MULTİLİNEER CALDERÓN-ZYGMUND TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRALLER ÜZERİNE

İlknur ÇAKMAK

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Ekim – 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

İlknur ÇAKMAK tarafından hazırlanan "MULTİLİNEER CALDERÓN-ZYGMUND TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRALLER ÜZERİNE" adlı tez çalışması, aşağıda belirtilen jüri tarafından Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek OY BİRLİĞİ ile Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

04/10/2019

Prof. Dr. Önder UYSAL
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Bölüm Başkanı, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Danışman, Matematik Anabilim Dalı

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU,
Matematik Anabilim Dalı, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Dr. Öğrt. Üyesi Cansu KESKİN
Matematik Anabilim Dalı, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Kütahya Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %28 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

İknur ÇAKMAK

MULTİLİNEER CALDERÓN-ZYGMUND TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRALLER ÜZERİNE

İlknur ÇAKMAK
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2019
Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ÖZET

Bu tezde, Lebesgue uzaylar ve multilineer maksimal operatörler hakkında bilgi verilmiş ve uzaylarda, m-katlı Hardy-Littlewood maksimal operatörlerin sınırlılığı verilerek multilineer Calderón-Zygmund tipli singüler integral operatörlerin sınırlılığı incelenmiştir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konu ile ilgili çalışmalar ve konunun amacından bahsedilmektedir. İkinci bölümde, çalışma ile ilgili temel kavram, bazı tanım ve teoremler takdim edilmiştir. Üçüncü bölüm, multilineer Calderón-Zygmund tipli singüler integral operatörler hakkında bilgi içermektedir. Son bölümde, tez çalışmasının esasını oluşturan sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy-Littlewood maksimal operatör, Calderón-Zygmund tipli singüler operatörler, Riesz dönüşümleri.

ON MULTILINEAR CALDERÓN-ZYGMUND TYPE SINGULAR INTEGRALS

İlknur ÇAKMAK
Mathematics, M.Sc Thesis, 2019
Supervisor: Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

SUMMARY

In this thesis, information about Lebesgue spaces and multilinear maximal operators is given and the boundedness of multilinear Hardy-Littlewood maximal operators are given and the boundedness of multilinear Calderón-Zygmund type singular integral operators are studied on Lebesgue spaces. This thesis consists of four chapters. In the first chapter, studies related to the subject and the purpose of the subject are mentioned. In the second part, the basic concepts, some definitions and theorems are presented. The third section contains information on the multilinear Calderón-Zygmund type singular integral operators. In the last section, the conclusions that constitute the basis of the thesis are given.

Key Words: Hardy-Littlewood maximal operator, Calderón-Zygmund type singular integral operators, Riesz transforms.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her safhasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU'na ve desteğini hep yanımda hissettiğim aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi arz ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	: n – boyutlu Öklid uzayı
$\mathcal{S}$	: Schwartz Uzayı
$L_p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue Uzayı
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı yuvar
$Q(x,r)$	: Merkezi x ve kenar uzunluğu r kenarları eksenlere paralel küp
L^1_{loc}	: Birinci mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{M}$	: Maksimal operatör
RH_∞	: Ağırlık sınıfı
A_p	: Muckenhoupt sınıfı
$\hat{f}$	: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$f * k$	: Konvolüsyon çarpım
R_j	: Riesz dönüşümü (operatörü)
K_j	: Çekirdek
$L_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$’de lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\operatorname{supp} u$	: u nun desteği
$\chi_h(x)$	: Karakteristik fonksiyon
τ_ρ	: Genişleme operatörü
$\|f\|_p$	: f fonksiyonunun L^p normu

1. GİRİŞ

Bu tezde, multilineer Calderón-Zygmund tipli singüler integral operatörler çalışılmıştır. Yani, bu operatörlerin Lebesgue uzaylarında sınırlılıkları takdim edilmiştir. Bu operatörler konvolüsyon tipli singüler integral operatörler olup Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıkları, Hardy-Littlewood maksimal operatörlerin sınırlılıkları ile ilgili sonuçlar kullanılarak gösterilmektedir. Bu nedenle önce multilineer Hardy-Littlewod maksimal operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıkları incelenmiş, daha sonra bu uzaylarda tezin esasını oluşturan multilineer Calderón-Zygmund tipli singüler integral operatörlerin sınırlılık sonuçları verilmiştir.

Calderón-Zygmund tipli singüler integral operatörler, matematik analiz, fonksiyonel analiz ve Harmonik analizde önemli bir yere sahiptir. Çünkü bu tip konvolüsyon tipli singüler integraller çalışılırken önemli rol oynamaktadır.

Singüler integral operatörler, başlangıçta Mihlin, Calderon ve Zygmund'un çalısmaları olmak üzere son altmış yıl içerisinde oldukça gelişmiştir. Harmonik analizin önemli konuları arasında yer alan konvolüsyon tipli singüler integral operatörler, kısmi türevli denklemler teorisinde, analitik fonksiyonlar teorisinde, Fourier analizde, matematiksel fizik ve matematiğin diğer alanlarında pek çok uygulamaları olan oldukça güncel bir konudur. Singüler integral operatörlerin ağırlıklı Lebesgue uzayında sınırlılığı son yıllarda önemli bir inceleme alanı olmuştur. Bu gün pek çok matematikçi, örneğin, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, C.Fefferman, R.R.Coifman, K.F Anderson, D.S Kuztz, S. Samko, V. Burenkov, V. Kokilashvili, V.Guliyev, A. Meskhi, Y.Ding, S.Z. Lu gibi matematiğin önemli isimleri bu alanda çalışmış ve pek çok problemin çözümü için önemli sonuçlar elde etmiştir. Calderon Zygmund tipli operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarında sınırlılığından elde edilen sonuçlar analizin bu ve diğer alanlarında kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin regülerlik problemlerinin araştırılmasında uygulanmaktadır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. X bir küme olsun. Eğer X kümesiin alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

i. $X \in \mathcal{A}$
ii. $\forall\, E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$
iii. $k = 1,2,\dots,n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine "Her $n \in N$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$" şartı sağlarsa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma -$cebiri adı verilir.

Tanım 2.1.2 X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma -$cebiri olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A} -$ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.1.1. $(X,\mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $\mu: A \subseteq X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer μ fonksiyonu

i. $\mu(\emptyset) = 0$

ii. Her $A \in \mathcal{A}$ için $0 \leq \mu(A) \leq \infty$

iii. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu durumda μ fonksiyonuna X üzerinde bir ölçü denir. $(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlüsüne ise ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.3. $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}(\,]\alpha,+\infty[\,) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlar ailesi $M(X,\mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. $X \neq \emptyset$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için $d: X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

i. $d(x,y) \geq 0,$
ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

iii. $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{d}(\mathrm{y}, \mathrm{x})$,
iv. $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + \mathrm{d}(\mathrm{z}, \mathrm{y})$

özelliklerini sağlarsa bu durumda d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine ise metrik uzay adı verilir.

Tanım 2.1.5. X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ ve $\alpha \in F$ skaleri için $\|\cdot\| : \mathrm{X} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ fonksiyonu,

i. $\|\mathrm{x}\| \geq 0$,
ii. $\|\mathrm{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow \mathrm{x} = 0$,
iii. $\|\mathrm{ax}\| = |\mathrm{a}|\|\mathrm{x}\|$,
iv. $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu durumda $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm denir. $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay adı verilir.

Tanım 2.1.6. $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu bir lineer uzay olsun. Eğer X uzayı $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$ norm metriğine göre tam ise X normlu uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.7. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 1.1.8. Eğer T operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu operatöre lineer operatör denir:

i. T nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzayı olup $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.
ii. $\forall x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

dir.

Tanım 2.1.9. $T : X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm ve X ve Y, K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$T(x + y) \leq T(x) + T(y)$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

sağlanıyorsa T ye alt lineer operatör denir.

Tanım 2.1.10. X ve Y normlu uzay ve $D(T) \subset X$ için, $T: D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A\|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

şeklinde g.österilir.

Tanım 2.1.11. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T: D(T) \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.1.12. X ve Y normlu uzay ve $D(T) \subset X$ için, $T: D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.1.13. Bir f fonksiyonunun desteği$f(x) \neq 0$ özelliğini sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve $\text{supp f} = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır.

Tanım 2.1.14. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.15. $f(x)$ ve$g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir fonksiyonları olsunlar. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) \, dy$$

integraline f ile g nin konvolüsyonu denir ve $f * g$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. $T : L \to L'$ lineer operatör olsun. T altında L' nün özdeş elemanına dönüşen elemanların cümlesine, T nin sıfır uzayı veya çekirdeği denir ve $Çek\ T$ ile gösterilir. Yani

$$Çek\ T = \{x \in L : T(X) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')$$

dir.

Tanım 2.1.17. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ için

$$L_p = \left\{ f \in M(X, \mathcal{A}) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p- inci mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ \underset{x \in X}{\text{ess sup}} |f(x)| & , p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.18. Bir $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n −lisine katlı-indis denir. Burada $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ dir. Benzer şekilde, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$$

operatörü $|\alpha|$ mertebeden bir diferansiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,\dots,0)} f = f$ dir. Bir boyutlu durumda $D^\alpha, \frac{d}{dx}$ e indirgenir.

Tanım 2.1.19. $\mathbb{R}^n$ uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı-indisleri için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwartz uzayı denir. $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

ve

$$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

dir. Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise bu durumda f sınırlıdır, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\hat{f}(x) \in \mathcal{S}$ dir.

Teorem 2.1.20. (**Minkowski Eşitsizliği**) $f, g \in L^p(X, \mu)$ olsun. $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|f + g\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}$$

dir.

Teorem 2.1.21. (Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$, $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer

$f \in L^p(X)$ ve $g \in L^{p'}(X)$ ise bu durumda $fg \in L^1(X)$ ve

$$\|fg\|_{L^1(X)} \leq \|f\|_{L^p(X)} + \|g\|_{L^{p'}(X)}$$

dir.

Tanım 2.1.22. $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere

$$T : \; L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \leq A \, \|f\|_p$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne "(p, q) tipindendir" denir. μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall \alpha > 0$ için

$$\mu\{x : \; |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A\|f\|_p}{\alpha}\right)^q \; , q < \infty$$

olacak biçimde α ve$f$ den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir.

Tanım 2.1.23. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olsun Bu durumda f fonksiyonunun maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,y)} |f(y)| dy$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.24. $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda $R_j f$ Riesz dönüşümü

$$\left(R_j f\right)(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y|>\varepsilon} f(x - y) \frac{|y_j|}{|y|^{n+1}} dy, \qquad j = 1,2, \dots, n$$

olarak tanımlanır. Eğer

$$K_j(x) = \Omega_j(x)|x|^{-n}, \qquad \left(\Omega_j(x) = c_n x_j |x|^{-1}\right)$$

ise bu durumda $K_j(x)$ e Riesz çekirdeği denir. Bu durumda

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

dir. O halde $R_j f = f * K_j$ konvolüsyon tipli bir singüler integral operatördür.

Tanım 2.1.25. (Calderón-Zygmund Teoremi) K çekirdeği $\mathbb{R}^n - \{0\}$ üzerinde lokal integrallenebilir ve $\mathbb{R}^n$ de bir parçalı dağılımlı olsun ve $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left|\widehat{K}(\xi)\right| \leq A$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(y)| dx \leq B$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda, $1 < p < \infty$ için

$$\|K * f\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

ve

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K * f(x) > \lambda|\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

dir.

Tanım 2.1.26. $\mathbb{R}^n$ uzayında negatif olmayan lokal integrallenebilir w fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu adı verilir.

Tanım 2.1.27. $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir $B(x,r)$ yuvarı için

$$[w]_{A_p} = sup_B [w]_{A_p(B)} = sup_B \frac{1}{|B|} \left(\int_B w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty$$

ise w ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfına aittir denir.

2.2. Singüler İntegral Operatörler

Singüler integral operatörler, harmonik analiz, fonksiyonlar teorisi ve kısmi diferensiyel denklemlerde önemli rol oynamaktadır. Genel olarak singüler integraller $f \in S$ olmak üzere,

$$(Tf)(x) = (K * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy$$

şeklinde tanımlanır. Tf, f fonksiyonunun konvolüsyon çarpımı olarak yazılabildiğinden bu operatörler konvolüsyon tipli singüler integraller olarak adlandırılır. Burada $K(x-y)$, Tf singüler integral operatörün çekirdeğidir.

2.2.1. Riesz dönüşümleri

Riesz dönüşümleri, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında en basit $n-$boyutlu singüler integral operatörlerdir. Riesz dönüşümleri, singüler integral teorisinde ve potansiyel teoride çok önemli yer tutmaktadır. Riesz dönüşümleri, konjüge harmonik fonksiyonları ile yakından ilgilidir. Ayrıca Riesz dönüşümlerinin Fourier dönüşümleri yardımıyla birçok kısmi diferensiyel operatörler ile bağlantılıdır. Örneğin, eğer $R_j f$, $(j = 1, \dots, n)$, f fonksiyonunun Riesz dönüşümü ve Δf Laplasyeni ise bu durumda

$$\left(\widehat{\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x_j \vartheta x_k}}\right)(x) = -\left(\widehat{R_j R_k \Delta f}\right)$$

dır. Riesz dönüşümleri

$$(R_j f)(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{\varepsilon \le |y|} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} f(\xi - x)dx, \quad j = 1, \dots, n$$

şeklinde tanımlanan konvolüsyon tipli operatördür, burada $c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ dir. Bu integral operatörün çekirdeği $K_j = \frac{\Omega}{|x|^n}$ olmak üzere $\Omega_j = \frac{x_j}{|x|}$ dir. Burada $\Omega_j(x)$ sıfırıncı mertebeden homojen bir fonksiyondur. Yani $\lambda > 0$ olmak üzere $\Omega_j(\lambda x) = \Omega_j(x)$, dir. Dolayısıyla $K_j(x)$ çekirdeği, $x = 0$ noktasında n. mertebeden singülerliğe sahiptir. Kısaca Riesz dönüşümü bir singüler integraldir. Bu nedenle singüler integral teorisinin tüm önermeleri Riesz dönüşümleri içinde geçerlidir.

2.2.2. Maksimal integral operatörler

M, $L^p(X,\mu)$ üzerinde tanımlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda, M^* maksimal operatör

$$M^*f(x) = \sup|Mf(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.1. $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında orijin merkezli r yarıçaplı yuvar ve $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal operatör

$$Mf(x) = sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır (Grafakos, 2008b).

2.3. Maksimal Fonksiyonlar

f, $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ uzayında hemen her yerde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Temel Lebesgue Teoremine göre

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, dy$$

eşitliği her x için sağlanır, burada

$$B(x,y) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır. Yukarıdaki ifadede limit yerine supremum alınırsa ve f yerine |f| yazılırsa bu durumda f nin maksimal fonksiyonu tanımlanmış olur. Şimdi f nin maksimal fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 2.3.1: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

olarak tanımlanır.

2.4. Calderón-Zygmund Tipli Operatörler

Tanım 2.4.1: $K(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ çekirdeği,

$$|K(x)| \le C|x|^{-n}, \qquad \forall\, x \ne 0$$

$$\int_{r\leq|x|\leq R} K(x)dx = 0, \quad \forall\, 0 < r < R < \infty$$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y-K(x)|\ dx \leq C, \qquad \forall y \neq 0$$

özelliklerini sağlıyorsa K ye Calderón-Zygmund çekirdeği denir, burada, C sabit sayısı x ve y den bağımsızdır.

Tanım 2.4.2: K, Calderón-Zygmund çekirdeği olmak üzere, $\varepsilon > 0, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p < \infty$ için

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$ dir, burada A_p, ε ve f den bağımsızdır.

ii. Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\epsilon\to 0} T_\varepsilon f$ limiti L^p normunun olması durumunda vardır. Bu da,

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy$$

şeklinde tanımlı bir T operatörünün varlığını gerektirir.

iii. $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$

Burada T lineer operatörü Calderón–Zygmund singuler integral operatörü olarak tanımlanır.

2.4.1. Multilineer Calderón-Zygmund operatörler

T operatörü

$$T : S(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times S(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$$

Schwartz uzayında ve parçalı dağılımlı uzayında tanımlı m −katlı multilineer operatör olsun. T operatörü $1 < q_j < \infty$ için $L^{q_1} \times \ldots\ldots \times L^{q_m} \to L^q$ uzayında tanımlı sınırlı multilineer operatör ise bu durumda T, m-lineer Calderón-Zygmund operatördür burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}$ dir. Ayrıca, eğer $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$ uzayında $x = y_1 = \cdots = y_m$ köşegen üzerinden tanımlanmış her $x \notin \bigcap_{j=1}^m \text{supp} f_j$ için

$$|K(y_0, y_1 \ldots\ldots, y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^{m}|y_k - y_l|\right)^{mn}}, \tag{2.1}$$

ve her $\left|y_j - y_j'\right| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq k \leq m} \left|y_j - y_k\right|$ iken $\varepsilon > 0,\ \forall\, 0 \leq j \leq m$ için

$$\left|K\left(y_0, \ldots, y_j, \ldots y_m\right) - K\left(y'_0, \ldots y_j', \ldots y'_m\right)\right| \leq \frac{A\left|y_j - y_j'\right|^{\varepsilon}}{\left(\sum_{k,l=0}^{m}|y_k - y_l|\right)^{mn+\varepsilon}}, \tag{2.2}$$

özelliklerini sağlayan bir K fonksiyonu varsa bu durumda T operatörü,

$$T(f_1, \ldots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, \ldots, y_m) f_1(y_1) \ldots f_m(y_m) dy_1 \ldots dy_m$$

m-lineer Calderón-Zygmund operatördür.

Eğer $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$ ise bu durumda T m-lineer Calderón-Zygmund operatör,

$\forall j = 1, \ldots\ldots, m$ için $1 < r_j < \infty$ olduğunda

$$T: L^{r_1} \times \ldots \times L^{r_m} \to L^{r} \tag{2.3}$$

ve $\forall j = 1, \ldots\ldots, m$ ve en az bir $r_j = 1$ için $1 < r_j < \infty$ olduğunda,

$$T: L^{r_1} \times \ldots \times L^{r_m} \to L^{r,\infty}, \tag{2.4.}$$

özelliklerini sağlar. Özellikle,

$$T: L^1 \times \ldots \times L^1 \to L^{1/m,\infty}, \tag{2.5}$$

dir (Grafakos, 2002).

2.5. Ağırlık Fonksiyonları

Ağırlık, negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyondur ve w ile gösterilir. $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'}dy\right)^{p-1} < \infty$$

ise w ağırlık fonksiyonu A_p sınıfına aittir. $P = 1$ için

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)dy \leq C \inf_Q w,$$

özelliğini sağlayan C sabit sayısı varsa bu durumda $w \in A_1$ dir denir. C sabit sayısının infimumu w nin A_1 sabiti olarak adlandırılır.

A_p sınıfları p ye göre artan olduğundan $p = \infty$ olduğunda A_∞ sınıfları $A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p$ ile tanımlanır. $W \in A_\infty$ nin A_∞ sabiti, $w \in A_\infty$ olacak şekilde A_p sabitlerinin infimumunun en küçüğüdür. Bu durumda, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonun

$$\mathrm{Mf(x)} = sup_{Q\ni x} \frac{1}{Q} \int_Q |f(y)| dy$$

$M: L^p(w) \to L^p(w)$ olması için gerek ve yeter şart $w \in A_p$ olmasıdır (Muckenhoupt, 1972). Ayrıca, Muckenhoupt maksimal fonksiyonlar için zayıf tipli eşitsizliklerin karakterizasyonunu, yani,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(y) dy\right)\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy\right)^{p-1} < \infty \tag{2.6}$$

olması için gerek ve yeter şartın $M: L^p(w) \to L^{p,\infty}(n)$ olduğunu ispatlamıştır.

$I = [a, b]$ olsun ve $I^+ = [b. 2b - a]$ alalım. Eğer

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx\right)\left(\frac{1}{|I|} \int_{I^+} w(x)^{-1/(p-1)} dx\right)^{p-1} < \infty$$

ise $w \in A_p^+$ dır denir. Eğer $w \in A_p^+$ ise bu durumda herhangi bir I aralığı için

$$w(I) \leq cw(I^+) \; . \tag{2.7}$$

eşitsizliğini sağlayan bir c sabit sayısı vardır.

2.6. Sharp Maksimal Operatörler

$\Delta > 0$ için M_δ maksimal fonksiyon,

$$M_\delta f(x) = M(|f|^\delta)^{1/\delta}(x) = \left(\sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta}.$$

ile tanımlanır. Ayrıca, Fefferman ve Stein'in $M^\#$ sharp maksimal fonksiyonu

$$M^\#(f)(x) = \sup_{Q\ni x} \inf_c \frac{1}{|Q|} \int Q|f(y) - c| dy \approx \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|} \int Q\left|f(y) - f_Q\right| dy$$

şeklinde tanımlanır, burada) $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$, Q üzerinde f fonksiyonunun ortalamasını gösterir (Fefferman ve Stein, 1972).

$p > 0, \delta < \infty$ ve $w \in A_{\infty}$ olsun. Bu durumda, eşitsizliğin sol tarafını sonlu yapan f fonksiyonları için,

$$\int_{\mathbb{R}^{\propto}} \left(M_{\delta}f(x)\right)^{p} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^{\propto}} \left(M_{\delta}^{\#}f(x)\right)^{p} w(x)dx \,, \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ (w ağırlığının, A_{∞} sabitine bağlı) sabit sayısı vardır.

Benzer şekilde, eğer $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere çift ise, bu durumda, eşitsizliğin sol tarafını sonlu yapan f fonksiyonları için,

$$\sup_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)\, w(\{y \in \mathbb{R}^{n}: M_{\delta}f(y) > \lambda\}) \leq c\sup_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) w\left(\left\{y \in \mathbb{R}^{n}: M_{\delta}^{\#}f(y) > \lambda\right\}\right) \tag{2.9}$$

eşitsizliğini sağlayan bir c (c, w ağırlığının A_{∞} sabitine ve φ çift olma şartına bağlı) sabit sayısı vardır.

2.7. Orlicz Uzayları ve Normalleştirilmiş Ölçümler

$\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir Young fonksiyonu olsun. Yani, Φ fonksiyonu $\Phi(0) = 0$ ve

$t \rightarrow \infty$ iken $\Phi(t) \rightarrow \infty$ özelliklerini sağlayan sürekli, konveks, artan fonksiyondur. μ ölçüne göre $L_{\Phi}(\mu)$ Orlicz uzayı, $\lambda > 0$ için

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu < \infty$$

özelliğini sağlayan ölçülebilir f fonksiyonların kümesidir.

L_{Φ} uzayı

$$\|F\|_{\Phi} = \|f\|_{L_{\Phi}} = \inf\left\{\lambda > 0: \int_{\mathbb{R}^{\propto}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\}$$

Luxemburg normuyla tanımlı bir Banach uzayıdır.

Q kübü üzerinde f fonksiyonunun Φ-ortalaması Q kübünün normalleştirilmiş ölçüsü olarak tanımlanır ve $\|f\|_{\Phi,Q}$ ile gösterilir .Yani

$$\|F\|_{\Phi,Q} = \inf\left\{\lambda > 0: \frac{1}{|Q|} \int_{Q} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}$$

dir. Dikkat edilmelidir ki, $\|f\|_{\Phi,Q} > 1$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{Q}\int_{Q}\Phi(|f(x)|dx > 1$$

olmasıdır. Ayrıca, Φ_1 ve Φ_2, $t \geq t_0 > 0$ için $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(t)$ özelliğini sağlayan iki Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{\Phi_1,Q} \leq c\|f\|_{\Phi_2,Q} \qquad (2.10)$$

dir. Bu eşitsizlik genelleştirilmiş Jensen eşitsizliği olarak adlandırılır. Φ Young fonksiyonuna bağlı tamamlayıcı fonksiyon,

$$\overline{\Phi}(s) = \sup_{t>0}\{st - \Phi(t)\}, \qquad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. $\overline{\Phi}(s)$ fonksiyonu da bir Young fonksiyonudur ve Φ fonksiyonunun tümleyeni denir. $\overline{\Phi}$ de bir Young fonksiyonudur ve tanımladığı $\overline{\Phi}$-ortalamaları genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği yardımıyla L_Φ-ortalamasına bağlıdır. Yani,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{\Phi,Q}\,\|g\|_{\overline{\Phi},Q}, \qquad (2.12)$$

dir.

Young fonksiyonları,

$$\Phi(t) = t(1 + \log^+ t) \qquad \text{ve} \qquad \psi(t) = e^t - 1$$

sırasıyla L(logL) ve expL klasik Zygmund uzaylarıdır. Bu uzaylara karşılık gelen ortalamalar,

$$\|.\|_{\Phi,Q} = \|.\|_{L(logL),Q} \qquad \text{ve} \qquad \|.\|_{\psi,Q} = \|.\|_{expL,Q}$$

ile gösterilir. Φ Young fonksiyonu alt çarpımsaldır. Yani her $s, t > 0$ için

$$\Phi(st) \leq \Phi(s)\Phi(t)$$

dır.

3. MULTİLİNEER CALDERON-ZYGMUND TİPLİ OPERATÖRLER

Tanım 3.1. $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ olsun. $\mathcal{M}$ maksimal oparatör

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_j)|\, d_{y_i}$$

ile tanımlanır, burada supremum x i içeren Q kübü üzerinden alınmaktadır. Her çalışmada altlineer operatör olmasına rağmen, $\mathcal{M}$ ye multilineer maksimal fonksiyon diyeceğiz. Şimdi, multilineer Calderón-Zygmund operatörler ve multilineer maksimum ile ilgili temel teoremi verelim.

Teorem 3.2. T bir m-lineer Calderón-Zygmund operatör ve $\delta < \frac{1}{m}$ olacak şekilde $\delta > 0$ olsun. Bu durumda $1 \le q_j < \infty$ olmak üzere $L^{q_j}(R^n)$ uzayının herhangi bir çarpımındaki her $\vec{f}$ için

$$\mathcal{M}_\delta^{\#}(T(\vec{f}))(x) \le C\mathcal{M}(\vec{f})(x), \tag{3.1}$$

dir.

(3.1) eşitsizliğinden

$$\mathcal{M}_\delta^{\#}\left(T(\vec{f})\right)(x) \le C \prod_{j=1}^{m} \mathcal{M}_{f_j}(x) \tag{3.2}$$

olduğu açıktır.

3.1. m-lineer Maksimal Fonksiyonlar için Ağırlıklı Sınırlılık

Bu bölümde, ağırlıklı uzaylarda $\mathcal{M}$ maksimal fonksiyonun sınırlılık özellikleri incelenecektir.

Teorem 3.1.1. $1 \le p_j < \infty$ $j = 1,2, \ldots, m$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \frac{1}{p_m}$ olsun. ν ve w_j iki ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda herhangi bir $\vec{f}$ için

$$\left\|\mathcal{M}(\vec{f})\right\|_{L^{p,\infty}(v)} \le C \prod_{j=1}^{m} \left\|f_j\right\|_{L^{p_j}(w_j)} \tag{3.3}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)^{1/p}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1-p_j'}\right)^{1/p_j'}<\infty \tag{3.4}$$

olmasıdır, burada $p_j = 1$ için $\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1-p_j'}\right)^{1/p_j'}$ ifadesi $\left(\inf_{Q} w_j\right)^{-1}$ ifadesine denktir.

Tanım 3.1.2. $p_1, p_2, \dots, p_m$, m üsleri için $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}$ ile verilen sayı p ve $\vec{P}=(p_1, p_2, \dots, p_m)$ vektörü için $\vec{P}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3 $1 \le p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$ ve $\vec{w}=(w_1, w_2, \dots, w_m)$ olsun.

$$v_{\vec{w}}=\prod_{j=1}^{m} w_j^{p/p_j}$$

olarak alalım. Eğer

$$\sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_{\vec{w}}\right)^{1/p}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1-p'_j}\right)^{1/p'_j}<\infty \tag{3.5}$$

ise, bu drurumda $\vec{w}$, $A_{\vec{P}}$ şartını sağlar denir. $P_j = 1$ için $\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1-p_j'}\right)^{1/p_j'}$ ifadesi $\left(\inf_{Q} w_j\right)^{-1}$ ifadesine denktir.

(3.5) eşitsizliği multilineer $A_{\vec{P}}$ şartı olarak bilinmektedir. Her bir $\vec{P}$ *için* $A'_{(1,\dots,1)}$, $A_{\vec{P}}$ sınıfına aittir, ancak $A_{\vec{P}}$ artan değildir. Eğer her w_j, A_{p_j} ye ait ise bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\sup_{Q}\left(\frac{1}{Q}\int_Q v_{\vec{w}}\right)^{1/p}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1-p'_j}\right)^{1/p'_j}$$

$$\le \sup_{Q}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j\right)^{1/p_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1-P'_j}\right)^{1/p'_j} < \infty$$

ve böylece

$$\prod_{j=1}^{m} A_{p_j} \subset A_{\vec{P}}$$

elde edilir. Her j için $w \in A_{\vec{P}}$ olması $w_j \in L^1_{loc}$ olduğunu göstermez. Ayrıca, dikkat edilmelidir ki, tekrar Hölder eşitsizliği kullanıldığında,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_{\vec{w}}\right)^{1/mp} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_{\vec{w}}^{-\frac{1}{mp-1}}\right)^{(mp-1)/mp}$$

$$\leq \sup_Q \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j\right)^{1/mp_j} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{-\frac{1}{p_{j-1}}}\right)^{p_j-1/mp_j} < \infty$$

olur, burada $m - 1/p = \sum (p_j - 1)/p_j$ kullanılmıştır. Buradan, $v_{\vec{w}} \in A_{mp}$ sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.4. $(\vec{w}) = (w_1, \dots, w_m$ ve $1 \leq p_1, \dots, p_m < \infty$ olsun. Bu durumda $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} w_j^{1-p_j'} \in A_{mp'_j} & j = 1,2,\dots,m \\ v_{\vec{w}} \in A_{mp} & \end{cases} \tag{3.6}$$

olmasıdır, burada $p_j = 1$ için $w_j^{1-p_j'} \in A_{mp'_j}$ ifadesi $w_j^{1/m} \in A_1$ ifadesine denktir.

Teorem 3.1.5. $1 < p_j < \infty$, $j = 1,2,\dots,m$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \frac{1}{p_m}$ olsun. Bu durumda her $\vec{f}$ için

$$\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^p(v_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)} \tag{3.7}$$

Eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olmasıdır.

3.2.Multilineer Calderón-Zygmund Operatörler İçin Ağırlıklı Sınırlılıklar

m-lineer Calderón-Zygmund operatörleri için uygun olan m-lineer $A_{\vec{P}}$ sınıfları yukarıda incelenmiştir. İlk olarak Teorem 3.2 kullanılarak, Coifman-Fefferman Teoremi m-lineer duruma genelleştirilecektir.

Sonuç 3.2.1. T, m-lineer Calderon-Zygmund operatör, $w \in A_\infty$ ve $p > 0$ olsun. Bu durumda kompakt destekli $\vec{f}$ fonksiyonları için

$$\|T(\vec{f})\|_{L^p(w)} \leq C \|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^p(w)}$$

ve

$$\|T(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C\,\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(w)}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $C > 0$ (w nin A_∞ sabitine bağlı) sabit sayısı vardır.

Sonuç 3.2.2. T , m-lineer Calderón-Zygmund operatör, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \frac{1}{p_m}$ ve $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olsun.

(i) Eğer $1 < p_j < \infty$ ve $j = 1,2, \ldots, m$ ise bu durumda

$$\|T(\vec{f})\|_{L^p(v_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)} \tag{3.10}$$

dir.

(ii) Eğer $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1,2, \ldots, m$ ve en az bir $p_j = 1$ ise, bu durumda

$$\|T(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(v_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)} \tag{3.11}$$

dir.

M, (3.7) ifadesindeki $\mathcal{M}$ nin m-katlı çarpımı ile yer değiştirilemez. Böylece, $T(\vec{f})$ nin $\prod_{j=1}^{m} M_{f_j}$ ile kontrol edilir. $A_{\vec{P}}$ sınıfları bazı multilineer singuler integral operatörlerin sınırlılığı ile karakterize edilebilir.

Tanım 3.2.3. $i = 1, \ldots, m$ için m-lineer i. mertebeden Riesz dönüşümü,

$$R_i(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(R^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(x_i - (y_j)_i\right)}{\left(\sum_{j=1}^{m} |x - y_j|^2\right)^{\frac{nm+1}{2}}} f_1(y_1) \ldots f_m(y_m) d_{y_1} \ldots d_{y_m}$$

ile tanımlanır, burada $(y_j)_i$, y_j nin i. koordinatını gösterir.

Teorem 3.2.4. Eğer her m-lineer $R_i(\vec{f})$ Riesz dönüşümleri için (3.10) ya da (3.11) eşitsizlikleri sağlanırsa bu durumda $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ dir.

3.3. Zayıf Tipli Eşitsizlikler

Multilineer operatör, Bölüm 3.2 deki ağırlıklı sınırlılıkları elde etmek için çok önemli olan $\prod_{j=1}^{m} Mf_j$ ile tanımlanır. Bununla birlikte, bu bölümde multilineer operatörün (Lacey, 1997) de karışık zayıf tip eşitsizlikler ile elde edilen sharp ağırlıklı zayıf tip sınırlılıkları sağladığını göstereceğiz. Klasik Fetferman-Stein eşitsizliğinden

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq C\,\|f\|_{L^p(Mw)} \quad (1 < p < \infty)$$

sonucu elde edilir. Eğer $\forall\, j$ için $p_j > 1$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots \frac{1}{p_m}$ ise bu durumda

$$\left\|\prod_{j=1}^{m} M_{f_j}\right\|_{L_p(v_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\|f_j\right\|_{L^{p_j}\left(M_{w_j}\right)} \tag{3.12}$$

dir. Ancak en az bir $p_j = 1$ ise bu durumda (3.12) nin zayıf tipli analoğu keyfi w_j ağırlığı için doğru değildir. Diger taraftan tüm $p_j = 1$ ve $w_j \in A_1$ için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. Her $i = 1,2,\ldots,m$ için $w_j \in A_1$ bir ağırlık olsun ve $v = \left(\prod_{j=1}^{m} w_j\right)^{1/m}$ olarak alalım. Bu durumda

$$\left\|\prod_{j=1}^{m} Mf_j\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(v)} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)} \tag{3.13}$$

dir.

Bu teoremi ispatlamak için Cruz-Uribe, Martell ve Perez tarafından ispatlanan karışık zayıf tipli eşitsizlikler ile ilgili sonuçları kullanacağız (Cruz-Uribe vd., 2005).

Son olarak aşağıdaki önerme, $\prod_{j=1}^{m} Mf_j$ yerine $\mathcal{M}(\vec{f})$ yazarak (3.12) ifadesinin zayıf tipli analoğunun elde edilebileceğini göstermektedir.

Önerme 3.3.2. $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \frac{1}{p_m}$ olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda

$$\left\|\mathcal{M}(\vec{f})\right\|_{L^{p,\infty}(v_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\|f_j\right\|_{L^{p_j}(Mw_j)} \tag{3.14}$$

dir.

4. TEOREMLERİN İSPATLARI

Teorem 3.2 nin İspatı. Teoremin ispatında (Grafakos ve Torres, 2002 Lerner, 2004; Pérez ve Torres, 2003) in çalışmalarından faydalanılmıştır. Bir x noktası ve x noktasını içeren bir Q kübü alalım. Bilindiği üzere (3.1) ifadesini elde etmek için $0 < \delta < \frac{1}{m}$ ve c_Q sabit olmak üzere

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left| |T(\vec{f})(z)|^{\delta} - |c_Q|^{\delta} \right| dz\right)^{1/\delta} \leq C\mathcal{M}(\vec{f})(x) \tag{4.1}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir. $||\alpha|^r - |\beta|^r| \leq |\alpha - \beta|^r$, $0 < r < 1$ eşitsizliği kullanılarak

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(\vec{f})(z) - c_Q|^{\delta} dz\right)^{1/\delta} \leq C\mathcal{M}(\vec{f})(x) \tag{4.2}$$

olduğunu göreceğiz.

$f_j = f_j^0 + f_j^{\infty}$ olsun. Burada $f_j^0 = f_j\chi_{Q^*}$, $j = 1, \dots, m, Q^* = 3Q$ olsun. Bu durumda

$$\prod_{j=1}^{m} f_j(y_j) = \prod_{j=1}^{m}\left(f_j^0(y_j) + f_j^{\infty}(y_j)\right)$$

$$= \sum_{\alpha_{1,\dots,}\alpha_m \in\{0,\infty\}} f_1^{\alpha_1}(y_1) \ \dots. \ f_m^{\alpha_m}(y_m)$$

$$= \prod_{j=1}^{m} f_j^0 + {\sum}' f_1^{\alpha_1}(y_1) \ \dots \ f_m^{\alpha_m}(y_m)$$

dir, burada $\sum'$ nin her bir terimi en az bir tane $\alpha_j \neq 0$ içerir. Bu durumda

$$T(\vec{f})(z) = T(\vec{f}^0)(z) + {\sum}' T\left(f_1^{\alpha_1} \ \dots \ f_m^{\alpha_m}\right)(z) \tag{4.3}$$

yazılabilir. $p = \delta$ ve $q = \frac{1}{m}$ için (2.16) ifadesinin

$$T\left(\vec{f}^0(z)\right) = T(f_1^0, \dots, f_m^0)(z)$$

terimine Kolmogorov eşitsizliği uygulanarak

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|T\left(\vec{f}^0(z)\right)\right|^{\delta} dz\right)^{1/\delta} \leq C_{m,\delta}\left\|T\left((\vec{f}^0 z)\right)\right\|_{L^{1/m,\infty}\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)}$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} |f_j(z)|\, dz$$

$$\leq C\mathcal{M}(\vec{f})(x)$$

elde edilir, çünkü T: $L^1 \times \ldots \times L^1 \rightarrow L^{1/m}$ dir.

(4.3) ifadesinin diğer terimlerini incelemek için

$$c = \sum{}' T\left(f_1^{\alpha_1}, \ldots, f_m^{\alpha_m}\right)(x)$$

olarak alalım. Herhangi bir $z \in Q$ için,

$$\Sigma' \left|T\left(f_1^{\alpha_1}, \ldots, f_m^{\alpha_m}\right)(z) - T\left(f_1^{\alpha_1}, \ldots, f_m^{\alpha_m}\right)(x)\right| \leq C\mathcal{M}(\vec{f})(x) \qquad (4.4)$$

olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak $\alpha_{1=\cdots=}\alpha_{m=}\infty$ için $T(\vec{f}^{\infty}) = T(f_1^{\infty}, \ldots, f_m^{\infty})$ olarak tanımlanır. (2.2) düzgünlük şartı ile, her $z \in Q$ için,

$$\left|T(\vec{f}^{\infty})(z) - T(\vec{f}^{\infty})(x)\right| \leq C \int_{\left(R^n/3Q\right)^m} \frac{|x-z|^{\varepsilon}}{(|z-y_1| + \cdots. + |z-y_m|)^{nm+\varepsilon}} \prod_{i=1}^{m} |f_i(y_i)| d\vec{y}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(3^{k+1}Q)^m / (3^k Q)^m} \frac{|x-z|^{\varepsilon}}{(|z-y_1| + \cdots. + |z-y_m|)^{nm+\varepsilon}} \prod_{i=1}^{m} |f_i(y_i)| d\vec{y}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{\left(3^k |Q|^{1/n}\right)^{nm+\varepsilon}} \int_{(3^{k+1}Q)^m} \prod_{i=1}^{m} |f_i(y_i)| d\vec{y}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3^{k\varepsilon})} \prod_{i=1}^{m} |f_i|_{3^{k+1}Q} \leq C\mathcal{M}(\vec{f})(x)$$

elde edilir. (Burada $E^m = E \times \ldots \times E$ ve $d\vec{y} = (dy_1 \ldots . dy_m)$ notasyonları kullanılmıştır).

$\{j_1, \ldots, j_\ell\} \subset \{1, \ldots, m\}$ ve $1 \leq \ell < m$ için $\alpha_{j_1} = \alpha \ldots = \alpha_{j_l} = 0$ olacak şekilde (4.4) ifadesindeki terimleri düşünelim. (2.2) yardımıyla,

$$\left|T\left(f_1^{\alpha_1},\dots,f_m^{\alpha_m}\right)(z)-T\left(f_1^{\alpha_1},\dots,f_m^{\alpha_m}\right)(x)\right|$$

$$\le \prod_{j\in\{j_1,\dots,j_\ell\}}\int_{3Q}|f_j|\,dy_j\int_{(R^n\setminus 3Q)^{m-\ell}}\frac{|x-z|^{\varepsilon}\prod_{j\notin\{j_1,\dots,j_\ell\}}|f_j|dy_j}{(|z-y_1|+\dots+|z-y_m|)^{nm+\varepsilon}}$$

$$\le \prod_{j\in\{j_1,\dots,j_\ell\}}\int_{3Q}|f_j|\,dy_j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{\left(3^k|Q|^{1/n}\right)^{nm+\varepsilon}}\int_{(3^{k+1}Q)^{m-\ell}}\prod_{j\notin\{j_1,\dots,j_l\}}|f_j|dy_j$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{\left(3^k|Q|^{1/n}\right)^{nm+\varepsilon}}\int_{(3^{k+1}Q)^m}\prod_{i=1}^{m}|f_i(y_i)|d\vec{y}$$

elde edilir. Böylece (4.4) eşitsizliğin ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.1 in İspatı. Teoremin ispat yöntemi, lineer operatörler için verilen teoremin ispatı ile benzerdir (Muckenhoupt, 1972). $\forall\, j=1,\dots,m$ için $p_j>1$ olsun. $p_j=1$ iken lineer olduğu durum ile bazı küçük değişiklikler vardır.

(3.3) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her $\vec{f}$ için

$$\left(\int_Q v\right)^{1/p}\prod_{j=1}^{m}|f_j|_Q\le C\prod_{j=1}^{m}\|f_j\chi_Q\|_{L^{p_j}(w_j)} \qquad (4.5)$$

olduğu açıktır. Burada $f_j=w_j^{-1/p_j-1}$ olarak alınırsa (3.4) elde edilir. Şimdi (3.4) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, Hölder eşitsizliği ile (4.5) elde edilir. (4.5) den

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x)\le C\prod_{j=1}^{m}M_V^c\left(|f_j|^{p_j}w_j/v\right)(x)^{1/p_j}$$

sonucu elde edilir, burada M_V^c maksimal fonksiyonun ağırlık merkezini göstermektedir. M_V^c, v ye göre (1,1) zayıf tiplidir ve zayıf uzaylar için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(v)}\le C\left\|\prod_{j=1}^{m}M_V^c(|f_j|^{p_j}w_j/v)^{1/p_j}\right\|_{L^{p,\infty}(v)}$$

$$\le C\prod_{j=1}^{m}\left\|M_V^c\left(|f_j|^{p_j}w_j/v\right)^{1/p_j}\right\|_{L^{p_j,\infty}(v)}$$

$$= C\prod_{j=1}^{m}\left\|M_V^c\left(|f_j|^{p_j}w_j/v\right)\right\|_{L^{1,\infty}(v)}^{1/p_j}$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4 ün İspatı. İlk olarak, en az bir $p_j > 1$ olduğunu düşünelim. Genelliği kaybetmeden $p_1, \dots, p_\ell = 1$, $0 \leq \ell < m$ ve $p_j > 1$ $(j = \ell + 1, \dots, m)$ olduğunu kabul edelim. $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olsun.

$j \geq \ell + 1$ olarak alalım ve

$$q_j = p\left(m - 1 + \frac{1}{p_j}\right) \quad , \qquad q_i = \frac{p_i}{p_i - 1} \cdot \frac{q_i}{p} \quad , \quad i \neq j \quad i \geq \ell + 1$$

q_j ve q_i sayılarını tanımlayalım. İlk olarak $j \geq \ell + 1$ için $w_j^{1-p_j'} \in A_{mp_j'}$ yani,

$$\left(\int_Q w_j^{-1/p_j - 1}\right)\left(\int_Q w_j^{\frac{p}{p_j q_j}} w_j\right)^{\frac{q_j p_j}{p(p_j - 1)}} \leq c|Q|^{\frac{mp_j}{p_j - 1}} \tag{4.6}$$

olduğunu gösterelim.

$$\sum_{i=\ell+1}^{m} \frac{1}{q_i} = \frac{1}{m - 1 + 1/p_j}\left(\frac{1}{p} + \sum_{\substack{i=\ell+1 \\ i\neq j}} \left(1 - 1/p_i\right)\right) = 1$$

olduğundan, Hölder eşitsizliği uygulanarak;

$$\int_Q w_j^{\frac{p}{p_j q_j}} = \int_Q \left(\prod_{i=\ell+1}^{m} w_i^{\frac{p}{p_j q_j}}\right)\left(\prod_{\substack{i=\ell+1 \\ i\neq j}}^{m} w_i^{\frac{-p}{p_i q_j}}\right)$$

$$\leq \left(\int_Q \prod_{i=\ell+1}^{m} w_i^{p/pi}\right)^{1/q_j} \prod_{\substack{i=\ell+1 \\ i\neq j}}^{m} \left(\int_Q w_i^{-1/pi - 1}\right)^{1/q_i}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten ve $A_{\vec{P}}$ şartından (4.6) kolaylıkla elde edilir. Şimdi de $v_{\vec{w}} \in A_{mp}$ olduğunu gösterelim. $j \geq \ell + 1$, $s_j = \left(m - 1/p\right)p_j'$ alalım. Bu durumda $\sum_{j=\ell+1}^{m} \frac{1}{s_j} = 1$ olur. Buradan Hölder eşitsizliği ile

$$\int_Q \prod_{j=\ell+1}^m w_i^{\frac{-p}{p_i(p_m-1)}} \leq \prod_{j=\ell+1}^m \left(\int_Q w_i^{-1/(p_j-1)}\right)^{1/s_j} \tag{4.7}$$

olur. Böylece,

$$\int_Q (v_{\vec{w}})^{-\frac{1}{p_m-1}} \leq \prod_{j=1}^{l} (inf_Q w_j)^{\frac{-p}{(p_m-1)}} \prod_{j=\ell+1}^{m} \left(\int_Q w_i^{-1/(p_j-1)}\right)^{1/s_j}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik A_p şartı ile birleştirildiğinde $v_{\vec{w}} \in A_{mp}$ olduğu görülür. Şimdi $\ell \geq 0$ için $w_j^{1/m} \in A_1$ $(j = 1, \dots, l)$ olduğunu gösterelim. $1 \leq i_0 \leq \ell$ alalım. (4.7) ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\int_Q w_{i_0}^{1/m} \leq \left(\int_Q w_{i_0}^p \prod_{j=\ell+1}^m w_j^{p/p_j}\right)^{1/pm} \left(\int_Q \prod_{j=\ell+1}^m w_j^{\frac{-p}{p_j(pm-1)}}\right)^{1-1/pm}$$

$$\leq \left(\int_Q w_{i_0}^p \prod_{j=\ell+1}^m w_j^{p/p_j}\right)^{1/pm} \prod_{j=l+1}^{m} \left(\int_Q w_j^{1-p'_j}\right)^{\frac{1}{mp'_j}}$$

olur. Bu eşitsizlik $A_{\vec{P}}$ şartı ile birleştirildiğinde $w_{i_0}^{1/m} \in A_1$ elde edilir. Böylece

$\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ için (3.6) eşitsizliğini ispatlayalım. İlk olarak, herhangi bir w_j ağırlığı için

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_w^{-\frac{1}{pm-1}}\right)^{m-1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{\frac{1}{p_j(m-1)+1}}\right)^{m-1+1/p_j} \tag{4.8}$$

dir. Gerçekten, $\alpha = \frac{1}{1+pm(m-1)}$ ve $\alpha_j = \frac{1/p+m(m-1)}{1/p_j+m-1}$ olsun. Bu durumda

$\sum_{j=1}^m 1/\alpha_j = 1$ dir ve Hölder eşitsizliği ile

$$\int_Q v_{\vec{w}}^{\alpha} \leq \prod_{j=1}^m \left(\int_Q w_j^{\frac{\alpha p \alpha_j}{p_j}}\right)^{1/\alpha_j} = \prod_{j=1}^m \left(\int_Q w_j^{\frac{1}{p_j(m-1)+1}}\right)^{\alpha p\left(m-1+1/p_j\right)}$$

elde edilir. Tekrar Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_{\vec{w}}^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_{\vec{w}}^{-\frac{1}{pm-1}}\right)^{\alpha(pm-1)}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik bir önceki eşitsizlik ile birlikte (4.8) eşitsizliğini verir. Son olarak (4.8) , (3.6) ile birleştirildiğinde $\vec{w} \in A_{\vec{p}}$ olduğu elde edilir. İspatı tamamlamak için her $j = 1, \dots, m$ için $p_j = 1$ durumunu inceleyelim. $\vec{w} \in A_{(1,\dots,1)}$, yani,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\prod_{j=1}^{m} w_j\right)^{1/m}\right)^m \leq c \prod_{j=1}^{m} inf_Q w_j \tag{4.9}$$

olsun. (4.9) eşitsizliğinin $w_j^{1/m} \in A_1$ $(j = 1, \dots, m)$ ve $v_{\vec{w}} \in A_1$ olduğunu gösterdiği açıktır. Diğer taraftan, son eşitsizlik Hölder eşitsizliği ile birleştirilerek

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\prod_{j=1}^{m} w_j\right)^{1/m}\right)^m \leq c \inf_Q \left(\prod_{j=1}^{m} w_j\right)$$

$$\leq c \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\prod_{j=1}^{m} w_j\right)^{1/m^2}\right)^{m^2}$$

$$\leq c \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{1/m}\right)^m$$

$$\leq c \prod_{j=1}^{m} \inf_Q w_j$$

elde edilir. Bu sonuç, $\vec{w} \in A_{(1,..1)}$ ifadesinin $w_j^{1/m} \in A_1$ $(j = 1, .. m)$ ve $v_{\vec{w}} \in A_1$ifadesine denk olduğunu gösterir. O halde teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.5 in İspatı. **1.** $\vec{w} \in A_{\vec{p}}$ sun. Teorem 3.1.4 den her $w_j^{-\frac{1}{p_j-1}}$ ters Hölder eşitsizliğini sağlar, yani, her $1 < r \leq r_j$ ve her hangi Q kübü için

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{-\frac{r}{p_j-1}}\right)^{1/r} \leq C \frac{1}{|Q|}\int_Q w_j^{\frac{-1}{p_j-1}} \tag{4.10}$$

eşitsizliğini sağlayan $r_j > 1$ ve $C > 0$ vardır. $\xi = \min_{1 \le j \le m} r_j$ ve

$q = \max \frac{pm}{pm + \left(1 - 1/\xi\right)(p_j - 1)}$ olsun ve her j için $qp_j > 1$ alalım. Aşağıdaki noktasal eşitsizliğin geçerli olduğunu iddia edelim:

$$\mathcal{M}\left(\vec{f}\right)(x) \le C \prod_{j=1}^{m} M_{v_{\vec{w}}}^{c}\left(\left(\left|f_j\right|^{p_j}\, w_j / v_{\vec{w}}\right)^{q}\right)(x)^{1/qp_j} \ . \tag{4.11}$$

Bu durumda, teoremin ispatı Hölder eşitsizliğinden ve merkezli maksimal operatörün sınırlılığından elde edilir.

İddiayı ispatlamak için ilk olarak Hölder eşitsizliği ile

$$\int_Q |f_j| \le \int_Q \left(|f_j|^{p_j q} w_j^{q}\, v_{\vec{w}}^{\,1-q}\right)^{\frac{1}{qp_j}} \left(\int_Q \left(w_j^{q} v_{\vec{w}}^{1-q}\right)^{-\frac{1}{qp_j - 1}}\right)^{1 - \frac{1}{qp_j}} \tag{4.12}$$

elde edilir. $\gamma_j = \frac{qp_j - 1}{(1-q)(pm-1)}$ alalım. Q nun tanımı ile her j için $\gamma_j > 1$ dir. Tekrar Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\int_Q \left(w_j^{q}\, v_{\vec{w}}^{\,1-q}\right)^{-\frac{1}{qp_j - 1}} \le \left(\int_Q w_j^{-\frac{q\gamma_j{}'}{qp_j - 1}}\right)^{1/\gamma_j{}'} \left(\int_Q v_{\vec{w}}^{-\frac{1}{pm-1}}\right)^{1/\gamma_j} \tag{4.13}$$

elde edilir. Dikkat edilmelidir ki, her j için;

$$\frac{q(pj - 1)_{\gamma_j}{}'}{qp_j - 1} = \frac{q\left(p_j - 1\right)}{q\left(p_j - 1\right) - (1 - q)pm} \le \xi$$

dir. Böylece, (4.10) ile

$$\int_Q w_j^{-\frac{q\gamma_j{}'}{qp_j - 1}} = \int_Q w_j^{-\frac{1}{p_j - 1} \cdot \frac{q\left(p_j - 1\right)\gamma_j{}'}{qp_j - 1}}$$

$$\le c|Q|^{1 - \frac{q\left(p_j - 1\right)\gamma_j{}'}{qp_j - 1}} \left(\int_Q w_j^{-\frac{1}{p_j - 1}}\right)^{\frac{q\left(p_j - 1\right)\gamma_j{}'}{p_j - 1}} \tag{4.14}$$

olur. (4.13) , (4.14) ve $\vec{w} \in A_{\vec{p}}$ den,

$$\left(\int_Q \left(w_j{}^q v_{\vec{w}}{}^{1-q}\right)^{-\frac{1}{pq_j-1}}\right)^{1-\frac{1}{qp_j}}$$

$$\leq C\,|Q|^{-\frac{pm(1-q)}{qp_j}} \left(\int_Q w_j{}^{-\frac{1}{p_j-1}}\right)^{1-1/p_j} \left(\int_Q v_{\vec{w}}{}^{-\frac{1}{pm-1}}\right)^{\frac{(1-q)(pm-1)}{qp_j}}$$

$$\leq \frac{C}{v_{\vec{w}}(Q)^{\frac{1-q}{qp_j}}} \left(\int_Q w_j{}^{-\frac{1}{p_j-1}}\right)^{1-1/p_j}.$$

elde edilir. Sonuç olarak, bu eşitsizlik (4.12) ve $A_{\vec{p}}$ şartı ile birleştirilerek

$$\prod_{j=1}^{m} |f_j|_Q \leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{v_{\vec{w}}(Q)} \int_Q \left(|f_j|^{p_j}\, w_j/v_{\vec{w}}\right)^q v_{\vec{w}}\right)^{1/qp_j}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, (4.11) eşitsizliğini gösterir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

2. İspat. İlk olarak, $\mathcal{M}$ nin

$$\mathcal{M}^d(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)|\, dy_i$$

şeklinde tanımlanan dyadik maksimal fonksiyonu için ispatı verelim, burada $\mathcal{D}, \mathbb{R}^n$ deki dyadik küplerin ailesidir.

$$\|\mathcal{M}^d(\vec{f})\|_{L^p(v_{\vec{w}})} \leq c \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}$$

eşitsizliği

$$\|\mathcal{M}^d(\vec{f}_\sigma)\|_{L^p(v_{\vec{w}})} \leq c \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(\sigma_j)} \tag{4.15}$$

eşitsizliğine denktir, burada $\sigma_j = w_j{}^{-\frac{1}{p_j-1}}$ ve $\vec{f}_\sigma = (f_1\sigma_1 \ldots f_m\sigma_m)$ dir. $\alpha > 2^{mn}$ alalım. Her k tamsayısı için

$$\Omega_k = \{x \in R^n : \mathcal{M}^d(\vec{f})(x) > \alpha^k\}$$

dir. Klasik Calderón-Zygmund ayrışımının $\mathcal{M}^{d}(\vec{f})$ için geçerli olduğu kolaylıkla görülmektedir ve böylece, çakışık olmayan maksimal dyadik küplerin ailesi $\{Q_{k,j}\}$ için $\Omega_k = \cup_j Q_{k,j}$ olmak üzere

$$\alpha^{k} < \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)|\, dyi \leq 2^{nm} \alpha^{k} \tag{4.16}$$

dir. Buradan,

$$\int_{R^n} \mathcal{M}^{d}(\vec{f_\sigma})^{P} v_{\vec{w}}\, dx = \sum_{k} \int_{\Omega_k/\Omega_{k+1}} \mathcal{M}^{d}(\vec{f_\sigma})\, v_{\vec{w}}\, dx \leq \alpha^{p} \sum_{k} \alpha^{kp}\, v_{\vec{w}}(\Omega_k)$$

$$= \alpha^{p} \sum_{k,j} \alpha^{kp}\, v_{\vec{w}}(Q_{k,j}) \leq \alpha^{p} \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)|\, dyi \right)^{p} v_{\vec{w}}(Q_{k,j})$$

$$= \alpha^{p} \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_i(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)|\, dyi \right)^{p} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i(Q_{k,j})}{|Q_{k,j}|} \right)^{p} v_{\vec{w}}(Q_{k,j})$$

$$\leq C \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_i(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)|\, dyi \right)^{p} \prod_{i=1}^{m} \sigma_i(Q_{k,j})^{P/P_i}$$

sonucu elde edilir, burada A_P şartı kullanılmıştır. Şimdi $E_{k,j} = Q_{k,j}/Q_{k,j} \cap \Omega_{k+1}$ olarak alalım. Her k, j için

$$|Q_{k,j}| < \beta\, |E_{k,j}| \tag{4.17}$$

eşitsizliğini sağlayan $\beta > 0$ sabit sayısının olduğunu kabul edelim. (4.16) ve Hölder eşitsizliği ile

$$|Q_{k,j} \cap \Omega_{k+1}| = \sum_{Q_{k+1,\ell} \subset Q_{k,j}} |Q_{k+1,\ell}|$$

$$< \frac{1}{\alpha^{(k+1)/m}} \sum_{Q_{k+1,\ell} \subset Q_{k,j}} \left(\prod_{i=1}^{m} \int_{Q_{k+1,\ell}} |f_i \sigma_i| \right)^{1/m}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\alpha^{k+1}} \prod_{i=1}^{m} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i| \right)^{1/m} \leq \frac{2^{n}}{\alpha^{1/m}} |Q_{k,j}|,$$

elde edilir. Böylece $\left(1/\beta = 1 - {}^{2^n}/_{\alpha^{1/m}}\right)$ olmak üzere (4.17) ifadesi ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.4 ile, $q_i > 1$ olmak üzere her σ_i A_{q_i} şartını sağlar. A_P nin tanımundan ve Hölder eşitsizliğinden her Q kübü ve ölçülebilir $E \subset Q$ kümesi için

$$\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{q_1} \leq C\frac{\sigma i\,(E)}{\sigma i\,(Q)}$$

eşitsizliğini sağlayan C sabit sayısı vardır. Bu eşitsizlik (4.17) ile birlikte düşünüldüğünde her $i = 1, \dots m$ ve her k, j için

$$\sigma_i\left(Q_{k,j}\right) \leq \gamma_i\, \sigma_i\left(E_{k,j}\right)$$

elde edilir. Böylece, Hölder esitsizliği ve $E_{k,j}$ lerin ikili ayrık olma özelliği kullanılarak

$$\int_{R^n} \mathcal{M}^d\left(\vec{f}_\sigma\right)^P v_{\vec{w}} dx \quad \leq c\gamma \sum_{k,j}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma_i\left(Q_{k,j}\right)}\int_{Q_{k,j}}|f_i\,\sigma_i(y_i)|\,dyi\right)^P \prod_{i=1}^{m}\sigma_i\left(E_{k,j}\right)^{P/P_i}$$

$$\leq \ c\gamma\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k,j}\left(\frac{1}{\sigma_i\left(Q_{k,j}\right)}\int_{Q_{k,j}}|f_i\,\sigma_i(yi)|dyi\right)^{P_i}\sigma_i\left(E_{k,j}\right)\right)^{P/P_i}$$

$$\leq c\gamma\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k,j}\int_{E_{k,j}} M_{\sigma_i}(f_i)^{Pi}\,\sigma_i\right)^{P/Pi} \ \leq \ C_\gamma\prod_{i=1}^{m}\left(\int_{R^n} M_{\sigma_i}\ (f_i)^{Pi}\sigma_i\right)^{P/Pi}$$

$$\leq c\prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_i|^{Pi}oi\right)^{p/Pi}$$

elde edilir., burada son eşitsizlikte $L^{pi}(\sigma_i)$ uzayında M_{σ_i} operatörünün sınırlılığı kullanılmıştır. İspat dyadik küplerde tamamlanmıştır. Dikkat edilmelidir ki, $\vec{w}$ ağırlık fonksiyonu $A_{\vec{P}}$ şartını sadece dyadik küpler için sağlar.

Lemma 4.1. Her k tam sayı, $\vec{f}$, $x \in R^n$ ve $p > 0$ için

$$\mathcal{M}^k\left(\vec{f}\right)(x)^p \leq \frac{c}{|Q_k|}\int_{Q_k}\left(\tau_{-t}\ o\ M^d o\ \tau_t\right)\left(\vec{f}\right)(x)^p dt \ \text{ dır.}$$

olacak şekilde bir c sabit sayısı vardır, burada c sabiti sadece n, m ve p ye bağlıdır. Burada $\tau_t g(x) = g(x-t), Q_k$ kenar uzunluğu 2^{k+2}olan orijin merkezli küp ve $\mathcal{M}^k$ $\mathcal{M}$ olarak tanımlanan operatördür ancak kenar uzunluğu 2^k dan daha küçük küplerde tanımlıdır.

(3.7) ifadesinin sol tarafını göstermek için $\|\mathcal{M}^k(\vec{f})\|_{L^P(v_{\vec{w}})}$ nin sınırlılığını göstermek yeterlidir. Yukarıdaki noktasal eşitsizlik ve Fubini teoreminden

$$\|\mathcal{M}^k(\vec{f})\|_{L^P(v_{\vec{w}})} \leq c \sup_t \| \tau_{-t} o\, \mathcal{M}^d o\, \tau_t \|_{L^P(v_{\vec{w}})}$$

elde edilir. Şimdi t bağımsız olmak üzere $\| \tau_{-t} o\, \mathcal{M}^d o\, \tau_t \|_{L^P(v_{\vec{w}})}$ sınırlılığını elde edelim. *t* bağımsız sabit olmak üzere

$$\tau_{-t} o\, \mathcal{M}^d o\, \tau_t\colon L^{P1}(wi)x \ldots xL^{Pm}(wm) \to L^P(\vec{w})$$

ifadesi yine *t* bağımsız sabit olmak üzere

$$\mathcal{M}^d : L^{P1}(\tau_t w_1)x \ldots xL^{Pm}(\tau_t w_m) \to L^P\left(\tau_t(\vec{w})\right)$$

ifadesine denktir. Fakat $\tau_t(\vec{w}) \in A_{\vec{P}}$ dir. Çünkü $A_{\vec{P}}$ öteleme operatörüne göre değişmeli değildir. Böylece ispatın ilk bölümü tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 in İspatı. Eşitsizliğin sağ tarafı sonlu olduğunda (3.8) ifadesini ispatlamak yeterlidir. (2.8) ve (3.1) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\|T(\vec{f})\|_{L^P(w)} \leq \left\|M_\delta\left(T(\vec{f})\right)\right\|_{L^P(w)} \leq C\left\|M_\delta^{\#}\left(T(\vec{f})\right)\right\|_{L^P(w)} \leq C\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^P(w)}$$

elde edilir. Bu sonuç, $\left\|M_\delta\left(T(\vec{f})\right)\right\|_{L^P(w)}$nin sonlu olduğunu gösterir. Dikkat edilmelidir ki, $w \in A_\infty$ olduğundan aynı zamanda $0 < \max(1, pm) < p_o < \infty$ olmak üzere

$w \in A_{P_o}$dır.

$\delta < \frac{P}{p_o} < \frac{1}{m}$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliklere ek olarak

$$\left\|M_\delta\left(T(\vec{f})\right)\right\|_{L^P(w)} \leq \left\|M_{\frac{P}{p_o}}\left(T(\vec{f})\right)\right\|_{L^P(w)} = C\left\|M\left(T(\vec{f})^{\frac{P}{p_o}}\right)\right\|_{L^{Po}(w)}^{p_o/p} \leq C\left\|T(\vec{f})^{\frac{P}{p_o}}\right\|_{L^{Po}(w)}^{p_o/p}$$
$$\leq C\|T(\vec{f})\|_{L^P(w)}$$

elde edilir. $\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^P(w)}$nin sonlu olduğu kompakt destekli her sınırlı $\vec{f}$ fonksiyonlar ailesi için $\|T(\vec{f})\|$ nin sonlu olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Yeterince 1 e yakın q için, w ağırlığı L^q_{loc} uzayındadır. Böylece q nun dual üssü

$q', \ pq' > 1/m$ özelliğini sağlar. Bu durumda, Hölder eşitsizliği ve T nin ağırlıksız teorisi ile orijin merkezli her B yuvarı için $\|T(\vec{f})\|_{L^P(B,w)}$ sonludur. Diğer taraftan yeterince büyük B yuvarı dışında,

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) \geq C_1|x|^{-mn} \geq C_2|Tf(x)| \tag{4.18}$$

burada sabitler $\vec{f}$ e bağlıdır. $\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^P(w)}$nin sonlu olduğu kabulü ve (4.18) eşitsizliğinden

$$\|T(\vec{f})\|_{L^P(R^n\setminus B,w)} \leq C\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^P(R^n\setminus B,w)} < \infty$$

sonucu elde edilir. Benzer ispat (3.9) zayıf tipli kestirimi verir.

Sonuç 3.2.2 nin İspatı. $v_{\vec{w}} \in A_\infty$ ve her w ağırlık fonksiyonu için basit fonksiyonların keşişim uzayı $L^P(w)$, $L^P(w)$ uzayında olduğundan $\mathcal{M}$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda sınırlı olduğu kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.4 ün İspatı. Kolaylık için sadece tek boyutlu durumu göz önüne alalım. Yüksek mertebeden dönüşümler sadece gösterim olarak daha karmaşıktır. m-lineer Riesz dönüşümün toplamı

$$T(\vec{f})(x) = p.v \int_{R^m} \frac{\sum_{j=1}^m (x - y_j)}{\left(\sum_{j=1}^m |x - y_j|^2\right)^{\frac{m+1}{2}}} f_1(y_1) \dots f_m(y_m) dy_1 \dots dy_m$$

dir. Eğer (3.11) eşitsizliği geçerli ise bu durumda $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bazı değişiklikler olmak üzere benzer argüman lineer durumda da kullanılır.

İlk olarak, her fonksiyonun $f_i \geq 0$ ve supp $(f_j) \subset I$ olduğunu kabul edelim. Eğer her j için $x \in I^+$ ve $y_j \in I$ ise bu durumda

$$\frac{\sum_{j=1}^m (x - yj)}{\left(\sum_{j=1}^m |x - yj|\right)^{m+1}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m |x - yj|^m} \geq \frac{c_m}{|I|^m}$$

elde edilir. Buradan, eğer $x \in I^+$ ise

$$T(\vec{f})(x) \geq c_m \prod_{j=1}^{m} |f_j|_I$$

elde edilir ve böylece $0 < \lambda < c_m \prod_{j=1}^{m} |fj|_I$ iken

$$I^+ \subset \{x: |T(\vec{f})(x)| > \lambda\}$$

olur. Teorem 3.1.1 deki argümandan her I aralığı için

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_{I^+} v_{\vec{w}}\right)^{1/p} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|I|}\int_I wj^{-1/(p_j-1)}\right)^{1-1/p_j} \leq c \tag{4.19}$$

elde edilir. Benzer yöntem, her I aralığı için (3.11) eşitsizliğinin

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I v_{\vec{w}}\right)^{1/p} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{|I|}\int_{I^+} w_j^{-1/(p_j-1)}\right)^{1-1/p_j} \leq c \tag{4.20}$$

eşitsizliğini sağladığını göstermek için kullanılabilir. (4.20) den, (3.6) nın ikinci şartının ispatındaki benzer yöntem kullanılarak, her I aralığı için

$$\left(\int_I v_{\vec{w}}\right)\left(\int_{I^+} v_{\vec{w}}^{-1/(pm-1)}\right)^{pm-1} \leq c|I|^{pm}$$

elde edilir. Böylece $v_{\vec{w}} \in A^+_{Pm}$ olur. Sonuç olarak (2.7) ve (4.19) ile, $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5 in İspatı. Teorem 3.2.5 in ispatına başlamadan önce bazı temel bilgileri verelim:

$$\sup_Q w \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q w$$

özelliğini sağlayan w ağırlık fonksiyonlarının ailesi RH_∞ ile gösterilmektedir. Eğer $f, g \in RH_\infty$ ise bu durumda $fg \in RH_\infty$ dur. Özellikle, her f fonksiyonu için $(Mf)^{-1} \in RH_\infty$ olduğundan

$$v = \frac{1}{Mf_1 1\, Mf_2 \ldots Mf_s} \in RH_\infty \tag{4.21}$$

elde edilir. Ayrıca, eğer $u \in A_1$ ve $v \in RH_\infty$ ise bu durumda her $f \in L^1_u$ için

$$\left\| \mathcal{M}f/_{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c\|f\|_{L^1(u)} \tag{4.22}$$

dir (Cruz-Uribe vd., 2005). Şimdi,

$$\mu_v(\lambda) = v\left\{x: \prod_{j=1}^{m} Mf_j(x) > \lambda\right\}$$

olsun.

$$\mu_v(\lambda) \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{m}}}\left(\prod_{j=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}\right)^{\frac{1}{m}} + \mu(2\lambda) \tag{4.23}$$

olduğunu görmek yeterlidir. (4.23) eşitsizliği, (3.13) zayıf tipli sınırlılık ve (4.23) ile kolaylıkla görülür.

$$E = \left\{x: \lambda < \prod_{j=1}^{m} Mf_j \leq 2\lambda\right\} \text{ ve } v_i = \prod_{\substack{j=1 \\ (i\neq j)}}^{m} \left(Mf_j\right)^{-1}$$

şeklinde tanımlansın. (4.21) ve (4.22) ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\mu_v(\lambda) - \mu_v(2\lambda) = v(E) \leq \lambda^{-\frac{1}{m}} \int_E \left(\prod_{j=1}^{m} Mf_j w_j\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leq \lambda^{-\frac{1}{m}} \prod_{j=1}^{m} \left(\int_E Mf_j w_j\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leq 2\lambda^{1-\frac{1}{m}} \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\{Mf_j > \lambda v_j\}} v_j w_j\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leq c\,\lambda^{-\frac{1}{m}} \left(\prod_{j=1}^{m} \|fi\|_{L^1(w_i)}\right)^{\frac{1}{m}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alvaraz, J., Pèrez, C. (1994), Estimates with A_∞ weights for various singular integral operators, *Bollettino Unione Mathematics Italy Series A*, (7) 8 (1).

Calderón, A.P., Zygmund, A. (1952), On the existence of certain singular integrals, *Acta Mathematics*, 88.

Christ, M. (1990), Lectures on Singular Integral Operators, CBMS Regional Conference Series Mathematics, C. 77, Amer. Math. Soc. Providence, RI.

Coifman, R.R., Ferferman, C. (1974), Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Mathematics, 51.

Cruz-Uribe, D., Martel, J. M., Pèrez, C. (2005), Weighted weak-type inequalities and aconjecture of Sawyer, Int. Math. Res. Not. 30.

Ferferman, C., Stein, E. M. (1971), Some maximal inequalities, *American Journal of Mathematics*, C.93.

Grafakos, L., Tores, R. H. (2002). Maximal operatör and weighted norm inequalities for multilinear singular integrals, *Indiana University Mathematics Journal*, 51.

Grafakos, L., Torres, R. H. (2000), On multılinear singular integrals of Calderón-Zygmund type, in:Proceeding of the 6th International Conference on Harnonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial.

Grafakos, L., Torres, R. H. (2002), *Multilinear Calderón-Zygmund theory*, Advances in Mathematics, C.165 (1).

Iwaniec, T., Sbordone, C. (1994), Weak minima of variational integrals, *Journal Reine Angew Mathematics*, 454.

Jawerth, B., Torchinsky, A. (1985), *Local sharp maximal functions*, J. Approx. Theory, 43.

Lerner, A.K. (2008), An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operatör, *American Mathematical Society*, 136(8).

Muckenhoupt, B. (1982), Weigted norm inequalities for the Hardy maximal funcition, *Transactions of the American Mathematical Society*, 165.

Pèrez, C. (1994), Weighted norm inequalities for singular integral operators, *Journal London Mathematical Society*, 49.

Pèrez, C. (1995), On sufficient conditions fort he boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights, Proc. *London Mathematical. Society*, (3)71.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Pèrez, C., Torres, R. H. (2003), *Sharp maximal function estimates for multilinear singular integrals*, in: Contemp. Math., C.320.

Rao, M. M., Ren, Z. D. (1991), *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, Newyork.

Stein, E. M. (1998), Singular integrals: The roles of Calderón and Zygmund, Notices American Mathematic Sociecty, 45.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇAKMAK İlknur
Doğum Tarihi ve Yeri : Niğde 27.05.1990
e-mail : ilknrcakmak@outlook.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	: Kütahya Dumlupınar Üniversitesi	
Lisans	: Marmara Üniversitesi	Ağustos 2012
Lise	: Bursa Atatürk Lisesi	Haziran 2008

Yabancı Dil : İngilizce