z+3).....(z+n-1)(z+n)} n^z}_{\Gamma(z)} \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{(z+n+1)}$$

$$= \Gamma(z) \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{nz}{(z+n+1)}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsiziği olduğundan, L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$= \Gamma(z) \lim_{n \to \infty} \frac{z}{1}$$

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z) z$$

şeklinde elde edilen bağıntıya göre,

$z = 0$ için, $\Gamma(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1.2.3....n}{1.(2)(3).....(n)(n+1)} n^1 = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$z = 1$ için, $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1$

$z = 2$ için, $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2.\Gamma(2) = 2.\Gamma(1+1) = 2.1.\Gamma(1) = 2! = 2$

$z = 3$ için, $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3.\Gamma(3) = 3.\Gamma(2+1) = 3.2.\Gamma(1+1) = 3.2.1.\Gamma(1) = 3! = 6$

…………………

şeklinde devam eden gamma değerleri bulunmuş olur ve bu değerler genel olarak,

$z = n$ için, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3).....3.2.1$$

$$= (n-1)!$$

şeklinde ifade edilir.

Dolayısıyla, Teorem 2.2.1 'e göre (2.2.38) 'de elde edilen bu bağıntının payda bölümündeki

$$(n+p)(n+p-1)(n+p-2)...(n+3)(n+2)(n+1)$$

kısmını elde edebilmek için,

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ eşitliğinde; $n \to n+p+1$ yazılır ve ifade açılırsa,

$$\Gamma(n+p+1)=(n+p)\Gamma(n+p)$$
$$=(n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1)$$
$$=(n+p)(n+p-1)(n+p-2).....(n+3)(n+2)(n+1)\Gamma(n+1)$$
$$\frac{\Gamma(n+p-1)}{\Gamma(n+1)}=(n+p)(n+p-1)(n+p-2).....(n+3)(n+2)(n+1)$$

eşitliği elde edilir ve bu ifade istenilen ilişkide yerine yazıldığında,

$$a_{2p}=(-1)^p\frac{1}{2^{2p}\,p!(n+p)(n+p-1)(n+p-2)...(n+3)(n+2)(n+1)}$$
$$=(-1)^p\frac{\Gamma(n+1)}{2^{2p}\,p!\Gamma(n+p-1)}$$
$$=(-1)^p\frac{n!}{2^{2p}\,p!(n+p)!}\;;\; p=1,2,3,... \tag{2.2.39}$$

şeklinde ifadenin daha kompakt bir biçimde gösterilmesi sağlanmış olur. Dolayısıyla,

$$R_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r_1}$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+n}$$
$$=a_0x^n+a_1x^{1+n}+a_2x^{2+n}+...$$
$$=x^n+0+\left(-\frac{n!}{2^21!(n+1)!}\right)x^{n+2}+0+\left(\frac{n!}{2^42!(n+2)!}\right)x^{n+4}+0+\left(-\frac{n!}{2^63!(n+3)!}\right)x^{n+6}+...$$
$$=x^n\left(1-\frac{n!x^2}{2^21!(n+1)!}+\frac{n!x^4}{2^42!(n+2)!}-\frac{n!x^6}{2^63!(n+3)!}+...\right)$$
$$=x^n\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{n!x^{2\lambda}}{2^{2\lambda}\lambda!(n+\lambda)!}$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{n!x^{2\lambda+n}}{2^{2\lambda}\lambda!(n+\lambda)!}$$ ve pay ve payda 2^n ile çarpılırsa,

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{n!x^{2\lambda+n}}{2^{2\lambda}\lambda!(n+\lambda)!}\frac{2^n}{2^n}$$

$$=2^n n!\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{x^{2\lambda+n}}{2^{2\lambda+n}\lambda!(n+\lambda)!}$$

$$=2^n n!\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n}}_{J_n(x)} \; ; \; x>0 \tag{2.2.40}$$

veya

$$=2^n n!\underbrace{\sum_{\lambda=n}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n}}_{J_n(x)} \; ; \; x>0\,,\; n=0,1,2,... \tag{2.2.41}$$

veya

$$=c_5 J_n(x) \tag{2.2.42}$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen silindirik Bessel diferansiyel denklemin ($R=R(x)$ fonksiyonunun $x=0$ düzgün tekil noktasındaki) 1. çözümü (lineer bağımsız {ortak} çözümlerinden birisi) bulunmuş olur.

2. Çözüm: $r_2=-n$ için;

$r=-n$ kökü de, bu 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen silindirik Bessel diferansiyel denklemin bir çözümü olduğundan; Teorem 2.1.2 'ye göre 1. çözüm bu diferansiyel denklemi sağladığından, 2. çözüm de 1. çözümdeki denklemi sağlayacağına göre ve bu iki çözüm birbiri ile lineer bağımlı çözüm olacağından, ve

$r_1>r_2$ için $r_1-r_2=n-(-n)$

$=2n\notin\mathbb{Z}^+$ olduğundan; (2.2.40) çözüm fonksiyonunda $(n\to -n)$ yazılırsa,

$$J_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n}$$

$$J_{-n}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(-n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} \qquad (2.2.43)$$

veya

$$J_{-n}(x)=\sum_{\lambda=n}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(-n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} \quad ;\ x>0\,,\ n=0,1,2,... \qquad (2.2.44)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen silindirik Bessel diferansiyel denklemin ($R=R(x)$ fonksiyonunun $x=0$ düzgün tekil noktasındaki) 1. çözümüne bağlı lineer bağımlı çözüm bulunmuş olur ve aşağıda gösterildiği üzere,

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

şeklinde de bir eşitlik söz konusudur [7].

$$J_{-n}(x)=\sum_{\lambda=n}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(-n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$\lambda \to \lambda+n$ yazılırsa

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda+n}}{(\lambda+n)!(-n+\lambda+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(\lambda+n)-n}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda+n}}{(\lambda+n)!(\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2n-n}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}(-1)^{n}}{\lambda!(n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n}$$

$$=(-1)^n\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n}$$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

O halde,

$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$ eşitliğinde $(-1)^n=\cos n\pi$ ve $0=\sin n\pi$ olduğundan,

$$J_{-n}(x)-J_n(x)\cos n\pi=0 \ ; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}=\mathrm{N}_n(x) \tag{2.2.45}$$

fonksiyonu Bessel diferansiyel denklemin ($R=R(x)$ fonksiyonunun $x=0$ düzgün tekil noktasındaki) 2. çözümü (lineer bağımsız {ortak} çözümlerinden diğeri) olarak bu şekilde bulunmuş olur [8,9]. Dolayısıyla, silindirik Bessel denkleminin ($R=R(x)$ fonksiyonunun $x=0$ düzgün tekil noktasındaki) genel çözümü;

$$R(x)=c_5R_1(x)+c_6R_2(x)$$

$$=c_5J_n(x)+c_6\mathrm{N}_n(x)$$

$$R(\rho)=c_5J_n(m\rho)+c_6\mathrm{N}_n(m\rho) \ ; n \in \mathbb{Z} \tag{2.2.46}$$

şeklinde lineer bağımsız çözümlerden oluşan, çözümlerin lineer kombinasyonu (2 tane çözüm 2 tane parametreye bağlı) olarak bu şekilde bulunmuş olur ve ayrıca 1. dereceden Bessel $(J_n(x))$ ve 2. dereceden Neumann $(\mathrm{N}_n(x))$ fonksiyonları Hankel $(H_n(x))$ fonksiyonları cinsinden de yazılabileceğinden; bu çözüm aşağıdaki tanımlar kullanılarak, şu şekilde de ifade edilebilir.

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(x)=J_n(x)+i\mathrm{N}_n(x) \tag{2.2.47}$$

$$\mathrm{H}_n^{(2)}(x)=J_n(x)-i\mathrm{N}_n(x) \tag{2.2.48}$$

tanımlarına göre, 1. dereceden Hankel $\left(\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu ile 2. dereceden Hankel $\left(\mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu önce taraftara toplanırsa,

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho)+\mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)=2J_n(m\rho)$$

veya

$$J_n(m\rho) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) + \mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)\right)$$

denklemi elde edilir ve Şimdi de, bu 1. dereceden Hankel $\left(\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu ile 2. dereceden Hankel $\left(\mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu taraftara çıkarılırsa,

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) - \mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho) = 2i\mathrm{N}_n(m\rho)$$

veya

$$\mathrm{N}_n(m\rho) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) - \mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)\right)$$

eşitliği bulunmuş olur ve elde edilen bu değerler (2.2.49) genel çözümünde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} R(\rho) &= c_5 \frac{1}{2}\left(\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) + \mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)\right) + c_6 \frac{1}{2i}\left(\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) - \mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho)\right) \; ; n \in \mathbb{Z} \\ &= \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2i}\right)\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) + \left(\frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2i}\right)\mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho) \qquad (2.2.49) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada; $\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2i} = d_1$ ve $\frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2i} = d_2$ şeklinde tanımlanırsa, çözüm fonksiyonun bir diğer gösterimi de;

$$= d_1\mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) + d_2\mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho) \; ; n \in \mathbb{Z} \qquad (2.2.50)$$

şeklinde bulunmuş olur. Dolayısıyla, Helmholtz denkleminin silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile genel çözümü;

$$\psi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)$$

$$\psi_{mn}(\rho,\varphi,z) = R_{mn}(\rho)\Phi_n(\varphi)\mathrm{Z}_m(z)$$

$$\psi_h = R_{h_3}\Phi_{h_2}Z_{h_1}$$

$$\psi_h = \left(c_5 J_n\left(m\rho\right) + c_6 \mathrm{N}_n\left(m\rho\right)\right)\left(c_3 e^{in\varphi} + c_4 e^{-in\varphi}\right)\left(c_1 e^{\ell z} + c_2 e^{-\ell z}\right) \tag{2.2.51}$$

veya

$$\psi_h = \left(c_5 J_n\left(m\rho\right) + c_6 \mathrm{N}_n\left(m\rho\right)\right) C_3 e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right) \tag{2.2.52}$$

şeklinde olur ve bu ifade genişletilmiş olarak toplam sembolü ile ifade edilirse,

$$\psi_h = \sum_{m,n}\left(c_5 J_n\left(m\rho\right) + c_6 \mathrm{N}_n\left(m\rho\right)\right) C_3 e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right) \tag{2.2.53}$$

genel çözüm bu şekilde elde edilmiş olur ve ayrıca, burada serinin iç kısmı da düzenlenecek olunursa,

$$\psi_h = c_5 J_n\left(m\rho\right) C_1 e^{\pm in\varphi} + c_6 \mathrm{N}\left(m\rho\right) C_3 e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right)$$

$$\psi_h = c_5 C_1 J_n\left(m\rho\right) e^{\pm in\varphi} + c_6 C_3 \mathrm{N}_n\left(m\rho\right) e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right)$$

$$\psi_h = \left[A_1 J_n\left(m\rho\right) + A_2 \mathrm{N}_n\left(m\rho\right)\right] e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right) \tag{2.2.54}$$

bu şekilde yazılabileceğinden; Helmholtz denkleminin silindirik koordinatlardaki çözümü,

$$\psi_h = \sum_{m,n}\left[A_{1_{mn}} J_n\left(m\rho\right) + A_{2_{mn}} N_n\left(m\rho\right)\right] e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right) \tag{2.2.55}$$

genel olarak bu şeklinde bulunmuş olur.

2.3. Küresel Koordinat Sistemi

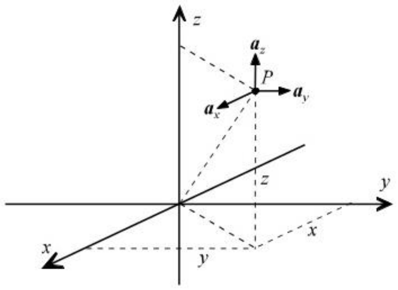
Helmholtz denklemi küresel koordinatlarda,

$$\nabla^2 \psi\left(\vec{r}\right) + k^2 \psi\left(\vec{r}\right) = 0 \tag{2.3.1}$$

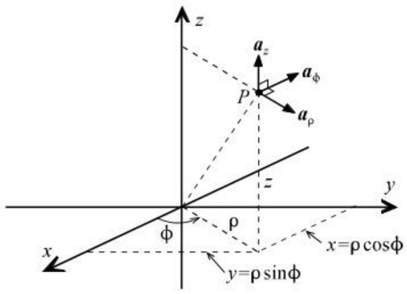
veya

$$\nabla^2 \psi\left(r, \theta, \varphi\right) + k^2 \psi\left(r, \theta, \varphi\right) = 0 \tag{2.3.2}$$

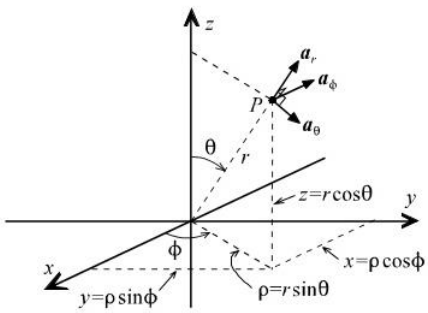
şeklindedir ve ψ potansiyel fonksiyonunun kartezyen koordinatlarda diferansiyelinin alınması ile konum vektöründen ortaya çıkan $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ vektörün kartezyen bileşenlerinin, burada $\vec{\nabla}$ Nabla diferansiyel operatörü olarak tanımlanabilmesi için; kartezyen koordinatların küresel koordinatlara göre dönüşümünün yapılması gerekmektedir. O halde,



(a) Kartezyen koordinatlar



(b) Silindirik koordinatlar



(c) Küresel koordinatlar

Şekil 2.3.1: Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar

Burada; $\rho=$koninin yarıçapı, $r=$kürenin yarıçapı, $\phi=$koninin yarıçapının $(+x)$ ekseni ile yaptığı açı ve $\theta=$kürenin yarıçapının $(+z)$ ekseni ile yaptığı açı olmak üzere,

$$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi \qquad z=r\cos\theta$$
$$=r\sin\theta\cos\varphi \qquad =r\sin\theta\sin\varphi$$

şeklinde kartezyen koordinatlarda düzlem üzerinde bulunan $P(x,y,z)$ kesişim noktası, kutupsal koordinatlarla $P(r,\theta,\varphi)$ şeklinde küresel koordinatlara dönüştürülmüş olur. O halde, Nabla $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ diferansiyel operatöründeki kısmi türevler de;

$$x=x(r,\theta,\varphi) \qquad y=y(r,\theta,\varphi) \qquad z=z(r,\theta)$$

bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

- $x=x(r,\theta,\varphi)$ fonksiyonunda,

1. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

2. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

şeklinde olur.

- $y=y(r,\theta,\varphi)$ fonksiyonunda ise,

1. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

2. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

şeklinde bulunmuş olur.

- $z=z(r,\theta)$ fonksiyonunda da,

1. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \varphi}0$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

2. dereceden türev ilişkisi

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

bu şekilde olacağından ve, x, y ve z fonksiyonlarının (r,θ,φ) değişkenlerine bağlı ifadeleri de;

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

şeklinde olduğundan,

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x^2+y^2=r^2\sin^2\theta \Rightarrow r\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x}=\tan\varphi \Rightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan\theta \Rightarrow \theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, fonksiyonların 1. dereceden ve 2. dereceden türev ilişkilerine bakıldığında; r değişkeninin sırasıyla x, y ve z değişkenlerine göre türev değerleri,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$x^2+y^2+z^2=u$ denilirse,

$$r=(u)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_x=\left((u)^{\frac{1}{2}}\right)' u_x=\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\left(x^2+y^2+z^2\right)'=\frac{2x}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}=\frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r}=\sin\theta\cos\varphi$$

$$r_y=\left((u)^{\frac{1}{2}}\right)'u_y=\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\left(x^2+y^2+z^2\right)'=\frac{2y}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r}=\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r}=\sin\theta\sin\varphi$$

$$r_z=\left((u)^{\frac{1}{2}}\right)'u_z=\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\left(x^2+y^2+z^2\right)'=\frac{2z}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$

şeklinde olur ve diğer değişken olan θ değişkeninin de, sırasıyla x, y ve z değişkenlerine göre türev değerlerine bakılacak olunursa da,

$$\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{z}=\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}=u \text{ denilirse,}$$

$$\theta=\arctan(u)$$

$$\theta_x=\frac{u_x}{1+u^2}=\frac{\left(\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)'}{1+\left(\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)^2}=\frac{\frac{\left((v)^{\frac{1}{2}}\right)'v_x.z-(v)^{\frac{1}{2}}z'}{z^2}}{\frac{z^2+v}{z^2}}=\frac{\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\left(x^2+y^2\right)'.z-0}{z^2+v}$$

$$=\frac{\frac{2xz}{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{xz}{\left(r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}}{r^2}=\frac{\frac{r\sin\theta\cos\varphi.r\cos\theta}{\left(r\sin\theta\right)^{\frac{2}{2}}}}{r^2}=\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}$$

$$\theta_y=\frac{u_y}{1+u^2}=\frac{\left(\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)'}{1+\left(\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)^2}=\frac{\frac{\left((v)^{\frac{1}{2}}\right)' v_y.z-(v)^{\frac{1}{2}}z'}{z^2}}{\frac{z^2+v}{z^2}}=\frac{\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\left(x^2+y^2\right)'.z-0}{z^2+v}$$

$$=\frac{\frac{2yz}{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{yz}{\left(r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}}{r^2}=\frac{\frac{r\sin\theta\sin\varphi.r\cos\theta}{\left(r\sin\theta\right)^{\frac{2}{2}}}}{r^2}=\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}$$

$$\theta_z=\frac{u_z}{1+u^2}=\frac{\left(\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)'}{1+\left(\frac{(v)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)^2}=\frac{\frac{\left((v)^{\frac{1}{2}}\right)' v_z.z-(v)^{\frac{1}{2}}z'}{z^2}}{\frac{z^2+v}{z^2}}=\frac{0-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}.1}{z^2+v}=-\frac{\left(r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=-\frac{\left(r\sin\theta\right)^{\frac{2}{2}}}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

bu değerler elde edilmiş olur ve bir sonraki değişken olan φ değişkeninin ise, türev değerleri de;

$$\varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x}=u \text{ denilirse,}$$

$$\varphi=\arctan(u)$$

$$\varphi_x=\frac{u_x}{1+u^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{\rho}=-\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}=-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

$$\varphi_y = \frac{u_y}{1+u^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho} = \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$$

x 'e ve y 'ye bağlı olarak bu şekilde bulunmuş olur. Dolayısıyla, bu bulunan değerler küresel koordinatlarda tanımlanan Helmholtz denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi) + k^2\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + k^2\psi = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right] + k^2\psi = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)\right)\sin\theta\cos\varphi+\\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)\right)\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}+\\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\sin\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)\right)\sin\theta\sin\varphi+\\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\sin\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)\right)\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}+\\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\sin\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)\right)\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right)\cos\theta+\\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\end{array}\right]+k^2\psi=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}(\sin\theta\cos\varphi)+0+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r^2}\right)+\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)\sin\theta\cos\varphi+\\ \left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}(\sin\theta\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial r}(\cos\theta\cos\varphi)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\right)+\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\cos\varphi\sin\theta.r}{r^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi.r.\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}+\\ \left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r}(\sin\theta\cos\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial r}(-\sin\theta\sin\varphi)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\theta}\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\right)+\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\varphi\cos\theta.r}{r^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi.r.\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)\end{array}\right]$$

$$
+\left[\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}(\sin\theta\sin\varphi)+0+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(\dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{r^2}\right)+\\
\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\left(\dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\dfrac{\cos\varphi\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)\sin\theta\sin\varphi+\\
\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}(\sin\theta\sin\varphi)+\dfrac{\partial\psi}{\partial r}(\cos\theta\sin\varphi)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\right)+\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\dfrac{\sin\varphi\sin\theta.r}{r^2}\right)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\left(\dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\dfrac{\cos\varphi.r.\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)\dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{r}+\\
\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r}(\sin\theta\sin\varphi)+\dfrac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\cos\varphi)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\theta}\left(\dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\right)+\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\dfrac{\cos\varphi\cos\theta.r}{r^2}\right)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\dfrac{\sin\varphi.r.\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)\dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}
\end{array}\right]
$$

$$
+\left[\begin{array}{l}
\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}(\cos\theta)+0+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\dfrac{\sin\theta}{r^2}\right)\right)\cos\theta+\\
\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}(\cos\theta)+\dfrac{\partial\psi}{\partial r}(-\sin\theta)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\dfrac{\cos\theta.r}{r^2}\right)\right)\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)
\end{array}\right]
$$

$$
+k^2\psi=0
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}(\sin^2\theta\cos^2\varphi)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(\dfrac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\dfrac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r^2}\right)+\\
\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\left(-\dfrac{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}\left(\dfrac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\left(\dfrac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r}\right)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\dfrac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{r^2}\right)+\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\dfrac{\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\left(-\dfrac{\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi}{r^2\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\cos\varphi\cos^2\theta\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r}\left(-\dfrac{\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\left(-\dfrac{\sin^2\varphi\sin\theta}{r\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\theta}\left(-\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)+\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\dfrac{\sin^2\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\dfrac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)+\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta}{r^2\sin^3\theta}\right)\end{array}\right)
\end{array}\right]
$$

$$
+\left[\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r^2}\right)+\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}\left(\frac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{r^2}\right)+\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi}{r^2\sin\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r}\left(\frac{\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\varphi\sin\theta}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\theta}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)+\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{r^2\sin^3\theta}\right)\end{array}\right)
\end{array}\right]
$$

$$
+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\cos^2\theta\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)\right)+\\ \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}\left(-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\sin^2\theta}{r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)\right)\end{array}\right]
$$

$$
+k^2\psi=0
$$

olur ve eşit kısmi türev operatörleri ortak paranteze alınırsa,

$$
\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\right)
$$

$$
+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r}+\frac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\right)
$$

$$
+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\begin{array}{l}-\frac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r^2}-\frac{\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{r^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}-\frac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r^2}-\\ \frac{\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{r^2}+\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\end{array}\right)
$$

$$
+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r\sin\theta}+\frac{\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)
$$

$$+\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\dfrac{\cos\varphi\cos^2\theta\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta}{r^2\sin^3\theta}-\dfrac{\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}-\\ \dfrac{\sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}-\dfrac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{r^2\sin^3\theta}\end{array}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}\left(\frac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r}+\frac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\right)$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r}+\frac{\sin^2\varphi\sin\theta}{r\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r}+\frac{\cos^2\varphi\sin\theta}{r.\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{r^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi}{r^2\sin\theta}+\frac{\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi}{r^2\sin\theta}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r}\left(-\frac{\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi}{r\sin\theta}+\frac{\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\theta}\left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}+\frac{\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$+k^2\psi=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\theta\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r}+\dfrac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r}-\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\dfrac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r}+\\ \dfrac{\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r}-\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r}\end{array}\right)$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{2\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r^2}+\dfrac{\cos\theta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}{r^2\sin\theta}-\dfrac{2\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta}{r^2}+\\ \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\end{array}\right)$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}{r}+\frac{\sin\theta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}{r\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}{r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)+k^2\psi=0$$

olur ve $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ trigonometrik özdeşliği kullanılıp gerekli sadeleşmeler yapıldığında,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)+k^2\psi=0 \quad (2.3.3)$$

denklemi elde edilir ve bu ikinci dereceden r kısmi türev operatörünün bulunduğu kısım aşağıdaki şekilde yazıldığında,

$$r^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+k^2\psi=0$$

yukarıdaki (2.3.4) denklemi elde edilir ve ifadede r 'ye göre türevin olduğu kısım $1/r^2$, θ 'ya göre olan kısım da $1/r^2\sin\theta$ parantezine alındığında;

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+k^2\psi=0$$

yukarıdaki (2.3.5) denklemi bulunur ve tersi kendisine eşit olan denklem,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+k^2\psi=0 \quad (2.3.6)$$

en son hali ile bu şekilde ifade edilmiş olur.

Dolayısıyla, benzer şekilde kartezyen ve silindirik koordinat sisteminde yapıldığı gibi; Tanım 2.1.1 'e göre Helmholtz denkleminin silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile çözümlerinden birisi $\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ olsun ve kabul edilen $\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ çözüm, Teorem 2.1.1 'e göre denklemi sağlayacağından; (2.3.6) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)+k^2\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)+k^2\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)=0 \qquad (2.3.7)$$

olur ve kısmi türev operatöründe 2. dereceden türev ilişkisi de,

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

şeklinde olduğundan; elde edilen denklem,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2R'(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta R(r)\Theta'(\theta)\Phi(\varphi)\big)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)\right]+k^2\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2R'(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta R(r)\Theta'(\theta)\Phi(\varphi)\big)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi'(\varphi)\big)+k^2\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}R(r)\Phi(\varphi)\right]$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}R(r)\Theta(\theta)\right]+k^2\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}R(r)\Phi(\varphi)\right]$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}R(r)\Theta(\theta)+k^2\big(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\big)=0 \qquad (2.3.8)$$

şeklinde bulunmuş olur ve bundan sonraki bölümde; $R(r)=R,\ \Theta(\theta)=\Theta$ ve $\Phi(\varphi)=\Phi$ tanımı kullanılırsa,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\Theta\Phi\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}R\Phi\right]$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}R\Theta+k^2R\Theta\Phi=0 \qquad (2.3.9)$$

veya

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\Theta\Phi+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]R\Phi$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}R\Theta+k^2R\Theta\Phi=0 \qquad (2.3.10)$$

olur ve k sabitinin yanındakiler yok edilirse (her taraf $1/R\Theta\Phi$ ile çarpılırsa),

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}+k^2=0 \qquad (2.3.11)$$

veya

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-k^2 \qquad (2.3.12)$$

denklemi elde edilir. Burada, k sabit sayı olduğundan eşitliğin diğer tarafı da sabit sayı olmalıdır. Şu anda, hiçbir terim bir bağımsız değişkene (tek değişkene) bağlı olmadığından; φ bağımsız değişkeni oluşturmak için, (2.3.12) denkleminde her iki taraf $r^2\sin^2\theta$ ile çarpılırsa,

$$r^2\sin^2\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+r^2\sin^2\theta\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}$$

$$+r^2\sin^2\theta\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-k^2r^2\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}$$

$$+\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-k^2r^2\sin^2\theta \qquad (2.3.13)$$

ve oluşan φ bağımsız değişkeninin olduğu terim sadece bir bağımsız değişkene sahip olduğundan; O halde, bu terim

$$\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}$$

$$+\underbrace{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}}_{-\ell^2}=-k^2r^2\sin^2\theta$$

$-\ell^2$ sabitine eşittir denilirse, bu eşitlikten

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-\ell^2 \qquad (2.3.14)$$

ve

$$\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}-\ell^2=-k^2r^2\sin^2\theta \qquad (2.3.15)$$

veya

$$\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}=-k^2r^2\sin^2\theta+\ell^2 \qquad (2.3.16)$$

(2.3.14) ve (2.3.16) denklemleri ortaya çıkar ve oluşan ifadede bir bağımsız değişken oluşturulamadığından; (2.3.16) denkleminde her iki taraf $1/\sin^2\theta$ ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\left(-k^2r^2\sin^2\theta+\ell^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}=-k^2r^2+\frac{\ell^2}{\sin^2\theta} \qquad (2.3.17)$$

ve oluşan küresel Bessel denklemi yalnız bırakılırsa,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+k^2r^2}_{Q^2}=\underbrace{\frac{\ell^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}}_{Q^2}$$

ve her iki taraf Q^2 sabitine eşittir denildiğinde,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+k^2r^2=Q^2 \qquad (2.3.18)$$

ve

$$\frac{\ell^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}=Q^2 \qquad (2.3.19)$$

şeklinde (2.3.18) ve (2.3.19) denklemleri elde edilmiş olur. Dolayısıyla, Helmholtz denkleminden küresel koordinatlarda değişkenlerine ayırma metodu ile bazı denklemler elde edilmiş olur. O halde, bulduğumuz bu denklemler özetlenecek olunursa,

1. $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-\ell^2$ (2.3.14)
2. $\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R}+k^2r^2=Q^2$ (2.3.18)
3. $\frac{\ell^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta}=Q^2$ (2.3.19)

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit veya değişken katsayılı üç homojen diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Dolayısıyla, Teorem 2.1.2 ‘e göre 2. mertebeden lineer sabit katsayılı bu (2.3.14) homojen diferansiyel denkleminin çözümü bulunabilir. Teorem 4.3 ‘e göre de, bu (2.3.18) küresel Bessel diferansiyel denkleminin çözümü yapılabilir. Ancak, (2.3.19) ‘daki genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denklemin çözümü için ise, bazı özel şartların bilinmesi gerekli olduğundan ve bizim için bu tezde silindirik koordinatlarda Helmholtz denkleminden elde edilen denklemlerin çözümlerinin bilinmesi önem arz ettiğinden, (2.3.19) denkleminin çözümü ele alınmayacaktır. Fakat, bu (2.3.14) ve (2.3.18) denklemlerinin çözümleri aşağıda yapıldığı üzere bilgi amaçlı gösterilebilir.

2.3.1. Küresel Koordinatlarda Helmholtz Denkleminden Elde Edilen Denklemlerin Çözümleri

2.3.1.1. İkinci Mertebeden Standart Lineer Homojen Diferansiyel Denklemin Çözümü

Bir önceki üst başlıkta Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun küresel koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan üç denklemden bir tanesi 2. mertebeden standart lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem olan

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-\ell^2 \qquad (2.3.14)$$

bu (2.3.14) denkleminin genel çözümü, Teorem 2.1.2 ‘e göre aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi}=-\ell^2$$

denkleminde ifade düzenlendiğinde (her iki taraf Φ ile çarpılırsa),

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\ell^2\Phi$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\ell^2\Phi=0$$

$$\Phi''-\ell^2\Phi=0 \qquad (2.3.20)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilir ve bu (2.3.14) denklemin genel çözümü de, Teorem 2.1.2 ‘ye göre bölüm 2.1 ‘in son kısmında açık olarak gösterildiği ve bölüm 2.2 ‘de de yapıldığı üzere; $\Phi = e^{m\varphi}$ şeklinde aranan çözümün ardışık olarak türevleri alınıp denklemde yerine yazıldığında,

$$\Phi_h(\varphi) = c_1\Phi_1(\varphi) + c_2\Phi_2(\varphi)$$

$$\Phi_{h_1} = c_1 e^{i\ell\varphi} + c_2 e^{-i\ell\varphi} \qquad (2.3.21)$$

şeklinde genel çözüm, lineer bağımsız çözümlerinden oluşan çözümlerin lineer kombinasyonu olarak bu şekilde bulunmuş olur ve ayrıca bu çözüm aşağıda olduğu gibi

$$\Phi_{h_1} = C_1 e^{\pm i\ell\varphi} \qquad (2.3.22)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

2.3.1.2. Küresel Bessel Diferansiyel Denkleminin Çözümü

Bir önceki üst başlıkta Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan üç denklemden bir tanesi de 2. mertebeden standart lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem olan

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]\frac{1}{R} + k^2r^2 = Q^2 \qquad (2.3.18)$$

bu (2.3.18) denklemin genel çözümüne geçilmeden önce ifade düzenlenirse (her taraf R ile çarpılırsa),

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] + k^2r^2R = Q^2R$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] + k^2r^2R - Q^2R = 0$$

$$2r\frac{dR}{dr} + r^2\frac{d^2R}{dr^2} + \left(k^2r^2 - Q^2\right)R = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \left(k^2r^2 - Q^2\right)R = 0 \qquad (2.3.23)$$

veya

$$r^2 R'' + 2rR' + \left(k^2 r^2 - Q^2\right) R = 0 \qquad (2.3.24)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi elde edilir ve bu tip denklemlere Bessel diferansiyel denklemi denir. Burada; k sabiti $k^2 > 0$ dır.

Dolayısıyla, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 'e göre; 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen küresel Bessel diferansiyel denkleminin kuvvet serisi ile çözüm yöntemine geçilmeden önce (2.3.24) 'deki Bessel denklemi standart form şeklinde yazılırsa,

$$r^2 R'' + 2rR' + \left(k^2 r^2 - Q^2\right) R = 0$$

Bessel diferansiyel denklemindeki r bağımsız değişkenini $kr = x$ ($k =$sabit) olacak şekilde x değişkenine bağlı olarak tanımlanırsa ($kr = x$ şeklinde r değişkeninin x değişkenine dönüşümü yapılırsa),

$kr = x$

$r = \dfrac{x}{k}$ olur ve

$R = R(r)$ fonksiyonun türevlerinin, $R = R(x)$ fonksiyonunun türevlerine dönüşümü de;

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{dR}{dx}.k = R'.k$$

$$R'' = \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dr}\right)\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr}\right)\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dx}\left(R'.k\right).k = \left(R''.k\right).k = R''.k^2$$

şeklinde olacağından; bulunan bu ifadeler (2.3.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 R''k^2+2\left(\frac{x}{k}\right)R'k+\left(k^2\left(\frac{x}{k}\right)^2-Q^2\right)R=0$$

$$x^2R''+2xR'+\left(x^2-Q^2\right)R=0 \tag{2.3.25}$$

olarak standart formuna getirilen (2.3.25) ‘deki Bessel diferansiyel denkleminde, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere;

$Q^2=n(n+1)$ yazılır ve $R(x)=\dfrac{Z(x)}{\sqrt{x}}$ şeklinde dönüşüm

uygulanıp ve (2.3.25) denkleminde yerine yazılırsa,

$$R(x)=Z(x)x^{-\frac{1}{2}}$$

$$R'(x)=Z'(x)x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}Z(x)x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$=Z'(x)x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}Z(x)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$R''(x)=Z''(x)x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}Z'(x)x^{-\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{2}Z'(x)x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)Z(x)x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$=Z''(x)x^{-\frac{1}{2}}-Z'(x)x^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}Z(x)x^{-\frac{5}{2}}$$

$$x^2R''+2xR'+\left(x^2-n(n+1)\right)R=0$$

$$x^2\left(Z''(x)x^{-\frac{1}{2}}-Z'(x)x^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}Z(x)x^{-\frac{5}{2}}\right)+2x\left(Z'(x)x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}Z(x)x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$+\left(x^2-n(n+1)\right)Z(x)x^{-\frac{1}{2}}=0$$

denklemi elde edilir ve kökten kurtulmak için; her iki taraf $x^{\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa, denklem

$$x^2\left(Z''(x)x^0-Z'(x)x^{-1}+\frac{3}{4}Z(x)x^{-2}\right)+2x\left(Z'(x)x^0-\frac{1}{2}Z(x)x^{-1}\right)$$

$$+\left(x^2-n\left(n+1\right)\right)\mathrm{Z}\left(x\right)x^0=0$$

$$x^2\mathrm{Z}''\left(x\right)-x\mathrm{Z}'\left(x\right)+\frac{3}{4}\mathrm{Z}\left(x\right)+2x\mathrm{Z}'\left(x\right)-\mathrm{Z}\left(x\right)+\left(x^2-n\left(n+1\right)\right)\mathrm{Z}\left(x\right)=0$$

$$x^2\mathrm{Z}''\left(x\right)+x\mathrm{Z}'\left(x\right)+\left(x^2+\frac{3}{4}-1-n^2-n\right)\mathrm{Z}\left(x\right)=0$$

$$x^2\mathrm{Z}''\left(x\right)+x\mathrm{Z}'\left(x\right)+\left(x^2-\frac{1}{4}-n^2-n\right)\mathrm{Z}\left(x\right)=0$$

$$x^2\mathrm{Z}''\left(x\right)+x\mathrm{Z}'\left(x\right)+\left(x^2-\left(n^2+n+\frac{1}{4}\right)\right)\mathrm{Z}\left(x\right)=0$$

$$x^2\mathrm{Z}''\left(x\right)+x\mathrm{Z}'\left(x\right)+\left(x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\mathrm{Z}\left(x\right)=0$$

halini alır ve bundan sonraki bölümde; $\mathrm{Z}\left(x\right)=\mathrm{Z}$ tanımı kullanılırsa,

$$x^2\mathrm{Z}''+x\mathrm{Z}'+\left(x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\mathrm{Z}=0 \qquad (2.3.26)$$

şeklinde $\mathrm{Z}\left(x\right)$ fonksiyonuna göre standart form şeklinde yazılan Bessel diferansiyel denkleminde, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, Teorem 4.3 'deki 2. Metod 'a (Frobenius metodu) göre bu diferansiyel denklemin silindirik koordinatlardaki çözümü için; (2.2.26) denkleminde her iki taraf x^2 'ye bölünürse,

$$\mathrm{Z}''+\frac{x}{x^2}\mathrm{Z}'+\frac{\left(x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{x^2}\mathrm{Z}=0$$

$$\mathrm{Z}''+\frac{1}{x}\mathrm{Z}'+\frac{\left(x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{x^2}\mathrm{Z}=0 \qquad (2.3.27)$$

$$\mathrm{Z}''+P\left(x\right)\mathrm{Z}'+Q\left(x\right)\mathrm{Z}=0$$

şeklinde elde edilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen Bessel diferansiyel denkleminde, $P(x)$ ve $Q(x)$, $x=0$ noktasında analitik değil ($x=0$ tekil nokta) olduğundan; denklem

$$Z'' + \frac{p(x)}{x} Z' + \frac{q(x)}{x^2} Z = 0$$

şeklinde yazıldığında, $p(x)$ ve $q(x)$, $x=0$ noktasında analitik ve

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = \lim_{x \to 0} (x - 0) \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow p_0$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} (x - 0)^2 \frac{\left(x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{x^2} = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow q_0 \; ; \; n = sabit$$

şeklinde her iki ifadenin de limiti var olduğundan; $P(x)$ ve $Q(x)$, $x=0$ noktasında tekil nokta olacağından, Frobenius seri çözümü yapılabilir. O halde, indis denkleminin kökleri,

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

$$r(r-1) + 1.r + \left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$r^2 - r + r - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$r^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$r = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$r_1 = n + \frac{1}{2} \text{ ve } r_2 = -\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

şeklinde bulunur ve Teorem 4.3 ‘deki indis köklerinin (a) kısmında belirtilen durum şartlarına göre,

$r_1 > r_2$ için $r_1 - r_2 = n + \frac{1}{2} - \left(-n - \frac{1}{2}\right)$

$= 2n + 1 \notin \mathbb{Z}^+$ olduğundan,

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r_1}$$

$Z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x^{\lambda+r_2}$ şeklinde çözüm aranır (demek diferansiyel denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlaması demektir).

O halde, 1. çözüm (Z_1) için ifadenin ardışık olarak türevleri alınıp (2.3.26) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Z_1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r}$$

$$Z_1' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r) a_\lambda x^{\lambda+r-1}$$

$$Z_1'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r)(\lambda+r-1) a_\lambda x^{\lambda+r-2}$$

$$x^2\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r)(\lambda+r-1) a_\lambda x^{\lambda+r-2}\right) + x\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r) a_\lambda x^{\lambda+r-1}\right)$$

$$+\left(x^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r}\right) = 0$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r)(\lambda+r-1) a_\lambda x^{\lambda+r} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+r) a_\lambda x^{\lambda+r} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r+2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r} = 0$$

denklemi elde edilir ve hepsinin ortak toplamda toplanabilmesi için; $x^{\lambda+r}$ nin kuvvetleri eşit hale getirilirse, denklem

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r+2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}=0$$

$\lambda\to\lambda-2$ yazılırsa

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+\sum_{\lambda=2}^{\infty}a_{\lambda-2} x^{\lambda+r}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}=0$$

halini alır. Burada; hepsinin aynı indise getirilebilmesi için, toplamlar istenilen indise kadar terimleri açık olarak toplam dışına yazıldığında;

$$(0+r)(0-1+r)a_0x^{0+r}+(1+r)(1-1+r)a_1x^{1+r}+(0+r)a_0x^{0+r}+(1+r)a_1x^{1+r}$$

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(a_0x^{0+r}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(a_1x^{1+r}\right)$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda x^{\lambda+r}+(\lambda+r)a_\lambda x^{\lambda+r}+a_{\lambda-2}x^{\lambda+r}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_\lambda x^{\lambda+r}\right]=0$$

$$r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{1+r}+ra_0x^r+(r+1)a_1x^{1+r}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_0x^r-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_1x^{1+r}$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda+(\lambda+r)a_\lambda+a_{\lambda-2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_\lambda\right]x^{\lambda+r}=0$$

$$\left[r(r-1)a_0+ra_0-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_0\right]x^r+\left[r(r+1)a_1+(r+1)a_1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_1\right]x^{1+r}$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda+(\lambda+r)a_\lambda+a_{\lambda-2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_\lambda\right]x^{\lambda+r}=0 \qquad (2.3.28)$$

denklemi elde edilir ve ifadenin sıfır olabilmesi için, x^λ nin bütün katsayılarının (her bir terimin tek tek) sıfır olması gerektiğinden;

$$\left[r(r-1)a_0+ra_0-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_0\right]x^r=0 \qquad (2.3.29)$$

$$\left[r(r+1)a_1+(r+1)a_1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2a_1\right]x^{1+r}=0 \qquad (2.3.30)$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_{\lambda}+(\lambda+r)a_{\lambda}+a_{\lambda-2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}a_{\lambda}\right]x^{\lambda+r}=0 \qquad (2.3.31)$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, bu eşitlikler sırasıyla incelenecek olunursa;

1. $$\left[r(r-1)a_0+ra_0-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}a_0\right]x^{r}=0$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında (ifade sabit değer olan a_0 parantezine alınırsa),

$$\left[a_0\left(r^2-r+r-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\right)\right]x^{r}=0$$

$$\left[a_0\left(r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\right)\right]x^{r}=0$$

$$a_0\left(r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\right)=0$$

eşitliği elde edilir. Burada; eşitliğin sağlanabilmesi için, çarpanlardan biri daima sıfır olması gerektiğinden ve $a_0\neq 0$ için ($a_0=0$ kabul edilmesi durumunda bütün terimler 0 çıkacağından ve çözüm bulunamayacağından; $a_0=1$ kabul edilirse),

$$r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}=0$$

$$r^2=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$r=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}}$$

$$r_1=n+\frac{1}{2}\ \text{ ve }\ r_2=-\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

olarak indis denkleminin kökleri bulunmuş olur.

2. $$\left[r(r+1)a_1+(r+1)a_1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a_1\right]x^{1+r}=0$$

ifadesinde de gerekli düzenlemeler yapıldığında (ifade sabit değer olan a_1 parantezine alınırsa),

$$\left[a_1\left(r^2+r+r+1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]x^{1+r}=0$$

$$\left[a_1\left(r^2+2r+1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]x^{1+r}=0$$

$$a_1\left(r^2+2r+1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)=0$$

denklemi elde edilir. Burada; bu eşitliğin sağlanabilmesi için, indis köklerinin denklemi sağlaması gerektiğinden ve $r_1=n+\frac{1}{2}$ ve $r_2=-\left(n+\frac{1}{2}\right)$ için, $r^2+2r+1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=0$ eşitliği gerçeklenmediğinden; $a_1=0$ olması gerekmektedir.

3. $$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[(\lambda+r)(\lambda+r-1)a_\lambda+(\lambda+r)a_\lambda+a_{\lambda-2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a_\lambda\right]x^{\lambda+r}=0$$

ifadesi için de gerekli düzenlemeler yapıldığında (ifade sabit değer olan a_λ parantezine alınırsa),

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[a_\lambda\left(\lambda^2+\lambda r-\lambda+\lambda r+r^2-r+\lambda+r-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)+a_{\lambda-2}\right]x^{\lambda+r}=0$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}\left[a_\lambda\left(\lambda^2+2\lambda r+r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)+a_{\lambda-2}\right]x^{\lambda+r}=0$$

$$a_\lambda\left(r^2+2\lambda r+r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)+a_{\lambda-2}=0\,;\ \lambda\geq 2$$

ifadesi elde edilir ve elde edilen bu ifadeye göre, terimlerin ortak toplamda toplanabilmesi için, yapılan dönüşüm $(\lambda \to \lambda - 2)$ geri alınırsa; $\lambda \to \lambda + 2$ yazılırsa,

$$a_{\lambda+2}\left((\lambda+2)^2 + 2(\lambda+2)r + r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right) + a_{\lambda+2-2} = 0\,;\ \lambda+2 \geq 2$$

$$a_{\lambda+2}\left((\lambda+2)(\lambda+2+2r) + r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right) + a_{\lambda} = 0\,;\ \lambda \geq 0$$

$$a_{\lambda+2}\left((\lambda+2)(\lambda+2+2r) + r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right) = -a_{\lambda}\,;\ \lambda \geq 0$$

$$a_{\lambda+2} = -\frac{a_{\lambda}}{(\lambda+2)(\lambda+2r+2) + r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\,;\ \lambda \geq 0 \qquad (2.3.32)$$

şeklinde bir tekrar ilişkisi (recurrence relation) elde edilir. Dolayısıyla,

1. Çözüm: $r_1 = n + \frac{1}{2}$ için;

$r = n + \frac{1}{2}$ kökü, (2.3.32) ‘deki tekrar bağıntısında yerine yazılırsa,

$$a_{\lambda+2} = -\frac{a_{\lambda}}{(\lambda+2)\left(\lambda+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\,;\ \lambda \geq 0$$

$$= -\frac{a_{\lambda}}{(\lambda+2)\left(\lambda+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}\,;\ \lambda \geq 0,\ \lambda \neq 2$$

eşitliği elde edilir ve

$\lambda = 0$ için, $a_2 = -\dfrac{a_0}{(0+2)\left(0+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$

$$= -\frac{a_0}{2\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$$

$$= -\frac{1}{2.2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)} \text{ ; } a_0 = 1 \text{ idi.}$$

$$= -\frac{1}{2^2 1!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}$$

$$\lambda = 1 \text{ için, } a_3 = -\frac{a_1}{(1+2)\left(1+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$$

$$= -\frac{a_1}{3\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)} \text{ ; } a_1 = 0 \text{ idi.}$$

$$= 0$$

$$\lambda = 2 \text{ için, } a_4 = -\frac{a_2}{(2+2)\left(2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$$

$$= -\frac{a_2}{4\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)+4\right)}$$

$$= -\frac{a_2}{4.2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$$

$$= -\frac{-\dfrac{1}{2^2 1!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}}{2^2.2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$$

$$= \frac{1}{2^2 2^2 2.1!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2^4 2!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}$$

$\lambda=3$ için, $a_5=-\dfrac{a_3}{(3+2)\left(3+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$

$$=-\frac{a_3}{5\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)+5\right)}$$

$$=0$$

$\lambda=4$ için, $a_6=-\dfrac{a_4}{(4+2)\left(4+2\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)}$

$$=-\frac{a_4}{6\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)+6\right)}$$

$$=-\frac{a_4}{6.2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)}$$

$$=-\frac{\dfrac{1}{2^4 2!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}}{2.3.2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)}$$

$$=-\frac{1}{2^4 2^2 3.2!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2^6 3!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}$$

…………….

şeklinde devam eden a_n sabitleri bulunur ve bu sabitlerin bütün terimleri genel olarak,

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p}\, p! \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \ldots \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 2 \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} \;;$$

$p = 1, 2, 3, \ldots$

biçiminde yukarıdaki (2.3.33) ‘deki gibi ifade edilebilir ve bu bağıntıyı daha kompakt bir formda yazabilmek için, Teorem 2.2.1 ‘de tanımlanan Gama fonksiyonun özelliği kullanılırsa ve (2.3.31) ‘de elde edilen bu bağıntının payda bölümündeki

$$\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 2 \right) \ldots \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 2 \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right)$$

kısmını elde edebilmek için,

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ eşitliğinde; $n \to \left(n+\frac{1}{2} \right) + p + 1$ yazılır ve ifade açılırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p + 1 \right) &= \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \\
&= \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \\
&= \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \ldots\ldots \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 2 \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right) \Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right)}{\Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} = \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \ldots\ldots \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 2 \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right)$$

eşitliği elde edilir ve bu ifade istenilen ilişkide yerine yazıldığında,

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p}\, p! \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + p - 1 \right) \ldots\ldots \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 2 \right) \left(\left(n+\frac{1}{2} \right) + 1 \right)}$$

$$=(-1)^p \frac{\Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}{2^{2p}\, p!\,\Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+p-1\right)}$$

$$=(-1)^p \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}{2^{2p}\, p!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+p\right)!} \quad ; \quad p=1,2,3,... \tag{2.3.34}$$

şeklinde ifadenin daha kompakt bir biçimde gösterilmesi sağlanmış olur. Dolayısıyla,

$$Z_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+r_1}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+n+\frac{1}{2}}$$

$$=a_0 x^{n+\frac{1}{2}}+a_1 x^{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)}+a_2 x^{2+\left(n+\frac{1}{2}\right)}+...$$

$$=x^{n+\frac{1}{2}}+0+\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}{2^2 1!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)!}\right)x^{\left(n+\frac{1}{2}\right)+2}+0+\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}{2^4 2!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)!}\right)x^{\left(n+\frac{1}{2}\right)+4}$$

$$+0+\left(-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}{2^6 3!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)!}\right)x^{\left(n+\frac{1}{2}\right)+6}+...$$

$$=x^{n+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!x^2}{2^2 1!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)!}+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!x^4}{2^4 2!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\right)!}-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!x^6}{2^6 3!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\right)!}+...\right)$$

$$=x^{n+\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!x^{2\lambda}}{2^{2\lambda}\lambda!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda\right)!}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,x^{2\lambda+n+\frac{1}{2}}}{2^{2\lambda}\lambda!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda\right)!}$$ ve pay ve payda $2^{n+\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa,

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,x^{2\lambda+n+\frac{1}{2}}}{2^{2\lambda}\lambda!\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda\right)!}\frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=2^{n+\frac{1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{x^{2\lambda+n+\frac{1}{2}}}{2^{2\lambda+n+\frac{1}{2}}\lambda!\left(n+\frac{1}{2}+\lambda\right)!}$$

$$=2^{n+\frac{1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n+\frac{1}{2}}}_{J_{n+\frac{1}{2}}(x)} \quad ;\ x>0 \qquad (2.3.35)$$

ve $n+\frac{1}{2}\to v$ yazılırsa,

$$=2^{v}v!\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(v+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+v}}_{J_v(x)} \quad ;\ x>0\ ,\ v\notin\mathbb{Z} \qquad (2.3.36)$$

veya

$$=2^{v}v!\underbrace{\sum_{\lambda=v}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(v+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+v}}_{J_v(x)} \quad ;\ x>0\ ,\ v\notin\mathbb{Z} \qquad (2.3.37)$$

veya

$$=c_3 J_v(x) \qquad (2.3.38)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen küresel Bessel diferansiyel denklemin ($Z = Z(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ düzgün tekil noktasındaki) 1. çözümü (lineer bağımsız {ortak} çözümlerinden birisi) bulunmuş olur.

2. Çözüm: $r_2 = -n - \frac{1}{2}$ için;

$r = -n - \frac{1}{2}$ kökü de, bu 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen küresel Bessel diferansiyel denklemin bir çözümü olduğundan; Teorem 2.1.2 ‘ye göre 1. çözüm bu diferansiyel denklemi sağladığından, 2. çözüm de 1. çözümdeki denklemi sağlayacağına göre ve bu iki çözüm birbiri ile lineer bağımlı çözüm olacağından, ve

$r_1 > r_2$ için $r_1 - r_2 = n + \frac{1}{2} - \left(-n - \frac{1}{2}\right)$

$= 2n + 1 \notin \mathbb{Z}^+$ olduğundan; (2.3.35) çözüm fonksiyonunda $\left(n + \frac{1}{2} \rightarrow -n - \frac{1}{2}\right)$ yazılırsa,

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!\left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n+\frac{1}{2}}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!\left(-n + \lambda - \frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-\frac{1}{2}} \qquad (2.3.39)$$

veya

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(-v + \lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-v} \quad ;\ x > 0\ ,\ v \notin \mathbb{Z} \qquad (2.3.40)$$

veya

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{\lambda=v}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(-v + \lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-v} \quad ;\ x > 0\ ,\ v \notin \mathbb{Z} \qquad (2.3.41)$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen küresel Bessel diferansiyel denklemin ($Z = Z(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ düzgün tekil noktasındaki) 1. çözümüne bağlı lineer bağımlı çözüm bulunmuş olur ve aşağıda gösterildiği üzere,

$$J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x)$$

şeklinde de bir eşitlik söz konusudur.

$$J_{-v}(x) = \sum_{\lambda=v}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(-v+\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda - v}$$

$\lambda \to \lambda + v$ yazılırsa

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+v}}{(\lambda+v)!(-v+\lambda+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(\lambda+v)-v}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+v}}{(\lambda+v)!(\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2v-v}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}(-1)^{v}}{\lambda!(v+\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+v}$$

$$= (-1)^v \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(v+\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+v}$$

$$J_v(x) = (-1)^v J_v(x)$$

O halde,

$J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x)$ eşitliğinde $(-1)^v = \cos v\pi$ ve $0 = \sin v\pi$ olduğundan,

$$J_{-v}(x) - J_v(x)\cos v\pi = 0 \ ; \ v \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{J_v(x)\cos n\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} = \mathrm{N}_v(x) \tag{2.3.42}$$

fonksiyonu Bessel diferansiyel denklemin ($Z = Z(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ düzgün tekil noktasındaki) 2. çözümü (lineer bağımsız {ortak} çözümlerinden diğeri) olarak bu şekilde bulunmuş olur. Dolayısıyla, küresel Bessel denkleminin ($Z = Z(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ düzgün tekil noktasındaki) genel çözümü;

$$\begin{aligned} Z(x) &= c_3 Z_1(x) + c_4 Z_2(x) \\ &= c_3 J_{n+\frac{1}{2}}(x) + c_4 N_{n+\frac{1}{2}}(x) \ ; n \in \mathbb{Z} \\ &= c_3 J_v(x) + c_4 N_v(x) \end{aligned}$$

$$R(\rho) = c_3 J_v(m\rho) + c_4 N_v(m\rho) \ ; v \notin \mathbb{Z} \tag{2.3.43}$$

şeklinde lineer bağımsız çözümlerden oluşan, çözümlerin lineer kombinasyonu (2 tane çözüm 2 tane parametreye bağlı) olarak bu şekilde bulunmuş olur ve ayrıca 1. dereceden Bessel $\left(J_v(x)\right)$ ve 2. dereceden Neumann $\left(N_v(x)\right)$ fonksiyonları Hankel $\left(H_v(x)\right)$ fonksiyonları cinsinden de yazılabileceğinden; bu çözüm aşağıdaki tanımlar kullanılarak, şu şekilde de ifade edilebilir.

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iN_v(x) \tag{2.3.44}$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iN_v(x) \tag{2.3.45}$$

tanımlarına göre, 1. dereceden Hankel $\left(H_v^{(1)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu ile 2. dereceden Hankel $\left(H_v^{(2)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu önce taraftara toplanırsa,

$$H_v^{(1)}(m\rho) + H_v^{(2)}(m\rho) = 2J_v(m\rho)$$

veya

$$J_v(m\rho) = \frac{1}{2}\left(H_v^{(1)}(m\rho) + H_v^{(2)}(m\rho)\right)$$

denklemi elde edilir ve Şimdi de, bu 1. dereceden Hankel $\left(H_v^{(1)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu ile 2. dereceden Hankel $\left(H_v^{(2)}(m\rho)\right)$ fonksiyonu taraftara çıkarılırsa,

$$H_v^{(1)}(m\rho) - H_v^{(2)}(m\rho) = 2iN_v(m\rho)$$

veya

$$\mathrm{N}_v(m\rho)=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{H}_v^{(1)}(m\rho)-\mathrm{H}_v^{(2)}(m\rho)\right)$$

eşitliği bulunmuş olur ve elde edilen bu değerler (2.3.43) genel çözümünde yerine yazıldığında,

$$R(\rho)=c_3\frac{1}{2}\left(\mathrm{H}_v^{(1)}(m\rho)+\mathrm{H}_v^{(2)}(m\rho)\right)+c_4\frac{1}{2i}\left(\mathrm{H}_v^{(1)}(m\rho)-\mathrm{H}_v^{(2)}(m\rho)\right)\ ;\ v\notin\mathbb{Z}$$

$$=\left(\frac{c_3}{2}+\frac{c_4}{2i}\right)\mathrm{H}_v^{(1)}(m\rho)+\left(\frac{c_3}{2}-\frac{c_4}{2i}\right)\mathrm{H}_v^{(2)}(m\rho) \qquad (2.3.46)$$

ifadesi elde edilir. Burada; $\frac{c_3}{2}+\frac{c_4}{2i}=d_1$ ve $\frac{c_3}{2}-\frac{c_4}{2i}=d_2$ şeklinde tanımlanırsa, çözüm fonksiyonun bir diğer gösterimi de;

$$=d_1\mathrm{H}_v^{(1)}(m\rho)+d_2\mathrm{H}_v^{(2)}(m\rho)\ ;\ v\notin\mathbb{Z} \qquad (2.3.47)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Tanım 3.1: Küresel Bessel fonksiyonlarının $j_n(x), n_n(x)$ ve $h_n(x)$ cinsinden çözümleri aşağıdaki şekilde olduğu gibi de ifade edilebilir.

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$n_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$$

$$h_n^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$$

$$=j_n(x)+in_n(x)$$

$$h_n^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$$

$$=j_n(x)-in_n(x)$$

2.3.1.3. Genelleştirilmiş Legendre Diferansiyel Denkleminin Çözümü

Bir önceki üst başlıkta Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan üç denklemden bir tanesi de 2. mertebeden standart lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem olan

$$\frac{\ell^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]\frac{1}{\Theta} = Q^2 \tag{2.3.19}$$

bu (2.3.19) denklemin genel çözümüne geçilmeden önce ifade düzenlenirse (her taraf Θ ile çarpılırsa),

$$\frac{\ell^2}{\sin^2\theta}\Theta - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = Q^2\Theta$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] - \frac{\ell^2}{\sin^2\theta}\Theta + Q^2\Theta = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\cos\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \sin\theta\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right] - \frac{\ell^2}{\sin^2\theta}\Theta + Q^2\Theta = 0$$

$$\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right] + \left(-\frac{\ell^2}{\sin^2\theta} + Q^2\right)\Theta = 0$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta} + \left(-\frac{\ell^2}{\sin^2\theta} + Q^2\right)\Theta = 0 \tag{2.3.48}$$

veya

$$\Theta'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta' + \left(-\frac{\ell^2}{\sin^2\theta} + Q^2\right)\Theta = 0 \tag{2.3.49}$$

şeklinde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi elde edilir ve bu tip denklemlere genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denklemi denir. Burada; ℓ sabiti $\ell^2 > 0$ dır.

Dolayısıyla, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 ‘e göre; 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen küresel genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denkleminin kuvvet serisi ile çözüm yöntemine geçilmeden önce (2.3.49) ‘deki genelleştirilmiş Legendre denklemi standart form şeklinde yazılırsa,

$$\Theta'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta' + \left(-\frac{\ell^2}{\sin^2\theta} + Q^2 \right)\Theta = 0$$

Genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denklemindeki θ bağımsız değişkenini $\cos\theta = x$ olacak şekilde x değişkenine bağlı olarak tanımlanırsa ($\cos\theta = x$ şeklinde θ değişkeninin x değişkenine dönüşümü yapılırsa),

$\cos\theta = x$

$\theta = \arccos x$ olur ve $\cos\theta = x$ ise, $\cos^2\theta = x^2$ olduğundan $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\sin^2\theta + x^2 = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - x^2 \text{ ve } \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$$

eşitlikleri elde edilmiş olur.

$\Theta = \Theta(\theta)$ fonksiyonun türevlerinin, $\Theta = \Theta(x)$ fonksiyonunun türevlerine dönüşümü de;

$$\begin{aligned}\Theta' &= \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta}\\ &= \frac{d\Theta}{dx}.(-\sin\theta)\\ &= -\Theta'\sin\theta\\ &= -\Theta'\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta'' &= \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\frac{dx}{d\theta}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta}\right)\frac{dx}{d\theta}\\ &= \frac{d}{dx}(-\Theta'.\sin\theta)[-\sin\theta]\\ &= \frac{d}{dx}\left(-\Theta'\sqrt{1-x^2}\right)\left[-\sqrt{1-x^2}\right]\\ &= \left(-\Theta''\sqrt{1-x^2} - \Theta'\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\left[-\sqrt{1-x^2}\right]\\ &= \Theta''\left(1-x^2\right) - y'x\\ &= \Theta''\left(1-x^2\right) - x\Theta'\end{aligned}$$

şeklinde olacağından; bulunan bu ifadeler (2.3.49) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Theta''\left(1-x^2\right)-x\Theta'+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\Theta'\sqrt{1-x^2}\right)+\left(-\frac{\ell^2}{\sin^2\theta}+Q^2\right)\Theta=0$$

$$\Theta''\left(1-x^2\right)-x\Theta'-x\Theta'+\left(-\frac{\ell^2}{1-x^2}+Q^2\right)\Theta=0$$

$$\Theta''\left(1-x^2\right)-2x\Theta'+\left(-\frac{\ell^2}{1-x^2}+Q^2\right)\Theta=0 \qquad (2.3.50)$$

veya

$$\left(1-x^2\right)\Theta''-2x\Theta'+\left(-\frac{\ell^2}{1-x^2}+Q^2\right)\Theta=0 \qquad (2.3.51)$$

olarak standart formuna getirilen (2.3.51) ‘deki genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denkleminde, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$Q^2=n\left(n+1\right)$$

yazılıp ve (2.3.51) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\left(1-x^2\right)\Theta''-2x\Theta'+\left(-\frac{\ell^2}{1-x^2}+n\left(n+1\right)\right)\Theta=0 \qquad (2.3.52)$$

denklemi elde edilir ve bu (2.3.52) ‘deki diferansiyel denkleminde, $\ell=0$ alındığında da;

$$\left(1-x^2\right)\Theta''-2x\Theta'+n\left(n+1\right)\Theta=0 \qquad (2.3.53)$$

şeklinde genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denkleminin özel hali olan Legendre diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Ancak, Helmholtz dalga denklemindeki skaler ψ fonksiyonunun küresel koordinatlarda değişkenlerine ayrıştırılması ile ortaya çıkan üç denklemin çözümüne geçilmeden önce; belirttiğimiz üzere, bu genelleştirilmiş Legendre denkleminin çözümünün yapılabilmesi için, bazı özel şartların bilinmesi gerekli olduğundan; bu diferansiyel denklemin çözümü ele alınmayacaktır [11,12]. Fakat, (2.3.52) ‘deki genelleştirilmiş Legendre diferansiyel denkleminin indirgenmesi ile elde edilen (2.3.53) ‘deki Legendre diferansiyel denkleminin çözümü için; benzer şekilde, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; Teorem 4.2 ‘deki 2. Metod ’a (Taylor metodu) göre (2.3.53) denkleminde her iki taraf $1-x^2$ ‘ye bölünürse,

$$\Theta'' + \left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)\Theta' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}\Theta = 0 \tag{2.3.54}$$

$$\Theta'' + P(x)\Theta' + Q(x)\Theta = 0$$

şeklinde elde edilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen Legendre diferansiyel denkleminde, $P(x)$ ve $Q(x)$, $x=0$ noktasında analitik ($x=0$ adi nokta) olduğundan; Maclaurin seri çözümü yapılabileceğinden,

$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde çözüm aranır ve ifadenin ardışık olarak türevleri alınıp (2.3.53) denkleminde yerine yazılırsa (benzer şekilde daha önceki bölümlerdeki seri metodunda yapıldığı üzere gerekli işlemler yapıldığında),

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \ldots\right)$$

$$+a_1\left(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots\right)$$

şeklinde bulunan çözümde de,

$$a_0 = (-1)^{n/2}\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} = (-1)^{n/2}\frac{n!}{2^n\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}$$

$$a_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n-1)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n+1)!}{2^n\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]!\left[\frac{n+1}{2}\right]!}$$

olmak üzere,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{2.3.55}$$

$$N \text{ çift ise, } N = \frac{n}{2}$$

$$N \text{ tek ise, } N = \frac{n-1}{2}$$

olacak şekilde 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen Legendre diferansiyel denklemin ($\Theta = \Theta(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ adi noktasındaki) genel çözümü bulunmuş olur [13] ve bu polinomun numerik değerleri;

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

şeklinde bulunmuş olur.

Bu bölümün araştırılmasında [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13] kaynaklarından yararlanılmıştır.

3. MAXWELL DENKLEMLERİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMLERİNDEKİ UYGULAMALARI

Bu bölümde, silindirik koordinatlardaki Helmholtz dalga denkleminin çözümünün, silindirik elektromanyetik dalgaları (elektrik ve manyetik alanlar) tasvir eden Maxwell denklemlerindeki (ki bu denklemde bir Helmholtz denklemidir) silindiriksel simetrik çözümleri incelenerek, dalga şekilleri maple yazılımı ile çizilecektir.

3.1. Maxwell Denklemleri

Maxwell denklemleri, elektromanyetik alanları (elektrik ve manyetik alanın birleşik durumu) betimleyen diferansiyel denklem sistemleridir. Bu denklemlerin en belirgin özelliği elektromanyetik dalganın yayılmasını tasvir eden çözümleri sağlamasıdır. Elektromanyetik dalgalar, elektrik yüklü parçacıkların (ki bunlar elektronlar ve protonlar olarak bilinir) ivmeli hareketleri (hızlanan veya yavaşlayan) sonucunda etraflarında oluşturdukları ve boşluktaki hızları ışık hızına eşit olan dalgalar olarak bilinirler. Bu yüklü parçacıkların durgun halde olması ile elektrik alan, sabit hızla hareket etmesi ile sadece manyetik alan, ivmeli olarak hareket etmesi ile de elektromanyetik alan oluşmaktadır. Dolayısıyla, bu yayılan elektromanyetik dalgalar, bir noktadan bir başka noktaya olan enerji transferinin bir göstergesidir. Kaynaktan yoksun (elektrik yük yoğunluğu ve elektrik akımının olmadığı durum, diğer bir ifade ile elektrik alanı ve manyetik alanı oluşturan kaynağın dışında kalan bir bölgedeki elektromanyetik alanının hesaplanması) Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0\,, \tag{3.1.1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\,, \tag{3.1.2}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0\,, \tag{3.1.3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0\,. \tag{3.1.4}$$

Burada, $\vec{E}$ elektrik alan (yük yoğunluğu ile oluşur) vektörünü, $\vec{B}$ manyetik alan (elektrik akımı ile oluşur) vektörünü ve $\vec{\nabla}$ Nabla (gradyan) birinci dereceden kısmi türev operatörünü belirtir. O halde, elektrik $\left(\vec{E}\right)$ ve manyetik $\left(\vec{B}\right)$ alanlar harmonik zaman bağlılığı olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılacak olunursa, ve

$$\vec{E} = \left|\vec{E}\right| e^{-i\omega t} \tag{3.1.5}$$

$$\vec{B} = \left|\vec{B}\right| e^{-i\omega t} \tag{3.1.6}$$

(3.1.2) ve (3.1.4) denklemlerindeki gerekli türev işlemleri bu değerlere göre yapıldığında birinci dereceden Maxwell denklemleri aşağıdaki şekle indirgenmiş olur. Burada, t zamanı arttıkça elektromanyetik dalganın şiddeti azalacağından dolayı bu dalganın küçülerek sönümlenebilmesi için $-$ kuvvetli değer olanı alınmıştır. ($t \to \infty$ için, $\vec{E} = 0$ ve $\vec{B} = 0$ olabilmesi için)

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0\,, \tag{3.1.7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - i\omega\vec{B} = 0\,, \tag{3.1.8}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0\,, \tag{3.1.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + i\omega\mu\varepsilon\vec{E} = 0\,. \tag{3.1.10}$$

(3.1.8) ve (3.1.10) denklemlerinin çözümlerinin bulunması bu hali ile zor olduğundan; (bir denklemin içinde iki tane bilinmeyen olduğundan) birini diğerinin cinsinden yazılması gerekmektedir. Bunun yapılabilmesi içinde bu denklemleri ikinci dereceden Maxwell denklemleri (Helmholtz denklemi) olarak yazılması gerekir. O halde, denklem (3.1.8) ‘in her iki tarafı sol taraftan $\vec{\nabla}$ operatörü ile vektör çarpımını alınırsa;

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) - i\omega\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \tag{3.1.11}$$

veya

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = i\omega\vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{3.1.12}$$

denklemleri elde edilir ve vektör özdeşliği tanımına göre, $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$ eşitliği söz konusu olduğundan ve buradaki $\vec{A}$ herhangi bir vektörel alan olmak üzere, kullanıldığında (ki burada $\vec{A}=\vec{E}$ dir); denklem (3.1.12)

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=i\omega\vec{\nabla}\times\vec{B} \tag{3.1.13}$$

şekline dönüşür ve, denklem (3.1.9) ve (3.1.10), denklem (3.1.13) ‘de yerine yazılırsa;

$$-\nabla^2\vec{E}=i\omega\left(-i\omega\mu\varepsilon\vec{E}\right) \tag{3.1.14}$$

veya

$$\nabla^2\vec{E}=-\omega^2\mu\varepsilon\vec{E} \tag{3.1.15}$$

denklemi elde edilir. Eğer (3.1.15) ‘deki denklemde $k=\sqrt{\mu\varepsilon}w$ olarak tanımlanırsa da, (3.1.15) denklemi;

$$\nabla^2\vec{E}=-k^2\vec{E} \tag{3.1.16}$$

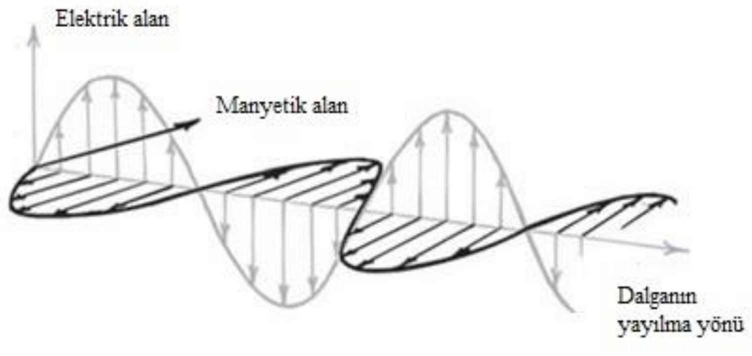
veya

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \tag{3.1.17}$$

olarak bulunmuş olur. Benzer işlemler (3.1.4) denklemi için de tekrarlanırsa,

$$\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0 \tag{3.1.18}$$

denklemi elde edilir ve elde edilen bu son (3.1.17) ve (3.1.18) denklemleri, elektrik ve manyetik alanları tasvir eden ikinci dereceden Maxwell denklemleridir. Aslında bu denklemler de yapısal olarak Helmholtz denkleminin ta kendisidir. Dolayısıyla, aslında Maxwell denklemleri elektromanyetik alanları tasvir eden ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklem sistemleri olarak da bilinmektedir. Elektromanyetik alanlar da, şekilde görüldüğü gibi elektrik ve manyetik alanların birbirine dik olarak titreşmeleri sonucunda oluşan ve birlikte hareket eden dalgalardır.



Şekil 3.1.1: Elektromanyetik dalga diyagramı

Bu dalgaları tasvir eden ve Maxwell denklemleri olarak bilinen denklemler aslında Helmholtz denklemleridir ve aşağıdaki gibi elektrik ve manyetik alanları tasvir etmek üzere her biri için ayrı ayrı yazılırlar.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \qquad (3.1.19)$$

$$\nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \qquad (3.1.20)$$

Burada, $\vec{E}$ elektrik alan vektörünü, $\vec{B}$ vektörel manyetik alan şiddetini ve $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$ olmak üzere de bir sabiti ifade eder ve sabit terim içindeki $\omega = 2\pi f$ olup açısal hızı, f frekansı, μ ve ε ise de elektromanyetik alanın içinde bulunduğu ortamın sırasıyla manyetik ve elektrik alan geçirgenlik katsayılarıdır ve aşağıdaki gibidir.

$$\mu = \mu_r \mu_0 \qquad (3.1.21)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad (3.1.22)$$

Eğer $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ alınırsa, $\mu = \mu_0$ ve $\varepsilon = \varepsilon_0$ olur ki bu durumda elektromanyetik alanın boşluk içinde yayıldığını gösterir. Bir başka değişle,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \qquad (3.1.23)$$

şeklinde yazılırsa ve burada $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ olarak tanımlandığında, bu elektromanyetik dalganın faz hızını vermektedir. Boşlukta bu değer,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(8,85\times10^{-12}\right)}} \cong 3\times10^{8}\, m/s \tag{3.1.24}$$

olarak ışık hızını belirtir.

3.2. Silindirik Koordinatlarda Maxwell Denklemlerinin Çözümü

Elektrik ve manyetik alanları tasvir eden

$$\nabla^2\vec{E}\left(\rho,\varphi,z\right) + k^2\vec{E}\left(\rho,\varphi,z\right) = 0 \tag{3.2.1}$$

$$\nabla^2\vec{B}\left(\rho,\varphi,z\right) + k^2\vec{B}\left(\rho,\varphi,z\right) = 0 \tag{3.2.2}$$

her iki Maxwell denklemi aynı olduğundan bir tanesini çözmek yeterli olacaktır. O halde, silindirik koordinatlarda elektrik alan vektörü

$$\vec{E}\left(\rho,\varphi,z\right) = \hat{\rho}E_\rho\left(\rho,\varphi,z\right) + \hat{\varphi}E_\varphi\left(\rho,\varphi,z\right) + \hat{z}E_z\left(\rho,\varphi,z\right) \tag{3.2.3}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılmış olarak ifade edilebilir ve burada; $\hat{\rho},\hat{\varphi}$ ve $\hat{z}$ silindirik koordinatlardaki birim vektörleri, E_ρ, E_φ ve E_z ise, bu yönlerdeki elektrik alan bileşenlerini göstermektedir. O halde, bu ifade denklem (3.2.1) ‘de yerine yazılırsa

$$\nabla^2\vec{E}\left(\rho,\varphi,z\right) + k^2\vec{E}\left(\rho,\varphi,z\right) = 0$$

$$\nabla^2\left(\hat{\rho}\vec{E}_\rho + \hat{\varphi}\vec{E}_\varphi + \hat{z}\vec{E}_z\right) + k^2\left(\hat{\rho}\vec{E}_\rho + \hat{\varphi}\vec{E}_\varphi + \hat{z}\vec{E}_z\right) = 0 \tag{3.2.4}$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki bu ifadenin basit bir skaler alan denklemine indirgenmesi mümkün değildir. Ancak, birbirleri ile ilişkili skaler denklem sistemine indirgenebilir. Biz bu tezde, silindirik dalganın $z-$ yönünde yayıldığını varsayarak ($\hat{\rho},\hat{\varphi}$ olan diğer yönlerde salınım gerçekleşir), Maxwell denkleminin sadece $z-$ yönündeki bileşkesinin çözümünü bulacağız. O halde,

$$\nabla^2\left(\hat{\rho}E_\rho\right) \neq \hat{\rho}\nabla^2 E_\rho$$

$$\nabla^2\left(\hat{\varphi}E_\varphi\right) \neq \hat{\varphi}\nabla^2 E_\varphi$$

$$\nabla^2\left(\hat{z}E_z\right) = \hat{z}\nabla^2 E_z$$

olmak üzere,

$$\nabla^2\vec{E}(\rho,\varphi,z) = \nabla^2\left(\hat{\rho}E_\rho + \hat{\varphi}E_\varphi + \hat{z}E_z\right) = \nabla^2\left(\hat{\rho}E_\rho + \hat{\varphi}E_\varphi\right) + \hat{z}E_z \qquad (3.2.5)$$

eşitliği sağlanacağından, Maxwell denklemlerini skaler alan denklemleri olarak aşağıdaki gibi düşünebiliriz.

$$\nabla^2 E_z(\rho,\varphi,z) + k^2 E_z(\rho,\varphi,z) = 0 \qquad (3.2.6)$$

$$\nabla^2 B_z(\rho,\varphi,z) + k^2 B_z(\rho,\varphi,z) = 0 \qquad (3.2.7)$$

Dolayısıyla, silindirik koordinatlardaki silindirik dalga denklemini elde ederken, aşağıda genel olarak ele alınan skaler $\psi(\rho,\varphi,z)$ fonksiyonunun çözümünü bulmamız yeterli olacaktır (ki ψ skaler fonksiyonu çözüldüğünde, ψ yerine; E yazıldığında elektrik alan, B yazıldığında manyetik alan denklemlerinin çözümü bulunmuş olacaktır),

$$\nabla^2\psi(\rho,\varphi,z) + k^2\psi(\rho,\varphi,z) = 0\,.$$

Bölüm 2.2 'de, silindirik koordinatlarda ψ potansiyel fonksiyonun değişkenlerine ayırma metodu kabul edilen $\psi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ çözümü kullanılarak Helmholtz denklemi sırasıyla aşağıdaki denklemlere indirgenmişti;

1. $\dfrac{d^2 Z}{dz^2} - \ell^2 Z = 0$
2. $\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0$
3. $\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right]\dfrac{1}{R} = -m^2\rho^2 + n^2$

$k^2 = m^2 - \ell^2$

Bu denklem sistemlerinin çözümleri yeniden yazılacak olunursa,

1. $$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \ell^2 Z = 0$$

$$Z'' - \ell^2 Z = 0$$

şeklinde elde edilen 2. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$Z_{h_1} = c_1 e^{\ell z} + c_2 e^{-\ell z}$$

olarak (2.2.23) ‘deki denklemde olduğu üzere bu şekilde bulunmuştu ve burada; c_1 ve c_2 integral sabitleridir.

2. $$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0$$

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0$$

şeklinde elde edilen 2. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$\Phi_{h_2} = c_3 e^{in\varphi} + c_4 e^{-in\varphi}$$

olarak denklem (2.2.27) ‘de gösterildiği üzere bu şekilde bulunmuş olup c_3 ve c_4 integral sabitleridir.

3. $$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{dR}{d\rho}\right]\frac{1}{R} = -m^2 \rho^2 + n^2$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(m^2 \rho^2 - n^2\right) R = 0$$

şeklinde elde edilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi silindirik Bessel diferansiyel denklemi olup genel çözümü,

$$R_{h_3} = c_5 J_n\left(m\rho\right) + c_6 \mathrm{N}_n\left(m\rho\right) \; ; n \in \mathbb{Z}$$

olarak (2.2.46) ‘deki denklemde belirtildiği üzere bu şekilde bulunmuştu ve burada; c_5 ve c_6 integral sabitlerini, $J_n(m\rho)$ birinci dereceden Bessel fonksiyonunu ve $N_n(m\rho)$ ise, ikinci dereceden Neumann fonksiyonunu göstermektedir. Elde edilen bu çözümü bölüm 2.2.1.2 ‘de gösterildiği üzere, Hankel fonksiyonları cinsinden denklem (2.2.50) ‘de aşağıda olduğu gibi yazmakta mümkündür.

$$R_{h_3} = d_1 \mathrm{H}_n^{(1)}(m\rho) + d_2 \mathrm{H}_n^{(2)}(m\rho) \ ; n \in \mathbb{Z}$$

Dolayısıyla, $R(\rho)$, $\Phi(\varphi)$ ve $\mathrm{Z}(z)$ fonksiyonlarına bağlı ψ potansiyel fonksiyonunun değişkenlerine ayırma metodu ile silindirik koordinatlardaki genel çözümü,

$$\psi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{Z}(z)$$

$$\psi_{mn}(\rho,\varphi,z) = R_{mn}(\rho)\Phi_n(\varphi)\mathrm{Z}_m(z)$$

$$\psi_h = R_{h_3}\Phi_{h_2}Z_{h_1}$$

$$\psi_h = \sum_{m,n}\left[A_{1_{mn}} J_n(m\rho) + A_{2_{mn}} N_n(m\rho)\right]e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right)$$

genel olarak (2.2.55) ‘deki denklemde tanımlandığı gibi bu şekilde bulunmuştu. Dolayısıyla, silindirik koordinatlarda Maxwell denklemlerinin genel çözümleri sırasıyla,

$$E_z(\rho,\varphi,z) = \sum_{m,n}\left[A_{1_{mn}} J_n(m\rho) + A_{2_{mn}} N_n(m\rho)\right]e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right) \quad (3.2.8)$$

$$B_z(\rho,\varphi,z) = \sum_{m,n}\left[A_{1_{mn}} J_n(m\rho) + A_{2_{mn}} N_n(m\rho)\right]e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z\right) \quad (3.2.9)$$

bu şekilde bulunmuş olur.

3.3. Bessel Fonksiyonunun Asimptotik Özellikleri

Helmholtz denkleminin, silindirik ve küresel koordinatlarda değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümlerinin bulunması sırasında ortaya çıkan Bessel denkleminin çözümü ile bulunan Bessel fonksiyonları (ki $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, silindirik problemlerin çözümünde $n =$ bir tamsayı değeri, küresel problemlerin çözümünde $n = n + \frac{1}{2}$ gibi bir yarım tamsayı değeri almaktadır) dalga yayılımı gibi bir çok problemin çözümü için önemli bir yer tutmaktadır. Bu fonksiyonlar (birinci dereceden Bessel fonksiyonu $J_n(\rho)$ ve ikinci dereceden Bessel fonksiyonu $\mathrm{N}_n(\rho)$) silindirik koordinatlarda genel olarak,

$$J_n(\rho)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2\lambda+n} \quad \text{ve} \quad \mathrm{N}_n(\rho)=\frac{J_n(\rho)\cos n\pi-J_{-n}(\rho)}{\sin n\pi}$$

bu şekilde bulunmuştu. Ancak, elektromanyetik dalga yayılımı problemlerinin çözümünde bu fonksiyonların yakın ve çok uzak noktalardaki değerlerinin nasıl davrandığı önemli bir yer teşkil etmektedir. Bunun için bu fonksiyonların negatif olmayan bu asimptotik formları,

$$\rho<<1 \text{ ise, } J_n(\rho)\rightarrow\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n} \tag{3.3.1}$$

$$\mathrm{N}_n(\rho)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{\rho}{2}\right)+0.5772\right], n=0\\[2ex] -\dfrac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\dfrac{2}{\rho}\right)^{n}, n\neq 0\end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$\rho>>1 \text{ ise, } J_n(\rho)\rightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\left(\rho-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{3.3.3}$$

$$\mathrm{N}_n(\rho)\rightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\left(\rho-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{3.3.4}$$

şeklinde tanımlanırlar [13].

3.4. Silindirik Elektromanyetik Dalgaların Dalga Kılavuzunda Yayılması

Genel olarak, enerjinin yada bu tezin çalışma konusu olan silindirik elektromanyetik dalgaların, bir noktadan başka bir noktaya iletilmesinde bir takım sistemler kullanılır. Bu sistemlere ‘‘Transmisyon hattı’’ denir. Transmisyon hatları, ilettikleri elektromanyetik alanın konfigürasyonuna göre ikiye ayrılırlar.

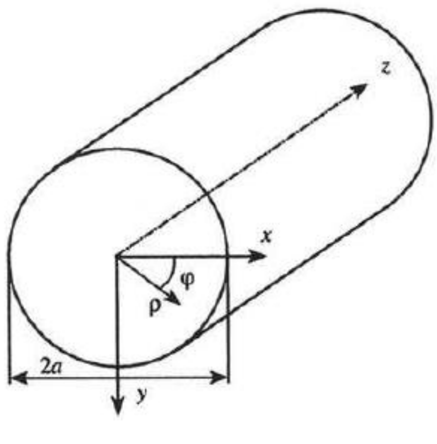
1. Enine elektromanyetik alan TEM modu:

Bu modda, elektirik $\left(\vec{E}\right)$ veya manyetik $\left(\vec{B}\right)$ alanlar enine dalgalardır. Örneğin; koaksiyel koblo.

2. Yüksek – mod tipi:

Elektirik alan $\left(\vec{E}\right)$ veya manyetik alan $\left(\vec{B}\right)$ ‘ın herhangi biri veya her ikisinin birden transmisyon iletimi yönünde olmasıdır. Örneğin; dalga kılavuzu

Bu tezde, enerjinin elektromanyetik dalga formundaki iletimi ele alınacaktır. Enerji iletiminde frekans önemli bir rol oynamaktadır. Frekansın yüksek olduğu durumlarda (10^{16} Hz gibi), elektromanyetik dalgalar dalga kılavuzları yardımı ile iletilirler. Bu nedenle, tezin çalışma konusuna uygun olarak silindirik elektromanyetik dalganın silindirik bir dalga kılavuzundaki iletimi incelenecektir. Bu tezin, çalışma konusunu oluşturan Helmholtz denkleminin çözümü, elektromanyetik dalga teorisinin temelini oluşturan Maxwell denklemleri olarak da adlandırılırlar ve bu denklemin genel çözümü silindirik elektromanyetik alanları tasvir etmektedir. Silindirik elektromanyetik alanların yayılması farklı şekillerde olabilmektedir. Bunların en önemlilerinden birisi olarak silindirik dalga kılavuzlarını verebiliriz. Silindirik dalga kılavuzu R yarıçaplı, sonlu boylu içi boş metal yapılardır.



Şekil 3.4.1: Dairesel dalga kılavuzu

Elektromanyetik dalga bu kılavuzlarda yayılırken iki farklı modda yayılır. Bunlara TE ve TM modu denmektedir. Elektromanyetik dalga $z-$ ekseni boyunca yayıldığı zaman TE modu için, elektromanyetik alanın elektrik alan bileşeni $E_z = 0$ alınır ve elektromanyetik alanın manyetik alan bileşeni $B_z(\rho,\varphi,z)$ 'yi sağlayan Maxwell denklemi çözülür. TM modu için ise, bu sefer manyetik alan bileşeni $B_z = 0$ alınır ve $E_z(\rho,\varphi,z)$ 'yi sağlayan Maxwell denklemi çözülür. Bu iki denklemin çözümü birbirlerinin aynısıdır. Çünkü, her ikisi de aynı Helmholtz denkleminin çözümüdür.

3.4.1. Silindirik Dalga Kılavuzunda TE Modu

Elektromanyetik dalgalar enine dalgalar olduğundan ve $z-$ ekseni yönünde yayıldığı varsayıldığından; TE modunda, elektrik alan elekromanyetik alanın manyetik alan bileşenine dik olur. Dolayısıyla, yayılma yönündeki elektrik alan; $E_z = 0$ alınarak daha önceki bölüm (3.2.7) denkleminde,

$$\nabla^2 B_z(\rho,\varphi,z) + k^2 B_z(\rho,\varphi,z) = 0$$

olarak ifade edilen, manyetik alan bileşeni $B_z(\rho,\varphi,z)$ 'yi sağlayan Maxwell denklemi çözülür. Bu denklemin çözümü ise, (3.2.9) denkleminde belirtildiği üzere aşağıdaki şekilde bulunmuştu.

$$B_z(\rho,\varphi,z) = \sum_{m,n}\left[A_{1_{mn}} J_n(m\rho) + A_{2_{mn}} N_n(m\rho)\right] e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos\ell z + d_2 \sin\ell z\right)$$

Elektromanyetik dalga, silindirik dalga kılavuzunda yayılacağından bir takım sınır koşullarını sağlaması gerekmektedir. Bessel diferansiyel denkleminin çözümlerinden birisi olan ikinci dereceden Neumann fonksiyonu Bessel fonksiyonlarının asimptotik özelliklerine göre $\rho = 0$ civarında (3.3.2) ifadesi sonsuza gittiğinden silindirik elektromanyetik dalgaları doğru olarak tasvir eden anlamlı bir çözüm bulunamamaktadır. Bu nedenle Neumann fonksiyonun önünde bulunan integral sabiti $A_{2_{mn}} = 0$ olarak alınır. Bu durumda, genel çözüm denklem (3.4.1) olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$B_z(\rho,\varphi,z) = \sum_{m,n} A_{1_{mn}} J_n(m\rho) e^{\pm in\varphi}\left(d_1 \cos\ell z + d_2 \sin\ell z\right) \tag{3.4.1}$$

3.4.2. Silindirik Dalga Kılavuzunda TM Modu

TM modunda da, manyetik alan elekromanyetik alanın elektrik alan bileşenine dik olduğundan, yayılma yönündeki manyetik alan; $B_z = 0$ alınarak öneki bölüm (3.2.6) denkleminde,

$$\nabla^2 E_z(\rho,\varphi,z) + k^2 E_z(\rho,\varphi,z) = 0$$

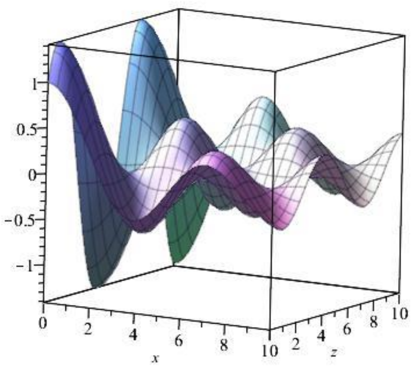
olarak tanımlanan denkleme göre, elektirik alan bileşeni $E_z(\rho,\varphi,z)$ 'yi sağlayan Maxwell denklemi çözülür. Bu denklemin çözümü de, (3.2.8) denkleminde olduğu üzere aşağıdaki şekilde bulunmuştu.

$$E_z(\rho,\varphi,z) = \sum_{m,n} \left[A_{1_{mn}} J_n(m\rho) + A_{2_{mn}} N_n(m\rho) \right] e^{\pm in\varphi} \left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z \right)$$

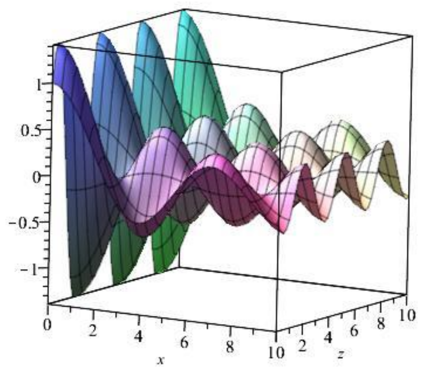
Benzer olarak yukarıdaki 3.4.1 başlığı altında anlatılan $\rho = 0$ civarındaki sınır şartı elektrik alan bileşeni için de geçerli olduğundan Neumann fonksiyonun önünde bulunan integral sabiti $A_{2_{mn}} = 0$ alınması ile genel çözüm denklem (3.4.2) olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$E_z(\rho,\varphi,z) = \sum_{m,n} A_{1_{mn}} J_n(m\rho) e^{\pm in\varphi} \left(d_1 \cos \ell z + d_2 \sin \ell z \right) \qquad (3.4.2)$$

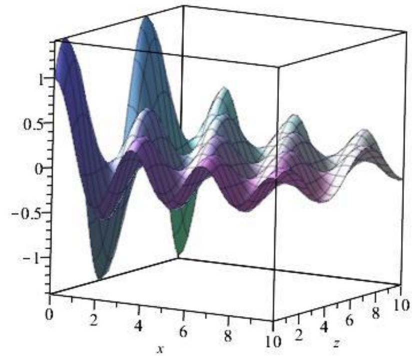
O halde, $m\rho = kx$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere; n, k ve ℓ için, verilen değerlere göre oluşan silindirik dalgaların değişimi aşağıdaki şekillerdeki gibidir.



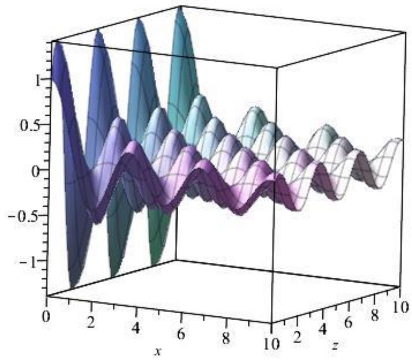
$n = 0,\ k = 1,\ \ell = 1$



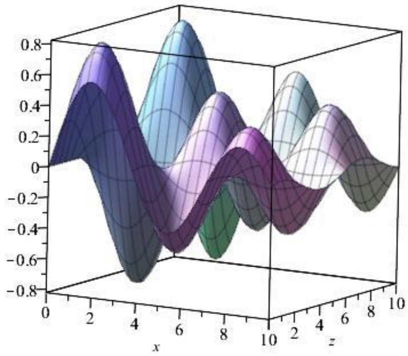
$n = 0,\ k = 1,\ \ell = 2$



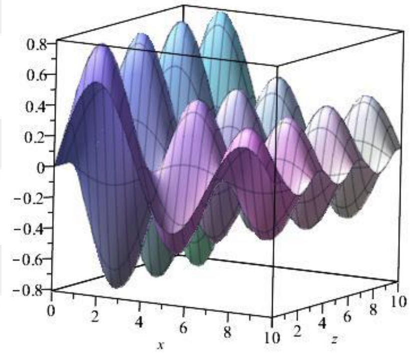
$n=0,\ k=2,\ \ell=1$



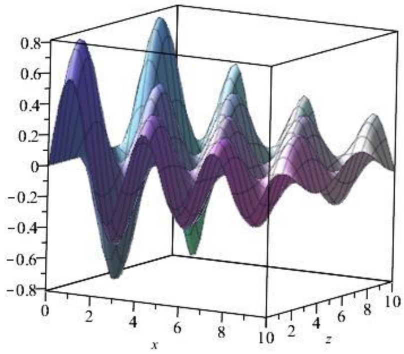
$n=0,\ k=2,\ \ell=2$



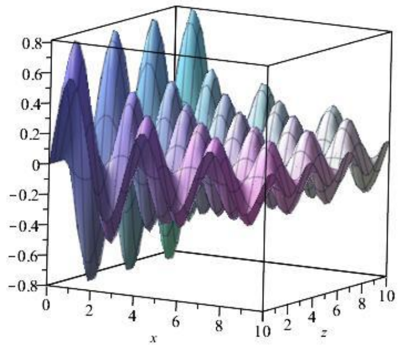
$n=1,\ k=1,\ \ell=1$



$n=1,\ k=1,\ \ell=2$



$n=1,\ k=2,\ \ell=1$



$n=1,\ k=2,\ \ell=2$

Şekil 3.4.2: Silindirik dalga yayılımları

Bu bölümün araştırılmasında [13,14,15] kaynaklarından yararlanılmıştır.

4. EK

Teorem 4.1: $y=f\left(x\right)$ olmak üzere,

$a_n.\left(x-\alpha\right)^n y^{(n)}+a_{n-1}.\left(x-\alpha\right)^{n-1} y^{(n-1)}+a_{n-2}.\left(x-\alpha\right)^{n-2} y^{(n-2)}+...+a_0 y=0$ katsayıları $\left(x-\alpha\right)$ şeklinde olan n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemin (cauchy-euler denkleminin) çözümü için, $\left(x-\alpha\right)=e^t$ şeklinde dönüşüm yapılır ve yeni oluşacak diferansiyel denklem $y=f\left(t\right)$ bağlı olmak üzere,

$a_n\dot{y}^{(n)}+a_{n-1}\dot{y}^{(n-1)}+a_{n-2}\dot{y}^{(n-2)}+...+a_0\dot{y}=0$ şeklindeki n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem haline getirilir ve Teorem 2.1.2 'deki olduğu gibi denklemin mertebesi kadar lineer bağımsız çözümler bulunmaya çalışılır ve $y=e^{mt}$ şeklinde çözüm aranır.

Örneğin; Katsayıları $\left(x-\alpha\right)$ şeklinde olan 2. mertebeden cauchy-euler denklemi için,

$$a_2.\left(x-\alpha\right)^2 y''+a_1.\left(x-\alpha\right)y'+a_0 y=0$$

$\left(x-\alpha\right)=e^t$ dönüşümü yapılırsa (x değişkeninin t değişkenine dönüşümü),

$\left(x-\alpha\right)=e^t$

$\ln\left(x-\alpha\right)=\ln e^t$

$\ln\left(x-\alpha\right)=t$ olur ve

$y=f\left(x\right)$ fonksiyonun türevlerinin, $y=f\left(t\right)$ fonksiyonunun türevlerine dönüşümü de;

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x-\alpha} \qquad =\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \dot{y}\frac{1}{e^t} \qquad\qquad = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{1}{x-\alpha}$$

$$= \dot{y}e^{-t} \qquad\qquad = \frac{d}{dt}\left(\dot{y}\frac{1}{e^t}\right)\frac{1}{e^t}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{y}e^{-t}\right)e^{-t}$$

$$= \left(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t}\right)e^{-t}$$

$$= \left(\ddot{y} - \dot{y}\right)e^{-t}e^{-t}$$

$$= \left(\ddot{y} - \dot{y}\right)e^{-2t}$$

şeklinde olacağından; bulunan bu ifadeler yukarıdaki denklemi yerine yazılırsa,

$$a_2.\left(x-\alpha\right)^2 y'' + a_1.\left(x-\alpha\right)y' + a_0 y = 0$$

$$a_2 e^{2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right)e^{-2t} + a_1 e^t \dot{y}e^{-t} + a_0 y = 0$$

$$a_2.\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$$

$$a_2\ddot{y} - a_2\dot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$$

$$a_2\ddot{y} + \left(a_1 - a_2\right)\dot{y} + a_0 y = 0$$

şeklinde 2. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilmiş olur ve Teorem 2.1.2 ‘deki olduğu gibi denklemin mertebesi kadar lineer bağımsız çözümler bulunmaya çalışılır ve $y = e^{mt}$ şeklinde çözüm aranır. O halde, bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınıp denklemde yerine yazıldığında,

$$y_h\left(t\right) = c_1 y_1\left(t\right) + c_2 y_2\left(t\right)$$

şeklinde t değişkenine bağlı genel çözüm, lineer bağımsız çözümlerinden oluşan çözümlerin lineer kombinasyonu olarak bu şekilde bulunmuş olur ve $t = \ln\left(x-\alpha\right)$ yazılarak da,

$$y_h\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right)$$

x değişkenine bağlı genel çözüm bulunmuş olur.

Teorem 4.2: $y = f(x)$ olmak üzere,

$$a_n.(x-a)^{k_n} y^{(n)} + a_{n-1}.(x-a)^{k_{n-1}} y^{(n-1)} + a_{n-2}.(x-a)^{k_{n-2}} y^{(n-2)} + \ldots + a_0.(x-a)^{k_0} y = 0$$

şeklinde $x = a$ noktası etrafında seri çözümü istenen (başlangıç değer problemi), n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde $a = 0$ ise, Maclaurin serisi; $a \neq 0$ ise, Taylor serisi metodu ile seri çözümünün yapılabilmesi için; $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında analitik olması ($x = a$ noktasının adi nokta olması) gerekmektedir.

Tanım 4.1.1: Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında Taylor serisine açılabiliyorsa (fonksiyonun $x = a$ noktasında her mertebeden türevi varsa),

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!}$$

bu fonksiyon $x = a$ noktasında analitiktir ve $x = a$ noktası bu fonksiyonun adi ($x = a$ fonksiyonu ve hiçbir türevini tanımsız yapmayan nokta) noktasıdır. O halde, böyle bir fonksiyonun $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ şeklinde çözüm aranması ile Taylor seri çözümü yapılabilir denir.

Tanım 4.1.2: Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında Taylor serisine açılamıyorsa (fonksiyonun $x = a$ noktasında her mertebeden türevi yoksa), bu fonksiyon $x = a$ noktasında analitik değildir ve $x = a$ noktası bu fonksiyonun tekil (singular, diğer bir ifade ile $x = a$ noktası; fonksiyonu veya herhangi bir türevini tanımsız yapan nokta) noktasıdır. O halde, böyle bir fonksiyonun Taylor seri çözümü yapılamaz denir. Eğer,

$$\exists\, n \in \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q} \text{ için, } \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^n f(x) = \lim_{x \to a} (x-a)^n f(x) = f_0 \; ; \; f_1, f_2, \ldots = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonunun limiti varsa, bu yeni oluşan $g(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında analitiktir ve $x=a$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun düzgün tekil noktasıdır. O halde, böyle bir fonksiyonun $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{n+r}$ şeklinde çözüm aranması ile Frobenius seri çözümü yapılabilir denir.

Örneğin; $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu $x=0$ noktası için analitik midir?

$f(x)$ fonksiyonun ardışık olarak sırasıyla türev değerleri incelenirse,

$f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımlıdır.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımsızdır.

O halde, fonksiyonun $x=0$ noktasında her mertebeden türevi olmadığından, bu fonksiyon $x=0$ noktasında analitik değildir ve $x=0$ noktası fonksiyonun tekil noktasıdır (Maclaurin seri çözümü yapılamaz) denir. Ama, biz bu $f(x)$ fonksiyonunu x 'in bir kuvveti olan $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ ile çarparsak (2. türevde tanımsız yapan ifadeyi yok etmek için);

$$\sqrt{x} f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} f(x)=x \Rightarrow g(x)=x$$

şeklinde oluşan bu yeni fonksiyon için, yeniden fonksiyonun ardışık olarak sırasıyla türev değerleri incelenecek olunduğunda;

$g(x)=x$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımlıdır.

$g'(x)=x$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımlıdır.

$g''(x)=0$ fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımlıdır.

…………

$g^{(n)}(x)=0$ fonksiyonu da, $x=0$ noktasında tanımlıdır.

O halde, fonksiyonun $x=0$ noktasında her mertebeden türevi olduğundan, bu yeni oluşan $g(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında analitiktir ve $x=0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun düzgün tekil noktasıdır (Frobenius seri çözümü yapılabilir) denir. Diğer bir ifade ile, $x=0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun tekil noktası ise, Maclaurin seri çözümü yapılamayacağından;

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^n\ f(x)=\lim_{x\to 0}(x-0)^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0}x=0$$

olacak şekilde $x\to 0$ giderken, $f(x)$ fonksiyonunun limiti var olduğundan; bu yeni oluşan $g(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında analitik olur ve $x=0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun düzgün tekil noktası olur. Dolayısıyla, böyle bir fonksiyonun Frobenius seri çözümü yapılabilir denir.

Örneğin; $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ fonksiyonu $x=0$ noktası için analitik midir?

$f(x)$ fonksiyonun ardışık olarak sırasıyla türev değerleri incelenirse,

$$f(x)=\frac{1}{\ln x} \text{ fonksiyonu } x=0 \text{ noktasında tanımsızdır.}$$

O halde, fonksiyonun $x=0$ noktasında her mertebeden türevi olmadığından, bu fonksiyon $x=0$ noktasında analitik değildir ve $x=0$ noktası fonksiyonun tekil noktasıdır (Maclaurin seri çözümü yapılamaz) denir ve, bu $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir x 'in kuvveti ile çarpılsada (x^n); hiçbir zaman için bu fonksiyon analitik olamayacağından, böyle bir fonksiyonun Maclaurin seri çözümü de, Frabenius seri çözümü de yapılamaz denir. Dolayısıyla, böyle $x=0$ noktasıda fonksiyonun esaslı tekil noktasıdır denir. Diğer bir ifade ile, $x=0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun esaslı tekil noktası ise,

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^n\ f(x)=\lim_{x\to 0}(x-0)^n\ln x=\lim_{x\to 0}x.\infty=0.\infty=\infty$$

olacak şekilde $x \to 0$ giderken, $f(x)$ fonksiyonunun hiçbir n için limiti var olmayacağından; $x=0$ noktası hiçbir zaman için analitik olamaz ve $x=0$ noktası bu fonksiyonun esaslı tekil noktasıdır. Dolayısıyla, böyle bir fonksiyonun Maclaurin seri çözümü de, Frabenius seri çözümü de yapılamaz denir.

Ayrıca, sabit fonksiyonlar her $x = a$ noktasında analitiktir.

O halde,

1. Metod

$a_2.(x-a)^{k_2} y'' + a_1.(x-a)^{k_1} y' + a_0.(x-a)^{k_0} y = 0$; $y(a)=m, y'(a)=n$ şeklindeki başlangıç değer probleminde, $x = a$ noktası etrafında seri çözümü istenen ve katsayıları $(x-a)$ şekline getirilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde,

$a_2 \neq 0$ veya $a_2 = 0$ olmak üzere; x değişkenine bağlı diferansiyel denklemin, $x=a$ noktası etrafındaki seri çözümü için; denklemindeki değişken katsayılar $x-a=t$ olacak şekilde t değişkenine bağlı olarak tanımlanırsa ($x-a=t$ şeklinde x değişkeninin t değişkenine dönüşümü yapılırsa),

$x-a=t$

$x=t+a$ olur ve

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevlerinin, $y = f(t)$ fonksiyonunun türevlerine dönüşümü de;

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \qquad\qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt}.1 \qquad\qquad = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \dot{y} \qquad\qquad = \frac{d}{dt}(\dot{y}).1$$

$$= (\ddot{y}).1$$

$$= \ddot{y}$$

şeklinde olacağından; bulunan bu ifadeler yukarıdaki denklemi yerine yazılırsa,

$$a_2.(x-a)^{k_2}\, y'' + a_1.(x-a)^{k_1}\, y' + a_0.(x-a)^{k_0}\, y = 0$$

$$a_2 t^{k_2}\ddot{y} + a_1 t^{k_1}\dot{y} + a_0 t^{k_0} y = 0$$

şeklinde, $t=0$ noktası etrafında 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilir ve derecesi yüksek olan diferansiyel operatörünün önündeki katsayıya her iki taraf bölünürse,

$$\ddot{y} + \frac{a_1 t^{k_1}}{a_2 t^{k_2}}\dot{y} + \frac{a_0 t^{k_0}}{a_2 t^{k_2}} y = 0$$

$$\ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0$$

olarak standart form olarak yazılan 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde, $P(t)$ ve $Q(t)$, $t=0$ noktasında analitik ($t=0$ adi nokta) ise, Maclaurin seri çözümü yapılabileceğinden;

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ şeklinde çözüm arınır (demek diferansiyel denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlaması demektir).

O halde, bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınıp yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\dot{y} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$\ddot{y} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

ve ayrıca, burada; $P(t)$ ve $Q(t)$, $t=0$ noktasında analitik olduğundan, $P(t)$ ve $Q(t)$ polinomlarının çözümleri de Maclaurin serisine açılabileceğinden;

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + ...$$

$$Q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + ...$$

şeklinde elde edilen polinomlarda denklemde yerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^n + (p_o + p_1 t + ...) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + (q_0 + q_1 t + ...) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

şeklinde olduğu gibi bir ifade elde edilir. Burada; önce ifade çarpılıp düzenlendikten sonra, hepsinin ortak toplamda toplanabilmesi için t^n nin kuvvetlerinin; $n \to n+1$, $n \to n-1$, … vb. olacak şekilde yazılarak eşit yapılması ve ardından hepsinin aynı indise getirilmesi için bazı toplamlar istenilen indise kadar terimleri açık olarak dışarı yazılmalıdır. Bu durumda, gerekli işlemler yapıldığında;

$$(...) t^1 + (...) t^2 + ... + \sum_{n=indis}^{\infty} t^n (c_n) = 0$$

şeklinde gelecek olan ifadenin sıfır olabilmesi için, t^n nin bütün katsayılarının (her bir terimin tek tek) ve $c_n = 0$ olması gerekir. Sonra, baştaki yapılan dönüşüm geri alınarak a_n ifadesi (büyük olan küçük olanın cinsinden yazılır) bulunmuş olur ve $n \geq indis$ için de, sadeleştirme yapmadan $a_1, a_2, ...$ şeklinde a nın bütün terimleri bulunarak,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + ...$$

$$= a_m y_1(x) + a_n y_2(x)$$

şeklinde lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemin ($y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ adi noktasındaki) genel çözümü bulunmuş olur. Buradaki denklem 2. mertebeden olduğundan; genel çözüm de, a_m ve a_n olmak üzere 2 parametreden oluşur (ki bu sabitler c_1 ve c_2 integral sabitleridir. Burada, iki tane a parametresine bağlı olarak bulunmuştur)

2. Metod

$a_2.(x-a)^{k_2}\, y'' + a_1.(x-a)^{k_1}\, y' + a_0.(x-a)^{k_0}\, y = 0$ şeklinde verilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde; denklem, derecesi yüksek olan diferansiyel operatörünün önündeki katsayı ile orantılı olacak şekilde bölünürse,

$$y'' + \frac{a_1.(x-a)^{k_1}}{a_2.(x-a)^{k_2}}\, y' + \frac{a_0.(x-a)^{k_o}}{a_2.(x-a)^{k_2}}\, y = 0$$

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

olarak standart form şeklinde yazılan 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde,

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları analitikse ($x=0$ adi nokta ise), $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde, Maclaurin seri çözümü yapılabilir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları analitik değilse ($x=a$ tekil nokta ise), $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ şeklinde, Taylor seri çözümü yapılabilir.

Ayrıca, sabit fonksiyonlar ($P(x)$ ve $Q(x)$ sabit fonksiyonlar ise) her $x=a$ noktasında analitik olduğundan; n. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerde, Maclaurin ve Taylor serisi metodu ile çözülebilir.

Teorem 4.3: $y = f(x)$ olmak üzere,

$$a_n.(x-a)^{k_n}\, y^{(n)} + a_{n-1}.(x-a)^{k_{n-1}}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}.(x-a)^{k_{n-2}}\, y^{(n-2)} + \ldots + a_0.(x-a)^{k_0}\, y = 0$$

şeklinde $x=a$ noktası etrafında seri çözümü istenen (başlangıç değer problemi), n. mertebeden veya yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminin Frabenous serisi metodu ile çözümünün yapılabilmesi için, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasında analitik olmayıp, analitik hale getirilebilmesi ($x=a$ noktasının düzgün tekil nokta olması) gerekmektedir.

O halde,

1. Metod

$a_2.(x-a)^{k_2}\, y''+a_1.(x-a)^{k_1}\, y'+a_0.(x-a)^{k_0}\, y=0$; $y(a)=m, y'(a)=n$ şeklindeki başlangıç değer probleminde, $x=a$ noktası etrafında seri çözümü istenen ve katsayıları $(x-a)$ şekline getirilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde,

$a_2 \neq 0$ veya $a_2=0$ olmak üzere; x değişkenine bağlı diferansiyel denklemin, $x=a$ noktası etrafındaki seri çözümü için; denklemindeki değişken katsayılar $x-a=t$ olacak şekilde t değişkenine bağlı olarak tanımlanırsa ($x-a=t$ şeklinde x değişkeninin t değişkenine dönüşümü yapılırsa),

$x-a=t$

$x=t+a$ olur ve

$y=f(x)$ fonksiyonunun türevlerinin, $y=f(t)$ fonksiyonunun türevlerine dönüşümü de;

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dt}.1 \qquad =\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\dot{y} \qquad =\frac{d}{dt}(\dot{y}).1$$

$$=(\ddot{y}).1$$

$$=\ddot{y}$$

şeklinde olacağından; bulunan bu ifadeler yukarıdaki denklemi yerine yazılırsa,

$$a_2.(x-a)^{k_2}\, y''+a_1.(x-a)^{k_1}\, y'+a_0.(x-a)^{k_0}\, y=0$$

$$a_2 t^{k_2}\ddot{y}+a_1 t^{k_1}\dot{y}+a_0 t^{k_0} y=0$$

şeklinde, $t=0$ noktası etrafında 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem elde edilir ve derecesi yüksek olan diferansiyel operatörünün önündeki katsayıya her iki taraf bölünürse,

$$\ddot{y}+\frac{a_1 t^{k_1}}{a_2 t^{k_2}}\dot{y}+\frac{a_0 t^{k_0}}{a_2 t^{k_2}}y=0$$

$$\ddot{y}+P(t)\dot{y}+Q(t)y=0$$

olarak standart form olarak yazılan 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde, $P(t)$ ve $Q(t)$, $t=0$ noktasında analitik değil ($t=0$ tekil nokta) ise, Maclaurin seri çözümü yapılamayacağından; Eğer denklem,

$$\ddot{y}+\frac{p(t)}{t}\dot{y}+\frac{q(t)}{t^2}y=0$$

olacak şekilde bir yazımı varsa; $p(t)$ ve $q(t)$, $t=0$ noktasında analitik ve $P(t)$ ve $Q(t)$, $t=0$ noktasında tekil nokta ise,

$$\lim_{t\to t_0}(t-t_0)P(t)=\lim_{t\to 0}(t-0)\frac{p(t)}{t}=p_0 \;;\; p_1,p_2,...=0$$

$$\lim_{t\to t_0}(t-t_0)^2 Q(t)=\lim_{t\to 0}(t-0)^2\frac{q(t)}{t^2}=q_0 \;;\; q_1,q_2,...=0$$

olacak şekilde $t\to 0$ giderken, $P(t)$ ve $Q(t)$ fonksiyonlarının her ikisininde limiti varsa; $P(t)$ ve $Q(t)$, $t=0$ noktasında düzgün tekil nokta olmuş olacağından ve Frobenius seri çözümü yapılabileceğinden;

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r}$ şeklinde 1. çözüm aranır (demek diferansiyel denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlaması demektir) ve 2. aranacak çözüm için ise,

$$r(r-1)+p_0 r+q_0=0$$

şeklindeki indis denkleminin (r) köklerinin durumuna bakılarak (a);

1. Durum: $r_1 \geq r_2$ için $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}^+$ ise,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} \;\; ; \; a_0 \neq 0$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+r_2} \;\; ; \; b_0 \neq 0$$

2. Durum: $r_1 \geq r_2$ için $r_1 - r_2 = \mathbb{N} \in \mathbb{Z}^+$ ise,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} \;\; ; \; a_0 \neq 0$$

$$y_2 = C y_1 \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+r_2} \;\; ; \; b_0 \neq 0 \text{ ve } C \text{ sabiti sıfır olabilir.}$$

3. Durum: $r_1 = r_2$ ise,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} \;\; ; \; a_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1 \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+r_1}$$

şeklinde çözümler aranır.

O halde, bu ifadelerin ardışık olarak türevleri alınıp yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-a\right)^{n+r_1} = a_0 \left(x-a\right)^{0+r_1} + a_1 \left(x-a\right)^{1+r_1} + a_2 \left(x-a\right)^{2+r_2} + \ldots$$

$$= a_n y_1 \left(x\right)$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x-a\right)^{n+r_2} = b_0 \left(x-a\right)^{0+r_2} + b_1 \left(x-a\right)^{1+r_2} + b_2 \left(x-a\right)^{2+r_2} + \ldots$$

$$= b_n y_2 \left(x\right)$$

$$y\left(x\right) = a_n y_1 \left(x\right) + b_n y_2 \left(x\right)$$

şeklinde lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemin ($y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ düzgün tekil noktasındaki) genel çözümü bulunmuş olur. Buradaki denklem 2. mertebeden olduğundan; genel çözüm de, a_n ve b_m olmak üzere 2 parametreden oluşur (ki bu sabitler c_1 ve c_2 integral sabitleridir. Burada, a ve b parametrelerine bağlı olarak bulunmuştur)

2. Metod

$a_2.(x-a)^{k_2}\,y'' + a_1.(x-a)^{k_1}\,y' + a_0.(x-a)^{k_0}\,y = 0$ şeklinde verilen 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde; denklem, derecesi yüksek olan diferansiyel operatörünün önündeki katsayı ile orantılı olacak şekilde bölünürse,

$$y'' + \frac{a_1.(x-a)^{k_1}}{a_2.(x-a)^{k_2}}\,y' + \frac{a_0.(x-a)^{k_o}}{a_2.(x-a)^{k_2}}\,y = 0$$

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

olarak standart form şeklinde yazılan 2. mertebeden lineer değişken katsayılı homojen diferansiyel denkleminde,

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları analitik olmayıp analitik hale getirilebilirse ($x = 0$ düzgün tekil nokta ise), $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ şeklinde Frobenius seri çözümü yapılabilir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları analitik olmayıp analitik hale getirilebilirse ($x = a$ düzgün tekil nokta ise), $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{n+r}$ şeklinde Frobenius seri çözümü yapılabilir ve 2. aranacak çözüm için ise de, yukarıdaki indis köklerinin durumuna bakılması gerekir.

5. SONUÇ

Bu tezde, fizik ve mühendislik problemlerinin matematiksel modellenmesinde etkin olarak kullanılan kısmi türevli diferansiyel denklemler genel bir yaklaşımla ele alınmıştır. Genel olarak ifade edilen kısmi türevli diferansiyel denklem şeklindeki yapının, belirli limitlerinde elde edilen özel denklemlerin her birinin ayrı bir uygulama konusunun tezahürü olduğu, fizik ve mühendislik alanlarının en önemli konularını tasvir ettiği gösterilmiştir. Bu tezin araştırma konusunu teşkil eden ve özel denklemlerden biri olan Helmholtz dalga denklemi derinliğine analiz edilerek kartezyen, silindirik ve küresel olmak üzere üç farklı koordinat sisteminde çözümleri yapılarak, silindirik ve küresel koordinat çözümleri matematikte özel fonksiyonlar olarak bilinen Bessel ve Legendre polinomları cinsinden ifade edilmiştir. Helmholtz dalga denklemi, elektromanyetik alan teorisinde; elektromanyetik alanları tasvir etmede kullanılan Maxwell denklemlerinin, ikinci dereceden kısmi türevli ifadeleri ile bire bir örtüşmektedir. Bu nedenle, tezin son bölümünde; Maxwell denklemlerinin silindirik koordinatlardaki çözümü kullanılarak, dairesel bir dalga kılavuzundaki elektromanyetik dalgaların TE ve TM modlarındaki yayılımları gösterilip, bulunan çözümlerin değişim grafikleri maple yazılımı ile çizilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Ş. Zebitay ve G.D. Esmer, ‘‘Teorik Fizik Dersleri, Matematik Fizikte Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler’’, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, İstanbul, 975-404-713-8, (2004)

[2] R.K. Nagle, E.B. Saff and David Snider, ‘‘Fundamentals of Differential Equations’’, Pearson Education, Inc., Eighth Edition, New York, Amsterdam, Dubai, London, Madrid, Munich, Paris, Tokyo, 0-321-74773-9, (2012)

[3] Recep Korkmaz, ‘‘Thomas Calculus 2’’, Beta Basım A.Ş., Onbirinci Baskıdan Çeviri, İstanbul, 978-605-377-369-6, (2010)

[4] G.B. Arfken and H.J. Weber, ‘‘Mathematical Methods for Physicists’’, Elsevier Academic Press, Sixth Edition, Amsterdam, London, New York, Oxford, Paris, Tokyo, 0-12-088584-0, (2005)

[5] Emine Öztürk, ‘‘Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler’’, Seçkin Yayıncılık, İkinci Baskı, Ankara, 97897550220067, (2012)

[6] Namık Yener, ‘‘Elektromanyetik Alanlara Giriş, Ders Notları [online]’’, http://akademikpersonel.kocaeli.edu.tr/nyener/ders/nyener14.09.2013_19.40.16ders.pdf, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli, (2013)

[7] Martin Kreh, ‘‘Bessel Functions [online]’’, http://math.psu.edu/papikian/Kreh.pdf, Penn State University, United States, (2012)

[8] Jim Lambers, ‘‘Math 415/515, Lecture 16 Notes [online]’’, http://www.math.usm.edu /lambers/mat415/lecture16.pdf, Southern Mississippi University, United States, (2013)

[9] Roelof Koekoek, ‘‘Bessel Functions [online]’’, https://homepage.tudelft.nl/11r49 /documents/wi4006/bessel.pdf, Delft University of Technology, Nederlands, (2009)

[10] N.H. Asmar, ‘‘Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems’’, Pearson International Edition, Second Edition, United States, 0132449005, (2007)

[11] Sean F. Wu, ‘‘The Helmholtz Equation Least Squares Metod’’, Springer Science and Business Media, United States, 978-1-4939-1639-9, (2015)

[12] Peter Young, ‘‘Helmholtz’s and Laplace’s Equations in Spherical Polar Coordinates: Spherical Harmonics and Spherical Bessel Functions [online]’’, http://physics.ucsc.edu /~peter/116C/helm_sp.pdf, University of California Santa Cruz, United States, (2009)

[13] W.W. Bell, ‘‘Special Functions for Scientists and Engineers’’, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 0-486-43521-0, (1968)

[14] J.D. Kraus and K.R. Carver, ‘‘Elektromagnetics’’, McGraw-Hill, Inc., International Student Edition, Second Edition, Tokyo, Düsseldorf, London, 0-07-035396-4, (1973)

[15] J.D. Jackson, ‘‘Classical Elektrodynamics’’, John Wiley and Sons, Inc., Third Edition, New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 0-471-30932-X, (1999)