DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA LAPLACE-BESSEL OPERATÖRÜNE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLER

Esra KAYA

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Aralık - 2018

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA LAPLACE-BESSEL OPERATÖRÜNE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLER

ESRA KAYA

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Aralık - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Esra KAYA'nın DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarda Laplace-Bessel Operatörüne Bağlı Maksimal Operatörler" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

07/12/2018

Prof. Dr. Önder UYSAL
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Bölüm Başkanı, Matematik Bölümü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Danışman, Matematik Bölümü

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Matematik Bölümü, Dumlupınar Üniversitesi

Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
Matematik Bölümü, Atatürk Üniversitesi

Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU
Matematik Bölümü, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR
Matematik Bölümü, Dumlupınar Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan intihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %19 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU   Esra KAYA

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA LAPLACE-BESSEL OPERATÖRÜNE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLER

Esra KAYA
Matematik, Doktora Tezi, 2018
Tez Danışmanı : Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiş, Lebesgue ve ağırlıklı Lebesgue uzayları takdim edilmiştir. Üçüncü bölümde, değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılarak bu uzayların temel özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölüm, genelleştirilmiş öteleme operatörü ve temel özelliklerini içermektedir. Ayrıca bu bölümde, genelleştirilmiş öteleme operatörünün Lebesgue ve değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılık problemi incelenmiştir. Beşinci bölüm, tezin orijinal sonuçlarını içeren kısmıdır. Son bölümde, B_n-maksimal operatörünün değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: B_n-maksimal operatör, Değişken üslü Lebesgue uzayları, Genelleştirilmiş öteleme operatör.

MAXIMAL OPERATORS RELATED TO LAPLACE-BESSEL OPERATORS ON VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACES

Esra KAYA
Mathematics, Ph.D. Thesis, 2018
Thesis Supervisor : Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

SUMMARY

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, the basic definitions and theorems that we would need in our study were given. Also, Lebesgue spaces and weighted Lebesgue spaces defined. In third chapter, variable exponent Lebesgue spaces are introduced and the basic features of these space are given. The fourth chapter includes the generalized translation operator and its basic properties. Also in this chapter, the boundedness problem of the generalized shift operator on variable exponent Lebesgue spaces has been investigated. In the final chapter, the boundedness of the B_n-maximal operator on variable exponent Lebesgue spaces is proved.

Keywords: B_n-maximal operator, Generalized shift operator, Variable exponent Lebesgue spaces.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında, engin bilgi ve tecrübelerini paylaşan, yönlendiren ve akademisyenliği sevdiren değerli hocam sayın Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU'na, değerli fikirleriyle gelişmeme katkı sağlayan sayın Prof. Dr. Vagif S. GULIYEV'e, doktora öğrenimim süresince burs vererek beni destekleyen TÜBİTAK'a, çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen sevgili aileme saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}_n$	n boyutlu öklid uzay
$\mathbb{R}_n^+$	n boyutlu öklid üst yarı uzay
$B_+(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı üst yarı yuvar
$B_+(0,r)$	Orijin merkezli r yarıçaplı üst yarı yuvar
$\mathrm{diam}(B_+)$	B_+ yuvarının çapı
$\mathcal{S}_+$	Schwartz uzayı
$\mathcal{S}'_+$	Schwartz uzayının duali
$\mathcal{C}(\mathbb{R}_n^+)$	$\mathbb{R}_n^+$ da sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_n^+)$	$\mathbb{R}_n^+$ da kompakt destekli fonksiyonlar uzayı
$L_p(\mathbb{R}_n)$	Lebesgue uzayı
$L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı Lebesgue uzayı
$L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}_n)$	Değişken üslü Lebesgue uzayı
$L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı değişken üslü Lebesgue uzayı
$L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı değişken üslü Lebesgue uzayının dual uzayı
$p(\cdot)$	Değişken üs fonksiyonu
$p'(\cdot)$	Değişken üs fonksiyonunun eşleniği
p^+	Değişken üs fonksiyonunun esas supremumu
p^-	Değişken üs fonksiyonunun esas infimumu
$\mathcal{P}(\mathbb{R}_n^+)$	Değişken üs fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}_+^n)$	Lokal log-Hölder sürekli olan üs fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}_+^n)$	Sonsuzda log-Hölder sürekli olan üs fonksiyonlarının kümesi
$LH(\mathbb{R}_+^n)$	Lokal olarak ve sonsuzda log-Hölder sürekli olan üs fonksiyonlarının kümesi
$\rho_{p(\cdot),\gamma}$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı modüler fonksiyon
$\operatorname{ess\,sup}$	Esas supremum

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ(devam)

Simgeler	Açıklama
ess inf	Esas infimum
supp$f$	f fonksiyonunun desteği
χ	Karakteristik fonksiyon
ω	Ağırlık fonksiyonu
$A_{p,\gamma}$	Muckenhoupt sınıfı
τ_h	Adi öteleme
T^y	Genelleştirilmiş öteleme
Γ	Gamma fonksiyonu
B_n	Bessel operatörü
$\triangle_{B_n}$	Laplace-Bessel operatörü
$F_B f$	f fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümü
$F_B^{-1} f$	f fonksiyonunun ters Fourier-Bessel dönüşümü
$f * g$	Konvolüsyon çarpım
$f \otimes g$	Genelleştirilmiş ötelemeye bağlı konvolüsyon çarpım
M	Hardy-Littlewood maksimal operatör
M_γ	B_n-maksimal operatörü

1. GİRİŞ

Değişken üslü fonksiyon uzayları ile ilgili çalışmalarda, son yıllarda büyük bir gelişme söz konusudur. Bu uzaylar, literatürde ilk olarak 1931 yılında Orlicz tarafından yayınlanan bir makale ile ortaya çıkmıştır (Orlicz, 1931). Orlicz, $L_{p(\cdot)}$ değişken üslü fonksiyon uzaylarını, reel sayı uzaylarında göz önüne aldı ve bu uzaylarda Hölder eşitsizliğini ispatladı.

Değişken üslü fonksiyon uzayları modüler fonksiyon uzayları ile ilgilidir. Modüler fonksiyon uzayları, sistematik olarak ilk Nakano tarafından çalışılmıştır (Nakano, 1950, 1951). Bu çalışmalar incelendiğinde, modüler fonksiyon uzaylarının pek çok matematikçi tarafından çalışıldığı görülmektedir. Daha sonra, modüler fonksiyon uzaylarında, Hudzik, Kaminska ve Musielak önemli çalışmalar yapmıştır. Bu uzaylar ile ilgili kapsamlı bilgi için Musielak tarafından yayınlanan (Musielak, 1983) monografisine bakılabilir.

Harmonik analiz, kısmi diferensiyel denklemler, potansiyel teori ve uygulamalı matematik alanlarında pek çok problem, değişken üslü fonksiyon uzaylarında ele alınmıştır. Özellikle değişken üslü fonksiyon uzayları, mühendislik matematik uygulamalarında gereklidir. Son yıllarda pek çok matematikçi tarafından ele alınan bazı güncel problemler çözülmeye çalışıldığında, klasik fonksiyon uzaylarının yetersiz olduğu fark edilmiştir. Bu problemlerden bazıları, lineer olmayan elastisite teorisi, akışkanlar mekaniği, matematiksel modelleme ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem problemleridir. Bu durum, yeni fonksiyon uzaylarının tanımlanmasını ve çalışılmasını gerektirmiştir. Bu uzaylardan biri de değişken üslü Lebesgue uzaylarıdır.

$L_{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ olarak gösterilen değişken üslü Lebesgue uzayları, Sharapudinov tarafından geliştirilmiştir. Bu araştırmalar, Tsenov'un 1961 yılında yayınlanan makalesinde ortaya çıkmıştır (Tsenov, 1961). Ayrıca, değişken üslü uzaylardaki çalışmaların bir sonraki önemli adımı, 1990 ların başında Kováčik ve Rákosník tarafından yayınlanan bir makale ile olmuştur (Kováčik ve Rákosník, 1991).

Değişken üslü Lebesgue uzayları, klasik Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olup, L_p klasik Lebesgue uzaylarına benzer pek çok özelliğe sahiptir. Bununla birlikte, $L_{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları Banach fonksiyon uzayıdır. $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ üs fonksiyonu için, $L_{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayı quasi-Banach uzayıdır. Ayrıca, değişken üslü

Lebesgue uzaylarındaki $p(\cdot)$ değişken üs fonksiyonu, log-Hölder süreklilik şartını sağlar. Genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen singüler integrallerin sınırlılığı için log-Hölder süreklilik şartının sağlanmasının yanı sıra maksimal operatörlerin sınırlılığını göstermeye de ihtiyacımız var. Dolayısıyla, Guliyev tarafından tanımlanan B_n-maksimal operatörün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı olması bizim için temel sonuçtur. Bu sonuç ilk olarak klasik maksimal operatörler için Cruz-Uribe, Fiorenza, Martell ve Pérez tarafından $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında ispatlandı (Cruz-Uribe vd., 2006) ve sistematik olarak Cruz-Uribe ve Fiorenza tarafından geliştirildi (Cruz-Uribe ve Fiorenza, 2013). Burada, en önemli hipotez değişken üs fonksiyonlarının regülerliği, yani log-Hölder süreklilik şartını sağlamasıdır. Diening bu şartı, Ω sınırlı bir bölge olmak üzere, klasik maksimal operatörün sınırlılığını $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında göstermek için kullanmıştır (Diening, 2004). Bununla birlikte, Diening eğer üs fonksiyonu kompakt bir kümenin dışında sabit ise, maksimal operatörün $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğunu göstermiştir. Bu problemler, Ω nın sınırlı olmadığı durumda Cruz-Uribe, Fiorenza ve Neugebauer (Cruz-Uribe vd., 2003) ve Nekvinda (Nekvinda, 2007) tarafından ele alınmış ve incelenmiştir.

Maksimal operatörün sınırlılığı, pek çok konvolüsyon tipli singüler integral operatörlerin sınırlılığını elde etmekte önemli rol oynamaktadır. Mihlin (Mihlin, 1962) ve Calderón ve Zygmund (Calderón ve Zygmund, 1956) tarafından incelenen bu singüler integral operatörler, Harmonik Analiz ve özellikle kısmi diferensiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada ele alacağımız B_n-maksimal operatör, Laplace Bessel operatörü ile ilgili konvolüsyon tipli singüler integral operatörlerin sınırlılığında önemli bir yere sahiptir.

Laplace-Bessel diferensiyel operatör $\Delta_{B_n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_n$, $B_n = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{\gamma}{x_n}.\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\gamma > 0$ ile ilgili konvolüsyon tipli singüler integral operatörlerin $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayındaki sınırlılığı ilk olarak Klyuchantsev (Klyuchantsev, 1970) ve Kipriyanov ve Klyuchantsev (Kipriyanov ve Klyuchantsev, 1970) tarafından tanımlandı ve incelendi. Aliev ve Gadjiev (Aliev ve Gadjiev, 1992), Gadjiev ve Guliyev (Gadjiev ve Guliyev, 2005), Guliyev ve Isayev (Guliyev ve Isayev, 2013), Ekincioğlu ve Şerbetçi (Ekincioğlu ve Şerbetçi, 1999, 2005) ve Ekincioğlu (Ekincioğlu, 2010), $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında B_n-singüler integrallerin sınırlılığını çalışmışlardır.

Maksimal fonksiyonlar, singüler integral operatörler, potansiyel operatörler ve Δ_{B_n}-Laplace-Bessel diferensiyel operatör ile ilgili konular, Fonksiyonel analiz ve uygulamalarında önemli diferensiyel operatör olarak bilinirler ve K. Stempak (Stempak, 1991), I. Kipriyanov ve M. Klyuchantsev (Klyuchantsev, 1970; Kipriyanov ve Klyuchantsev, 1970), L. Lyakhov (Lyakhov, 1983, 1997), A.D. Gadjiev ve I.A. Aliev (Gadjiev ve Aliev, 1988, 1992), V.S. Guliyev (Guliyev, 1998, 2003), V.S. Guliyev ve F.A. Isayev (Guliyev ve Isayev, 2013), İ. Ekincioğlu (Ekincioğlu, 2010), İ. Ekincioğlu ve A. Şerbetçi (Ekincioğlu ve Şerbetçi, 1999, 2005) gibi pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada, $L_{p(\cdot)}$ uzayının arzu edilmeyen bazı özellikleri ile karşı karşıya kaldık. Örneğin, öteleme operatörü $L_{p(\cdot)}$ uzayında sürekli değildir. Çünkü, $p(\cdot)$ sabitten farklı olduğunda, $f \in L_{p(\cdot)}$ için $\tau_y f = f(x-y) \notin L_{p(\cdot)}$ dir. Sonuç olarak, $g \in L_1$ için konvolüsyon sürekli değildir, yani, $\|f * g\|_{p(\cdot)} \nleq C\,\|g\|_1 \|f\|_{p(\cdot)}$ dir. Eğer $p(\cdot)$, düzgün ve $|p(x)-p(y)| \leq C \left| \ln|x-y| \right|^{-1}$ lokal süreklilik şartını sağlarsa $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için bu mümkündür. Diening (Diening, 2004), M Hardy-Littlewood maksimal operatörün sürekliliği için bu özelliği kullanmıştır. Eğer $p(\cdot)$ yeterince büyük B_R yuvarının dışında sabit ve lokal düzgün süreklilik şartlarını sağlarsa bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatör $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında süreklidir (Diening, 2004). Özellikle $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $f * \varphi_\varepsilon \to f$ sağlanır. Burada $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(x/\varepsilon)$ dir. Bu bağlamda, $p(\cdot)$ için süreklilik modülü, maksimal operatör için bir sınırlayıcıdır. Bununla birlikte, düzgün lokal süreklilik şartı, Hardy-Littlewood maksimal operatörün sürekliliği için yeterli midir sorusu ortaya çıkıyor. Bu sorunun cevabı, $p(\cdot)$ nin herhangi bir büyük yuvarın dışında sabit olması durumunda evettir.

M klasik maksimal operatörlerin $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılığı birçok matematikçi tarafından ispatlanmıştır. Bununla birlikte B_n-maksimal operatörlerin $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ Lebesgue uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir (Guliyev, 2003). Bu sonuçlar bizi, Δ_{B_n}-Laplace-Bessel diferensiyel operatör ile elde edilen maksimal operatörleri (B_n-maksimal operatör) değişken üslü Lebesgue uzaylarda incelemeye motive etmiştir.

Bu çalışmada, değişken üslü Lebesgue uzaylarda B_n-maksimal operatörlerin sınırlılığı incelenecektir. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalısmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiş, Lebesgue uzayları ve ağırlıklı Lebesgue uzayları takdim edilmiştir. Üçüncü bölümde, değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılarak bu uzayların temel özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölüm, genelleştirilmiş öteleme operatörü ve temel özelliklerini içermektedir. Ayrıca bu bölümde, genelleştirilmiş öteleme operatörünün Lebesgue ve değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılık problemi incelenmiştir. Beşinci bölüm, tezin orijinal sonuçlarını içeren kısmıdır. Son bölümde, B_n-maksimal operatör tanıtılarak B_n-maksimal operatörünün değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. Ω bir küme olsun. Ω nın alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına Ω kümesi üzerinde bir cebirdir denir.

i. $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii. Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = \Omega \backslash E \in \mathcal{A}$,

iii. $k = 1, 2, \ldots, n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$.

Eğer (iii) şartı yerine, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{E}_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ özelliği alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine σ-cebiri adı verilir.

Tanım 2.1.2. Ω bir küme ve $\mathcal{A}$ da Ω üzerinde bir σ-cebiri olsun. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.1.3. $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer μ fonksiyonu

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. Her $A \in \mathcal{A}$ için $0 \leq \mu(\mathcal{A}) \leq \infty$,

iii. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa μ fonksiyonuna Ω üzerinde ölçü denir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de ölçü uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.4. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme veya $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, bu önerme hemen her yerde doğrudur denir ve kısaca h.h.y şeklinde yazılır. Bir önermenin doğru olmadığı Ω noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, o önerme hemen hemen her Ω için doğrudur denir.

Tanım 2.1.5. $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve f reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\big((\alpha, +\infty)\big) = \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

ise bu durumda f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir. Ω üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. Eğer V, toplama $+ : V \times V \to V$ ve skaler çarpma $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ işlemlerine göre değişmeli grup ise bu durumda V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir, burada $\mathbb{F}$ cismi, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olabilir.

Tanım 2.1.7. V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ fonksiyonu, her $x, y \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ skaleri için

i. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlarsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V üzerinde bir norm ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.8. V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ fonksiyonu, her $x, y \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ skaleri için

i. $\|x\| \geq 0$,

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlarsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V üzerinde bir semi-norm denir.

Bu tanımda (iii) özelliği yerine $\|x + y\| \leq C\,(\|x\| + \|y\|)$, $C > 0$ olması durumunda $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V üzerinde bir quasi-norm adı verilir.

Tanım 2.1.9. X ve Y iki lineer uzay ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha\, T(x) + \beta\, T(y)$ ise bu durumda T operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.1.10. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq C\|x\|$ olacak şekilde C sabit sayısı varsa T operatörüne sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.1.11. X ve Y iki normlu uzay, $T : X \to Y$ lineer operatör ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.12. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.13. $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesinde sınırlı olsun. $d = d(X)$, X kümesinin çapı olmak üzere $\omega_f : (0, d] \to \mathbb{R}_+$,

$$\omega_f(\delta) = \omega_f(\delta; X) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : \; x_1, x_2 \in X, \; |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonuna f nin X kümesinde süreklilik modülü denir. X kümesinin çapı, $d(X) = \sup\{d(x, y) : \; x, y \in X\}$ dir.

Tanım 2.1.14. $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_1, x_2 \in X$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna X kümesinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.15. $X \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan açık bir küme ve f, X kümesinde sürekli reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

kümesine f fonksiyonunun desteği denir. Eğer $\text{supp}(f)$, X de kompakt bir küme ise f fonksiyonuna X kümesinde kompakt desteğe sahiptir denir (Stein, 1993).

2.2. Schwartz Uzayları

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu öklid uzayı olsun. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ için $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|x| = (x, x)^{1/2}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \; x_n > 0\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ multi-indisler olmak üzere f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde her mertebeden türevleri var ve tüm türevler bir polinomla çarpıldığında sonsuzda hızla azalan, yani,

$$\varrho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty$$

ise bu durumda f fonksiyonu Schwartz uzayına aittir denir ve $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir, burada $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ ve $\varrho_{\alpha,\beta}(f)$, f fonksiyonunun Schwartz semi normudur. $B_n = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{\gamma}{x_n} \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\gamma > 0$ Bessel diferensiyel operatör olmak üzere $\mathcal{S}_+ = \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n_+)$ Schwartz uzayı ve

$$D_\gamma^\alpha := D_{x'}^{\alpha'} B_n^{\alpha^n} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_{n-1}^{\alpha_{n-1}} B_n^{\alpha^n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} B_n^{\alpha^n}$$

olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{S}_+$ için $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n_+} |x^\beta D_\gamma^\alpha f(x)| < \infty$ dir.

Tanım 2.2.2. $f \in \mathcal{S}_+$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Fourier-Bessel ve ters Fourier-Bessel dönüşümleri sırasıyla

$$F_B f(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(y) e^{-i(x',y')} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_n y_n)\, y_n^\gamma dy \quad \text{ve} \quad F_B^{-1} f(x) = C_{n,\gamma}\, F_B f(-x)$$

şeklinde tanımlanır, burada $j_\gamma(t)$ normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu, $(x', y') = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1}$ ve $C_{n,\gamma} = (2\pi)^{n-1} 2^{\gamma-1} \Gamma^2(\frac{\gamma+1}{2}) = \frac{2}{\pi}\omega(2, \gamma)$ dır.

Yukarıdaki tanımda verilen Fourier-Bessel dönüşümü,

$$\triangle_{B_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \gamma > 0$$

$\triangle_{B_n}$ Laplace-Bessel operatörü ile ilgilidir (Aliev, 1987).

Tanım 2.2.3. f ve g, $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun.

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

şeklinde yazılan h fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir.

2.3. Lebesgue Uzayları

Tanım 2.3.1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}) : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-ninci mertebeden integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında norm

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \Omega} |f(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.2. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı, $K \subset \Omega$ herhangi bir kompakt küme ve f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna Ω üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyon denir ve $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3. $1 \leq p, q \leq \infty$ için $T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_q} \leq C \|f\|_{L_p}$$

ise T operatörüne (p, q) kuvvetli tiplidir denir, burada $C > 0$ sayısı f fonksiyonundan bağımsızdır. Ayrıca, μ bir ölçü olmak üzere her $t > 0$ ve $q < \infty$ için

$$\mu(\{x : |Tf(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C \|f\|_p}{t} \right)^q$$

ise T operatörüne (p, q) zayıf tiplidir denir, burada C sayısı, t ve f den bağımsızdır.

Teorem 2.3.4. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ ve T, $L_{p_0} \cup L_{p_1}$ uzayında tanımlı altlineer operatör olsun. Eğer T operatörü, (p_0, p_0) zayıf tipli ve (p_1, p_1) zayıf tipli ise bu durumda her $p_0 < p < p_1$ için (p, p) kuvvetli tiplidir.

Teorem 2.3.5. (Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi) $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ ve $\theta \in (0,1)$ olsun. $1 \leq p, q \leq \infty$ için

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olarak tanımlayalım. Eğer

$$\|Tf\|_{L_{q_0}} \leq N_0 \|f\|_{L_{p_0}}, \quad f \in L_{p_0}$$

$$\|Tf\|_{L_{q_1}} \leq N_1 \|f\|_{L_{p_1}}, \quad f \in L_{p_1}$$

olmak üzere T lineer operatör ise bu durumda her $f \in L_p$ için

$$\|Tf\|_q \leq N_0^{1-\theta} N_1^{\theta} \|f\|_p$$

dir. Dolayısıyla T operatörü L_p uzayından L_q uzayına sınırlı bir dönüşümdür.

Tanım 2.3.6. $0 < p < \infty$, f integrallenebilir bir fonksiyon ve $\gamma > 0$ olsun. $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ Lebesgue uzayı, $\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} < \infty$ özelliğini sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar kümesidir, burada

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p \, x_n^{\gamma} dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in \mathbb{R}^n_+} |f(x)| , & p = \infty \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.3.7. (Hardy-Littlewood Maksimal Operatör) $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(x)| dy$$

şeklinde tanımlanır, burada $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, x merkezli r yarıçaplı yuvardır.

Tanım 2.3.8. (B_n-Maksimal Operatör) $f \in L_{1,\gamma}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. B_n-maksimal operatör

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} |B_+(0,r)|_\gamma^{-1} \int\limits_{B_+(0,r)} T^y |f(x)| \, y_n^{\gamma} dy$$

şeklinde tanımlanır (Guliyev, 1998, 2003).

Teorem 2.3.9. (Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$, $1 < p' < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer $f \in L_{p,\gamma}$ ve $g \in L_{p',\gamma}$ ise bu durumda $fg \in L_{1,\gamma}$ dır. Yani

$$\|fg\|_{L_{1,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}} \|g\|_{L_{p',\gamma}}$$

dir.

Teorem 2.3.10. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Her $f, g \in L_{p,\gamma}$ için

$$\|f + g\|_{L_{p,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}} + \|g\|_{L_{p,\gamma}}$$

dir.

Teorem 2.3.11. (Jensen Eşitsizliği) $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) = 1$ olmak üzere sonlu bir ölçü uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için f fonksiyonu $a < f(x) < b$ olmak üzere $L_1(X, \mu)$ de reel bir fonksiyon ve φ, (a, b) aralığında konveks ise bu durumda

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu$$

dir (Diening vd., 2017).

Teorem 2.3.12. (Young Eşitsizliği) $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ olmak üzere $1 \leq p, q, r \leq \infty$ olsun. Bu durumda $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ için

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

dir (Diening vd., 2017).

Teorem 2.3.13. (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ (Lebesgue) ölçülebilir fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. Eğer (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise, bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

dir.

Teorem 2.3.14. (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) $f_n : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ olmak üzere (Lebesgue) ölçülebilir fonksiyonların dizisi olsun. Her bir $x \in \mathbb{R}$

için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olmak üzere $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda her bir n için f_n dizisi gibi f fonksiyonu da integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

dir.

Lemma 2.3.15. $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p^- \leq p^+ \leq \infty$ olsun. Bu durumda X noktasını içeren her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı ve $\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)+L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ özelliğini sağlayan $f \in L_{p(\cdot)(\mathbb{R}^n)} + L_\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(\beta \fint_B |f(y)|dy\right)^{p(x)} \leq \fint_B |f(y)|^{p(y)}dy + h_B(x)$$

olacak şekilde $\beta \in (0, 1)$ vardır, burada her $k \geq 0$ için

$$h_B(x) := \min\{|B|^k, 1\}\left((e + |x|)^{-k} + \fint_B (e + |y|)^{-k}dy\right)$$

dir, burada β, $\dfrac{1}{p}$ nin log-Hölder süreklilik sabiti ile p ye bağlıdır (Diening vd., 2009).

2.4. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_n > 0\}$ olmak üzere $\gamma > 0$ için x merkezli r yarıçaplı üst yarı yuvarı $B_+(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : \ |x - y| < r\}$ ile gösterelim. Orijin merkezli birim yuvarı da $B_+(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ |x| = 1\}$ ile gösterelim. Ölçülebilir $B_+ \subset \mathbb{R}^n_+$ kümesi için $|B_+|_\gamma = \int_{B_+} x_n^\gamma dx$ olsun. Bu durumda $|B_+(0, r)|_\gamma = \int_{B_+(0,r)} x^\gamma dx = \omega(n, \gamma)r^{n+\gamma}$ dir. Burada $\omega(n, \gamma) = |B_+(0, 1)|_\gamma$ dir.

$\mathbb{R}^n_+$ uzayında negatif olmayan lokal integrallenebilir ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu adı verilir. f, $\mathbb{R}^n_+$ uzayında ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{f : \int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p \omega(x)\, x_n^\gamma dx < \infty\right\}$$

kümesine $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p \omega(x)\, x_n^\gamma dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır, burada ω ağırlık fonksiyonudur ve $\omega = 1$ için $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayı $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $\|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ normu $\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.1. $1 < p < \infty$ ve ω, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$[\omega]_{A_p} := \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < \infty$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfına aittir denir. $p = 1$ için,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \le C \operatorname{ess}\inf_{x\in B} \omega(x)$$

özelliğini sağlayan bir $C > 0$ sabit sayısı mevcut ise bu durumda $\omega \in A_1$ dir ve $[\omega]_{A_1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2. Eğer $1 < p < \infty$ için

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n_+\\ r>0}} \left(|B_+(x,r)|_\gamma^{-1}\int_{B_+(x,r)} \omega(y)y_n^\gamma dy\right)\left(|B_+(x,r)|_\gamma^{-1}\int_{B_+(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)y_n^\gamma dy\right)^{p-1} < \infty$$

ise ω ağırlık fonksiyonu $A_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ sınıfına aittir denir ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n_+$ ve $r > 0$ için

$$|B_+(x,r)|_\gamma^{-1}\int_{B_+(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)y_n^\gamma dy \le C \operatorname{ess}\inf_{y\in B_+(x,r)} \omega(y)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabit sayısı varsa $\omega \in A_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir.

$A_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ sınıfının özellikleri ile B. Muckenhoupt sınıfının özellikleri benzerdir. Özellikle, eğer $\omega \in A_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ise, bu durumda yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\omega \in A_{p-\varepsilon,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $p_1 > p$ için $\omega \in A_{p_1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir.

Dikkat edilmelidir ki, $1 < p < \infty$ iken $|x|^\alpha \in A_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olması için gerek ve yeter şart $-(n+\gamma) < \alpha < (n+\gamma)(p-1)$ dir. Ayrıca $|x|^\alpha \in A_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olması için gerek ve yeter şart $-(n+\gamma) < \alpha \le 0$ olmasıdır.

3. $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARI

Bu bölümde, değişken üslü Lebesgue uzayları ve özellikleri takdim edilecektir. Modül ve norm kavramları tanımlanacak ve değişken üslü Lebesgue uzaylarında Hölder eşitsizliğinin ispatı verilecektir. Daha sonra normda, modülde ve ölçüde yakınsaklık ele alınarak $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayının Banach uzayı olduğu gösterilecektir. Son olarak, ispatlarımızda kullanacağımız teorem verilecektir.

$L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarını daha iyi açıklamak için basit bir örnek ile başlayalım:

$x \in \mathbb{R}_+$ için $f(x) = |x|^{-1/3}$ olsun.

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x|^{-\frac{p}{3}} x^{\gamma} dx = \int_0^{\infty} x^{-\frac{p}{3}+\gamma} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{A} x^{-\frac{p}{3}+\gamma} dx = \infty$$

elde edilir, burada

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\frac{p}{3}+1+\gamma} = \begin{cases} 0, & 1 \leq p < 3+3\gamma \\ 1, & p = 3+3\gamma \\ \infty, & p > 3+3\gamma \end{cases}$$

ve

$$\lim_{A \to \infty} A^{-\frac{p}{3}+1+\gamma} = \begin{cases} \infty, & 1 \leq p < 3+3\gamma \\ 1, & p = 3+3\gamma \\ 0, & p > 3+3\gamma \end{cases}$$

dir. Bu durumda, f fonksiyonu $1 \leq p \leq \infty$ için $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ uzayına ait değildir. Verilen p nin tek bir değeri ya orijinde çok hızlı artar ya da sonsuzda azalır.

f fonksiyonunun davranışını daha kesin ifade etmek için farklı iki $L_{p,\gamma}$ uzaylarında uygulayalım. Bunlar, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ ve $L_{4,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ uzayları olsun. f nin tanım kümesini $f \in L_{2,\gamma}([0,2])$ ve $f \in L_{4,\gamma}(\mathbb{R}_+ \backslash [0,2])$ olmak üzere ikiye bölelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x|^{-\frac{2}{3}} x^{\gamma} dx &= \int_0^2 x^{-\frac{2}{3}+\gamma} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^2 x^{-\frac{2}{3}+\gamma} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{x^{\frac{1}{3}+\gamma}}{\frac{1}{3}+\gamma} \right|_{\varepsilon}^{2} = \frac{3}{1+3\gamma} \lim_{\varepsilon \to 0} (2^{\frac{1}{3}+\gamma} - \varepsilon^{\frac{1}{3}+\gamma}) < \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\backslash[0,2]} |x|^{-\frac{4}{3}} x^{\gamma} dx &= \int_2^{\infty} x^{-\frac{4}{3}+\gamma} dx \\ &= \lim_{A\to\infty} \left(\int_2^A x^{-\frac{4}{3}+\gamma} dx \right) \\ &= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{-\frac{1}{3}+\gamma} x^{-\frac{1}{3}+\gamma} \Big|_2^A \right) < \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yaklaşımın eksikliği, daha karmaşık fonksiyonlar için $L_{p,\gamma}$ uzayında ek bilgi verilmesi gerekmektedir. Örneğin,

$$g(x) = |x|^{-1/3} + |x-1|^{-1/4}$$

olsun. Bu durumda $g \in L_{2,\gamma}([0,2])$ dir ya da daha genel olarak $p < 3$ için $g \in L_{p,\gamma}([0,2])$ dir. Ancak burada $x = 1$ noktasındaki singülerliğin lokal davranışı ile ilgili bilgi eksikliği vardır. Bununla birlikte, $g \notin L_{4,\gamma}(\mathbb{R}_+\backslash[0,2])$ ve $p > 4$ için $g \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+\backslash[0,2])$ dir. Fonksiyonun davranışını elde etmek için tanım kümesini $g \in L_{2,\gamma}([0,1/2])$, $g \in L_{3,\gamma}([1/2,2])$ ve $g \in L_{9/2,\gamma}(\mathbb{R}_+\backslash[0,2])$ gibi daha alt bölgelere ayırmalıyız. O halde, değişken üslü Lebesgue uzaylarda tanım kümesini değiştirmek yerine üssü değiştirelim. Bu durumda üs fonksiyonunu

$$p(x) = \frac{9|x|+2}{2|x|+1} = \frac{9}{2} - \frac{5/2}{2|x|+1}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $p(0) = 2$, $p(1) = 11/3$ ve $|x| \to \infty$ iken $p(x) \to 9/2$ dir ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^{p(x)} x^{\gamma} dx < \infty \qquad \text{ve} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}_+} |g(x)|^{p(x)} x^{\gamma} dx < \infty$$

olduğunu görmek kolaydır. Diğer bir ifadeyle, $p(\cdot)$ değişken üs fonksiyonu, her bir fonksiyonun davranışını daha kesin açıklamamızı sağlar. Ayrıca, üs fonksiyonlarını değiştirerek, fonksiyonların davranışını belirleyebiliriz. Örneğin, üs fonksiyonu

$$q(x) = \frac{8|x|+2}{2|x|+1} = 4 - \frac{2}{2|x|+1}$$

şeklinde olsun. Bu durumda f fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^{q(x)} x^{\gamma} dx < \infty$$

olur. g fonksiyonu için $|g(\cdot)|^{q(\cdot)}$ lokal integrallenebilirdir ama

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(x)|^{q(x)} x^{\gamma} dx = \infty$$

olur. Bu örnekler bizi değişken üslü Lebesgue uzaylarını incelemeye yöneltmektedir. Şimdi değişken üslü Lebesgue uzaylarını ayrıntılı bir şekilde inceleyelim.

3.1. Üs Fonksiyonları

Tanım 3.1.1. $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$, $p(\cdot) : \mathbb{R}_+^n \to [1, \infty]$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar kümesi olsun. $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ kümesinin elemanlarına üs fonksiyonları denir. Değişken üs fonksiyonlar $p(\cdot)$ ile gösterilmektedir.

$\mathbb{R}_+$ uzayında, üs fonksiyonları $1 \le p \le \infty$ için $p(x) = p$ ya da $p(x) = 2 + \sin x$ olsun. Bununla birlikte üs fonksiyonları sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $X = (0, 1)$ için $p(x) = \dfrac{1}{x}$ ve $X = (1, \infty)$ için $p(x) = x$ üs fonksiyonları sırasıyla sınırlı ve sınırsız üs fonksiyonları olup bunlar üsler arasındaki farkı en iyi anlatan örneklerdir.

Üs fonksiyonlarının değer kümesini tanımlamak için $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ ve

$$p^-(\mathbb{R}_+^n) = \operatorname{ess} \inf_{x \in \mathbb{R}_+^n} p(x), \quad p^+(\mathbb{R}_+^n) = \operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} p(x)$$

olsun. Genelikle $p^- = p^-(\mathbb{R}_+^n)$ ve $p^+ = p^+(\mathbb{R}_+^n)$ şeklinde gösterilir ve bu durumda $p(x)$ aşağıdaki standart şartlardan birini sağlar:

$$1 \le p^- \le p(x) \le p^+ < \infty, \qquad 1 < p^- \le p(x) \le p^+ < \infty.$$

Klasik Lebesgue uzaylarında olduğu gibi, burada da $p(x) = 1$, $1 < p(x) < \infty$ ve $p(x) = \infty$ için farklı durumlar söz konusudur. Bundan dolayı $\mathbb{R}_+^n$ nın aşağıdaki alt kümelerini tanımlayalım:

$$(\mathbb{R}_+^n)_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p(x) = \infty\},$$

$$(\mathbb{R}_+^n)_1^{p(\cdot)} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p(x) = 1\},$$

$$(\mathbb{R}_+^n)_0^{p(\cdot)} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : 1 < p(x) < \infty\}.$$

$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dir ve $p'(x)$ eşlenik üs fonksiyonu

$$p'(x) := \begin{cases} \infty, & x \in (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_1 \\ \frac{p(x)}{p(x)-1}, & x \in (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_0 \\ 1, & x \in (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.2. $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \to [1, \infty]$ olsun. $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ ve $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ için lokal log-Hölder süreklilik şartı,

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{\log(e + 1/|x - y|)} \tag{3.1}$$

eşitsizliği ile tanımlanır. Bu şartı sağlayan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üsler kümesi $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$ ile gösterilir. $x \in \mathbb{R}^n_+$ için sonsuz log-Hölder süreklilik şartı,

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ ile gösterilir, burada C_0, C_∞ ve p_∞, x ve y den bağımsız pozitif sabit sayılardır ve $p_\infty = \lim\limits_{x\to\infty} p(x) > 1$ dir.

Eğer $p(\cdot)$ değişken üs fonksiyonu, lokal ve sonsuz log-Hölder süreklilik şartlarını sağlarsa yani (3.1) ve (3.2) şartlarını sağlarsa $p(\cdot)$ üs fonksiyonuna regülerdir denir ve $p(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n_+)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.3.

i. $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda $p(\cdot)$ düzgün süreklidir ve her $X \subset \mathbb{R}^n_+$ sınırlı kümesi için $p(\cdot) \in L_\infty(X)$ dir.

ii. $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda $p(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ dır.

iii. X sınırlı ve $p(\cdot) \in L_\infty(X)$ ise bu durumda C_∞ sabit sayısı $\|p(\cdot)\|_\infty$ normuna, X in çapına ve orijinden uzaklığına bağlı olmak üzere $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_\infty(X)$ dir.

iv. Her $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ ve $|y| \geq |x|$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}$$

olacak şekilde bir C sabit sayısı varsa $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ dır.

v. $p^+ < \infty$ ise bu durumda $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$ ile $r(\cdot) = 1/p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$ birbirine denktir. Gerçekten, $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{p(x)-p(y)}{(p^+)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq \left|\frac{p(x)-p(y)}{(p^-)^2}\right|$$

dir. Benzer şekilde, $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ olması için gerek ve yeter şart $r(\cdot) = 1/p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ olmasıdır.

Lemma 3.1.4. $p(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n_+)$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Bu durumda,

i. $\widetilde{p} \in LH(\mathbb{R}^n_+)$,

ii. $\widetilde{p}(x) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+$,

iii. $\widetilde{p}^- = p^-$ ve $\widetilde{p}^+ = p^+$

olacak şekilde bir $\widetilde{p}(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ fonksiyonu vardır.

Tanım 3.1.5. $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathbb{R}^n_+$ sınırlı iki üs fonksiyonu olsun. $p(\cdot)$ nin $q(\cdot)$ dan daha zayıf olmaması için gerek ve yeter şart $\phi_p(x,z) = z^{p(x)}$ nin $\phi_q(x,z) = z^{q(x)}$ den daha zayıf olmamasıdır. Yani, hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ ve $x \geq 0$ için

$$\phi_q(x,z) \leq C_1\, \phi_p(x, C_2\, z) + h(x) \tag{3.3}$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sabit sayıları ve $h \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$, $h \geq 0$ vardır. O halde $q(\cdot) \preceq p(\cdot)$ ve $\phi_q \preceq \phi_p$ yazılabilir.

Lemma 3.1.6. $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathbb{R}^n_+$ sınırlı iki üs fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

i. $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow L_{q(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$,

ii. $q(\cdot) \preceq p(\cdot)$,

iii. $q(\cdot) \leq p(\cdot)$ ve $\limsup\limits_{\lambda \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n_+} \lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} x_n^\gamma dx = 0$ dır.

Burada $p(x) = q(x)$ ve $0 \leq \lambda < 1$ için $\lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} := 0$ dır.

İspat. $C_1, C_2 > 0$ sabit sayıları ve $h \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$, $h \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$z^{q(x)} \leq C_1\,(C_2\,z)^{p(x)} + h(x) \tag{3.4}$$

dir. $x \in \mathbb{R}^n_+$ ve $h(x) < \infty$ olsun. Bu durumda $z \to \infty$ limiti $q(x) \leq p(x)$ olduğunu gösterir. h fonksiyonu h.h.y sonlu olduğundan h.h.y $q(x) \leq p(x)$ dir. $r(x) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{r(x)} := \frac{1}{q(x)} - \frac{1}{p(x)}$ üs fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $r(x) := \frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}$ dir. Eğer $p(x) = q(x)$ ise $r(x) = \infty$ olur. Ayrıca, $r(x)$ ölçülebilirdir ve $r(x) : \mathbb{R}^n_+ \to [1,\infty]$ dir. $p(x) \geq 1$ olduğundan

$$z^{q(x)} \leq \frac{1}{2}(R\,z)^{p(x)} + h(x) \tag{3.5}$$

olacak şekilde $R \geq 1$ vardır. $\lambda := 1/R$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < 1$ dir. Her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $\lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} := 0$ kuralı ile $p(x) = q(x)$ dir. Şimdi $x \in \mathbb{R}^n_+$ ve $p(x) > q(x)$ olduğunu kabul edelim. (3.5) den dolayı $z = R^{\frac{p(x)}{q(x)-p(x)}}$ ile

$$R^{\frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}} \leq \frac{1}{2}\big(RR^{\frac{p(x)}{q(x)-p(x)}}\big)^{p(x)} + h(x) = \frac{1}{2}R^{\frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}} + h(x)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla $R^{\frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}} \leq 2h(x)$ dir. Böylece her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $p(x) > q(x)$ olmak üzere

$$\lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} = R^{\frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}} \leq 2h(x) < \infty$$

elde edilir. Genel olarak her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} x_n^{\gamma} dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} |h(x)| x_n^{\gamma} dx$$

elde edildi. Böylece *iii* ün ispatı tamamlanır.

Her $z \geq 1$ için $q(x) \leq p(x)$ olduğunda, $z^{q(x)} \leq z^{p(x)}$ olur. Böylece her $z \geq 1$ için $C_1, C_2 \geq 1$ ve $h \geq 0$ iken (3.3) sağlanır. Şimdi $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} x_n^{\gamma} dx < \infty$ olacak şekilde bir $0 < \lambda < 1$ alalım. $0 \leq z \leq 1$ olsun. Bu durumda Young eşitsizliği, yani $ab \leq a^{\delta} + b^{\delta'}$, $\delta = \frac{p(x)}{q(x)}$ ve $\delta' = \frac{p(x)}{p(x)-q(x)}$ kullanılarak

$$z^{q(x)} = (z/\lambda)^{q(x)} \lambda^{q(x)} \leq (z/\lambda)^{p(x)} + \lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}} = \left(\frac{1}{\lambda} z\right)^{p(x)} + \lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}}$$

elde edilir. $C_1 := 1$, $C_2 := 1/\lambda$, $h(x) := \lambda^{\frac{p(x)q(x)}{p(x)-q(x)}}$ olsun. Bu durumda $h \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olur ve (3.4) elde edilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.7. $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ sürekli ve sınırlı $(-\infty < p^- \leq p^+ < +\infty)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

i. $p(\cdot)$ lokal log-Hölder süreklidir.

ii. Her B_+ yuvarı için $|B_+|_\gamma^{p^-_{B_+} - p^+_{B_+}} \leq C$ dir.

iii. Her B_+ yuvarı ve her $x \in B_+$ için $|B_+|_\gamma^{p^-_{B_+} - p(x)} \leq C$ dir.

iv. Her B_+ yuvarı ve her $x \in B_+$ için $|B_+|_\gamma^{p(x) - p^+_{B_+}} \leq C$ dir.

Burada $p^+_{B_+} := \operatorname{ess}\sup\limits_{x \in B_+} p(x)$ ve $p^-_{B_+} := \operatorname{ess}\inf\limits_{x \in B_+} p(x)$ dir.

İspat. $i \Rightarrow ii$: $p^-_{B_+} - p^+_{B_+} \leq 0$ olduğundan yarıçapı 1/4 den büyük yuvarlar için ispat açıktır. Eğer B_+ yuvarının yarıçapı 1/4 den küçük ise bu durumda lokal log-Hölder şartı kullanılarak,

$$|p^-_{B_+} - p^+_{B_+}| \log \frac{1}{|B_+|_\gamma} \leq \frac{C_0 \log(1/|B_+|_\gamma)}{\log(e + 1/\operatorname{diam}(B_+))} \leq \frac{C_0\, n \log(1/|B_+|_\gamma)}{\log(C/|B_+|_\gamma)} \leq C$$

elde edilir.

$ii \Rightarrow i$: $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ olsun. $x, y \in B_+$ ve $\frac{|x-y|}{2} < r < |x - y|$ olmak üzere r yarıçaplı bir B_+ yuvarı alalım. $|B_+|_\gamma \leq (2r)^{n+\gamma}$ olduğundan

$$(2|x-y|)^{-|p(x)-p(y)|} \leq (2r)^{-|p(x)-p(y)|} \leq |B_+|_\gamma^{\frac{-|p(x)-p(y)|}{n+\gamma}} \leq |B_+|_\gamma^{\frac{p^-_{B_+} - p^+_{B_+}}{n+\gamma}} \leq C_0^{\frac{1}{n+\gamma}}$$

elde edilir. $|p^+ - p^-| < \infty$ olduğundan $C > 1$ için $|x - y|^{-|p(x)-p(y)|} \leq C$ olduğu açıktır. Bu eşitsizliğin logaritması alındığında

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{\log C}{|\log |x - y||}$$

olur. $|x-y| < \frac{1}{2}$ olduğunda ispat görülür. Diğer taraftan, $p(x)$ sınırlı olduğundan $|x-y| \geq \frac{1}{2}$ iken ispat açıktır.

ii, iii ve iv şartlarının denklikleri $p(x)$ fonksiyonunun sürekliliğinden elde edilir.

Önerme 3.1.8. Eger $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda $C_{\log}(q(\cdot)) = C_{\log}(p(\cdot))$, $q^- = p^-$ ve $q^+ = p^+$ olduğunda $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$ dır. Ayrıca, $q_\infty = p_\infty$ dur.

İspat. Her $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq \frac{C_0}{\log\left(e + \frac{1}{|x-y|}\right)} \quad \text{ve} \quad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)}$$

olmak üzere $C_0 > 0$ ve $p_\infty \geq 1$ olsun. $t \mapsto \frac{1}{\log(e+1/t)}$ süreklilik modülü olduğundan alt ve üst sınırlar ve benzer süreklilik modülü ile $\frac{1}{p(\cdot)}$ yi $\mathbb{R}^n_+$ uzayına genişletebiliriz. Daha kesin olarak, $y \in \mathbb{R}^n_+$ için $a(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonunu

$$a(y) := \sup_{z \in \mathbb{R}^n_+} \left(\frac{1}{p(z)} - \frac{C_0}{\log\left(e + \frac{1}{|z-y|}\right)} \right)$$

şeklinde tanımlayalım. Özellikle lokal log-Hölder sabiti $C_{\log}(p(\cdot)) \leq C_\infty$ ve her $y \in \mathbb{R}^n_+$ için $a(y) = \frac{1}{p(y)}$ olmak üzere $a(y)$ lokal log-Hölder süreklidir.

$\frac{1}{p(x)}$ in $\mathbb{R}^n_+$ uzayına genişlemesinin sonsuz log-Hölder şartını sağlaması ve $p(x)$ gibi alt ve üst sınıra sahip olması için $q(y)$ üs fonksiyonu tanımlayalım:

$$\frac{1}{q(y)} := \min\left\{ \max\left\{ \frac{1}{a(y)}, \frac{1}{p_\infty} - \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}, \frac{1}{p^+} \right\}, \frac{1}{p_\infty} + \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}, \frac{1}{p^-} \right\}.$$

$x \mapsto \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}$ log-Hölder sürekli olduğundan $\frac{1}{q(\cdot)}$ üs fonksiyonunun log-Hölder sabiti $\max\{C_0, C_\infty\} = C_{\log}(p(\cdot))$ sınırını aşamaz. Her $y \in \mathbb{R}^n_+$ için $\frac{1}{p(\cdot)}$ nin sonsuz log-Hölder süreklilik şartı $\frac{1}{q(y)} = a(y) = \frac{1}{p(y)}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla aradığımız üs fonksiyonu $q(\cdot)$ dur. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. Modüler Fonksiyon ve Norm

$p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonu olsun. Sezgisel olarak, $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayları,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx < \infty$$

özelliğini sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlar kümesi olarak tanımlanır. Fakat bu tanım göz önüne alındığında bazı problemler ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerden en yaygın bilineni, $(\mathbb{R}^n_+)_\infty$ pozitif ölçülü olduğunda bu tanım geçerli değildir. Dolayısıyla bu problemi ortadan kaldırmak için aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 3.2.1. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve f, Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olsun. $p(\cdot)$ ye bağlı modüler fonksiyon,

$$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $(\mathbb{R}^n_+)_\infty$ üzerinde sınırlı değil veya $f(\cdot)^{p(\cdot)} \notin L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty)$ ise $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = +\infty$ olur. $|(\mathbb{R}^n_+)_\infty| = 0$ olduğunda, özellikle $p^+ < \infty$ iken $\|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} = 0$ dır. $|\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty| = 0$ durumunda ise $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}$ olur. Modüler fonksiyon basit olarak $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f)$ ya da $\rho_\gamma(f)$ şeklinde yazılabilir.

$L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayını tanımlamak için modüler fonksiyon kavramını kullanacağız. Şimdi modüler fonksiyonun temel özelliklerini inceleyelim:

Önerme 3.2.2. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun.

i. Her f için $\rho_\gamma(f) \geq 0$ ve $\rho_\gamma(|f|) = \rho_\gamma(f)$ dir.

ii. $\rho_\gamma(f) = 0$ olması için gerek ve yeter şart hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $f(x) = 0$ olmasıdır.

iii. $\rho_\gamma(f) < \infty$ ise bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $f(x) < \infty$ dur.

iv. $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. Bu durumda $\rho_\gamma(\alpha f + \beta g) \leq \alpha\, \rho_\gamma(f) + \beta\, \rho_\gamma(g)$ ise ρ_γ konvekstir.

v. ρ_γ sıralama özelliğine sahiptir. Yani, $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise bu durumda $\rho_\gamma(f) \leq \rho_\gamma(g)$ dir.

vi. ρ_γ süreklilik özelliğine sahiptir. $\Lambda > 0$ için $\rho_\gamma(f/\Lambda) < \infty$ ise bu durumda $\lambda \mapsto \rho_\gamma(f/\lambda)$, $[\Lambda, \infty)$ üzerinde sürekli ve azalandır. Ayrıca, $\lambda \to \infty$ iken $\rho_\gamma(f/\lambda) \to 0$ dır.

Eğer $\alpha > 1$ ise bu durumda $\alpha\rho_\gamma(f) \leq \rho_\gamma(\alpha f)$ ve eğer $0 < \alpha < 1$ ise $\rho_\gamma(\alpha f) \leq \alpha\rho_\gamma(f)$ dir. Bu durum ρ_γ modüler fonksiyonun konveksliğinin bir sonucudur.

İspat. (i) in ispatı modüler fonksiyonun tanımı kullanılarak hemen görülmektedir.

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot),\gamma}(|f|) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty} \big||f(x)|\big|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \||f|\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} = \rho_{p(\cdot),\gamma}(f)\end{aligned}$$

(ii) nin ispatı için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $\rho_\gamma(f) = 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $\rho_\gamma(f) = 0$ olduğunda

$$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} = 0$$

olur. Bu durumda

$$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx = 0 \quad \text{ve} \quad \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} = 0$$

dır. O halde ya $|(\mathbb{R}^n_+)_\infty| = 0$, $|\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty| = 0$ ya da $f(x) = 0$ olur. Dolayısıyla $\rho_\gamma(f) = 0$ olması için gerek ve yeter şart hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $f(x) = 0$ olmasıdır.

(iii) ün ispatı $L_{1,\gamma}$ ve $L_{\infty,\gamma}$ normlarının özelliklerinden elde edilir. Eğer $\rho_\gamma(f) < \infty$ ise bu durumda

$$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} < \infty$$

dır. Buradan hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx < \infty \Rightarrow f(x) < \infty$$

elde edilir. Böylece (iii) ün ispatı tamamlanır.

Şimdi (iv) ün ispatını yapalım. $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma(\alpha f + \beta g) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |\alpha f + \beta g|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|\alpha f + \beta g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} \big(|\alpha f| + |\beta g|\big)^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|\alpha f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} + \|\beta g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} \big(\alpha |f| + \beta |g|\big)^{p(x)} x_n^\gamma dx + |\alpha| \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} + |\beta| \|g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \\
&\leq \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \beta \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |g|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \\
&+ |\alpha| \, \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} + |\beta| \, \|g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}
\end{aligned}$$

$$\leq \alpha\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}\Big) +$$
$$+ \beta\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |g|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}\Big)$$
$$\leq \alpha \rho_\gamma(f) + \beta \rho_\gamma(g)$$

olur. O halde ρ_γ konvekstir.

(v) in ispatı için $|f(x)| \leq |g(x)|$ olsun. Bu durumda

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty} |g(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}$$

olur.

Son olarak (vi) nın ispatında eğer $\lambda \geq \Lambda$ ise bu durumda $\rho_\gamma(f/\lambda)$ azalan fonksiyondur ve Lebesgue yakınsaklık teoremi uygulandığında $\rho_\gamma(f/\lambda)$ nın sürekli olduğu görülür. Ayrıca $\lambda \to \infty$ iken $\rho_\gamma(f/\lambda) \to 0$ dır. Böylece önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.2.3. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Her $\lambda > 0$ için $\rho_\gamma(f/\lambda) < \infty$ ise Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonuna $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayına aittir ve her bir $K \subset \mathbb{R}^n_+$ kompakt kümesi için $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(K)$ ise f ölçülebilir fonksiyonuna $L^{\text{loc}}_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayına aittir denir.

Yukarıdaki tanıma göre, $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \to [1,\infty)$ ise $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayı,

$$\rho_\gamma(f) := \int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx < \infty$$

özelliğini sağlayan fonksiyonlar uzayıdır.

Uyarı 3.2.4. Eğer $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda f fonksiyonu h.h.y sonludur (Önerme 3.2.2, Özellik (iii)).

Örnek 3.2.5. $X = (0,1)$, $p(x) = x$ ve $f(x) = 1$ olsun. Bu durumda, $\rho_\gamma(f) = \infty$ dur. Fakat, her $\lambda > 1$ $(\gamma > 0)$ için,

$$\rho_\gamma(f/\lambda) = \int\limits_0^1 \lambda^{-x} x^\gamma dx = -\frac{\omega(n,\gamma)\lambda^{-x}}{\ln\lambda}\Big|_0^1 = \omega(n,\gamma)\big[-\frac{1}{\lambda\ln\lambda} + \frac{1}{\ln\lambda}\big] < \infty$$

dir. Benzer şekilde, eğer $X = (1,\infty)$ ve $p(x) = \dfrac{1}{x}$ olsun ve yine $f(x) = 1$ alındığında $\rho_\gamma(f) < \infty$ olur. Fakat her $\lambda < 1$ için $\rho_\gamma(f/\lambda) = \infty$ olur. Yani,

$$\begin{aligned}\rho_\gamma(f/\lambda) &= \int_1^\infty \lambda^{-\frac{1}{x}} x^\gamma dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \lambda^{-\frac{1}{x}} x^\gamma dx \\ &= \lim_{A\to\infty} -\omega(n,\gamma)\int_1^A \lambda^{-\frac{1}{x}} dx = -\omega(n,\gamma)\lim_{A\to\infty}\int_1^A \lambda^{-\frac{1}{x}} dx\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\lim\limits_{A\to\infty}\int_1^A \lambda^{-\frac{1}{x}} dx$ integralini hesaplayalım. Kısmi integral metoduna göre, $u = \lambda^{-\frac{1}{x}}$, $du = \dfrac{\ln\lambda}{x\lambda^{\frac{1}{x}}}$ ve $dv = dx$, $v = x$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\int_1^A \lambda^{-\frac{1}{x}} dx &= \lim_{A\to\infty}\left(x\lambda^{-\frac{1}{x}} - \int_1^A \frac{\ln\lambda}{x\lambda^{\frac{1}{x}}}dx\right) \\ &= \lim_{A\to\infty}\left(x\lambda^{-\frac{1}{x}} - \ln\lambda\int_1^A \frac{1}{x\lambda^{\frac{1}{x}}}dx\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son integralde $t = \dfrac{1}{x}$, $dx = -x^2 dt$ yazılırsa

$$\lim_{A\to\infty}\left(x\lambda^{-\frac{1}{x}} - \ln\lambda\int_1^A \frac{1}{x\lambda^{\frac{1}{x}}}dx\right) = \lim_{A\to\infty}\left(x\lambda^{-\frac{1}{x}} - \ln\lambda\int_1^A -\frac{1}{t\lambda^t}dt\right)$$

olur. Elde edilen son integral gamma fonksiyonunun özel bir durumudur ve

$$\int_1^A -\frac{1}{t\lambda^t}dt = E_1(\ln\lambda\, t)$$

dir. Yapılan işlemler integralde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\rho_\gamma(f/\lambda) &= \int_1^\infty \lambda^{-\frac{1}{x}} x^\gamma dx = -\omega(n,\gamma)\lim_{A\to\infty}\int_1^A \lambda^{-\frac{1}{x}} dx \\ &= -\omega(n,\gamma)\lim_{A\to\infty}\left(x\lambda^{-\frac{1}{x}} - \ln\lambda\int_1^A \frac{1}{x\lambda^{\frac{1}{x}}}dx\right) \\ &= -\omega(n,\gamma)\lim_{A\to\infty}\left(x\lambda^{-\frac{1}{x}} - \ln\lambda\int_1^A -\frac{1}{t\lambda^t}dt\right) \\ &= -\omega(n,\gamma)\lim_{A\to\infty}\left(\ln\lambda\, E_1\left(\frac{\ln\lambda}{x}\right) - x\lambda^{-\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_1^A\end{aligned}$$

$$= -\omega(n,\gamma) \lim_{A\to\infty} \left(\ln\lambda\, E_1\Big(\frac{\ln\lambda}{A}\Big) - A\lambda^{-\frac{1}{A}} - \ln\lambda\, E_1\big(\ln\lambda\big) + \frac{1}{\lambda}\right)$$
$$= \infty$$

elde edilir. O halde $X = (1,\infty)$, $p(x) = \dfrac{1}{x}$ ve $f(x) = 1$ olarak alınırsa $\lambda < 1$ için $\rho_\gamma(f/\lambda) = \infty$ olur. Eğer $p^+ < \infty$ ise bu durumda $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayı ile $\rho_\gamma(f) < \infty$ özelliğini sağlayan f fonksiyonlar kümesi çakışık olur.

Teorem 3.2.6. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Bu durumda $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ bir vektör uzayıdır.

İspat. Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayı ve $0 \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olduğundan her $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için $f,g \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda $\alpha f + \beta g \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 3.2.2 de (v) özelliği ile $\rho_\gamma(f/\lambda), \rho_\gamma(g/\lambda) < \infty$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır. $\mu = (|\alpha| + |\beta|)\lambda$ olarak seçelim. Önerme 3.2.2 nin (i), (iii) ve (iv) özellikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}\rho_\gamma\Big(\frac{\alpha f + \beta g}{\mu}\Big) &= \rho_\gamma\Big(\frac{|\alpha f + \beta g|}{\mu}\Big) = \rho_\gamma\Big(\frac{|\alpha f + \beta g|}{(|\alpha| + |\beta|)\lambda}\Big)\\ &\le \rho_\gamma\Big(\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\frac{|f|}{\lambda} + \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\frac{|g|}{\lambda}\Big)\\ &\le \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\,\rho_\gamma(f/\lambda) + \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\,\rho_\gamma(g/\lambda) < \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.2.7. $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \to [0,1)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayının vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart $p^+ < \infty$ olmasıdır (Sharapudinov, 2012).

$1 \le p < \infty$ için $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ Lebesgue uzaylarında norm

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x_n^\gamma dx\Big)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada integralin dışındaki $1/p$ sabit üs ile $1/p(\cdot)$ üs fonksiyonu doğrudan yer değiştirilemez. Dolayısıyla, değişken üslü Lebesgue uzaylarında bu şekilde bir norm tanımı ifade etmek yanlıştır. Bu nedenle, Orlicz uzaylarında tanımlanan Luxemburg normunu kullanacağız. Bu norm da aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 3.2.8. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki normu

$$\|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\gamma}(f/\lambda) \le 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki küme boş küme ise $\|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \infty$ olur. Eğer $\mathbb{R}^n_+$ uzayında belirsizlik yoksa $\|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ yerine $\|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ yazabiliriz.

Önerme 3.2.2 nin (vi) özelliğinden, her $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için $\|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} < \infty$ olur. Denk olarak $f \notin L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ iken $\|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \infty$ dur. $1 \le p \le \infty$ için $p(\cdot) = p$ olduğunda Tanım 3.2.8, $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayındaki norma denktir. Eğer $p < \infty$ ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p x_n^\gamma dx = 1$$

ise bu durumda $\lambda = \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ dir. Bu durum $p = \infty$ olduğunda da doğrudur.

Teorem 3.2.9. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. $\|\cdot\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ fonksiyonu $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında bir normdur.

İspat. $\|\cdot\|_{p(\cdot),\gamma}$ fonksiyonunun aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu gösterelim:

i. $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $f \equiv 0$ olmasıdır;

ii. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha f\|_{p(\cdot),\gamma} = |\alpha|\,\|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ dir (Homojenlik);

iii. $\|f+g\|_{p(\cdot),\gamma} \le \|f\|_{p(\cdot),\gamma} + \|g\|_{p(\cdot),\gamma}$ (Üçgen Eşitsizliği).

Eğer $f \equiv 0$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ için $\rho_\gamma(f/\lambda) = 0 \le 1$ dir. Böylece $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = 0$ dır. Tersine, eğer $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = 0$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$1 \ge \rho_\gamma(f/\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\backslash(\mathbb{R}^n_+)_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|f/\lambda\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)}$$

dır. Modülün her bir terimini ayrı ayrı düşünelim. Dolayısıyla $\|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \le \lambda$ dır. Buradan, hemen hemen her $x \in (\mathbb{R}^n_+)_\infty$ için $f(x) = 0$ dır. Benzer şekilde, $\lambda < 1$ ise, Önerme 3.2.2 den

$$1 \ge \lambda^{-p^-} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\backslash(\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\|f(\cdot)^{p(\cdot)}\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+/(\mathbb{R}^n_+)_\infty)} = 0$ dır. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty$ için $f(x) = |f(x)|^{p(x)} = 0$ dır. Böylece $f \equiv 0$ dır ve (i) in ispatı tamamlanır.

(ii) nin ispatında, eğer $\alpha = 0$ ise (i) den bu sonuç hemen görülür. $\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda değişken değiştirme yöntemi ile

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{p(\cdot),\gamma} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\gamma(|\alpha| f/\lambda) \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda/|\alpha| > 0 : \rho_\gamma(f/(\lambda/|\alpha|)) \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\mu > 0 : \rho_\gamma(f/\mu) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \inf\left\{\mu > 0 : \rho_\gamma(f/\mu) \leq 1\right\} = |\alpha| \, \|f\|_{p(\cdot),\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (iii) ü ispatlayalım. $\lambda_f > \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ ve $\lambda_g > \|g\|_{p(\cdot),\gamma}$ ise bu durumda $\rho_\gamma(f/\lambda_f) \leq 1$ ve $\rho_\gamma(g/\lambda_g) \leq 1$ dir. $\lambda = \lambda_f + \lambda_g$ olsun. Bu durumda, $\lambda > 1$ için Önerme 3.2.2 nin (iii) özelliğinden,

$$\rho_\gamma\left(\frac{f+g}{\lambda}\right) = \rho_\gamma\left(\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{f}{\lambda_f} + \frac{\lambda_g}{\lambda}\frac{g}{\lambda_g}\right) \leq \frac{\lambda_f}{\lambda}\,\rho_\gamma(f/\lambda_f) + \frac{\lambda_g}{\lambda}\,\rho_\gamma(g/\lambda_g) \leq 1$$

elde edilir. Böylece, $\|f + g\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \lambda_f + \lambda_g$ olur. λ_f ve λ_g üzerinden infimum alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Modüler fonksiyonun sıralama özelliğinin bir sonucu da, (Önerme 3.2.2 nin (vi) özelliği), normun sıralama özelliğine sahip olmasıdır. Eğer h.h.y $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \|g\|_{p(\cdot),\gamma}$ dir.

$L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ Lebesgue uzay normunun kullanışlı bir diğer özelliği ise üssün homojen olmasıdır. Yani, $1 < s < \infty$ için $\|f\|^s_{sp,\gamma} = \||f|^s\|_{p,\gamma}$ dir. Bu özellik değişken üslü Lebesgue uzaylarında da vardır.

Teorem 3.2.10. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $|(\mathbb{R}^n_+)_\infty| = 0$ olsun. Bu durumda her s ve $1/p^- \leq s < \infty$ için

$$\left\||f|^s\right\|_{p(\cdot),\gamma} = \left\|f\right\|^s_{sp(\cdot),\gamma}$$

dir.

İspat. Teoremin ispatı normun tanımından hemen görülmektedir. $|(\mathbb{R}^n_+)_\infty| = 0$ olduğundan, $\mu = \lambda^{1/s}$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\||f|^s\right\|_{p(\cdot),\gamma} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{|f(x)|^s}{\lambda}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx \le 1\right\} \\ &= \inf\left\{\mu^s > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{|f(x)|^s}{\mu^s}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx \le 1\right\} \\ &= \inf\left\{\mu^s > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right)^{sp(x)} x_n^\gamma dx \le 1\right\} = \|f\|^s_{sp(\cdot),\gamma}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.11. (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği) $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Her $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $g \in L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için $fg \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)g(x)| x_n^\gamma dx \le C_{p(\cdot),\gamma} \|f\|_{p(\cdot),\gamma} \|g\|_{p'(\cdot),\gamma}$$

dir, burada $C_{p(\cdot),\gamma} = \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + 1\right)\|\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_0}\|_{\infty,\gamma} + \|\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{\infty,\gamma} + \|\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_1}\|_{\infty,\gamma}$ dir.

İspat. $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = 0$ ya da $\|g\|_{p'(\cdot),\gamma} = 0$ ise bu durumda $fg \equiv 0$ olur. Dolayısıyla bu durum açıktır. O halde, $\|f\|_{p(\cdot),\gamma}, \|g\|_{p'(\cdot),\gamma} > 0$ ve homojenlikten $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = \|g\|_{p'(\cdot),\gamma} = 1$ olduğunu kabul edelim. $(\mathbb{R}^n_+)_1, (\mathbb{R}^n_+)_\infty$ ve $(\mathbb{R}^n_+)_0$ ayrık kümeler üzerinde $|fg|$ nin integralini düşünelim. $x \in (\mathbb{R}^n_+)_\infty$ ise bu durumda $p(x) = \infty$ ve $p'(x) = 1$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty} |f(x)g(x)| x_n^\gamma dx &\le \|f\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{\infty,\gamma} \|g\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{1,\gamma} \\ &= \|f\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{p(\cdot),\gamma} \|g\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{p'(\cdot),\gamma} \\ &= \|f\|_{p(\cdot),\gamma} \|g\|_{p'(\cdot),\gamma} = 1\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $p(\cdot)$ ve $p'(\cdot)$ nin rollerini ters çevirirsek

$$\int_{(\mathbb{R}^n_+)_1} |f(x)g(x)| x_n^\gamma dx \le 1$$

olur. $(\mathbb{R}^n_+)_0$ kümesinde integral incelenirken, Young eşitsizliği kullanıldığında

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^n_+)_0} |f(x)g(x)|x_n^\gamma dx \leq \int\limits_{(\mathbb{R}^n_+)_0} \left(\frac{1}{p(x)}|f(x)|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}|g(x)|^{p'(x)}\right)x_n^\gamma dx$$
$$\leq \frac{1}{p^-}\,\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) + \frac{1}{p'(\cdot)^-}\,\rho_{p'(\cdot),\gamma}(g)$$

elde edilir. $\frac{1}{p'(\cdot)^-} = \frac{1}{(p^+)'} = 1 - \frac{1}{p^+}$ ve $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f),\ \rho_{p'(\cdot),\gamma}(g) \leq 1$ iken

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^n_+)_0} |f(x)g(x)|\, x_n^\gamma dx \leq \frac{1}{p^-} + 1 - \frac{1}{p^+}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler, karakteristik fonksiyon ve $L_{\infty,\gamma}$ normu göz önüne alındığında,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)g(x)|\, x_n^\gamma dx \leq \big[\big(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + 1\big)\|\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_0}\|_{\infty,\gamma} + \|\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{\infty,\gamma} + \|\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_1}\|_{\infty,\gamma}\big]$$
$$\times \|f\|_{p(\cdot),\gamma}\|g\|_{p'(\cdot),\gamma}$$

bulunur. İstenilen ifade elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.12. $r(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonları olsun. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonu, $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $f \in L_{q(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $g \in L_{r(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için $fg \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir ve

$$\|fg\|_{p(\cdot),\gamma} \leq C\, \|f\|_{q(\cdot),\gamma}\|g\|_{r(\cdot),\gamma}$$

olacak şekilde bir C sabit sayısı vardır.

İspat. $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. $f \in L_{q(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $g \in L_{r(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ alalım. $\|f\|_{q(\cdot),\gamma} = 0$ ya da $\|g\|_{r(\cdot),\gamma} = 0$ ise bu durumda $fg = 0$ dır ve açıktır. Bundan dolayı, normların pozitif olduğu ve ayrıca homojenlikten $\|f\|_{q(\cdot),\gamma} = \|g\|_{r(\cdot),\gamma} = 1$ olduğu kabul edilebilir. $p(\cdot)$ nin tanımından $(\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty = (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty \cap (\mathbb{R}^n_+)^{r(\cdot)}_\infty$ dir. Buradan $s(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)$ üs fonksiyonu

$$s(x) = \begin{cases} \frac{q(x)}{p(x)}, & x \notin (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty \cup (\mathbb{R}^n_+)^{r(\cdot)}_\infty \\ 1, & x \in (\mathbb{R}^n_+)^{r(\cdot)}_\infty \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty \\ \infty, & x \in (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{r(\cdot)}_\infty \end{cases}$$

ile tanımlanabilir. Şimdi

$$|f(\cdot)|^{p(\cdot)} \in L_{s(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty) \quad \text{ve} \quad |g(\cdot)|^{p(\cdot)} \in L_{s'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty) \tag{3.6}$$

ve

$$\left\| |f(\cdot)|^{p(\cdot)} \right\|_{L_{s(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)}, \left\| |g(\cdot)|^{p(\cdot)} \right\|_{L_{s'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)} \leq 1 \tag{3.7}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\rho_{p(\cdot),\gamma}(fg) &= \int_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty} |f(x)|^{p(x)} |g(x)|^{p(x)} x_n^\gamma dx + \|fg\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)} \\
&\leq C_{s(\cdot),\gamma} \, \||f(\cdot)|^{p(\cdot)}\|_{L_{s(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)} \||g(\cdot)|^{p(\cdot)}\|_{L_{s'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)} + \\
&+ \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty)} \|g\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{r(\cdot)}_\infty)} \\
&\leq C_{s(\cdot),\gamma} + \|f\|_{q(\cdot),\gamma} \|g\|_{r(\cdot),\gamma} = C_{s(\cdot),\gamma} + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda modülün konvekslik özelliğinden $fg \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve

$$\|fg\|_{p(\cdot),\gamma} \leq C_{s(\cdot),\gamma} + 1 = (C_{s(\cdot),\gamma} + 1) \, \|f\|_{q(\cdot),\gamma} \|g\|_{r(\cdot),\gamma}$$

olur. Bu nedenle ispatı tamamlamak için (3.6) ifadesinin ve (3.7) norm kestiriminin elde edilmesi gerekmektedir. İlk olarak $|f(\cdot)|^{p(\cdot)}$ ifadesini göz önüne alalım. $\|f\|_{q(\cdot),\gamma} = 1$ olduğundan $\|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty)} \leq \rho_{q(\cdot),\gamma}(f) \leq 1$ dir. Ayrıca, $(\mathbb{R}^n_+)^{s(\cdot)}_\infty \subset (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty$ ve $\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{s(\cdot)}_\infty \subset \mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty$ ve $(\mathbb{R}^n_+)^{s(\cdot)}_1$ üzerinde $p(x) = q(x) < \infty$ dur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\rho_{s(\cdot),\gamma}\big(f(\cdot)^{p(\cdot)} \chi_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty}\big) &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{s(\cdot)}_\infty} |f(x)|^{p(x)s(x)} x_n^\gamma dx + \left\| |f(\cdot)|^{p(\cdot)} \right\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{s(\cdot)}_\infty)} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty} |f(x)|^{q(x)} x_n^\gamma dx + \left\| |f(\cdot)|^{p(\cdot)} \right\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty)} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty} |f(x)|^{q(x)} x_n^\gamma dx + \|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)^{q(\cdot)}_\infty)} \leq 1
\end{aligned}$$

dir. Buradan norm tanımı ile $\left\| |f(\cdot)|^{p(\cdot)} \right\|_{L_{s(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)^{p(\cdot)}_\infty)} \leq 1$ dir. Benzer sonuç, $s(\cdot)$ ile $s'(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ ile $r(\cdot)$ yer değiştirildiğinde $|g(\cdot)|^{p(\cdot)}$ için de elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.13. $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \to [1,\infty]$ Lebesgue ölçülebilir üs fonksiyonu olsun. $p^+ < \infty$ ise bu durumda $\mathbb{S}$ ($\mathbb{R}^n_+$ uzayındaki basit fonksiyonlar kümesi) kümesi, $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayının yoğun alt kümesidir. (İspat için bak, Diening vd., 2017, Sonuç 3.4.10).

Önerme 3.2.14. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Eğer $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} > 0$ ise bu durumda $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot),\gamma}) \leq 1$ dir. Ayrıca, her $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot),\gamma}) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $p^+(\mathbb{R}^n_+ \backslash (\mathbb{R}^n_+)_\infty) < \infty$ olmasıdır.

İspat. $p^+(\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lambda_k \to \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ olacak şekilde bir $\{\lambda_k\}$ dizisi alalım. Fatou lemması ve modüler fonksiyonun tanımından

$$\rho_\gamma\Big(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}\Big) \leq \liminf_{k\to\infty} \rho_\gamma(f/\lambda) \leq 1$$

elde edilir. Fakat bunun aksine $\rho_\gamma\big(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}\big) < 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $0 < \lambda < \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ için

$$\rho_\gamma(f/\lambda) = \rho_\gamma\Big(\frac{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}{\lambda}\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}\Big) \leq \Big(\frac{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}{\lambda}\Big)^{p^+(\mathbb{R}^n_+\backslash(\mathbb{R}^n_+)_\infty)}\rho_\gamma\Big(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}\Big)$$

olur. Böylece, $\rho_\gamma(f/\lambda) < 1$ olacak şekilde $\|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ normuna yeterince yakın bir λ bulabiliriz. Fakat normun tanımına göre $\rho_\gamma(f/\lambda) \geq 1$ olmalıdır. Bu çelişkiden dolayı eşitliğin sağlandığı görülmektedir.

$p^+(\mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty) = \infty$ olduğunu kabul edelim. Sonlu ölçüye sahip $\{E_k\}$ kümelerinin dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

i. $E_k \subset \mathbb{R}^n_+ \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty$,

ii. $E_{k+1} \subset E_k$ ve $|E_k \setminus E_{k+1}|_\gamma > 0$,

iii. $|E_k|_\gamma \to 0$,

iv. Eğer $x \in E_k$ ise $p(x) \geq p_k > k$ dır.

f fonksiyonu $f(x) = \big(\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k^{-2}}{|E_k\backslash E_{k+1}|_\gamma}\chi_{E_k\backslash E_{k+1}}(x)\big)^{\frac{1}{p(x)}}$ olsun. Bu durumda her $\lambda < 1$ için

$$\rho_\gamma(f/\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} \oint\limits_{E_k\backslash E_{k+1}} \lambda^{-p(x)} x_n^\gamma dx \geq \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2}\lambda^{-k} = \infty$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\rho_\gamma(f) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k^{-2} < 1$ dir. Böylece, $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = 1$ dir. Fakat $\rho_\gamma\big(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\gamma}}\big) < 1$ dir.

Sonuç 3.2.15. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Eğer $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 1$ ise bu durumda $\rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ dir ve eğer $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} > 1$ ise bu durumda $\rho(f) \geq \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ dir.

3.3. Yakınsaklık ve Tamlık

Bu kısımda, değişken üslü Lebesgue uzaylarının Banach uzayı, yani tam normlu vektör uzayı olduğu gösterilecektir. $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ nin normlu vektör uzayı olduğu yukarıda gösterilmiştir. Bu nedenle, bu uzayların Banach uzayı olduğunu görmek için tam olduğunu göstermek yeterli olacaktır. İlk olarak yakınsaklık kavramı ele alınacaktır. Ancak, değişken üslü Lebesgue uzaylarda, modül, norm ve ölçü yakınsaklık olmak üzere üç tip yakınsaklık söz konusudur. Şimdi bunlarla ilgili teoremleri verelim:

Teorem 3.3.1. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ için $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ dizisi, f fonksiyonuna h.h.y noktasal yakınsak artan negatif olmayan fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \to \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ dır ya da $f \notin L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \to \infty$ dur.

İspat. $\{f_k\}$ artan bir dizi olduğundan $\{\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}\}$ da artandır. Böylece, bu dizi ya yakınsaktır ya da ıraksaktır. Eğer $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ise $f_k \leq f$ olduğundan $\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ olur. Diğer taraftan, $f_k \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ olduğundan, $\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty = \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ dir. Her iki durumda da yeterince büyük k ve herhangi bir $\lambda < \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$ için $\lambda < \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\lambda > 0$ alalım, normun tanımından $\rho_\gamma(f/\lambda) > 1$ dir. Bundan dolayı, klasik Lebesgue uzaylarındaki monoton yakınsaklık teoreminden,

$$\rho_\gamma(f/\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash (\mathbb{R}_+^n)_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx + \lambda^{-1}\|f\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}_+^n)_\infty)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash (\mathbb{R}_+^n)_\infty} \left(\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx + \lambda^{-1}\|f_k\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}_+^n)_\infty)}\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \rho_\gamma(f_k/\lambda)$$

elde edilir. Dolayısıyla, yeterince büyük k için $\rho_\gamma(f_k/\lambda) > 1$ dir ve böylece $\lambda < \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$ olur. İspat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem Fatou Lemmasının bir benzeridir.

Teorem 3.3.2. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ için $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$, h.h.y $f_k \to f$ (noktasal) olacak şekilde bir dizi olsun. Eğer $\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty$ ise bu durumda $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \le \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$ dır.

İspat. İlk önce $g_k(x) = \inf_{k\le m} |f_m(x)|$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda her $k \le m$ için $g_k(x) \le |f_m(x)|$ olur. Böylece $g_k \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir. Ayrıca, tanımdan, $\{g_k\}$ artan bir dizidir ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{m\to\infty} |f_m(x)| = |f(x)|$$

olur. O halde, Teorem 3.3.1 den

$$\|f\|_{p(\cdot),\gamma} = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{p(\cdot),\gamma} \le \lim_{k\to\infty} \big(\inf_{k\le m} \|f_m\|_{p(\cdot),\gamma}\big) = \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty$$

ve $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Dikkat edilirse, yukarıda verdiğimiz iki teoremin aksine, Lebesgue yakınsaklık teoreminin ispatı için $p^+ < \infty$ olarak kabul etmemiz gerekmektedir. Ayrıca, modül yakınsaklık için norm yakınsaklık ile ilgili aşagıdaki lemma da gereklidir.

Lemma 3.3.3. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $p^+ < \infty$ olsun. Herhangi bir $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dizisi ve $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için $\|f_k - f\|_{p(\cdot),\gamma} \to 0$ olması için gerek ve yeter şart $\rho_\gamma(f - f_k) \to 0$ olmasıdır.

İspat. Dizinin norm yakınsak olduğunu kabul edelim. Sonuç 3.2.15 ile, yeterince büyük k için $\rho_\gamma(f - f_k) \le \|f - f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \le 1$ dir ve böylece $\rho_\gamma(f - f_k) \to 0$ olur.

Tersini ispatlamak için $\lambda < 1$ seçelim. Bu durumda

$$\rho_\gamma\left(\frac{f - f_k}{\lambda}\right) \le \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{p^+} \rho_\gamma(f - f_k)$$

olur. Böylece, yeterince büyük k için $\rho_\gamma\big(\frac{f-f_k}{\lambda}\big) \le 1$ elde edilir. O halde k sayıları için $\|f - f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \le \lambda$ dır. λ keyfi olduğundan, normda $f_k \to f$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.4. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $p^+ < \infty$ olsun. Eğer $\{f_k\}$ dizisi h.h.y noktasal $f_k \to f$ ve h.h.y $|f_k(x)| \le g(x)$ olacak şekilde $g \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $k \to \infty$ iken $\|f - f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \to 0$ dır.

İspat.

$$|f(x)-f_k(x)|^{p(x)} \le 2^{p(x)-1}\big(|f(x)|^{p(x)}+|f_k(x)|^{p(x)}\big) \le 2^{p^+}|g(x)|^{p(x)} \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$$

dır. Bu durumda $L_{1,\gamma}$ uzayında Lebesgue yakınsaklık teoreminden $k \to 0$ iken $\rho_\gamma(f-f_k) \to 0$ ve Lemma 3.3.3 ile $\|f-f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \to 0$ olur.

Teorem 3.3.5. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Eğer $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dizisi norm yakınsaklığa göre f fonksiyonuna yakınsak ise bu durumda $\{f_k\}$ dizisi ölçü yakınsaklığa göre f fonksiyonuna yakınsaktır.

İspat. $\{f_k\}$ dizisinin f fonksiyonuna norm yakınsadığını fakat ölçü yakınsamadığını ve her k için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)-f_k(x)| \ge \varepsilon\}| \ge \varepsilon$$

olacak şekilde ε, $0<\varepsilon<1$ olduğunu kabul edelim. Bu kümeyi E_k ile gösterelim. Her bir k için ya $|E_k \cap (\mathbb{R}^n_+)_\infty|_\gamma \ge \varepsilon/2$ ya da $|E_k \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty|_\gamma \ge \varepsilon/2$ olduğundan bir diğer alt diziye geçerek her k için bu eşitsizliklerden birinin sağlandığını kabul edebiliriz. Eğer her k için $|E_k \cap (\mathbb{R}^n_+)_\infty|_\gamma \ge \varepsilon/2$ ise bu durumda

$$\|f-f_k\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \ge \|(f-f_k)\chi_{(\mathbb{R}^n_+)_\infty}\|_{p(\cdot),\gamma} = \|f-f_k\|_{L_{\infty,\gamma}((\mathbb{R}^n_+)_\infty)} \ge \varepsilon$$

olur. Bu durum $\{f_k\}$ dizisinin f fonksiyonuna norm yakınsak olduğu kabulü ile çelişir. Eğer her k için $|E_k \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty|_\gamma \ge \varepsilon/2$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}\rho_\gamma\left(\frac{f-f_k}{\varepsilon^2/2}\right) &\ge \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus(\mathbb{R}^n_+)_\infty} \left(\frac{|f(x)-f_k(x)|}{\varepsilon^2/2}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx \\ &\ge \int\limits_{E_k\setminus(\mathbb{R}^n_+)_\infty} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{p(x)} x_n^\gamma dx \ge \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{p^-} |E_k \setminus (\mathbb{R}^n_+)_\infty| \ge 1\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\|f-f_k\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \ge \varepsilon^2/2 > 0$ olur. Yine $\{f_k\}$ dizisinin f fonksiyonuna norm yakınsadığı kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dizisi norma göre f fonksiyonuna yakınsak ise bu durumda $\{f_k\}$ dizisi ölçüye göre f fonksiyonuna yakınsaktır.

Teorem 3.3.6. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dizisinin norma göre $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ fonksiyonuna yakınsak olsun. Bu durumda f fonksiyonuna h.h.y noktasal yakınsayan bir $\{f_{k_j}\}$ alt dizisi ve $g \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ vardır ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $|f_{k_j}(x)| \le g(x)$ dir.

İspat. Teorem 3.3.5 e göre f fonksiyonuna h.h.y noktasal yakınsayan bir $\{f_{k_j}\}$ alt dizi vardır. Ayrıca, yakınsak diziler Cauchy dizisi olduğundan her bir j için yeterince büyük k_j ler seçebiliriz. Dolayısıyla $\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 2^{-j}$ olur. Kolaylık açısından f_{k_j} yerine f_j yazalım. Her bir j için

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^{j-1} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$$

şeklinde bir h_j fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $\{h_j\}$ artan bir dizidir ve bir h fonksiyonuna noktasal yakınsar. f_j fonksiyon dizisinden,

$$\|h_j\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-j} \leq 1$$

elde edilir. Böylece, monoton yakınsaklık teoreminden $h \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ elde edilir. Fakat bu durumda her j ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$|f_j(x) - f_1(x)| \leq \sum_{i=1}^{j-1} |f_{i+1}(x) - f_i(x)| = h_j(x) \leq h(x)$$

olur. Eğer $g = h + |f_1|$ olarak alınırsa, bu durumda $g \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve h.h.y $|f_j(x)| \leq g(x)$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.7. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty$ olacak şekilde $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ bir dizi olsun. Bu durumda $i \to \infty$ iken $\sum_{k=1}^{i} f_k \to f$ olacak şekilde $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ fonksiyonu vardır ve

$$\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$$

dır.

İspat. $\mathbb{R}^n_+$ uzayında F fonksiyonu ve $\{F_i\}$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|, \qquad F_i(x) = \sum_{k=1}^{i} |f_k(x)|.$$

Bu durumda $\{F_i\}$ dizisi negatif olmayan ve h.h.y F fonksiyonuna noktasal yakınsak ve artan bir dizidir. Ayrıca, her bir i için

$$\|F_i\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sum_{k=1}^{i} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty$$

olduğundan $F_i \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir ve $\|F_i\|_{p(\cdot),\gamma}$ normu düzgün sınırlıdır. Ayrıca, Teorem 3.3.1 den dolayı $F \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir. Özellikle F fonksiyonu h.h.y sonludur. Dolayısıyla, $\{F_k\}$ dizisi h.h.y noktasal yakınsaktır. Böylece, eğer $\{G_i\}$ fonksiyon dizisi

$$G_i(x) = \sum_{k=1}^{i} f_k(x)$$

şeklinde tanımlanırsa bu durumda bu dizi de h.h.y noktasal yakınsak olur. Çünkü mutlak yakınsaklık, yakınsaklığı gerektirir.

Şimdi $G_0 = 0$ olsun. Bu durumda $j \geq 0$ sabiti için $G_i - G_j \to f - G_j$ h.h.y noktasaldır. Ayrıca,

$$\liminf_{i\to\infty} \|G_i - G_j\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{k=j+1}^{i} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} = \sum_{k=j+1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty$$

olur. Teorem 3.3.2 den dolayı, eğer $j = 0$ alınırsa bu durumda

$$\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \liminf_{i\to\infty} \|G_i\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} < \infty$$

olur. Daha genel olarak, her bir j için benzer çıkarım

$$\|f - G_j\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \liminf_{i\to\infty} \|G_i - G_j\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$$

olduğunu gösterir. Çünkü sağ taraftaki toplam sıfıra yakınsar. Norma göre $G_j \to f$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.7 nin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz. Bu teorem de $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayının tamlığını verir.

Teorem 3.3.8. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayı tamdır. Yani, $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsaktır.

İspat. $\{f_k\} \subset L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ bir Cauchy dizisi olsun. $i, j \geq k_1$ için $\|f_i - f_j\|_{p(\cdot),\gamma} < 2^{-1}$ ve $i, j \geq k_2$ için $\|f_i - f_j\|_{p(\cdot),\gamma} < 2^{-2}$ olacak şekilde sırasıyla k_1 ve k_2 seçelim. Bu durum, $\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{p(\cdot),\gamma} < 2^{-j}$ olacak şekilde bir $\{f_{k_j}\}$, $k_j < k_{j+1}$ alt dizisinin olduğunu gösterir. $g_1 = f_{k_1}$ ile yeni bir $\{g_j\}$ dizisi tanımlayalım ve $j > 1$ için $g_j = f_{k_j} - f_{k_{j-1}}$ olsun. Bu durumda her j için $\sum_{i=1}^{j} g_i = f_{k_j}$ iç içe geçen toplamlar elde edilir. Ayrıca,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \|f_{k_1}\|_{p(\cdot),\gamma} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty$$

olur. Buradan ve Teorem 3.3.7 den, norma göre $f_{k_j} \to f$ olacak şekilde bir $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonu vardır. Son olarak, üçgen eşitsizliğinden,

$$\|f - f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \|f - f_{k_j}\|_{p(\cdot),\gamma} + \|f_{k_j} - f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$$

elde edilir. Çünkü $\{f_k\}$ bir Cauchy dizisidir. Böylece, norma göre $f_k \to f$ olur. Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.9. $p^+ < \infty$ iken $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $f \in L_{p(\cdot),\gamma}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B_+(x,r)} |f(y) - f(x)|^{p(y)} y_n^{\gamma} dy = 0 \tag{3.8}$$

dır.

İspat. Bu lokal bir sonuç olduğundan, bir B_+ yuvarı almak ve hemen hemen her $x \in B_+$ için ispatlamak yeterlidir. O halde $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(B_+)$ olduğundan,

$$\int_{B_+} |f(y)|^{p(y)} y_n^{\gamma} dy < \infty$$

dir. $\{q_i\}$ dizisi rasyonel dizi olsun. Bu durumda

$$\int_{B_+} |f(y) - q_i|^{p(y)} y_n^{\gamma} dy \leq 2^{p^+ - 1} \int_{B_+} \left(|f(y)|^{p(y)} + |q_i|^{p(y)}\right) y_n^{\gamma} dy < \infty$$

olur. Dolasıyla, her bir i ve hemen hemen her $x \in B_+$ için klasik Lebesgue diferensiyelleme teoreminden

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B_+(x,r)} |f(y) - q_i|^{p(y)} y_n^{\gamma} dy = |f(x) - q_i|^{p(x)}$$

olur. Sıfır ölçülü kümelerin sayılabilir birleşimi sıfır ölçüye sahip olduğundan, bu limit her i ve hemen hemen her $x \in B_+$ için geçerlidir. O halde bir $x \in B_+$ alalım ve $0 < \epsilon < 1$

olsun. $\left|f(x) - q_i\right| < \epsilon$ olacak şekilde bir q_i seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to 0} & \fint_{B_+(x,r)} |f(y) - f(x)|^{p(y)} y_n^{\gamma} dy \\
& \leq 2^{p^+ - 1} \limsup_{r\to 0} \Bigg(\fint_{B_+(x,r)} |f(y) - q_i|^{p(y)} y_n^{\gamma} dy + \fint_{B_+(x,r)} |f(x) - q_i| y_n^{\gamma} dy \Bigg) \\
& = 2^{p^+ - 1} \big(|f(x) - q_i|^{p(x)} + |f(x) - q_i| \big) \\
& < 2^{p^+} \epsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.8) ifadesi kolayca elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ

M. Levitan 1951 yılında, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ üst yarı uzayında bir ötelemenin varlığını göstermiş ve $\mathbb{R}_+$ öteleme olarak adlandırmıştır. Daha sonra Bessel diferensiyel operatörleri ile ilişkisini inceleyerek bu ötelemenin $(0, \infty)$ aralığındaki noktaları yine bu aralıktaki noktalara dönüştürdüğünü göstermiştir (Levitan, 1967).

I. Kipriyanova 1967 yılında, $\mathbb{R}^n_+$ n-boyutlu yarı uzayda genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır (Kipriyanova, 1967). Çalışmalarında, bu ötelemenin $(n-1)$ değişkene göre adi ve n. değişkene göre $\mathbb{R}_+$ öteleme olarak ele almış ve sonra Fourier-Bessel operatörü ile ilişkisini incelemiştir.

Bu kısımda, ilk önce $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ve $\mathbb{R}^n_+$ ötelemeleri verilerek, genelleştirilmiş öteleme operatörünün özellikleri, özellikle sınırlılığı ele alınacaktır. Çünkü genelleştirilmiş öteleme operatörü $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonu değişken olduğunda, $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı değildir. Bundan dolayı bizim ele aldığımız problemde kilit noktadır.

4.1. Adi Öteleme

Tanım 4.1.1. $\tau_y f(x) = f(x+y)$ ile tanımlanan x noktasını $x+y$ noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme denir. Adi öteleme $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlıdır. Dolayısıyla $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dir. Bu öteleme,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad u(x,y) = f(x)$$

başlangıç değer probleminin çözümüne karşılık gelir.

4.2. Genelleştirilmiş Öteleme

Tanım 4.2.1. $\mathbb{R}_+$ öteleme, B_n Bessel operatör olmak üzere, $B_x u = B_y u$, $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = 0$ başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.1}$$

denkleminin, $u\big|_{y=0} = f(x)$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0} = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümüdür. Bu çözüm

$$u(x,y) = T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2}) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Bu öteleme $(0,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye $\mathbb{R}_+$ öteleme denir.

Bu ifade de $T_x^0 f(x) = f(x)$ olduğu açıktır. Ayrıca eğer $f(x)$ fonksiyonunun sürekli türevi varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial y} T_x^y f(x)\big|_{y=0} = 0 \tag{4.2}$$

dır ve $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevi varsa bu durumda $T_x^y f(x)$, (4.1) denkleminin çözümüdür ve (4.2) başlangıç şartları elde edilebilir. Ayrıca $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ve

$$\triangle_{B_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_n, \qquad B_n = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$\triangle_{B_n}$ Laplace-Bessel operatör olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \frac{\gamma}{y_n}\frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıdaki başlangıç şartları altındaki çözümü

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^{\pi} f\big(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\big) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

dir. Bu operatöre genelleştirilmiş öteleme operatörü denir (Levitan, 1973). T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Lineerlik özelliği: Her a, b skaleri için $T_x^y[af(x) + bg(x)] = aT_x^y f(x) + bT_x^y g(x)$ dir.

2. Pozitiflik özelliği: Eğer $f(x) \geq 0$ ise $T_x^y f(x) \geq 0$ dır.

3. $T_x^y(1) = 1$ dir.

$$\int_0^{\pi} \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}$$

olduğu yukarıdaki formül kullanıldığında $f(x) = 1$ için,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})} = 1$$

elde edilir.

4. Eğer $x \geq a$ ve $f(x) = 0$ ise bu durumda $|x - y| \geq a$ için $T_x^y f(x) = 0$ dır.

5. T_x^y operatörü süreklidir: $f_n(x)$ sürekli fonksiyonlar dizisi her bir sonlu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T_x^y f_n(x)$ her bir sonlu bölgede $T_x^y f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

6. T_x^y operatörü sınırlıdır: $f \in L_{p,\gamma}$ olsun. Bu durumda $|T_x^y f(x)| \leq T_x^y |f(x)| \leq \sup_{x \geq 0} |f(x)|$ dir.

7. Değişme özelliği: $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $T_x^y T_x^z f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$ dir.

8. Birleşme özelliği: $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $y, z \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. Bu durumda $T_y^z T_x^y f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$dir.

9. Eşlenik özelliği: Eğer sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu, $\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)| x_n^\gamma dx < \infty$ ve her $x > 0$ için $g(x)$ sınırlı bir fonksiyon ise bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^y f(x) g(y) y_n^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T_x^y g(x) y_n^\gamma dy$$

olur. $g(x) = 1$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^y f(x) y_n^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) y_n^\gamma dy$$

dir.

10. $T_x^{-y} f(x) = T_x^y f(x)$ dir.

11. $F_B[T_x^y f(x)] = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_n y_n) F_B[f(x)]$ dir.

12. $B_n[T_x^y f(x)] = T_x^y [B_n f(x)]$ dir.

13. $D_\gamma^\alpha [T_x^y f(x)] = T_x^y [D_\gamma^\alpha f(x)]$ dir.

Tanım 4.2.2. $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ölçülebilir iki fonksiyon ve T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda genelleştirilmiş ötelemeyle ilgili konvolüsyon çarpım

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(y) T^y g(x)\, y_n^{\gamma} dy$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.2.3. $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Bu durumda her $y \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\|T^y f(x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$$

dır.

İspat. Teoremi ilk olarak $p = 1$ için ispatlayalım.

$$\begin{cases} z_n & = x_n \cos\alpha, \\ z_{n+1} & = x_n \sin\alpha, \\ z' & = x', \end{cases}$$

dönüşümünü yapalım. Bu dönüşümün Jakobiyeni $j = \frac{1}{x_n}$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} &= \sqrt{(x_n \cos\alpha - y_n)^2 + x_n^2 \sin^2\alpha} \\ &= \sqrt{(z_n - y_n)^2 + z_{n+1}^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|T^y f(x)\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left|T^y f(x)\right| x_n^{\gamma} dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left| C_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \right| x_n^{\gamma} dx \\ &\leq C_\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^\pi \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\, x_n^{\gamma} dx \\ &\leq C_\gamma \int\limits_0^\pi \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left| f\left(z' - y', \sqrt{(z_n - y_n)^2 + z_{n+1}^2}\right)\right| \sin^{\gamma-1}\alpha \frac{1}{x_n} x_n^{\gamma} dx d\alpha \end{aligned}$$

$$\leq C_\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left|f\left(z', \sqrt{z_n^2+z_{n+1}^2}\right)\right| z_{n+1}^{\gamma-1} dz dz_{n+1}$$

$$\leq C_\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^\pi \left|f(x', x_n)\right| \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \, x_n^\gamma dx$$

$$\leq C_\gamma \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)| x_n^\gamma dx = \|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$$

elde edilir. Şimdi $p = \infty$ için $\|T^y f(x)\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f(x)\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ olduğunu gösterelim. $\|T^y f(x)\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n_+} \left|T^y f(x)\right|$ dir. O halde

$$|T^y f(x)| = \left| C_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \right|$$

$$\leq C_\gamma \int\limits_0^\pi \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

$$\leq C_\gamma \int\limits_0^\pi \|f\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

$$= \|f\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \, c_\gamma \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha = \|f\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$$

elde edilir. $p = 1$ için $\|T^y f(x)\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ ve $p = \infty$ için $\|T^y f(x)\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ olduğundan, interpolasyon teoremi gereğince $1 \leq p \leq \infty$ için $\|T^y f(x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Yukarıdaki Teorem 4.2.3 ün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarda bu şartlar altında sağlanmadığı bilinmektedir. Yani, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonu ve T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü olduğunda, $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayında T^y sınırlı değildir. T^y operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $p(\cdot)$ nin sabit olmasıdır. Eğer üs fonksiyonu değişken ise, T^y operatörünün bu uzaylarda sınırlı olması için gerek ve yeter şart üs fonksiyonlarının regülerlik özelliğini sağlamasıdır.

Şimdi bu operatörün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı olmasını sağlayan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ üs fonksiyonlarının regülerlik şartlarını inceleyelim.

Lemma 4.2.4. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ ve T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda her $y \in \mathbb{R}^n_+$ için T^y operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $p(\cdot)$ nin sabit olmasıdır.

İspat. İlk olarak, her $y \in \mathbb{R}^n_+$ için T^y operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\|T^y f\|_{p(\cdot),\gamma} = \|f\|_{p^*(\cdot),\gamma}$ olur. Burada

$$p^*(x,y) = T^y p(x) = C_\gamma \int_0^\pi p\big(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\big) \sin^{\gamma-1}\alpha \, d\alpha$$

dir. Bu durum, $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow L_{p^*(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ özelliğinin var olduğunu olduğunu göstermektedir. Buradan h.h.y $p(\cdot) \geq p^*(\cdot)$ sonucu elde edilir. y keyfi olduğundan $p(\cdot)$ nin sabit olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir.

$f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için $T^y f \notin L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olduğu bilinmektedir. T^y nin $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sürekli olmadığını kabul edelim. $f_k \geq 0$, $\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 2^{-k}$ ve $\|T^y f\|_{p(\cdot),\gamma} = 1$ olmak üzere $f_k \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ seçelim. $f := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 1$ ve $\|T^y f\|_{p(\cdot),\gamma} = \infty$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

5. HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRLER

Bu bölümde, harmonik analizde önemli bir yere sahip olan B_n-maksimal operatörlerin değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılığına yer verilecektir. Laplace-Bessel diferensiyel operatöre bağlı Hardy-Littlewood maksimal operatörün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzayında sınırlı olması için gerekli şartlar belirlenecektir. B_n-maksimal operatörün sınırlılığı, harmonik analizin diğer B_n-singüler integral operatörleri için $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında norm eşitsizliklerinin ispat edilmesi için kullanılmaktadır.

İlk olarak, Guliyev tarafından tanımlanan Laplace-Bessel diferensiyel operatöre bağlı Hardy-Littlewood maksimal operatörün yani, B_n-maksimal operatörün tanımını verelim:

5.1. B_n-Maksimal Operatör ve $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ Uzayında Sınırlılığı

Tanım 5.1.1. $f \in L^{\mathrm{loc}}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. f fonksiyonunun B_n-maksimal operatörü

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} |B_+(0,r)|_\gamma^{-1} \int\limits_{B_+(0,r)} T^y |f(x)|\, y_n^\gamma dy$$

şeklinde tanımlanır (Guliyev, 1998, 2003).

Şimdi, B_n-maksimal operatörünün bazı temel özelliklerini inceleyelim:

Önerme 5.1.2. B_n-maksimal operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. M_γ alt lineer operatördür. Yani, $M_\gamma(f+g)(x) \le M_\gamma f(x) + M_\gamma g(x)$ dir. M_γ homojendir. Yani her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $M_\gamma(\alpha f)(x) = |\alpha|\, M_\gamma f(x)$ dir.

ii. f, lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $|f(x)| \le M_\gamma f(x)$ dir.

iii. $f \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ise, bu durumda $M_\gamma f \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve $\|M_\gamma\|_{\infty,\gamma} = \|f\|_{\infty,\gamma}$ dir.

iv. Eğer pozitif ölçülü bir kümede $f(x) \ne 0$ ise bu durumda X sınırlı bir küme olmak üzere $x \in X$ için $M_\gamma f(x) \ge \epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.

v. Pozitif ölçülü bir kümede $f(x) \ne 0$ ise bu durumda $M_\gamma f(x) \notin L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir.

Teorem 5.1.3. f, $\mathbb{R}_+^n$ de tanımlı bir fonksiyon olsun.

i. Eğer $f \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ise bu durumda her $t > 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : M_\gamma f(x) > t\right\}\right|_\gamma \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)}$$

dir, burada C sabit sayısı x, r, t ve f den bağımsızdır.

ii. Eğer $1 < p \leq \infty$ için $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ise bu durumda $M_\gamma f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ve

$$\|M_\gamma f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)}$$

dir, burada C sabit sayısı f den bağımsızdır (Guliyev, 1998, 2003).

Teorem 5.1.3 de B_n-maksimal operatörün $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayındaki sınırlılığı verilmiştir. Biz bu tezde Guliyev tarafından $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayında elde edilen sonuçları değişken üslü Lebesgue uzaylarına genelleştireceğiz.

Şimdi, Harmonik analizdeki bazı önemli sonuçları, değişken üslü Lebesgue uzaylarda verelim.

Tanım 5.1.4. M_γ B_n-maksimal operatörün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarda sınırlı olmasını sağlayan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ üs fonksiyonların kümesi $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ ile gösterilir. Eğer $p'(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ ise bu durumda $p(\cdot) \in \mathcal{B}'(\mathbb{R}_+^n)$ yazılır.

Aşağıda, değişken üslü Lebesgue uzaylar için bazı sonuçları verelim. (Diening, 2005, Teorem 8.1) e göre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ nin karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

Teorem 5.1.5. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$,

ii. $p'(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$,

iii. $1 < q < p^-$ için $p(\cdot)/q \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ dir,

iv. $1 < q < p^-$ için $(p(\cdot)/q)' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ dir.

Sonuç 5.1.6. (Norm eşlenik formülü) $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}_+^n)$ ya da $p(\cdot) \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda her $f \in L_{0,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$C\|f\|_{p(\cdot),\gamma} \leq \sup_{g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n):\, \|g\|_{p'(\cdot),\gamma} \leq 1} \int_{\mathbb{R}_+^n} |f|\, |g|\, d\mu \leq 2\, \|f\|_{p(\cdot),\gamma}$$

dir, burada C sayısı sadece p nin $\mathcal{B}$ sabitine bağlıdır (Diening vd., 2017).

Önerme 5.1.7. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $\mathbb{B} = \{B_+(x,r) : x \in \mathbb{R}_+^n,\, r > 0\}$ olsun. Herhangi bir $B_+ \in \mathbb{B}$ için

$$|B_+|_\gamma \leq \|\chi_{B_+}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \|\chi_{B_+}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}} \leq C\, |B_+|_\gamma \tag{5.1}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabit sayısı vardır.

İspat. Teorem 5.1.5 den $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ ise $p'(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ dir. Yani, $f, g \in L_{1,\gamma}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^n)$ negatif olmayan fonksiyonlar için

$$\int g(x) T_{\{B_+\}} f(x) x_n^\gamma dx = \int f(x)\, T_{\{B_+\}}\, g(x) x_n^\gamma dx$$

elde edilir. Böylece norm eşlenik formülüne göre $T_{\{B_+\}}$ nın $L_{p(\cdot),\gamma}$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $L_{p'(\cdot),\gamma}$ uzayında sınırlı olmasıdır.

$iii \Rightarrow i$: Hölder eşitsizliği kullanılarak her $f \in L_{p(\cdot),\gamma}$ için

$$\begin{aligned} \|T_{\{B_+\}} f\|_{p(\cdot),\gamma} &= \|\chi_{B_+} M_\gamma f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \\ &= \|\chi_{B_+}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} |B_+|_\gamma^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \chi_{B_+}(y) T^y |f(x)| y_n^\gamma dy \\ &\leq \|\chi_{B_+}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} 2 |B_+|_\gamma^{-1} \|\chi_{B_+}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}} \|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $|B_+|_\gamma \leq \|\chi_{B_+}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \|\chi_{B_+}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}} \leq C\, |B_+|_\gamma$, $T_{\{B_+\}}$ nın sınırlılığını verir.

$i \Rightarrow iii$: $L_{p(\cdot),\gamma}$ uzayının norm eşlenik formülüne göre her $B_+ \subset \mathbb{R}_+^n$ için

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_+}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \|\chi_{B_+}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}} &\leq 2\, \|\chi_{B_+}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \sup_{\|g\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 1} \int \chi_{B_+} g(x) x_n^\gamma dx \\ &= 2 \sup_{\|g\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 1} |B_+|_\gamma \|\chi_{B_+} M_\gamma g\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \\ &\leq 2\, A \sup_{\|g\|_{p(\cdot),\gamma} \leq 1} |B_+|_\gamma \|g\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} = 2\, A |B_+|_\gamma \end{aligned}$$

elde edilir, burada A bir sabittir (Ho, 2012, Lemma 3.2) göz önüne alınabilir.

Quasi-metrik ölçü uzaylarında tanımlanan M_μ maksimal operatörün değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlı olduğu Adamowicz tarafından ispatlanmıştır (Adamowicz vd., 2015). B_n-maksimal operatörün değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlılığı gösterilirken Adamowicz'in elde ettiği sonuçlar kullanılacaktır.

Teorem 5.1.8. $p(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|M_\gamma f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+^n)}$$

dir, burada C sabit sayısı f fonksiyonundan bağımsızdır.

İspat. Homojen tipli uzaylarda tanımlı maksimal fonksiyonu ele alalım. Bunun için ρ sürekli pseudo-metrik ile donatılmış X topolojik uzayını ve

$$\mu(B(x,2r)) \leq C\,\mu(B(x,r)) \tag{5.2}$$

doubling şartını sağlayan pozitif μ ölçüsünü göz önüne alalım. Burada C, x ve $r > 0$ dan bağımsız, $B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ ve (X,ρ,μ) quasi-metrik ölçü uzaylarında maksimal fonksiyon

$$M_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

dir. M_μ maksimal operatörün $L_{p(\cdot)}(X,\mu)$ uzayında sınırlı olduğu bilinmektedir (Adamowicz vd., 2015). Biz bu sonucu $X = \mathbb{R}_+^n$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $d\mu(x) = x_n^\gamma dx$ durumunda kullanacağız. Bu ölçünün (5.2) doubling şartını sağladığı açıktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,r)) = |B_+(x,r)|_\gamma &= \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}_+^n:|x-y|<r\}} y^\gamma dy \\
&\leq \prod_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\{y_i\in\mathbb{R}:\,|y_i|<r\}} dy_i \int\limits_{\{y_n>0:\,|x_n-y_n|<r\}} y_n^\gamma dy_n \\
&\leq \prod_{i=1}^{n-1} |(-r,r)| \int\limits_{\{y_n>0:\,|x_n-y_n|<r\}} y_n^\gamma dy_n
\end{aligned}$$

$$\leq (2r)^{n-1} \begin{cases} (2r)(2x_n)^\gamma, & r < x_n \\ (2r)^{1+\gamma}, & r \geq x_n \end{cases}$$

$$\leq 2^{n+\gamma} r^{n-1} \begin{cases} r x_n^\gamma, & r < x_n \\ r^{1+\gamma}, & r \geq x_n \end{cases} = C\, r^{n+\gamma} \max\{1, (x_n/r)^\gamma\}$$

elde edilir. Şimdi

$$M_\gamma f(x) \lesssim M_\mu f(x) \tag{5.3}$$

olduğunu gösterelim. Genelleştirilmiş öteleme operatörünün tanımından, $T^y \chi_{B_+(0,r)}(x)$, $B_+(x,r)$ yuvarında desteklidir. $T^y \chi_{B_+(0,r)}(x)$ in kestirimini yapalım.

$$T^y \chi_{B_+(0,r)}(x) \leq C \int\limits_{\{\alpha \in (0,\pi):\, x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2 < r^2\}} \sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha$$

$$\leq C \int\limits_{\{\alpha \in (0,\pi):\, \frac{x_n^2 + y_n^2 - r^2}{2x_n y_n} < \cos\alpha\}} \sin^{\gamma-2}\alpha\, d(\cos\alpha)$$

$$\leq C \int\limits_{\max\left\{-1, \frac{x_n^2+y_n^2-r^2}{2x_n y_n}\right\}}^{1} (1-t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} dt$$

$$\leq C \min\left\{1, \frac{r^{\gamma/2}(r - |x_n - y_n|)^{\gamma/2}}{(x_n y_n)^{\gamma/2}}\right\} \leq C \min\{1, (r/x_n)^\gamma\}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x \in \mathbb{R}^n_+$, $r > 0$ ve $y \in B_+(x,r)$ için

$$T^y \chi_{B_+(0,r)}(x) \leq C\, \min\{1, (r/x_n)^\gamma\}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$M_\gamma f(x) \leq M_{\gamma,0} f(x) + M_{\gamma,n} f(x)$$

olarak elde edilir, burada

$$M_{\gamma,0} f(x) = \sup_{r \leq x_n} |B_+(0,r)|_\gamma^{-1} \int\limits_{B_+(x,r)} |f(y)| T^y \chi_{B_+(0,r)}(x)\, y_n^\gamma dy$$

$$M_{\gamma,n} f(x) = \sup_{r > x_n} |B_+(0,r)|_\gamma^{-1} \int_{B_+(x,r)} |f(y)| T^y \chi_{B_+(0,r)}(x)\, y_n^\gamma dy$$

dir. $\mu(B_+(x,r)) \leq C\, r^{n+\gamma}$, $|B_+(x,r)|_\gamma = r^{n+\gamma}$ ve $T^y\chi_{B_+(0,r)} \leq 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$M_{\gamma,0}f(x) \leq \sup_{r\leq x_n} \frac{1}{|B_+(x,r)|} \int_{B_+(x,r)} |f(y)|\, y_n^\gamma dy \leq C\, M_\gamma f(x)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\mu(B_+(x,r)) \leq C\, r^{n+\gamma}\, \max\{1, (x_n/r)^\gamma\} = C\, r^{n+\gamma}(x_n/r)^\gamma,$$

$$T^y\chi_{B_+(0,r)} \leq C\, \min\{1, (r/x_n)^\gamma\} = (r/x_n)^\gamma$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} M_{\gamma,n}f(x) \leq C \sup_{r>x_n} |B_+(x,r)|_\gamma^{-1}\, r^{n+\gamma}(x_n/r)^\gamma (r/x_n)^\gamma \times \\ \times \frac{1}{\mu(B_+(x,r))} \int\limits_{B_+(x,r)} |f(y)|\, y_n^\gamma dy \leq C\, M_\mu f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$M_\gamma f(x) \lesssim M_\mu f(x)$$

elde edilir. (5.3) ifadesi ve M_μ maksimal operatörün $L_{p(\cdot)}(X,\mu)$ uzayında sınırlılığından M_γ nın $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlılığı elde edilir. Yani,

$$\|M_\gamma f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} \lesssim \|M_\mu f\|_{L_{p(\cdot)}(X,\mu)} \lesssim \|f\|_{L_{p(\cdot)}(X,\mu)} \leq C\, \|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)}$$

olarak elde edilir. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.9. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Eğer $p^- = 1$ ise bu durumda B_n-maksimal operatör $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı değildir.

İspat. $k \in \mathbb{N}$ için

$$1 < s_k < (n+\gamma)\left(n+\gamma-\frac{1}{k+1}\right)^{-1}$$

eşitsizliğini sağlayan s_k seçelim. Bu durumda her k için $p^- = 1$ olduğundan

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p(x) < s_k\}$$

kümesi pozitif ölçüye sahiptir. Lebesgue diferensiyelleme teoremi ile her bir χ_{E_k} fonksiyonu için

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{|B_+(0,r)\cap E_k|_\gamma}{|B_+(0,r)|_\gamma} = 1$$

dir. Özellikle, eğer $0 < r \leq R_k$ ise bu durumda

$$\frac{|B_+(0,r) \cap E_k|_\gamma}{|B_+(0,r)|_\gamma} > 1 - 2^{-(n+\gamma)(k+1)} \tag{5.4}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $0 < R_k < 1$ vardır. $B_k = B_+(0, R_k)$ olsun ve

$$f_k(x) = |x|^{-n-\gamma+\frac{1}{k+1}} \chi_{B_+(0,R_k)\cap E_k}(x)$$

tanımlayalım. Şimdi, $f_k \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ ve

$$\|M_\gamma f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \geq C\,(k+1)\,\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$$

olduğunu ispatlamalıyız. İlk olarak, dikkat edilmelidir ki, $R_k < 1$ ve $-n-\gamma+\frac{1}{k+1} < 0$ olduğundan,

$$\rho_\gamma(f_k) = \int\limits_{B_k\cap E_k} |x|^{(-n-\gamma+\frac{1}{k+1})p(x)} x_n^\gamma dx \leq \int_{B_k\cap E_k} |x|^{(-n-\gamma+\frac{1}{k+1})s_k} x_n^\gamma dx < \infty$$

olur. İkinci olarak, maksimal operatörün denk tanımını kullanacağız ve yuvarlar üzerinden ortalamayı göz önüne alacağız. $x \in B_k \cap E_k$ ve $r = |x| \leq R_k$ olsun. Bu durumda,

$$M_\gamma f_k(x) \geq \frac{1}{|B_+(0,r)|_\gamma} \int_{B_+(0,r)\cap E_k} T^y |x|^{-n-\gamma+\frac{1}{k+1}} y_n^\gamma dy$$

dir. $\delta_k = 2^{-(k+1)}$ olsun. Bu durumda

$$\left|\{y : \delta_k r < |y| < r\}\right| = (1 - 2^{-(n+\gamma)(k+1)})|B_+(0,r)|_\gamma$$

dir. Bundan dolayı, $|x|^{-n-\gamma+\frac{1}{k+1}}$ radyal azalan olduğundan ve (5.4) ifadesi ile $|B_+(0,r) \cap E_k|_\gamma \geq (1 - 2^{-(n+\gamma)(k+1)})|B_+(0,r)|_\gamma$ olduğundan,

$$\begin{aligned} M_\gamma f_k(x) &\geq \frac{1}{|B_+(0,r)|_\gamma} \int\limits_{B_+(0,r)\cap E_k} T^y |x|^{-n-\gamma+\frac{1}{k+1}} y_n^\gamma dy \\ &\geq C\, r^{-n-\gamma} \int\limits_{\{\delta_k r<|y|<r\}} T^y |x|^{-n-\gamma+\frac{1}{k+1}} y_n^\gamma dy \\ &\geq C\,(k+1)(1 - \delta_k^{\frac{1}{k+1}})|x|^{-n-\gamma+\frac{1}{k+1}} \geq C\,(k+1) f_k(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $x \notin B_k \cap E_k$ ise bu eşitsizliğin geçerli olduğu aşikardır. Dolayısıyla $\|M_\gamma f_k\|_{p(\cdot),\gamma} \geq C(k+1)\,\|f_k\|_{p(\cdot),\gamma}$ dır. Böylece $p^- = 1$ olduğunda M_γ maksimal operatörün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlı olmadığı ispatlanmış olur.

Şimdi M_γ maksimal operatörün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlı olmadığını gösteren örnekler verelim.

Örnek 5.1.10.

$$p(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \le 1; \\ 4, & x > 1, \end{cases}$$

ve $f(x) = |x|^{-2/5}\chi_{(0,1)}(x)$ olsun. Bu durumda $|x|^{-4/5}\chi_{(0,1)}(x) \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ olduğundan $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ dir. Diğer taraftan $M_\gamma f \notin L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ dir. Eğer $x > 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \sup_{r>0} \frac{1}{|B_+(0,r)|_\gamma} \int\limits_{B_+(0,r)} T^y |f(x)| y^\gamma dy &= \frac{1}{\omega(n,\gamma) r^{n+\gamma}} \int\limits_{B_+(0,r)} T^y |x|^{-2/5} y^\gamma dy \\ &= \frac{1}{\omega(n,\gamma) r^{n+\gamma}} \int\limits_{B_+(0,r)} |x-y|^{-2/5} y^\gamma dy \\ &\ge \frac{1}{\omega(n,\gamma) r^{n+\gamma}} \int\limits_{B_+(0,r)} |y|^{-2/5+\gamma} dy \\ &= \frac{1}{\omega(n,\gamma) r^{n+\gamma}} \int\limits_{B_+(0,r)} r^{-2/5+\gamma} dr \\ &= \frac{1}{\omega(n,\gamma)} r^{3/5-n} \notin L_{4,\gamma}((0,1)) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\rho_\gamma(M_\gamma f) = \infty$ olur. Dolayısıyla $M_\gamma f \notin L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ dir.

Örnek 5.1.11. $p(x) = 3 + \sin x$ olsun. Bu durumda $M_\gamma f$ maksimal operatörü $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ uzayında sınırlı değildir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$A_k = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right], \qquad B_k = \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

kümelerini tanımlayalım. $a = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $b = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ olarak alalım. Bu durumda eğer $x \in A_k$ ise $p(x) \ge a$ ve eğer $x \in B_k$ ise $p(x) \le b$ dir. Şimdi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x|^{-1/3} \chi_{A_k}(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\dfrac{a}{3} > 1$ ve $\gamma < \dfrac{a}{3} - 1$ olduğundan

$$\rho_\gamma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |x|^{-p(x)/3} x^\gamma dx \leq \int_{\pi/4+2\pi}^{\infty} |x|^{-a/3} x^\gamma dx < \infty$$

olur. Böylece $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ dır. Diğer taraftan $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ alalım. Bu durumda

$$M_\gamma f(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} T^y |f(x)| y^\gamma dy \geq C\,|x|^{-1/3+\gamma}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\dfrac{b}{3} < 1$ ve $\gamma > 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\rho(M_\gamma f) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} C \int_{B_k} T^y |x|^{-p(x)/3} y^\gamma dy \geq \sum_{k=1}^{\infty} C \int_{B_k} T^y |x|^{-b/3} y^\gamma dy \\ &\geq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right)^{-b/3} = \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $M_\gamma f \notin L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}_+)$ sonucu elde edilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Adamowicz, T., Harjulehto, P., Hästö, P. (2015). Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces. Math. Scand., 116(1), 5-22.

Aliev, I.A. (1987). On Riesz transformations generated by a generalized shift operator. Izvestiya Acad. of Sci. Azerbaijan, 1, 7-13.

Aliev, I.A., Gadjiev, A.D. (1992). Weighted estimates of multidimensional singular integrals generated by the generalized shift operator. Mat. Sb., 183(9), 45-66; English, translated into Russian *Acad. Sci. Sb. Math.*, 77(1), (1994), 37-55.

Calderón, A.P., Zygmund, A. (1956). On singular integrals. Amer. J. Math., 78(2), 289-309.

Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A. (2013). Variable Lebesgue spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Birkhauser/Springer, Heidelberg.

Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Martell, J., Pérez, C. (2006). The boundedness of classical operators on variable L^p spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 31(1), 239-264.

Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Neugebauer, C. (2003). The maximal function on variable L^p spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 28(1), 223-238.

Diening, L. (2004). Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl., 7(2), 245-253.

Diening, L. (2005). Maximal function on Orlicz-Musielak spaces and generalized Lebesgue space. Bull. Sci. Math., 129(8), 657-700.

Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Mizuta Y., Shimomura, T. (2009). Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 34, 503-522.

Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Ružička, M. (2017). Lebesgue and Sobolev spaces with Variable Exponents. Springer-Verlag.

Diening, L., Hästö, P., Roudenko, S. (2009). Function spaces of variable smoothness and integrability. J. Funct. Anal. 256, 1731-1768.

Ekincioğlu, İ. (2010). The boundedness of high order Riesz-Bessel transformations generated by the generalized shift operator in weighted $L_{(p,\nu)}$-spaces with general weights. Acta Appl. Math., 109(2), 591-598.

Ekincioğlu, İ., Şerbetçi, A. (1999). On the singular integral operators generated by the generalized shift operator. International Journal of Applied Mathematics, 1(1), 29-38.

Ekincioğlu, İ., Şerbetçi, A. (2005). On weighted estimates of high order Riesz-Bessel transformations generated by the generalized shift operator. Acta Mathematica Sinica, 21(1), 53-64.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Gadjiev, A.D., Aliev, I.A. (1988). On classes of operators of potential types, generated by a generalized shift. Reports of enlarged Session of the Seminars of I.N.Vekua Inst. of Applied Mathematics, Tbilisi, 3(2), 21-24 (Russian).

Gadjiev A.D., Guliyev, E.V. (2005). Two-weighted inequality for singular integrals in Lebesgue spaces associated with the Laplace-Bessel differential operator. Proc. Razmadze Math. Inst., 138, 1-15.

Guliyev, V.S. (1998). Sobolev theorems for B–Riesz potentials. Dokl. RAN, 358(4), 450-451.

Guliyev, V.S. (2003). On maximal function and fractional integral associated with the Bessel differential operator. Math. Inequal. Appl., 6(2), 317-330.

Guliyev, V.S., Isayev, F.A. (2013) The Two-Weighted Inequalities for Sublinear Operators Generated by B Singular Integrals in Weighted Lebesgue Spaces. Acta Applicandae Mathematicae, 127(1), 1-16

Ho, K.P. (2012). Atomic decompositions of Hardy spaces and characterization of BMO via Banach function spaces. Anal. Math., 38(3), 173-185.

Kipriyanova, I.A. (1967). Fourier Bessel transformations and imbedding theorems. Trudy Math. Inst. Steklov, 89, 130-213.

Kipriyanova, I.A., Klyuchantsev, M.I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator II. Sibirsk. Mat. Zh., 11, (1970), 1060-1083; translation in Siberian Math. J., 11, 787-804.

Klyuchantsev, M.I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator I. Sibirsk. Math. Zh., 11, 810-821; translation in Siberian Math. J., 11, 612-620.

Kováčik O., Rákosník, J. (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math. J., 41(4), 592-618.

Kreyszig E. (1989). Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley.

Levitan, B.M. (1951). Bessel function expansions in series and Fourier integrals. Uspekhi Mat. Nauk., 6(2), 102-143.

Levitan, B.M. (1967). Theorem on the argument of an almost periodic function. Mat. Zametki, 1(1), 35-44.

Levitan, B.M. (1973). The Theory of Generalized Translation Operators. Nauka, Moscow, (Russian).

Lyakhov, L.N. (1983). On a class of spherical functions and singular pseudodifferential operators. Dokl. Akad. Nauk., 272(4), 781-784.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Lyakhov, L.N. (1997). Multipliers of the Mixed Fourier-Bessel Transformation. Proc. V.A.Steklov Inst. Math., 214, 234-249.

Mihlin, S.G. (1962). Multidimensional singular integrals and integral equations. Fizmatgiz, Moscow; English transl. Pergamon Press, NY, 1965.

Musielak, J. (1983). Orlicz spaces and modular spaces. volume 1034 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

Nakano, H. (1950). Modulared Semi-Ordered Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd. Tokyo.

Nakano, H. (1951). Topology of linear topological spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

Nekvinda, A. (2007). Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. Mathematical Inequalities and Applications, 7, 255-266.

Orlicz, W. (1931). Über Konjugierte Exponentenfolgen. Stud. Math., 3, 200-211.

Sharapudinov, I.I. (2012). Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent. Vladikavkaz, Russia: Itogi Nauki Yug Rossi Seria Mathematicheskaya Monografia 5, (Russian).

Stein, E.M. (1993). Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton, N. J.

Stempak, K. (1991). Almost everywhere summability of Laguerre series. Studia Math., 2(100), 129-147.

Tsenov, I. V. (1961). Generalization of the problem of best approximation of a function in the space. ls. Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ., 7, 25-37.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: KAYA Esra
Doğum Tarihi ve Yeri	: 02.05.1989, Eskişehir
e-mail	: kayaesra.e.k@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Dumlupınar Üniversitesi	
Yüksek Lisans	Dumlupınar Üniversitesi	2014
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2012
Lise	Abdurrahman Paşa Lisesi	2007

Yabancı Dil 71.25