RHO-İSTATİSTİKSEL QUASI CAUCHY DİZİLERİ

Seray Karagöz
171409101

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Çakallı

İstanbul
T.C. Maltepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Aralık, 2019

RHO İSTATİSTİKSEL QUASİ CAUCHY DİZİLERİ

Seray Karagöz
171409101
Orcid: 0000-0002-4659-8218

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Çakallı

İstanbul
T.C. Maltepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Aralık, 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

SERAY KARAGÖZ'ın "Rho İstatistiksel Quasi Cauchy Dizileri" başlıklı tezi 20.12.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Maltepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans/Doktora tezi oy birliğiyle/~~oy çokluğuy~~la, başarılı/~~başarısız~~ olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı. Adı ve Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI	....
Üye	Doç.Dr. Ayşe SÖNMEZ	....
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Sibel ÇEVİK ERSAN	....

Prof. Dr. İlter BÜYÜKDIĞAN
Enstitü Müdürü

	ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI	Doküman No	FR-178
maltepe üniversitesi		İlk Yayın Tarihi	01.03.2018
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa	1/1

Revizyon Takip Tablosu

REVİZYON NO	TARİH	AÇIKLAMA
00	01.03.2018	İlk yayın.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

20/12/2019

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarından bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; çalışmanın Maltepe Üniversitesinde kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" ile tarandığını ve öngörülen standartları karşıladığını beyan ederim.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Seray Karagöz

Hazırlayan	Kalite Koordinatörü	Kurumsal Yetkili
İlgili Birim	Dr. Öğr. Üyesi Şafak GÜNDÜZ	Prof. Dr. Belma AKŞİT

(Dokuman No: FR-178; Yayın Tarihi: 01.03.2018; Revizyon Tarihi: ; Revizyon No:00)

seray karagöz 24.09.2019

ORIJINALLIK RAPORU

%11	%5	%3	%8
BENZERLIK ENDEKSI	İNTERNET KAYNAKLARI	YAYINLAR	ÖĞRENCI ÖDEVLERI

BIRINCIL KAYNAKLAR

1	Submitted to Mersin Ãniversitesi Öğrenci Ödevi	%2
2	akademik.maltepe.edu.tr İnternet Kaynağı	%2
3	acikerisim.aku.edu.tr İnternet Kaynağı	%1
4	Submitted to Konya Necmettin Erbakan University Öğrenci Ödevi	%1
5	Submitted to Gaziantep Aniversitesi Öğrenci Ödevi	<%1
6	Lindner, M.. "Finite sections of band operators with slowly oscillating coefficients", Linear Algebra and Its Applications, 20041001 Yayın	<%1
7	Submitted to Middle East Technical University Öğrenci Ödevi	<%1
8	Submitted to The University of Manchester	

Prof. Dr. Hüseyin Çakallı

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Hüseyin Çakallı ‘ya, ihtiyaç duyduğum her an bilgisini benimle paylaşan Dr. Öğretim Üyesi Sibel Ersan ‘a, özenli bir şekilde yol gösteren Doç. Dr. Ayşe Sönmez ‘e teşekkürlerimi borç bilirim.

Seray Karagöz

Aralık, 2019

ÖZ

RHO İSTATİSTİKSEL QUASİ CAUCHY DİZİLERİ

Seray Karagöz
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Çakallı
Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2019

Her n pozitif tamsayısı için $\Delta\rho_n = \rho_{n+1} - \rho_n$ olmak üzere terimleri reel sayılar kümesinden alınan (ρ_n) pozitif değerli, azalmayan, $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$, $\Delta\rho_n = O(1)$ özelliğini sağlayan bir dizi ve

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n} < \infty$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |\Delta\, a_k| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa (a_n) dizisine ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi denir. A ⊆ E ve E ⊆ ℝ olmak üzere terimleri A kümesinden alınan her dizinin bir ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi var ise A kümesine ρ –istatistiksel ward kompakt küme denir. Reel sayılar kümesinin bir alt kümesinden reel sayılar kümesinin içine tanımlanan bir fonksiyon ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizilerini yine bir ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizilerine çeviriyor ise bu fonksiyona ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyon denir.

Yani reel sayıların alt kümelerinden herhangi bir tanesi W olsun ve W kümesinden reel sayıların içine tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer bu f fonksiyonu W kümesinden alınan her (a_n) ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisini $(f(a_n))$ ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisine dönüştürüyor ise f fonksiyonuna ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyon denir. Sınırlı bir küme üzerinde tanımlı düzgün sürekli fonksiyonların kümesi ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyonların kümesini kapsar.

Anahtar Sözcükler: ρ-istatistiksel yakınsak diziler, ρ-istatistiksel quasi-Cauchy dizileri, ρ-istatistiksel ward kompaklık, sınırlılık, düzgün süreklilik.

ABSTRACT

RHO STATİSTİCAL QUASI CAUCHY SEQUENCES

Seray Karagöz
Master Thesis
Department of Mathematics
Mathematics Programme
Advisor: Prof. Dr. Hüseyin Çakallı
Maltepe University, Graduate School of Science and Engineerin, 2019

A sequence (a_k) of points in $\mathbb{R}$, the set of real numbers, is called ρ –statistically quasi Cauchy if

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n: |\Delta\, a_k| \geq \varepsilon\}| = 0$$

for each $\varepsilon > 0$, where $\rho = (\rho_n)$ is a non – decreasing sequence of positive real numbers tending to ∞ such that, $\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n} < \infty,\ \Delta\rho_n = O(1)$ and $\Delta\, a_k = a_{k+1} - a_k$ for each positive integer k. A subset A of $\mathbb{R}$ is called ρ -statistically ward compact if any sequence of points in A has a ρ -statistically quasi- Cauchy subsequence. A real valued function defined on a subset of $\mathbb{R}$ is called ρ –statistically ward continuous if it preserves ρ –statistically quasi Cauchy sequences where a sequence (a_k) is defined to be ρ –statistically quasi Cauchy if the sequence (Δa_k) is ρ –statistically convergent to 0. We obtain results related to ρ –statistically ward continuty, ρ – statiscal ward compactness, ward continuty ,continuty, and uniform continuty. It turns out that the set of uniformly continuous functions includes the set of ρ –statistically ward continuous functions on a bounded subset of $\mathbb{R}$.

Keywords ρ-statistical convergent sequences, ρ-statistical quasi Cauchy sequences, ρ-statistical ward compactness, boundedness, statistical ward continuity, uniform continuity

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi, {1,2,…,n,…} (pozitif tamsayılar kümesi)

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

c : Reel terimli yakınsak dizilerin kümesi

s : Reel terimli diziler uzayı

s(A) : Terimleri A kümesinde olan diziler kümesi

|A| : $A \subseteq \mathbb{N}$ için A kümesinin kardinal sayısı

Δa_k : $a_{k+1} - a_k$

ÖZGEÇMİŞ
Seray Karagöz

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Derece	*Yıl*	*Üniversite, Enstitü, Anabilim/Anasanat Dalı*
Y.Ls.	2019	Maltepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Ls.	2013	Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı
Lise	2009	Hüsnü M.Özyeğin Lisesi

İş/İstihdam

Yıl	*Görev*
2013 -09	Matematik Öğretmeni Sancaktepe Belediyesi-Bilgi Evleri
2015- 02	Matematik Öğretmeni M.e.b
2016-12	Matematik Öğretmeni Sınav Eğitim Kurumları
2017-09	Matematik Öğretmeni Birikim Okulları

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı	: İstanbul, 1990	Cinsiyet: K
Yabancı diller	: İngilizce (orta)	
GSM / e-posta	: 05466809209 / seraykaragz@outlook.com	

GİRİŞ

Dizilerin yakınsaklığı kavramının M.Ö 490 – 430 yıllarında yaşamış olan Zeno tarafından ortaya atılan kaplumbağa ile Aschilles paradoksunun ortaya atılmasına kadar eskiye dayandığı düşünülmektedir ([1]). Arşimet'in klasik olarak diziler ve serileri kullanarak hacim hesaplarını hatta kendisinden iki bin yıl sonra Newton, Leibniz zamanlarında gelişmeye başlayan türev ve integral hesaplarını serilerle yaptığı bilinmektedir.

Normal anlamda yakınsak olmayıp da ancak pek çok bakımdan önem taşıyan dizilerin düşünülmesi terimleri ardışık olarak 0 ve 1 değerlerini alan yani tek indislerde 0 çift indislerde 1 değerlerini alan dizinin aritmetik ortalama dizisinin ½ ye yakınsadığının dikkate alınması ile ilk olarak Guiddo Grandi tarafından 1713 yılında olmuştur.

Yakınsak olmayıp da incelenmesi pek çok bakımdan önem taşıyan daha sonraları tanımı verilen diziler istatistiksel yakınsak dizilerdir. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır ancak istatistiksel yakınsak olup da yakınsak olmayan diziler vardır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak " Almost Convergence " olarak A.S Zygmund tarafından verilmiştir ([2]). 1952 yılında S. Fast ([12]) tarafından formal olarak verilmiş ve I.J. Schoonberg tarafından da tekrar tanım verilmiştir ([3]) ve bunlardan bağımsız olarak da R.C. Buch tarafından tanım verilmiştir [4]. Quasi istatistiksel yakınsaklık ilk olarak İ. Sakaoğlu Özgüç, Tuğba Yurdakım ([5]) tarafından ve ve rho istatistiksel yakınsaklık tanımı da ilk olarak Çakallı ([6]) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada quasi Cauchy dizileri, rho-istatistiksel yakınsak diziler, rho-istatistik sel quasi Cauchy dizileri, rho –istatistiksel ward kompaktlık ve rho-istatistiksel ward süreklilik, β ıncı dereceden rho-istatistiksel yakınsak diziler, β ıncı dereceden rho-istatistiksel quasi Cauchy dizileri, β ıncı dereceden rho –istatistiksel ward kompaktlık ve β ıncı dereceden rho-istatistiksel ward süreklilik kavramları incelenmiştir.

BÖLÜM 1. GENEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 1.1. Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, değer kümesi ise $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler $\{x_n\}$ veya (x_n) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2. Bir (a_n) dizisi verilmiş olsun. (k_n) artan bir pozitif tamsayı dizisi olmak üzere, (a_{k_n}) dizisine (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 1.3. K pozitif sabit sayısı ,her n pozitif tamsayısı için $|a_n| \leq K$ gerçeklenecek şekilde bulunabiliyor ise (a_n) dizisine sınırlıdır denir.

Buna göre bir (a_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $sup_n\, |a_n| = K$ olacak biçimde negatif olmayan bir K sabit sayısının var olmasıdır. Bir başka deyişle (a_n) dizisinin sınırlı olması demek $\{a_n\text{: n} \in \mathbb{N}\}$ değerler kümesinin sınırlı olması demektir. Tamlık aksiyomu nedeniyle (a_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $inf_n\, a_n = \beta$ ve $sup_n a_n = \alpha$ olacak biçimde α ve β sabit sayılarının var olmasıdır.

Tanım 1.4. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir n_0 sayısı varsa $n \to \infty$ için (x_n) dizisinin limiti x dir denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ yazılır. Eğer

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ise (x_n) dizisi x reel sayısına yakınsıyor denir ve $n\to\infty$ iken $x_n \to x$ şeklinde de gösterilir. Bir reel sayıya yakınsayan diziye *yakınsak dizi*, aksi halde *ıraksak dizi* denir.

Tanım 1.5. (Cauchy Dizisi) : Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m,n > N$ için

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Bu tanıma göre her Cauchy dizisinin sınırlı olduğu görülmektedir. Reel terimli bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır. Her n doğal sayısı için f_n , IR nin E alt kümesinden IR içine bir fonksiyon olsun.Bu durumda (f_n) fonksiyonlarının oluşturduğu bir diziye bir fonksiyon dizisi denir.

Tanım 1.6. (Fonksiyon Dizilerinde Noktasal Yakınsaklık)

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olan E kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların dizisi (f_n) olsun. Herhangi bir $x \in E$ verildiğinde her $\varepsilon>0$ için $n \geq n_0$ iken

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisine f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Her $x \in E$ için $(f_n(x))$ sayı dizisinin yakınsak olduğunu kabul edelim.

Bu takdirde, her x ∈ için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayabiliriz. Bu durumda f fonksiyonuna (f_n) fonksiyon dizisinin noktasal limiti veya noktasal limit fonksiyonu adı verilir.

Örnek 1.1. Her x ∈ ℝ için f_n(x) = (x + $\frac{1}{n^3}$) fonksiyon dizisini incelersek

$\lim_{n\to\infty}(x + \frac{1}{n^3})$ = x olarak bulunur. Burada $f(x) = x$ olmak üzere (f_n) =$(x + \frac{1}{n^3})$ fonksiyon dizisinin $f(x) = x$ fonksiyonuna noktasal yakınsadığı görülür.

Tanım 1.7. (Fonksiyonlarda Düzgün Yakınsaklık) : Her $\varepsilon>0$ için n≥ n_0 olduğunda her x ∈ E için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa (f_n) dizisine E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Örnek 1.2. Her n ∈ ℕ ve her x ∈]0,1[için $f_n(x) = (1-x)^n$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi]0,1[üzerinde noktasal yakınsaktır fakat düzgün yakınsak değildir.

Tanım 1.8. (Vektör Uzayı) : X boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $X \times X \to X$ olmak üzere $(x, y) \to x + y$ ve $F \times X \to X$ olmak üzere $(\alpha, x) \to \alpha . x$ verilsin.

(V1) ∀ x, y ∈ X için x + y ∈ X

(V2) ∀ x, y ∈ X için x + y = y + x

(V3) ∀ x, y,z ∈ X için x + (y + z) = (x + y) + z

(V4) ∀ x ∈ X için öyle bir **0** ∈ X vektörü vardır ki x + 0 =x= 0 + x olur.

(V5) ∀ x ∈ X için bir tek y ∈ X vektörü vardır öyle ki x + y = 0 olur.

(V6) ∀ x ∈ X ve α ∈ F skaler değeri için αx ∈ X vektörü vardır.

Eğer $\alpha = 1$ ise x.1 = 1.x = x olur.

(V7) ∀ x, y ∈ X ve ∀ α, β ∈ F skaler değerleri için α(βx) = (αβ)x

(V8) ∀ x, y ∈ X ve ∀ α, β ∈ F skaler değerleri için $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ve

$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

özellikleri sağlanıyor ise X kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

Teorem 1.1. Reel terimli tüm dizilerin oluşturduğu küme bir vektör uzaydır.

İspat. Reel sayıların toplama ve skalerle çarpma işleminin temel özellikleri yardımı ile ispat kolayca gösterilebilir.

Tanım 1.8. (Diziler için Sıkıştırma Teoremi) Kabul edelim ki $n \geq N_0$ iken

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

olacak biçimde bir N_0 sayısı mevcuttur. Eğer;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad ve \quad \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

dir.

BÖLÜM 2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER VE İSTATİSTİKSEL CAUCHY DİZİLERİ

2.1.İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.1.1. ([11,12]) K ⊆ ℕ kümesini alalım.

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir.

Tanım 2.1.2. ([10, 11 ,15]) (x_k) reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her ε > 0 için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$ olacak biçimde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Buna göre

$$K_\varepsilon = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere (x_k) dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her K_ε pozitif sayısı için δ(K_ε)=0 olmasıdır. Bu durumda S-lim x = L veya $x_k \to L(S)$ yazarız. Eğer L = 0 ise (x_k) dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir.

Örnek 2.1.1. ([15]) $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi ve $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın**.** $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi L = 0 noktasına istatistiksel yakınsaktır.

Çünkü $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisinin terimleri yazılırsa

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \ldots) = (\frac{1}{2}, 0,0, \frac{1}{2}, 0,0,0,0, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$$

halini alır.Buradan

$|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \qquad (*)$$

olur. Öte yandan $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ dır. Ayrıca

$$0 \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}|$$

gerçeklenir. $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \qquad (**)$$

halini alır. Buradan da; (*) ve (**) eşitsizliklerini birleştirecek olursak

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

bulunur. Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. Yani $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak olur.

Teorem 2.1.1.([11]) Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

İspat. (x_k) dizisi yakınsak dizi olmak üzere $\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır.

Dolayısıyla $k \geq k_0$ olduğunda hiçbir zaman $|x_k - L| \geq \varepsilon$ olamaz. Buradan

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n} k_0$$

elde edilir. $n \to \infty$ için

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 \;\ldots$ (*)

ifadesi elde edilir. Burada $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$ dır. Ayrıca

$$0 \leq |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılırsa

$$0 \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

ifadesi elde edilir.

Buradan

$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \ \ldots$ (**)

elde edilir. (*) ve (**) eşitsizliklerinden

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0$$

bulunur. Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur.

$\lim_{k\to\infty} x_k = L$ iken S -$\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olduğu açıkça görülür. Bu durum her yakınsak dizi için geçerlidir. O halde yakınsak her dizinin aynı zamanda istatistiksel yakınsak dizi olduğu görülür.

Teorem 2.1.2.([11 , 15]) $S - \lim\ \boldsymbol{x} = L_1$, $S - \lim\ \boldsymbol{y} = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $S - \lim\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L_1 + L_2$

ii) $S - \lim\,(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha L_1$

dir.

İspat. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ ve $\boldsymbol{y} = (y_k)$ dizileri olmak üzere

i) $S - \lim\ \boldsymbol{x} = L_1$ olsun. Bu durumda

$$A = \{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \varepsilon/2\ \}$$

için $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall\ k > k_1$ ve $\forall\ k \in \mathbb{N} \setminus A$ için

$$|x_k - L_1| < \varepsilon/2$$

olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $S - limy = L_2$ olsun. Bu durumda

$$B = \{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \varepsilon/2\ \}$$

$B \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(B) = 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için $\forall$ k $>$ k_2 ve $\forall\ k \in \mathbb{N} \setminus B$ için $|y_k - L| < \varepsilon/2$ olacak biçimde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.$k_0 = max\{k_1, k_2\}$ olsun. $\forall\ k \in \mathbb{N}\setminus(A\cap B)$ ve $\forall\ k > k_0$ için

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bulunur. Buradan $\forall\ \varepsilon > 0$ için $k \in \mathbb{N}\setminus(A\cap B)$ $k > k_0$ olduğunda

$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ **… (*)**

olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır.

$$|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + |\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{n}|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

bulunur. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

bulunur. δ(A) = 0 ve δ(B) = 0 olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

dir. Ayrıca

$$0 \leq |\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

olduğundan $n > 0$ için

$$0/n \leq 1/n[|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

elde edilir.Buradan

$$0 \leq 1/n[|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

olur. $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} 1/n[|\{k \leq n : |(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

bulunur. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ ve $\boldsymbol{y} = (y_k)$ yazıldığında

$$\lim_{n\to\infty} 1/n[|\{k \leq n : |(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|] = 0$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $S - \lim\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L_1 + L_2$ bulunur.

ii) Eğer α = 0 ise

S -lim $\alpha.x_k = \alpha.S$-lim x_k = S -lim $0.x_k$ = S -lim 0 = 0 olup, ispat aşikârdır.

Şimdi S -lim $\mathbf{x}$ $= L$ yazalım ve α $\neq$ 0 olsun. Bu takdirde, A ⊆ ℕ için δ(A) = 0 olduğunda, ε > 0 verildiğinde her k > k_0 ve her k ∈ (ℕ \ A) için $|x_k - L| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$ olacak biçimde $k_0 \in$ ℕ vardır. Buradan da her k ∈ (ℕ \ A) ve her k ≥ k_0 için

$$|\alpha x_k - \alpha . L| \ = |\alpha| \ . \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

olup, her ε > 0 için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ | \{k \ \leq n : |\alpha x_k - \alpha . L| \ \geq \ \varepsilon \} | = 0$$

elde edilir. Yani *S -lim* ($\alpha . x_k$) = $\alpha . L$ dir.

Teorem 2.1.3. İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi tüm dizi uzayının bir alt vektör uzayıdır.

İspat. İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi W diyelim. Tüm dizilerin kümesini ise s ile gösterelim. Tüm dizilerin uzayı vektör uzayı olduğundan s vektör uzayıdır. Burada $W \neq \emptyset$ dir. İstatistik yakınsak diziler kümesi tüm dizilerin alt kümesidir.

$\forall \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$S - \lim(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = S - \lim \boldsymbol{x} + S - \lim \boldsymbol{y} \in W$

$S - \lim(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha[S - \lim \boldsymbol{x}] \in W$

olduğundan, istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi W, tüm dizilerin kümesi s nin alt vektör uzayıdır.

Sonuç 2.1.4. Yakınsak diziler kümesi istatistiksel yakınsak diziler uzayının bir alt vektör uzayıdır.

İspat. Teorem 2.1.3 ispatına benzer olarak kolayca yapılabilir.

2.2. İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu bölümde bir $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi sıfır yoğunluğa sahip bir kümenin dışındaki her k için P özelliğine sahip ise $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi hemen hemen her k için P özelliğine sahiptir diyeceğiz ve bunu “h.h.k” ile kısaltacağız.

Tanım 2.2.1. ([11,15]) Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak biçimde ε sayısına bağlı bir N doğal sayısı var ise yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n: |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak biçimde $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise (x_k) dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bir (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir. Bir (x_k) dizisi istatistiksel Cauchy dizisi verildiğinde hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir (y_k) dizisi vardır. Ayrıca h.h.k için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir $\boldsymbol{y} = (y_k)$ dizisi var ise $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Lemma 2.2.1. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. $S - \lim\boldsymbol{x} = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda h.h.k için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Eğer N , $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçilirse, h.h.k için

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| < +|x_k - L| + |x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n: |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

Lemma 2.2.2. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisi ise hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir (y_k) dizisi vardır.

İspat. $I = [x_N - 1, x_N + 1]$ aralığı h.h.k için $\boldsymbol{x}$ terimini içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. Yine $I' = [x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2}]$ aralığı h.h.k için x_k terimini içerecek şekilde bir M sayısı seçelim. Şimdi iddia ediyoruz ki $I_1 = I \cap I'$ aralığı h.h.k için x_k terimini içerir.

Şimdi bunu gösterelim

$\{k \le n: x_k \notin I \cap I'\} = \{k \le n: x_k \notin I\} \cup \{k \le n: x_k \notin I'\}$

olduğundan

$|\{k \le n: x_k \notin I \cap I'\}| = |\{k \le n: x_k \notin I\} \cup \{k \le n: x_k \notin I'\}|$

$$\le |\{k \le n: x_k \notin I\}| + |\{k \le n: x_k \notin I'\}|$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k\notin I\cap I'\}|\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k\notin I\}|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k\notin I'\}|=0$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k\notin I\cap I'\}|=0$$

dır. Bu nedenle I_1, h.h.k için x_k terimini içeren ve boyu $|I_1|=\left|x_M+\frac{1}{2}-x_M+\frac{1}{2}\right|=1$ olan kapalı aralıktır. Benzer şekilde N(2) seçelim. Bu durumda h.h.k için $I''=[x_{N(2)}-\frac{1}{4},x_{N(2)}+\frac{1}{4}]$ aralığı x_k terimlerini içerir ve $I_2=I_1\cap I''$ h.h.k için x_k terimini içeren ve boyu $|I_2|=\left|x_{N(2)}+\frac{1}{4}-x_{N(2)}+\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}$ olan kapalı aralıktır.

Bu şekilde devam edersek her $m\in\mathbb{N}$ için kapalı aralıkların $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini buluruz. Bu durumda I_m , h.h.k x_k terimini içeren ve boyu

$$|I_m|=\left|x_{N(m)}+\frac{1}{2^m}-x_{N(m)}+\frac{1}{2^m}\right|=2.\frac{1}{2^m}=2^{1-m}$$

olan kapalı aralıktır. İç içe aralıklar teoreminden $\cap_{m=1}^{\infty} I_m=\{\lambda\}$ özelliğini sağlayan bir λ sayısı vardır. H.h.k için $x_k\in I_m$ olduğundan $n>T_m$ için

$$\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k\notin I_m\}|<\frac{1}{m} \qquad (1)$$

olacak biçimde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini bulabiliriz. Şimdi $k>T_1$ ve $T_m<k<T_{m+1}$ ise $x_k\notin I_m$ olacak biçimde x_k olacak biçimde x_k nın bütün terimlerinden oluşan **x** in bir **z** alt dizisini tanımlayalım.

Bundan sonra yine

$$y_k=\begin{cases}\lambda\ , & eğer\ \ x_k\,,\mathbf{z}\ nin\ bir\ \ terimi\ ise\\ x_k\ , & diğer\ durumda\end{cases}$$

şeklinde bir $\mathbf{y}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $\varepsilon>\frac{1}{m}>0$ ve $k>T_m$ ise x_k ya z nin bir terimidir ki bu durumda $y_k=\lambda$ ya da $y_k=x_k\in I_m$ ve $|y_k-\lambda|$ nin boyu

$|y_k-\lambda|\le I_m\le 2^{1-m}$ dir. O halde $m\to\infty$ için $2^{1-m}\to 0$ olacağından $y_k\to\lambda$ elde edilir.

Şimdi h.h.k için $x_k=y_k$ olduğunu olduğunu gösterelim.

$T_m<n<T_{m+1}$ ise bu durumda

$$k\le n: y_k\ne x_k \subset k\le n: x_k\notin I_m$$

dır.

(1) den,

$$\frac{1}{n}|k \le n: y_k \ne x_k| \le \frac{1}{n}|k \le n: y_k \notin I_m| < \frac{1}{m}$$

elde edilir. $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n: y_k \ne x_k\}| = 0$$

elde edilir. O halde $y_k = x_k$ dır.

Lemma 2.2.3. Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir (y_k) dizisi var ise $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.

İspat. h.h.k için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir y dizisi mevcut olsun. $y_k \to L$ olduğundan , $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\} \subset \{k \le n : x_k \ne y_k\} \cup \{k \le n: |y_k - L| > \varepsilon\}$$

dir. Buradan

$$|\{k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon\}| \le |\{k \le n : x_k \ne y_k\}| + |\{k \le n: |y_k - L| > \varepsilon\}|$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{n}|\{k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon\}| \le \frac{1}{n}|\{k \le n : x_k \ne y_k\}| + \frac{1}{n}|\{k \le n: |y_k - L| > \varepsilon\}|$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : x_k \ne y_k\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n: |y_k - L| > \varepsilon\}|$$

$$n\to\infty$$

bulunur. Buradan da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0$ ifadesi gerçeklenir

Teorem 2.2.1. $\boldsymbol{x} = (x_k)$dizisi istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsak dizi olmasıdır.

İspat : Lemma 2.2.1,Lemma 2.2.2 ve Lemma 2.2.3 ten açıkça görülür.

BÖLÜM 3. REEL SAYILAR KÜMESİNDE QUASİ CAUCHY DİZİLERİ

3.1.Reel Sayılar Kümesinde Quasi Cauchy Dizileri

Tanım 3.1.1. ([21, 22]) (a_n) bir reel dizi olsun. Eğer bu (a_n) dizisinin ardışık terimleri farklarının limiti 0 oluyor ise yani;

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$$

ise (a_n) dizisine quasi Cauchy dizisi denir.

Örnek 3.1.1. $(a_n)=(\frac{2n}{3n+1})$ dizisi quasi Cauchy dizisidir.

Çünkü

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{3(n+1)+1}-\frac{2n}{3n+1}=0$$

olduğundan $(a_n)=(\frac{2n}{3n+1})$ dizisi quasi Cauchy dizisidir.

Teorem 3.1.1. Yakınsak her dizi quasi Cauchy dizisidir. Bu teoremin karşıtının doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde görülmektedir.

Örnek 3.1.2. $(a_n)=(\sqrt{2n+1})$ dizisi verilsin.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2(n+1)+1}-\sqrt{2n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2(n+1)+1}+\sqrt{2n+1}}=0$$

bulunur. Buradan $(a_n)=\left(\sqrt{2n+1}\right)$ dizisinin quasi Cauchy dizisi olduğu görülür.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}=\infty$$

olduğundan $(a_n)=\left(\sqrt{2n+1}\right)$ dizisi ıraksaktır.

Örnek 3.1.3. $(a_n)=(\sqrt[3]{n+1})$ dizisi verilsin.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1+1}-\sqrt[3]{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1})$$

bulunur.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-n-1}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}} = 0$$

bulunur.Yani $(a_n) = (\sqrt[3]{n+1})$ dizisi bir quasi Cauchy dizisidir.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}\right) = \infty$$

bulunduğundan $(a_n) = (\sqrt[3]{n+1})$ dizisi ıraksaktır.

Teorem 3.1.2. Quasi Cauchy dizileri için aşağıdakiler sağlanır:

i) Bir quasi Cauchy dizisinin reel bir sayı ile çarpımı da quasi Cauchy dizisidir,

ii) İki quasi Cauchy dizisinin toplamı da quasi Cauchy dizisidir.

İspat.

i) (a_n) herhangi bir quasi Cauchy dizisi ve $\beta \epsilon \mathbb{R}$ olsun. (a_n) herhangi bir quasi Cauchy dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$$

dır. $\beta \epsilon\mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty}(\beta a_{n+1}-\beta a_n) = \lim_{n\to\infty}\beta(a_{n+1}-a_n) = \beta\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$$

olduğundan $\beta(a_n)$ dizisi de quasi Cauchy dizisidir. Her quasi Cauchy dizisi için bu durum geçerli olacağından quasi Cauchy dizilerinin herhangi bir reel bir sayı ile çarpımı da quasi Cauchy dizisidir.

ii) (a_n) ve (b_n) herhangi quasi Cauchy dizileri olsun. O halde

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) = 0$ dır. $(c_n) = (a_n) + (b_n)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n) = \lim_{n\to\infty}[(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+b_{n+1}-a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)+\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) = 0$$

bulunur. Buradan iki quasi Cauchy dizisinin toplamı da quasi Cauchy dizisi olduğu görülür.

Sonuç 3.1.3. Reel terimli quasi Cauchy dizilerinin oluşturduğu küme reel terimli tüm dizilerin oluşturduğu vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Teorem 3.1.4. (a_n) sınırlı bir dizi olsun. Buna göre

$$(b_n) = (\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n})$$

ile verilen (b_n) dizisi quasi Cauchy dizisidir.

İspat.

$$(b_{n+1}) = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right) \text{ve} (b_n) = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

terimleri için

$$(b_{n+1}) - (b_n) = (\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n})$$

$$= (\frac{n(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (n+1)(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)}{n(n+1)})$$

bulunur. Yukarıdaki ifade

$$(b_{n+1}) - (b_n) = (\frac{na_1 + na_2 + na_3 + \cdots + na_n + na_{n+1} - na_1 - na_2 - na_3 - \cdots - na_n - a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_n}{n(n+1)})$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradan

$$(b_{n+1}) - (b_n) = (\frac{na_{n+1} - a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_n}{n(n+1)})$$

$$= (\frac{(a_{n+1} - a_1) + (a_{n+1} - a_2) + (a_{n+1} - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)})$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_{n+1} - a_1) + (a_{n+1} - a_2) + (a_{n+1} - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)}$$

ifadesinde (a_n) dizisi sınırlı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_{n+1} - a_1) + (a_{n+1} - a_2) + (a_{n+1} - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)} = 0$$

bulunur. Yani $\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = 0$ dir. (b_n) dizisi quasi Cauchy bulunur.

Tanım 3.1.2. ([23]) (Reel Sayılar Kümesinde Ward Kompaktlık)

$W \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere terimleri W den alınan her dizinin bir quasi Cauchy alt dizisi var ise W kümesine ward kompakt küme denir.

Teorem 3.1.5. Ward kompakt iki kümenin birleşimi ward kompakttır.

Teorem 3.1.6. Bir kümenin ward kompakt olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.
İspat. $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinden bir tanesi V olsun ve bu küme sınırsız olsun. Eğer bu kümenin ward kompakt olmadığını gösterecek olursak ispatın bir yönünü tamamlamış olacağız. $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinden bir tanesi olan V sınırsız ise alttan veya üstten sınırsızdır.

V nin üstten sınırsız olduğu durumu inceleyelim. V kümesi üstten sınırsız ise $a_{n+1} > 1 + a_n$ şartını sağlayan ve terimleri V kümesinde bulunan bir (a_n) dizisini oluşturur. Buradan da (a_n) dizisinin hiçbir quasi Cauchy alt dizisi olmadığından V ward kompakt küme olamaz.

Karşıt olarak $\mathbb{R}$ nin sınırlı alt kümelerinden bir tanesi V olsun. V kümesi sınırlı ise V kümesinin kapanışı olan $\overline{V}$ de sınırlıdır. $\overline{V}$ hem kapalı hem de sınırlıdır. Yani kompakttır. Kompakt küme aynı zamanda dizisel kompakt küme olacağından $\overline{V}$ aynı zamanda dizisel kompakttır.

V kümesinde herhangi bir dizi alalım. Bu dizi aynı zamanda $\overline{V}$de bulunur ve bu küme dizisel kompakt olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır. Yakınsak her dizi quasi Cauchy dizisi olduğundan V kümesinin ward kompakt bir küme olduğu bulunur.

Tanım 3.1.3. [21] (Reel Sayılar Kümesinde Ward Süreklilik)

$W \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : W \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer W kümesinden alınan her (a_n) quasi Cauchy dizisi için, $(f(a_n))$ quasi Cauchy dizisi ise f fonksiyonuna ward sürekli fonksiyon denir.

Örnek 3.1.4. $f(x) = 2x$ fonksiyonu göz önüne alınsın. (a_n) herhangi bir quasi Cauchy dizisi olsun.
(a_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty}(f(a_{n+1}) - f(a_n)) = 2\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$$

bulunur. Yani $(f(a_n))$ quasi Cauchy dizisi bulunur. f fonksiyonu ward sürekli fonksiyondur.
Örnek 3.1.5. $f(x) = 2x^3 + 1$ fonksiyonunu ve $(a_n) = (\sqrt[3]{2n+4})$ dizisini düşünelim.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2(n+1)+4} - \sqrt[3]{2n+4}\right) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{2n+6} - \sqrt[3]{2n+4})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(2n+6)^2} + \sqrt[3]{(2n+6)(2n+4)} + \sqrt[3]{(2n+4)^2}} = 0$$

bulunur. Buradan $(a_n) = (\sqrt[3]{2n+4}\,)$ dizisinin bir quasi Cauchy dizisi olduğu görülür.

Şimdi $(a_n) = (\sqrt[3]{2n+4}\,)$ dizisinin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün quasi Cauchy dizisi olup olmadığını inceleyelim.

$$\lim_{n\to\infty} (f(a_{n+1}) - f(a_n)) = \lim_{n\to\infty} 2(\sqrt[3]{2(n+1)+4})^3 + 1 - 2(\sqrt[3]{2n+4})^3 - 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} ((4n+12) - (4n+8)) = 4$$

bulunur. $(f(a_n))$ dizisi quasi Cauchy dizisi olmadığından f fonksiyonu ward sürekli fonksiyon değildir.

Teorem 3.1.7. Ward sürekli iki fonksiyonun toplamı da ward süreklidir.

Teorem 3.1.8.Ward sürekli fonksiyonun reel bir sayı ile çarpımı da ward süreklidir.

Sonuç 3.1.9. Ward sürekli fonksiyonların kümesi sürekli fonksiyonların uzayının bir alt vektör uzayıdır.

3.2.İstatistiksel Quasi Cauchy Dizileri

Tanım 3.2.1. ([14]) Reel sayıların herhangi bir alt kümesinden alınan (x_n) dizisi için;

$$S - \lim (x_{n+1} - x_n) = 0$$

ise (x_n) dizisine istatistiksel quasi Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.2.1. İki istatistiksel quasi Cauchy dizisinin toplamı da istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

İspat. (x_n) ve (y_n) iki istatistiksel quasi Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde

$$S - lim(x_{n+1} - x_n) = 0 \text{ ve } S - lim(y_{n+1} - y_n) = 0$$

dir. Şimdi bu dizilerin toplamının istatistiksel quasi Cauchy dizisi olup olmadığını inceleyelim.

$$S - lim((x_{n+1} + y_{n+1}) - (x_n + y_n)) = S - lim((x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n))$$

olur. Teorem 2.1.2 den

$$S - lim\big((x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n)\big)$$
$$= S - lim(x_{n+1} - x_n) + S - lim(y_{n+1} - y_n) = 0$$

bulunur.

$S - \lim((x_{n+1} + y_{n+1}) - (x_n + y_n)) = S - \lim((x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n)) = 0$ olduğundan (x_n) ve (y_n) istatistiksel quasi Cauchy dizilerinin toplamı da istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

Teorem 3.2.2. İstatistiksel quasi Cauchy dizisi ile sabit bir c reel sayısının çarpımı da istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

İspat. (x_n) dizisi istatistiksel quasi Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde

$$S - lim(x_{n+1} - x_n) = 0$$

dir. Şimdi $c \in \mathbb{R}$ için $(c\,x_n)$ dizisinin istatistiksel quasi Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$S - lim(c\,x_{n+1} - c\,x_n) = S - lim(c(x_{n+1} - x_n))$$

olur. Teorem 2.1.2 den

$$S - lim(c(x_{n+1} - x_n)) = c[S - lim(x_{n+1} - x_n)]$$

elde edilir. $S - lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ olduğundan

$$S - lim(c\,x_{n+1} - c\,x_n) = S - lim\big(c(x_{n+1} - x_n)\big)$$
$$= c[S - lim(x_{n+1} - x_n)] = c0 = 0$$

bulunur. $S - lim(c\,x_{n+1} - c\,x_n) = 0$ ise $(c\,x_n)$ dizisi istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

Tanım 3.2.2. ([14]) (İstatistiksel Ward Kompakt Küme) $A \subset \mathbb{R}$ verilsin. Terimleri A kümesinden alınan her dizinin bir istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi bulunuyor ise A kümesine istatistiksel ward kompakt küme denir.

Teorem 3.2.3. İstatistiksel ward kompakt iki kümenin birleşimi de istatistiksel ward kompakt kümedir.

Tanım 3.2.3. ([14]) (Reel Sayılarda İstatistiksel Ward Süreklilik)

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olsun. şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon A kümesinden alınan her (a_n) istatistiksel quasi Cauchy dizisini $(f(a_n))$ istatistiksel quasi Cauchy dizisine çeviriyor ise f fonksiyonuna istatiksel ward sürekli fonksiyon denir.

Teorem 3.2.4. İstatistiksel ward sürekli iki fonksiyon toplamı da istatistiksel ward süreklidir.

Teorem 3.2.5. İstatistiksel ward sürekli bir fonksiyonun reel bir sayı ile çarpımı da istatistiksel ward süreklidir.

Sonuç 3.2.6. İstatistiksel ward sürekli foksiyonların kümesi tüm fonksiyonların uzayının bir vektör alt uzayıdır.

3.3.Quasi İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.3.1. ([5]) (On Quasi –statistical Convergence, İ. Sakaoğlu Özgüç and T.])

$\boldsymbol{c} = (c_n)$ pozitif reel sayılardan oluşan bir dizi olmak üzere;

$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} sup \frac{c_n}{n} < \infty$ verilsin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon| = 0$$

ise $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi L noktasına quasi-istatistiksel yakınsaktır denir

Teorem 3.3.1. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi L noktasına quasi istatistiksel yakınsak dizi olsun. O halde $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $S - lim\boldsymbol{x} = L$ ve $H = sup_n \frac{c_n}{n}$ olsun.

$$\frac{c_n}{n} \leq H \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{H}{c_n}$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{H}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

geçişi yapılabilir. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi L noktasına quasi istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur. H sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. O halde

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

olur. Ayrıca $0 \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. Buradan da $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsak bulunur.

Teorem 3.3.2. Her yakınsak dizi quasi istatistiksel yakınsak dizidir.

İspat. Herhangi bir $\boldsymbol{x} = (x_k)$ yakınsak dizisi alalım ve $\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu takdirde (x_k) dizisi yakınsak olduğundan $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak biçimde en az k_0 sayısı vardır. Dolayısıyla

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

ifadesi yazılabilir. O halde her n için $c_n > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{k_0}{c_n}$$

yazılabilir. $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{c_n} = 0$ olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{c_n}$$

bulunur. Ayrıca

$$0 \leq \frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

dır ($c_n > 0$). Buradan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{c_n}$$

elde edilir.

Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}|\{k\le n: |x_k-L|\ge\varepsilon\}|=0$$

bulunur. Yani $\boldsymbol{x}=(x_k)$ dizisi quasi istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.3.3. $\boldsymbol{c}=(c_n)$ pozitif reel sayı dizisi ve $d=inf_n\frac{c_n}{n}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{x}=(x_k)$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak ise $\boldsymbol{x}=(x_k)$ dizisi L noktasına quasi istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $d=inf\frac{c_n}{n}$ olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $d\le\frac{c_n}{n}$ olur. Buradan her $n\in\mathbb{N}$ için $\frac{d}{c_n}\le\frac{1}{n}$ olur. Buradan

$$0\le\frac{d}{c_n}|\{k\le n: |x_k-L|\ge\varepsilon\}|\le\frac{1}{n}|\{k\le n: |x_k-L|\ge\varepsilon\}| \qquad \dots(*)$$

ifadesi gerçeklenir.

$(\alpha_n)=(0)$, $(\beta_n)=(\frac{d}{c_n}|\{k\le n: |x_k-L|\ge\varepsilon\}|)$, $(w_n)=(\frac{1}{n}|\{k\le n: |x_k-L|\ge\varepsilon\}|)$ olmak üzere **(*)** eşitsizliğinden $(\alpha_n)\le(\beta_n)\le(w_n)$ dir. $n\to\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\le\lim_{n\to\infty}\beta_n\le\lim_{n\to\infty}w_n$$

olur. Burada $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ ve $\boldsymbol{x}=(x_k)$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty}w_n=0$ olur. Sıkıştırma teoreminden $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ elde edilir ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}|\{k\le n: |x_k-L|\ge\varepsilon\}|=0$$

bulunur. Yani $\boldsymbol{x}=(x_k)$ dizisi quasi istatistiksel yakınsaktır.

BÖLÜM 4. RHO – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE RHO-İSTATİSTİKSEL QUASİ CAUCHY DİZİLERİ

4.1. S($\boldsymbol{\rho}$) Yakınsaklık

Tanım 4.1.1. ([6, 14]) $\rho = (\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\rho_n) = (\rho_{k+1} - \rho_k)$ sınırlı dizi ve L ∈ ℝ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n\colon |a_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (a_k) dizisine L noktasına S(ρ) yakınsak (ρ –istatistiksel yakınsak) dizi denir.

$$S_\rho - lima_k = L$$

ile gösterilir. S(ρ) yakınsak diziler, istatistiksel yakınsak dizilerin genelleştirilmiş halidir.

Teorem 4.1.1. Yakınsak her dizi S(ρ) yakınsak dizidir.

İspat. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ yakınsak dizisinin S(ρ) yakınsak dizi olduğunu göstermek için herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. $limx_k = L$ olsun. Bu takdirde $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi yakınsak olduğundan $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir k_0 pozitif tam sayısı vardır. Dolayısıyla $k \geq k_0$ olduğunda

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

olur. $\rho = (\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\, \rho_n)$ sınırlı dizi olmak üzere,

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\rho_n} k_0$$

olur. Burada $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} k_0 = 0$ dır.

$$0 \leq \ |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olacağından eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n}$ ile çarpılırsa

$$0 \leq \frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olur.Yani

$$0 \leq \frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\rho_n}k_0$$

bulunur. $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}k_0$$

Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. Yani $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi L $\in \mathbb{R}$ noktasına S(ρ) yakınsaktır.

Örnek 4.1.1. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi ve $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 5 & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.Burada $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak olduğunu biliyoruz. Fakat $(\rho_n) = (\sqrt{n})$ alındığında

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |x_k| \geq \ \varepsilon\}| \neq 0$$

bulunacağından $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi S(ρ) yakınsak dizi olamaz.

Teorem 4.1.2. $S_\rho - \lim\ \boldsymbol{x} = L_1$,$S_\rho - \lim\ \boldsymbol{y} = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere ;

i) $S_\rho - \lim\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L_1 + L_2$

ii) $S_\rho - \lim\,(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha L_1$

dir.

İspat. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ ve $\boldsymbol{y} = (y_k)$ olmak üzere

i) $S_\rho - lim\boldsymbol{x} = L_1$ olsun. Bu durumda

$$A = \{k \leq n: |x_k - L_1| \geq \varepsilon/2\ \}$$

için A ⊂ ℕ olmak üzere δ(A) = 0 olduğundan ε > 0 verildiğinde ∀ $k > k_1$ ve ∀ k ϵ ℕ \ A için $|x_k - L_1| < \varepsilon/2$ olacak biçimde k ϵ ℕ vardır. $S_\rho - limy = L_2$ olsun. Bu durumda

$$B = \{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \varepsilon/2\}$$

için B ⊂ ℕ olmak üzere δ(B) = 0 olduğundan ε > 0 için ∀ k > k_2 ve ∀ k ϵ ℕ \ B için $|y_k - L_2| < \varepsilon/2$ olacak biçimde k_2 ϵ ℕ vardır. $k_0 = max\{k_1, k_2\}$ olsun. ∀ k ϵ ℕ\(A∩B) ve ∀ k > k_0 için

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bulunur. Buradan ∀ ε >0 için k ϵ ℕ\(A∩B) $k > k_0$ olduğunda

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \ \dots \ (*)$$

olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır denilebilir. Yani

$$|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \left|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{\rho_n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{\rho_n}\left|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

bulunur.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}\left|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

δ(A) = 0 ve δ(B) = 0 olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

bulunur. Ayrıca

$$0 \leq |\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$

dir. $\rho = (\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\, \rho_n)$ sınırlı dizi olmak üzere,

$$0/\rho_n \leq 1/\rho_n[|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

Buradan

$$0 \leq 1/\rho_n[|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

olur. $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} 1/\rho_n[|\{k \leq n : |(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

bulunur. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ ve $\boldsymbol{y} = (y_k)$ yazıldığında

$$\lim_{n\to\infty} 1/\rho_n[|\{k \leq n : |(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|] = 0$$

ifadesi elde edilir. $S_\rho - \lim (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L_1 + L_2$ olduğu açıkça görülür.

ii) Eğer $\alpha = 0$ ise S_ρ -lim $\alpha.x_k = \alpha.$ S_ρ-lim x_k = S_ρ -lim $0.x_k$ = S_ρ -lim 0 = 0 olup, ispat aşikârdır. Şimdi S_ρ -lim $\mathbf{x}$ = L_1 yazalım ve $\alpha \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A) = 0$ olduğunda , $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$ olacak biçimde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan da her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her $k \geq k_0$ için $|\alpha x_k - \alpha.L_1| = |\alpha| .\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$ olup, her $\varepsilon > 0$ için $\rho = (\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\, \rho_n)$ sınırlı dizi olmak üzere, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} \mid \{k \leq n : |\alpha x_k - \alpha.L_1| \geq \varepsilon\} \mid = 0$

elde edilir. Yani S_ρ *-lim* $(\alpha.x_k) = \alpha.$ L_1 dir.

Teorem 4.1.3. Yakınsak diziler kümesi S(ρ) yakınsak diziler uzayının bir alt vektör uzayıdır.

İspat. Yakınsak dizilerin kümesi c diyelim**.** S(ρ) yakınsak dizilerin kümesini ise W ile gösterelim. Tüm dizilerin uzayı vektör uzayıdır ve S(ρ) yakınsak dizilerin kümesi tüm dizilerin alt uzayı olduğundan W vektör uzayıdır. Öte yandan $c \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca Teorem 4.1.1 da belirtildiği üzere yakınsak her dizi S(ρ) yakınsak dizidir. Dolayısıyla buradan $c \subset W$ olduğu açıkça görülür. Öte yandan (a_n) , $(b_n) \in c, \beta \in \mathbb{R}$ için (a_n) ve (b_n) dizilerinin yakınsadığı noktalar sırasıyla a ve b olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}[(a_n) + (b_n)] = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$$

olur. Buradan $(a_n)+(b_n) \epsilon\, c$ olur. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(a_n)=\beta \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\beta a$ olur. Buradan $\beta \epsilon \mathbb{R}$ için $\beta(a_n) \epsilon\, c$ olur. O halde yakınsak diziler S(ρ) yakınsak diziler uzayının alt uzayı olduğu ispatlanmış olur.

4.2. Rho - İstatistiksel Quasi Cauchy Dizileri

Tanım 4.2.1. ([6 ,14]) $\rho=(\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n=\infty$ olmak üzere ve $\lim\limits_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n}{n}<\infty$, her $k>0$ için $\Delta a_k=a_{k+1}-a_k$ olmak üzere her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n}|\{k \leq n: |\Delta a_k| \geq \varepsilon\}|=0$$

oluyorsa (a_n) dizisine ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi denir.

Yani;

$$S_\rho-\lim(a_{n+1}-a_n)=0$$

ise (a_n) dizisine ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.2.1. $E \subseteq \mathbb{R}, (a_k)$ E kümesinde quasi Cauchy dizisi olsun. $f: E\to\mathbb{R}$ düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(f(a_k))$ dizisi ρ - istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

İspat. $E \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere (a_k) E kümesinden alınan bir quasi Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon>0$ sayısını alalım. f fonksiyonu E kümesinde düzgün sürekli ise $\alpha \in E$ ve $\beta \in E$ için, $|\alpha-\beta|<\delta$ olduğunda $|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon$ olacak biçimde en az bir ε a bağlı bir $\delta>0$ sayısı vardır.

(a_k) dizisi quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{k+1}-a_k)=0$ dır. Yani bu $\delta>0$ için $k \geq k_0$ olduğunda $|a_{k+1}-a_k|<\delta$ olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır. f düzgün sürekli olduğundan $k>k_0$ olduğunda $|f(a_{k+1})-f(a_k)|<\varepsilon$ sağlanır..Yani her $\varepsilon>0$ için $k \geq k_0$ olduğunda

$$|f(a_{k+1})-f(a_k)|<\varepsilon$$

olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır. O halde $k \geq k_0$ olduğunda hiçbir zaman

$$|f(a_{k+1})-f(a_k)| \geq \varepsilon$$

olamaz. Buradan da

$$|\{k \leq n : |f(a_{k+1})-f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca

$$0 \leq |\{k \leq n : |f(a_{k+1})-f(a_k)| \geq \varepsilon\}|$$

dir . Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n}$ ile çarpılırsa;

$$0 \leq \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}|$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}|$$

olur.

$$|\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\rho_n} k_0$$

elde edilir . $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{\rho_n}$$

gerçeklenir. $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{\rho_n} = 0$ dır. Yani

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{\rho_n}$$

bulunur. O halde sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesi elde edilir. f fonksiyonunu ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi olduğu ispatlanır.

Tanım 4.2.2. ([6 ,14]) (ρ -İstatistiksel Ward Kompaktlık)

A ⊆ ℝ olmak üzere terimleri A kümesinden alınan her dizinin bir ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi var ise A kümesine ρ –istatistiksel ward kompakt küme denir.

Teorem 4.2.2. ρ –istatistiksel ward kompakt iki kümenin birleşimi de ρ –istatistiksel ward kompakt kümedir.

İspat. X ve Y kümeleri reel sayılar kümesinden iki ρ –istatistiksel ward kompakt küme olsun.

s(Y), terimleri Y kümesinde olan bütün dizilerin kümesini göstermek üzere, herhangi bir $(x_n) \in s(X \cup Y)$ alalım.

$(x_n) \in (X \cup Y)$ olduğundan (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta 'n' indisine karşılık gelen terimleri ya X de ya da Y de bulunur.Diyelim ki Y de bulunsun. Bu takdirde her n $\in \mathbb{N}$ için (x_{j_n}) alt dizisini bulmuş olduk.

Yani $(x_{j_n}) \in s(Y)$ olur. Y kümesi ρ –istatistiksel ward kompakt küme olduğundan (x_{j_n}) dizisinin bir ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi vardır. Bu diziyi $(x_{j_{k_n}})$ ile gösterelim. Bir dizinin alt dizisinin alt dizisi yine o dizinin alt dizisi olacağından $(x_{j_{k_n}})$ dizisi (x_n) dizisinin bir ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisidir.

Eğer sonsuz çoklukta indislere karşılık gelen terimleri X kümesinde olsaydı Y yerine X yazılarak ispat benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.2.3. ([6 ,14]) (ρ–İstatistiksel Ward Süreklilik) : $W \subseteq \mathbb{R}$ ve f $W \to \mathbb{R}$ olsun. W kümesinden alınan her (a_n) ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi için, $(f(a_n))$ dizisi ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi oluyorsa f fonksiyonuna ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyon denir.

Teorem 4.2.3. ρ –istatistiksel ward sürekli iki fonksiyonun toplamı da ρ –istatistiksel ward süreklidir.

İspat. f ve g fonksiyonları ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyonlar olsun ve (a_n) dizisi de ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi olsun. (a_n) dizisi bir ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi ise

$$S_\rho - \lim (a_{n+1} - a_n) = 0$$

gerçeklenir. Ayrıca f ve g ρ istatistiksel ward sürekli ise

$$S_\rho - \lim (f(a_{n+1}) - f(a_n)) = 0$$

dır. Dolayısı ile $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon/2\}| = 0$ dir.

Öte yandan $S_\rho - \lim (g(a_{n+1}) - g(a_n)) = 0$ dır.Dolayısı ile $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |g(a_{k+1}) - g(a_k)| \geq \varepsilon/2\}| = 0$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} |\{k \leq n : |(f+g)(a_{k+1}) - (f+g)(a_k)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ifadesi düzenlendiğinde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}|\{k\leq n:|[f(a_{k+1})-f(a_k)]+[g(a_{k+1})-g(a_k)]|\geq\varepsilon\}|$$

halini alır. $A_n=f(a_{n+1})-f(a_n)$ ve $B_n=g(a_{n+1})-g(a_n)$ olsun. Bu durumda $S_\rho-\lim A_n=0$ ve $S_\rho-\lim B_n=0$ olur. Teorem 4.1.2 den

$$S_\rho-\lim(A_n+B_n)=S_\rho-\lim A_n+S_\rho-\lim B_n=0$$

bulunur. A_n ve B_n lerin değerleri yerlerine yazıldığında

$$S_\rho-\lim([f(a_{n+1})-f(a_n)]+[g(a_{n+1})-g(a_n)])=0$$

olur. Bir adım daha düzenleme yapacak olursak

$$S_\rho-\lim([f(a_{n+1})+g(a_{n+1})]-[f(a_n)+g(a_n)])=0$$

bulunur. Buradan anlaşılır ki $f+g$ fonksiyonu ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisini yine ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisine dönüştürür. Yani $f+g$ fonksiyonu ρ –istatistiksel ward süreklidir.

Teorem 4.2.4. ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyonun reel bir sayı ile çarpımı da ρ –istatistiksel ward süreklidir.

İspat. f fonksiyonu ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyon olsun. (a_n) ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi için $S_\rho-\lim\big(f(a_{n+1})-f(a_n)\big)=0$ dır.

Burada $A_n=f(a_{n+1})-f(a_n)$ yazılırsa $S_\rho-\lim(A_n)=0$ olur. Teorem 4.1.2 den

$$S_\rho-\lim(cA_n)=c.0=0$$

olur. Yani $S_\rho-\lim(cA_n)=0$ bulunur. Buradan

$$S_\rho-\lim\big[c\big(f(a_{n+1})-cf(a_n)\big)\big]=0$$

elde edilir. Yani $c\in\mathbb{R}$ için cf fonksiyonu ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisini, ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisine dönüştürür. Yani cf fonksiyonu ρ –istatistiksel ward süreklidir.

BÖLÜM 5. BETA DERECELİ RHO – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

5.1. β Dereceli S(ρ) Yakınsaklık

Bu bölümde 0 < β ≤ 1 olarak kabul edeceğiz.

Tanım 5.1.1. ([24]) $\rho = (\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n^\beta}{n} < \infty$$

ve $\left(\Delta\rho_n^\beta\right) = (\rho_{k+1}^\beta - \rho_k^\beta)$ sınırlı dizi ve L ∈ ℝ olmak üzere ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n: |a_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (a_k) dizisine L noktasına β -dereceli ρ –istatistiksel yakınsak (ya da S(ρ^β) yakınsak) dizi denir ve $S_{\rho^\beta} - lim a_k = L$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.1. Yakınsak her dizi S(ρ^β) yakınsak dizidir.

İspat. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} x_k = L$ olsun. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisinin S(ρ^β) yakınsak dizi olduğunu göstermek için herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. Bu takdirde $\boldsymbol{x} = (x_k)$ dizisi yakınsak olduğundan bu $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır. Dolayısıyla $n \geq k_0$ olduğunda

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

olur. $\rho = (\rho_n)$ pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n^\beta = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n^\beta}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\, \rho_n^\beta)$ sınırlı dizi olmak üzere

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n^\beta}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\rho_n^\beta} k_0$$

olur. Burada $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} k_0 = 0$ dır.

Öte yandan

$$0 \leq \ |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olacağından eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n^\beta}$ ile çarpılırsa

$$0 \leq \frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir.Buradan da

$$0 \leq \frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\rho_n^\beta} k_0$$

bulunur. $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} k_0$$

eşitsizliği elde edilir. Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. Yani $x = (x_k)$ dizisi L ∈ ℝ noktasına S(ρ^β) yakınsaktır.

Teorem 5.1.2. S$(\rho^\beta) - lim\boldsymbol{x} = L_1$,S$(\rho^\beta) - lim\boldsymbol{y} = L_2$ ve α ϵ ℝ olmak üzere

i) S$(\rho^\beta) - \lim\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L_1 + L_2$

ii) S$(\rho^\beta) - \lim\,(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha L_1$

dir.

İspat. $\boldsymbol{x} = (x_k)$ ve $\boldsymbol{y} = (y_k)$ olmak üzere

i)S$(\rho^\beta) - \lim\ \boldsymbol{x} = L_1$ olsun. Bu durumda

$$A = \{k \leq n: |x_k - L_1| \geq \varepsilon/2\}$$

için A ⊂ ℕ olmak üzere δ(A) = 0 olduğundan ε > 0 verildiğinde ∀ $k > k_1$,∀ k ϵ ℕ \ A için $|x_k - L_1| < \varepsilon/2$ olacak biçimde k ϵ ℕ vardır. $S_\rho - lim y = L_2$ olsun. Bu durumda $B = \{k \leq n: |y_k - L_2| \geq \varepsilon/2\}$ B ⊂ ℕ olmak üzere δ(B) = 0 olduğundan ε > 0 için ∀ k > k_2 ve ∀ k ϵ ℕ \ B için

$$|y_k - L_2| < \varepsilon/2$$

olacak biçimde k_2 ϵ ℕ vardır.

$k_0 = max\{k_1, k_2\}$ olsun. ∀ k ϵ ℕ\(A∩B) ve ∀ k > k_0 için

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bulunur. Buradan ∀ ε >0 için k ϵ ℕ\(A∩B) $k > k_0$ olduğunda

$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ **… (*)**

olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır denilebilir.

Yani

$$|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \left|\left\{k \leq n: |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + |\left\{k \leq n: |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \frac{1}{\rho_n^\beta}\left|\left\{k \leq n: |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{\rho_n^\beta}|\left\{k \leq n: |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

bulunur.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n^\beta}\left|\left\{k \leq n: |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n^\beta}|\left\{k \leq n: |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

δ(A) = 0 ve δ(B) = 0 olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n^\beta}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

bulunur. Ayrıca

$0 \leq |\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$ olduğundan (ρ_n^β) pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty}\rho_n^\beta = \infty$ olan bir dizi

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n^\beta}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\, \rho_n^\beta)$ sınırlı dizi olmak üzere

$$0/\rho_n^\beta \leq 1/\rho_n^\beta[|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

Buradan

$$0 \leq 1/\rho_n^\beta[|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$$

olur. $n \to \infty$ için $0 \leq \lim_{n\to\infty} 1/\rho_n^\beta[|\{k \leq n : |(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|]$ olur.

$\boldsymbol{x} = (x_k)$ ve $\boldsymbol{y} = (y_k)$ yazıldığında

$$\lim_{n\to\infty} 1/\rho_n^{\beta}[|\{k \leq n : |(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|] = 0$$

ifadesi elde edilir. S$(\rho^{\beta}) - \lim\, (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = L_1 + L_2$ olduğu açıkça görülür.

ii) Eğer $\alpha = 0$ ise

S(ρ^{β}) -lim $\alpha.x_k = \alpha.$ S(ρ^{β})-lim x_k = S(ρ^{β}) -lim $0.x_k$ = S(ρ^{β}) -lim 0 = 0 olup, ispat aşikârdır.Şimdi S(ρ^{β}) -lim $\mathbf{x} = L_1$ yazalım ve $\alpha \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A) = 0$ olduğunda , $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için

$|x_k - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$ olacak biçimde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan da her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her

$k \geq k_0$ için $|\alpha x_k - \alpha.L_1| = |\alpha| \,.\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$ olup, her $\varepsilon > 0$ için (ρ_n^{β}) pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n^{\beta} = \infty$ olan bir dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n^{\beta}}{n} < \infty$$

ve $(\Delta\, \rho_n^{\beta})$ sınırlı dizi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^{\beta}} \,|\{k \leq n : |\alpha x_k - \alpha.L_1| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Yani S(ρ^{β}) *-lim* $(\alpha.x_k) = \alpha.\, L_1$ dir.

Teorem 5.1.3. Yakınsak diziler kümesi S(ρ^{β}) yakınsak diziler uzayının bir alt vektör uzayıdır.

İspat. Yakınsak dizilerin kümesi c diyelim**.** S(ρ^{β}) yakınsak dizilerin kümesini ise W ile gösterelim. Tüm dizilerin uzayı vektör uzayıdır ve S(ρ^{β}) yakınsak dizilerin kümesi tüm dizilerin alt uzayı olduğundan W vektör uzayıdır. Öte yandan $c \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca Teorem 5.1.1 da belirtildiği üzere yakınsak her dizi S(ρ^{β}) yakınsak dizidir. Dolayısıyla buradan $c \subset W$ olduğu görülür. Öte yandan (a_n) , $(b_n) \in c$, $\beta \in \mathbb{R}$ için (a_n) ve (b_n) dizilerinin yakınsadığı noktalar sırasıyla a ve b olmak üzere

$\lim_{n\to\infty} [(a_n) + (b_n)] = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n) = a + b$ olur. Buradan $(a_n) + (b_n) \in c$ olur.

Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \beta(a_n) = \beta \lim_{n\to\infty} (a_n) = \beta a$$

olur. Buradan $\beta \epsilon \mathbb{R}$ için $\beta(a_n) \epsilon c$ olur. O halde yakınsak diziler S(ρ^β) yakınsak diziler uzayının alt uzayı olduğu ispatlanmış olur.

5.2 Beta Dereceli Rho - İstatistiksel Quasi Cauchy Dizileri

Tanım 5.2.1. ([24]) (ρ_n^β) pozitif değerli, azalmayan bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n^\beta = \infty$ olmak üzere ve $\lim_{n\to\infty} sup_n \frac{\rho_n^\beta}{n} < \infty$, her $k > 0$ için $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n: |\Delta a_k| \geq \varepsilon\}| = 0$$

gerçekleniyor ise (a_n) dizisine β - dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi denir. Yani

$$S(\rho^\beta) - \lim(a_{n+1} - a_n) = 0$$

ise (a_n) dizisine β - dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi denir.

Teorem 5.2.1. $E \subseteq \mathbb{R}, (a_k)$ E kümesinde quasi Cauchy dizisi olsun. f fonksiyonu E kümesinde düzgün sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $(f(a_k))$ dizisi β – dereceli ρ - istatistiksel quasi Cauchy dizisidir.

İspat. $E \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere (a_k) E kümesinden alınan bir quasi Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ sayısını alalım.

f fonksiyonu E kümesinde düzgün sürekli ise α $\in E$ ve $\beta \in E$ için, $|\alpha - \beta| < \delta$ olduğunda

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir ε a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı vardır. (a_k) dizisi quasi Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty} (a_{k+1} - a_k) = 0$ dır. Yani bu $\delta > 0$ için $k \geq k_0$ olduğunda $|a_{k+1} - a_k| < \delta$ olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır. f düzgün sürekli olduğundan $k > k_0$ olduğunda;

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| < \varepsilon$$

geçişi yapılabilir. Yani her $\varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olduğunda

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir k_0 sayısı vardır.

O halde $k \geq k_0$ olduğunda hiçbir zaman

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon$$

olamaz. Buradan da

$$|\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca

$$0 \leq |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}|$$

gerçeklendiğinden, eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\rho_n^\beta}$ ile çarpılırsa

$$0 \leq \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}|$$

bulunur. $n \to \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}|$$

ifadesi elde edilir.

$$|\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{1}{\rho_n^\beta}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\rho_n^\beta} k_0$$

elde edilir . $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{\rho_n^\beta}$$

gerçeklenir. $\lim_{n\to\infty} \rho_n^\beta = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{\rho_n^\beta} = 0$ dır. Buradan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{\rho_n^\beta}$$

bulunur. Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur. Buradan da f fonksiyonunun β – dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi olduğu ispatlanır.

Tanım 5.2.2. ([24]) (β - Dereceli ρ -İstatistiksel Ward Kompaktlık)

A ⊆ E ve E ⊆ ℝ olmak üzere terimleri A kümesinden alınan her dizinin bir β –dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi var ise A kümesine β -dereceli ρ –istatistiksel ward kompakt küme denir.

Teorem 5.2.2. β -dereceli ρ –istatistiksel ward kompakt iki kümenin birleşimi de β -dereceli ρ –istatistiksel ward kompakt kümedir.

İspat. X ve Y kümeleri reel sayılar kümesinden iki β -dereceli ρ –istatistiksel ward kompakt küme olsun. s(Y), terimleri Y kümesinde olan bütün dizilerin kümesini göstermek üzere, herhangi bir $(x_n) \in s(X \cup Y)$ alalım. $(x_n) \in (X \cup Y)$ olduğundan (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta 'n' indisine karşılık gelen terimleri ya X de ya da Y de bulunur. Diyelim ki Y de bulunsun. Bu takdirde her n ∈ ℕ için (x_{j_n}) alt dizisini bulmuş olduk. Yani $\left(x_{j_n}\right) \in s(Y)$ olur. Y kümesi β -dereceli ρ –istatistiksel ward kompakt küme olduğundan $\left(x_{j_n}\right)$ dizisinin bir β -dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisi vardır. Bu diziyi $(x_{j_{k_n}})$ ile gösterelim. Bir dizinin alt dizisinin alt dizisi yine o dizinin alt dizisi olacağından $(x_{j_{k_n}})$ dizisi (x_n) dizisinin bir β - dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy alt dizisidir. Eğer sonsuz çoklukta indislere karşılık gelen terimleri X kümesinde olsaydı Y yerine X yazılarak ispat benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.3. β -dereceli ρ –istatistiksel ward sürekli iki fonksiyonun toplamı da β -dereceli ρ –istatistiksel ward süreklidir.

İspat. f ve g fonksiyonları β -dereceli ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyonlar olsun ve (a_n) β -dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi olsun. O halde $S(\rho^{\beta}) - \lim(a_{n+1} - a_n) = 0$dır. f ve g β -dereceli ρ istatistiksel ward sürekli ise

$$S(\rho^{\beta}) - \lim(f(a_{n+1}) - f(a_n)) = 0$$

ifadesi gerçeklenir. Dolayısı ile $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^{\beta}} |\{k \leq n : |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \geq \varepsilon/2\}| = 0$$

elde edilir. Öte yandan $S(\rho^{\beta}) - \lim(g(a_{n+1}) - g(a_n)) = 0$ dır.

Dolayısı ile $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \le n : |g(a_{k+1}) - g(a_k)| \ge \varepsilon/2\}| = 0$$

ifadesi gerçeklenir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \le n : |(f+g)(a_{k+1}) - (f+g)(a_k)| \ge \varepsilon\}|$$

ifadesi düzenlendiğinde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n^\beta} |\{k \le n : |[f(a_{k+1}) - f(a_k)] + [g(a_{k+1}) - g(a_k)]| \ge \varepsilon\}|$$

halini alır.

$$A_n = f(a_{n+1}) - f(a_n) \text{ ve } B_n = g(a_{n+1}) - g(a_n)$$

olsun. Bu durumda $S(\rho^\beta) - \lim A_n = 0$ ve $S(\rho^\beta) - \lim B_n = 0$ olur.Teorem 5.1.2 den $S(\rho^\beta) - \lim(A_n + B_n) = S(\rho^\beta) - \lim A_n + S(\rho^\beta) - \lim B_n = 0$ bulunur. A_n ve B_n değerleri yerleştirildiğinde

$$S(\rho^\beta) - \lim([f(a_{n+1}) - f(a_n)] + [g(a_{n+1}) - g(a_n)]) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$S(\rho^\beta) - \lim([f(a_{n+1}) + g(a_{n+1})] - [f(a_{n+1}) + f(a_n)]) = 0$$

bulunur.$f+g$ fonksiyonu ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisini yine β – dereceli ρ – istatistiksel quasi Cauchy dizisine dönüştürür. Yani $f+g$ fonksiyonu β – dereceli ρ – istatistiksel ward süreklidir.

Teorem 5.2.4. β – dereceli ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyonun reel bir sayı ile çarpımı da β – dereceli ρ –istatistiksel ward süreklidir.

İspat. f fonksiyonu β – dereceli ρ –istatistiksel ward sürekli fonksiyon olsun.(a_n) β – dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisi için f β – dereceli ρ –istatistiksel ward sürekli ise $S(\rho^\beta) - \lim(f(a_{n+1}) - f(a_n)) = 0$ dır. Burada $A_n = f(a_{n+1}) - f(a_n)$ olsun. Dolayısıyla $S(\rho^\beta) - \lim A_n = 0$ olur. Teorem 5.1.2 den

$$S(\rho^\beta) - \lim c A_n = c.0 = 0$$

olur. Buradan

$$S(\rho^\beta) - \lim\left[c\left(f(a_{n+1}) - cf(a_n)\right)\right] = 0$$

elde edilir. Yani $c \in \mathbb{R}$ için cf fonksiyonu β – dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisini, β – dereceli ρ –istatistiksel quasi Cauchy dizisine dönüştürür. Yani cf fonksiyonu β – dereceli ρ –istatistiksel ward süreklidir.

SONUÇ

Bu çalışmada istatistiksel rho – quasi Cauchy dizileri reel uzayda ele alınmış olup, şu ana kadar yapılan araştırmalar incelenmekle birlikte daha önceki yapılan araştırmalarda yer almamış olan bazı teoremler de sunulmuştur.

KAYNAKÇA

[1] Hans Körle, *Heinrich, Infinite Series in a History of analysis*, De Gruyder Textbook, 2015.

[2] A.S Zygmund, *Trigonometric Series Vol I ,II Third Edition,* Cambridge Math Lib, Cambridge Univ. Press 2003.

[3] I. J. Schoonberg , Amer Math, Monthly 66, 562 – 563, 1959.

[4] R.C. Buck , *Generalized asymptotic density*,Amer J. Math. 75,335 – 346, 1953

[5] , İ. Sakaoğlu Özgüç and T.Yurdakım, *On quasi–statistical convergence*,commun Fac.Sci.Unv.Ank.Series A1 ,Volume 61, Number 1,Pages 11 – 17 ,ISSN 1303 – 5991, 2012.

[6] H. Çakallı, *A Varition on Statistical Ward Continuty* Bull. Malays.Math. Sci.Soc. 40:1701 – 1710, DOI 10.1007 /s40840 – 015 – 0195 – 0, 2017.

[7] U. Ulusu, F. Nuray, *Statiscial Lacunary Summability of Sequences of Sets*, Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering, Research Article,2013.

[8] Ö. Çakar*, Fonksiyonel Analize Giriş* I, A.Ü Fen Fakültesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No :13,2007.

[9] H. Çakallı, *A Study On Statistical Convegence*, Functional Analysis, Approximation and Computation 1 : 2, 19 – 24, 2009.

[10] T. Yurdakadim*, İstatistiksel Yakınsak Alt Diziler*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 54 , 2010.

[11] J. A Fridy *On Statistical Convergence* .Analysis 5 ; 301 – 313, 1985.

[12] H.Fast Sur la convergence statisque. Collog. Math. 2 ; 241 -244, 1951.

[13] V. Caferov, T.C Anadolu Üniversitesi Yayınları No : 1082, AçıkÖğretim Fakültesi Yayınları ,No:600, Matematik Öğretmenliği, Analiz,1999.

[14] H. Çakallı, *Statistical ward continuity*, Applied Mathematics Letters, 24 1727-1728,2011.

[15] K. Demirci, *İstatistiksel Yakınsaklık*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 73 sayfa, 1992

[16] J.S. Connor, *R-type summability methods, Cauchy criteria, p-sets, and statistical convergence*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 ,319-327 ,1992.

[17] T. Ŝal´at, *On statistically convergent sequences of real numbers*, Math. Slovaca, 30,139-150, 1980

[18] P. Kostyrko, M. Macaj, T. Salat and O. Strauch, *On statistical limit points*, Proc. Amer. Math. Soc. 129, 2647-2654, 2001

[19] R.C. Buck *Generalized Asymptotic Density. American* J. Math. 75 ,335-346, 1975.

[20] H. Çakallı, *Statistical quasi-Cauchy sequences,Mathematical and Computer Modeling*. 54 ,1620-1624, 2011.

[21] H. Cakalli, *Forward continuity*, *Journal of Computational Analysis and Applications,* vol 13, pp. 225-230, 2011.

[22] D. Burton and J. Coleman, *Quasi-cauchy sequences, The American Mathematical Monthly,* vol. 117, pp. 328-333, 2010.

[23] H. Çakalli, *Sequential definitions of compactness, Applied Mathematics Letters,* vol. 21, pp. 594-598, 2008.

[24] H. Cakalli ,Hacer Sengül Kandemir,Seray Karagöz , *Rho Statistical Convergence of Order Beta* , ISSBN: 978 – 605 – 2124 – 29 - 1, Third International Conference of Mathematical Sciences ICMS 2019 ,Page 79, AIP Conference Proceedings of Third International Conference of Mathematical Sciences ICMS 2019 .

[25] F. İnce Dağcı, *Quasi Cauchy Dizileri*, Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2019.