QUASI CAUCHY DİZİLERİ

Fikriye İnce Dağcı
161409201

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

İstanbul
T.C. Maltepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Şubat, 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

T.C. Maltepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

08.02.2019 tarihinde tezinin savunmasını yapan Fikriye İNCE DAĞCI' ya ait "Quasi Cauchy Dizileri" başlıklı çalışma, Jürimiz tarafından Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Matematik Tezli Yüksek Lisans Programında Yüksek Lisans Tezi Olarak **Oy Birliği/Oy Çokluğuyla** Kabul Edilmiştir.

....

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
(Başkan)
(Danışman) (Maltepe Üniversitesi)

....

Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ
(Üye) (Gebze Teknik Üniversitesi)

....

Dr. Öğr. Üyesi Sibel ERSAN
(Üye) (Maltepe Üniversitesi)

Prof. Dr. İlter Boyakdoğan
Enstitü Müdürü

İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

maltepe üniversitesi	ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI	Doküman No	FR-178
		İlk Yayın Tarihi	01.03.2018
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa	1/1

Revizyon Takip Tablosu

REVİZYON NO	TARİH	AÇIKLAMA
00	01.03.2018	İlk yayın.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

05/03/2019

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarından bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; çalışmanın Maltepe Üniversitesinde kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" ile tarandığını ve öngörülen standartları karşıladığını beyan ederim.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Öğrencinin Adı ve Soyadı

Fikriye İnce Dağcı

Hazırlayan	Kalite Koordinatörü	Kurumsal Yetkili
İlgili Birim	Dr. Öğr. Üyesi Şafak GÜNDÜZ	Prof. Dr. Belma AKŞİT

QUASI CAUCHY DİZİLERİ

ORIJINALLIK RAPORU

%14	%12	%5	%3
BENZERLIK ENDEKSI	İNTERNET KAYNAKLARI	YAYINLAR	ÖĞRENCI ÖDEVLERI

BIRINCIL KAYNAKLAR

1	akademik.maltepe.edu.tr İnternet Kaynağı	%5
2	library.cu.edu.tr İnternet Kaynağı	%1
3	sbe.maltepe.edu.tr İnternet Kaynağı	%1
4	www.scribd.com İnternet Kaynağı	%1
5	step-p.dyndns.org İnternet Kaynağı	<%1
6	www.sam.math.ethz.ch İnternet Kaynağı	<%1
7	silver.ima.umn.edu İnternet Kaynağı	<%1
8	gcc.bradley.edu İnternet Kaynağı	<%1
9	Submitted to Higher Education Commission	<%1

Prof. Dr. Hüseyin Çakallı

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca yardımlarını benden esirgemeyen sayın Dr. Öğretim Üyesi Sibel Ersan’a, bilgi birikimini her ihtiyaç duyduğumda sabırla ve özveriyle benimle paylaşan, daima bana destek olan tez danışmanım sayın Prof. Dr. Hüseyin Çakallı’ ya teşekkürlerimi sunarım.

Fikriye İNCE DAĞCI

Şubat 2019

ÖZ

QUASI CAUCHY DİZİLERİ

Fikriye İNCE DAĞCI
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2019

Terimleri bir X metrik uzayından alınan bir (x_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyorsa yani $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) = 0$ oluyorsa (x_n) dizisine bir quasi Cauchy dizisi denir. X in bir E alt kümesinin terimlerinden oluşan her bir dizinin en az bir quasi Cauchy alt dizisi bulunabiliyorsa E ye ward kompakttır denir. X in bir E alt kümesinin total sınırlı olması için gerek ve yeter koşul ward kompakt olmasıdır, yani, X in bir E alt kümesinin total sınırlı olması için gerek ve yeter koşul terimleri E den alınan her bir dizinin en az bir quasi-Cauchy alt dizisinin var olmasıdır. X in bir E alt kümesi üzerinde tanımlı ve bir Y metrik uzayı içine bir f fonksiyonu quasi Cauchy dizilerini koruyorsa, yani (x_n) E de bir quasi Cauchy dizisi olduğunda $\left(f(x_n)\right)$ görüntü dizisi de Y de bir quasi Cauchy dizisi oluyorsa f fonksiyonuna E üzerinde ward süreklidir denir. X in bir total sınırlı alt kümesi üzerinde tanımlı Y ye bir f fonksiyonunun E üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul f nin ward sürekli omasıdır. X in bir B bağlantılı alt kümesi üzerinde tanımlı ve Y içine bir f fonksiyonunun E üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul f nin ward sürekli olmasıdır.

Anahtar Sözcükler: quasi Cauchy dizisi, ward süreklilik, kompaktlık, düzgün süreklilik

ABSTRACT

QUASI CAUCHY SEQUENCES

Fikriye İNCE DAĞCI
Master Thesis
Department of Mathematics
Master of Science in Mathematics
Thesis Advisor: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe University, Graduate School of Science and Engineering, 2019

A sequence in a metric space X is called a quasi cauchy sequence if distance between successive terms tends to zero, i.e. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) = 0$. A subset E of X is called ward compact if any sequence of points in E has a quasi Cauchy subsequence. A subset E of X is ward compact if and only if it is totally bounded, i.e. any sequence of points in E has a quasi subsequence if and only if E is totally bounded. A function f from a subset E of X to a metric space Y is called ward continuous on E if f preserves quasi Cauchy sequences, i.e. $(f(x_n))$ is a quasi Cauchy sequence in Y whenever (x_n) is a quasi Cauchy sequence of points in E. A function f on a totally bounded subset E of X into Y is uniformly continuous if and only if it is ward continuous. A function f on a connected subset E of X into Y is uniformly contiuous if and only if it is ward continuous.

Keywords: quasi Cauchy sequence, ward continuity, compactness, continuity

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

X : Metrik uzay

$C[E]$: X metrik uzayının E alt kümesinden Y metrik uzayına sürekli fonksiyonlar uzayı

$W[E]$: X metrik uzayının E alt kümesinden Y metrik uzayına ward sürekli fonksiyonlar kümesi

$s(\mathbb{R})$: Reel terimli tüm dizilerin vektör uzayı

ÖZGEÇMİŞ

Fikriye İNCE DAĞCI

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Derece	*Yıl*	*Üniversite, Enstitü, Anabilim/Anasanat Dalı*
Y.Ls.	2019	Maltepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü
Ls.	2012	İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Lise	2000	Metin Nuran Çakallıklı Antalya Anadolu Lisesi

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı	: Antalya 1983	Cinsiyet:Kadın
Yabancı diller	: İngilizce	
GSM / e-posta	: 05326567119 / fikriyeincedagci@gmail.com	

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Dizilerin yakınsaklığı kavramı matematikte ve matematiğin uygulandığı diğer bilim dallarında çok önemli olup, hemen hemen her alanda kullanılmakta ve kolaylıklar sağlamaktadır. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesinden reel sayılar kümesine bir foksiyonun limiti, türevi, integrali ve benzeri kavramlarının hepsi dizilerin yakınsaklığı kavramı ile doğrudan ilişkilidir. Klasik anlamda bir dizinin yakınsak olması, bu dizinin sonlu sayıda terimi dışında kalan tüm terimlerinin önceden belirlenmiş bir sayının komşuluğunda bulunmasıdır. Burada, önceden belirlenmiş bu sayıya dizinin limiti denir. Aslında bir dizinin yakınsaklığı hakkında karar vermede karşılaşılan problemlerden biri de tanımı gerçeklemek için, önceden belirlenmesi gereken bu limit noktasıdır. Bu soruna ilk olarak Bernard Bolzano, Fransız matematikçi Augustin Louis Cauchy(1789-1857) nin fikrinden yola çıkarak bir çözüm getirmiştir. Yani reel uzayda bir dizinin hangi özelliği onun yakınsaklığını karakterize eder sorusu akla geldiğinde her türlü diziye uygulanabilen böyle bir karakterizasyon Cauchy tarafından keşfedilmiştir. Cauchy' nin bu tanımında hiçbir limit noktasına referans yapılmamakta, sadece, bir dizinin terimleri birbiriyle rastgele bağlamda, eninde sonunda yaklaşırsa, o dizinin yakınsayacağı ifade edilmektedir. Yakınsak dizi kavramı Cauchy dizisi kavramı ile reel uzayda eşdeğerdir. Ve bu eşdeğerlik Cauchy yakınsaklık kriteri olarak da adlandırılır. Ancak metrik uzaylarda durum farklıdır. Metrik uzaylarda yakınsak her dizi Cauchy dizisidir, fakat her Cauchy dizisi yakınsak olmak zorunda değildir. Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu metrik uzaya tam metrik uzay denir. Ardışık terimleri arasındaki uzaklığın sıfıra yaklaştığı, diğer bir ifadeyle bir dizinin ardışık terimlerinin arasındaki uzaklık dizisinin sıfıra yakınsadığı durumda diziye quasi Cauchy dizisi adı verilmektedir. Quasi Cauchy dizisi kavramı pek çok araştırmacı tarafından farklı adlar verilerek incelenmiş, bu dizilere ilk olarak Burton ve Coleman ın 2000 yılında bu adı verdiği görülmektedir. Kızmaz 1981 yılında reel terimli quasi Cauchy dizilerinin uzayının metrik uzay olduğunu göstermiştir. Kızmaz [1], Cakalli [2], Braha [3], Çanak ve Dik [4] ve pek çok yazar bu diziler ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1. Boş kümeden farklı bir X kümesi verilsin. $f: \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ ile tanımlansın. f fonksiyonu ya da $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ kümesine, X de bir dizi denir ve

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ya da } (x_n)$$

şeklinde gösterilir. X kümesi içinde bir dizi

$$f: \mathbb{N} \to X \ \ni \ f(\mathbb{N}) = (x_n)$$

şeklinde ve $\mathbb{N}$ kümesi içinde bir dizi de

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \ni \ \forall k \in \mathbb{N} \, için \, g(k) = (n_k)$$

şeklinde verilsin. Eğer g dizisi artansa yani

$$\forall i < j \, için \, g(i) < g(j) \, ya \, da \, n_i < n_j \text{ ise}$$

$$f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \ X \ \ni \ \forall k \in \mathbb{N} \, için \, (f \circ g)(p) = f\big(g(p)\big) = f(n_k) = \left(x_{n_k}\right)$$

şeklinde tanımlı $\left(x_{n_k}\right)$ dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 2.2. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $|\alpha_n - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa, (α_n) dizisine l sayısına yakınsaktır denir.
Şimdi reel terimli bir yakınsak dizinin limitinin bir tek olduğunu ispat edeceğiz.

Teorem 2.3. Yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır [5].

İspat. Yakınsak herhangi bir dizi (α_n) olsun. (α_n) dizisinin $l \neq l'$ olmak üzere hem l hem de l' sayılarına yakınsadığını varsayalım. $|l - l'| \neq 0$ dır. $\alpha = |l - l'|$ alalım.
$\alpha > 0$ dır. (α_n), l ye yakınsadığından, tüm $n \geq N_1$ için $|\alpha_n - l| < \frac{1}{2}\alpha$ olacak şekilde bir N_1 pozitif tamsayısı vardır. Benzer şekilde, (α_n), l' ye yakınsadığından, tüm
$n \geq N_2$ için $|\alpha_n - \ l' \,| < \frac{1}{2}\alpha$ olacak şekilde bir N_2 pozitif tamsayısı vardır.

$N = max\{N_1, N_2\}$ alalım. O zaman üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\alpha = |l - l'| = |l - \alpha_N + \alpha_N - l'| \leq |l - \alpha_N| + |\alpha_N - l'| < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$$

çıkar, buradan da $\alpha < \alpha$ eşitsizliği elde edilir ve dolayısıyla bu çelişki $l = l'$ olduğunu gösterir.

Reel terimli yakınsak dizinin limiti bir tek olduğundan l sayısına yakınsayan bir (α_n) dizisi gözönüne alındığında bunu $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = l$ ile ifade ederiz.

Tanım 2.4. (Üstten sınırlı dizi) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \leq M$ olacak şekilde M reel sayısı bulunabiliyorsa (α_n) dizisine üstten sınırlıdır denir.

Tanım 2.5. (Alttan sınırlı dizi) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq \alpha_n$ olacak şekilde m reel sayısı bulunabiliyorsa (α_n) dizisine alttan sınırlıdır denir.

Tamlık Aksiyomu. Reel sayıların boş olmayan üstten sınırlı her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı vardır.

Tamlık aksiyomundan reel sayıların boş olmayan alttan sınırlı her alt kümesinin bir en büyük alt sınırının var olduğu kolayca ispat edilebilmektedir.

Tanım 2.6. (Sınırlı dizi) Eğer her n pozitif tamsayısı için $|\alpha_n| \leq K$ olacak şekilde bir K sabit sayısı bulunabiliyorsa (α_n) dizisine sınırlıdır denir.

Buna göre bir (α_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $sup_n|\alpha_n| = K$ olacak şekilde negatif olmayan bir K sabit sayısının var olmasıdır.

Ayrıca bir (α_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul hem üstten hem de alttan sınırlı olmasıdır.

Teorem 2.7. Sınırlı her reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

İspat. (α_n) herhangi bir sınırlı reel sayı dizisi olsun. O halde $sup_n|\alpha_n| = K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı vardır. Şimdi

$$S = \{s: Sonsuz\ çoklukta\ n\ indisi\ için\ \alpha_n \geq s\ \ dir.\}$$

kümesini gözönüne alalım. $-K \in S$ dir, dolayısıyla $S \neq \emptyset$ dır. Her n pozitif tamsayısı için $\alpha_n \leq K$ olduğundan, $s \in S$ ise $s \leq \alpha_n \leq K$ özelliğini sağlayan sonsuz çoklukta n indisi vardır ve dolayısıyla $s \in S$ için $s \leq K$ dır. O halde S kümesi üstten sınırlıdır. Tamlık aksiyomundan dolayı S kümesinin en küçük üst sınırı vardır, yani $supS = \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Bu takdirde her $s \in S$ için $s \leq \alpha$ dır ve her $\varepsilon > 0$ için $\alpha - \varepsilon < s$ olacak şekilde bir s vardır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ sayısı için $\alpha - 1 < \alpha_{k_1} < \alpha + 1$ olacak şekilde bir α_{k_1} terimi vardır. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sayısı için $\alpha - \frac{1}{2} < \alpha_{k_2} < \alpha + \frac{1}{2}$ olacak şekilde ve $k_2 > k_1$ özelliği sağlanacak şekilde bir α_{k_2} terimi vardır. $\varepsilon = \frac{1}{3}$ sayısı için $\alpha - \frac{1}{3} < \alpha_{k_2} < \alpha + \frac{1}{3}$ olacak şekilde ve özelliği $k_3 > k_2$ sağlanacak şekilde bir α_{k_3} terimi vardır. Benzer şekilde devam ederek, her n pozitif tam sayısı için, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ sayısı için $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha_{k_n} < \alpha + \frac{1}{n}$ olacak şekilde ve $k_n > k_{n-1}$ özelliği sağlanacak şekilde bir α_{k_n} terimi bulunabilir. Böylece bu işleme ardışık olarak devam ederek, (α_n) dizisinin bir $\left(\alpha_{k_n}\right)$ alt dizisini elde ederiz. Her n pozitif tamsayısı için

$$\alpha - \frac{1}{n} < \alpha_{k_n} < \alpha + \frac{1}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. $(b_n) = \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)$, $(c_n) = \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)$ yazarsak, $b_n < \alpha_{k_n} < c_n$ eşitsizliği sağlanır ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ dır. Sıkıştırma teoreminden dolayı $\lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = \alpha$ elde edilir. Böylece sınırlı (α_n) dizisinin yakınsak bir $\left(\alpha_{k_n}\right)$ alt dizisi bulunmuş olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Tanım 2.8. (Cauchy Şartı) (α_n) reel terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (α_n) dizisine Cauchy şartını sağlar denir ya da (α_n) bir Cauchy dizisidir denir.

Teorem 2.9. Reel terimli her Cauchy dizisi sınırlıdır.

İspat: Cauchy şartını sağlayan herhangi bir dizi (α_n) olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ için $n, m \geq n_1$ olduğunda $|\alpha_n - \alpha_m| < 1$ özelliği sağlanacak şekilde bir n_1 doğal sayısı vardır. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\alpha_n| = |\alpha_n - \alpha_{n_1} + \alpha_{n_1}| \leq |\alpha_n - \alpha_{n_1}| + |\alpha_{n_1}| < 1 + |\alpha_{n_1}|$$

dir, dolayısıyla $n \geq n_1$ için $|\alpha_n| < 1 + |\alpha_{n_1}|$ bulunur.

Şimdi $max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n_1-1}|, 1 + |\alpha_{n_1}|\} = K$ diyelim. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_n| \leq K$ olur ki (α_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilmiş olur.

Teorem 2.10. Reel terimli her Cauchy dizisi $\mathbb{R}$ de yakınsaktır.

İspat. Reel terimli herhangi bir (α_n) Cauchy dizisi verilsin. Her Cauchy dizisi sınırlı olduğundan (α_n) dizisi sınırlıdır. Teorem 2.7 den dolayı sınırlı her reel terimli dizinin yakınsak bir alt dizisi bulunacağından, (α_n) dizisinin yakınsak bir (α_{k_n}) alt dizisi vardır. $\lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = a$ diyelim.

Şimdi (α_n) dizisinin de a sayısına yakınsadığını göstereceğiz. Bunun için herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $\lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = a$ olduğundan $n \geq n_1$ olduğunda $|\alpha_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı bir n_1 sayısı vardır. Diğer taraftan, (α_n) dizisi Cauchy şartını sağladığından $n, m \geq n_2$ olduğunda $|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şeklide $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı bir n_2 sayısı vardır. $max\{n_1, n_2\} = n_0$ diyelim. $[n_0]+1= p_0$ ve $k_{p_0} = m_0$ yazalım ve bu takdirde $n \geq m_0$ olduğunda

$$|\alpha_n - a| = |(\alpha_n - \alpha_{m_0}) + (\alpha_{m_0} - a)| \leq |\alpha_n - \alpha_{m_0}| + |\alpha_{m_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu da $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$ olduğunu gösterir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.11. Reel terimli yakınsak her dizi Cauchy şartını sağlar.

İspat. Herhangi bir yakınsak dizi (α_n) olsun. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$ diyelim. (α_n) dizisinin Cauchy şartını sağladığını göstermek için herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım.

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $|\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. Bu takdirde $n, m \geq n_0$ olduğunda,

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |\alpha_n - a + a - \alpha_m| \leq |\alpha_n - a| + |a - \alpha_m| < \varepsilon$$

olur. O halde (α_n) dizisi Cauchy şartını sağlar.

Sonuç: Reel terimli bir dizinin bir yakınsak olması için gerek ve yeter koşul Cauchy şartını sağlamasıdır.

Tanım 2.12. (Metrik uzay) Bir metrik uzay; boş olmayan bir X kümesi ile birlikte aşağıdaki (M1), (M2) ve (M3) koşullarını sağlayan bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonundan oluşur.

(M1) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$; ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

(M3) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

X in elemanları uzayın noktaları olarak adlandırılır ve d ye metrik veya uzaklık fonksiyonu denir. (X, d) bir metrik uzay ve başka bir metrik söz konusu olmuyor ya da karışıklık olmuyorsa kısaca X bir metrik uzay denir.

(X, d) bir metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere, d nin $E \times E$ ye kısıtlanışı $d_E: E \times E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (M1), (M2) ve (M3) koşullarını sağlar, dolayısıyla da (E, d_E) ye X in bir alt metrik uzayı denir.

Tanım 2.13. (Metrik uzayda yuvarlar ve komşuluklar) (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $r > 0$ bir gerçel sayı olsun. $B(x,r) = \{y \in X : \ d(x,y) < r\}$ kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar veya x in r komşuluğu denir.

Tanım 2.14. (Metrik uzayda iç nokta) (X, d) bir metrik uzay, $G \subset X$ ve $x \in G$ olsun. $B(x,r) \subset G$ olacak şekilde pozitif bir r sayısı varsa x e G nin iç noktası denir. Bütün noktaları iç nokta olan bir kümeye de açık küme adı verilir.

Tanım 2.15. (x_n) , (X, d) metrik uzayındaki bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $d(x_n, l) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir N pozitif tamsayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine l noktasına yakınsaktır denir.

Teorem 2.16. Metrik uzayda yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır [5].

İspat. Yakınsak herhangi bir dizi (x_n) olsun. (x_n) dizisinin $l \neq l'$ olmak üzere hem l hem de l' sayılarına yakınsadığını varsayalım. $d(l, l') \neq 0$ dır. $\alpha = d(l, l')$ alalım. $\alpha > 0$ dır. (x_n), l ye yakınsadığından, tüm $n \geq N_1$ için $d(x_n, l) < \frac{1}{2}\alpha$ olacak şekilde bir N_1 pozitif tamsayısı vardır. Benzer şekilde, (x_n), l' ye yakınsadığından, tüm $n \geq N_2$ için $d(x_n, l') < \frac{1}{2}\alpha$ olacak şekilde bir N_2 pozitif tamsayısı vardır.

$N = max\{N_1, N_2\}$ alalım. O zaman üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\alpha = d(l, l') \leq d(l, x_N) + d(x_N, l') < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$$

çıkar, buradan da $\alpha < \alpha$ eşitsizliği elde edilir ve dolayısıyla bu çelişki nedeniyle $l = l'$ olması gerektiği sonucu elde edilir.

Tanım 2.17. S, (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olmak üzere her $x \in S$ için $d(x, x_0) \leq K$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $K \in \mathbb{R}$ varsa S ye sınırlıdır denir.

Eğer S tanımı en az bir $x_0 \in X$ ve $K \in \mathbb{R}$ için sağlarsa, o zaman tanım herhangi bir $x_1 \in X$ noktası ile K yerine $K + d(x_0, x)$ sayısı için de sağlanır, çünkü eğer $d(x_0, x) \leq K$ ise $d(x, x_1) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_1) \leq K + d(x_0, x_1)$ olur. Eğer S kümesi bu tanımı sağlarsa, her $x, y \in S$ için

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2K$$

olur. Dolayısıyla bir sonraki tanım anlamlıdır[5].

Tanım 2.18. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subseteq X$ olmak üzere, S nin çapı, $sup\{d(x, y) : x, y \in S\}$ şeklinde tanımlanır ve çap S ile gösterilir. Çapı sonlu olan kümeye sınırlı küme, çapı sonsuz olan kümeye de sınırsız küme denir.

Tanım 2.19. Bir X metrik uzayının her Cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.20. A, bir X metrik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A \neq 0$ ise x, A nın X deki bir kapanış noktası; A nın X deki tüm kapanış noktalarının kümesine ise A nın X de kapanışı denir. Kapanış noktalarını bulunduran X metrik uzayı konusunda bir belirsizlik yoksa A nın X deki kapanışı $\bar{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.21. (Metrik uzayda sınırlı dizi) (X, d) metrik uzayındaki bir (x_n) dizisinin terimlerinin oluşturduğu küme sınırlı ise diziye sınırlıdır denir. Buna göre eğer her n pozitif tamsayısı için $sup_{n,m} d(x_n, x_m) \leq K$ olacak şekilde bir K sabit sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sınırlıdır denir.

Buna göre metrik uzayda bir (x_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $sup_{n,m} d(x_n, x_m) = K$ olacak şekilde negatif olmayan bir K sabit sayısının var olmasıdır.

Tanım 2.22. (Metrik uzayda Cauchy Dizisi) (x_n), (X, d) metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy şartını sağlar denir ya da (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.23. Metrik uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

İspat. (X, d) metrik uzayında herhangi bir Cauchy dizisi (x_n) olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ için $n, m \geq n_1$ olduğunda $d(x_n, x_m) < 1$ özelliği sağlanacak şekilde bir n_1 doğal sayısı vardır. Diğer taraftan, $max_{n,m \leq n_1} d(x_n, x_m) = K$ dersek, her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) \leq 1 + K$ olur ki (x_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilmiş olur.

Teorem 2.24. Metrik uzayda yakınsak her dizi aynı zamanda Cauchy dizisidir.

İspat. (X, d) metrik uzayında herhangi bir yakınsak dizi (x_n) olsun. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ diyelim. (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek için herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım.

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. Bu takdirde $n, m \geq n_0$ olduğunda,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

olur. O halde (x_n) dizisi Cauchy dizisidir.

Bu teoremin karşıtı her zaman doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 2.25. $X = (0,1)$ kümesini $d(x, y) = |x - y|$ metriği ile metrik uzay olarak göz önüne alalım. $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi bir Cauchy dizisidir, fakat yakınsak değildir.

Teorem 2.26. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, (x_n) X de bir Cauchy dizisi ve $\left(x_{n_k}\right)$ da (x_n) in bir alt dizisi olsun. Bu takdirde $\lim_{k \to \infty} d\left(x_k, x_{n_k}\right) = 0$ dır [6].

İspat. (x_n) in X de bir Cauchy dizisi ve $\left(x_{n_k}\right)$ nın da (x_n) in bir alt dizisi olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon > 0$ verilsin.Bu takdirde, $m, n \geq k_0 - 1$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. Buna göre $n_{k_0} \geq k_0 > k_0 - 1$ olduğunda $d\left(x_{k_0}, x_{n_{k_0}}\right) < \varepsilon$ olur ki $k \to \infty$ için $d\left(x_k, x_{n_k}\right) \to 0$ demektir.

Bu teoremden faydalanarak yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu şu şekilde elde ederiz.

(x_n), X metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. (x_n) nin yakınsak bir alt dizisini $\left(x_{n_k}\right)$ ile gösterelim ve bu alt dizinin limiti x olsun. Bu takdirde (yukarıdaki) önermeden ve üçgen eşitsizliğinden $k \to \infty$ için

$$0 \leq d(x_k, x) \leq d\left(x_k, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x\right) \to 0$$

olur ki $x_k \to x$ $(k \to \infty)$ bulunur. Böylece yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu elde ederiz.

Aşağıda yakınsak alt diziye sahip her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu direkt olarak da ispat edeceğiz.

Teorem 2.27. Eğer bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır [7, 8].

İspat. (x_n), X metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı vardır. (x_n) nin yakınsak bir alt dizisini $\left(x_{n_k}\right)$ ile gösterelim ve bu alt dizinin limiti x olsun. Buradan, (n_k) pozitif tamsayıların artan bir dizisi olduğundan $m, n \geq n_0$ olduğunda $d\left(x_{n_m}, x_n\right) < \varepsilon$ olur. Şimdi $m, n \geq n_0$ olduğunda

$$d(x, x_n) \leq d\left(x, x_{n_m}\right) + d\left(x_{n_m}, x_n\right) < d\left(x, x_{n_m}\right) + \varepsilon$$

olur. $m \to \infty$ alınırsa $n \geq n_0$ olduğunda

$$d(x, x_n) \leq \varepsilon$$

bulunur. Bu nedenle (x_n) dizisi x e yakınsar.

Tanım 2.28. (Metrik uzaylarda süreklilik) (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar, $A \subseteq X$ ve $f: A \to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) $a \in A$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $x \in A$ ve $d_X(x, a) < \delta$ olduğunda $d_Y\left(f(x), f(a)\right) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir; bu geometrik olarak $x \in B_{d_X}(a, \delta)$ olduğunda $f(x) \in B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ veya $f\left(B_{d_X}(a, \delta)\right) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ anlamındadır.

b) Eğer f fonksiyonu X in bir A alt kümesinin her noktasında sürekli ise f ye A üzerinde süreklidir denir.

X ve Y uzayları olarak $\mathbb{R}$ yi aldığımızda ve $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği olan $d(x,y) = |x-y|$ metriğini aldığımızda süreklilik tanımı $\mathbb{R}$ için iyi bilinen tanıma indirgenir [8].

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f\colon A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

c) $a \in A$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in A$ için $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

d) Eğer f fonksiyonu $\mathbb{R}$ nin A alt kümesinin her noktasında sürekli ise f ye A üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.29. (Metrik uzaylarda düzgün süreklilik) (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $f\colon X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x, y \in X$ için

$$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f ye (X üzerinde) düzgün süreklidir denir.

X ve Y uzayları olarak $\mathbb{R}$ yi aldığımızda ve $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği olan $d(x,y) = |x-y|$ metriğini aldığımızda düzgün süreklilik tanımı $\mathbb{R}$ için iyi bilinen tanıma indirgenir [8].

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x, y \in A$ için;

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f ye (A üzerinde) düzgün süreklidir denir.

Teorem 2.30. Bir Cauchy dizisinin düzgün sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bir Cauchy dizisidir [9].

İspat. (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar olmak üzere , $f\colon X \to Y$ düzgün sürekli olsun. O halde $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x, y \in X$ için $d_X(x,y) < \delta$ olduğunda $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Eğer (x_n), (X, d_X) içinde bir Cauchy dizisi ise her $m, n \geq N$ için;

$$d_X(x_n, x_m) < \delta$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, f, X üzerinde düzgün sürekli olduğundan her $m, n \geq N$ için;

$$d_Y\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \varepsilon$$

olur yani $\big(f(x_n)\big)$ dizisi (Y, d_Y) içinde bir Cauchy dizisidir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Her Cauchy dizisini Cauchy dizisine dönüştüren her fonksiyonun düzgün sürekli olmak zorunda olmadığına dair aşağıdaki örnek verilmektedir.

Örnek 2.31. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu her Cauchy dizisini Cauchy dizisine dönüştürür. Gerçekten;

(x_n) $\mathbb{R}$ de herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n) sınırlı olduğundan $|x_n| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ vardır. (x_n) Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$n, m \geq N$ olduğunda $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2K}$ olacak şekilde ε a bağlı bir pozitif N tamsayısı vardır. Bu $\varepsilon > 0$ için;

$$|f(x_n) - f(x_m)| = |{x_n}^2 - {x_m}^2| = |(x_n - x_m)(x_n + x_m)| = |x_n - x_m||x_n + x_m|$$

$$\leq |x_n - x_m|(|x_n| + |x_m|) \leq |x_n - x_m||x_n| + |x_n - x_m||x_m|$$

$$\leq |x_n - x_m|K + |x_n - x_m|K = |x_n - x_m|2K < \frac{\varepsilon}{2K}2K = \varepsilon$$

bulunur. Böylece herhangi bir (x_n) Cauchy dizisinin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün de Cauchy dizisi olduğunu göstermiş olduk. Fakat söz konusu f fonksiyonu düzgün sürekli değildir.

Uyarı 2.32. Cauchy dizisinin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsünün Cauchy dizisi olması gerekmez.

Örnek 2.33. $]0,1]$ ve $\mathbb{R}$ metrik uzayları ve $f(x) = 1/x \ni f:]0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu süreklidir. $(x_n) = (1/n)$ dizisi bir Cauchy dizisidir, ancak $(f(1/n))$=(n) dizisi alışılmış topolojisini veren alışılmış $d(x,y) = |x - y|$ metriği ile $\mathbb{R}$ uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.34. X bir küme, $A \subseteq X$ olsun. X in alt kümelerinin bir $\{U_i : i \in I\}$ ailesi $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ koşulunu sağlıyorsa A için bir örtü adını alır.

Bu gösterimlerle, A için bir $\{U_i : i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü, bir $J \subseteq I$ kümesi için yine bir örtü olan $\{U_j : j \in J\}$ alt ailesidir. Eğer J sonlu ise bu sonlu alt örtü adını alır.

$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, bir X topolojik uzayının bir A alt kümesi için bir örtü ve her bir $i \in I$ için U_i , X de açık ise $\mathcal{U}$ ya A için bir açık örtü denir.

Tanım 2.35. (X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $M \subseteq A$ olmak üzere keyfi bir pozitif ε sayısı verilsin. Verilen her bir $x \in M$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in M$ noktası varsa M alt kümesine A için bir $\varepsilon - a\breve{g}\imath$ denir. Başka bir ifade ile

$$A \subset \cup \{B(y,\varepsilon) : y \in M\}$$

ise M alt kümesine A için bir $\varepsilon - a\breve{g}\imath$ denir.

A nın sonlu bir $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alt kümesi, A için bir $\varepsilon -$ağı ise yani

$$A \subset \cup \{B(x_i,\varepsilon) : i = 1,2,\dots,n\}$$

ise bu alt kümeye A için sonlu bir $\varepsilon - a\breve{g}\imath$ denir.

Tanım 2.36. (Total sınırlılık) (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\{B(x_i,\varepsilon) : i = 1,2,\dots,n\}$ ailesi A nın bir örtüsünü oluşturacak şekilde, A nın $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = M$ gibi sonlu bir alt cümlesi bulunabiliyorsa A ya total sınırlı denir. Başka bir ifade ile herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde A için sonlu bir $\varepsilon - a\breve{g}$ varsa yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ için A, merkezleri A içinde olan ε yarıçaplı açık yuvarların sonlu bir birleşimi tarafından örtülebiliyorsa, A ya total sınırlı denir.

Tanım 2.37. (Bağlantılılık) (X,d) bir metrik uzay olsun. X in aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı iki A ve B alt kümesi varsa X e bağlantısız metrik uzay denir:

a) $X = A \cup B$;

b) $A \cap \bar{B} = \emptyset$ ve $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

Eğer böyle A ve B alt kümeleri yoksa (X,d) ye bağlantılı metrik uzay denir.

Tanım 2.38. Bir X topolojik uzayının bir A alt kümesinin her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir.

Tanım 2.39. Bir X metrik uzayında her dizi X in bir noktasına yakınsayan en az bir alt diziye sahipse bu metrik uzaya dizisel kompakt adı verilir.

Bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan bir A alt kümesi d_A metrikli altuzay olarak bu tanımı sağlarsa A ya dizisel kompakt denir.

Önerme 2.40. Bir metrik uzayın dizisel kompakt alt kümeleri total sınırlıdır.

İspat. (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve A dizisel kompakt olsun. A nın total sınırlı olmadığını varsayalım. Bu takdirde bir $\varepsilon > 0$ için A nın sonlu bir alt kümesinin elemanlarını merkez ve ε u yarıçap kabul eden ve A için bir örtü oluşturacak şekilde açık yuvarların sonlu bir ailesi bulunamaz. Şimdi $a_1 \in A$ olsun. Buna göre $d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$ olacak biçimde bir $a_2 \in A$ vardır, aksi halde $\{a_1\}$ kümesi için a_1 merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvarın oluşturduğu aile A nın sonlu bir örtüsü olurdu. Bunun gibi $d(a_1, a_3) \geq \varepsilon$ ve $d(a_2, a_3) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $a_3 \in A$ vardır, çünkü aksi halde $\{a_1, a_2\}$ kümesi için a_1 ve a_2 merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvarların oluşturduğu aile A için sonlu bir örtü olur. Bu şekilde devam ederek $i \neq j$ için $d(a_i, a_j) \geq \varepsilon$ olacak biçimde bir $(a_1, a_2, \ldots)$ dizisi bulabiliriz ki bu dizi yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Bu ise A nın dizisel kompakt oluşu ile çelişir. O halde A dizisel kompakt ise total sınırlıdır.

Teorem 2.41. Bir metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter koşul total sınırlı ve tam olmasıdır [8].

İspat. (X, d) kompakt bir metrik uzay olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $x \in X$ için tüm $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarlarının ailesi X in bir açık örtüsüdür. X in kompaktlığından, bu açık örtü sonlu bir alt örtü içerir. Böylelikle, $\varepsilon > 0$ için X, sonlu sayıda ε yarıçaplı açık yuvar tarafından örtülür yani sonlu alt örtü içindeki açık yuvarların merkezleri X için sonlu bir $\varepsilon - a$ğı oluşturur. Böylece, X total sınırlıdır.

(X, d) nin tam olmayan bir metrik uzay olduğunu kabul edelim. O zaman, X içinde bir limite sahip olmayan (yani yakınsamayan) (X, d) içinde bir (x_n) Cauchy dizisi vardır. $y \in X$ olsun. (x_n) , y ye yakınsamadığından sonsuz çoklukta n değeri için

$$d(x_n, y) \geq 2\varepsilon_0$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan,

$n, m \geq n_0$ olduğunda;

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon_0$$

olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı vardır. $d(x_k, y) > 2\varepsilon_0$ olacak şekilde $k > n_0$ seçelim. Bu durumda her $m \geq n_0$ için

$$d(x_k, y) \leq d(x_k, x_m) + d(x_m, y)$$

ve buradan;

$$\begin{aligned} d(x_m, y) &\geq d(x_k, y) - d(x_k, x_m) \\ &> 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $B(y, \varepsilon_0)$ açık yuvarı sadece sonlu sayıda n değeri için x_n i içerir. Bu anlamda $\varepsilon_0(y)$, y ye bağlı bir pozitif tamsayı olmak üzere ve $B\big(y, \varepsilon_0(y)\big)$ açık yuvarı sadece sonlu sayıda n için sonlu sayıda x_n i içermek üzere herbir $y \in X$ e bir $B\big(y, \varepsilon_0(y)\big)$ açık yuvarını eşleyebiliriz.

$$X = \bigcup \{B\big(y, \varepsilon_0(y)\big) : \ y \in X\}$$

dir. Bir başka ifade ile $\{B\big(y, \varepsilon_0(y)\big) : \ y \in X\}$, X in bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan, X in sonlu bir $B\big(y_i, \varepsilon_0(y_i)\big)$, $i = 1,2, \dots, n$ alt örtüsü vardır. Bu yüzden

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\big(y_i, \varepsilon_0(y_i)\big)$$

dir. Herbir açık yuvar sonlu sayıda n için x_n i içerdiğinden, sonlu alt örtü içindeki açık yuvarlar ve bu nedenle aynı zamanda X de sadece sonlu sayıda n için x_n i içermek zorundadır. Fakat bu mümkün değildir çünkü (x_n) , X içinde bir dizi olduğundan x_n lerin tamamı X e aittir. Sonuç olarak (X, d) tam olmak zorundadır.

Şimdi de (X, d) nin total sınırlı ve tam olduğunu kabul edelim ve kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için (X, d) nin total sınırlı ve tam olduğunu, fakat kompakt olmadığını kabul edelim. Bu durumda, X in sonlu bir alt örtümü olmayan bir $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ açık örtümü vardır. (X, d) total sınırlı olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla bazı $r > 0$ reel sayısı ve bir $x_0 \in X$ için $X \subseteq B(x_0, r)$ dir. Buradan $X = B(x_0, r)$ elde edilir. $\varepsilon_n = {}^{r}\!/_{2^n}$ olsun. X total sınırlı olduğundan, sonlu sayıda ε_1 yarıçaplı açık yuvar tarafından örtülebilir. Hipotezimize göre, bu yuvarların en az birisi (bu yuvara $B(x_1, \varepsilon_1)$ diyelim) sonlu sayıdaki G_λ kümeleri tarafından örtülemez. Çünkü eğer birisi bir sonlu alt örtüye sahip olsaydı aynısı X için de doğru olurdu yani X de bir sonlu alt örtüye sahip olurdu.

$B(x_1, \varepsilon_1)$ nin kendisi de total sınırlı olduğundan (total sınırlı bir kümenin boştan farklı herhangi bir alt kümesi total sınırlıdır), $B(x_2, \varepsilon_2)$ sonlu sayıda G_λ kümeleri tarafından örtülmeyecek şekilde bir $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1)$ bulabiliriz.

Bu yönteme devam edilirse her bir n için $B(x_n, \varepsilon_n)$, sonlu sayıdaki G_λ kümeleri tarafından örtülemeyen ve $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ özelliğini sağlayan bir (x_n) dizisi tanımlanabilir.

(x_n) dizisinin yakınsak olduğunu göstereceğiz. $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ olduğundan $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n$ dir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \\ &< \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \cdots + \varepsilon_{n+p-1} < \frac{r}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

olur. Buna göre (x_n) , X içinde bir Cauchy dizisidir ve X tam olduğundan bir $y \in X$ elemanına yakınsar. $y \in X$ olduğundan, $y \in G_{\lambda_0}$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır. G_{λ_0} açık olduğundan, uygun bir $\delta > 0$ için $B(y, \delta)$ yı içerir. $d(x_n, y) < {}^{\delta}\!/_{2}$ ve $\varepsilon_n < {}^{\delta}\!/_{2}$ olacak şekilde yeterince büyük n seçelim. Buradan $d(x, x_n) < \varepsilon_n$ i sağlayan her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \\ &< \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta \end{aligned}$$

dır. Ve böylece $B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(y, \delta)$ elde edilir. Bu nedenle, $B(x_n, \varepsilon_n)$, G_{λ_0} kümesinden sonlu bir alt örtüm içerir. Bu, (x_n) dizisini tanımlarken belirttiğimiz, her bir n için $B(x_n, \varepsilon_n)$ açık yuvarı sonlu sayıdaki G_λ kümeleri tarafından örtülemez özelliği ile çelişir. Sonuç olarak (X, d) kompakttır.

Yardımcı Teorem 2.42. (X, d) bir metrik uzay olsun. X in total sınırlı olması için gerek ve yeter koşul X in elemanlarından oluşan her dizinin bir Cauchy alt dizisinin var olmasıdır [10].

Teorem 2.43. Bir metrik uzayın dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul kompakt olmasıdır.

İspat. X metrik uzayının kompakt olduğunu kabul edelim. X kompakt olduğundan total sınırlı ve tamdır. (x_n) , X içindeki noktaların herhangi bir dizisi olsun. X total sınırlı olduğundan X içindeki her bir dizi dolayısıyla (x_n) dizisi bir (x_{n_i}) Cauchy alt dizisi içerir. X tam olduğundan, (x_{n_i}) dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Sonuç olarak eğer X kompakt ise, X içindeki her dizi yakınsak bir alt dizi içerir, yani X dizisel kompakttır.

Şimdi X in dizisel kompakt olduğunu yani X içindeki her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu kabul edelim. Her yakınsak dizi Cauchy olduğundan, X içindeki her dizinin bir Cauchy alt dizisi içerdiğini kabul ettik. Yardımcı teorem 2.42'den dolayı X total sınırlıdır. Şimdi X in tam olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için (x_n) , X içinde bir Cauchy dizisi olsun. Kabulümüzden, (x_n) bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_i}) alt dizisine sahiptir.

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğunu göstereceğiz. ε keyfi bir pozitif tamsayı olsun. $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x$ olduğundan, $i \geq i_0$ olduğunda

$$d(x_{n_i}, x) < \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

olacak şekilde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (x_n) dizisi Cauchy olduğundan , $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $i \geq i_0$ ve $n_i \geq n_0$ eşitsizliklerini sağlayan i ler için $n \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\varepsilon = \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dir. Buna göre X tamdır. Sonuç olarak X total sınırlı ve tam olduğundan, X kompakttır.

Tanım 2.44. (Vektör uzayı) X bir küme ve K bir cisim olsun. $X \times X$ den X e

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

toplama ve $K \times X$ den X'e

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha . x$$

skalerle çarpma fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa o zaman X e K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

A_1) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

A_2) $x + y = y + x$,

A_3) $\forall x \in X$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak biçimde bir $0 \in X$ vardır,

A_4) $\forall x \in X$ ve $x \neq 0$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak biçimde bir $(-x) \in X$ vardır,

S_1) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$,

S_2) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$,

S_3) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$,

S_4) $1. x = x$

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzayına reel vektör uzayı, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzayına kompleks vektör uzayı denir. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olarak düşünülebileceğinden, $\mathbb{R}$ üzerindeki bir vektör uzayı aynı zamanda $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olarak alınabilir. Burada X in elemanlarına noktalar ya da vektörler denir.

Tanım 2.45. X bir vektör uzayı ve $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;

$\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha \in K$ için

I) $x + y \in A$

II) $\alpha . x \in A$

oluyorsa A ya, X in bir vektör alt uzayı (lineer alt uzayı**)** denir.

Tanım 2.46. X bir vektör uzayı olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $x \rightarrow \|x\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$ dır.

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Üzerinde $\| \|$ normu ile tanımlı olan X vektör uzayına normlu uzay denir ve $(X, \| \|)$ biçiminde gösterilir.

$(X, \| \|)$ bir normlu vektör uzayı olmak üzere, $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlı $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar. Böylece, bir normlu vektör uzayını norm yardımıyla elde edilmiş metrikle bir metrik uzay gibi düşünebiliriz.

Tanım 2.47. $(X, \| \|)$ normlu vektör uzayı norm tarafından üretilen metriğe göre tam ise Banach uzayı adını alır.

BÖLÜM 3. REEL TERİMLİ QUASI CAUCHY DİZİLERİ

Bu bölümde, reel sayılar kümesi üzerinde quasi Cauchy dizisi tanımı verilmiş ve genel özelliklerinden bahsedilmiştir.Ayrıca reel uzayda ward kompakt kümeler ve ward sürekli fonksiyonlar tanımlanmış, bu kümeler ve fonksiyonlarla ilgili teoremler ve elde edilen sonuçlar incelenmiştir.

3.1. Reel Sayılar Kümesinde Quasi Cauchy Dizileri

Tanım 3.1.1. (Quasi Cauchy dizisi) Reel terimli bir (α_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyorsa yani $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0$ oluyorsa (α_n) dizisine bir quasi Cauchy dizisi denir[2, 11].

Bu tanımı ε ve n_0 sembollerini kullanarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$\forall\varepsilon>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda $|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı var ise (α_n) dizisine quasi Cauchy dizisi denir.

Yakınsak her dizi quasi Cauchy dizisidir:

(x_n) , $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ olan herhangi bir yakınsak dizi ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$\Delta x_n=(x_{n+1}-x_n)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty}\Delta x_n=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-l+l-x_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(x_{n+1}-l)+(l-x_n)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-l)+\lim_{n\to\infty}(l-x_n)=0+0=0$$

bulunur.

Ancak bunun karşıtının doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 3.1.2. $(x_n)=(\sqrt{n})$ dizisini göz önüne alırsak,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

olduğundan (x_n) dizisinin bir quasi-Cauchy dizisi olduğu görülür, ancak yakınsak değildir.

Örnek 3.1.3. $(x_n) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ dizisini göz önüne alırsak,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

olduğundan (x_n) dizisinin bir quasi-Cauchy dizisi olduğu görülür, ancak yakınsak değildir [12].

Her ne kadar reel terimli her Cauchy dizisi yakınsak ve dolayısıyla yukarıdaki ispatımızdan dolayı her Cauchy dizisinin quasi Cauchy dizisi olduğu elde edilirse de her Cauchy dizisinin quasi cauchy dizisi olduğunun doğrudan bir ispatını aşağıda veriyoruz.

(α_n) reel terimli olan herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Herhangi bir ε pozitif sayısı verilsin. (α_n) bir Cauchy dizisi olduğundan, $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı vardır. $n, n+1 \geq n_0$ olduğunda $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı vardır. Dolayısıyla (α_n) bir Cauchy dizisidir.

Teorem 3.1.4. Reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesi bir vektör uzayıdır.

İspat. Reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesinin bir vektör uzayı olduğunu göstermek için quasi Cauchy dizileri kümesinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin tanımlı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

İki quasi Cauchy dizisinin toplamı da quasi Cauchy dizisidir. Reel terimli bir (α_n) quasi Cauchy dizisini ve (β_n) quasi Cauchy dizisini göz önüne alalım. (α_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$ dır ve (β_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty}(\beta_{n+1} - \beta_n) = 0$ dır. Buradan;

$$\lim_{n\to\infty}\big((\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) - (\alpha_n + \beta_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\big((\alpha_{n+1} - \alpha_n) + (\beta_{n+1} - \beta_n)\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \lim_{n\to\infty}(\beta_{n+1} - \beta_n) =$$

$$= 0 \text{ elde edilir.}$$

(α_n) quasi Cauchy dizisi ve c sabit bir sayı ise $(c\alpha_n)$ dizisi de quasi Cauchy dizisidir. Gerçekten;

$$\lim_{n\to\infty}(c\alpha_{n+1} - c\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} c(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = c.\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = c.0 = 0$$

dır. O halde reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesi bir vektör uzayıdır.

Teorem 3.1.5. Her bir (α_n) reel terimli quasi Cauchy dizisi için

$$\|(\alpha_n)\|_\Delta = |\alpha_1| + sup_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$$

ile tanımlanan $\| \|_\Delta$ fonksiyonu reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesi üzerinde bir normdur [1].

3.2. Reel Sayılar Kümesinde Ward Kompaktlık

Tanım 3.2.1. Reel terimli diziler vektör uzayı $s(\mathbb{R})$ olmak üzere, $s(\mathbb{R})$ nin bir alt vektör uzayı $c_G(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı, $\mathbb{R}$ içine olan lineer bir G fonksiyonuna dizisel yakınsaklık metodu denir. Eğer $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n) \in c_G(\mathbb{R})$ için $G(x) = l$ oluyorsa $\boldsymbol{\alpha}$ dizisine l ye G −yakınsaktır denir.

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, terimleri A da olan her $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)$ dizisi için $G(\boldsymbol{\beta}) \in A$ olacak şekilde $\boldsymbol{\alpha}$ dizisinin bir $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_{n_k})$ alt dizisi bulunabiliyorsa A ya G −dizisel kompakttır denir[13].

Tanım 3.2.2. (Ward kompaktlık) Reel sayılar kümesinin bir A alt kümesi verilsin.Terimleri A dan alınan her bir (α_n) dizisinin en az bir quasi Cauchy alt dizisi bulunabiliyorsa A ya ward kompakt küme denir [2].

Bu tanımdaki ward kompaktlığın G-dizisel kompaktlıktan elde edilemediği görülmektedir.

Teorem 3.2.3. Ward kompakt bir kümenin her alt kümesi de ward kompakttır.

İspat. E ward kompakt bir küme olsun. Herhangi bir $A \subseteq E$ alalım. Terimleri A kümesinde olan herhangi bir (x_n) dizisini alalım. $A \subseteq E$ olduğundan (x_n) dizisinin terimleri E kümesinde bulunur. E ward kompakt bir küme olduğundan (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) quasi Cauchy alt dizisi vardır. O halde A kümesi ward kompakttır.

Sonuç 3.2.4. Reel sayılar kümesinin ward kompakt alt kümelerinin keyfi kesişimi ward kompakttır.

Teorem 3.2.5. Reel sayıların ward kompakt iki alt kümesinin birleşimi ward kompakttır.
İspat. A ve B reel sayıların ward kompakt iki alt kümesi olsun. $A \cup B$ nin ward kompakt olduğunu göstermek için terimleri $A \cup B$ de olan herhangi bir (x_n) dizisi alalım. Bu (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta indislere karşılık gelen terimleri A veya B de olmak zorundadır. A kümesinde olduğunu kabul edelim. (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta indislere karşılık gelen terimleri için oluşturulan alt diziyi (x_{n_k}) ile gösterelim. A kümesi ward kompakt olduğundan (x_{n_k}) dizisinin bir $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy alt dizisi vardır. $\left(x_{n_{k_j}}\right)$, (x_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan $A \cup B$ ward kompakt bulunur.

Teorem 3.2.6. Reel sayıların herhangi bir alt kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul ward kompakt olmasıdır [2].
İspat. $\mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesi A olsun. $\overline{A}$ da sınırlıdır. $\overline{A}$ hem kapalı, hem sınırlıdır, yani kompakttır, dolayısıyla dizisel kompakttır. A kümesinden herhangi bir dizi alalım. Bu dizinin tüm terimleri $\overline{A}$ kümesinde bulunur. A dizisel kompakt olduğundan bu dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Yakınsak her dizi quasi-Cauchy dizisi olduğundan A kümesi ward kompakt bulunur.

Karşıt olarak, A sınırsız olsun. A nın üstten sınırsız olduğunu kabul edelim. A üstten sınırsız olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_{n+1} > 1 + \alpha_n$ sağlayan, terimleri A kümesinde bulunan bir (α_n) dizisi oluşturulabilir.Buradan (α_n) dizisinin herhangi bir quasi-Cauchy alt dizisi olmadığından A ward kompakt değildir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. Reel Sayılar Kümesinde Ward Süreklilik

Tanım 3.3.1 Eğer $a \in \mathbb{R}$ için reel terimli $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)$ dizisi a ya G −yakınsak olduğunda $f(\boldsymbol{\alpha})$ dizisi de $f(a)$ ya G −yakınsak oluyorsa f fonksiyonuna a noktasında G −dizisel süreklidir denir[14-16].

Tanım 3.3.2. (Ward süreklilik) Reel sayılar kümesinin bir A alt kümesinden reel sayılar kümesi içine bir f fonksiyonu eğer quasi Cauchy dizilerini quasi Cauchy dizilerine dönüştürüyorsa, yani terimleri A da olan her (α_n) quasi Cauchy dizisi için $(f(\alpha_n))$ dönüşüm dizisi de quasi Cauchy dizisi oluyorsa f fonksiyonuna ward süreklidir denir [2].

Bu tanımdaki ward sürekliliğin $G-$dizisel süreklilikten elde edilemediği görülmektedir.

Teorem 3.3.3. $E \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere E üzerinde ward sürekli her fonksiyon süreklidir [2].

İspat. E üzerinde ward sürekli bir f fonksiyonunu ve $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ olacak şekilde yakınsak bir (x_n) dizisini alalım. $(t_n) = (x_1, x_0, x_2, x_0, \dots, x_n, x_0, \dots)$ biçiminde oluşturulan (t_n) dizisi de x_0 noktasına yakınsak bir dizidir. Yakınsak her dizi quasi-Cauchy dizisi olduğundan dolayı bu (t_n) dizisi de quasi-Cauchy dizisidir. f fonksiyonu ward sürekli olduğundan $(z_n) = (f(x_1), f(x_0), f(x_1), f(x_0), \dots, f(x_n), f(x_0), \dots)$ dizisi de quasi Cauchy dizisi olur. Buradan, $\big(f(x_n)\big)$ dizisinin $f(x_0)$ a yakınsadığı görülür. O halde f fonksiyonu E üzerinde süreklidir.

Bu teoremden ward sürekli fonksiyonların kümesinin sürekli fonksiyonların kümesinin bir alt kümesi olduğu görülmektedir.

Bu teoremin karşıtının doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.3.4. $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ve $(x_n) = \sqrt{n}$ dizisini alırsak,

$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ dır. Ancak $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big) = n + 1 - n = 1 \neq 0$ olduğundan quasi-Cauchy değildir, böylece f fonksiyonunun ward sürekli olmadığı görülür.Yani f fonksiyonu süreklidir ancak ward sürekli değildir.

Teorem 3.3.5. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesinden reel sayılar kümesine ward sürekli iki fonksiyonun toplamı ward süreklidir.

İspat. f ve g ward sürekli iki fonksiyon olsun. $f + g$ toplam fonksiyonunun da ward sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir (x_n) quasi-Cauchy dizisini ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. f ward sürekli olduğundan $\big(f(x_n)\big)$ dizisi quasi-Cauchy dizisidir yani;

$\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big) = 0$ dır. $n \geq N_1$ olduğunda $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < {}^{\varepsilon}/_{2}$

olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde g fonksiyonu ward sürekli olduğundan $\big(g(x_n)\big)$ dizisi de quasi-Cauchy dizisidir yani;

$\lim\limits_{n\to\infty}\big(g(x_{n+1}) - g(x_n)\big) = 0$ dır. $n \geq N_2$ olduğunda $|g(x_{n+1}) - g(x_n)| < {}^{\varepsilon}/_{2}$

olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $max\{N_1, N_2\} = N$ olsun. $n \geq N$ için;

$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| + |g(x_{n+1}) - g(x_n)| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$ olduğundan, yani;

$$\lim_{n\to\infty}[(f+g)(x_{n+1}) - (f+g)(x_n)] = \lim_{n\to\infty}[f(x_{n+1}) - f(x_n)] +$$

$$+\lim_{n\to\infty}[g(x_{n+1}) - g(x_n)] = 0$$

olduğundan $f+g$ ward süreklidir.

Teorem 3.3.6. Eğer f fonksiyonu reel sayılar kümesinin bir alt kümesinden reel sayılar kümesine ward sürekli ise, $c \in \mathbb{R}$ için $c.f$ de ward süreklidir.

İspat. $c = 0$ için $0.f = 0$ olduğundan doğruluğu açıktır. $c \neq 0$ alalım. f ward sürekli olsun. $c.f$ fonksiyonunun ward sürekli olduğunu göstermek için herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisi alalım. f ward sürekli olduğundan $\big(f(x_n)\big)$ dizisi quasi Cauchy dizisidir, yani $\big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big)$ dizisi sıfıra yakınsar. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $n \geq N$ olduğunda $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{c}$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Buradan;

$$|(cf)(x_{n+1}) - (cf)(x_n)| = |c.f(x_{n+1}) - c.fx_n| =$$

$$= |c||f(x_{n+1}) - f(x_n)| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece $c.f$ fonksiyonunun ward sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 3.3.7. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesinden reel sayılar kümesine ward sürekli fonksiyonların kümesi, sürekli fonksiyonlar vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Yardımcı Teorem 3.3.8. Reel sayılar kümesinin bir A alt kümesinden reel sayılar kümesi içine sürekli fonksiyonların uzayı $C[A]$ olmak üzere, $C[A]$ nın bir D alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul terimleri D de olan yakınsak her dizinin limitinin D de olmasıdır [17].

Teorem 3.3.9. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesinden reel sayılar kümesine ward sürekli fonksiyonların kümesi sürekli fonksiyonlar uzayının kapalı bir alt vektör uzayıdır [18].

İspat. $E \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere E üzerinde ward sürekli fonksiyonların kümesini $W[E]$ ile gösterelim. $f \in \overline{W[E]}$ olsun. $W[E]$ de, $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ olacak şekilde bir (f_k) dizisi vardır. f nin ward sürekli olduğunu göstermek için, (x_n) quasi Cauchy dizisini ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ olduğundan, $\forall x \in E$ için $n \geq N$ olduğunda $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N ward sürekli olduğundan $n \geq N_1$ olduğunda $|f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)| < \varepsilon/3$ olacak şekilde N den büyük bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq N_1$ için;

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| =$$

$$=|f(x_{n+1}) - f_N(x_{n+1}) + f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n) + f_N(x_n) - f(x_n)| \leq$$

$$\leq |f(x_{n+1}) - f_N(x_{n+1})| + |f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)| + |f_N(x_n) - f(x_n)| <$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \text{ bulunur.}$$

O halde f, ward süreklidir. Dolayısıyla $\overline{W[E]} \subset$ W[E] elde edilir. $W[E] = \overline{W[E]}$ bulunmuş olur.

Teorem 3.3.10. Ward sürekli iki fonksiyonun bileşkesi ward süreklidir.

İspat. f ve g ward sürekli iki fonksiyon olsun. $f \circ g$ fonksiyonunun ward sürekli olduğunu göstermek için herhangi bir (x_n) quasi-Cauchy dizisini alalım. g fonksiyonu ward sürekli olduğundan $(g(x_n))$ quasi-Cauchy dizisi olur. Benzer şekilde f fonksiyonu ward sürekli olduğundan $\left(f\left(g(x_n)\right)\right)$ quasi-Cauchy bulunur. O halde $f \circ g$ fonksiyonu ward süreklidir.

Uyarı 3.3.11. Ward sürekli iki fonksiyonun çarpımı ward sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(x) = x$ fonksiyonunu alalım. $g(x) = f(x).f(x) = x^2$ olsun. $(x_n) = \sqrt{n}$ dizisini alırsak,

$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ olduğundan $f(x_n)$ quasi-Cauchy dizisi olur, yani f fonksiyonu ward süreklidir. Ancak

$(g(x_n)) = f(x_n).f(x_n) = \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$ dizisi,

$\lim_{n\to\infty}\left(g(x_{n+1}) - g(x_n)\right) = n + 1 - n = 1 \neq 0$ olduğundan quasi-Cauchy değildir, böylece g fonksiyonunun ward sürekli olmadığı görülür.

f ward sürekli bir fonksiyon ise, $|f|$ fonksiyonunun da ward sürekli olduğu

$$\left||f(x_{n+1})| - |f(x_n)|\right| \leq |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinden elde edilebilir. f ve g ward sürekli iki fonksiyon ise, $|f - g|$ fonksiyonunun da ward sürekli olduğu ward sürekli iki fonksiyonunun bileşkesinin ward sürekli olduğu gerçeğinden elde edilir.

Sonuç 3.3.12. f ve g ward sürekli iki fonksiyon ise,

$$max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$$

ve

$$min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|$$

olarak tanımlanan $max\{f, g\}$ ve $min\{f, g\}$ fonksiyonları da ward süreklidir.

Teorem 3.3.13. Düzgün sürekli her fonksiyon aynı zamanda ward süreklidir [2].

İspat. $E \subseteq \mathbb{R}$ ve f, E üzerinde düzgün sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. f in E üzerinde ward sürekli olduğunu göstermek için herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisini ve $\varepsilon > 0$ alalım. f , E üzerinde düzgün sürekli olduğundan $x, y \in E$ için $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bu ε a bağlı bir $\delta > 0$ vardır. Bu $\delta > 0$ için, $n > N$ olduğunda $|\Delta x_n| = |x_{n+1} - x_n| < \delta$ olacak şekilde $N = N(\delta) = N_1(\varepsilon)$ vardır. Buradan $n > N$ için $|\Delta f(x_n)| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \varepsilon$ bulunur. Bu ise $\big(f(x_n)\big)$ dizisinin quasi Cauchy dizisi olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.14. $\mathbb{R}$ nin ward kompakt bir alt kümesinin ward sürekli görüntüsü ward kompakttır.

İspat. $E \subseteq \mathbb{R}$ ward kompakt bir küme ve f, E üzerinde ward sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. $f(E)$ görüntü kümesinin ward kompakt olduğunu göstereceğiz. Terimleri $f(E)$ den alınan herhangi bir (y_n) dizisini alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = f(x_n)$ olacak şekilde E nin x_n elemanları vardır. E kümesi ward kompakt olduğundan $\boldsymbol{x} = (x_n)$ dizisinin bir $\boldsymbol{z} = (z_k) = \big(x_{n_k}\big)$ quasi Cauchy alt dizisi vardır. f ward sürekli olduğundan $(t_k) = f(\boldsymbol{z}) = \big(f(z_k)\big) = (f\big(x_{n_k}\big))$ quasi Cauchy dizisi olur. Böylece (t_k), $f(\boldsymbol{x})$ in bir quasi Cauchy alt dizisi olarak bulunmuş olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.15. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı ve reel sayılar kümesi içine ward sürekli fonksiyonların düzgün yakınsadığı fonksiyon da ward süreklidir.

İspat. (f_n) **,** $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ward sürekli fonksiyonların dizisi olmak üzere (f_n) in bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kabul edelim. $\boldsymbol{x} = (x_n)$, $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde bir quasi Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $n \geq N$ olduğunda E nin her x elemanı için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N ward sürekli olduğundan, $n \geq N_1$ için $|f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)| < \varepsilon/3$ gerçekleyen, N den büyük ve ε a bağlı bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq N_1$ için

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq |f(x_{n+1}) - f_N(x_{n+1})| + |f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)| +$$

$$+|f_N(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise f fonksiyonunun E üzerinde ward sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.16. Reel sayılar kümesinin bir ward kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı ve reel sayılar kümesi içine ward sürekli fonksiyon düzgün süreklidir [2].

İspat. $E \subseteq \mathbb{R}$ ward kompakt bir küme ve f, E üzerinde tanımlı ward sürekli bir fonksiyon olsun. f in E üzerinde düzgün sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$|x_n - y_n| < 1/n$$

ve

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ ve elemanları E kümesinde olan (x_n), (y_n) dizileri vardır. E ward kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) quasi Cauchy alt dizisi vardır. Diğer taraftan (y_{n_k}) dizisinin bir $\left(y_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy alt dizisi vardır. Buradan

$$\left|x_{n_{k_j}} - x_{n_{k_{j+1}}}\right| \leq \left|x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}\right| + \left|y_{n_{k_j}} - y_{n_{k_{j+1}}}\right| + \left|y_{n_{k_{j+1}}} - x_{n_{k_{j+1}}}\right|$$

sağlandığından ve $\left(y_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy olduğundan $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy bulunur. Bu durumda;

$z_1 = x_{n_{k_1}}$, $z_2 = y_{n_{k_1}}$, $z_3 = x_{n_{k_2}}$, $z_4 = y_{n_{k_2}}$, $z_5 = x_{n_{k_3}}$, $z_6 = y_{n_{k_3}}$, … alınarak tanımlanan (z_j) dizisi quasi Cauchy iken $\left(f(z_j)\right)$ dizisi quasi Cauchy değildir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.17. Reel sayılar kümesinin sınırlı bir alt kümesi üzerinde tanımlı reel sayılar kümesi içine ward sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir.

BÖLÜM 4. METRİK UZAYLARDA QUASI CAUCHY DİZİLERİ

Bu bölümde, daha önce reel sayılar kümesi üzerinde incelenmiş olan quasi Cauchy dizileri, ward kompakt kümeler ve ward sürekli fonksiyonlar metrik uzaylarda incelenmiştir.

4.1. Metrik Uzayda Quasi Cauchy Dizileri

Tanım 4.1.1. (Quasi Cauchy Dizisi) Terimleri X metrik uzayından alınan bir (x_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyorsa yani $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ oluyorsa (x_n) dizisine bir quasi Cauchy denir [11, 12, 19].

Bu tanımı ε ve n_0 sembollerini kullanarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı var ise (x_n) dizisine quasi Cauchy dizisi denir.

Bu tanıma göre metrik uzaylarda da her Cauchy dizisinin aynı zamanda quasi Cauchy dizisi olduğunu aşağıda göstereceğiz.

Teorem 4.1.2. (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi quasi Cauchy dizisidir.

İspat. Terimleri X de olan herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi alalım. (x_n) dizisinin quasi Cauchy dizisi olduğunu göstermek için herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. (x_n) dizisi Cauchy dizisi olduğundan dolayı $n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 pozitif tamsayısı vardır. Özel olarak $m = n + 1$ yazarsak, $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisinin quasi Cauchy dizisi olduğu elde edilmiş olur.

Metrik uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisi olduğundan her yakınsak dizinin de quasi Cauchy dizisi olduğu yukarıdaki teoremden görülmektedir.

X normlu uzayında X için alışılmış metrik her x, y için $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlanmaktadır. (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı var ise (x_n) dizisine X de bir quasi Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.1.3. X normlu uzay olmak üzere X deki quasi Cauchy dizileri kümesi bir vektör uzayıdır.

İspat. X normlu uzayındaki quasi Cauchy dizileri kümesinin bir vektör uzayı olduğunu göstermek için quasi Cauchy dizileri kümesinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin tanımlı olduğunu gösteceğiz.

Önce iki quasi Cauchy dizisinin toplamının da quasi Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. X deki bir (x_n) quasi Cauchy dizisini ve (y_n) quasi Cauchy dizisini göz önüne alalım.Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım.

(x_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ dır $n \geq N_1$ olduğunda;

$\|x_{n+1} - x_n\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır.Benzer şekilde (y_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n) = 0$ dır. $n \geq N_2$ olduğunda;

$\|y_{n+1} - y_n\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $max\{N_1, N_2\} = N$ olsun. $n \geq N$ için;

$$\|(x_{n+1} + y_{n+1}) - (x_n + y_n)\| = \|(x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n)\| \leq$$

$$\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|y_{n+1} - y_n\| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon \quad \text{bulunur.Yani}$$

$(x_n + y_n)$ dizisi quasi Cauchy bulunmuş olur.

Şimdi de (x_n) quasi Cauchy dizisi ve c sabit bir sayı ise (cx_n) dizisinin de quasi Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $c = 0$ ise ispat aşikardır. $c \neq 0$ olsun. Gerçekten; (x_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ dır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $n \geq N$ olduğunda $\|x_{n+1} - x_n\| < \frac{\varepsilon}{c}$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Buradan;

$$\|cx_{n+1} - cx_n\| = |c|\|x_{n+1} - x_n\| = < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

bulunur. Yani (cx_n) dizisi quasi Cauchy bulunmuş olur. O halde X deki quasi Cauchy dizileri kümesi bir vektör uzayıdır.

Teorem 4.1.4. Terimleri normlu bir X uzayından alınan her bir (x_n) quasi Cauchy dizi için

$$\|(x_n)\|_\Delta = \|x_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n - x_{n+1}\|$$

ile tanımlanan $\| \|_\Delta$fonksiyonu X deki quasi Cauchy dizileri vektör uzayı üzerinde bir normdur.

İspat. $\| \|_\Delta$ fonksiyonunun norm koşullarını sağladığını gösterelim;

N1) Norm özelliğinden $\| \|_\Delta$ fonksiyonunun pozitif değerli olduğu açıktır. O halde $\|(x_n)\|_\Delta = 0 \Leftrightarrow x_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$\|(x_n)\|_\Delta = \|x_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n - x_{n+1}\| = 0 \Leftrightarrow \|x_1\| = 0$ ve

$0 \le \|x_n - x_{n+1}\| \le sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n - x_{n+1}\| = 0 \Leftrightarrow \|x_n - x_{n+1}\| = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$ ve $n = 1$ *için* $\|x_1 - x_2\| = 0$ ise $x_2 = 0$

$n = 2$ *için* $\|x_2 - x_3\| = 0$ ise $x_3 = 0$

ve bu şekilde devam ederek $\|x_{n-1} - x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_n = 0$ bulunur.

N2) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$\|c(x_n)\|_\Delta = \|cx_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|c.x_n - c.x_{n+1}\| = |c|\|x_1\| + |c|sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n - x_{n+1}\| =$

$= |c|(\|x_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n - x_{n+1}\|) = |c|\|(x_n)\|_\Delta$ bulunur.

N3) $\|(x_n) + (y_n)\|_\Delta = \|x_1 + y_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|(x_n + y_n) - (x_{n+1} + y_{n+1})\| \le$

$\le \|x_1\| + \|y_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}(\|x_n - x_{n+1}\| + \|y_n - y_{n+1}\|) =$

$= \|x_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n - x_{n+1}\| + \|y_1\| + sup_{n\in\mathbb{N}}\|y_n - y_{n+1}\| =$

$= \|(x_n)\|_\Delta + \|(y_n)\|_\Delta$ bulunur.

N1), N2) ve N3) gerçeklendiğinden $\| \|_\Delta$ fonksiyonu X deki quasi Cauchy dizileri vektör uzayı üzerinde bir normdur.

4.2. Metrik Uzaylarda Ward Kompaktlık

Tanım 4.2.1. (Metrik uzaylarda ward kompaktlık) Terimleri X in bir E alt kümesinden alınan her bir (x_n) dizisinin en az bir quasi Cauchy alt dizisi var ise E kümesine ward kompakt küme denir [19].

Bu tanıma göre X in sonlu her alt kümesinin ward kompakt olduğu hemen görülmektedir.

X deki ward kompakt bir kümenin her alt kümesi de ward kompakttır, dolayısıyla X in ward kompakt alt kümelerinin keyfi kesişimi de ward kompakt olduğu açıkça görülmektedir. A ve B , X in ward kompakt iki alt kümesi olduğunda $A \cup B$ nin de ward kompakt olduğu elde edilebilir.

Teorem 4.2.2. (X, d) bir metrik uzay olsun. X in total sınırlı olması için gerek ve yeter koşul X in ward kompakt olmasıdır [10, 19].

İspat. X in total sınırlı olduğunu kabul edelim, (x_n) dizisi de elemanları X kümesinde olan bir dizi olsun. X, çapı 1'den küçük sonlu sayıda alt kümesi tarafından örtülür. Bu kümelerden birini X_1 ile gösterirsek; X_1, n nin sonsuz sayıda değeri için x_n i içerir.
$x_{n_1} \in \mathrm{X}_1$ olacak şekilde n_1 pozitif tamsayısını seçebiliriz. X_1 total sınırlı olduğundan çapı $1/2$ den küçük olan sonlu sayıda alt kümesi tarafından örtülür. Bu alt kümelerden birini A_2 ile gösterelim. A_2, n nin sonsuz sayıda değeri için x_n i içerir. $n_2 > n_1$ ve $x_{n_2} \in A_2$ olacak şekilde n_2 pozitif tamsayısını seçelim. $A_2 \subset \mathrm{X}_1$ olduğundan $x_{n_2} \in \mathrm{X}_1$ olur. Bu şekilde devam ederek herhangi bir k pozitif sayısı için, A_{k-1}' in, çapı $1/k$ dan küçük A_k alt kümesini elde edebiliriz. Burada $n_k < n_{k-1}$ için $x_{n_k} \in A_k$ dır. Her $x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots$ A_k kümesinde bunduğundan ve A_k nın çapı $1/k$ dan küçük olduğundan $(x_{n_k}), (x_n)$ in bir quasi Cauchy alt dizisidir.

Karşıt olarak, elemanları X den alınan her dizinin bir quasi Cauchy alt dizisinin var olduğunu ve X in total sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda X in sonlu bir $\varepsilon -$ ağı olmayacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. X in herhangi bir x_1 elemanını alalım. X total sınırlı olmadığından $S_\varepsilon(x_1) \neq X$ olur, aksi takdirde $\{x_1\}$, X in sonlu bir $\varepsilon - ağı$ olurdu. Buradan $x_2 \notin S_\varepsilon(x_1)$ yani $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_2 \in X$ vardır. O halde,
$S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2) \neq X$ dir, aksi takdirde $\{x_1, x_2\}$ sonlu bir $\varepsilon - ağı$ olurdu.
$x_3 \notin S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2)$ olsun, yani;

$$d(x_1, x_3) \geq \varepsilon \text{ ve } d(x_2, x_3) \geq \varepsilon \text{ dur.}$$

Bu şekilde devam ederek;

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} S_\varepsilon(x_i) \qquad (n = 2,3, \dots) \text{ yani}$$

$$d(x_i, x_n) \geq \varepsilon\,, (i = 1,2, \dots, n-1 \;\; ve \;\; n = 1,2, \dots) \;\; (n \neq i)$$

olacak şekilde elemanları X den alınan bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz.

Sonuç olarak $n \neq m$ sağlayan $\forall n, m$ için $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ olduğundan bu (x_n) dizisinin hiç bir quasi Cauchy alt dizisi yoktur. Bu bir çelişkidir. O halde X total sınırlıdır [10, 19].

4.3. Metrik Uzaylarda Ward Süreklilik

Tanım 4.3.1. (Ward süreklilik) X in bir E alt kümesinden Y içine bir f fonksiyonu eğer quasi Cauchy dizilerini quasi Cauchy dizilerine dönüştürüyorsa, yani terimleri E de olan her (x_n) dizisi quasi dizisi için $(f(x_n))$ dönüşüm dizisi quasi Cauchy dizisi oluyorsa f fonksiyonuna ward süreklidir denir [19].

Teorem 4.3.2. $E \subseteq X$ olmak üzere E üzerinde tanımlı ve bir Y metrik uzayına ward sürekli her fonksiyon süreklidir

Bu teorem, ispatı Teorem 3.3.3. ün ispatına benzerlik gösterdiğinden, ispatsız olarak ifade edilmiştir.

Bu teoremden ward sürekli fonksiyonların kümesinin sürekli fonksiyonların kümesinin bir alt kümesi olduğu görülmektedir.

Teorem 4.3.3. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına ward sürekli iki fonksiyonun toplamı ward süreklidir.

İspat. f ve g ward sürekli iki fonksiyon olsun. $f + g$ toplam fonksiyonunun da ward sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir (x_n) quasi-Cauchy dizisini ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. f ward sürekli olduğundan $\big(f(x_n)\big)$ dizisi quasi-Cauchy dizisidir yani;

$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big) = 0$ dır. $n \geq N_1$ olduğunda;

$\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde g fonksiyonu ward sürekli olduğundan $\big(g(x_n)\big)$ dizisi de quasi-Cauchy dizisidir yani;

$\lim_{n\to\infty}\big(g(x_{n+1}) - g(x_n)\big) = 0$ dır. $n \geq N_2$ olduğunda;

$\|g(x_{n+1}) - g(x_n)\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $max\{N_1, N_2\} = N$ olsun. $n \geq N$ için;

$\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| + \|g(x_{n+1}) - g(x_n)\| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$ olduğundan, yani

$$\lim_{n\to\infty}[(f+g)(x_{n+1}) - (f+g)x_n] = \lim_{n\to\infty}[f(x_{n+1}) - f(x_n)] + \lim_{n\to\infty}[g(x_{n+1}) - g(x_n)]$$

$$= 0$$

olduğundan $f + g$ ward süreklidir.

Teorem 4.3.4. Eğer f fonksiyonu bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına ward sürekli ise, $c \in \mathbb{R}$ için $c.f$ de ward süreklidir.

İspat. $c = 0$ için $0.f = 0$ olduğundan doğruluğu açıktır. $c \neq 0$ alalım. f ward sürekli olsun. $c.f$ fonksiyonunun ward sürekli olduğunu göstermek için herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisi alalım. f ward sürekli olduğundan $\big(f(x_n)\big)$ dizisi quasi Cauchy dizisidir, yani $\big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big)$ dizisi sıfıra yakınsar. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $n \geq N$ olduğunda $\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{c}$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Buradan;

$$\|(cf)(x_{n+1}) - (cf)(x_n)\| = \|c.f(x_{n+1}) - c.f(x_n)\| =$$

$$= |c|\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece $c.f$ fonksiyonunun ward sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 4.3.5. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına ward sürekli fonksiyonların kümesi, sürekli fonksiyonlar vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Teorem 4.3.6. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına ward sürekli fonksiyonların kümesi sürekli fonksiyonlar uzayının kapalı bir alt vektör uzayıdır.

İspat. $E \subseteq X$ olmak üzere E üzerinde ward sürekli fonksiyonların kümesini $W[E]$ ile gösterelim. $f \in \overline{W[E]}$ olsun. $W[E]$ de, $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ olacak şekilde bir (f_k) dizisi vardır. f nin ward sürekli olduğunu göstermek için, (x_n) quasi Cauchy dizisini ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım.

$\lim_{k\to\infty} f_k = f$ olduğundan, $\forall x \in E$ için $n \geq N$ olduğunda

$\|f(x) - f_n(x)\| < {}^{\varepsilon}/_{3}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N ward sürekli olduğundan

$n \geq N_1$ olduğunda;

$\|f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)\| < {}^{\varepsilon}/_{3}$ olacak şekilde N den büyük bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq N_1$ için;

$\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| =$

$= \|f(x_{n+1}) - f_N(x_{n+1}) + f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n) + f_N(x_n) - f(x_n)\| \leq$

$\leq \|f(x_{n+1}) - f_N(x_{n+1})\| + \|f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)\| + \|f_N(x_n) - f(x_n)\| <$

$< {}^{\varepsilon}/_{3} + {}^{\varepsilon}/_{3} + {}^{\varepsilon}/_{3} = \varepsilon$ bulunur.

O halde f, ward süreklidir. Dolayısıyla $\overline{W[E]} \subset$ W[E] elde edilir. $W[E] = \overline{W[E]}$ bulunmuş olur.

Teorem 4.3.7. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına olan f fonksiyonu ward sürekli bir fonksiyon ise, her $x \in X$ için $g(x) = \|f(x)\|$ ile tanımlanan g fonksiyonu da ward süreklidir.

İspat. f ward sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisini alalım. Bu takdirde $\forall\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 doğal sayısı vardır. Mutlak değer fonksiyonun özelliği kullanılarak

$$|g(x_{n+1}) - g(x_n)| \leq ||f(x_{n+1}) - f(x_n)|| < \varepsilon$$

bulunur. O halde g fonksiyonu ward süreklidir.

Teorem 4.3.8. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına f ve g fonksiyonları ward sürekli iki fonksiyon ise, $\|f - g\|$ fonksiyonu da ward süreklidir.

İspat. Bu teoremin ispatı yukarıdaki teoremlerden elde edilse de bütünlük için doğrudan ispatını veriyoruz. f ve g ward sürekli iki fonksiyon ise $f - g$ fonksiyonunun da ward sürekli olduğunu biliyoruz. $h = f - g$ diyelim. $\|h\| = \|f - g\|$ fonksiyonunun ward sürekli olduğunu göstermek için herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisini alalım. h ward sürekli olduğundan $\big(h(x_n)\big)$ dizisi quasi Cauchy dir, yani $\big(h(x_{n+1}) - h(x_n)\big)$ dizisi sıfıra yakınsar. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım, $n \geq N$ olduğunda $\|h(x_{n+1}) - h(x_n)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Norm fonksiyonunun özelliği kullanılarak

$|\|h(x_{n+1})\| - \|h(x_n)\|| \leq \|h(x_{n+1}) - h(x_n)\| < \varepsilon$ bulunur. O halde

$\|h\| = \|f - g\|$ fonksiyonu ward süreklidir.

Sonuç 4.3.9. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden reel sayılar uzayına olan f ve g fonksiyonları ward sürekli iki fonksiyon ise,

$$max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}\|f - g\|$$

ve

$$min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}\|f - g\|$$

olarak tanımlanan $max\{f, g\}$ ve $min\{f, g\}$ fonksiyonları da ward süreklidir.

Teorem 4.3.10. Bir X normlu uzayının bir alt kümesinden bir Y normlu uzayına olan ward sürekli iki fonksiyonun bileşkesi ward süreklidir.

Bu teorem, ispatı Teorem 3.3.10. un ispatına benzerlik gösterdiğinden, ispatsız olarak ifade edilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.3.11. Bir X metrik uzayının bir E alt kümesinden bir Y metrik uzayına sürekli fonksiyonların uzayı $C[E]$ olmak üzere $C[E]$ nin bir D alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul terimleri D de olan yakınsak her dizinin limitinin D de olmasıdır [7, 17].

Teorem 4.3.12. Bir X metrik uzayının bir alt kümesinden bir Y metrik uzayına ward sürekli fonksiyonların kümesi sürekli fonksiyonlar uzayının kapalı bir alt vektör uzayıdır.
İspat. $E \subseteq X$ olmak üzere E üzerinde ward sürekli fonksiyonların kümesini $W[E]$ ile gösterelim. $f \in \overline{W[E]}$ olsun. $W[E]$ de,

$\lim_{k\to\infty} f_k = f$ olacak şekilde bir (f_k) dizisi vardır. f nin ward sürekli olduğunu göstermek için, (x_n) quasi Cauchy dizisini ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım.

$\lim_{k\to\infty} f_k = f$ olduğundan, $\forall x \in E$ için $n \geq N$ olduğunda $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N ward sürekli olduğundan $n \geq N_1$ olduğunda $d(f_N(x_{n+1}), f_N(x_n)) < \varepsilon/3$ olacak şekilde N den büyük bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq N_1$ için;

$$d\big(f(x_{n+1}), f(x_n)\big) \leq d\big(f(x_{n+1}), f_N(x_{n+1})\big) + d(f_N(x_{n+1}), f_N(x_n)) +$$

$$+\, d(f_N(x_n), f(x_n)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

bulunur. O halde f, ward süreklidir. O halde f fonksiyonu $W[E]$ nin elemanı olur. Yani $\overline{W[E]} \subset$ W[E] elde edilir. $W[E] = \overline{W[E]}$ bulunmuş olur. O halde $W[E]$ kümesi kapalıdır.

Teorem 4.3.13. Bir X metrik uzayının bir ward kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı ve bir Y metrik uzayı içine ward sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.
İspat. $E \subseteq X$ ward kompakt bir küme ve f, E den Y metrik uzayı içine ward sürekli bir fonksiyon olsun. f in düzgün sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n, y_n) < 1/n$$

ve

$$d_Y\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ ve elemanları E kümesinde olan (x_n) , (y_n) dizileri vardır. E ward kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir $\left(x_{n_k}\right)$ quasi Cauchy alt dizisi vardır. Diğer taraftan $\left(y_{n_k}\right)$ dizisinin bir $\left(y_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy alt dizisi vardır. Buradan

$$d\left(x_{n_{k_j}},x_{n_{k_{j+1}}}\right)\leq d\left(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}}\right)+d\left(y_{n_{k_j}},y_{n_{k_{j+1}}}\right)+d\left(y_{n_{k_{j+1}}},x_{n_{k_{j+1}}}\right)$$

sağlandığından ve $\left(y_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy olduğundan $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ quasi Cauchy bulunur. Bu durumda $z_1=x_{n_{k_1}}$, $z_2=y_{n_{k_1}}$, $z_3=x_{n_{k_2}}$, $z_4=y_{n_{k_2}}$, $z_5=x_{n_{k_3}}$, $z_6=y_{n_{k_3}}$, … alınarak tanımlanan (z_j) dizisi quasi Cauchy iken $\left(f(z_j)\right)$ dizisi quasi Cauchy değildir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.14. X bir metrik uzay ve (f_n) , X in herhangi bir E alt kümesi üzerinde tanımlı ward sürekli fonksiyonların dizisi olmak üzere, (f_n) dizisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, f fonksiyonu E üzerinde ward süreklidir.

İspat. $\boldsymbol{x}=(x_n)$, $E\subseteq X$ üzerinde bir quasi Cauchy dizisi ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda $n\geq N$ olduğunda E nin her x elemanı için $d\big(f_n(x),f(x)\big)<{}^{\varepsilon}/_{3}$ olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ vardır. f_N ward sürekli olduğundan, $n\geq N_1$ için $d\big(f_N(x_{n+1}),f_N(x_n)\big)<{}^{\varepsilon}/_{3}$ gerçekleyen, N den büyük ve ε a bağlı bir $N_1\in\mathbb{N}$ vardır. Buradan $n\geq N_1$ için;

$$d\big(f(x_{n+1}),f(x_n)\big)\leq d\big(f(x_{n+1}),f_N(x_{n+1})\big)+d\big(f_N(x_{n+1}),f_N(x_n)\big)+$$

$$+d\big(f_N(x_n),f(x_n)\big)<{}^{\varepsilon}/_{3}+{}^{\varepsilon}/_{3}+{}^{\varepsilon}/_{3}=\varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise f fonksiyonunun E üzerinde ward sürekli olduğunu gösterir.

Lemma 4.3.15. X bir metrik uzay ve (ξ_n,μ_n) , X in bağlantılı bir E alt kümesinde $\lim_{n\to\infty} d\,(\xi_n,\mu_n)=0$ gerçekleyen sıralı çiftlerin bir dizisi olsun. Bu durumda herhangi bir pozitif i tamsayısı için $(\xi_i,\mu_i)=\left(x_{j-1},x_j\right)$ sağlayan pozitif j tamsayısının bulunduğu bir (x_n) quasi Cauchy dizisi vardır [11, 19].

İspat. E bağlantılı olduğundan her bir k pozitif tamsayısı için $z_0^k=\mu_k$, $z_{n_k}^k=\xi_{k+1}$ ve $1\leq i\leq n_k$ için $d\big(z_i^k,z_{i-1}^k\big)<\frac{1}{k}$ olacak şekilde $z_0^k,z_1^k,\dots,z_{n_k}^k$ seçebiliriz. Şimdi

$$\left(\xi_1,\mu_1,z_1^1,\dots,z_{n_1-1}^1,\xi_2,\mu_2,z_1^2,\dots,z_{n_2-1}^2,\xi_3,\mu_3,\dots,\xi_k,\mu_k,z_1^k,\dots,z_{n_k-1}^k,\xi_{k+1},\mu_{k+1},\dots\right)$$

dizisini oluşturalım. Bu diziyi (x_n) ile gösterirsek herhangi bir i pozitif tamsayısı için $(\xi_i, \mu_i) = (x_{j-1}, x_j)$ olacak şekilde bir j pozitif tamsayısı elde ederiz ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.16. X bir metrik uzay olmak üzere, X in bağlantılı bir alt kümesi üzerinden bir Y metrik uzayına tanımlı bir fonksiyonun düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul ward sürekli olmasıdır.

İspat. E, X in bağlantılı bir alt kümesi ve f , E üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f in E üzerinde düzgün sürekli olduğunu kabul edelim ve ward sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisini ve $\varepsilon > 0$ alalım.
f , E üzerinde düzgün sürekli olduğundan $x, y \in E$ için $d(x, y) < \delta$ olduğunda $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde bu ε a bağlı bir $\delta > 0$ vardır. Bu $\delta > 0$ için $n > N$ olduğunda $\Delta x_n < \delta$ olacak şekilde $N = N(\delta) = N_1(\varepsilon)$ vardır. Buradan $n > N$ için $\Delta f(x_n) < \varepsilon$ olur. O halde $(f(x_n))$ quasi Cauchy dizisidir yani f fonksiyonu ward sürekli bulunmuş olur.

Şimdi f in düzgün sürekli olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $\forall\delta > 0$ için $d(x, y) < \delta$ ve $d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in E$ vardır. Dolayısıyla $\forall N \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ ve $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ yazabiliriz. Lemma 4.3.15'den dolayı, $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = 0$ ve $d_Y\left(f(x_{n_{k+1}}), f(x_{n_k})\right) \geq \varepsilon$ olacak şekilde (x_{n_k}) alt dizisi oluşturulabilir. $\left(f(x_{n_k})\right)$ quasi Cauchy olmadığından ıspat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5. SONUÇ

Bu çalışmada quasi Cauchy dizileri hem reel uzayda hem de metrik uzaylarda ele alınmış ve şimdiye kadar yapılmış olan araştırmalar incelenmekle birlikte daha önceki araştırmalarda yer almayan bazı teorem ve sonuçlar da sunulmuştur. Reel uzayda ward kompaktlığın sınırlılığa eşdeğer olduğu ve metrik uzaylarda ise ward kompaktlığın total sınırlılığa denk olduğu ispatları ile birlikte verilmiştir. Sınırlı küme üzerinde ve aralık üzerinde ward sürekliliğin reel fonksiyonlar için düzgün sürekliliğe eşdeğer olduğu; total sınırlı küme üzerinde ve bağlantılı küme üzerinde ward sürekliliğin metrik uzaylarda düzgün sürekliliğe denk olduğu ayrıntılı olarak gösterilmiş ve sonuçları incelenmiştir.

KAYNAKÇA

[1] H. Kizmaz, "On certain sequence spaces," *Canadian Mathematical Bulletin,* vol. 24, pp. 169-176, 1981.

[2] H. Cakalli, "Forward continuity," *Journal of Computational Analysis and Applications*, vol. 13, pp. 225-230, 2011.

[3] N. L. Braha and H. Cakalli, "A New Type Continuity For Real Functions," *Journal of Mathematical Analysis,* vol. 7, 2016.

[4] İ. Çanak and M. Dik, "New types of continuities," in *Abstract and Applied Analysis,* 2010.

[5] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*: Oxford University Press, 2009.

[6] E. Bulut, *Topoloji* Ankara: Güven Yayınevi, 1983.

[7] I. J. Maddox, *Elements of functional analysis*: CUP Archive, 1988.

[8] Y. Soykan, *Metrik uzaylar ve topolojisi* Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.

[9] Ş. Yüksel, *Genel topoloji* Eğitim Akademi Yayınları, 2011.

[10] P. K. Jain and K. Ahmad, *Metric spaces*: Alpha Science Int'l Ltd., 2004.

[11] D. Burton and J. Coleman, "Quasi-cauchy sequences," *The American Mathematical Monthly,* vol. 117, pp. 328-333, 2010.

[12] P. N. Natarajan, *Classical summability theory*: Springer, 2017.

[13] H. Çakalli, "Sequential definitions of compactness," *Applied Mathematics Letters,* vol. 21, pp. 594-598, 2008.

[14] S. Lin and L. Liu, "G-methods, G-sequential spaces and G-continuity in topological spaces," *Topology and its Applications,* vol. 212, pp. 29-48, 2016.

[15] J. Connor and K.-G. Grosse-Erdmann, "Sequential definitions of continuity for real functions," *The Rocky Mountain Journal of Mathematics,* pp. 93-121, 2003.

[16] H. Çakallı, "On G-continuity," *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 61, pp. 313-318, 2011.

[17] Ö. Çakar, *Fonksiyonel Analize Giriş I* Ankara: A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, 2007.

[18] H. Çakallı, "δ-quasi-Cauchy sequences," *Mathematical and Computer Modelling,* vol. 53, pp. 397-401, 2011.

[19] H. n. Çakallı, "Statistical quasi-Cauchy sequences," *Mathematical and Computer Modelling,* vol. 54, pp. 1620-1624, 2011.