B_n ORLICZ UZAYLARINDA

B_n MAKSİMAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Şeyma Elifnur EKİNCİOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Şubat - 2019

B_n ORLICZ UZAYLARINDA B_n MAKSİMAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

ŞEYMA ELİFNUR EKİNCİOĞLU

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR
Ortak Danışman: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Şubat - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Şeyma Elifnur EKİNCİOĞLU'nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "B_n Orlicz uzaylarında B_n maksimal operatörlerin sınırlılığı" başlıklı bu çalışma, Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

04/02/2019

Prof. Dr. Önder UYSAL
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Bölüm Başkanı, Matematik Bölümü

Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR
Danışman, Matematik Bölümü

Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV
Ortak Danışman, Matematik Bölümü

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU
Matematik Bölümü, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Ali Serdar Nazlıpınar
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Dr. Ögr. Üyesi Cansu KESKİN
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan intihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının % 30 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR | Şeyma Elifnur EKİNCİOĞLU

B_n ORLICZ UZAYLARINDA B_n MAKSİMAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Şeyma Elifnur EKİNCİOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2019
Tez Danışmanı : Doç.Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR
Ortak Danışman: Prof.Dr. Vagif S. GULİYEV

ÖZET

Bu tezde, Orlicz uzayları ve harmonik analizdeki temel operatörler hakkında bilgi verilecek ve B_n maksimal operatörlerin sınırlılığı incelenecektir. Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, literatürde konu ile ilgili çalışmaları olan matematikçiler hakkında bilgi verilerek tez çalışmasının amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tezin esasını teşkil eden diğer bölümlerde kullanılacak olan konuları yakından ilgilendiren bazı temel kavram, notasyon ve teoremlere yer verilecektir. Üçüncü bölümde, ilk olarak Orlicz uzaylarının temelini olusturan Young fonksiyonları takdim edilecek, daha sonra ise Orlicz uzayları detaylı bir şekilde incelenecektir. Son bölümde ise harmonik analizin önemli integral operatörlerinden olan B_n maksimal operatörlerin Orlicz uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili sonuçlara yer verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli maksimal operatör, Lebesgue uzayı, Maksimal operatör, N-fonksiyonları, Orlicz uzayı, Singüler integral operatör, Young fonksiyonları.

ON THE BOUNDEDNESS OF THE B_n-MAXİMAL OPERATOR ON B_n-ORLICZ SPACES

Şeyma Elifnur EKİNCİOĞLU
Department Of Mathematics, M.S. Thesis, 2019
Thesis Supervisor : Assoc. Prof. Ali Serdar NAZLIPINAR
Thesis Co-Supervisor : Prof. Vagif S. GULIYEV

SUMMARY

In this thesis, information about Orlicz spaces and the fundamental operators of harmonic analysis are given and the boundedness of B_n-maximal operators are investigated. In the first chapter of this study consisting of four chapters, the aim of the thesis study was given by giving information about the mathematicians who have studies on the subject in the literature. In the second chapter, some basic concepts, notations and theorems which are the basis of the thesis and which are related to the topics discussed in other chapter are mentioned. In the third chapter, firstly the definition and properties of the Young functions which form the basis of Orlicz spaces will be given and then the Orlicz spaces will be examined in detail. In the last chapter, the results of the boundedness of B_n maximal operators in Orlicz spaces, which are important integral operators of harmonic analysis are given.

Keywords: Fractional maximal operator, Lebesgue space, Maximal operator, N - functions, Orlicz space, Singular integral operator, Young functions.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında, engin bilgi ve tecrübelerini paylaşan değerli danışmanlarım sayın Prof.Dr.Vagif S. GULİYEV ve Doç.Dr.Ali Serdar NAZLIPINAR'a, akademisyenliği sevdiren değerli hocam sayın Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU'na, lisans ve yüksek lisans öğrenimim süresince beni destekleyen tüm değerli bölüm hocalarıma ve çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen sevgili aileme saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu öklid uzay
BMO	BMO Uzayı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L_p(\mathbb{R}_n)$	Lebesgue uzayı
$L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı Lebesgue uzayı
$\|\cdot\|_{L^p}$	Lebesgue uzayında norm
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	zayıf Lebesgue uzayı
Φ	Young fonksiyonu
$\widetilde{\varphi}(t)$	φ fonksiyonunun sağ tersi
$\widetilde{\Phi}(t)$	Φ fonksiyonunun tümleyeni
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$WL^\Phi(\mathbb{R}^n)$	zayıf Orlicz uzayı
$\|\cdot\|_{L^\Phi}$	Orlicz uzayında norm
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	kesirli maksimal operatörü
I_α	kesirli integral operatörü
T	singüler integral operatörü
$\operatorname{ess\,sup}$	Esas supremum
$\operatorname{ess\,inf}$	Esas infimum
$f \otimes g$	Genelleştirilmiş ötelemeye bağlı konvolüsyon çarpım
M_γ	B_n-maksimal operatörü
B_n	Bessel operatörü
$\triangle_{B_n}$	Laplace-Bessel operatörü
T^y	Genelleştirilmiş öteleme operatörü

1. GİRİŞ

Harmonik analizde bilinen klasik operatörlerin sınırlılık problemleri, farklı fonksiyon uzaylarında kapsamlı olarak çalışılmaktadır. Lebesgue uzaylarında, bu klasik singüler integral operatörlerin kuvvetli ve zayıf tipli sınırlılıkları bilinmektedir (Bennett ve Sharpley, 1988, Stein, 1970, Torchinsky, 1986 ve Grafakos, 2004). Elde edilen klasik sonuçlar, Lebesgue uzaylarının genellemesi olan Morrey uzayları, Orlicz uzayları, Lorentz Uzayları gibi fonksiyon uzaylarda da elde edilmiştir.

Bu çalışmada, klasik operatörlerin farklı bir yapısının sınırlılık problemini Orlicz uzaylarındaki ele alacağız. 1931 yılında, Orlicz uzayları, $L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzaylarının bir genellemesi şeklinde ilk olarak takdim edilmiştir (Birnbaum ve Orlicz, 1931). Daha sonra bu uzaylar, matematik analiz, reel ve harmonik analizde önemli araç olarak yerini almıştır. Özellikle, bu uzaylarda, Hardy-Littlewood maksimal operatör, singüler integral operatör ve kesirli integral operatör gibi klasik operatörlerin sınırlılıkları pek çok çalışma için büyük kolaylık sağlar. Örnek olarak Hardy-Littlewood maksimal operatörün $1 < p \leq \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılığı verilebilir. Orlicz uzaylarında bu operatörün sınırlılığı araştırılmıştır (Cianchi, 1996 ve Kita, 1997). Aynı şekilde, I_α kesirli integral operatör, $1 < p < q < \infty$ ve $\frac{-n}{p} + \alpha = \frac{-n}{q}$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi). Orlicz uzaylarda, bu klasik operatörlerin sınırlılığı incelemiştir (Trudinger, 1967). Bununla birlikte, Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi ve Trudinger'in sonuçları, diğer matematikçiler tarafından genelleştirilmiştir (Cianchi, 1996; Nakai, 2001;O'Neil, 1963; Strich, 1972; Torchinsky, 1976; Guliyev, Deringoz, Gasanov, 2017, 2018).

Bu tezdeki "Klasik singüler integral operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıkları göz önüne alınarak, B_n maksimal operatörlerin B_n-Orlicz uzaylarında sınırlılıklarının araştırılması problemi" daha ileri düzeyde singüler integral operatörlerin sınırlılık problemlerinin araştırılmasımna temel teşkil etmesi hedeflenmektedir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1. $\Omega \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{U}$, $\Omega \subset 2^{\Omega}$ kümesininin bir sınıfı verilsin. Eğer $\mathcal{U}$ sınıf,

i. $\Omega \in \mathcal{U}$

ii. $\forall\ A \in \mathcal{U}$ kümesi için $A^c = \overline{A} \in \mathcal{U}$

iii. $A_j \in \mathcal{U}$ ise $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{U}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

özelliklerine sahip ise $\mathcal{U}$ sınıfına Ω kümesinde bir cebir denir. Yukarıdaki (iii) şartı, $\forall\ n$ doğal sayısı için $\mathrm{A}_n \in \mathcal{U}$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$ ise $\mathcal{U}$ cebirine σ-cebiri denir. Burada $\Omega \backslash A$ kümesine kısaca A nın tümleyeni denir. A nın tümleyenini $\overline{A}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. Açık aralıkların sınıfını kapsayan (açık aralıkların doğurduğu) en küçük σ-cebire Borel cebiri denir. $\mathcal{B}$ veya $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Kapalı aralıkların doğurduğu en küçük σ-cebir de Borel cebiridir.

Tanım 2.1.3. Ω bir küme ve $\mathcal{U}$, Ω kümesinde bir σ-cebiri olsun. Bu durumda $(\Omega,\mathcal{U})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{U}$ sınıfındaki her bir kümeye de $\mathcal{U}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.1.4. $(\Omega,\mathcal{U})$ ölçülebilir uzay ve $\mu : \mathcal{U} \subseteq \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, μ fonksiyonu

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $\forall\ A \in \mathcal{U}$ kümesi için $0 \leq \mu(\mathcal{U}) \leq \infty$,

iii. $\forall$ ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerine sahip ise, μ fonksiyonuna Ω kümesinde ölçü denir.

Tanım 2.1.5. V bir küme olsun. Ω nın alt kümelerinin bir σ-cebiri ve $\mathcal{U}$ tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(\Omega,\mathcal{U},\mu)$ üçlüye ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.6. $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir uzay ve $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu verilsin. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi^{-1}\big((\alpha, +\infty)\big) = \{x \in \Omega : \varphi(x) > \alpha\} \in \mathcal{U}$$

ise φ fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir. Ω üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{U})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. Ω bir küme ve $P(\Omega)$, Ω nin bir kuvvet kümesi verilsin. $P(\Omega)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

i. $\mu^*(\emptyset) = 0$,

ii. $\forall\ A \in P(\Omega)$ için $\mu^*(A) \geq 0$,

iii. $X \subset Y \subset \Omega$ için $\mu^*(X) \leq \mu^*(Y)$,

iv. $\forall$ bir $n \in \mathbb{N}$ için $X_n \in P(\Omega)$ ise

$$\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} X\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X_n)$$

özelliklerine sahip ise, μ^* fonksiyonuna Ω üzerinde bir dış ölçüdür denir

Tanım 2.1.8. (I_k), reel sayılarda sınırlı ve açık aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_X = \big\{(I_k) : \quad X \subset \bigcup_k I_k\big\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesinde,

$$\lambda^*(X) = \inf\big\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : \quad I_k \in \tau_X\big\}$$

biçiminde ifade edilen λ^* bir dış ölçüdür. Bu ölçüye, Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü, $\mathbb{R}$ sayılar kümesinde her bir alt aralığın uzunluğuna karşılık gelir.

$\mathbb{R}^n$ de Lebesgue dış ölçüyü ifade etmek için,

$$I = \big\{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\big\}$$

n-boyutlu kapalı aralıkları göz önüne alalım. Bu aralıkların ölçüsü (hacimleri) $V(I) =$

$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ ile gösterilir. Keyfi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} V(I_m) : \quad A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m \quad \text{bir aralık}\Big\}$$

ile tanımlanır. $\forall X \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap (\mathbb{R}^n - A))$$

ise A kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Tanım 2.1.9. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \lambda^*)$, λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}^n$ nin alt kümelerinin sınıfı verilsin. λ^* ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \lambda^*)$ sınıfının $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sınıfına kısıtlanmasına, Lebesgue ölçüsü denir. $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçüsü $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.10. $(V, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı verilsin. Eğer önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önermeye hemen hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 2.1.11. D, $\mathbb{R}^n$ uzayında ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı ve $T : D \to D$ bir operatör olsun. Her $f, g \in D$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $T(f+g) = T(f) + T(g)$ ve $T(\alpha f) = \alpha T(f)$ ise bu durumda T operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.1.12. Eğer $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ ve $T(f) = T(f)$ ise bu operatöre alt lineer operatör ve $c > 0$ için $T(f+g) \leq c[T(f) + T(g)]$ ve $|T(\alpha f)| = |\alpha||T(f)|$ ise T operatörüne quasi-lineer operatör denir.

Tanım 2.1.13. α pozitif bir sabit olsun. $A \preceq B$ gösterimi, $A \leq \alpha B$ eşitsizliğinin yerine kullanılır. $A \preceq B$ ve $B \preceq A$ ise $A \approx B$ dir.

Tanım 2.1.14. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}) : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p. dereceden mutlak değerleri integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. Bu uzayın normu

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \left(|f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $p = \infty$ ise $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \Omega} |f(\xi)|$ dir.

Teorem 2.1.15. Eğer $1 < p < \infty$ ise $L^p(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzayıdır (Kufner vd.,1977).

Teorem 2.1.16. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ olsun. Bu durumda $\forall\ a, b > 0$ ise $ab \leq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^{p'}}{p'}$ dir. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $a^p = b^{p'}$ olmasıdır. Bu eşitsizliğe Young Eşitsizliği denir (Kufner vd.,1977).

Teorem 2.1.17. f ve φ ölçülebilir fonksiyonlar, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)\varphi(\xi)|d\xi \leq \|f\|_{L_p}\|\varphi\|_{L_{p'}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir (Kufner vd.,1977).

Teorem 2.1.18. $1 \leq p \leq \infty$ için f ve $g \in L^p$ ise $(f+\varphi) \in L^p$ ve

$$\|f+\varphi\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|\varphi\|_{L_{p'}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir (Kufner vd.,1977).

Tanım 2.1.19. (Konveks Küme): $\mathcal{L}$ bir lineer uzay $\Omega \subset \mathcal{L}$ ve $t_1, t_2 \in \Omega$ keyfi olmak üzere $W = \{t \in \mathcal{L} :\ t = \alpha t_1 + (1 * \alpha)t_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \Omega$ ise Ω kümesine konveks küme denir.

Teorem 2.1.20. $|\Omega| < \infty$ için $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $< f >= \frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} f(\xi)d\xi$ olsun. Eğer $f \in L^1(\Omega)$ ise $(J \circ f) \geq J(< f >)$ olur. Bu eşitsizliğe Jensen eşitsizliği denir (Lieb ve Loss, 2001).

Teorem 2.1.21. f ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$\big|\{\xi \in \mathbb{R}^n : |f(\xi)| > \lambda\}\big| \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|d\xi$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Chebyshev eşitsizliği denir (Wheeden ve Zygmund, 1977).

Tanım 2.1.22. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL_p} = \sup_{\lambda>0} \lambda \big|\{\xi \in \mathbb{R}^n : |f(\xi)| > \lambda\}\big|^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

olsun. Bu durumda

$$WL^p(\mathbb{R}^n) = \big\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad f \text{ ölçülebilir} \quad \|f\|_{WL_p} < \infty\big\}.$$

uzayına zayıf Lebesgue uzayı denir ve $WL^p(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.23. $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL^p(\mathbb{R}^n)$ dir. Bununla birlikte $\|f\|_{WL_p} \leq \|f\|_{L_p}$ eşitsizliği sağlanır (Grafakos, 2004).

Tanım 2.1.24. $1 \leq p < \infty$ olsun. $\mathbb{R}^n$ uzayının her bir kompakt S alt kümesi için $f\chi_S \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_S \in WL^p(\mathbb{R}^n)$ özelliklerini sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonlar uzayı, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada χ_S, S kümesinin karakteristik fonksiyonunudur ve $p = 1$ için $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise f fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.25. T bir quasi-lineer operatör ve $1 \leq p$ ve $q \leq \infty$ verilsin. $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to WL^q(\mathbb{R}^n)$ sınırlı operatör ise (p, q) zayıf tiplidir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left|\left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |Tf(\xi)| > \lambda\right\}\right| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}\right)^q$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C > 0$ var ise T operatörü (p, q) zayıf tiplidir denir. T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise (p, q) kuvvetli tiplidir, yani $\forall$ $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_q} \leq C\|f\|_{L_p}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $C > 0$ var ise T operatörü (p, q) kuvvet tiplidir.

Uyarı 2.1.26. Her (p, q) kuvvetli tipli operatör aynı zamanda (p, q) zayıf tipli operatördür (Grafakos, 2004).

Tanım 2.1.27. $\log^+\xi = \max(\log \xi, 0)$ olsun.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| \log^+|f(\xi)| d\xi < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L \log L$ Zygmund uzayı denir (Bennett ve Sharpley, 1988).

1961 yılında, BMO uzayları, John ve Nirenberg tarafından takdim edilmiştir. BMO ile L^p uzayı ortak bazı özelliklere ve genellikle L^∞ uzayı yerine alınabilir. Klasik $T : L^\infty \to L^\infty$ singüler integral operatörler sınırlı olmamasına karşın $T : L^\infty \to BMO$ sınırlıdır.

Tanım 2.1.28. φ, $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|\varphi\|_* = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(\xi,r)|}\int_{B(\xi,r)} \big|\varphi(\eta) - \varphi_{B(\xi,r)}\big| d\eta < \infty$$

yarı-normuna göre Banach uzayıdır. Burada $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi_{B(\xi,r)} = \frac{1}{|B(\xi,r)|}\int_{B(\xi,r)} \varphi(\eta) d\eta$$

ve $B(\xi, r)$, ξ merkezli r yarıçaplı bir yuvardır.

BMO uzayı, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına eşit değildir. Fakat $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ dır. Yani,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(\xi,r)|}\int\limits_{B(\xi,r)} \big|\varphi(\eta) - \varphi_{B(\xi,r)}\big| d\eta \\
&\quad\le \frac{1}{|B(\xi,r)|}\int\limits_{B(\xi,r)} |\varphi(\eta)| d\eta + \frac{1}{|B(\xi,r)|}\int\limits_{B(\xi,r)} \big|\varphi_{B(\xi,r)}\big| d\eta \\
&\quad= \frac{1}{|B(\xi,r)|}\int\limits_{B(\xi,r)} |\varphi(\eta)| d\eta + \big|\varphi_{B(\xi,r)}\big| \le 2\frac{1}{|B(\xi,r)|}\int\limits_{B(\xi,r)} |\varphi(\eta)| d\eta \le 2\|\varphi\|_\infty
\end{aligned}$$

dir ve buradan

$$\|\varphi\|_* \le 2\|\varphi\|_\infty$$

elde edilir. $\|\varphi\|_* \le 2\|\varphi\|_\infty$ iken $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ olur. Her sınırlı(ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayına aittir. Fakat sınırlı olmayan fonksiyonlarda BMO uzayında vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayında olup $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayında olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin, $\log|x|$ fonksiyonu iyi bir örnektir.

Şimdi BMO uzayında olmayan aşağıdaki fonksiyonu örnek olarak verebiliriz.

Örnek 2.1.29. $f(\xi) = \log\frac{1}{|\xi|} sign(\xi) \notin BMO([-1,1])$ dir. $0 < t < 1$ ve $I \equiv [-t, t]$ için $f_1 = 0$ ve $t \to 0$ iken

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|}\int_I |f(\xi) - f_1| d\xi &= \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \left|\log\frac{1}{|\xi|}\right| d\xi = \frac{1}{t}\int_0^t \log\frac{1}{\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{t}\Big(-\int_0^t \log\xi d\xi\Big) = \frac{1}{t}\Big(t + t\log t\Big) \\
&= 1 + \log\frac{1}{t} \to \infty,\ t \to 0
\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı yukarıdaki örnek, bir fonksiyonun mutlak değerinin BMO uzayında olması, bu fonksiyonun, BMO uzayına ait olmasını gerektirmez.

Uyarı 2.1.30.

i. $\forall\ f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $t > 0$ için

$$|\{\xi \in \Omega : |f(\xi) - f_\Omega| > t\}| \leq C_1|\Omega|e^{-C_2\lambda/\|f\|_*},$$

olacak şekilde pozitif $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C_1 ve C_2 sayıları vardır. Bu eşitsizliğine John-Nirenberg eşitsizliği denir.

ii. John-Nirenberg eşitsizliği $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_* \approx \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{|B(\xi,r)|} \int_{B(\xi,r)} \left|f(\eta) - f_{B(\xi,r)}\right| d\eta \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

iii. f fonksiyonu $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olsun. $0 < 2r < s$ için

$$\left|f_{B(\xi,r)} - f_{B(\xi,s)}\right| \leq C\|f\|_* \ln \frac{s}{r} \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ξ, r, s ve f den bağımsız bir $C > 0$ sayısı vardır.

Uyarı 2.1.31.

i. $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\xi \in \mathbb{R}^n$ ise $f(\Delta - \xi) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve
$\|f(\cdot - \xi\cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$ dir.

ii. $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\xi \in \mathbb{R}^n$ ise $f(\lambda\xi) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve
$\|f(\lambda\cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$ dir.

iii. $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\|f\|_{BMO} \approx \sup_{B(\xi,r)} \inf_{c\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(\xi,r)|} \int_{B(\xi,r)} |f(\eta) - c| d\eta$$

dir.

2.2. Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü

Tanım 2.2.1. B_n Bessel operatör olsun. $B_x v = B_\xi v$, $v(x,0) = \varphi(x)$, $v_\xi(x,0) = 0$ başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\gamma}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} \tag{2.2}$$

denkleminin, $v\big|_{\xi=0} = \varphi(x)$ ve $\frac{\partial v}{\partial \xi}\big|_{\xi=0} = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümüne $\mathbb{R}_+$ öteleme denir. Burada $\gamma > 0$ dır. Bu çözüm

$$v(x,\xi) = T_x^\xi \varphi(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\alpha})\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Bu öteleme $\mathbb{R}_+$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye $\mathbb{R}_+$ öteleme denir (Levitan, 1951).

Buradan $T_x^0\varphi(x) = \varphi(x)$ eşitliği elde edilir. Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonunun sürekli türevleri varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} T_x^\xi \varphi(x)\big|_{\xi=0} = 0 \tag{2.3}$$

olur. $\varphi(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevleri varsa, $T_x^\xi\varphi(x)$ operatörü, (2.2) denkleminin çözümüdür ve (2.3) başlangıç şartlarını sağlar. Eğer $x,\xi \in \mathbb{R}^n$ ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ dir ve

$$\triangle_{B_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_n, \qquad B_n = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$\triangle_{B_n}$ Laplace-Bessel operatör olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} + \frac{\gamma}{\xi_n}\frac{\partial v}{\partial \xi_n}$$

denkleminin yukarıda verilen başlangıç şartları altındaki çözümü

$$T_x^\xi\varphi(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int_0^\pi \varphi\big(x'-\xi', \sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\alpha}\big)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

dir. Bu çözüme genelleştirilmiş öteleme operatörü denir (Levitan, 1973). Eğer $\varphi(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\int_{\mathbb{R}_+^n} |\varphi(x)| x_n^\gamma dx < \infty$ ve her $x > 0$ için $g(x)$ sınırlı bir fonksiyon ise

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^\xi \varphi(x) g(\xi) \xi_n^\gamma d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\xi) T_x^\xi g(x) \xi_n^\gamma d\xi$$

dir. $g(x) = 1$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^\xi \varphi(x) \xi_n^\gamma d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\xi) \xi_n^\gamma d\xi$$

dir.

Tanım 2.2.2. φ ve $g \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ölçülebilir fonksiyonlar ve T^ξ genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda operatör ile ilgili konvolüsyon çarpım

$$(\varphi \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\xi) T^\xi g(x)\, \xi_n^\gamma d\xi, \qquad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. Klasik İntegral Operatörler

Bu kısımda, tez çalışmasında göz önüne alınacak temel singüler integral operatörler incelenecektir.

Tanım 2.3.1. f, $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilen bir fonksiyonu verilsin. Bu durumda $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(\xi)| d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

operatöre, M Hardy- Littlewood maksimal operatör denir.

Tanım 2.3.2. Ω, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı sıfırncı mertebeden homojen, tek,

$$w(t) = \sup \left\{ |\Omega(x) - \Omega(\xi)| : x, \xi \in S^{n-1}, \quad |x - \xi| \leq t \right\}$$

ve $\int_\Omega \frac{w(t)}{t}$ şartını (Dini şartı) sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B(x,r)} \frac{\Omega(\xi)}{|\xi|^n} f(x - \xi) d\xi \tag{2.4}$$

operatörüne, singüler integral operatör denir.

Tanım 2.3.3. f , $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilen bir fonksiyon ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. M_α kesirli maksimal operatör,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(\xi)| d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\alpha = 0$ ise $M_0 \equiv M$ dir.

Tanım 2.3.4. f , $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. B_n-maksimal fonksiyon

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} T^\xi |f(x)|\, \xi_n^\gamma \, d\xi$$

şeklinde tanımlanır ve $M_\gamma f$ ile gösterilir (Guliyev, 2003).

Tanım 2.3.5. f , $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilen bir fonksiyon ve $0 < \alpha < n$ olsun. Bu durumda $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{|x-\xi|^{n-\alpha}} d\xi, \tag{2.5}$$

integral operatörüne I_α kesirli integral operatör ve Riesz potansiyeli denir.

Uyarı 2.3.6. I_α ve M_α operatörler ve $0 < p < n$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$ dir (Lu, vd.,2007).

Teorem 2.3.7.

i. M maksimal operatörü, $1 \leq p \leq \infty$ için (p,p) zayıf tipli, $1 < p \leq \infty$ için ise (p,p) kuvvetli tipli bir operatördür (Hardy ve Littlewood, 1928; Wiener, 1939).

ii. T, singüler integral operatör, $1 \leq p < \infty$ için (p,p) zayıf tipli $1 < p < \infty$ için (p,p) kuvvetli tipli bir operatördür (Bennett ve Rudnick, 1980; Bennett ve Sharpley, 1988).

iii. M_α kesirli maksimal operatör, $1 \leq p \leq \frac{\alpha}{n}$ için (p,q) zayıf tipli ve $1 < p \leq \frac{\alpha}{n}$ için (p,q) kuvvetli tipli bir operatördür. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir (Hardy ve Littlewood, 1928; 1932; Sobolev, 1938).

3. ORLICZ UZAYLARI VE YOUNG FONKSİYONLARI

3.1. Orlicz Uzaylarda Temel Tanım ve Sonuçlar

Orlicz uzaylarını detaylı bir şekilde takdim etmek için ilk olarak Young fonksiyonları ve bu fonksiyonlar ile bu uzayın bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1. $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyon olsun. Eğer Φ,

1. $\Phi(0) = 0$;
2. Soldan sürekli;
3. Artan;
4. Konveks; Yani, her $\alpha \in [0,1]$ ve her $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ için $\Phi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Phi(t_1) + (1-\alpha)\Phi(t_2)$ dir;
5. Aşikar değildir; Yani $\Phi(t_1) > 0$ olacak şekilde en az bir $t_1 > 0$ ve $\Phi(t_2) < \infty$ olacak şekilde en az bir $t_2 > 0$ vardır.

şartlarını sağlarsa bu fonksiyona Young fonksiyonu denir.

Dikkat edilirse, yukarıdaki tanımda, (1) ve (4) şartlarından $t \in (0,\infty)$ için $\frac{\Phi(t)}{t}$ fonksiyonunun artan olduğu görülür. Çünkü, $t_1 = \frac{t_1}{t_2} + (1 - \frac{t_1}{t_2})$ olduğundan

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \Phi(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2}\Phi(t_2) \tag{3.1}$$

olur. Bu bu fonksiyonun artan olduğunu gösterir.

Açık aralıklar üzerinde konveks fonksiyonlar süreklidir ve konveks fonksiyonların hemen her yerde türevlenebilir oldukları bilinmektedir. Bununla birlikte, konveks fonksiyonların sağladığı pek çok önemli özellikler vardır. Aşağıdaki teorem, konveks fonksiyonların integral gösterimine sahip olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.1.2. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ artan ve soldan sürekli bir fonksiyon olsun. Budurumda $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ aralığı için

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} \varphi(s)ds, \qquad \alpha \leq \beta \tag{3.2}$$

olmasıdır (Rao ve Ren, 1991).

Şimdi, yukarıdaki teoremden, herhangi bir Young fonksiyonunun (3.2) ile verilen bir integral gösterimine sahip olduğunu aşağıdaki sonuç ile verebiliriz:

Sonuç 3.1.3. $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$, artan, soldan sürekli ve aşikar olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonunun, Young fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart

$$\Phi(s) = \int_0^s \varphi(t)dt \tag{3.3}$$

olmasıdır. Eğer s ler için $\Phi(s) = \infty$ ise $\varphi(s) = \infty$ olarak alınacaktır.

Yukarıdaki sonuçta Young fonksiyonu olması halinde hemen her $s > 0$ için $\varphi(t) = \Phi'(s)$ dir. Bundan dolayı, soldan sürekli, artan ve aşikar olmayan bir $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonu Orlicz türevidir. φ türevine sahip bir Φ Young fonksiyonu, Φ fonksiyonunun (3.3) integral gösterimine karşılık gelmektedir.

Bazı matematikçile, rOrlicz uzaylarını takdim etmek için, Young fonksiyonları sınıfından daha kısıtlı bir sınıf olan N-fonksiyonlarını kullanmaktadır. Fakat, bu durumda bazı dezavantajlar ortaya çıkmaktadır. Öneğin, Orlicz uzayları, N-fonksiyonları yardımıyla tanımlanırsa $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $L \log L(\mathbb{R}^n)$ uzayları göz ardı edilmiş olur. N-fonksiyonlarını ele almak daha kolay olsa bile bu tezde Young fonksiyonlarını göz önüne alacağız.

Tanım 3.1.4. φ, $[0, \infty) \to [0, \infty)$, tanımlı, monoton azalmayan ve sağdan sürekli fonksiyonu

i. $\varphi(0) = 0$,

ii. $t > 0$ ise $\varphi(t) > 0$

iii. $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$;

özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Phi(s) = \Phi(c) + \int_c^s \varphi(t)dt \tag{3.4}$$

eşitliğiyle tanımlı, Φ fonksiyonuna bir N-fonksiyonu denir.

Bununla birlikte, Φ fonsiyonunun, bir N-fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart sürekli, çift ve

i. $\lim\limits_{s\to 0} \frac{\Phi(s)}{s} = 0$

ii. $\lim\limits_{s\to \infty} \frac{\Phi(s)}{s} = \infty$

iii. Eğer $s > 0$ ise $\Phi(s) > 0$ (Adams ve Fourier, 2003). özelliklerine sahip konveks bir fonksiyon olmasıdır.

Tanım 3.1.5. φ Orlicz türevi verilsin. Bu durumda, $\tilde{\varphi}$ fonksiyonu

$$\tilde{\varphi}(s) = \inf\{t : \varphi(t) \geq s\} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.1.6. $\tilde{\varphi}$ fonksiyonu bir Orlicz türevidir. Bundan dolayı Sonuç 3.1.4 sonucu olarak $\tilde{\Phi}(s) = \int\limits_0^s \tilde{\varphi}(t)dt$ eşitliğiyle tanımlı $\tilde{\Phi}$ fonksiyonu bir Young fonksiyonudur (Edgar ve Sucheston, 1992).

Tanım 3.1.7. φ ve $\tilde{\varphi}$ fonksiyonları (3.5) daki gibi olsun. Bu durumda

$$\Phi = \int\limits_0^s \varphi(t)dt \qquad \tilde{\Phi} = \int\limits_0^t \tilde{\varphi}(\tau)d\tau$$

ise Φ ve $\tilde{\Phi}$ Young fonksiyonları birbirlerinin tümleyenidir.

Örnek 3.1.8. Aşağıdaki fonksiyon çiftleri tümleyen Young fonksiyonlardır.

i. $\Phi(s) = \frac{s^p}{p}, \quad \tilde{\Phi}(t) = \frac{t^{p'}}{p'}, \quad 1 < t < \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

ii. $\Phi(s) = s, \quad \tilde{\Phi}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ \infty, & t > 1. \end{cases}$

iii. $\Phi(s) = e^s - s - 1, \quad \tilde{\Phi}(t) = (1+t)\log(1+t) - t.$

iv. $\Phi(s) = e^s - s - 1, \quad \tilde{\Phi}(t) = \begin{cases} t, & t < 1, \\ e^{t-1}, & t \geq 1. \end{cases}$

Dikkat edilirse, yukarıdaki örnekte, (ii) ve (iv) seçeneklerinde verilen fonksiyonlar Young fonksiyonudur ama N-fonksiyonu değildir.

Önerme 3.1.9. Φ bir Young fonksiyonu verilsin. Bu durumda, $\forall\ 0 < \lambda < 1$ ve $0 \leq s < \infty$ için

$$\Phi(\lambda\, s) \leq \lambda\, \Phi(s) \tag{3.6}$$

ve her $\lambda \geq 1$ ve $0 \leq s < \infty$ için

$$\lambda\, \Phi(s) \leq \Phi(\lambda\, s)$$

olur (Kufner, vd., 1977).

İspat. $0 < \lambda < 1$ için konvekslik ve $\Phi(0) = 0$ eşitliğinden,

$$\Phi(\lambda\, s) = \Phi(\lambda\, s + (1-\lambda)0) \leq \lambda\, \Phi(s) + (1-\lambda)\Phi(0) = \lambda\, \Phi(s)$$

elde edilir. Şimdi $\lambda \geq 1$ olsun. (3.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\lambda\, \Phi(s) = \lambda\, \Phi(\lambda^{-1} \lambda\, s) \leq \lambda\, \lambda^{-1} \Phi(\lambda\, s) = \Phi(\lambda\, s)$$

bulunur.

Önerme 3.1.10. Φ, Δ_2 şartını sağlayan bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $0 < t_1 < t_2$ için

$$\frac{\Phi(t_2)}{t_2^p} \leq \frac{b\Phi(t_1)}{t_1^p}$$

eşitsizliğini sağlayan $p > 1$ ve $b > 1$ sayıları vardır.

Önerme 3.1.11. Φ, φ Orlicz türevine sahip bir Young fonksiyonu verilsin. Bu durumda $s > 0$ için

i. $\frac{\Phi(s)}{s} \leq \varphi(t) \leq \frac{\Phi(2s)}{s}$

ii. $\Phi(\frac{s}{2}) \leq \int\limits_0^s \frac{\Phi(t)}{t} dt \leq \Phi(s)$

eşitsizlikleri sağlanır (Sawano, 2016).

İspat. (3.3) eşitliği ve φ fonksiyonunun artanlığından

$$\frac{\Phi(s)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^s \varphi(t)dt \leq \frac{1}{s}\int_0^s \varphi(t)dt = \varphi(s)$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{s}\int_s^{2s} \varphi(t)dt \leq \frac{1}{s}\int_s^{2s} \varphi(t)dt \leq \frac{1}{s}\int_0^{2s} \varphi(t)dt = \frac{\Phi(s)}{s}$$

olur. Böylece (i) gösterilirmiş olur. (ii) yi ispat etmek için, $s \in [0, \infty)$ için $\dfrac{\Phi(s)}{s}$ fonksiyonunun artan olmasından,

$$\Phi\left(\frac{s}{2}\right) = \int_{\frac{s}{2}}^{s} \frac{\Phi(\frac{s}{2})}{\frac{s}{2}}dt \leq \int_{\frac{s}{2}}^{s} \frac{\Phi(t)}{t}dt \leq \int_0^s \frac{\Phi(t)}{t}dt$$

$$\leq \int_0^s \frac{\Phi(t)}{t}dt = \Phi(s).$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.12. $t \geq 0$ için eğer $\widetilde{\Phi}(t) = \sup\{st - \Phi(s) : s \in [0,\ \infty)\}$ ve $\widetilde{\varphi}(t) < \infty$ ise bu durumda sup = max olur (Zaanen, 1983).

İspat. $t > 0$ olsun. Bu durumda her s için $\Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t) \geq st$ olur. Buradan ($\Phi(s), \widetilde{\Phi}(t)$ nin biri sonsuz olsa bile)

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq \sup\{st - \Phi(s) : s \geq 0\}$$

olur. Eğer $\widetilde{\varphi}(t) < \infty$ ise $s = \widetilde{\varphi}(t)$ için $\Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t) = st$ olur. Bundan dolayı, $\Phi(s)$ ve $\widetilde{\Phi}(t)$ bu iki ifade sonludur ve

$$\widetilde{\Phi}(t) = \max\{st - \Phi(s) : s \geq 0\}$$

dir. Diğer taraftan, eğer $\widetilde{\varphi}(t) = \infty$ ise Φ fonksiyonu sınırlıdır. Böylece,

$$\sup\{st - \Phi(s) : s \geq 0\} = \infty$$

olur.

Önerme 3.1.13. Φ Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$, Φ nin tümleyeni verilsin. Bu durumda her $s > 0$ için

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(s)}{s}\right) \leq \Phi(s)$$

dir (Sawano, 2016).

İspat. $\frac{\Phi(s)}{s}$ fonksiyonu artan olduğu ve $t < s$ için

$$\frac{\Phi(s)}{s}t - \Phi(t) \leq \Phi(s)$$

dir. $t \geq s$ için

$$\frac{\Phi(s)}{s}t - \Phi(t) \leq 0$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve Sonuç 3.1.12 den istenilen sonuç elde edilir.

Bu tezde, Φ^{-1} fonksiyonu Φ Young fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi olarak alınacaktır. Kısaca,

$$\Phi^{-1}(t) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(\eta) > t\}, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

dir. Φ Young fonksiyonunun, Orlicz türevi olan φ fonksiyonu sonlu ve her $0 < t < \infty$ için $0 < \varphi(t) < \infty$ dir (Megan vd., 2001). Bunula birlikte, genelleştirilmiş ters fonksiyonun tanımından $\forall\ 0 \leq s < \infty$ için

$$\Phi(\Phi^{-1}(s)) \leq s \leq \Phi^{-1}(\Phi(s))$$

dir.

Önerme 3.1.14. Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$, Φ nin tümleyeni verilsin. Bu durumda $\forall$ $s > 0$ için

$$s \leq \Phi^{-1}(s)(\widetilde{\Phi})^{-1}(s) \leq 2s \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır (Rao ve Ren, 2002).

İspat. Young eşitsizliğinden ve her $s \geq 0$ için

$$\Phi^{-1}(s)(\widetilde{\Phi})^{-1}(s) \leq \Phi(\Phi^{-1}(s)) + \widetilde{\Phi}((\widetilde{\Phi})^{-1}(s)) \leq 2s$$

dir. Ayrıca, Önerme 3.1.13 den ve $\forall$ $s > 0$ için

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(s)}{s}\right) \leq \Phi(s)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, son ifadede $\Phi(s)$ ve s yer değiştirdiğinde

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{t}{\Phi^{-1}(t)}\right) \leq t$$

eşitsizliği bulunur. Buradan, her $s \geq 0$ için

$$s \leq \Phi^{-1}(s)(\widetilde{\Phi})^{-1}(s) \leq 2s$$

bulunur. Böylece, Önerme 3.1.14 un ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.15. Φ bir Young fonksiyonu verilsin.

i. Eğer $\forall\ s \geq 0$ için
$$\Phi(2s) \leq C\,\Phi(s)$$
eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabit sayısı varsa, Φ, Δ_2 şartını sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2$ şeklinde gösterilir.

ii. $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ ise Φ fonksiyonuna, ∇_2 şartını sağlar denir ve $\Phi \in \nabla_2$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.1.16. Φ bir Young fonksiyonu verilsin. $\Phi \in \nabla_2$ olması için gerek ve yeter şart $\Phi(\lambda s) \geq 2\lambda\,\Phi(s)$ eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda > 1$ sabit sayısının mevcut olmasıdır (Krasnoselskii ve Rutickii, 1961).

İspat.
$$\widetilde{\Phi(\lambda\cdot)} = \widetilde{\Phi}(\cdot/\lambda),\ \widetilde{2\lambda\Phi(\cdot)} = 2\lambda\widetilde{\Phi}(\cdot/2\lambda)$$

olduğunu göz önüne alalım. Buradan

$$\Phi(\lambda s) \geq 2\lambda\Phi(s) \Leftrightarrow \widetilde{\Phi(\lambda s)} \leq \widetilde{2\lambda\Phi(s)} \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}(s/\lambda) \leq 2\lambda\widetilde{\Phi}(s/2\lambda) \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}(2s) \leq 2\lambda\widetilde{\Phi}(s)$$

olur. O halde, Önerme 3.1.21 in ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 3.1.17.

i. $\Phi(s) = s$ fonksiyonu, Δ_2 şartını sağlar fakat ∇_2 şartını sağlamaz.

ii. $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\Phi(s) = s^p$ her iki şartı da sağlar.

iii. $\Phi(s) = e^s - s - 1$ fonksiyonu, ∇_2 şartını sağlar fakat Δ_2 şartını sağlamaz.

Önerme 3.1.18. Φ, φ Orlicz türeve sahip Young fonksiyonu verilsin.

i. $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Yani bir $A > 2$ sabit sayısı için $\Phi(2s) \leq A\,\Phi(s)$ dir ve $\beta = \log_2 A$ alalım. Eğer $p > \beta + 1$ ise her $s > 0$ için

$$\int_s^\infty \frac{\varphi(t)}{t^p} dt \lesssim \frac{\Phi(s)}{s^p}$$

dir.

ii. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^s \frac{\varphi(t)}{t} dt \lesssim \frac{\Phi(s)}{s}$$

dir.

Önerme 3.1.19. Φ bir N-fonksiyonu ve a_Φ ve b_Φ bu fonksiyonun Simonenko indisleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. $b_\Phi < \infty$ ise bu durumda Φ, Δ_2 şartını sağlar.

ii. $b_\Phi < \infty$ ise bu durumda $s \in (0, \infty)$ için $\Phi(s)/s^{b_\Phi}$ azalandır. Ayrıca, $\forall\ \lambda \in [0, 1]$ ve $s \in (0, \infty)$ için $\Phi(\lambda s) \geq \lambda^{b_\Phi} \Phi(s)$ eşitsizliği sağlanır.

iii. $s \in (0, \infty)$ için $\Phi(s)/s^{a_\Phi}$ artandır. Ayrıca, $\forall\ \lambda \in [1, \infty)$ ve $s \in (0, \infty)$ için $\Phi(\lambda s) \geq \lambda^{a_\Phi} \Phi(s)$ eşitsizliği sağlanır.

iv. Eğer $1 < p < a_\Phi \leq b_\Phi < q < \infty$ ise bu durumda $\lim\limits_{s \to 0} \frac{\Phi(s)}{s^p} = 0$ ve $\lim\limits_{s \to \infty} \frac{\Phi(s)}{s^q} = 0$ olur (Fu, vd., 2012).

Tanım 3.1.20. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ölçülebilirdir ve } \exists \alpha > 0, \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha |f(x)|) dx < \infty \right\}$$

fonksiyonlar kümesine Orlicz uzayı denir.

Önerme 3.1.21. $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında tanımlanan

$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda}) dx \leq 1 \right\}$$

ile verilen norm, normlu uzaydır ve bu norma Orlicz uzayının Luxemburg-Nakano normu olarak adlandırılır (Rao ve Ren, 2002).

İspat. $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ norm olduğunu gösterelim. Bu durumda,

i. $\|f\|_{L^\Phi} = 0 \Leftrightarrow f = 0,$

ii. $\|\alpha f\|_{L^\Phi} = |\alpha| \|f\|_{L^\Phi}, \alpha \in \mathbb{R},$

iii. $\|f + g\|_{L^\Phi} \leq \|f\|_{L^\Phi} + \|g\|_{L^\Phi}$

şartlarını sağlaması gerekir. İlk olarak (i) şartının sağlandığını gösterelim.

(i) h.h.y. $f = 0$ ise $\|f\|_{L^\Phi} = 0$ olduğu açıktır. Tersine $\|f\|_{L^\Phi} = 0$ olsun. Pozitif ölçülü bir küme üzerinde $|f| > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\Omega = \{w : |f(w)| \geq \delta\}$ ve $|\Omega| > 0$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Fakat $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ tanımından $\forall\lambda > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1$ dir. Bundan dolayı, $\forall n \geq 1$ için $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(n|f(x)|)dx \leq 1$ dir. Dolayısıyla, $|\Omega| > 0$ ve $\Phi(n\delta) \to \infty$, $n \to \infty$ olduğunda

$$\Phi(n\delta)|\Omega| = \int_\Omega \Phi(n\delta)dx \leq \int_\Omega \Phi(n|f(x)|)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(n|f(x)|)dx \leq 1$$

eşitsizliği sağlanmaz. Bu nedenle $|\Omega| = 0$ dır. Sonuç olarak h.h.y. $f = 0$ olur. Yani (i) şartı ğecerlidir.

(ii) nin ispatı $\alpha \neq 0$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{L^\Phi} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|\alpha||f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\frac{\lambda}{|\alpha|}})dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{|\alpha|\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\} = |\alpha|\|f\|_{L^\Phi}
\end{aligned}$$

olu. Buradan istenilen sonuç elde edilir. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|f + g\|_{L^\Phi} \leq \|f\|_{L^\Phi} + \|g\|_{L^\Phi} + 2\varepsilon \tag{3.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterildiğinde $\|f + g\|_{L^\Phi} \leq \|f\|_{L^\Phi} + \|g\|_{L^\Phi}$ olduğu da gösterilmiş olur. O halde $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ tanımından,

$$\|f\|_{L^\Phi} + \varepsilon \in \left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\}$$

olur, yani

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi} + \varepsilon}\right) dx \leq 1 \tag{3.9}$$

dir. Benzer şekilde g için yapılırsa,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\tfrac{|g(x)|}{\|g\|_{L^\Phi}+\varepsilon})dx \leq 1$$

elde edilir. Burada $\alpha = \|f\|_{L^\Phi} + \varepsilon$, $\beta = \|g\|_{L^\Phi} + \varepsilon$ ve $\theta = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ olsun. Φ konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{\alpha+\beta}\right) &= \Phi\left((1-\theta)\frac{|f(x)|}{\alpha} + \theta\frac{|g(x)|}{\beta}\right) \\ &\leq (1-\theta)\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right) + \theta\Phi\left(\frac{|g(x)|}{\beta}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son terimin $\mathbb{R}^n$ üzerinden integrali alındığında

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\tfrac{|(f+g)(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}+\|g\|_{L^\Phi}+2\varepsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\tfrac{|(f+g)(x)|}{\alpha+\beta}\right)dx \leq 1$$

bulunur. Bu ise (3.8) eşitsizliğine denktir.

Örnek 3.1.22.

i. $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $\Phi(s) = s^p$ ise bu durumda $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ dir.

ii. $\Phi(s) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq s \leq 1 \\ \infty & , \quad s > 1 \end{cases}$ ise bu durumda $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dir.

iii. $\Phi(s) = \begin{cases} 0 & , \quad s \leq 1 \\ s\log s & , \quad s > 1 \end{cases}$ ise bu durumda $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L\log L(\mathbb{R}^n)$ dir.

Önerme 3.1.23. $(L^\Phi(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^\Phi})$ uzayı Banach uzayıdır (Edgar ve Sucheston, 1992).

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ ve $\|f_n\|_{L^\Phi} \leq 1$ olacak şekilde $f_n \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ bir dizi olsun. Yani $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f_n(x)|)\,dx \leq 1$ dir. Eğer $f = \lim f_n$ ise bu durumda Φ fonksiyonu soldan sürekli olduğundan $\Phi(|f_n|) \to \Phi(|f|)$ olur. Böylece monoton yakınsaklık teoreminden $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)\,dx \leq 1$ elde edilir. Bu $\|f\|_{L^\Phi} \leq 1$ olmasını gerektirir.

Bu sonuç kullanılarak, $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayının tamlığı gösterilebilir. (f_n) nin $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\left\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right\|_{L^\Phi} \leq 2^{-k}$ özelliğini sağlayan bir f_{n_k} alt dizisi vardır.

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|$$

olarak alalım. Bu durumda Φ fonksiyonu soldan sürekli ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned}\Phi(g) &= \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\right|\right) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}2^{k}\left|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\right|\right)\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\Phi\left(2^{k}\left|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\right|\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\|g\|_{L^\Phi} \leq 1$ ve $g \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olur. $u \to \infty$ iken $\Phi(u) \to \infty$ yazılır. Dolayısıyla seri h.h.y. sonlu bir limite yakınsar.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k}-f_{n_{k-1}}) + f_{n_0}$$

serisi de h.h.y. yakınsak ve $|f - f_{n_0}| \leq g$ dir. Böylece, $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ dir. (f_n) bir Cauchy dizisi olduğundan her $n \geq m$ için $\|f_n - f_m\|_{L^\Phi} \leq \varepsilon$ özeliğini sağlayan her $\varepsilon > 0$ için bir m vardır. O halde $n_k \geq m$ için $\|f_m - f_{n_k}\|_{L^\Phi} \leq \varepsilon$ elde edilir. Böylece $m \to \infty$ iken $\|f_m - f\|_{L^\Phi} \to 0$ sonucu bulunur.

Tanım 3.1.24. Φ ve Ψ, fonksiyonları verilsin. Eğer $\forall\ s \geq 0$ için $\Phi(s) \leq \Psi(C\,s)$ eşitsizliğini sağlayan bir C sabit sayısı varsa bu durumda Ψ, Φ yi genel olarak domine ediyor denir. Yeterince büyük s sayıları için $\Phi(s) \leq \Psi(C\,s)$ eşitsizliğini sağlayan bir C sabit sayısı varsa bu durumda Ψ, Φ Young fonksiyonunu sonsuzda domine ediyor denir. Φ ve Ψ birbirlerini genel olarak (sonsuzda) domine ediyor ise bu durumda Φ ve Ψ genel olarak (sonsuzda) denktir denir.

Önerme 3.1.25. $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}}\right)dx \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. Bununla birlikte, $\|f\|_{L^\Phi} \leq 1$ olması için gerek ve yeter şart $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx \leq 1$ olmasıdır (Edgar ve Sucheston, 1992).

Teorem 3.1.26. Φ ve Ψ Young fonksiyonları verilsin. Ψ, Φ fonksiyonunu genel olarak domine ediyor ise bu durumda

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) \supset L^\Psi(\mathbb{R}^n), \qquad \|f\|_{L^\Phi} \leq C\|f\|_{L^\Psi}$$

olur (Kufner, vd., 1977).

İspat. Önerme 3.1.25 den $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}}\right)dx \leq 1$ ve norm tanımından $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda > 0$ sayısı varsa bu durumda $\|f\|_{L^\Phi} \leq \lambda$ elde edilir. Bu özellikler kullanıldığında

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_{L^\Psi}}\right) \leq \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Psi}}\right) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_{L^\Psi}}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Psi}}\right) dx \leq 1$$
$$\Rightarrow \|f\|_{L^\Phi} \leq C\|f\|_{L^\Psi}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.27. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$WL^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \text{ ölçülebilir} : \sup_{\xi>0} \Phi(\xi)|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \xi\}| < \infty \right\}$$

kümesine zayıf Orlicz uzayı denir.

Önerme 3.1.28. $WL^\Phi(\mathbb{R}^n)$ üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{WL^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{\xi>0} \Phi(\xi)|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\xi\}| \leq 1 \right\}$$

norm, bir quasi-normdur (Rao ve Ren, 2002).

İspat. İspat etmek için aşağıdaki norm şartlarını sağlatalım.

i. $\|f\|_{WL^\Phi} = 0$ olması için gerek ve yeter şart h.h.y. $f = 0$ dır.

ii. $\|\alpha f\|_{WL^\Phi} = |\alpha|\|f\|_{WL^\Phi}, \alpha \in \mathbb{R}\,(\text{veya}\,\mathbb{C})$

sağlandığı görülür. $\|f+g\|_{WL^\Phi} \leq 2\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)$ olduğunu göstermek için $\forall\ t > 0$ için

$$\left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)+g(x)|}{C\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t \right\}\right| \Phi(t) \leq 1$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)+g(x)|}{c\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t \right\}\right| \Phi(t) \\
&\leq \left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|+|g(x)|}{c\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t \right\}\right| \Phi(t) \\
&= \left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{c\|f\|_{WL^\Phi}} \frac{\|f\|_{WL^\Phi}}{\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} + \frac{|g(x)|}{c\|g\|_{WL^\Phi}} \frac{\|g\|_{WL^\Phi}}{\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t \right\}\right| \Phi(t) \\
&= \left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{c\|f\|_{WL^\Phi}}\theta_1 + \frac{|g(x)|}{c\|g\|_{WL^\Phi}}\theta_2 > t \right\}\right| \Phi(t) \\
&\leq \left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{c\|f\|_{WL^\Phi}} > t \right\}\right| \Phi(t) + \left|\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|g(x)|}{c\|g\|_{WL^\Phi}} > t \right\}\right| \Phi(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü $\theta_1 + \theta_2 = 1$ dir. Φ nin konveks olması ve $\forall\ 0 \leq s \leq 1$ için $\Phi(st) \leq s\,\Phi(t)$ eşitsizliğini gerçekler (Bkz. Önerme 3.1.14). Bu durumda $C \geq 1$ için son toplam

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{\|f\|_{WL^\Phi}} > ct\right\}\right| \frac{\Phi(ct)}{c} + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|g(x)|}{\|g\|_{WL^\Phi}} > ct\right\}\right| \frac{\Phi(ct)}{c} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c}$$

ile sınırlandırılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.1.29. Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$, Φ nin tümleyeni olarak verilsin. Eğer $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ ise $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^\Phi}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}$$

eşitsizliği sağlanır (Rao ve Ren, 2002).

İspat. $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}}$ ve $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}}$ olsun. Young eşitsizliğinden

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}} \leq \Phi(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}}) + \widetilde{\Phi}(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}})$$

elde edilir. $\mathbb{R}^n$ üzerinden bu eşitsizliğin integrali alınırsa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}})dx + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}})dx \leq 2$$

elde edelir. Böylece, Önerme 3.2.10 un ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 3.1.30. $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^\Phi} \leq \|f\|_\Phi^* := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx : \|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}} \leq 1\right\} \leq 2\|f\|_{L^\Phi}$$

dir. Bu orma, $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayının Orlicz normu olarak adlandırılır (Edgar ve Sucheston, 1992).

İspat. Önerme 3.1.29 den, eşitsizliğin sağ tarafı kolayca elde edilir. Dolayısıyla, eşitsizliğin sol tarafının sağlandığını ispatlayalım. $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve $a = \|f\|_\Phi^*$ alalım. Bu durumda $\|f\|_{L^\Phi} \leq a$ ve $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(|f(x)|/a\right) dx \leq 1$ eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösterelim. f fonksiyonunun integrallenebilir basit bir fonksiyon ve h.h.y. $\Phi\left(|f|/a\right)$ sonlu ve $g = \varphi(|f|/a)$

olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda, Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}^{n} \frac{|f(x)g(x)|}{a} dx &= \int_{\mathbb{R}}^{n} \left[\widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx + \Phi\left(\frac{|f(x)|}{a}\right)\right] dx \\ &=: M_{\widetilde{\Phi}}(g) + M_{\Phi}(\frac{f}{a})\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $M_{\widetilde{\Phi}}(g) \leq 1$ ise $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{\Phi}^{*} = a$ olur. Böylece,

$$M_{\Phi}(\frac{f}{a}) \leq M_{\widetilde{\Phi}}(g) + M_{\Phi}(\frac{f}{a}) = \int_{\mathbb{R}}^{n} \frac{|f(x)g(x)|}{a} dx \leq 1$$

bulunur. Bu nedenle, eğer $M_{\widetilde{\Phi}}(g) = b > 1$ ise $M_{\widetilde{\Phi}}(g/b) \leq M_{\widetilde{\Phi}}(g)/b$ elde edilir. Buradan, Orlicz normunun tanımından $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq b\, \|f\|_{\Phi}^{*} = ab$ elde edilir. Buradan

$$M_{\widetilde{\Phi}}(g) + M_{\Phi}(\frac{f}{a}) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \frac{ab}{a} = M_{\widetilde{\Phi}}(g)$$

olur. Yani $M_{\Phi}(f/a) = 0$ dır. Bundan dolayı, her iki durumda da $M_{\Phi}(f/a) \leq 1$ elde edilir ve $\|f\|_{L^{\Phi}} \leq a = \|f\|_{\Phi}^{*}$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, f integrallenebilir basit bir fonksiyonu verilsin. Fakat $\Phi(|f|/a)$ fonksiyonu h.h.y. sonlu olmasın. Bu Φ nun sonsuz olması demektir. $v > d$ için $\Phi(v) = \infty$ ve $v < d$ için $\Phi(v) < \infty$ eşitsizliğini sağlayan bir d sayısı vardır. Bu durumda $x \to \infty$ için $\widetilde{\varphi}(x) \to d$ dir. Buradan, her u için $\widetilde{\Phi}(u) \leq du$ elde edilir. h.h.y. $|f| \leq ad$ dir. Eğer $|\{|f| > ad\}| > 0$ ise bu durumda $0 < |A| < \infty$ özelliğini sağlayan bir $A \subseteq \{|f| > ad\}$ alt kümesi mevcuttur. $g = (1/d|A|)\chi_A$ için $M_{\widetilde{\Phi}}(g) = \widetilde{\Phi}(1/d|A|)|A| \leq 1$ olur. Sonuç olarak, $\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}} \leq 1$ elde edilir. O halde

$$a = \|f\|_{\Phi}^{*} \geq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx > \frac{ad}{d|A|}|A| = a$$

çelişki elde edilir. Böylece h.h.y. $|f| \leq ad$ dir. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise bu durumda $\alpha\,|f|/a \leq \alpha d < d$ dir. Yani $\Phi(\alpha\frac{|f|}{a})$ sonlu olur. $M_{\Phi}(\alpha\frac{f}{a}) \leq \alpha < 1$ eşitsizliği benzer şekilde gösterilebilir. Böylece Φ soldan sürekli olduğundan $\alpha \uparrow 1$ iken $M_{\Phi}(\frac{f}{a}) \leq 1$ olur.

Son olarak bir $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunu düşünelim. H.h.y. $f_n \uparrow |f|$ özelliğini sağlayan integrallenebilir basit fonksiyonların bir (f_n) dizisi vardır. Buradan $M_{\Phi}(f_n/\|f_n\|_{\Phi}^{*}) \leq 1$ ve $\|f_n\|_{\Phi}^{*} \leq \|f\|_{\Phi}^{*} = a$ olur. Böylece $M_{\Phi}(f_n/a) \leq 1$ bulunur. Φ soldan sürekli olduğundan $M_{\Phi}(f/a) \leq 1$ olur. Dolayısıyla $\|f\|_{L^{\Phi}} \leq a$ dir.

4. ORLICZ UZAYLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLER

4.1. Singüler İntegral Operatörlerin Sınırlılığı

Bu bölümde, klasik singüler integral operatörlerin Orlicz uzaylarında sınırlılık problemleri incelenirken kullanılan tanım ve teoremler takdim edilecektir.

Tanım 4.1.1. Φ ve Ψ, iki Young fonksiyonu verilsin. $\forall f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^{\Psi}} \leq k\|f\|_{L^{\Phi}}$$

eşitsizliğini sağlayan bir k sabit sayısı varsa bu durumda T quasi-lineer operatör (Φ, Ψ) kuvvetli tipli operatör olarak adlandırılır. Eğer, her $s > 0$ ve $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |Tf(y)| > s\}| \leq 1/\Psi\left(\frac{s}{k\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir k sabiti varsa bu durumda T quasi-lineer operatör (Φ, Ψ) zayıf tipli operatör olarak adlandırılır.

Önerme 4.1.2. Her (Φ, Ψ) kuvvetli tipli operatör aynı zamanda (Φ, Ψ) zayıf tipli operatördür (Rao ve Ren, 2002).

İspat. Önermenin ispatında Chebyshev eşitsizliği kullanılacaktır. Quasi-lineer operatör tanımından $\forall s > 0$ ve h.h.y. $|f| \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
|\{y \in \mathbb{R}^n : |Tf|(y) > t\}| &= \left|\left\{y \in \mathbb{R}^n : |T(\frac{f}{K\|f\|_{L^{\Phi}}})|(y) > \frac{s}{K||f||_{L^{\Phi}}}\right\}\right| \\
&= \left|\left\{y \in \mathbb{R}^n : \Psi\left(\frac{|Tf|(y)}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right) > \Psi\left(\frac{s}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right\}\right| \\
&\leq \left[\Psi\left(\frac{s}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right]^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{|Tf|(y)}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right) dy \\
&\leq \left[\Psi\left(\frac{s}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right]^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{|Tf|(y)}{||Tf||_{L^{\Psi}}}\right) dy \\
&\leq \left[\Psi\left(\frac{s}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu istenilen sonucu verir.

Şimdi çalışmamızda büyük öneme sahip interpolasyon teoremini verelim:

Teorem 4.1.3. $\alpha \in [0,1)$ ve $i \in \{1,2\}$ için $p_i, q_i \in (0,\infty)$, $1/q_i = 1/p_i - \alpha$, $p_1 < p_2$ ve T (p_i, q_i) zayıf tipli bir alt lineer operatör olsun. Eğer $1 < p_1 < a_\Phi \leq b_\Phi < p_2 < \infty$, $1 < q_1 < a_\Psi \leq b_\Psi < q_2 < \infty$ olmak üzere Φ ve Ψ, $\Psi^{-1}(s) = \Phi^{-1}(s)s^{-\alpha}$, $s \in (0,\infty)$ eşitliğini sağlayacak şekilde iki N-fonksiyonları ise bu durumda T, (Φ, Ψ) kuvvetli tipli bir operatördür (Fu vd., 2012).

İspat. İlk olarak $L^\Phi(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu nedenle her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu, $t \in (0,\infty)$ için

$$f(x) = f(x)\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>t\}}(x) + f(x)\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq t\}}(x) =: f^t(x) + f_t(x)$$

olarak yazılabilir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $f \not\equiv 0$ olduğunu kabul edelim. İddia edeyoruz ki $f^t \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $f_t \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ dir. Önerme 3.1.19 un (i) ve (iii) önermeleri gereğince $|f(x)| > t$ özelliğini sağlayan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{|f(x)|}{t}\right]^{a_\Phi} \leq \frac{\Phi(|f(x)|/t)}{\Phi(1)} \leq C(t)\frac{\Phi(|f(x)|)}{\Phi(1)} \tag{4.1}$$

eşitsizliğini sağlayan t ye bağlı bir $C(t) > 0$ sabit sayısı vardır. Böylece (4.1) eşitsizliği ve $p_1 < a_\Phi$ olduğu göz önüne alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f^t(x)|^{p_1}dx &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>t\}} |f(x)|^{p_1}dx \\ &\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>t\}} \frac{|f(x)|^{a_\Phi - p_1}}{t^{a_\Phi - p_1}}|f(x)|^{p_1}dx \\ &\leq C(t)\frac{t^{p_1}}{\Phi(1)}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği yani, $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Şimdi $f_t \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterelim. Önerme 3.1.19 un (i) ve (ii) önermeleri gereğince $|f(x)| \leq t$ özelliğini sağlayan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{|f(x)|}{t}\right]^{b_\Phi} \leq \frac{\Phi(|f(x)|/t)}{\Phi(1)} \leq C(t)\frac{\Phi(|f(x)|)}{\Phi(1)} \tag{4.2}$$

eşitsizliğini sağlayan t ya bir $C(t) > 0$ sabit sayısı vardır. Benzer şekilde (4.2) eşitsizliği ve $b_\Phi < p_2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_t(x)|^{p_2} dx &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\le t\}} |f(x)|^{p_2} dx \\ &\le t^{p_2-b_\Phi} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\le t\}} |f(x)|^{b_\Phi} dx \\ &\le C(t)\frac{t^{p_2}}{\Phi(1)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği yani $f_t \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Bu ise iddiayı ispatlar. Yani, $L^\Phi(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Son olarak $T : L^\Phi(\mathbb{R}^n) \to L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ operatörünün sınırlılığını gösterelim. u fonksiyonu, $\forall s \in [0,\infty)$ için $u^{-1}(s) = \Psi^{-1}(\Phi(s))$ ifadesiyle verilen $[0,\infty)$ aralığında tanımlı olsun. Bu durumda u^{-1} fonksiyonu, $u^{-1} \to 0$, $s \to 0$ ve $u^{-1}(s) \to \infty$ ve $s \to \infty$ özelliklerini sağlayan ve $[0,\infty)$ aralığında tanımlanan azalmayan bir fonksiyondur. $\sigma(f,t) := |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}|$ olsun. Böylece (Lieb ve Loss, 2001, Teorem 1.13) gereğince

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(|Tf(x)|)dx &= \int_0^\infty \sigma(Tf,t)d\Psi(t) \\ &\le \int_0^\infty \sigma(Tf^{u(t)},t/2)d\Psi(t) + \int_0^\infty \sigma(Tf_{u(t)},t/2)d\Psi(t) \\ &=: I + II\end{aligned}$$

yazılabilir. T, (p_1,q_1) zayıf tipli operatör olduğundan

$$\sigma(Tf^{u(t)},t/2) \lesssim \left(\frac{2}{t}\right)^{q_1} \left\|f^{u(t)}\right\|^{q_1}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, $p_1 < q_1$ şartı ve Minkowski integral eşitsizliğinden (Stein, 1970)

$$\begin{aligned}I^{p_1/q_1} &\lesssim \left\{\int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} t^{-p_1}|f(x)|^{p_1}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>u(t)\}}(x)dx\right]^{q_1/p_1} d\Psi(t)\right\}^{p_1/q_1} \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^\infty t^{-q_1}|f(x)|^{q_1}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>u(t)\}}(x)d\Psi(x)\right]^{p_1/q_1} dx \qquad (4.3) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1}\left[\int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} t^{-q_1}d\Psi(t)\right]^{p_1/q_1} dx\end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon, $t \to 0$ iken $u^{-1}(t) \to 0$ olduğundan, $\Psi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t)t^{-t}$

eşitliği ve Önerme 3.1.19'deki (iii) ve (iv) şartları gereğince

$$\begin{aligned}
\int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \frac{1}{t^{q_1}} d\Psi(t) &= \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} + q_1 \int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \frac{\Psi(t)}{t^{q_1+1}} dt \\
&\leq \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} + q_1 \int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \\
&\leq \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{t^{q_1+1}} \left[\frac{t}{u^{-1}(|f(x)|)}\right]^{a_\Psi} dt \qquad (4.4) \\
&= \frac{a_\Psi}{a_\Psi - q_1} \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} \lesssim \frac{\Phi(|f(x)|)}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} \\
&\lesssim \frac{\Phi(|f(x)|)}{|f(x)|^{q_1}} [\Phi(|f(x)|)]^{q_1 t} \sim \frac{[\Phi(|f(x)|)]^{q_1/p_1}}{|f(x)|^{q_1}}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden

$$I \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx\right]^{q_1/p_1}$$

olur. Benzer şekilde,

$$II \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx\right]^{q_2/p_2}$$

olarak bulunur. Elde edilen I ve II eşitsizlikleri yerine yazıldığında

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(|Tf(x)|) dx \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx\right]^{q_1/p_1} + \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx\right]^{q_2/p_2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $T : L^\Phi(\mathbb{R}^n) \to L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ operatörü sınırlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3 de $\alpha = 0$ olarak alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4. $p \in (1, \infty)$ ve T operatörü (p, p) zayıf tipli bir alt lineer operatör olsun. Φ, $1 < a_\Phi \leq b_\Phi < \infty$ özelliğine sahip bir N-fonksiyon ise bu durumda T, (Φ, Φ) kuvvetli tipli bir operatördür (Fu vd., 2012).

Tanım 4.1.5. $p \in (1, \infty]$ ve Ψ bir Young fonksiyonu olsun.

$$B_p(s) = \int_0^s \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt$$

olmak üzere Ψ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Psi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(B_p^{-1}(r^{p'}))^{p'}dr \tag{4.5}$$

şeklinde verilen bir Young fonksiyonudur.

Tanım 4.1.6. $p \in (1, \infty]$ ve Φ bir Young fonksiyonu olsun.

$$A_p(s) = \int_0^s \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt \tag{4.6}$$

olmak üzere Φ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Phi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(A_p^{-1}(r^{p'}))^{p'}dr \tag{4.7}$$

şeklinde verilen bir Young fonksiyonudur.

Lemma 4.1.7. $1 < p \leq \infty$ olmak üzere Φ ve Ψ iki Young fonksiyonu, Φ_p, Ψ_p sırasıyla (4.7) ve (4.5) eşitliği ile verilen iki Young fonksiyonu olsun. $V \in (0, \infty]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler geçerlidir.

i. $\forall \phi \in L^{\Phi}(0, V)$ için

$$\left\| s^{-1/p'} \int_0^s \phi(r)dr \right\|_{L^{\Psi}(0,V)} \leq K \|\phi(s)\|_{L^{\Phi}(0,V)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sabit sayısının olması için gerek ve yeter şart ya $V < \infty$ ve Φ fonksiyonunun Ψ_p fonksiyonu sonsuzda domine etmesi ya da $V = \infty$, $\int_0 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$ ve Φ nin Ψ_p yi genel olarak domine etmesidir. $\Phi = \Psi_p$ durumunda K sabit sayısı Ψ ve V ye bağlıdır. Bununla birlikte $\int_0 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$ ise K mutlak sabittir.

ii. $\forall \phi \in L^{\Phi}(0, V)$ için

$$\left\| \int_s^V \phi(r)r^{-1/p'}dr \right\|_{L^{\Psi}(0,V)} \leq K \|\phi(s)\|_{L^{\Phi}(0,V)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sabit sayısının olması için gerek ve yeter şart ya $V < \infty$ ve Φ_p nin Ψ yi sonsuzda domine etmesi ya da $V = \infty$, $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$ ve Φ_p nin Ψ yi genel olarak domine etmesidir. $\Phi = \Psi_p$ durumunda K sabit sayısı Φ ve V ye bağlıdır. Bununla birlikte $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$ ise K mutlak sabittir (Cianchi, 1999).

Lemma 4.1.8. $1 < p \leq \infty$ ve p nin Hölder eşleniği $p' = \frac{p}{(p-1)}$ olsun. T operatörü, tanım kümesi ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin lineer bir alt uzayı, görüntü kümesi ise ölçülebilir fonksiyonlar kümesi tarafından kapsanan quasi-lineer bir operatör olsun. Tnin $(1, p')$ zayıf tipli ve (p, ∞) tipli bir operatör ve Ψ nin

$$\int_0^1 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} < \infty \tag{4.8}$$

özelliğini sağlayan bir Young fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Ψ_p eşleniği (4.5) eşitliği ile verilen bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda her $f \in L^{\Psi_p}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^\Psi} \leq K\|f\|_{L^{\Psi_p}} \tag{4.9}$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sabit sayısı vardır. K sabit sayısı T operatörünün (p, ∞) normuna, $(1, p')$ zayıf normuna ve quasi-lineerlik tanımındaki c sabitine bağlıdır (Cianchi, 1999).

4.2. Orlicz Uzaylarda Maksimal Operatörlerin Sınırlılığı

Lemma 4.2.1.

$$\lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq C \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|dx$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır (Garcia-Cuerva, 1991).

İspat. $g = |f|\chi_{\{|f| \leq \lambda/2\}}$ ve $h = |f|\chi_{\{|f| > \lambda/2\}}$ olsun. Bu durumda $|f| = g + h$ olur. Böylece $Mf \leq Mg + Mh \leq \lambda/2 + Mh$ ve $\{Mf > \lambda\} \subset \{Mg > \lambda/2\} \cup \{Mh > \lambda/2\}$ elde edilir. Dolayısıyla, maksimal operatörün $(1, 1)$ zayıf sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| &\leq \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \lambda/2\}| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|dx = C \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.2. Φ bir Young fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\Phi(Mf(x)) \leq M\Phi(|f|)(x)$$

dir (Maligranda, 1989).

İspat. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $Mf(x) < \infty$ olsun. Bu durumda her bir $0 < \epsilon < 1$ için $B_0 \ni x$ olacak şekilde bir $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı vardır ve

$$Mf(x) < \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |f(y)|dy + \epsilon.$$

dir. Φ fonksiyonunun integral gösteriminden,

$$\Phi(u+\varepsilon) = \int_0^{u+\varepsilon} \varphi(s)ds = \int_0^u \varphi(s)ds + \int_u^{u+\varepsilon} \varphi(s)ds \leq \Phi(u) + \varphi(u+\varepsilon)\varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak, Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\Phi(Mf(x)) &\leq \Phi\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}|f(y)|dy + \varepsilon\right) \\
&\leq \Phi\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}|f(y)|dy\right) + \varphi\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}|f(y)|dy + \varepsilon\right)\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}\Phi(|f(y)|)dy + \varphi(Mf(x)+1)\varepsilon \\
&\leq M\Phi(|f|)(x) + \varphi(Mf(x)+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\Phi(Mf(x)) \leq M\Phi(|f|)(x)$ olur.

Teorem 4.2.3.

i. $\forall\Phi$ Young fonksiyonu için M maksimal operatör, (Φ, Φ) zayıf tiplidir.

ii. M maksimal operatörün (Φ, Φ) kuvvetli tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır (Maligranda, 1989; Kokilashvili ve Krbec, 1991; Sawano, 2018).

İspat. (i) $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ olacak şekilde $f \in L^\Phi$ alalım. Jensen eşitsizliği ile tüm B yuvarları için

$$\Phi\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy\right) \leq \frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy \tag{4.10}$$

olduğunu biliyoruz, bu eşitsizlik ve maksimal operatörün tanımından

$$\Phi(Mf(x)) \leq M[(\Phi \circ f)(x)] \tag{4.11}$$

olur. Lemma 4.2.2 ve maksimal operatörün (1,1) zayıf sınırlılığından

$$\begin{aligned}
|\{x : Mf(x) > s\}| &= |\{x : \Phi(Mf(x)) > \Phi(s)\}| \leq |\{x : M(\Phi \circ |f|)(x) > \Phi(s)\}| \\
&\leq \frac{C}{\Phi(s)}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx \leq \frac{C}{\Phi(s)} \leq \frac{1}{\Phi(\frac{s}{C\|f\|_{L^\Phi}})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ve eğer $C \geq 1$ ise bu durumda $\frac{1}{C}\Phi(s) \geq \Phi\left(\frac{s}{C}\right)$ olur.

$\|\cdot\|_{L^\Phi}$ normunun homojenlik özelliğinden dolayı

$$|\{x : Mf(x) > s\}| \leq \frac{1}{\Phi(\frac{s}{C\|f\|_{L^\Phi}})}$$

eşitsizliği her $f \in L^\Phi$ için doğrudur.

(ii) Yeterlilik: $\Lambda > 0$ ve $f \in L^\Phi \backslash \{0\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\frac{Mf(x)}{\Lambda}} \varphi(s) ds dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (\chi_{\{s\in[0,\infty): \frac{Mf(x)}{\Lambda} > s\}} \cdot \varphi)(s) ds dx \\
&= \int_0^\infty \varphi(s) |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \Lambda s\}| ds \\
&= \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&= \frac{2}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\lambda\}| d\lambda
\end{aligned}$$

olur. Maksimal operatörün $(1,1)$ zayıf sınırlılığından

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\lambda\}| &\lesssim |\{x \in \mathbb{R}^n : M[\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n : |f(y)|>\lambda\}} \cdot f](x) > \lambda\}| \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|f(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik Lemma 4.2.1 ve integrasyon sırasının değiştirilmesinden

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right) dx &\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{|f(x)|} \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda}\right) dx \\
&\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(x)|} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}\right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 3.1.18 (ii) den

$$\left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(x)|} \varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right) \lesssim |f(x)|^{-1}\Lambda\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right)$$

elde edilir. $k \geq 1$ ve $s > 0$ için $k\Phi(s) \leq \Phi(ks)$ olduğunu göz önüne alınırsa buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right) dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\Lambda}\right) dx$$

bulunur. $\Lambda = c_0\|f\|_{L^\Phi}$ seçersek

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right) dx \leq 1$$

elde edilir. Bu normun tanımından

$$\|Mf\|_{L^\Phi} \leq \Lambda = c_0\|f\|_{L^\Phi}$$

olması demektir.

Gereklilik: Şimdi kabul edelim ki M, (Φ, Φ) kuvvetli tiplidir. Yani her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^\Phi} \leq C\|f\|_{L^\Phi}$$

olacak biçimde bir C sabiti vardır. Özel olarak $0 < |A| < \infty$ olacak şekildeki her $A \subset \mathbb{R}^n$ için,

$$\|M\chi_A\|_{L^\Phi} \leq C_1 \|\chi_A\|_{L^\Phi} \tag{4.12}$$

olur. (4.12) ifadesinde $r = (a_1uv)^{-1/n}$ olmak üzere $A = B_r$ alalım. Burada $B_r = B(0, r)$, $a_r = |B_r|$, $u > 0$ ve $v > 1$ dir. Bu durumda (5.1) den

$$\|\chi_{B_r}\|_{L^\Phi} = \frac{1}{\Phi^{-1}(1/|B_r|)} = \frac{1}{\Phi^{-1}(1/(r^n|B_1|))} = \frac{1}{\Phi^{-1}(uv)} \leq \frac{1}{uv}\widetilde{\Phi}^{-1}(uv)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan eğer $x \neq B_r$ ise $B_r \subset B(x, 2|x|)$ olur. Çünkü $y \in B_r$ için $|x - y| \leq |x| + |y| \leq |x| + r \leq 2|x|$ dir. Dolayısıyla

$$M\chi_{B_r}(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|}\int_{B(x,2|x|)} \chi_{B_r}(y)dy = \frac{|B(x, 2|x|) \cap B_r|}{|B(x, 2|x|)|} = \left(\frac{r}{2|x|}\right)^n$$

olur. $s = (a_1 u)^{-1/n}$ olmak üzere $g = \widetilde{\Phi}^{-1}(u)\chi_{B_s}$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \le u|B_s| = us^n|B_1| = 1$$

elde edilir. Luxemburg-Nakano normu ile Orlicz normunun denkliğinden (Bkz. Teorem 3.1.30 (ii))

$$\|f\|^0_{L^\Phi} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^*(|g(x)|)dx \le 1\right\}$$

ve $\|f\|_{L^\Phi} \le \|f\|^0_{L^\Phi} \le 2\,\|f\|_{L^\Phi}$ eşitsizliğinden de

$$\begin{aligned}\|M\chi_{B_r}\|^*_\Phi &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |M\chi_{B_r}(x)g(x)|dx : \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \le 1\right\}\\ &\ge \widetilde{\Phi}^{-1}(u)\int_{B_s} M\chi_{B_r}(x)dx \ge \widetilde{\Phi}^{-1}(u)\int_{B_s\setminus B_r}\left(\frac{r}{2|x|}\right)^n dx\\ &= \frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n a_1 uv}\int_{r<|x|<s}\frac{1}{|x|^n}dx = \frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n a_1 uv} na_1 \ln\frac{s}{r} = \frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n uv}\ln v.\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $u > 0$ ve $v > 1$ için (4.12)

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n uv}\ln v \le 2C\frac{1}{uv}\widetilde{\Phi}^{-1}(uv)$$

olur. Böylece, $v = \exp(C \cdot 2^{n+2})$ alınarak $u > 0$ için $2\widetilde{\Phi}^{-1}(u) \le \widetilde{\Phi}^{-1}(u\exp(C \cdot 2^{n+2}))$ elde edilir veya her $t > 0$ için $\widetilde{\Phi}(2t) \le \exp(C \cdot 2^{n+2})\widetilde{\Phi}(t)$ olur. Bu ise $\Phi \in \nabla_2$ olması demektir.

Teorem 4.2.4.

i. $\forall\,\Phi$ Young fonksiyonu için M maksimal operatör, (Φ,Φ) zayıf tiplidir.

ii. Φ, $\Phi \in \nabla_2$ şartını sağlayan Young fonksiyonu olsun. Bu durumda M maksimal operatör, (Φ,Φ) kuvvetli tiplidir (Cianchi, 1996).

Sonuç 4.2.5. $1 \le p < \infty$ için $\Phi(t) = t^p$ Young fonksiyonu ∇_2 şartını sağlar. Dolayısıyla, $1 \le p < \infty$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatör, (p,p) zayıf tipli ve $1 < p < \infty$ için (p,p) kuvvetli tiplidir.

4.3. Orlicz Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatörlerin Sınırlılığı

Teorem 4.3.1. $n \ge 1$ ve $0 \le \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ iki Young fonksiyonu olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörün (Φ,Ψ) zayıf tipli olması için gerek ve yeter şart Φ fonksiyonunun tersinin

$$\mathcal{Q}^{-1}(u) = u^{\alpha/n}\Psi^{-1}(u) \tag{4.13}$$

ile verilen $\mathcal{Q}$ fonksiyonunu domine etmesidir (Cianchi, 1996).

İspat. $\Leftarrow$ Φ nin $\mathcal{Q}$ fonksiyonunu genel olarak domine ettiğini kabul edelim. Tanım göz önüne alındığında $\mathcal{Q}(u) \leq \Phi(bu),\ u \geq 0$ eşitsizliklerini sağlayan bir $b > 0$ vardır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{-1}(u) &= \inf\{r \geq 0 : \mathcal{Q}(r) > u\} \geq \inf\{r \geq 0 : \Phi(br) > u\} \\ &= \frac{1}{b}\inf\{br \geq 0 : \Phi(br) > u\} = \frac{1}{b}\Phi^{-1}(u) \end{aligned}$$

olması ve (4.13) kullanılarak

$$\Phi^{-1}(u) \leq b\mathcal{Q}^{-1}(u) = bu^{\alpha/n}\Psi^{-1}(u), \quad u \geq 0 \tag{4.14}$$

yazılabilir. Eğer $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ biçiminde $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ alırsak $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx \leq 1$ elde edilir. Jensen eşitsizliği kullanılarak tüm (aşikar olmayan) B yuvarları için

$$\Phi\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(\xi)|d\xi\right) \leq \frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(\xi)|)d\xi \tag{4.15}$$

bulunur. (4.14) ifadesinde $u = \frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(\xi)|)d\xi$ yazılarak ve (4.15) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|}\int_B |f(\xi)|d\xi &\leq b\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(\xi)|)d\xi\right]^{\alpha/n} \Psi^{-1}\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(\xi)|)d\xi\right] \\ &\leq b\left[\frac{1}{|B|}\right]^{\alpha/n} \Psi^{-1}\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(\xi)|)d\xi\right] \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_B |f(\xi)|d\xi \leq b\Psi^{-1}\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(\xi)|)d\xi\right] \tag{4.16}$$

elde edilir. M_α ile M operatörünün tanımı ve (4.16) eşitsizliğinden

$$(M_\alpha f)(x) \leq b\Psi^{-1}[(M\Phi(f))(x)],\ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.17}$$

elde edilir. Buradan (4.17) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} |\{x : (M_\alpha f)(x) > t\}| &\leq \left|\left\{x\ : \Psi^{-1}[(M\Phi(f))(x)] > \frac{t}{b}\right\}\right| \\ &= \left|\left\{x\ : [(M(\Phi(f)))(x)] > \Psi\left(\frac{t}{b}\right)\right\}\right| \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $(1,1)$ zayıf tipli olduğundan

$$|\{x : (Mg)(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\xi)| d\xi, \qquad \lambda > 0 \tag{4.19}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabit sayısı vardır. Bu durumda (4.19) eşitsizliğinde $g = \Phi(f)$ ve $\lambda = \Psi\left(\frac{t}{b}\right)$ alındığında (4.18) den

$$|\{x : (M_\alpha f)(x) > t\}| \leq \frac{C}{\Psi\left(\frac{t}{b}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(f)(\xi)| d\xi \leq \frac{C}{\Psi\left(\frac{t}{b}\right)} \leq \frac{1}{\Psi\left(\frac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)} \tag{4.20}$$

elde edilir. Çünkü $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ve $C \geq 1$, $K = Cb$ ise $\frac{1}{C}\Psi\left(\frac{t}{b}\right) \geq \Psi\left(\frac{t}{Cb}\right) = \Psi\left(\frac{t}{K}\right)$ dir. Böylece, (4.20) den M_α kesirli maksimal operatörünün (Φ, Ψ) zayıf tipli olduğu görülür.

Kabul edelim ki M_α, (Φ, Ψ) zayıf tiplidir. Yani (4.20) eşitsizliği bir $K > 0$ sabit sayısı için sağlanır. Keyfi ve sabit bir $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ yuvarında $f = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)\chi_{B_0}$ bir basamak fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ olur. $x \in B_0$ için

$$(M_\alpha f)(x) \geq \frac{1}{|B_0|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B_0} |f(y)| dy = |B_0|^{\frac{\alpha}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)$$

olduğu bilinmektedir. Fakat tanımdan $t_0 = |B_0|^{\frac{\alpha}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)$ ise $B_0 \subset \{x : (M_\alpha f)(x) > t_0\}$ elde edilir. Böylece $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ile (4.20) eşitsizliği ve (Φ, Ψ) zayıf tipli olmasından

$$|B_0| \leq |\{x : (M_\alpha f)(x) > t_0\}| \leq \frac{1}{\Psi\left(\frac{t_0}{K}\right)}$$

bulunur. $u = |B_0|^{-1}$ alırsak, bu durumda

$$\Psi\left(\frac{u^{-\frac{\alpha}{n}} \Phi^{-1}(u)}{K}\right) \leq u, \qquad u > 0$$

olur. Dolayısıyla $\Phi^{-1}(u) \leq K u^{\frac{\alpha}{n}} \Psi^{-1}(u) = K \mathcal{Q}^{-1}(u)$ eşitsizliğinin sağlandığı ispat edilmiş olur.

Teorem 4.3.2. *$n \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ iki Young fonksiyonu için M_α kesirli maksimal operatörün (Φ, Ψ) kuvvetli tipli olması için gerek ve yeter şart $\int_0^1 \Psi(t) t^{-1-n/(n-\alpha-)} dt < \infty$ olması ve Φ nin $\Psi_{n/\alpha}$ yı genel olarak domine etmesidir. Burada, $\Psi_{n/\alpha}$ (4.5) şeklinde tanımlı bir Young fonksiyonudur (Cianchi, 1996).*

İspat. M_α kesirli maksimal operatörün $(\frac{n}{\alpha}, \infty)$ tipli ve $(1, \frac{n}{(n-\alpha)})$ zayıf tipli olduğu bilinmektedir. $\int_0 \Psi(t) t^{-1-n/(n-\alpha)} dt < \infty$ ise bu durumda Lemma 4.1.8, M_α operatörünün

$(\Psi_{n/\alpha}, \Psi)$ tipli olduğunu gösterir. Nihayet, $\Psi_{n/\alpha}$ yı genel olarak domine eden her Φ Young fonksiyonu için M_α, (Φ, Ψ) tiplidir. Yani, Φ, $\Psi_{n/\alpha}$ yı genel olarak domine ediyorsa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{n/\alpha}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c > 0$ sabit sayısı vardır. Buradan

$$\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{n/\alpha}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\} \supset \{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|f\|_{L^{\Psi_{n/\alpha}}} \leq \|cf\|_{L^\Phi} = c\|f\|_{L^\Phi}$$

dir. Bu M_α operatörünün $(\Psi_{n/\alpha}, \Psi)$ tipli olduğunda $\Psi_{n/\alpha}$ yı genel olarak domine eden ve her Φ Young fonksiyonu için M_α operatörünün (Φ, Ψ) tipli olduğunu gösterir.

Aksine, M_α, (Φ, Ψ) tipli operatör olsun. Bu durumda $\forall f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^\Psi(\mathbb{R}^n)} \leq k\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \tag{4.21}$$

eşitsizliğini sağlayan bir k sabit sayısı vardır. f, $\mathbb{R}^n$ de tanımlanan $f(x) = \phi(C_n|x|^n)$ tipinde bir fonksiyon olsun, burada $\phi \in L^\Phi(0, \infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $C_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ sayısı da $\mathbb{R}^n$ uzayındaki birim yuvarın ölçüsüdür. Böylece,

$$\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^\Phi(0,\infty)} \tag{4.22}$$

olur. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} &= \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\} = \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{\phi(C_n|x|^n)}{\lambda}\right) dx \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \omega_n \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\phi(C_n r^n)}{\lambda}\right) r^{n-1} dr \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \frac{\omega_n}{n}\frac{1}{C_n} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\phi(r)}{\lambda}\right) dr \leq 1\} = \|\phi\|_{L^\Phi(0,\infty)}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
M_\alpha f(x) &= \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}} \int_B |f(y)| dy \\
&\geq \frac{1}{|B(0,|x|)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(0,|x|)} |f(y)| dy = \frac{1}{(C_n|x|^n)^{1-\alpha/n}} \int_0^{C_n|x|^n} \phi(r) dr
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|M_\alpha f\|_{L^\Psi(\mathbb{R}^n)} \geq \left\| s^{-1+\alpha/n} \int_0^s \phi(r)dr \right\|_{L^\Psi(0,\infty)} \tag{4.23}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.21), (4.22), (4.23) ifadelerinden

$$\left\| s^{-1+\alpha/n} \int_0^s \phi(r)dr \right\|_{L^\Psi(0,\infty)} \leq k\|\phi\|_{L^\Phi(0,\infty)} \tag{4.24}$$

olur. ϕ fonksiyonunun keyfi seçimi ile (4.24) eşitsizliği ve Lemma 4.1.7 (i) özelliğinden $\int_0 \Psi(t)t^{-1-n/(n-\alpha)}dt < \infty$ ve Φ nin $\Psi_{n/\alpha}$ yı genel olarak domine etmesini gerektirir.

Sonuç 4.3.3. $1 \leq p < \infty$ için $\Phi(t) = t^p$ ve $1 \leq q < \infty$ için $\Psi(t) = t^q$ iki Young fonksiyonu olsun. Φ ve Ψ için, (4.13) ifadesindeki $\mathcal{Q}$ fonksiyonu $\mathcal{Q}(t) = t^{\frac{qn}{q\alpha+n}}$ olur. Teorem 4.3.1 deki Φ nin $\mathcal{Q}$ yu genel olarak domine etmesi şartı ise $\sup_{t>0} t^{\frac{qn}{q\alpha+n}-p} < \infty$ veya denk olarak $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir. Yani M_α kesirli maksimal operatörünün (p,q) zayıf tipli olması için gerek ve yeter şart $1 \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

Sonuç 4.3.4.

i. M maksimal operatörün (Φ, Ψ) zayıf tipli olması için gerek ve yeter şart Φ nin Ψ yi genel olarak domine etmesidir.

ii. M maksimal operatörün (Φ, Ψ) kuvvetli tipli olması için gerek ve yeter şart $\int_0 \Psi(t)t^{-2}dt < \infty$ ve $\Phi(s)$ nin $s\int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ Young fonksiyonunu genel olarak domine etmesidir (Cianchi, 1996).

İspat. Teorem 4.3.1 de $\alpha = 0$ alındığında (i) elde edilir. (ii) nin ispatı için $\Psi_\infty(s)$ nin $s\int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ ye denk olduğunu göstermek yeterlidir. Denkliğin gösterilmesi için $B_\infty(s) = \int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ için

$$E(s) = sB_\infty^{-1}(s) \tag{4.25}$$

alalım. $\widetilde{\Psi}_\infty(s) = \int_0^s E(t)t^{-1}dt$ ve integrant artan olduğundan $s > 0$ için

$$\widetilde{B}_\infty(s) \leq E(s) \leq \widetilde{B}_\infty(2s) \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.26) ve (5.1) eşitsizliklerinden $r > 0$ için

$$\frac{r}{2E^{-1}(r)} \leq \Psi_\infty^{-1}(r) \leq \frac{2r}{E^{-1}(r)} \tag{4.27}$$

olur. Şimdi $D(s) = \int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ olsun. Bu durumda

$$D^{-1}(r) = \frac{r}{E^{-1}(r)}, \quad r > 0 \tag{4.28}$$

elde edilir. (4.27) eşitsizliği ve (4.28) eşitliğinden $s > 0$ için

$$D(s/2) \leq \Psi_\infty(s) \leq D(2s) \quad \text{for } s > 0 \tag{4.29}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.4 de $\Phi = \Psi$ olarak alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.5.

i. Her Φ Young fonksiyonu için M maksimal operatör (Φ, Φ) zayıf tiplidir.

ii. M maksimal operatörün (Φ, Φ) kuvvetli tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır (Kita, 1997; Kokilashvili ve Krbec, 1991).

İspat. (i) nin ispatı aşikardır. $s\int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ nin Ψ yi her zaman domine ettiği Önerme 3.1.11 (ii) kullanıldığında kolayca görülür. Ψ nin $s\int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ yi domine etmesi için ise gerek ve yeter şart $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır (Krasnoselskii ve Rutickii, 1961, Teorem 4.3). Böylece (ii) ispatlanmış olur.

4.4. Orlicz Uzaylarda Singüler İntegral Operatörlerin Sınırlılığı

Teorem 4.4.1.

i. $\Phi \in \Delta_2$ ise T singüler integral operatör (Φ, Φ) zayıf tiplidir.

ii. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ise T singüler integral operatör (Φ, Φ) kuvvetli tiplidir (Nakai, 2001;Sawano, 2018).

İspat. (i) $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ olsun. $\lambda > 0$ keyfi fakat sabit bir sayı olmak üzere f fonksiyonunu $f_1 = \chi_{\{|f|>\lambda\}} \cdot f$ ve $f_2 = \chi_{\{|f|\leq\lambda\}} \cdot f$ olacak biçimde iki parçaya ayıralım, yani $f = f_1 + f_2$ olsun. Bu durumda

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| \\ + \Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|\end{aligned}$$

elde edilir. $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dir. Gerçekten Önerme 3.1.19 (i) ve (iii) den $|f(x)| > \lambda$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{a_\Phi} \leq \frac{\Phi(|f(x)|/\lambda)}{\Phi(1)} \leq C(\lambda)\frac{\Phi(|f(x)|)}{\Phi(1)},$$

olacak şekilde pozitif bir $C(\lambda)$ sabiti vardır. Yukarıdaki eşitsizlik ve $1 \leq a_\Phi$ den,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|dx \\ &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{a_\Phi} \left[\frac{\lambda}{|f(x)|}\right]^{a_\Phi} |f(x)|dx \\ &\leq C(\lambda)\frac{\lambda}{\Phi(1)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty,\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olmasını gerektirir. Şimdi $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterelim. Önerme 3.1.19 (i) ve (ii) kıllanılarak $|f(x)| \leq \lambda$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{b_\Phi} \leq \frac{\Phi(|f(x)|/\lambda)}{\Phi(1)} \leq C(\lambda)\frac{\Phi(|f(x)|)}{\Phi(1)}.$$

olacak şekilde bir $C(\lambda) > 0$ sabit sayısı vardır. Son eşitsizlik ve $b_\Phi < p$ den

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p dx &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}} |f(x)|^p dx \leq \lambda^{p-b_\Phi} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}} |f(x)|^{b_\Phi} dx \\ &\leq C(\lambda)\frac{\lambda^p}{\Phi(1)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty,\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dir. Böylece istenilen ifade elde edilmiş olur.

T operatörünün $(1,1)$ zayıf sınırlılığından ve $p > 1$ için L^p sınırlılığından

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx \tag{4.30}$$

ve

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p dx \tag{4.31}$$

olduğunu açıktır. (4.30) eşitsizliğinden ve $\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}$ fonksiyonunun monotonluğundan

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| &\lesssim \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| dx \\ &= \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)| dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \frac{\Phi(|f(x)|)}{|f(x)|} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx\end{aligned}$$

olur. (4.31) ve Önerme 3.1.10 den

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| &\lesssim \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p dx \\ = \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^p} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \le \lambda\}} |f(x)|^p dx &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \frac{\Phi(|f(x)|)}{|f(x)|^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\Phi(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx \le \frac{1}{\Phi\big(\frac{\lambda}{C\|f\|_{L^\Phi}}\big)}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitsizlik $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ normunun homojenlik özelliğinden dolayı her $f \in L^\Phi$ için doğrudur.

(ii) Dağılım fonksiyonunu kullanarak yapılan hesaplamalar maksimal operatör için aynıdır. Yani

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Tf(x)}{\Lambda}\right) dx = \frac{2}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > 2\lambda\}| d\lambda$$

olur. Diğer yapılacak işlemler maksimal operatörden farklı olacak kısımlar T operatörünün L^∞ sınırlı olmamasından kaynaklanmaktadır. Şimdi kabul edelim ki $p > 1$ yeterince büyük, $f_1 = \chi_{\{|f| > \lambda\}} \cdot f$ ve $f_2 = \chi_{\{|f| \le \lambda\}} \cdot f$ dir. Bu durumda eğer $|Tf(x)| > 2\lambda$ ise $|Tf_1(x)| > \lambda$ veya $|Tf_2(x)| > \lambda$ olur. Dolayısıyla

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > 2\lambda\}| \le |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \lambda\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \lambda\}|$$

olur. Maksimal operatörler için sağlanan eşitsizlikler ilk terim için de geçerlidir. Bundan dolayı, (4.30) gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \lambda\}| \, d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f|}{\Lambda}\right) \tag{4.32}$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci terim için benzer bir hesaplama yine geçerlidir. Fakat burada

$\Phi \in \Delta_2$ şartı ve (4.31) eşitsizliği kullanılacaktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)|\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf_2(x)|>\lambda\}|d\lambda &\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(x)|^p dx\right)\frac{d\lambda}{\lambda^p}\\ &\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\left(\int_{|f(x)|}^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda^p}\right)dx\end{aligned}$$

olur. Önerme 3.1.18 (i) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)|\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf_2(x)|>\lambda\}|d\lambda\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right)dx \le \int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\Lambda}\right)dx\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. Böylece (4.32) ve (4.33) eşitsizliklerinden

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|Tf(x)|}{\Lambda}\right)dx \le \int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\Lambda}\right)dx$$

eşitsizliğini elde edilir. Buradan $\Lambda = c_0\|f\|_{L^\Phi}$ alınırsa

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|Tf(x)|}{\Lambda}\right)dx \le 1$$

elde edilir. Böylece

$$\|Tf\|_{L^\Phi} \le \Lambda = c_0\|f\|_{L^\Phi}$$

olur.

Sonuç 4.4.2. $1 \le p < \infty$ için $\Phi(t) = t^p$ Young fonksiyonu Δ_2 şartını ve $1 < p < \infty$ için ∇_2 şartını sağlar. Dolayısıyla, $1 \le p < \infty$ için T singüler integral operatör (p,p) zayıf tipli, $1 < p < \infty$ için (p,p) kuvvetli tiplidir.

Teorem 4.4.3.

i. T singüler integral operatörün (Φ,Ψ) zayıf tipli olması için gerek ve yeter şart $\int_0 \widetilde{\Phi}(t)/t^2dt < \infty$ ve $\widetilde{\Psi}(s)$ nin $s\int_0^s \widetilde{\Phi}(t)/t^2dt$ Young fonksiyonunu genel olarak domine etmesidir.

ii. T singüler integral operatörün (Φ,Ψ) kuvvetli tipli olması için gerek ve yeter şart $\int_0 \Psi(t)/t^2dt < \infty$, $\int_0 \widetilde{\Phi}(t)/t^2dt < \infty$ olması ve $\Phi(s)$ nin $s\int_0^s \Psi(t)/t^2dt$ Young fonksiyonunu, $\widetilde{\Psi}$ nin ise $s\int_0^s \widetilde{\Phi}(t)/t^2dt$ Young fonksiyonunu genel olarak domine etmesidir (Cianchi, 1996).

Teorem 4.4.3 de $\Phi = \Psi$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir. Sonuç 4.4.4 ün ispatı Sonuç 4.3.5 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.4.4.

(i) T singüler integral operatörün (Φ, Φ) zayıf tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \Delta_2$ olmasıdır.

(ii) T singüler integral operatörün (Φ, Φ) kuvvetli tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olmasıdır (Kokilashvili ve Krbec, 1991).

5. B_n ORLICZ UZAYLARINDA B_n MAKSİMAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Kesirli integral operatörler, Harmonik analizde önemli rol oynamaktadır. Laplace-Bessel diferensiyel operatörler ile ilgili bu operatörler ve ilgili konular pek çok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Bunlara, I.A. Kipriyanov (Kipriyanov, 1967), L.N. Lyakhov (Lyakhov, 1996), A.D. Gadjiev and I.A. Aliev (Aliev ve Gadjiev,1988), I. Ekincioglu (Ekincioglu, 2010), V.S. Guliyev (Guliyev, vd., 2007), gibi araştırmacılar örnek verilebilir.

İlk olarak, Guliyev (Guliyev, 2003)) Laplace-Bessel differensiyel operatörler (B_n-maksimal fonksiyon) ile elde edilen maksimal fonksiyonları incelemiş ve $L_{p,\gamma}$ uzaylarda B_n-maksimal fonksiyonların sınırlılıklarını göstermiştir..

I. Kipriyanov and M. Klyuchantsev (Kipriyanov ve Klyuchantsev, 1970), Laplace-Bessel differential operatör ile ilgili singüler integral operatörleri incelemiş ve $L_{p,\gamma}$-uzaylarında B_n-singular operatörlerin sınırlılıklarını araştırmışlardır. Bunlar ile birlikte, I. Aliev and A. Gadjiev (Aliev ve Gadjiev, 1992), A. Gadjiev ve E.V. Guliyev (Gadjiev ve Guliyev, 2008), A. Serbetci ve I. Ekincioglu (Serbetci ve Ekincioglu, 2004)) $L_{p,\gamma}$ ağırlıklı uzaylarında B_n singüler integral operatörlerini çalışmışlardır.

Biz bu tezde, B_n Orlica uzaylarında geneleşmiş öteleme operatörüne bağlı B_n maksimal operatörlerin sınırlılığını inceleyeceğiz.

5.1. B_n Maksimal Operatörler

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu öklid uzayı ve $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ uzayının pozitif kısmını $\mathbb{R}^n_+ = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_n > 0\}$ ile gösterelim. γ pozitif bir sayı olmak üzere ölçülebilir f fonksiyonların sınıfı $L_{p,\gamma} \equiv L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olsun. Bu durumda bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x_n^\gamma dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

ile tanımlanır. Eğer $p = \infty$ ise bu durumda

$$L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) = L_\infty(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ f : ||f||_{L_{\infty,\gamma}} = \underset{x\in\mathbb{R}^n_+}{ess\inf} |f(x)| < \infty \right\}$$

dir. $E \subset \mathbb{R}_n^+$ ölçülebilir bir küme ve $|E|_\gamma = \int_E x_n^\gamma dx$ olsun. Bu durumda $|E(0,r)|_\gamma = \omega(n,\gamma) r^{n+\gamma}$ olur. Burada $\omega(n,\gamma) = |E(0,1)|_\gamma$ dir.

$T^y f(x)$ genelleştirilmiş öteleme operatörünü (B_n Genelleştirilmiş öteleme operatör) Δ_{B_n}Laplace-Bessel differensiyel operatörü ile çok yakın ilgilidir (Kipriyanov ve Klyuchantsev, 1970; Levitan, 1951). $f \in L_{1,\gamma}^{loc}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. B_n-maksimal fonksiyon

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} T^y |f(x)| \, y_n^\gamma \, dy.$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1.1.

i) $f \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Bu durumda $\tau > 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_n^+ : M_\gamma f(x) > \tau\right\}\right|_\gamma \le \frac{C_3}{\tau} \int_{\mathbb{R}_n^+} |f(x)| \, x_n^\gamma dx,$$

dir, burada C_3 sabit ve f den bağımsızdır.

i) $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)0$, $1 < p \le \infty$ olsun. Bu durumda $M_\gamma f(x) \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ and

$$\|M_\gamma f\|_{L_{p,\gamma}} \le C_4 \|f\|_{L_{p,\gamma}},$$

dir, burada C_4 sabit ve f den bağımsızdır (Guliyev, 2003).

Sonuç 5.1.2. Eğer $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, ise her $x \in \mathbb{R}_n^+$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |B(0,\varepsilon)|_\gamma^{-1} \int_{B(0,\varepsilon)} T^y f(x) \; y_n^\gamma dy = f(x)$$

dir.

Uyarı 5.1.3. Teorem 5.1.1 bir boyut yani $n = 1$ için (Stempak, 1991) ve çok boyutlu yani $n \ge 2$ için de de ispat edilmiştir (Guliyev, 2003).

Maksimal operatörlerin harmonik analizde önemli rol oynadığı bilinmektedir (Stein, 1993). Fourier Bessel dönüşümü ve Laplace Bessel diferensiyel operatör ile ilgili harmonik analiz geneşleştirilmiş ötelemey ile ilgigi konvolüsyonu ortaya çıkarır. Bu çerçevede, Orlicz Bessel uzaylarında (B_n-Orlicz uzayı) Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonları çalışıyoruz.

Bu nedenle, $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ B_n-Orlicz uzaylarında M_B B_n-maksimal operatörlerinin zayıf ve kuvvetli tipi sınırlılıklarını ispat edeceğiz.

5.2. Young Fonksiyonları ve B_n Orlicz Uzayları

Orlicz uzayları ilk defa Orlicz tarafından, L^p Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olarak tanıtılmıştır. Orlicz uzayı aynı zamanda L^1 uzayında yapılamayan çalışmalar için L^1 uzayı için uygun bir alternatif uzaydır. Bundan dolayı, bu uzayları karakterize etmek için ilk olarak Young fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 5.2.1. Eğer Φ konveks ve soldan sürekli, yani $\lim\limits_{\xi\to+0}\Phi(\xi)=\Phi(0)=0$ ve $\lim\limits_{\xi\to\infty}\Phi(\xi)=\infty$ ise $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty]$ fonksiyonuna Young fonksiyonu denir.

Konvekslik ve $\Phi(0)=0$ eşitliğinden her hangi bir Young fonksiyonunun artan olduğu görülür. Eğer $\Phi(s)=\infty$ olacak şekilde $s\in(0,\infty)$ varsa bu durumda $\xi\geq s$ için $\Phi(\xi)=\infty$ dir. Young fonksiyonların kümesi

$$0<\Phi(\xi)<\infty \qquad \text{for} \qquad 0<\xi<\infty$$

dir ve $\mathcal{Y}$ ile gösterilir. Eğer $\Phi\in\mathcal{Y}$ ise bu durumda Φ her kapalı $[0,\infty)$ aralıkta mutlak sürekli ve $[0,\infty)$ aralığından $[0,\infty)$ aralığına bire bir ve örtendir. Bir Φ young fonksiyonu ve $0\leq s\leq\infty$ için

$$\Phi^{-1}(s)=\inf\{\xi\geq 0:\Phi(\xi)>s\}$$

olsun. Eğer $\Phi\in\mathcal{Y}$ ise, bu durumda Φ^{-1} Φ fonksiyonun ters fonksiyonudur.

$$\xi\leq\Phi^{-1}(\xi)\widetilde{\Phi}^{-1}(\xi)\leq 2\xi \qquad \text{for } \xi\geq 0, \tag{5.1}$$

olduğu bilinmektedir. Burada $\widetilde{\Phi}(\xi)$

$$\widetilde{\Phi}(\xi)=\begin{cases}\sup\{\xi s-\Phi(s):s\in[0,\infty)\} & ,\quad \xi\in[0,\infty)\\ \infty & ,\quad \xi=\infty.\end{cases}$$

ile tanımlanır. Eğer $C>1$ için

$$\Phi(2\xi)\leq C\Phi(\xi), \qquad \xi>0$$

ise Φ Young fonksiyonu Δ_2-şartını sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2$ olarak gösterilir. Eğer $\Phi \in \Delta_2$ ise bu durumda $\Phi \in \mathcal{Y}$ dir. Eğer $C > 1$ için

$$\Phi(\xi) \le \frac{1}{2C}\Phi(C\xi), \qquad r \ge 0$$

ise Φ Young fonksiyonuna ∇_2-şartını sağlar denir ve $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir.

Lemma 5.2.2. (Kokilashvili ve Krbec, 1991) Φ kanonik gösterimine sahip

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, t > 0.$$

bir Young fonksiyonu olsun. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta_2$ dir. Bu durumda $A \ge 2$ için $\Phi(2t) \le A\Phi(t)$ dir. $\beta = \log_2 A$ olsun. Eğer $p > \beta + 1$ ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^p} \lesssim \frac{\Phi(t)}{t^p},\ t > 0.$$

Ayrıca kabul edelim ki $\Phi \in \nabla_2$ dir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} \lesssim \frac{\Phi(t)}{t},\ t > 0.$$

Bir Φ Young fonksiyonu için ,

$$L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ f \in L^{loc}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) : \int_{\mathbb{R}^+_n} \Phi(k|f(x)|)\ x_n^\gamma\ dx < \infty \text{ for some } k > 0 \right\}$$

Orlicz uzayıdır. Eğer $\Phi(\xi) = r^p$, $1 \le p < \infty$ ise bu durumda $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) = L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ dir. Eğer $\Phi(\xi) = 0$, $(0 \le \xi \le 1)$ ve $\Phi(\xi) = \infty$, $(\xi > 1)$ ise bu durumda $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) = L_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ olur. $L^{loc}_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayı $B \subset \mathbb{R}^+_n$ yuvarları için $f\chi_B \in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olacak şekilde tüm f fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır. $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayı

$$\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}} = \inf\big\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^+_n} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)\ x_n^\gamma\ dx \le 1\big\}.$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir f ölçülebilir fonksiyon ve $t > 0$ için $m(f,t)_\gamma = \big|\{x \in \mathbb{R}^+_n : |f(x)| > t\}\big|_\gamma$ olsun. Bu durumda zayıf Orlicz uzayı

$$WL_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) = \{f \in L^{loc}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+) : \|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}} < \infty\}$$

ve normu

$$\|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}} = \inf\Big\{\lambda > 0 \ : \ \sup_{t>0} \Phi(t) m\Big(\frac{f}{\lambda},\ t\Big)_\gamma \ \leq 1\Big\}.$$

ile tanımlanır. Dikkat edelim ki $\|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}$,

$$\sup_{t>0} \Phi(t) m(f,t)_\gamma = \sup_{t>0} t\, m(f, \Phi^{-1}(t))_\gamma = \sup_{t>0} t\, m(\Phi(|f|), t)_\gamma$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}}\Big)\ x_n^\gamma \ dx \leq 1, \qquad \sup_{t>0} \Phi(t) m\Big(\frac{f}{\|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}}},\ t\Big)_\gamma \leq 1. \tag{5.2}$$

dir.

Hölder eşitsizliklerinin benzerleri olan aşağıdaki teoremi verelim (Rao ve Ren, 2002).

Teorem 5.2.3. f ve g $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir iki fonksiyon olsun. f Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ tümleyeni için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} |f(x)g(x)|\ x_n^\gamma \ dx \leq 2\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}} \|g\|_{L_{\widetilde{\Phi},\gamma}}.$$

Lemma 5.2.4. Φ bir Young fonksiyon ve B, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir yuvar olsun. Bu durumda

$$\|\chi_B\|_{L_{\Phi,\gamma}} = \|\chi_B\|_{WL_{\Phi,\gamma}} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)}$$

dir.

İspat. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğu kolayca görülür. O halde

$$\begin{aligned}
\|\chi_B\|_{L_{\Phi,\gamma}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_B \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ y_n^\gamma \ dy \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_B y_n^\gamma \ dy \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq |B|^{-1}\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \leq \Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \le \Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \lambda \ge \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|\chi_B\|_{WL_{\Phi,\gamma}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \left|\{x \in \mathbb{R}_n^+ : \left|\chi_B(x)\right| > t\}\right|_\gamma \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{0<t<1} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \left|\{x \in \mathbb{R}_n^+ : \left|\chi_B(x)\right| > t\}\right|_\gamma \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{0<t<1} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \le |B|^{-1}\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \le |B|_\gamma^{-1}\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \le \Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \lambda \ge \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right)}
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 5.2.3, Lemma 5.2.4 ve (5.1) eşitsizlğinden aşagıdaki kestirimler elde edilir:

Lemma 5.2.5. Φ bir Young fonksiyonu ve $B = B(x, r)$ yuvarı için

$$
\int_B |f(y)|\, y_n^\gamma\, dy \le 2|B|_\gamma \Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right) \|f\|_{L_{\Phi,\gamma}(B)}
$$

eşitsizliği sağlanır.

5.3. $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ B_n Orlicz uzayında B_n maksimal operatörün sınırlılığı

Bu kısımda, tez çalışmasının orijinali ve temel teoremi olan M_γ maksimal operatörün $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ B_n-Orlicz uzayında sınırlılığını veren teoremi verelim:

Teorem 5.3.1. Φ bir Young fonksiyon olsun. Bu durumda M_γ B_n-maksimal operatörü $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayından $WL_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayına sınırlıdır ve $\Phi \in \nabla_2$ için $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. İlk olarak M_γ B_n-maksimal operatörün $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayından $WL_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayına sınırlılığını gösterelim.

$$\rho_{\Phi,\gamma}(f) := \int_{\mathbb{R}^+_n} \Phi(|f(x)|)\ x_n^\gamma\ dx \leq 1.$$

olacak şekilde $\|f|_{L_{\Phi,\gamma}} = 1$ eşitliğini sağlayan bir $f \in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ fonksiyonu alalım. Jensen eşitsizliğinden her B yuvar için

$$\Phi\left(\frac{1}{|B|_\gamma}\int_B |f(y)|\ y_n^\gamma\ dy\right) \leq \frac{1}{|B|_\gamma}\int_B \Phi(|f(y)|)\ y_n^\gamma\ dy \tag{5.3}$$

olur. B_n maksimal operatörün tanımı ve (5.3) den

$$\Phi(M_\gamma f(x)) \leq M_\gamma[(\Phi\circ f)(x)] \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) eşitsizliği ve B_n-maksimal operatörün $(1,1)_\gamma$ zayıf sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\left|\{x\in\mathbb{R}^+_n : M_\gamma f(x) > t\}\right|_\gamma &= \left|\{x\in\mathbb{R}^+_n : \Phi(M_\gamma f(x)) > \Phi(t)\}\right|_\gamma \\
&\leq \left|\{x\in\mathbb{R}^+_n : M_\gamma(\Phi\circ f)(x) > \Phi(t)\}\right|_\gamma \\
&\leq \frac{C}{\Phi(t)}\int_{\mathbb{R}^+_n} \Phi(|f(x)|)\ x_n^\gamma\ dx \\
&\leq \frac{C}{\Phi(t)} \leq \frac{1}{\Phi(\frac{t}{C\|f\|_{L_\Phi}})}
\end{aligned}$$

ve eğer $C \geq 1$ ise $\|f\|_{L_\Phi} = 1$ ve $\frac{1}{C}\Phi(t) \geq \Phi\left(\frac{t}{C}\right)$ elde ederiz $\|\cdot\|_{L_{\Phi,\gamma}}$ normu homogen olduğundan her $f\in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ için

$$\left|\{x\in\mathbb{R}^+_n : M_\gamma f(x) > t\}\right|_\gamma \leq \frac{1}{\Phi(\frac{t}{C\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}})}$$

olur. $\Phi\in\nabla_2$ için M_γ B_n-maksimal operatörün $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterdik. $\Lambda > 0$ and $f\in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+_n} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\Lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx &= \int_{\mathbb{R}^+_n}\int_0^{\frac{M_\gamma f(x)}{\Lambda}} \varphi(s)ds\ x_n^\gamma\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+_n}\int_0^\infty \chi_{\{s\in[0,\infty):\frac{M_\gamma f(x)}{\Lambda}>s\}}\varphi(s)ds\ x_n^\gamma\ dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \varphi(s) \int_{\mathbb{R}_n^+} \chi_{\{x\in\mathbb{R}_n^+ : M_\gamma f(x) > \Lambda s\}}\ x_n^\gamma\ dxds \\
&= \frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \left|\{x\in\mathbb{R}_n^+ : M_\gamma f(x) > \lambda\}\right|_\gamma d\lambda \\
&= \frac{2}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \left|\{x\in\mathbb{R}_n^+ : M_\gamma f(x) > \lambda\}\right|_\gamma d\lambda
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Maksimal eşitsizlikten (Guliyev, 2003)

$$
\left|\{x\in\mathbb{R}_n^+ : M_\gamma f(x) > 2\lambda\}\right|_\gamma \lesssim \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}_n^+ : |f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\ x_n^\gamma\ dx
$$

ve integral sırası değiştirilerek

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_n^+} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\Lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx &\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}_n^+ : |f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\ x_n^\gamma\ dx\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}_n^+} |f(x)| \left(\int_0^{|f(x)|} \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx \\
&\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}_n^+} |f(x)| \left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(x)|} \varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi Lemma 5.2.2 göz önüne alırsak eğer $f(x) \neq 0$ ise bu durumda

$$
\left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(x)|} \varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right) \lesssim |f(x)|^{-1}\Lambda\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right),
$$

elde edilir. $k \geq 1$ ve $t > 0$ için Φ konveks olduğunda $k\Phi(t) \leq \Phi(kt)$ dir. Bu nedenle

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_n^+} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\Lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx &\leq c_0\int_{\mathbb{R}_n^+} \Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_n^+} \Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\Lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx
\end{aligned}
$$

olduğu gösterilir. Burada c_0 bir sabittir. Eğer $\Lambda = c_0\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}$ seçilirse,

$$
\int_{\mathbb{R}_n^+} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\Lambda}\right)\ x_n^\gamma\ dx \leq 1.
$$

elde edilir. Buradan

$$
\|M_\gamma f\|_{L_{\Phi,\gamma}} \leq \Lambda = c_0\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}
$$

bulunur.

6. SONUÇ

Bu tezdeki B_n-maksimal operatörlerin B_n-Orlicz uzaylarında sınırlılıklarının araştırılması, bu uzaylarda B_n-singüler integral operatörlerin sınırlılık probleminin çözümü, bu alanda çalışan genç bilim adamları için pek çok kolaylık sağlayacaktır. Örneğin bu uzayda veya Orlicz-Morrey uzaylarda Bessel operatörüne bağlı genelleşmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümleri, singüler integral operatörlerin sınırlılık problemlerinin araştırılmasımna temel teşkil edecektir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Adams, R.A., Fournier, J.J.F. (2003). Sobolev paces, Academic Press.

Aliev, I.A., Gadjiev, A.D. (1988). On classes of operators of potential types generated by a generalized shift. 3(2), 21-24.

Aliev, I.A. Gadjiev, A.D. (1992). Weighted estimates of multidimensional singular integrals generated by the generalized shift operator. Mat. Sb., 183(9), 45-66.

Bennett, C., Rudnick, K. (1980). On Lorentz-Zygmund spaces. Dissertationes Math., 175.

Bennett, C., Sharpley, R. (1988). Interpolation of operators. Academic Press, Boston,

Bibiana, I. (1996). Comparison of two weak versions of the Orlicz spaces. Rev. Un. Mat., Argentina 40(1-2), 191-202.

Birnbaum, Z., Orlicz, W. (1931). Über die verallgemeinerung des begriffes der zueinan-der konjugierten potenzen. Studia Math., 3, 1-67.

Byun, S.S. (2011). Gradient estimates in Orlicz spaces for nonlinear elliptic equations with BMO nonlinearity in nonsmooth domains, Forum Math., 23(4), 693-711.

Byun, S.S., Yao, F., Zhou, S. (2008). Gradient estimates in Orlicz space for nonlinear elliptic equations. J. Funct. Anal., 255(8), 1851-1873.

Cianchi, A. (1996). A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces. Indiana Uni. Math., J. 45, 39-65.

Cianchi, A. (1997). A note on two-weight inequalities for maximal functions and singular integrals. Bull. London Math. Soc., 29, 53-59.

Cianchi, A. (1999). Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces. J. London Math. Soc., 2(1), 187-202.

Coifman, R.R., Rochberg, R., Weiss, G. (1976). Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables. Ann. of Math., 103, 611-635.

Edgar, G. A., Sucheston, L. (1992). Stopping Times and Directed Processes. Cambridge University Press, Cambridge.

Ekincioglu, I. (2010). The Boundedness of high order Riesz-Bessel transformations generated by the generalized shift operator in weighted $L_{p,\omega,\gamma}$ -spaces with general weights, Acta Appl. Math. 109, 591-598.

Ekincioglu, S. Elifnur (2018). On the boundedness of the Bn-maximal operator on B_n-Orlicz spaces, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 38 (2018), no. 1, Mathematics, 43-51.

Fu, X., Yang, D., Yuan, W. (2012). Boundedness of multilinear commutators of Calderón-Zygmund operators on Orlicz spaces over non-homogeneous spaces. Taiwanese J. Math., 16, 2203-2238.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Gadjiev, A.D. Guliyev, E.V. (2005). Two-weighted inequality for singular integrals in Lebesgue spaces associated with the Laplace-Bessel differential operator. Proc. Razmadze Math. Inst. Vol. 138, 1-15.

Gadjiev, A. D., Guliyev, V.S. (2008). The Stein-Weiss type inequality for fractional integrals associated with the Laplace-Bessel differential operator, Fract. Calc. Appl. Anal., 11(1), 77-90.

Garcia-Cuerva, J., Harboure, E., Segovia, C., Torrea, J.L. (1991). Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals. Indiana Univ. Math. J. 40(4), 1397-1420.

Grafakos, L. (2004). Classical and Modern Fourier Analysis. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

Guliyev, V.S. (1998). Sobolev's thm for Riesz B-potentials. (Russian) Dokl. Akad. Nauk, 358(4), 450-451.

Guliyev, V.S. (1999). Sobolev thms for anisotropic Riesz-Bessel potentials on Morrey-Bessel spaces. Doklady Academy Nauk Russia, 367(2), 155-156.

Guliyev, V.S. (2003). On maximal function and fractional integral associated with the Bessel differential operator. Math. Inequal. Appl., 6(2), 317-330.

Guliyev, V.S., Serbetci, A., Ekincioglu, I. (2007a). Necessary and sufficient conditions for the boundedness of rough B-fractional integral operators in the Lorentz spaces. J. Math. Anal. Appl., 336(1), 425-437.

Guliyev, V.S., Serbetci, A., Ekincioglu, I. (2007b). On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms Spec. Funct., 18(12), 885-895.

Guliev, V.S., Deringoz, F., Gasanov, S.G. (2017). Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces. J. Inequal. Appl. 2017, Paper No. 75, 18 s.

Guliev, V.S., Deringoz, F., Gasanov, S.G. (2018). Commutators of a fractional maximal operator on Orlicz spaces. (Russian) Mat. Zametki, 104 (2018), no. 4, 516-526.

Hardy, G. H., Littlewood, J.E. (1928). Some properties of fractional integrals. I, Math. Z., 27, 565-606.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E.(1930). A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta Math., 54, 81-116.

Kipriyanov, I.A. (1967). Fourier-Bessel transformations and imbedding thms for weight classes. Trudy Math. Inst. Steklov, 89, 130-213.

Kipriyanov, I.A., Ivanov, L.A. (1983). The obtaining of fundamental solutions for homogeneous equations with singularities with respect to several variables. (Russian) Trudy Sem. S.L. Sobolev, (1) 55-77, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., Novosibirsk.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Kipriyanov I.A., Klyuchantsev, M.I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator. II, Sibirsk. Mat. Zh., 11(1970), 1060-1083.

Kita, H. (1996). On maximal functions in Orlicz spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 124, 3019-3025.

Kita, H. (1997). On Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces. Math. Nachr. 183, 135-155.

Klyuchantsev, M.I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator. I, Sibirsk. Math. Zh. **11**(1970), 810-821; translation in Siberian Math. J. 11, 612-620.

Kokilashvili, V., Krbec, M.M. (1991). Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces. World Scientific, Singapore.

Krasnoselskii, M. A., Rutickii, Ya.B. (1961). Convex Functions and Orlicz Spaces. English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen.

Kufner, A., John, O., Fucik, S. (1977). Function Spaces. Noordhoff International Publishing: Leyden, Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences: Prague.

Levitan, B.M. (1951). Bessel function expansions in series and Fourier integrals. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk, 2(42), 102-143.

Lieb, E., Loss, M. (2001). Analysis. American Mathematical Society, Providence, RI.

Lu, S., Ding, Y., Yan, D. (2007). Singular Integrals and Related Topics World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd..

Lyakhov, L.N. (1996). Multipliers of the Mixed Fourier-Bessel transform. Proc. Steklov Inst. Math. 214 (3), 227-242.

Maligranda, L. (1989). Orlicz Spaces and Interpolation. Seminars in Math. 5, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Megan, M., Sasu, A. L., Sasu, B. (2001). On a theorem of Rolewicz type for linear skew-product semiflows. International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca. Semin. Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, 3(2002), 63-72.

Nakai, E. (2001). On generalized fractional integrals. Taiwanese J. Math., 5(3), 587-602.

O'Neil, R. (1963). Convolution operators and $L_{(p,q)}$ spaces. Duke Math. J. 30, 129-142.

O'Neil, R. (1965). Fractional integration in Orlicz spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 115, 300-328.

Orlicz, W. (1936). Über Räume (L^M). Bull. Acad. Polon. A, 93-107.; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, (1988), 345-359.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Orlicz, W. (1988). Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Acad. Polon. A (1932) 207-220. ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 217-230.

Rao, M.M., Ren, Z.D. (1991). Theory of Orlicz Spaces. M. Dekker, Inc., New York.

Rao, M.M., Ren, Z.D. (2002). Application of Orlicz Spaces. M. Dekker, Inc., New York.

Sawano, Y. (2016). A Handbook of Harmonic Analysis. Erişim: http://www.comp.tmu.ac.jp/yosihiro /teaching/harmonic-analysis/ harmonic-analysis-textbook.pdf

Serbetci, A., Ekincioglu, I. (2004). Boundedness of Riesz potential generated by generalized shift operator on B_a spaces. Czech. Math. J., 54(3), 579-589.

Sobolev, S. L. (1938). On a theorem in functional analysis. Math. Sbornik, Russian, 4, 471-497. [0.5cm] Stein, E. M. (1970). Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press, Princeton, 304.

Stein, E.M. (1993). Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press, Princeton NJ.

Stempak, K. (1991). Almost everywhere summability of Laguerre series. Studia Math. 100(2), 129-147.

Strichartz, R.S. (1972). A note on Trudinger's extension of Sobolev's inequalities. Indiana Univ. Math. J., 21, 841-842.

Torchinsky, A. (1976). Interpolation of operators and Orlicz classes. Studia Math. 59, 177-207.

Torchinsky, A. (1986). Real Variable Methods in Harmonic Analysis. Academic, Press, San Diego.

Trudinger, N. S. (1967). On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. J. Math. Mech. 17, 473-483.

Wheeden, R.; Zygmund, A. (1977). Measure and Integral. Marcel Dekker, New York.

Wiener, N. (1939). The ergodic theorem. Duke Math. J., 5, 1-18.

Zaanen, A.C. (1983). Riesz spaces. II. North-Holland Mathematical Library, 30. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, xi+720 s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: EKİNCİOĞLU Şeyma Elifnur
Doğum Tarihi ve Yeri	: 12.08.1993, Ankara
e-mail	: ekincioglueliflnur@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Kütahya Dumlupınar Üniversitesi	2016
Lise	Özel Başaran Lisesi	2011

Yabancı Dil 47.5