T.C.
MALTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdurrahman APAYDIN
151409201

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

İstanbul, Ocak 2018

T.C.
MALTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdurrahman APAYDIN
151409201

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

İstanbul, Ocak 2018

T.C. Maltepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

28.02.2018 tarihinde tezinin savunmasını yapan Abdurrahman APAYDIN' a ait "Normlu Uzaylarda İstatiksel Yakınsaklık" başlıklı çalışma, Jürimiz Tarafından Fen Bilimleri Matematik Anabilim Dalı, Matematik Tezli Yüksek Lisans Programında Yüksek Lisans Tezi Olarak **Oy Birliği/~~Oy Çokluğuyla~~** Kabul Edilmiştir.

....

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
(Başkan)
(Danışman)

....

Yrd.Doç. Dr. Sibel ÇEVİK ERSAN
(Üye)

....

Yrd. Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ
(Üye)

Revizyon Takip Tablosu

REVİZYON NO	**TARİH**	**AÇIKLAMA**
00	01.03.2018	İlk yayın.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

27 / 03 / 2018

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum 'NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK" adlı çalışmanın, proje safhasından sonuçlanmasına kadar olan bütün süreçlerinde bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın tarafımca yazıldığını ve yararlandığım bütün eserlerin "Kaynakça"da gösterilenlerden oluştuğunu, "Kaynakça"da yer alan bu eserlerden metin içinde atıf yaparak yararlanmış olduğumu belirtir ve onurumla doğrularım.

Öğrenci Numarası
Adı-Soyadı
İmza

NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

ÖZET

Normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ile ilgili günümüze kadar yapılmış araştırmaları göz önüne alarak inceleyen bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm ön bilgilere ayrılmıştır.

İkinci bölümde, genel tanım ve teoremler bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde, reel terimli istatistiksel yakınsak dizi, normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi, istatistiksel kompaktlık, istatistiksel süreklilik, istatistiksel quasi Cauchy, istatistiksel ward kompaktlık, istatistiksel ward süreklilik kavramları tanım ve teoremleri verilmiştir.

.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Cauchy dizisi, istatistiksel kompaktlık, istatistiksel süreklilik, istatistiksel quasi Cauchy dizisi, istatistiksel ward kompaktlık, istatistiksel ward süreklilik.

STATISTICAL CONVERGENCE IN NORMED SPACES

ABSTRACT

This thesis which analyzes the researches about statistical convergence in normed space to this date is comprised of three parts.

The first part is dedicated to preliminary knowledge.

The second part includes the general definitions and theorems.

The third part covers the definitions and theorems of real term statistical convergence sequence, statistical convergence in normed space, statistical Cauchy sequence, statistical compactness, statistical continuity, statistical quasi Cauchy, statistical ward compactness, statistical ward continuity.

Key Words: Statistical Cauchy sequence, statistical compactness, statistical continuity, statistical quasi Cauchy sequence, statistical ward compactness, statistical ward continuity

ÖNSÖZ

Bu tezimin- Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık- çalışma konusu üzerinde birçok makalesi olan ve bu konuya değerli birçok katkı sunan, çalışmalarım boyunca yakın ilgisini ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI'ya (Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü) en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Abdurrahman APAYDIN
İstanbul, OCAK 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELERİN DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
C_1	Cesàro matrisi
h.h.k	Hemen hemen her k
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
x_{E_ϵ}	Karakteristik fonksiyon

GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık fikri, 1935'te Varşova'da Zygmund tarafından yayınlanan ve çok ses getiren uzun ilmi makalesinin ilk baskısında 'hemen hemen yakınsaklık adı altında resmi olarak verilmişti [22]. Bu kavram; Fast[11], sonra Schoenberg [19], daha sonra da bağımsız olarak Buck [1] tarafından da takdim edilmişti. İstatistiksel yakınsaklık, neredeyse son seksen yıldır içinde çalışılıyor olmasına rağmen, Salat [20], Kostyrko, Macaj, Salat ve Strauch [16], Connor [3, 4], Maio, Djurcic, Kocinac, ve Zizovic [17] gibi birçok önemli yazarın katkılarıyla son 20 yıldır aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmakla birlikte toplanabilme teorisinde de önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisi ile ilişkisini ilk olarak 1959'da Schoenberg tarafından verilmiştir.
Yine aynı özelliklerin incelenmesine; 1980 yılında Salát, 1985 yılında J. Fridy, 1990 yılında J. Fridy ve H. Miller, 1993 yılında J. Fridy ve C. Orhan tarafından devam edilmiştir. Aslında istatistiksel yakınsaklık, sayılar teorisi, ölçü teorisi ile çok yakından ilgili olduğu gibi istatistik ile de çok yakından ilgilidir.
Bu ilişkiler; Freedman ve Sember tarafından 1982, J. Connor tarafından 1990, H. Miller tarafından 1995, H. Miller ve C. Orhan tarafından 2001, M. Khan ve C. Orhan tarafından 2007 yılında çalışılmıştır. Bilindiği gibi her yakınsak dizinin alt dizisi de yakınsaktır. Hâlbuki istatistiksel yakınsak olan bir dizi için bu geçerli değildir. Yani istatistiksel yakınsak olan bir dizininin her alt dizisi istatistiksel yakınsak olmak zorunda değildir.

BİRİNCİ BÖLÜM

1.GENEL TANIM VE TEOREMLER

1.1.Genel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, değer kümesi ise $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan fonksiyona dizi denir. x_1, x_2, x_3 ... sayılarına dizinin terimleri, $\mathbb{N}$ ye bağlı ifade olan x_n ye ise dizinin genel terimi denir.

Diziler ya $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ gibi veya x_n genel terimini parantez içine alarak $\{x_n\}$ veya (x_n) gibi de gösterilebilir.
Şimdi reel terimli yakınsak dizi tanımını veriyoruz.

Tanım 1.1.2. $\mathbb{R}$ de bir (x_n) dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir (ε a bağlı) n_0 tam sayısı varsa $n \to \infty$ için (x_n) dizisinin limiti x dir denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ yazılır. (x_n) dizisini gözönüne alalım. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ise (x_n) dizisi x sayısına yakınsıyor denir ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ şeklinde de gösterilir. Bir sayıya yakınsayan diziye *yakınsak dizi*, aksi halde *ıraksak dizi* denir.

Tanım 1.1.3. Bir XxX Kartezyen kümesi üzerinde, aşağıdaki koşulları sağlayan

$d : XxX \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X için bir *metrik, ya da X üzerinde bir metrik* denir.

$\forall x, y, z \in X$ için,

(D_1) $d(x, y) \geq 0$,

(D_2) $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ dir,

(D_3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(D_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Üzerinde bir d metriği tanımlanan *X kümesine metrik uzay* denir ve (X, d) ile gösterilir, ya da kısaca *X* bir *metrik uzaydır* denir.

Örnek. *X* boş olmayan bir küme ve d *de aşağıdaki şekilde tanımlanmış* reel değerli fonksiyon olsun.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Bu durumda d, *X* üzerinde bir metriktir, bu metriğe *discre metrik*, ya da *aşikar metrik* denir.

Tanım 1.1.4. (Yakınsak Dizi) (X,d) bir metrik uzay, (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir n_0 sayısının bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x'e *yakınsaktır* denir, ya da x noktasına *yakınsar* denir. (x_n) dizisi yakınsak değil ise *ıraksaktır* denir.

Bir (x_n) dizisinin X metrik uzayının bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ olmasıdır.

Eğer bir (x_n) dizisinin terimleri kümesi r yarıçaplı bir açık yuvarın alt kümesi olacak şekilde bir r pozitif sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sınırlıdır denir.

Lemma 1.1.5: X metrik uzayında yakınsak olan her dizi sınırlı olup, limiti tektir**.**

İspat:

Yakınsak herhangi bir dizi (x_n) olsun.

n→∞ iken $x_n \to$ x ve $x_n \to$ y olsun. Kabul edelim ki $x \neq y$ olsun.

d(x,y) = α diyelim. (D_2) den $\alpha \neq 0$ dır.

$x_n \to x \Rightarrow \varepsilon > 0 \; \exists \; N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall \; n \geq N_\varepsilon$ için

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{3}$$

$x_n \to y \Rightarrow \varepsilon > 0 \; \exists \; N''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall \; n \geq N''_\varepsilon$ için

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{3}$$

$N'_\varepsilon = \max\{ N_\varepsilon, N''_\varepsilon \}$ alalım.

$$d(x, y) \leq d(x, N'_\varepsilon) + d(N'_\varepsilon, y) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$$

$$d(x, y) < \frac{2\alpha}{3} \Rightarrow 3 \,.\, d(x, y) < 2\alpha$$

$$\Rightarrow 3\alpha < 2\alpha$$

$$\Rightarrow 3 < 2 \text{ dir.}$$

Bu ise bir çelişkidir. Bu da X metrik uzayında yakınsak olan her dizinin limitinin tek olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de (x_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. Yakınsak herhangi bir dizi (x_n) olsun, yani n→∞ iken $x_n \to$ x olsun. Yakınsaklık tanımında özel olarak ε = 1 alırsak, n > N olduğunda $d(x_n, x) < 1$ olacak şekilde bir N sayısı bulunabilinr. (D_4) üçgen eşitsizliğinden $M = \max\{ d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots, d(x_N, x)\}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x) < 1 + M$$

yazarız. Bu ise (x_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

Örnek : $(x_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$ dizisinin genel terimi $x_n = \frac{1}{n^2}$ şeklinde olup bu dizi yakınsaktır ve $n \to \infty$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

Tanım 1.1.6.(Alt yoğunluk fonksiyonu) $P(\mathbb{N})$, doğal sayıların kuvvet kümesi olmak üzere

$$\underline{\delta} : P(\mathbb{N}) \to [0,1]$$

fonksiyonu, $A, B \in P(\mathbb{N})$ için

(D.1) $A \sim B$ (A ve B nin simetrik farkı sonlu ise) $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$

(D.2) $A \cap B = \emptyset$ ise, $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$

(D.3) Her A, B için $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$

(D.4) $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$

özelliklerini gerçeklerse $\underline{\delta}$ fonksiyonuna bir alt yoğunluk fonksiyonu denir.([10])

$\underline{\delta}$ bir alt yoğunluk olmak üzere, doğal sayıların bir alt cümlesi için $\bar{\delta}$ üst yoğunluğu

$$\bar{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus A)$$

ile tanımlanır. $\underline{\delta}$ alt yoğunluğu ile $\bar{\delta}$ üst yoğunluğu arasındaki bağıntılar aşağıda verilen önerme ile gösterilmiştir.

Önerme 1.1.7. $\underline{\delta}$ alt yoğunluk ve $\bar{\delta}$ üst yoğunluk olmak üzere

$A \subseteq \mathbb{N}$ ve $B \subseteq \mathbb{N}$ için

1) $A \subseteq B$ ise $\underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$

2) $A \subseteq B$ ise $\bar{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(B)$

3) Her A , B için $\bar{\delta}$ (A) + $\bar{\delta}$ (B) ≥ $\bar{\delta}$ (AUB)

4) $\underline{\delta}$ ($\boldsymbol{\phi}$) = $\bar{\delta}$ ($\boldsymbol{\phi}$) = 0

5) $\bar{\delta}$ (ℕ) = 1

6) A ~ B ise $\bar{\delta}$ (A) = $\bar{\delta}$ (B)

7) $\underline{\delta}$ (A) ≤ $\bar{\delta}$ (A)

özellikleri sağlanır ([10]).

Bir A ⊆ ℕ için $\underline{\delta}$ (A) = $\bar{\delta}$ (A) ise A kümesi bir yoğunluğa sahiptir denir ve

δ (A) ile gösterilir.

Tanım 1.1.8.(Asimptotik yoğunluk)
K ⊆ ℕ kümesini alalım.

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}kar\{k\ \leq n : k\ \in K\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\ \leq n : k\ \in K\}|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir ([18]).

Burada ℕ doğal sayılar kümesi olmak üzere A ⊆ ℕ için $|A|$ ile A kümesinin kardinal sayısını gösterir.

Örnek: Doğal sayıların sonlu her alt kümesi sıfır yoğunluklu olduğu gibi, $\{m^2 : m \in N\}$ kümesi de sıfır yoğunlukludur.

Tanım 1.1.9. ([9]) $X\ de$ (x_k) dizisi bir P özelliğini, yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her k için gerçekliyorsa x dizisi P özelliğini hemen hemen her k için gerçekliyor denir.

Tanım 1.1.10. (Reel terimli diziler için istatistiksel yakınsaklık)

x = (x_k) reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her ε > 0 için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (yani δ ($\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$) = 0 ise), x = (x_k) dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve st – lim$x$ = L ile gösterilir.

Eğer, L = 0 ise x = (x_k) dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ([11]).

Tanım 1.1.11. (Vektör uzayı) X bir küme ve K bir cisim olsun. XxX 'den X 'e

(x + y) + z = x + (y + z)

(x, y) → x + y toplama ve (α,x) → α.x skalerle çarpma fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa o zaman X e K cismi üzerinde bir *lineer*

uzay veya *vektör uzay* denir.

$\forall\, x, y, z \in X$ *ve* α , β $\in K$ için:

A_1) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

A_2) $x + y = y + x$,

A_3) $\forall\, x \in X$ için $x + 0 = 0 + x = x$ *olacak* biçimde bir $0 \in X$ vardır,

A_4) $\forall\, x \in X$ ve $x \neq 0$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak biçimde bir $(-x) \in X$ vardır,

S_1) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$,

S_2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

S_3) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta)x$,

S_4) $1.x = x$.

Tanım 1.1.12. (Alt uzay) X bir vektör uzayı ve $A \subset X$, $A \neq \varnothing$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;

$\forall$ x, y $\in$ A ve $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ için

I) x + y ∈ A

II) α. x ∈ A oluyorsa *A* ya, *X* in bir *alt uzayı* denir.

Tanım 1.1.13. (Norm) *X* bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ *ve* $\alpha \in K$ *için* aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $x \to \|x\|$ fonksiyonuna *X üzerinde* bir norm denir.

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$ dır.

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Üzerinde $\| \; \|$ normu ile tanımlı olan *X lineer* uzayına normlu uzay denir ve $(X, \| \; \|)$ biçiminde gösterilir.
X üzerindeki bir norm, *X* üzerinde,

$$d(x,y) = \|x - y\| \quad (x,y \in X)$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından elde edilen metrik olarak adlandırılır. Tanımlamış olduğumuz normlu uzayları $(X, \| \; \|)$, ya da kısaca, *X* bir normlu uzay diye ifade edeceğiz.

Tanım1.1.14. (Cauchy Dizisi) Bir (*X*,d) metrik uzayında, bir (x_n) dizisini gözönüne alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her m, n > N için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Örnek: Genel terimi $x_n = \frac{1}{n}$ olan (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 1.1.15. (Tamlık) X teki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise, *X* uzayı *tamdır* denir.

Tanım 1.1.16. (Banach uzayı ***)*** Eğer bir $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayı tam ise, *X* uzayına *Banach uzayı* denir.

Aşağıdaki tanımı vermeden önce şunu ifade etmemizde fayda var. X normlu bir uzay ve A ⊂ X olmak üzere A ⊂ $\bigcup_{i\in I} G_i$ olacak şekilde X in alt kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{G} = \{Gi : i \in I\}$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{G}$ ye A nın bir örtüsü diyeceğiz. Eğer her bir G_i açık ise $\mathcal{G}$ sınıfına A'nın bir açık örtüsü diyeceğiz. Burada örtülerin alt örtüleri ile ilgileneceğiz.

Tanım 1.1.17. (Kompakt küme) *X* normlu bir topolojik uzay ve A ⊂ *X* olsun. A'nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya *kompakt küme* denir.

Tanım 1.1.18. (Dizisel Kompaktlık) Bir *X* metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer *X* teki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise, *X* uzayı dizisel kompakttır denir. *X* in bir M *alt* kümesi, *X* in bir altuzayı olarak ele alındığında kompakt oluyorsa, yani, *M* 'deki her dizi, limiti M nin bir elemanı olan yakınsak bir alt diziye sahip ise, M ye *dizisel kompakttır* diyeceğiz.

Burada tanımladığımız dizisel kompaktlık ile Tanım 1.1.17 de verilen kompaktlık normlu uzaylarda denktir. Bu denkliği üçüncü bölümde vereceğiz.
Kompakt kümelere ait genel bir özelliği aşağıdaki lemmada ifade edeceğiz.

Lemma1.1.19. Bir metrik uzayın dizisel kompakt bir M altkümesi kapalı ve sınırlıdır.

İspat. Herhangi bir $x \in \overline{M}$ alalım. Bu takdirde M de, $n\to\infty$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır.M nin kompakt olması nedeniyle, M nin bir elemanına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Bu alt dizi de x e yakınsal olmak zorunda olduğundan dolayı $x \in M$ yazabiliriz. O halde, $x \in \overline{M}$ keyfi olarak alındığından, *M* nin kapalı olduğu ortaya çıkar. Şimdi de *M* 'nin sınırlı olduğunu ispatlayacağız. *M* sınırsız olsaydı, *b* herhangi bir sabit eleman olmak üzere, $d(y_n,b) > N$ olacak şekilde sınırsız bir (y_n) dizisi içerirdi. Yakınsak bir alt dizinin sınırlı olması gerekeceğinden, söz konusu dizi yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Bu da ispatımızı tamamlar.

Bu lemmanın karşıtı, genelde, doğru değildir. (Eğer uzay sonlu boyutlu ise lemmanın karşıtı doğrudur) Bu önemli gerçeği ispatlayabilmek için, $e_n = (\delta_{nj})$, yani, *n.* terimi 1, diğer bütün terimleri 0 olmak üzere, ℓ^2 de (e_n) dizisini göz önüne alalım.

$\|e_n\| = 1$ olduğundan, bu dizi sınırlıdır. Bu dizinin terimleri, yığılma noktasına sahip olmadıkları için, kapalı olan bir nokta kümesi oluşturur ve bu nokta kümesi kompakt değildir ([14]).

Tanım 1.1.20. (Sayılabilir kompakt küme) A herhangi bir (X,T) topolojik uzayının alt kümesi olsun. Eğer A kümesinin her sonsuz elemanlı B alt kümesi A kümesi içinde bir yığılma noktasına sahip ise A ya sayılabilir kompakt küme denir.

Örnek: Bolzano-Weienstrass teoremi en iyi örnektir. Reel sayılarda her sınırlı, sonsuz elemanlı küme (örnek olarak [a,b] kapalı ve sınırlı aralık sayılabilir kompakt kümedir) bir yığılma noktasına sahiptir ([12]).

Tanım 1.1.21. (Ayrılabilir küme) X normlu uzay ve M ⊆ X olmak üzere , $\overline{M}$ = X ise M kümesi X de yoğundur denir. Eğer X kümesi X de yoğun sayılabilir bir alt kümeye sahip ise, ayrılabilirdir denir.

Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alışılmış topoloji ile ayrılabilirdir, çünkü $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $\mathbb{R}$ ayrılabilirdir.

Tanım 1.1.22. (Çap) Bir (X,d) metrik uzayının sınırlı ve boş olmayan bir A alt kümesinin çapı, d(A) = sup{d(x, y) : x, y ∈ A} olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.23. (Lebesgue Sayısı) (X,d) kompakt bir metrik uzay ve $U = (U_i)_{i\in I}$ ailesi, X in açık bir örtüsü olsun. O zaman öyle bir δ > 0 vardır ki X in çapı en fazla δ olan her alt kümesi U ailesinin bir elemanının altkümesidir.

X in verilmiş bir $U = (U_i)_{i\in I}$ açık örtüsü için, bu şekildeki δ > 0 sayısına U nun *Lebesgue sayısı* adı verilir.

İKİNCİ BÖLÜM

NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde önce normlu uzayda istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsak dizinin tekliği, istatistiksel yakınsak dizilerin toplamı, istatistiksel cauchy dizisi, istatistiksel sıfır dizisi incelenecektir.

Burada $\mathbb{N}$ pozitif doğal sayılar kümesini, X normlu bir vektör uzayını göstercektir.

2.1. Normlu Uzayda İstatistiksel Yakınsaklık Kavramı

Bu kısımda bir dizinin normlu uzayda istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 2.1.1. (Normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık) X de bir dizi (x_k) olsun. Eğer her ε > 0 için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \}| = 0$$

olacak şekilde bir L∈X varsa (x_k) dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x$ = L veya $st - \lim x_k$ = L ile gösterilir.

Buna göre,

$st - \lim x$ = L ⟺ ∀ ε > 0 için δ ($\{k : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \}$) = 0

olmasıdır. *S ile* tüm istatistiksel yakınsak diziler kümesini göstereceğiz.

Şimdi her $\varepsilon > 0$ için

$E_{\varepsilon} = \{k : \|x_k - L\| \geq \epsilon\}$

dersek $\chi_{E_{\varepsilon}}$ bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere *st* – lim$x$ = L olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}(c_1\,\chi_{E_{\varepsilon}}(\mathrm{k}))_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olmasıdır.

Burada $c_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisi olup

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{n}}\,, & 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n} \\ 0\,, & \mathrm{k} > n \end{cases}$$

ile tanımlanır.

İstatistiksel yakınsaklık tanımını aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz. $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere δ (A) = 0 özelliğini sağlayan herhangi bir küme A olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, x = (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ([1]).

Teorem 2.1.2. Normlu bir X uzayında yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

İspat : (x_k) yakınsak herhangi bir dizi olsun ve limx_k = L yazalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. (x_k) dizisi L ye yakınsak olduğundan dolayı $k \geq k_0$ olduğunda

$$\|x_k - L\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε'a bağlı bir k_0 pozitif tamsayısı vardır.

Buradan n $\geq$ k_0 için

$$\{ k \leq n : \|x_k - L\| \geq \epsilon \} \subseteq \{ 1, 2, 3, \dots, k_0 - 1, k_0 \}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

kard $\{ k \leq n : \|x_k - L\| \geq \epsilon \} \leq$ k_0

yazabiliriz. Her iki yanı n sayısına bölersek ve limite geçersek

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \epsilon \}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{n} = 0$$

dır.

O halde *st*-limx_k = L dir. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. İstatistiksel yakınsak dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten, herhangi bir sıfırdan yani X normlu vektör uzayının toplama işlemine göre birim elemanından farklı sabit x $\in X$ için

$$x_k = \begin{cases} 4, & k = \mathrm{m}^2 \text{ olacak biçimde bir m vardır.} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi 0 a istatistiksel yakınsaktır ancak yakınsak değildir. Gerçekten her ε > 0 için

$$|\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 4 \}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \|x_k\| \geq \varepsilon \}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 4 \}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$st - \lim x_k = 0$ bulunur.

Örnek 1.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} \ , \ k = m^2 \\ 2017 \ , \ k \neq m^2 \end{cases} \qquad (\ m = 1, 2, 3, \ldots\ )$$

şeklinde tanımlanan (x_k) reel sayı dizisini inceleyelim.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \le n : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\}| \le |\{k \le n : x_k \neq 2017\}| \le \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : \|x_k - 2017\| \ge \varepsilon\}| \le |\{k \le n : x_k \neq 2017\}|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n} = 0$$

elde edilir. Demek ki,

$\{k \in N : \|x_k - 2017\| \ge \varepsilon\} = \{k = m^2 : m \in N\}$ ve

$\delta(\{k = m^2 : m \in N\}) = 0$ olduğundan

$st - \lim x = 2017$

bulunur.

Örnek 2. X de (x_k) dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k^2 , & k = m^2 \\ 1 , & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlasın. Açıkça görülüyor ki (x_k) dizisi sınırlı değildir, fakat

$st - \lim x_k = 1$ dir.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Örnek 3. X de (x_k) dizisi

$$x_k = \begin{cases} 183 , & k = m^2 \\ \frac{1}{m} , & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\delta(\{ n^2 : n \in N \}) = 0$$

olduğu görülür ki bu da bize

$$st - \lim x_k = 0$$

olduğunu fakat genel anlamda ise yakınsak olmadığını gösterir.

Şimdi de sınırlı bir dizinin istatistiksel yakınsak dizi olup olmadığına bakalım.

Örnek 4. X de (x_k) dizisi,

$$x_k = \begin{cases} 1 , & k = 2n \\ 0 , & k \neq 2n - 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $\varepsilon = \frac{1}{5}$ alalım.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - 0\| \geq \frac{1}{5} \right\} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \|x_k\| \ \ge \frac{1}{5}\right\}\right| = \frac{1}{2}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \|x_k - 1\| \ge \frac{1}{5}\right\}\right| = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 1$ olsun.

$\varepsilon = \min\left\{\frac{\alpha}{5}, \frac{|1-\alpha|}{5}\right\}$ yazalım. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n : \|x_k - \alpha\| \ge \varepsilon\}| \neq 0$$

olur.

Yukarıda verilen ve sınırlı olan (x_k) dizisinin istatistiksel yakınsak dizi olmadığını gösterdik. Bu da bize aslında sınırlı olan her dizinin istatistiksel yakınsak dizi olması gerekmediğini gösterir.

Teorem 2.1.3. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. X de her bir istatistiksel yakınsak dizinin limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak olsun ve L_1 ve L_2 gibi birbirinden farklı istatistiksel limitleri olsun. $L_1 - L_2 \neq 0$ dır.

$\|L_1 - L_2\| = \alpha$ diyelim. $\varepsilon = \frac{\alpha}{3}$ yazalım $\forall$ k ϵ $\mathbb{N}$ için

$Z_k = L_1 - L_2$

olarak tanımlayalım.

$st-\lim x_k = L_1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \ \leq n : \|L_1 - x_k\| \geq \ \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

olur.

$st-\lim x_k = L_2$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \ \leq n : \|L_2 - x_k\| \geq \ \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

olur. Buradan ,

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \left| \{k \ \leq n : \|Z_k\| \geq \ \varepsilon\} \right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \left| \{k \ \leq n : \|L_1 - L_2\| \geq \ \varepsilon\} \right|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \ \leq n : \|L_1 - x_k\| \geq \ \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \ \leq n : \|x_k - L_2\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

= 0 + 0 = 0.

olur ki bu da 1 ≤ 0 çelişkisi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Burada normlu uzayda istatistiksel yakınsaklık ile alışılmış yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Hemen belirtelim ki alışılmış anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Örnek 1 ve Örnek 2 den de görülebildiği gibi sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

Buna göre istatistiksel yakınsak diziler kümesini S ile gösterilse ve yakınsak diziler kümesi c ile gösterilirse Teorem 2.1.4 den c ⊂ S dir ve c ≠ S dir.

Teorem 2.1.4. ([11]) *st*-lim x $= L_1$, *st*-lim y $= L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

Bu durumda

(i) *st -lim* (x + y) = $L_1 + L_2$

(ii) *st* -lim (αx) = $\alpha . L_1$ dir.

İspat: (i)

x = (x_k) ve $y = (y_k)$

yazalım.

$$st\text{-}\lim x_k = L_1$$

ve

$$st\text{-}\lim y_k = L_2$$

olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım.

$$st\text{-}\lim x_k = L_1$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \|x_k - L_1\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

olur.

Benzer şekilde

$$st\text{-}\lim y_k = L_2$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \|y_k - L_2\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

dır. Buradan

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \le n : \|x_k + y_k - (L_1 + L_2)\| \ge \varepsilon\}\right|$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \|x_k - L_1\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \|y_k - L_2\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$

$\le 0 + 0 = 0$ olur.

Buradan da

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \le n : \|x_k + y_k - (L_1 + L_2)\| \ge \varepsilon\}\right| = 0$

elde edilir ki bu da

st-lim (x + y) = $L_1 + L_2$

olduğunu ispatlar.

(ii)

Eğer $\alpha = 0$ ise

st -lim $\alpha.x_k = \alpha.st$ -lim x_k = st -lim $0.x_k = st$ -lim $0 = 0$

olup, ispat aşikârdır.

Şimdi

$$st\text{ - }lim\ x = L$$

yazalım ve $\alpha \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A) = 0$ olduğunda , $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için

$$\|x_k - L\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan da her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her $k \geq k_0$ için

$$\|\alpha x_k - \alpha.L\| = |\alpha| \,.\, \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \,|\{k \leq n : \|\alpha x_k - \alpha.L\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Yani

$st\text{-}lim\,(\alpha.x_k) = \alpha.L$ dir.

2.2. İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu alt başlıkta Cauchy yakınsaklık kriterinin bir benzeri olarak istatistiksel Cauchy dizisi kavramı verilecek ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilecektir. Klasik Analizden bildiğimiz “ Cauchy dizisi ” kavramının istatistiksel benzeri de 1985 yılında Fridy tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.1. X de (x_k) dizisi verilsin. Her $\epsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \|x_k - x_N\| \geq \varepsilon \} \mid = 0$$

olacak şekilde bir N = N(ε) sayısı mevcut ise (x_k) dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir ([9]).

Teorem 2.2.2. ([9]) X tam normlu uzayında aşağıdaki önermeler denktir.

(i) x= (x_k) dizisi istatistiksel yakınsaktır.
(ii) x=(x_k) dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.
(iii) Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir (y_k) dizisi vardır.

İspat: Buradan itibaren δ(A) = 0 özelliğini sağlayan ℕ nin her A alt kümesi için sağlanan bir özelliği hemen hemen her k için sağlar diyerek ifade edeceğiz. Kısaca h.h.k için sağlanır diyeceğiz.

(i) ⇒ (ii) olduğunu gösterelim.

st – limx_k = L ve ε > 0 olsun. Bu durumda h.h.k için $\|x_k - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Eğer N, h.h.k için $\|x_N - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$\|x_k - x_N\| = \|x_k - L + L - x_N\| \le \|x_k - L\| + \|x_N - L\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, |\{k \le n : \|x_k - x_N\| \ge \varepsilon \}| = 0$$

olduğundan x = (x_k) bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii) ⇒ (iii) : I = B$[x_N, 1]$ kapalı yuvarı h.h.k için x_k terimini içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. Yine I" = $B[x_M, \frac{1}{2}]$ kapalı yuvarı h.h.k için x_k terimini içerecek şekilde bir M seçelim. Şimdi iddia ediyoruz ki I_1 = (I ∩ I") yuvarı, h.h.k için x_k terimini içerir. Şimdi bunu gösterelim:

$$\{k \le n : x_k \notin I \cap I''\} = \{k \le n : x_k \notin I\} \cup \{k \le n : x_k \notin I''\}$$

olduğundan

$$|\{k \le n : x_k \notin I \cap I''\}| = |\{k \le n : x_k \notin I\} \cup \{k \le n : x_k \notin I''\}|$$
$$\le |\{k \le n : x_k \notin I\}| + |\{k \le n : x_k \notin I''\}| \text{ olup}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, |\{k \le n : x_k \notin (I \cap I'')\}| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, |\{k \le n : x_k \notin I\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, |\{k \le n : x_k \notin I''\}| = 0$$

elde edilir.

Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, |\{k \le n : x_k \notin (I \cap I'')\}| = 0$$

dır. Burada h.h.k için I_1, x_k terimini içeren ve boyu δ (I)= $\sup\{\|x - y\|\}$ sonlu olan kapalı bir yuvardır. Aynı şekilde N(2) seçelim. Bu durumda burada h.h.k için

I” $= B[x_{N(2)}, \frac{1}{4}]$ aralığı h.h.k x_k terimini içerir ve $I_2 = (I \cap I”)$ h.h.k için x_k terimini içeren ve boyu $|I_2| = B[x_{N(2)}, \frac{1}{4}] \leq \frac{1}{4}$ olan kapalı bir yuvardır. Bu şekilde devam edilirse her $m \in \mathbb{N}$ için kapalı yuvarların $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini buluruz. Bu durumda I_m, h.h.k için x_k terimini içeren ve boyu

$$|I_m| = B[x_{N(m)}, \frac{1}{2^m}] \leq 2.\frac{1}{2^m} = 2^{1-m}$$

olan bir kapalı aralıktır. İç içe yuvarlar teoreminden $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$ olacak şekilde bir $\lambda \in X$ vardır. Her k için $x_k \in I_m$ olduğundan,

n $> T_m$ için $\frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$ … (1) olacak şekilde pozitif tam sayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini bulabiliriz.

Şimdi, $k > T_1$ ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise $x_k \notin I_m$ olacak şekilde x_k nın bütün terimlerinden oluşan x’in bir z alt dizisini tanımlayalım. Bundan sonra tekrar

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & \text{eğer } x_k, \text{ z nin bir terimi ise} \\ x_k, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde bir y dizisi tanımlayalım. Eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise x_k’ya z’nin bir terimidir. Burada $y_k = \lambda$ veya $y_k = x_k \in I_m$ ve $\|y_k - \lambda\|$ nın boyu

$\|y_k - \lambda\| \leq I_m \leq 2^{1-m}$ dir. Buradan $m \to \infty$ için $2^{1-m} \to 0$ olacağından

$y_k \to \lambda$ bulunur. Şimdi h.h.k için $y_k = x_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için

$T_m < n < T_{m+1}$ ise bu durumda $\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$.

dır.

(1) den, $\frac{1}{n}|\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$ elde edilir.

$m \to \infty$ için limit alınırsa

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \le n : y_k \ne x_k\} \mid = 0$ elde edilir ki bu da h.h.k için $y_k = x_k$ olduğunu gösterir.

(iii) ⇒ (i) olduğunu gösterelim.

h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y_k dizisi mevcut olsun. Hemen hemen her k için $y_k \to L$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için

$\{k \le n : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\} \subseteq \{k \le n : x_k \ne y_k\} \cup \{k \le n : \|y_k - L\| \ge \varepsilon\}$

olup, son cümle tamsayıların sabit bir $\ell = \ell(\varepsilon)$ adet sayı içerdiğinden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \le n : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\} \mid = 0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \le n : x_k \ne y_k\} \mid + \lim_{n\to\infty} \frac{\ell}{n}$$

dir.h.h.k için $x_k = y_k$ olduğundan $\|x_k - L\| < \varepsilon$ elde edilir. Buda teoremin ispatını tamamlar**.** ([8])

Teorem 2.2.2 den aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 2.2.3. Bir $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel yakınsak ise bu durumda x dizisi L değerine klasik anlamda yakınsak bir y alt dizisine sahiptir ([5]).

İstatistiksel yakınsaklığa denk bir ifadeyi vermek için $C_1 = (x_{nk})$ Cesàro matrisinin genel terimini hatırlayalım:

Bu matris

$$C_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile verilir. Buradan,

$$K(\varepsilon) = \{k : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\}$$

ve $\chi_{K(\varepsilon)}$, $K(\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$st\text{-}lim x_k$ = L $\Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \ \leq n : \|x_k - L\| \ \geq \ \varepsilon\} \mid = 0.$

$\Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{K}(\varepsilon)} (k) = 0.$

$\Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} (C_{1}\chi_{\mathrm{K}(\varepsilon)})_n \ = 0$

olduğu görülür. ([15]).

Teorem 2.2.4. X de $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak olsun.

Bu durumda x = y + z olacak şekilde L sayısına yakınsayan bir y_k dizisi ve istatistiksel sıfır (z_k) dizisi vardır ([5]).

İspat: *st*–lim$x$ = L olsun. Bu durumda $N_0 = 0$ olmak üzere $N_j \ (j = 1, 2, \ldots)$ için

$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \ \leq n \ : \ \|x_k - L\| \ \geq \ \frac{1}{j} \ \right\} \right| < \frac{1}{j}$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir (N_j) dizisi bulunabilir.

Şimdi (y_k) ve (z_k) dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$N_j <$ k $\leq N_1$ olduğunda $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$ alalım.

J ≥ 1 olmak üzere $N_j <$ k $< N_{j+1}$ olsun.

$\|x_k - L\| < \frac{1}{j}$ olduğunda $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$;

$\|x_k - L\| \geq \frac{1}{j}$ olduğunda $\mathrm{z_k} = \mathrm{x_k} - L$ ve $\mathrm{y_k} = L$ alalım.

Bu durumda $x_k = y_k + z_k$ şeklinde yazılabileceği görülür.

Şimdi iddia ediyoruz ki $y_k \to L$ (k → ∞) gerçeklenir. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\varepsilon > \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir j seçelim.

k $> N_j$ için $\|x_k - L\| \geq \frac{1}{j} \Rightarrow \|y_k - L\| = \|L - L\| = 0$ ve

$\|x_k - L\| < \frac{1}{j} \Rightarrow \|y_k - L\| = \|x_k - L\| < \frac{1}{j} < \varepsilon$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} y_k = L \text{ elde edilir.}$$

Şimdi z dizisinin istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \,|\{k \le n : z_k \ne 0\}| = 0$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Her ε >0 için,

$\{k \le n : \|z_k\| \ge \varepsilon\} \subseteq \{k \le n : z_k \ne 0\}$

olduğundan

$|\{k \le n : \|z_k\| \ge \varepsilon\}| \le |\{k \le n : \|z_k\| \ne 0\}|$

gerçeklenir.

Şimdi $\delta > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{j} < \delta$ ise, her IN $> N_j$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \le n : z_k \ne 0\}| < \delta$$

olduğunu göstermeliyiz.

$N_j < k \le N_{j+1}$ olsun. Bu durumda $z_k \ne 0$ olması ancak $||x_k - L|| \ge \frac{1}{j}$ olmasıyla mümkündür. O halde $N_j < k \le N_{j+1}$ ise

$$\{k \le n : z_k \ne 0\} = \left\{k \le n : ||x_k - L|| \ge \frac{1}{j}\right\}$$

olur.Dolayısıyla

$N_v < k \le N_{v+1}$ ve $v > j$ ise

$$\frac{1}{n} |\{k \le n : z_k \ne 0\}| \le \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : ||x_k - L|| \ge \frac{1}{v}\right\}\right| < \frac{1}{v} < \frac{1}{j} < \delta$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar ([21]).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL KOMPAKTLIK VE İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK

3.1. İstatistiksel Kompaktlık ve İstatistiksel Süreklilik

Bu bölümde kompaktlık, Total Sınırlılık, İstatistiksel kompaktlık, , dizisel kompaktlık ve istatistiksel süreklilik kavramları verilecektir.

Önce kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramlarının eşdeğerli olduğunun ispatını verelim.

Kompaktlık, dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık normlu uzaylarda hatta metrik uzaylarda eşdeğerdir.

Önerme 3.1.1: (X,τ) topolojik bir uzay ve $A \subset X$ olsun.

(i) A kompakt ise sayılabilir kompakttır.

(ii) A dizisel kompakt ise sayılabilir kompakttır.

İspat: (i) A kompakt olsun, fakat A nın A da hiçbir yığılma noktasına sahip olmayan sonsuz bir alt kümesi B olsun. Bu takdirde, her bir $a \in A$ noktası B nin en çok bir noktasını içeren bir G_a açığına ait olur.

Bu durumda $\{G_a : a \in A\}$ sınıfı A için bir açık örtü olup, A kompakt olduğundan $B \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{u} G_{i_k}$

olacak şekilde

$$\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots G_{i_m}\}$$

sonlu alt örtüsünü kapsar. Hâlbuki her bir G_{i_k} açığı B nin en çok bir noktasını içerir; böylece

$$\bigcup_{k=1}^{u} G_{i_k}$$

nın bir alt kümesi olarak B kümesi en çok m adette elemana sahip olur, yani B sonlu olur. O halde A nın her sonsuz alt kümesi A da bir yığılma noktasına sahiptir, yani A sayılabilir kompakttır.

(ii) A dizisel kompakt ve B de A nın sonsuz bir alt kümesi olsun. Bu takdirde B nin farklı elemanlarından oluşan bir $(a_1, a_2, \dots)$ dizisi vardır. A dizisel kompakt olduğundan $(a_1, a_2, \dots)$ dizisinin bir $a \in A$ noktasına yakınsayan ve yine farklı terimlerden oluşan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots\}$ gibi bir alt dizisini bulabiliriz. Buna göre a nın her açık komşuluğu yakınsak (a_{i_n}) alt dizisinin sonsuz çoklukta elemanını içerir. Fakat bütün terimler birbirinden farklı olduğundan a nın her komşuluğu B kümesinin sonsuz çoklukta elemanını içermiş olur ki a noktası B kümesinin bir yığılma noktasıdır, dolayısıyla A sayılabilir kompakttır.

Tanım 3.1.2. (Total Sınırlılık) (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\{B(x_i, \varepsilon): i = 1,2, \dots, n\}$$

ailesi A nın bir örtüsünü oluşturacak biçimde A nın

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = M$$

gibi sonlu bir altkümesi bulunabiliyorsa A kümelerine *total sınırlı bir küme* denir.

Bu tanıma göre, verilen her $\varepsilon > 0$ a karşılık her $x \in A$ için

$$d(x, M) < \varepsilon$$

olacak şekilde A nın sonlu bir M altkümesi vardır.

$$d(A) = \sup\{d(a, a'): a, a' \in A\} < \infty$$

ise A ya sınırlı küme denir. Buna göre total sınırlı her kümenin sınırlı olduğu açıktır. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

Bunu aşağıdaki örnekle kolayca görebiliriz.

Örnek: ℓ_2 uzayını verilen alışılmış metriği ile göz önüne alalım. i yinci yerdeki terimi 1 diğerleri sıfır olan

$$e_i = (0,0,\ldots,1,0,\ldots)$$

dizilerinin oluşturduğu

$$A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$$

cümlesi sınırlı olduğu halde total sınırlı değildir. Çünkü, $i \neq j$ için

$$d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$$

olduğu dikkate alındığında

$$d(A) = \sup\{d(e_i, e_j) : e_i, e_j \in A\} = \sqrt{2}$$

olduğu görülür ki A sınırlıdır. Halbuki $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa, A nın çapı ε dan küçük, boş olmayan sonlu alt kümeleri sadece tek elemanlı

$$\{e_i\}$$

kümeleridir. U ise A nın bu ε için, sonlu bir örtüye sahip olmasını sağlayacak şekilde, sonlu bir alt kümeye sahip olmadığını gösterir ki A total sınırlı değildir ([2]).

Teorem 3.1.3. Bir metrik uzayın dizisel kompakt alt kümeleri total sınırlıdır.

İspat: (X,d) bir metrik uzay, X in bir alt kümesi A ve A dizisel kompakt olsun. A nın total sınırı olmadığını varsayalım. Bu takdirde bir $\varepsilon > 0$ için bu ε' u yarıçap kabul eden açık yuvarların sonlu bir bir ailesi A için bir örtü oluşturacak şekilde A nın sonlu bir alt kümesi bulunamaz. Şimdi $a_1 \in A$ olsun. Buna göre $d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$ olacak biçimde bir $a_2 \in A$ vardır, aksi halde $\{a_1\}$ kümesi için a_1 merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvarın oluşturduğu aile A nın sonlu bir örtüsü olurdu.

Bunun gibi

$$d(a_1, a_3) \geq \varepsilon \text{ ve }, \quad d(a_2, a_3) \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $a_3 \in A$ vardır, çünkü aksi halde $\{a_1, a_2\}$ kümesi için a_1 ve a_2 merkezli ε yarıçaplı açık yuvarların oluşturduğu aile A için sonlu bir örtü olur.

Bu şekilde devam ederek $i \neq j$ için

$$d(a_i, a_j) \geq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $(a_1, a_2, \ldots)$ dizisi bulabiliriz ki bu dizi yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Bu ise A nın dizisel kompakt oluşu ile çelişir. O halde A dizisel kompakt ise total sınırlıdır.

Teorem 3.1.4. Bir metrik uzayda dizisel kompakt bir alt kümenin her açık örtüsü bir Lebesque sayısına sahiptir.

İspat: (X,d) bir metrik uzay, X in dizisel kompakt bir alt kümesi A ve A nın açık bir örtüsü

$$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$$

olsun. $\mathcal{G}$ nin bir Lebesque sayısına sahip olmadığını varsayalım. Bu takdirde her bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$0 < d(B_n) < \frac{1}{n}$$

ve $\mathcal{G}$ deki her G_i için

$B_n \not\subset G_i$

olacak biçimde A nın bir B_n alt kümesini bulabiliriz. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $b_n \in B_n$ noktası seçelim. A dizisel kompakt olduğundan

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$

dizisi A nın bir b noktasına yakınsayan

$$(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots)$$

alt dizisine sahiptir. b∈A olduğundan b∈ G_j olacak şekilde b merkezli ve ε yarıçaplı bir

$$B(b, \varepsilon)$$

açık yuvarı da vardır. Ayrıca (b_{j_n}) dizisi b ye yakınsadığından

$$d(b, b_{i_{n_o}}) < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \ b_{i_{n_o}} \in B_{i_{n_o}} \ \ \text{ve} \ \ d(B_{i_{n_o}}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bir i_{n_o} pozitif tam sayısı bulabiliriz. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$B_{i_{n_o}} \subset B(b, \varepsilon) \subset G_j$

elde ederiz. Bu ise $\mathcal{G}$ deki her G_i için

$B_{i_{n_o}} \not\subset G_i$

olduğu gerçeği ile çelişir. O halde $\mathcal{G}$ bir Lebesque sayısına sahiptir.

Teorem 3.1.5. Normlu bir *X* uzayının bir *A* alt kümesi için aşağıdaki önermeler denktir.

i) A kompakttır

ii) A dizisel kompakttır.

iii) A sayılabilir kompakttır.

İspat: Teorem 3.1.1. in (i) ve (ii) si dolayısıyla, topolojik bir uzayda (i) $\Longrightarrow$ (iii) ve (ii) $\Longrightarrow$ (iii) tür.Aynı sonuçlar normlu uzayda da geçerli olacaktır. O halde (iii) $\Longrightarrow$ (ii) ve (ii) $\Longrightarrow$ (i) olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): A sayılabilir kompakt olsun ve A daki bir dizi (a_1, a_2,…) olsun. Eğer B = $\{a_1, a_2, \dots\}$kümesi sonlu ise B nin noktalarından biri, örneğin a_{i_o}, sonsuz çoklukta j$\in$ $\mathbb{N}$ için $a_{i_o} = a_j$ özelliğini sağlayacaktır. Böylece $(a_{i_o}, a_{i_o}, a_{i_o}, \dots)$ dizisi (a_n) dizisinin A nın a_{i_o} noktasına yakınsayan bir alt dizisidir.

O halde

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

kümesinin sonsuz olduğunu varsayalım. Hipotez dolayısıyla A sayılabilir kompakt olduğundan A nın B sonsuz alt kümesi A da bir x yığılma noktasına sahiptir.

X normlu uzay dolayısıyla metrik uzay olduğundan, bir Hausdorff uzayıdır, dolayısıyla x in her açık komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta elemanı bulunacaktır. Buna göre, (a_n) dizisinin x e yakınsayan bir (a_{i_n}) alt dizisini seçebiliriz. O halde A dizisel kompakttır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): A nın dizisel kompakt olduğunu varsayalım ve A nın bir açık örtüsü

$$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$$

olsun. A dizisel kompakt olduğundan Teorem 3.1.4. ten dolayı $\mathcal{G}$ açık örtüsü bir $\delta > 0$ Lebesque sayısına sahiptir.

Bundan başka Teorem 3.1.3. den dolayı da A kümesi total sınırlıdır. Böylece $\delta > 0$ için A nın öyle bir sonlu

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

alt kümesini bulabiliriz ki

$$\{B(a_i, \delta) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

açık yuvarlar ailesi A yı örter. Hâlbuki δ *sayısı* $\mathcal{G}$ için bir Lebesque sayısı olduğundan,

$$B(a_1, \delta) \subset G_{i_1}, \; B(a_2, \delta) \subset G_{i_2}, \dots, B(a_n, \delta) \subset G_{i_n}$$

olacak biçimde

$$G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{j_n} \in \mathcal{G}$$

vardır. Buna göre,

$\mathrm{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\mathrm{a_i}, \delta\,) \subset\ \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$

olur ki $\mathcal{G}$ açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahiptir, yani A kompakttır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.6. *X* tam metrik uzay ve (A_n), X in kapsama sıralamasına göre azalan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu takdirde

$$\mathrm{d}(A_n) \to 0$$

ise

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

bir elemanlıdır.

İspat: $\mathrm{A} = \cap A_n$ yazalım. $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq \mathrm{d}(A_n) \to 0$$

olduğundan, x = y dir. Dolayısıyla A en fazla tek elemanlıdır. Her n için, $x_n \in A_n$ seçelim. Her $\mathrm{n}, \mathrm{p} \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathrm{d}(x_{n+p}, x_n) \leq \mathrm{d}(A_n)$$

olduğundan, (x_n) Cauchy dizisidir ve bir *X* tam olduğundan (x_n) dizisi X in bir noktasına yakınsaktır. (x_n) dizisinin yakınsadığı noktaya x diyelim. Bu takdirde $\mathrm{n} \to \infty$ için $x_n \to x$ dir. Her $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ için $x_m \in A_n$ ve A_n kapalı olduğundan her n doğal sayısı için $x \in A_n$ dir. Böylece $x \in A$ dır.

Lemma 3.1.7. (X,d) metrik uzayında X in bir A alt kümesinin total sınırlı olması için gerek ve yeter koşul terimleri *A* dan dan alınan her bir dizinin en az bir Cauchy alt dizisinin var olmasıdır ([2],[13]).

İspat.

⟹: A total sınırlı olsun. Bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ a karşılık A nın $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gibi öyle bir alt kümesini bulabiliriz ki $\{B(x_i, \varepsilon) : i = 1,2,\ldots,n\}$ açık yuvarlar ailesi A yı örter.Buna göre $\varepsilon_1 = 1$ için de Ayı örten $\{B(x_i, \varepsilon) : i = 1,2,\ldots,n\}$ açık yuvarlar ailesi bulabiliriz.Bu açık yuvarlardan en az birisi (a_n) dizisinin sonsuz çoklukta elemanını içerecektir, buna

$$B(x_j, \varepsilon_1) = B_1$$

diyelim. Böylece öyle bir j pozitif tam sayısı bulabiliriz ki bunun için

$$a_{j_1} \in B(x_j, \varepsilon_1)$$

olur. Total sınırlı bir kümenin her alt kümesi de total sınırlı olduğundan $B(x_j, \varepsilon_1)$ de total sınırlıdır. Buna göre bir $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ ye karşılık $B(x_j, \varepsilon_1)$ in öyle bir $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ sonlu alt kümesini bulabiliriz ki

$$\{ B(y_i, \varepsilon_2) : i= 1, 2, \ldots,m\}$$

açık yuvarlar ailesi $B(x_j, \varepsilon_1)$ açık yuvarını örter. Benzer şekilde $B(y_i, \varepsilon_2)$ açık yuvarlarından biri yine dizinin sonsuz çoklukta terimini içerecektir. Buna $B(y_k, \varepsilon_2) = B_2$ diyelim. Bu takdirde

$$j_2 > j_1 \text{ ve } a_{j_2} \in B(y_k, \varepsilon_2) = B_2$$

olacak biçimde bir j_2 pozitif tam sayısı vardır, bundan başka ,

$$B(y_k, \varepsilon_2) \subset B(x_j, \varepsilon_1)$$

dir. Bu şekilde devam edersek ,

$$A \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots ;\ d(B_n) < \frac{1}{n}$$

olacak biçimde bir iç içe yuvarlar dizisi ve $a_{j_n} \in B_n$ olmak üzere (a_n) in bir (a_{j_n}) alt dizisini elde ederiz. (a_{j_n}) nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

ε > 0 verilsin, bu takdirde $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ve böylece

$$d(B_{n_0}) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 tam sayısı vardır. Buna göre , $j_n, j_m > j_{n_0}$ oldukça $a_{j_n}, a_{j_m} \in B_{n_0}$ olmasını, bu da

$$d(a_{j_m}, a_{j_n}) < \varepsilon$$

olmasını gerektirir ki (a_{j_n}) bir Cauchy dizisidir ([2]).

⇐: *A* dan dan alınan her bir dizinin en az bir Cauchy alt dizisinin var olduğunu kabulünün A nın total sınırlılığını gerektirdiğini ispat etmek için A nın total sınırlı olmadığı varsayımının *A* dan dan alınan en az bir dizinin hiçbir Cauchy alt dizisinin var olmadığını göstereceğiz. A total sınırlı olmasın. Burada bir ε > 0 sayısı vardır, öyle ki ε yarıçaplı A yı örten sonlu sayıda açık yuvar bulunamaz. x_1, A' nın herhangi bir elemanı olsun.

Buradan

$$A \cap S_\varepsilon(x_1) \neq A$$

dir, aksi takdirde A total sınırlı olurdu. x_2, A nın herhangi bir elemanı olsun öyle ki

$$x_2 \notin S_\varepsilon(x_1) \cap A$$

yani başka bir deyişle

$$d(x_1, x_2) \geq \varepsilon \text{ dir. Buradan}$$

$$A \cap (S\varepsilon(\mathrm{x}_1) \cup S\varepsilon(x_2)) \neq A$$

dır. Aksi takdirde A total sınırlı olurdu. Şimdi x_3, A nın herhangi bir elemanı olsun öyle ki

$$x_3 \notin [S\varepsilon(\mathrm{x}_1) \cup S\varepsilon(x_2)] \cap \mathrm{A}$$

dir. Aksi takdirde A total sınırlı olurdu. Başka bir ifadeyle

$$d(x_1, x_2) \geq \varepsilon \text{ ve } d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$$

olurdu. Bu şekilde işleme devam edilirse elemanları A dan olan $\{x_n\}$ dizisini elde ederiz, öyle ki

$$x_3 \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} S\varepsilon(x_i) \qquad (n = 2,3,\ldots)$$

Başka bir ifadeyle

$$d(x_i, x_n) \geq \varepsilon, \quad (i=1, 2, \ldots, n\text{-}1 \text{ ve } n=1, 2, \ldots) \ (n \neq i)$$

Sonuç olarak

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon, \forall \text{ n ve m için } n \neq m \text{ dir.}$$

Bu nedenle $\{x_n\}$ dizisinin hiç bir Cauchy alt dizisi olamaz. Bunun sonucu olarak A nın total sınırlı olduğu görülür ([13]).

Teorem 3.1.8. (X, d) bir metrik uzayı için aşağıdakiler denktir.

(i) *X kompakt.*
(ii) *X total sınırlı ve tamdır.*

İspat:
(i) ⇒ (ii):
X in kompakt olduğunu kabul edelim. r > 0 verilsin.

$$\{B(x, r) : x \in X\}$$

X nin bir açık örtüsü olduğundan,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

özelliğinde , $x_i \in$ X ler vardır. *X in* total sınırlı olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de *X* in tam olduğunu gösterelim. Terimleri X den alınan herhangi bir Cauchy dizisi (x_n) olsun.

X kompakt dolayısıyla dizisel kompakt olduğundan dolayı, bu (x_n) Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa dizinin kendisi de yakınsak olduğundan (x_n) Cauchy dizisi yakınsak olur. Bu da X in tam olduğunu gösterir. Karşıt olarak X in total sınırlı ve tam olduğunu kabul ederek kompakt olduğunu gösterelim. X total sınırlı ve tam olsun. Normlu uzaylarda dizisel kompaktlık kompaktlığa denk olduğundan X in dizisel konpakt olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Terimleri X den alınan herhangi bir dizi (x_n) olsun. X total sınırlı olduğundan dolayı Lemma 3.1.7 den dolayı bu (x_n) dizisinin bir Cauchy alt dizisi vardır. Hipotezden X uzayını tam kabul ettiğimizden dolayı bu (x_n) dizisinin Cauchy alt dizisi yakınsaktır. Böylece (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisini bulmuş olduk. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.9. (İstatistiksel kompaktlık) X normlu bir uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer terimleri E den alınan her dizinin E nin bir elemanına istatistiksel yakınsayan bir alt dizisi varsa E ye istatistiksel kompakt denir.

Buna göre (x_n) dizisi E nin elemanlarının bir dizisi olarak verilmiş ise, st-lim$x_{n_k} = \ell$ ve $\ell \in E$ olacak şekilde (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

Teorem 3.1.10. X in bir E alt kümesinin istatistiksel kompakt olması için gerek ve yeter koşul dizisel kompakt olmasıdır.

İspat: X in istatistiksel kompakt herhangi bir altkümesi E olsun. E nin dizisel kompakt olduğunu göstermek için terimleri E den alınan herhangi bir (x_n) dizisi alalım. E kümesi istatistiksel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin E nin bir ℓ elemanına istatistiksel yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Sonuç 2.2.3 ten dolayı da bu (x_{n_k}) alt dizisinin de $\boldsymbol{\ell}$ elemanına adi anlamda yakınsak bir alt dizisi vardır. O halde E dizisel kompakttır.

Şimdi de E dizisel kompakt olsun. E nin istatistiksel kompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için terimleri E olan herhangi bir (x_n) dizisi alalım. E nin dizisel kompakt olduğunu kabul ettiğimizden (x_n) dizisi E nin bir ℓ elemanına yakınsayan bir

(x_{n_k}) alt dizisi vardır. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak olduğundan

$$st - \lim x_{n_k} = \boldsymbol{\ell} \in E$$

dir. O halde E kümesi istatistiksel kompakttır.

Tanım.3.1.11. (İstatistiksel Süreklilik) X normlu bir uzay f, X in bir alt kümesinden X e bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu istatistiksel yakınsak dizileri istatistiksel yakınsak dizilere, istatistiksel limiti ℓ olan diziyi istatistiksel limiti f(ℓ) olan diziye dönüştürdüğü anlamında istatistiksel yakınsaklığı koruyorsa f ye istatistiksel *süreklidir* denir**.**

Buna göre, $st - \lim x_k = \ell$ olduğunda $st - \lim f(x_k) = f(\ell)$ oluyorsa f fonksiyonuna *istatistiksel süreklidir* denir**.**

Bir *X* normlu uzayının bir *A* alt kümesi ve x ∈ X verilsin. Eğer istatistiksel limiti x olan terimleri A dan alınan en az bir dizi varsa x e *A* kümesinin istatistiksel dizisel değme noktası denir. A kümesinin tüm istatistiksel değme noktaları kümesi $\overline{A}^s$ ile gösterilirse, $A = \overline{A}^s$ dır.Yani *A* kümesinin İstatistiksel dizisel değme noktaları kümesi *A* nın adi anlamda değme noktaları kümesine eşittir. Bunu aşağıda veriyoruz.

Lemma 3.1.12. *X* in bir A alt kümesi istatistiksel kapanış kümesi *A* kümesinin adi anlamda kapanış kümesine eşittir.

İspat. $\overline{A} = \overline{A}^s$ olduğunu göstermek için $\overline{A} \subseteq \overline{A}^s$ ve $\overline{A}^s \subseteq \overline{A}$ olduğunu göstereceğiz. Önce $\overline{A} \subseteq \overline{A}^s$ olduğunu gösterelim. Bunu yapmak için herhangi bir $x \in \overline{A}$

alalım. Bu takdirde terimleri A dan alınan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak olduğundan dolayı (x_n) dizisi x noktasına istatistiksel yakınsaktır. O halde $x \in \overline{A}^s$ dir. Şimdi de $\overline{A}^s \subseteq \overline{A}$ olduğunu gösterelim Bunu yapmak için herhangi bir $x \in \overline{A}^s$ alalım. Bu takdirde Sonuç 2.2.3 den dolayı (x_n) dizisi x değerine klasik anlamda yakınsak bir y alt dizisine sahiptir. O halde x noktası A kümesinin bir değme noktasıdır yani $x \in \overline{A}$. O halde $\overline{A}^{s} \subseteq \overline{A}$. Böylece $\overline{A} = \overline{A}^{s}$ elde edilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.13. X in bir alt kümesinden X e bir fonksiyonun istatistiksel sürekli olması için gerek ve yeter koşul *sürekli* olmasıdır.

İspat: Lemma 3.1.12 den dolayı,

$$\overline{A} = \overline{A}^{s}$$

eşitliği her $A \subset X$ için gerçeklenir. f in sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

olduğundan, ve f in istatistiksel sürekli dolayısıyla dizisel sürekli olması için gerek ve yeter koşulun

$$f(\overline{A}^{s}) \subset (\overline{f(A)})^{s}$$

olduğundan dolayı ispat elde edilir ([7]).

3.2.İstatitiksel Quasi Cauchy Dizisi

Bu bölümde quasi cauchy dizisi, istatistiksel quasi cauchy dizisi, istatistiksel ward süreklilik tanıtılıp aralarındaki ilişki incelenecektir. Önce quasi Cauchy dizisinin tanımını verelim.

Tanım.3.2.1. (Quasi Cauchy dizisi) Eğer X de bir (x_k) dizisi için

$$\lim_{k\to\infty}(x_{k+1}-x_k)=0$$

oluyorsa (x_k) dizisine bir *quasi Cauchy dizisi* denir. Buna göre (x_k) nın quasi Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul

$$(\|(x_{k+1}-x_k)\|)$$

reel terimli dizisinin 0 a yakınsak olmasıdır. Bunu ε ve n_0 ile ifade edersek, her $\varepsilon > 0$ için $k \geq n_0$ olduğunda

$$\|(x_{k+1}-x_k)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε' a bağlı bağlı bir n_0 sayısı vardır demektir.

Tanım.3.2.2. (İstatistiksel quasi Cauchy dizisi)

Eğer X te bir (x_k) dizisi için

$$st-\lim_{k\to\infty}(x_{k+1}-x_k)=0$$

oluyorsa (x_k) dizisine bir *istatistiksel quasi Cauchy dizisi* denir. Buna göre (x_k) nın istatistiksel quasi Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul

$$(\|(x_{k+1}-x_k)\|)$$

reel terimli dizisinin 0 a istatistiksel yakınsak olmasıdır. Yukarıdaki tanımı aşağıdaki şekildeki gibi de ifade edebiliriz

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

olmak üzere $\forall\, \varepsilon > 0$ için, $\forall\, \delta > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda

$$\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : \|\Delta x_k\| \geq \varepsilon\}\right| < \delta$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı var olması demektir.

Önerme 3.2.3. İki istatistiksel quasi Cauchy dizisinin toplamı da istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

İspat: (x_n) ve (y_n) istatistiksel quasi Cauchy dizileri olsun.
$(x_n) + (x_n)$ toplamın istatistiksel quasi Cauchy olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun ve $\delta > 0$ alalım. (x_n) istatistiksel quasi Cauchy olduğundan $n \geq n_1$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \|\Delta x_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \frac{\delta}{2}$$

olacak şekilde $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. (y_n) istatistiksel quasi Cauchy olduğundan $n \geq n_2$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \|\Delta y_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \frac{\delta}{2}$$

olacak şekilde $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ vardır.
$n_0 = \max\,\{n_1, n_2\}$ yazalım. Buradan $n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : \|\Delta(x_k + y_k)\| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \|\Delta x_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$+\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \|\Delta y_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,|\{k \leq n : \|\Delta(x_k + y_k)\| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \|\Delta(x_k\ \ )\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \|\Delta(y_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$= 0$$

Önerme 3.2.4. Bir istatistiksel quasi Cauchy dizisinin sabit bir sayı ile çarpımı da istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

Buna göre istatistiksel quasi Cauchy dizilerinin kümesi bütün diziler uzayının bir vektör alt uzayıdır.

Tanım 3.2.5. (İstatistiksel Ward Kompaktlık)

$E \subset X$ olsun. Terimleri E den alınan her dizinin istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi bulunabiliyorsa E ye *istatistiksel ward kompakt* denir.

Buna göre X in sonlu her alt kümesi istatistiksel ward kompakttır. İstatistiksel ward kompakt sonlu adette kümenin birleşimi de istatistiksel ward kompakttır. İstatistiksel ward kompakt kümelerin herhangi bir ailesinin arakesiti de istatistiksel ward kompakttır.

Teorem 3.2.6. ([7]) X in bir A alt kümesinin istatistiksel ward kompakt olması için gerek ve yeter koşul total sınırlı olmasıdır.

İspat :

$\Leftarrow$: A total sınırlı olsun. Terimleri A da olan her hangi bir (x_n) dizisi alalım. Lemma 3.1.7 den dolayı total sınırlı bir kümenin terimlerinden oluşan her dizinin bir Cauchy alt dizisi var olduğundan bu (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) Cauchy alt dizisi vardır. Her Cauchy dizisi quasi Cauchy dizisi olduğundan (x_{n_k}) bir quasi Cauchy dizisidir. Her quasi Cauchy dizisi istatistiksel quasi Cauchy dizisi olduğundan (x_{n_k}) dizisi istatistiksel quasi Cauchydir. O halde A istatistiksel ward kompakttır.

$\Longrightarrow$: A nın total sınırlı olmadığını varsayarak, [7] daki Teorem 3 ten elde edilir.

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.7. (İstatistiksel ward süreklilik)

İstatistiksel quasi Cauchy dizilerini koruyan fonksiyona, yani (α_n) dizisi istatistiksel quasi Cauchy dizisi olduğunda $(f(\alpha_n))$ dizisi de istatistiksel quasi Cauchy dizisi oluyorsa f ye istatistiksel w*ard sürekli fonksiyon* denir.

Teorem 3.2.8. İstatistiksel ward sürekli her fonksiyon istatistiksel süreklidir ([6]).

İspat. Farz edelim ki f fonksiyonu X normlu uzayından kendisi içine istatistiksel ward sürekli bir fonksiyon olsun. (α_n) her hangi bir istatistiksel yakınsak dizi olsun.

$$st - \lim_{k\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$$

yazalım. Buradan $(\alpha_1, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_n, \alpha_0, \ldots)$ dizisi α_0 sayısına istatistiksel yakınsak olduğundan bu dizi istatistiksel quasi-Cauchy dizisidir.

f istatistiksel ward sürekli olduğu gibi

$$(f(\alpha_1), f(\alpha_0), f(\alpha_2), f(\alpha_0), \ldots f(\alpha_{n-1}), f(\alpha_0), f(\alpha_n), f(\alpha_0), \ldots)$$

dizisi de istatistiksel quasi Cauchy dizisidir. Buradan $(f(\alpha_n))$ dizisinin de $f(\alpha_0)$ sayısına yakınsadığı görülür. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Bunun karşıtı her zaman doğru değildir. Yani istatistiksel sürekli bir (her) fonksiyon istatistiksel ward sürekli olmak zorunda değildir.

Teorem 3.2.9. İstatistiksel ward sürekli her fonksiyon süreklidir.

İspat. X bir normlu uzay ve f de X den X e istatistiksel ward sürekli bir fonksiyon olsun.Yukarıdaki Teorem 3.2.8 den dolayı f fonksiyonu istatistiksel süreklidir. Teorem 3.1.13 ten dolayı f fonksiyonu adi anlamda süreklidir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.10. ([6]) X in bir A alt kümesi üzerinde tanımlı bir (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonu A da istatistiksel ward sürekli ise f fonksiyonu da istatistiksel ward süreklidir.

İspat: ε herhangi pozitif reel sayı olsun ve (x_k) da terimleri A dan alınan herhangi bir istatistiksel quasi Cauchy dizisi olsun. (f_n) nin düzgün yakınsaklığından dolayı n ≥ N olduğu zaman bütün x ∈ E için

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir N pozitif tam sayısı vardır. f_N fonksiyonu A üzerinde istatistiksel ward sürekli olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : ||f_N(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_k)|| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\{k \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\| \geq \varepsilon\} \subset \left\{k \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_{k+1})\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$
$$\cup \left\{k \leq n : \|f_N(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$
$$\cup \left\{k \leq n : \|f_N(\alpha_k) - f(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

dır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_{k+1})\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : \|f_N(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : \|f_N(\alpha_k) - f(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|$$

$$= \quad 0$$

elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.

Teorem 3.2.11. ([6]). A ⊂ X olsun. A üzerinde tanımlı tüm istatistiksel ward sürekli fonksiyonlar A da tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar kümesinin kapalı bir alt kümesidir

İspat: A daki tüm istatistiksel ward sürekli fonksiyonlarının kümesini SWC(A) ile göstereceğiz. $\overline{\triangle \mathrm{SWC(A)}}$, SWC(A) nin tüm değme noktaları kümesini temsil ettiğine göre

$$\overline{\triangle \mathrm{SWC(A)}} = \mathrm{SWC(A)}$$

olduğunu göstereceğiz. f, $\overline{\triangle \mathrm{SWC(A)}}$ nın kapanışının bir elemanı olsun. . O zaman

$$lim_{n\to\infty} f_k = f$$

gibi SWC(A) nın elemanlarından oluşan bir (f_k) nokta dizisi var olur. f nin istatistiksel ward sürekli olduğunu göstermek için A dan alınan herhangi bir (α_k) istatistiksel quasi Cauchy dizisini göz önüne alalım. ε > 0 alalım. (f_k) , f ye yakınsak olduğu için her $n \geq N$ için $\forall x \in A$ için

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. f_N istatistiksel ward sürekli olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|f_N(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| = 0$$

olur.

Diğer taraftan

$$\{k \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\| \geq \varepsilon \} \subset \left\{ k \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_{k+1})\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

$$\cup \left\{k \ \leq n : \|f_N(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$
$$\cup \left\{k \ \leq n : \|f_N(\alpha_k) - f(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

dır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \ \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\| \geq \varepsilon \}|$$
$$\leq \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \ \leq n : \|f(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_{k+1})\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \ \leq n : \|f_N(\alpha_{k+1}) - f_N(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}\right|$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \ \leq n : \|f_N(\alpha_k) - f(\alpha_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}\right|$$
$$= \ 0$$

elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.

KAYNAKLAR

[1] Buck. R.C, Generalized Asymptotic Density. American J. Math. **75** (1975) 335-346

[2] Bulut. Erdoğan, Topoloji, Güven Yayınevi, Ankara, (1983).

[3] Connor.J.S, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis, **8** (1988) 47-63.

[4] Connor. J.S, R-type summability methods, Cauchy criteria, p-sets, and statistical convergence, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992) 319-327.

[5] Connor. J.S,The statistical and strong p–cesaro convergence of sequences, Analysis, **8 (**1988), 47-63.

[6] Çakallı. Hüseyin, Applied Mathematics Letters, Statistical ward continuity, **24** (2011) 1727-1728.

[7] Çakallı. Hüseyin, Statistical quasi-Cauchy sequences, Mathematical and Computer Modeling. **54** (2011) 1620-1624.

[8] Demirci, Kamil, İstatistiksel Yakınsaklık, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (1992) 73 sayfa.

[9] Fridy. J. A, On statistical convergence. Analysis **5** (1985) 301-313.

[10] Freedman. A.R, Sember. J.J, Densities and Summability, Pasific J.Math. **95** (1985) 293-305.

[11] Fast.H, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. **2** (1951) 241-244.

[12] Ilgaz. Z. Asuman, Genel Topolojiye Giriş, Marmara Üniversitesi, (1987) 169 sayfa

[13] Jain. Pawan K, Ahmad. Khalil, Metric Spaces.2th.Edition, U.K. (2004) 150 sayfa.

[14] Kreyszig. Erwin, Introduction to Functional Analysiss, Kreyszig,Erwin den uyarlayan Çakar. Öner, (Fonksiyonel Analize Giriş I) Ankara Üniversitesi, (2007) 300 sayfa.

[15] Kolk, E. Matrix summability of statisticially convergent sequences. Analysis 13; (1993) 77-83

[16] Kostyrko. P, Macaj.M, Salat. T, and O. Strauch, On statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001) 2647-2654.

[17] Maio. G. Di, Djurcic. D, Kocinac. Lj.D.R, Zizovic. M.R, Statistical convergence, selection principles and asymptotic analysis, Chaos Solitons and Fractal **42** 5 (2009) 2815-2821.

[18] Niven. I, Zuckerman. H.S, An Introduction to the Theory of Numbers,.John Walley and Sons, 4th ed. New York, (1980)

[19] Schoenberg.I.J, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Monthly, **66** (5) (1959) 362-375.

[20] Ŝal´at. T, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, **30** (1980) 139-150.

[21] Yurdakadim. Tuğba, İstatistiksel Yakınsak Alt Diziler, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (2010) 54 sayfa.

[22] Zygmund. A, Trigonometric series, I, II. Third edition, With a foreword by Robert A. Fefferman, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, (2002)