

METRİK TENSÖR ÜZERİNE

Muhammet YILDIRIM

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca  
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Mine TURAN

Aralık - 2019

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Muhammet YILDIRIM tarafından hazırlanan “METRİK TENSÖR ÜZERİNE” adlı tez çalışması, aşağıda belirtilen jüri tarafından Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek OY BİRLİĞİ ile Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

30/12/2019

Prof. Dr. Önder UYSAL  
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU  
Anabilim Dalı Başkanı, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mine TURAN  
Danışman, Matematik Anabilim Dalı

### Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Mine TURAN  
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü

Prof. Dr. Erhan ATA  
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü,

Dr. Öğrt. Üyesi Sema KURTARAN  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fizik Bölümü,



## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Kütahya Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %21. çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Mine TURAN

Muhammet YILDIRIM



## METRİK TENSÖR ÜZERİNE

Muhammet YILDIRIM

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2019

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mine TURAN

### ÖZET

Bu tez çalışmasında Einstein Alan Denklemi ( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ ) incelenmiştir. Bu denklemin sol tarafındaki terimlerin tamamı uzayın geometrisi ve sağ tarafı ise tamamen fiziksel terimleri içermektedir. Öncelikle bu denklemin anlaşılabilmesi için denklemdaki matematiksel ve fiziksel terimler basitçe açıklanmıştır. Sonraki bölümlerde Riemann geometrisinin önemli konuları olan ve bu denkleme şekil veren Riemann Manifold ve Pseudo-Riemann Manifold, Paralel taşıma, Koneksiyon ve Kovaryant türev, Eğrilik ve Torsion, Levi-Civita Koneksiyonları konu başlıkları incelenmiştir. Bu çalışmanın amacı kara delikler ile ilgili büyük keşiflerin yapıldığı son yıllarda, en azından Einstein Alan Denkleminin matematiksel olarak ne olduğunu tanımlayabilmektir.

**Anahtar kelimeler:** Metrik, riemann, ricci, tensör

## ON METRIC TENSOR

Muhammet YILDIRIM

Mathematics, M.S. Thesis, 2019

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mine TURAN

### SUMMARY

In this thesis, Einstein's field equation ( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ ) is examined. All of the terms on the left side of this equation relate to the geometry of space, and all of the terms on the right side are physically related terms. These mathematical and physical terms in the equation are explained simply because it is primarily intended to understand this equation. In the following sections, important subjects of Riemannian geometry, Riemann Manifold and Pseudo-Riemann Manifold, Parallel transport, Connection and Covariant derivative, Curvature and Torsion, Levi-Civita Connections are mentioned. In addition, these subjects formed Einstein's field equation. In fact, the aim of this thesis is to explain at least what Einstein's field equations are mathematically in recent years when important discoveries about black holes have been made.

**Keywords:** Metric, riemann, ricci, tensor

## TEŐEKKÜR

Bu alıőmada bana yardımcı olan baőta danışman hocam Prof. Dr. Mine TURAN'a, desteklerini hep yanımda hissettiğim eőim Elif DADAK YILDIRIM ile oğlum Ömer YILDIRIM'a ve emeği geçen herkese teőekkürü bir borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. RIEMANN GEOMETRİ .....	17
3.1. Riemann Manifold ve Pseudo-Riemann Manifold.....	30
3.1.1. Metrik tensör.....	30
3.1.2. İndirgenmiş metrik.....	32
3.2. Paralel Taşıma, Koneksiyon ve Kovaryant Türev .....	33
3.2.1. Bulgusal tanım .....	33
3.2.2. Afın koneksiyonlar .....	35
3.2.3. Paralel taşımalar ve jeodezikler .....	36
3.2.4. Tensör alanların kovaryant türevleri .....	37
3.2.5. Koneksiyon katsayılarının dönüşüm özellikleri.....	38
3.2.6. Metrik koneksiyon .....	39
3.3. Eğrilik ve Torsion .....	40
3.3.1. Tanımlar.....	40
3.3.2. Riemann tensörünün ve torsion tensörünün geometrik anlamı .....	43
3.3.3. Ricci tensörü ve skaler eğrilik.....	48
3.4. Levi-Civita Koneksiyonları.....	48
3.4.1. Levi-civita temel teoremi .....	48
3.4.2. Klasik geometrik yüzeyler üzerinde levi-civita koneksiyonları.....	49
3.4.3. Jeodezik .....	50
3.4.4. Normal koordinat sistemi.....	52
3.4.5. Riemann eğrilik tensörü ile levi-civita koneksiyonları .....	53
3.4.6. Einstein tensör.....	53
4. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	55
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	56
ÖZGEÇMİŞ	

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. O ortamı ve O'ya göre x-ekseninde V hızı ile hareket eden O' ortamı üzerinde aynı deneyin farklı iki olay arasında yapılmasının gösterimi.....	18
3.2. $m_1, m_2$ ve aralarındaki mesafenin gösterimi.....	21
3.3. Üç Boyutlu her hangi bir cismin her yüzeyine uygulanan kuvvetin gösterimi. ....	23
3.4. Koordinat düzleminde bir vektörün boyutunun Pisagor bağıntısıyla gösterimi.....	24
3.5. İki boyutta bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçişin gösterimi. ....	25
3.6. Herhangi bir uzayın geometrisin metrik tensör sayesinde normal kartezyen koordinat sisteminden farkının bulunabileceğinin gösterimi.....	26
3.7. Küre üzerinde bir üçgen ve bu üçgen üzerinde bir vektörün paralel taşınması sonucu başlangıç noktasına geri geldiğinde uzunluğu aynı kalırken yönünün değişeceğinin gösterimi.....	28
3.8. V bir vektördür. Ve (a)'da $(r + \Delta r, \phi)$ ile, (b)'de $(r, \phi + \Delta\phi)$ ile V'ye paralel taşındığının gösterimi.....	35
3.9. V'nin büyük daire ile yaptığı açı sabit tutulursa ve p'deki V, C ve C' daireleri boyunca paralel olarak taşınırsa, ortaya çıkan vektörler, q noktasında zıt yönlerde q vektörüne paralel taşındığının gösterimi. ....	42
3.10. p deki bir $V_0$ vektörü C ve C'nün r deki $VC(r)$ ve $VC'(r)$ 'yi verdiği paralel taşınma durumu. ....	43
3.11. $qr_2(sr_1)$ vektörünün, $q(s)$ 'ye paralel taşınan $ps(pq)$ vektörü olduğunun gösterimi. ...	45
3.12. (a) Eğer bir vektör p deki boylamla bir $\alpha$ açısı yaparsa bu açının paralel taşınma esnasında sabit tutulduğunun gösterimi. (b) $sr_1(qr_2)$ vektörü, $s(q)$ 'ya paralel taşınmış ise $pq(ps)$ vektörü olduğu ve Torsionun ortadan kaybolduğunun gösterimi. ....	46
3.13. M yüzeyinde bir $Vp \in TpM$ vektörünün $Vq \in TqM$ vektörüne paralel olması ve $Vp$ 'nin $TpM$ üzerinde $R^2$ deki sıradan paralellik anlamında $Vq$ vektörüne paralel olmasının gösterimi.....	49
3.14. Paralellik Levi-Civita anlamında tanımlanırsa Torsionunun kaybolduğunun gösterimi. ..	50
3.15. de Poincare Metrik tarafından jeodezikler üst yarı düzlemde tanımlanır ve Jeodezik sonsuz bir uzunluğa sahiptir ifadelerinin gösterimi.....	51



## 1. GİRİŞ

Tarihçi Herodot'a göre geometrinin başlangıcı Eski Mısır'a dayanır. Mısır'a hayat veren Nil nehri geometriye de hayat vermiştir. Eski Mısır'da Kral halka kare biçiminde tarlalar verip bu tarlaların vergisini almaktaydı. Nil nehri düzenli olarak taşıdığı için tarlaların sınırları kayboluyor ve tekrar düzenlenmesi gerekiyordu. Bu sebeple geometri bilgisine ihtiyaç duyuldu. Bu durum Mısır'da geometrinin gelişmesine yol açılmıştır. Tabii ki geometri ile ilgili ilk çalışmalara bu tarihlerde rastlanması daha önce geometrinin bilinmediğini kanıtlamıyor. O sebeple geometrinin başlangıcının hangi tarihlerde olduğunu tam olarak söylemek doğru olmaz. Ama insanlık ile yaşatıldığı söylenebilir.

Bunun yanında geometri ile ilgili ilk sistematik çalışmaların M.Ö. 330-275 yılları arasında yaşamış olan Öklid'e (Euclides) ait olduğu biliniyor. Mısır'da doğan Yunan matematikçi adı geometri ile en çok özdeşleşen kişidir. Bu yerini, o zaman geometrinin ismi olan 13 ciltlik "Elementler" kitabı sayesinde almıştır. Öklid'in bu yapıtı, yıllarca en önemli başvuru kaynağı olarak kullanılmış ve hala kullanılmaya devam etmektedir. Öklid geometrisini, kendinden önceki Tales, Pisagor, Aristoteles gibi matematikçilerin çalışmalarını temel alarak, kanıt gerektirmeyen apaçık gerekçeler olarak 5 aksiyom üzerine kurdu. 19. yy'a kadar Öklid'in geometrisi rakipsiz kaldı.

1827 yılında ise Carl Friedrich Gauss Öklid'in ilk dört aksiyomunu sağlayan ama 5. aksiyomunu (bir doğruya dışından alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir) sağlamayan geometrilerin var olduğunu düşündü. Yalnız tepkilerden çekindiği için fikirlerini yayınlamadı. Gauss Hannover'da yaptığı yüzey ölçümü sırasında ölçüm hatalarının istatistiksel dağılımını veren normal dağılım (Gauss Dağılımı) fikrini iyice belirginleştirdi. Ayrıca bu ölçümler Gauss'un Diferansiyel Geometriye ilgi duymasını sağladı. Bugün ele alınan Diferansiyel Geometri ve Manifold kavramının oluşmasına ön ayak oldu. 1827 yılında Gauss yüzeyin eğriliğini ölçmede bugün Gauss eğriliği adı verilen bir ölçümün olduğunu ortaya koydu. Gauss eğriliği sayesinde yüzey üzerinde yaşayan biri bu ölçüyü kullanarak yüzeyin eğriliği hakkında bilgi sahibi olabiliyordu.

Gauss'un tepkilerden çekindiği için açıklamadığı fikri doktora öğrencisi olan Georg Friedrich Bernhard Riemann tarafından 1854 yılında açıklandı. Bu fikri Riemann Göttingen Üniversitesinde akademik bir pozisyon alabilmek için yaptığı sunumda "Geometrinin Temelleri Üzerine Hipotezler" başlığı altında anlattı. Riemann katı genişletilmiş çokluklar (Manifold) kavramı ile geometriye yeni bir bakış açısı sunmuştur. Bu kavram izafiyet teorisi ve uzay-zaman yapısının anlaşılmasında da temel oluşturmuştur.

Riemanın sunduğu bu geometrinin Öklid ve Öklid dışı geometrileri içermesinin nedeni manifold üzerinde tanımladığı ölçme bağıntılarından kaynaklanmaktaydı. Öklid geometride iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir ölçme bağıntısıdır. Riemann bu bağıntıyı genelleştirerek manifold kavramını tanımladı. Öklid düzlemde  $(x_1, x_2)$  ve  $(x_1+dx_1, x_2+dx_2)$  noktaları arasındaki en kısa uzaklık  $l = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$  şeklindedir. Pisagor teoremi ile verilen bu uzunluk

$$\sum g_{ij} dx_i dx_j \quad i, j = 1, 2$$

olur. Burada  $g_{11}=g_{22}=1$  ve  $g_{12}=g_{21}=0$ 'dır. Riemann son eşitliği (n manifold boyutu)

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

durumuna genelleştirdi. Bu genellemeye Riemann metriği denildi.

Riemann metriğinin bir diğer adı Metrik tensördür. Riemann metriği Einstein Alan denklemlerine ışık oldu. Einstein Alan Denklemleri herhangi bir uzayda mesafe hesabı gibi önemli sorunlara cevap oluyordu.

Metrik tensör denilen şey sözel olarak ifade edilmeye çalışılırsa eğer; içinde bulunulan uzayın geometrisinin normal Kartezyen koordinat sisteminden ne kadar farkı var ve ne kadar kalibre olmuş onu söylenmektedir. Yine Riemann geometrinin içinde geçen Ricci tensör ise içinde bulunduğu uzayda bir vektörü paralel taşıdığımızda her noktada uğradığı değişimin, normal kartezyen koordinattaki durumundan farkını verilmektedir.

Bu iki terim Einstein Alan Denklemlerinde, içinde bulunulan uzayın geometrisini oluşturmaktadır. Bu tez çalışmasında, Einstein Alan Denklemlerini daha iyi anlamak ve içerisindeki matematiksel kısmı ayrıntılı incelemek için Riemann geometrisi incelenmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1 (Vektör Uzayı):**  $V$  boş kümeden farklı ve elemanlarına vektör denilen bir küme olsun.

Vektörel toplam:  $A, B \in V \Rightarrow A + B \in V$

Vektörel çarpım:  $r \in F, A \in V \Rightarrow r.A \in V$  olmak üzere

$A, B, C \in V, r, s \in F$  için

- i.  $A + B = B + A$
  - ii.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - iii.  $A + 0 = 0 + A = A$
  - iv.  $A + (-A) = 0$
  - v.  $(r + s)A = rA + sA$
  - vi.  $(rs)A = r(sA)$
  - vii.  $r(A + B) = rA + rB$
  - viii.  $1A = A$
- i...viii. aksiyomlarını sağlıyorsa  $V$  kümesine vektör uzayı denir.

**Tanım 2.2 (Grup):**  $G$  boştan farklı bir küme ve  $A, B, C \in G$  için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa  $(G, *)$  gruptur.

- i.  $A * B \in G$
- ii.  $(A * B) * C = A * (B * C)$
- iii.  $A * e = e * A = A$
- iv.  $A * A^{-1} = A^{-1} * A = e$

Eğer bir grup  $A*B=B*A$  aksiyomunu da sağlıyorsa bu gruba abelyan (değişmeli) grup denir. (Çallıalp, 2001: 65)

**Tanım 2.3 (Halka) :**  $H$  boştan farklı bir küme ve  $A, B, C \in H$  olmak üzere;

- i.  $(H, *)$  Değişmeli grup
- ii.  $A, B \in H$  (kapalılık özelliği)
- iii.  $A.(B.C) = (A.B).C$  (birleşme özelliği)
- iv.  $A.(B * C) = (A.B) * (A.C)$

$(B*C).A=(B.A) * (C.A)$   $(.)$  işleminin  $(*)$  işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılıma özelliği aksiyomları sağlanıyorsa  $(H, *, .)$  halkadır (Hacısalıhoğlu, vb., 1989: 97).

**Tanım 2.4 (Cisim):**  $F$  boştan farklı bir küme olmak üzere;

- i.  $(F, +)$  değişmeli grup
- ii.  $(F/\{0\}, \cdot)$  değişmeli grup
- iii.  $\cdot$ 'nin  $+$  üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği

aksiyomları sağlanıyorsa  $(F, +, \cdot)$  cisimdir (Hacısalihoglu vb., 1989: 101).

**Tanım 2.5 (Linear Fonksiyonel):**  $R$  reel sayılar cismi üzerinde  $n$ -boyutlu bir vektör uzayı  $V$  olsun bir  $A: V \rightarrow R$  fonksiyonu  $\forall x, y \in V, \forall a, b \in R$  için

$$A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$$

kuralına uyuyorsa  $A$  ya bir lineer fonksiyonel denir. (Hacısalihoglu, 1996: 465)

**Tanım 2.6(Hom(V,F)):** bir  $F$  cismi üzerinde sonlu boyutlu  $V$  vektör uzayı için

$$\mathcal{L}: V \rightarrow F$$

şeklindeki lineer dönüşümlerin kümesine denir. (Hacısalihoglu, 1982: 275)

**Tanım 2.7(Dual Vektör Uzayı) :**  $R$  cismi üzerinde bir vektör uzayı  $V$  olsun.  $\text{Hom}(V, R)$  vektör uzayına  $V$ 'nin dual uzayı denir.  $V^*$  biçiminde gösterilir.  $\text{boy}R=1$  olduğundan  $\text{boy}V=\text{boy}V^*$  olduğu açıktır. (Hacısalihoglu, 1980: 9)

**Tanım 2.8 (Metrik) :**  $M$  bir vektör uzayı

$$d: M \times M \rightarrow R$$

tanımlı fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $d$  fonksiyonuna  $M$  üzerinde bir metrik denir.

$\forall x, y \in M$  için

- i.  $d(x, y) \geq 0$
- ii.  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- iii.  $d(x, y) = d(y, x)$
- iv.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall z \in M$  (Hacısalihoglu, 1983: 6)

**Tanım 2.9 (Öklid Metriği) :**  $d: E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonu  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu denir (Hacısalihoglu, 1983: 6)

**Tanım 2.10 (Topoloji) :**  $X$  bir küme olsun.  $X$ 'in alt kümelerinin bir koleksiyonu  $\tau$  olsun  $\tau$  koleksiyonunun aşağıdaki önermeleri doğrusa  $X$  üzerinde bir topoloji adını alır.

- i.  $X, \emptyset \in \tau$
- ii.  $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$
- iii.  $A_i \in \tau, i \in I \cup_{i \in I} A_i \in \tau$  (Hacısalihoglu, 1983: 11-12)

**Tanım 2.11 (Topolojik Uzay) :** Bir  $X$  kümesi ve üzerinde bir  $\tau$  topolojisinden oluşan  $(X, \tau)$  ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalihoglu, 1983: 12)

**Tanım 2.12 (Hausdorff Uzayı) :**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$ 'in  $P$  ve  $S$  gibi farklı noktaları için  $X$  de sırası ile  $P$  ve  $S$  noktalarını içine alan  $A_p, A_s$  açık alt kümeleri  $A_p \cap A_s = \emptyset$  olacak biçimde bulunabilirse  $X$  topolojik uzayına bir Hausdorff uzay denir (Hacısalihoglu, 1983: 14)

**Tanım 2.13 (Homeomorfizm) :**  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f: X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve  $f^{-1}$  tersi var  $f^{-1}$  de sürekli ise  $f$ 'ye  $X$  den  $Y$ 'ye bir homeomorfizm(topolojik dönüşüm) denir. (Hacısalihoglu, 1983: 13)

**Tanım 2.14 (Topolojik n-manifold) :**  $M$  bir topolojik uzay olsun.  $M$  için aşağıdaki önermeler doğru ise  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifolddur denir.

- i.  $M$  bir Hausdorff uzayıdır.
- ii.  $M$ 'nin her bir açık alt kümesi  $E^n$  e veya  $E^n$  in bir açık alt kümesine homeomorftur.
- iii.  $M$  sayılabilir çoklukta açık kümeler ile örtülebilir (Hacısalihoglu, 1983: 14-15).

**Tanım2.15 ( $C^\infty$  Manifold) :**  $E^n$  de bir açık alt küme  $U$  olmak üzere;

$$f: U \rightarrow R$$

fonksiyonunun  $k$ . mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise  $f$  fonksiyonuna  $C^k$  sınıfından diferansiyellenebilir denir. Özel olarak  $f$  sadece sürekli ise  $C^0$  sınıfındandır denir.

$$C^k(U, R) = \{f \mid f: U \rightarrow R \text{ ve } f \text{ } C^k \text{ sınıfındandır.}\}$$

$$C^\infty(U, R) = \{f \mid f \in C^k(U, R), k \in N\}$$

gösterimleri kullanılır.

$E^n$  in iki açık alt kümesi  $U$  ve  $V$  olsun. Bir  $\Psi:U \rightarrow V$  fonksiyonu

- i.  $\Psi \in C^k(U, V)$
- ii.  $\Psi^{-1}: V \rightarrow U$  var ve  $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$

önergelerini sağlıyor ise  $\Psi$  ye  $C^k$  sınıfından bir diffeomorfizm ve  $U$  ile  $V$ 'ye de  $k$ . dereceden diffeomorfiktirler denir.

$M$  bir topolojik  $n$ -manifold olsun.  $M$  üzerinde  $C^k$  sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse  $M$ 'ye  $C^k$  sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir.

**Tanım 2.16 (Koordinat Komşuluğu (Harita)) :**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $U$  da  $M$ 'nin bir açık alt kümesi olsun. Eğer  $U$  bir  $\Psi$  homeomorfizmi ile  $E^n$  nin bir  $W$  açık alt kümesine eşlenebiliyorsa

$$\Psi: U \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} W \subset E^n$$

$(U, \Psi)$  ikilisine  $M$  de bir koordinat komşuluğu denir.  $p \in U$  için  $\Psi(p) \in E^n$ 'dir. Ve

$$\Psi(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) \quad x_i(p) \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n$$

olur. Burada  $x_i(p)$  reel sayısına  $\Psi(p)$  noktasının  $i$ . koordinatı ve  $x_i:U \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna da koordinat fonksiyonu denir.

$\Psi$  fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan süreklidir ve dolayısıyla

$$x_i: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

fonksiyonları da süreklidirler.

Hatta  $\Psi$  birebir olduğundan iki  $p, q \in U$  noktaları için

$$x_i(p) = x_i(q) \quad 1 \leq i \leq n \implies p = q$$

dur. Bu demektir ki  $p \in U$  noktası  $(x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))$  reel sayısı ile belirlidir. Bunun için  $x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)$  reel sayılarına  $p \in U$  noktasının  $(U, \Psi)$  koordinat komşuluğuna göre lokal koordinatları denir. Ve  $U$  üzerinde tanımlı olan  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reel değerli fonksiyon n'lisine de  $(U, \Psi)$  üzerindeki lokal koordinat sistemi denir. Demek oluyor ki bir  $p \in U$  noktasının  $(U, \Psi)$  ya göre olan  $U$  daki lokal koordinatları  $\Psi(p) \in E^n$  noktasının  $E^n$  deki koordinatlarına eşittirler. Burada yerel(lokal) sıfatını kullanmaktaki amaç koordinatların  $M$  de sadece  $U$  parçası üzerinde

tanımladıklarını ifade etmektedir.  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold olduğundan  $M$ 'yi  $E^n$  deki  $U_\alpha$  açık kümeleri bir  $\{U_\alpha\}$  ailesiyle örtülebilir (Hacısalıhoğlu, 1980: 74-75).

**Tanım 2.17 (Koordinat Komşuluğu Sistemi (Atlas)):**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $M$ 'nin bir açık örtüsü  $\{U_\alpha\}$  olsun.  $U_\alpha$  açık kümelerinin  $\alpha$  indislerinin kümesi  $A$  olmak üzere  $\{U_\alpha\}$  örtüsü için  $\{\Psi_\alpha\}, \alpha \in A$  yazılsın.  $E^n$  de  $U_\alpha$ 'ya homeomorf olan bir açık küme  $E_\alpha$  ve

$$\Psi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_\alpha$$

olsun. Koordinat komşuluklarının

$$\{(\Psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna bir koordinat komşuluğu sistemi (atlas) denir (Hacısalıhoğlu, 1980: 75).

**Tanım 2.18 (Diferansiyellenebilir Yapı) :**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold ve

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

de  $M$ 'nin bir atlası olsun. Eğer  $S$  atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise  $S$ 'ye  $C^r$  ( $r \leq 1$ ) sınıfındandır denir.

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall \alpha, \beta \in A$  için

$$\phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}: \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}: \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları  $C^r$  sınıfındandır. Eğer  $S$  atlası  $M$  üzerinde bir  $C^r$  sınıfından ise  $S$ 'ye  $M$  üzerinde bir  $C^r$  sınıfından diferansiyellenebilir yapı denir. (Hacısalıhoğlu, 1980: 78)

**Tanım 2.19 (Diferansiyellenebilir Manifold) :**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $M$ 'nin  $S$  atlası  $C^r$  sınıfından olsun. O zaman  $M$ 'ye bir  $n$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1980: 79).

**Tanım 2.20 (Diferansiyellenebilir Eğriler) :**  $E$  de bir açık aralık  $I = (a, b)$  olsun.  $E$ 'nin kendisi bir 1-manifold ve  $I = (a, b)$  de  $E$  nin bir açık alt manifoldudur. Bir

$$\Psi: I = (a, b) \rightarrow M$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne  $M$ 'nin  $I = (a,b)$  üzerinde tanımlı olan bir diferansiyellenebilir eğrisi denir.

$I$ 'nin bir noktası  $t_0 \in (a,b)$  ve  $\Psi(t_0) \in M$ 'nin bir komşuluğunda  $M$ 'nin bir lokal koordinat sistemi  $(x_1, \dots, x_n)$  olsun.

$$(\Psi^*ox_i)(t) = \Psi_i(t) \quad 1 \leq i \leq n \quad \forall t \in (a, b)$$

olarak tanımlanırsa

$$\Psi_i: I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları  $t_0 \in I$  in bir komşuluğunda  $C^\infty$  sınıfından olurlar. O zaman  $n$ -boyutlu olan

$$\left( \frac{d\Psi_1}{dt} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{d\Psi_n}{dt} \Big|_{t_0} \right)$$

vektörüne  $\Psi$  eğrisi için  $\Psi(t_0)$  noktasındaki bir tanjant vektör denir.

**Tanım 2.21 (Tanjant Vektör):**  $E^n$  in bir  $P$  noktasındaki tanjant vektörü  $E^n$  in biri  $P$  olan iki noktasından meydana gelir. Bu vektörün vektör kısmı  $V$  ve başlangıç noktası  $P$ 'dir. Böylece bir vektörü  $\vec{V}_P$  ile gösterelim.  $\vec{V}_P$  tanjant vektörü  $P$  noktasından  $P+V$  noktasına uzanan bir vektördür (Hacısalihoglu, 1980: 94).

**Tanım 2.22 (Tanjant Uzay):**  $P \in E^n$  olsun. Başlangıç noktaları  $P$  olan bütün tanjant vektörlerin kümesine  $E^n$  in  $P$  deki tanjant uzayı denir. Ve  $T_{E^n}(P)$  ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1980: 94).

**Tanım 2.23 (Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayları):**  $(a,b) \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $M$  bir manifold olsun. Bir

$$\alpha: (a, b) \rightarrow M$$

eğrisi boyunca bir  $X$  vektör alanı öyle bir

$$X: (a, b) = j \rightarrow \bigcup_{t \in j} T_m(t)$$

dönüşümdür. Ki bu dönüşüm için

$$\pi \circ x = I: (a, b) \xrightarrow{\text{özdeşlik}} (a, b)$$



olacak şekilde bir izdüşüm fonksiyonu var.  $E^n$  deki bir komşuluk  $V$  olsun. Bir  $P \in V$  noktasındaki tanjant uzay  $T_V(P)$  olsun.  $V$ 'nin  $P$  noktaları üzerindeki tanjant uzaylarının birleşimi

$$J(V) = \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

ile gösterilir.

Bir  $\pi: J(V) \rightarrow V$  dönüşümü  $\forall \vec{t}_P \in T_V(P)$  tanjant vektörü için  $\pi(\vec{t}_P) = P$  şeklinde tanımlansın.  $P$  noktasına  $\vec{t}_P$  tanjant vektörünün başlangıç noktası denir.

$V \subset E^n$  üzerindeki bir vektör alanı

$$x: V \rightarrow J(V)$$

şeklinde bir fonksiyondur. Öyle ki

$$\pi \circ x = I: V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur. Bu tanıma göre  $E^n$  de bir  $U$  vektör alanı öyle bir fonksiyondur ki bu fonksiyon  $E^n$  in her bir  $P$  noktasına  $P$  de  $E^n$  in bir  $\vec{U}_P$  tanjant vektörüne karşılık getirir.

Genel bir ifade ile bir vektör alanı büyük bir ok koleksiyonu olup  $E^n$  in her noktasında bir oka sahiptir. Vektör alanlarının tabii bir cebiri vardır. Tıpkı reel değerli iki  $f, g$  fonksiyonunun her noktadaki değerlerini toplamak gibi  $X$  ve  $Y$  vektör alanlarını da nokta nokta toplanabilir.  $\forall P \in E^n$  noktasında  $X$  ve  $Y$  değerleri olan  $\vec{X}_P, \vec{Y}_P$  aynı bir  $T_{E^n}(P)$  tanjant uzayı içinde olduklarından bunlarda toplanabilir. Netice olarak  $X$  ve  $Y$  vektör alanları nokta-nokta toplanabilir.  $X$  ve  $Y$ 'nin toplamı da bir vektör alanıdır. Bu

$$(X + Y)(P) = X(P) + Y(P) = \vec{X}_P + \vec{Y}_P$$

şeklinde ifade edilir. Bu şema tekrarlanabilir. Bu prensibe nokta-nokta prensibi denir. Bu prensibi  $T_{E^n}(P)$  tanjant uzayı üzerinde skaler ile çarpma operasyonuna da genişletilebilir. Eğer  $f, E^n$  üzerinde reel değerli bir fonksiyon ve  $X$  de bir vektör alanı ise o zaman  $f$ 'nin  $X$  ile soldan çarpımı  $fX$

$$(fX)(P) = f(P)X(P) = f(P)X_P, \forall P \in E^n, X(P) = \vec{X}_P$$

şeklinde bir vektör alanı olarak tanımlanır. Yukarıda tanımlanan  $+$  ve skaler ile çarpma işlemine göre  $E^n$  üzerindeki bütün vektör alanlarının kümesi

$$X = \left\{ x \mid x: E^n \rightarrow \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(P), \pi \circ x = I, \pi: \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(P) \rightarrow E^n \right\}$$

da  $R$  üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu  $X$  vektör uzayına  $E^n$  üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1980: 95-97).

**Tanım 2.24 (r. Dereceden Tensör):**  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  den  $R$  ye bütün  $r$ -lineer fonksiyonların kümesi  $\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r: R)$  ile gösterilsin.

Bu kümede toplama ve skaler ile çarpma işlemleri sırasıyla;

$\forall (u_1, u_2, \dots, u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  ve  $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r: R)$  için

$$(f_1 + f_2)(u_1, u_2, \dots, u_r) = f_1(u_1, u_2, \dots, u_r) + f_2(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

$$\text{ve } \forall \lambda \in R, \forall f \in \mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r: R)$$

$$\text{için } (\lambda f)(u_1, u_2, \dots, u_r) = \lambda f(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

biçiminde tanımlanırsa bu küme bu iki işleme göre  $R$  üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına  $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$  dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir. Ve

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r: R) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir.  $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$  tensör uzayının her bir elemanına  $r$ . dereceden tensör denir (Sağlamer, 1995).

**Tanım 2.25 (Kovaryant Tensör):**  $r$ . dereceden bir tensör bir  $r$ -lineer fonksiyondur. Özel olarak

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r$$

ise  $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$  uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da  $r$ . dereceden bir kovaryant tensör veya kovaryant  $r$ -tensör denir.  $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$  uzayı kısaca  $T^r(V)$  ve  $\otimes^r V^*$  ile gösterilir (Sağlamer, 1995).

**Tanım 2.26 (Kontravaryant Tensör):**  $V$  vektör uzayının dual uzayı  $V^*$  olsun.  $V^*$  üzerinde  $s$ -lineer fonksiyonların vektör uzayı kontravaryant tensör uzayı olarak adlandırılır.

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r: R) = V \otimes V \dots \otimes V = \otimes^s V = T_s(V^*)$$

ile gösterilir.

Bu uzayın elemanlarına s. dereceden Kontravaryant tensörler denir (Sağlamer, 1995).

**Tanım 2.27 (Karışık Tensör):** Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı n-boyutlu bir vektör uzayı V ve bunun dual uzayı V\* olsun.

$$\mathcal{L}(V^r V^{*s}; R) = \left\{ f \mid f: V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} R \right\}$$

kümesi toplama ve skaler ile çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır. Buna r. dereceden kovaryant ve s. dereceden kontravaryant tensör uzayı veya (r,s)- tipinde karışık tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına (r,s)- tipinde tensör veya (r,s)- tipinde karışık tensör adı verilir.

Bu uzay

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V)$$

veya  $T_s^r(v)$  biçiminde gösterilir. Literatürde bazen  $T_s^r(v)$  yerine  $V_s^r$  de kullanılır. Bu uzayın elemanlarına  $\binom{r}{s}$  tipinde tensörler de denir.

$$T_0^r(V) = V_0^r \text{ yerine } T^r(V) = V^r, \text{ ve } T_s^0(V) = V_s^0 \text{ yerine } T_s(V) = V_s \text{ de yazılır.}$$

$$\text{Buna göre } V = T^1(V) = V^1 \text{ ve } V^* = T_1(V) = V_1 \text{ de alınabilir.}$$

Özel olarak  $T_0^0(V) = V_0^0 = R$  alınırsa şu haliyle skaler de bir tensör olur. Sıfırıncı mertebeden bir tensördür (Sağlamer, 1995).

**Tanım 2.28 (Riemann Metriği):** M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde bir  $P \in M$  noktası için

$$g: M \rightarrow \mathcal{L}(T_m(P) \times T_m(P), R)$$

$$P \rightarrow g_P: T_m(P) \times T_m(P) \rightarrow R$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir bilineer form tanımlanmış ise g'ye M de Riemann metriği denir.

Eğer bir M manifoldunun  $\forall P \in M$  noktasının bir U komşuluğu üzerinde g formu  $C^r$  sınıfından ise g Riemann metriğine  $C^r$  sınıfındandır denir. Literatürde daha çok  $C^\infty$  sınıfından Riemann metriği ile ilgilenilmektedir. Bu nedenle  $C^\infty$  sınıfından Riemann metrik yerine sadece Riemann metriği denir.

Bir Riemann metriği verildiğinde bir  $\vec{V}_P \in T_m(P)$  tanjant vektörünün boyu

$$g_P(\vec{V}_P, \vec{V}_P) = \|\vec{V}_P\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(P) dx_i|_P(\vec{V}_P) dx_j|_P(\vec{V}_P)$$

olarak tanımlanır. Eğer  $\vec{V}_P$ 'nin  $\{x_i\}$  koordinat sistemine göre bileşenleri  $(v_1, \dots, v_n)$  ise

$$g_P(\vec{V}_P, \vec{V}_P) = \|\vec{V}_P\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(P) v_i v_j$$

olur. Dolayısıyla Riemann metriği

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

notasyonu ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1980: 140).

**Tanım 2.29 (Riemann Manifoldu):** Bir  $M$  manifoldu üzerinde bir  $g$  Riemann metriği tanımlanmış ise bu  $(M, g)$  ikilisine Riemann Manifoldu denir (Hacısalıhoğlu, 1980: 140).

**Tanım 2.30 (Yarı-Riemann Manifold):**  $M$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M$  üzerinde vektör alanlarının kümesi  $X(M)$  ve reel değerli  $C^\infty$  fonksiyonlarının halkası da  $C^\infty(M, R)$  olmak üzere diferansiyellenebilir

$$\langle, \rangle: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

fonksiyonu

- i. 2-lineer
- ii. Simetrik
- iii.  $\forall x \in X(M)$  için  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \in X(M)$  (non-dejenere)

özelliklerini sağlıyor ise  $M$ 'ye bir Yarı-Riemann Manifold denir. (Sağlamer, 1995)

**Tanım 2.31 (İndirgenmiş Metrik Tensör):**  $M$  bir Yarı-Riemann manifold ve  $M$ 'nin  $k$ -boyutlu bir alt manifoldu  $\bar{M}$  olsun.  $M$ 'nin  $\langle, \rangle$  metrik tensörünün  $X(\bar{M})$ 'ye kısıtlanmasıyla elde edilen metrik tensöre indirgenmiş metrik tensör denir. Ve  $\bar{M}$ 'ya da indirgenmiş metrik tensör altında Yarı-Riemann manifold denir (Sağlamer, 1995).

**Tanım 2.32 (Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü):**  $M$  bir Yarı Riemann manifoldu olsun.

$$K: X(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(x, y, z, w) \rightarrow K(x, y, z, w) = \langle x, R(z, w)y \rangle$$

olarak tanımlanan 4. dereceden kovaryant tensöre ( $K \in T_4^0(X(M))$ ),  $M$  üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir. Burada

$$R(z, w)y = D_Z D_W Y - D_W D_Z Y - D_{[Z, W]} Y$$

da Riemann Eğrilik tensörüdür.

$$\textbf{Tanım 2.33 (Jacobi Özdeşliği): } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

**Tanım 2.34 (Riemann Yapı):**  $M$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M$  üzerindeki bir Pseudo-Riemann yapı (Yarı Riemann yapı)

- i)  $g(x, y) = g(y, x), \forall x, y \in X(M)$
- ii)  $\forall P \subset M$  noktasında  $\forall y_p \in T_m(P)$  için  $g(x_p, y_p) = 0$  olması  $x_p = 0$  olmasını gerektirir.

aksiyomlarını sağlayan (0,2) tipindeki bir

$$g: T_m(P) \times T_m(P) \rightarrow R$$

tensörüne denir.  $g_p$  tensörü  $\forall P \in M$  noktasında pozitif tanımlı ise yani

$$g_p(x_p, y_p) > 0 \Leftrightarrow x_p \neq 0 \text{ ve } g_p(x_p, y_p) = 0 \Leftrightarrow x_p = 0$$

ise  $g_p$  'ye bir Riemann yapı denir. (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 79)

**Tanım 2.35 (1. Bianchi Özdeşlikleri)**

- i)  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
- ii)  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z + R(Z, X)Y = 0$
- iii)  $g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)W, Z) = 0$
- iv)  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$  (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 82).

**Tanım 2.36 (Simetrizör):**  $X, Y, Z$  herhangi vektör alanları olmak üzere bir  $f(X, Y, Z)$  fonksiyonu için

$$S(f(X, Y, Z)) = f(X, Y, Z) + f(Z, X, Y) + f(Y, Z, X)$$

olarak tanımlanan  $S$  operatörüne simetrizör denir. (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 82)

**Tanım 2.37 (2. Bianchi Özdeşliği):**  $(M, g)$  bir  $n$ -boyutlu Riemann manifoldu ve  $R$  de  $M$  üzerinde  $D$  Levi-Civita koneksiyonuna göre Riemann tensörü olmak üzere  $\forall X, Y, Z \in X(M)$  için

$$(D_X R)(Y, Z) + (D_Z R)(X, Y) + D_Y R(Z, X) \equiv 0$$

$$S\{(D_X R)(Y, Z)\} \equiv 0$$

olur (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 84).

**Tanım 2.38 (Laplacian):** Öklid uzayı  $E^n$  klasik Laplacian

$$C^\infty(E^n, R) \xrightarrow{\text{grad}} X(E^n) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(E^n, R)$$

$$f \rightarrow \text{grad} f \rightarrow \text{div}(\text{grad} f)$$

$$\text{div}(\text{grad} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

olarak tanımlanır. Ve  $\Delta f$  ile gösterilir.  $\Delta f \in C^\infty(E^n, R)$  fonksiyonuna  $f$ 'nin Laplacianı denir. Laplacianın bu tanımının genellemesiyle elde edilen esas tanımı

$$\Delta f = g^{ij} D^2_{\partial_i \partial_j} f, \quad f \in C^\infty(E^n, R)$$

olarak alınabilir (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 94).

**Tanım 2.39 (Kesik Eğriliği):**  $M$  bir  $n$ -boyutlu Riemann manifoldu olsun.  $M$ 'nin bir  $P$  noktasındaki  $T_m(P)$  tanjant uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı  $P$  olsun  $P$ 'yi geren birim vektörler  $X_P, Y_P$  olsun. Yani  $P = S_P\{X_P, Y_P\}$  olsun. O zaman  $M$  üzerindeki eğrilik tensörü  $R$  olduğuna göre

$$R(X_P, Y_P, Y_P, X_P)$$

değerine  $M$ 'nin  $p$  noktasında  $P$  düzlemine göre Kesik Eğriliği denir. (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 97)

**Tanım 2.40 (Gauss Eğriliği):**  $R$  tensörü simetrik ve antisimetrik olduğundan bu eğriliğin değeri sadece  $P$  alt uzayına bağlıdır. Yani  $P$ 'yi geren  $X_P, Y_P$  birim vektörlerine bağlı değildir.  $M$ 'nin metriği  $g$  ve  $\{X_P, Y_P\}$  üzerine kurulabilen paralelkenarın alanı  $\|X_P, Y_P\|$  olmak üzere  $M$ 'nin  $p$  noktasına  $P$  düzlemine göre Gauss Eğriliği  $K(P)$  ise

$$K(P) = \frac{g(R(X_P, Y_P)Y_P, X_P)}{\|X_P, Y_P\|^2}$$

olur. (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 97)

**Tanım 2.41 (Ricci Eğriliği):**  $M$  bir Riemann  $n$ -manifoldu olsun.  $M$ 'nin bir  $P$  noktası ile bu noktadaki bir  $X_P$  tanjant vektörü verilmiş olsun.  $T_m(P)$ 'nin  $X_P$ 'yi ihtiva eden bütün 2-boyutlu alt uzaylarına göre kesik eğriliğinin toplamı  $M$ 'nin  $P$  noktasında  $X_P$  doğrultusundaki Ricci Eğriliği olarak adlandırılır. Bu eğriliğin hesaplanması için  $T_m(P)$ 'nin bir  $\{e_i\}$  ortonormal bazı seçilir. O zaman  $P = S_P\{x, e_i\}$  olmak üzere  $P_i$ 'ye göre olan kesik eğriliği

$$R(e_i, x, x, e_i) = g(R(e_i, x)x, e_i)$$

olmak üzere  $M$ 'nin  $P$  noktasında  $X_P$  doğrultusundaki  $g(x)$  Ricci Eğriliği

$$g(x) = \sum_{i=1}^n R(e_i, x, x, e_i)$$

veya  $X = x^k e_k$  olmak üzere

$$g(x) = x^k x^r \sum_{i=1}^n R(e_i, e_k, e_r, e_i)$$

$$g(x) = g_{kr} x^k x^r$$

olarak hesaplanır. Burada  $g_{ij}$ 'ler Ricci tensörünün bileşenleridir (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 97-98).

**Tanım 2.42 (Skaler Eğrilik):**  $M$  bir Riemann  $n$ -manifold olsun.  $M$ 'nin bir  $P$  noktasındaki Skaler Eğriliği;  $T_m(P)$ 'nin bütün 2-boyutlu alt uzaylarına göre olan kesik eğriliklerinin toplamına denir. Ve

$$T(P) = \sum_{i \neq j=1}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i)$$

ile hesaplanır. (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 98)

**Tanım 2.43 (Ricci Özdeşliği):**

$$h_p = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i R|p(x_i, y_i) | x_i, y_i \in T_m(P), a_i \in R \right\}$$

cümlesi tanımlansın. 1. Bianchi Özdeşliğinden  $h_p, (T_m(P), g|p)$  tanjant Öklid uzayında antisimetrik endomorfizmlerin lineer cümlesidir. Bu cümle  $R|p(X, Y)$  biçimindeki tensörler tarafından gerilir.  $\forall X, Y, U, V \in T_m(P)$  için Ricci Özdeşliği;

$$\begin{aligned} [R|_p(U, V), R|_p(X, Y)] &= R|_p(U, V) \circ R|_p(X, Y) - R|_p(X, Y) \circ R|_p(U, V) \\ &= R|_p(R|_p(U, V)X, Y) + R|_p(X, R|_p(U, V)Y) \end{aligned}$$

Bu özdeşlikle tanımlanan  $[ , ]$  operatörü  $h_p$  antisimetrik uzayını bir Lie cebiri yapar (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 98).

**Tanım 2.44 (Ricci Tensörü):**  $(M, g)$  bir  $n$ -boyutlu Riemann manifoldu ve  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   $X(M)$ 'in bir bazı olsun.

$$\tilde{S}: X(M) \rightarrow X(M)$$

$$x \rightarrow \tilde{S}(x) = - \sum_{i=1}^n R(X_i, X)X_i$$

biçiminde tanımlanan  $\tilde{S}$  operatörüne  $M$ 'nin Ricci operatörü denir.  $\tilde{S}$  yardımı ile  $M$ 'nin Ric veya  $S$  ile gösterilen Ricci Eğrilik Tensörü

$$Ric: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = Ric(X, Y) = g(\tilde{S}(X), Y) = -g\left(\sum_{i=1}^n R(X_i, X)X_i, Y\right)$$

olarak tanımlanan bir  $(0,2)$  tensördür. Ricci eğrilik tensörünün bir  $P \in M$  noktasındaki değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} Ric(X_p, Y_p) &= g(\tilde{S}(X_p), Y_p) = -g\left(\sum_{i=1}^n R(X_i|_p, X_p)X_i|_p, Y_p\right) \\ &= - \sum_{i=1}^n R(X_i|_p, X_p)g(X_i|_p, Y_p) \end{aligned}$$

olur. Eğer  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ortanormal baz ise  $g(X_i|_p, Y_p)$  değeri  $Y_p$ 'nin  $X_i|_p$  üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğudur. Buna göre  $X_i|_p$ ,  $1 \leq i \leq n$ 'ler üzerindeki  $Y_p$ 'nin dik izdüşümlerinin  $R(X_i|_p, Y_p)$  katlarının toplamı olarak  $P$  deki Ricci Eğriligi elde edilmiş olur. (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003: 155).



### 3. RIEMANN GEOMETRİ

Bu bölümde Can Gürses'in Einstein'ın Özel-Genel Görelilik Kuramları yazı dizisi başlıklı çalışmasından yola çıkılmıştır ve Matematiksel ayrıntıya girmeden konunun özetlenmesine özen gösterilmiştir.

Einstein görelilik kavramı üzerine düşünmeye Aaron Bernstein'in "Doğa Bilimleri Üzerine Popüler Kitaplar" serisinden esinlenerek başlamıştır. Bu kitapların birinde, bir ışık huzmesinin üzerine oturulduğunun hayal edildiği düşünsel deney onu etkiler ve bunun nasıl bir şey olabileceğini düşünmeye başlaması daha sonraki yıllarda bilim ve insanlık tarihindeki en önemli gelişmelerden birini gerçekleştirmesine neden olur.

Einstein çok temel iki kabul ile başlar; Birincisi, Fizik yasaları her eylemsiz gözlem çerçevesinde aynı çalışır. Bu şu şekilde açıklanabilir. Üzerinde net kuvvet olmayan yani ivmelenmeyen her ortamda fizik yasaları aynıdır. Örneğin; Otururken yere düşen elma yüzlerce km/saat sabit hızla havada giden uçakta da düşse aynı şekilde yere düşer. İkincisi, Işık hızı her eylemsiz referans noktası için aynı ve sabit değere sahiptir ( $c \cong 300$ bin km/saat). Bu da şu şekilde açıklanabilir. İster çok hızlı giden bir uzay aracında ister hareketsiz bir zeminde ölçüm yapılsın ışık hızı evrensel bir sabittir.

Bu bir örnek ile şöyle açıklanabilir. Bir A olayı düşünölsün. A olayı  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  koordinatları ile tanımlansın (uzay koordinatları ve zaman). Bu A olayı sabit duran bir O ortamında gerçekleşsin. Yine bu O ortamında başka bir olay B olsun. B olayı  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  koordinatları ile temsil edilsin. A noktasından B noktasına bir ışık yollandığı düşünölsün. Bu yolla iki olay arasındaki mesafe basit şekilde; iki noktanın koordinatlarının farkının büyüklüğü

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (3.1)$$

olur. Aynı zamanda A dan B'ye gönderilen ışığın alacağı mesafe

$$c(t - t') \quad (3.2)$$

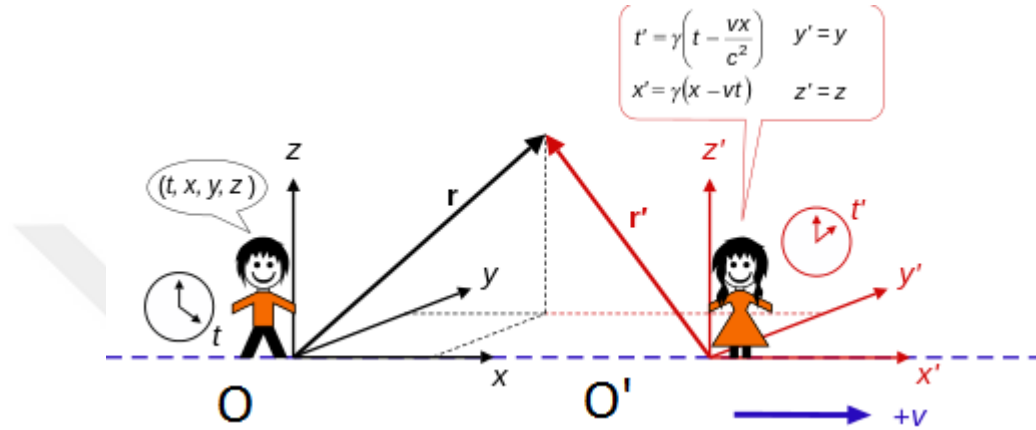
şeklinde bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} &= c(t_1 - t_2) \\ c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3a)$$

elde edilir.

Şimdi durağan O ortamından farklı O' ortamını düşünülürse bu O' ortamını O'ya göre x-ekseninde V hızı ile hareket ediyor olsun. Aynı deney farklı iki olay arasında yapılırsa ve yine aralarındaki mesafe ölçülürse bu defa farklı bir koordinat sisteminde benzer denklem elde edilir.

$$c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 = 0 \quad (3.3b)$$



**Şekil 3.1.** O ortamını ve O'ya göre x-ekseninde V hızı ile hareket eden O' ortamını üzerinde aynı deneyin farklı iki olay arasında yapılmasının gösterimi.

Bu şöyle özetlenebilir; İki farklı ortamda olan olaylar arasındaki mesafeyi ölçen iki denklem olan (3.3a) ve (3.3b) denklemleri birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned} c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 \\ = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. O'; O ya göre v hızıyla ve x-ekseni yönünde ilerlemektedir. Matematiksel hesap yapmadan bu eşitlikte y ve z koordinatları görmezden gelinir (sıfıra eşitlenip). Ek olarak, A olayı orijine yani (0,0,0,0) noktasına alınırsa denklem

$$c^2t^2 - x^2 = c'^2t'^2 - x'^2 \quad (3.5)$$

olur. Bu denklemin çözümü

$$x = x' \cosh h\Psi + ct' \sinh h\Psi \quad (3.6)$$

$$ct = x' \sinh h\Psi + ct' \cosh h\Psi \quad (3.7)$$

olur. Bu iki denklemden x ve t hesaplanırsa

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.8)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.9)$$

olur. Böylece bir düşünce deneyinden yola çıkarak, biri diğerinden sabit  $v$  hızıyla uzaklaşan iki ortamdaki olayların koordinatları arasındaki ilişki bulunabilmiştir. Üstelik ikisi arasındaki ilişki bir ışık hızına bağlıdır.

Yukarıda  $x$  ve  $t'$ 'yi veren denklemlerde  $v$  çok küçük alınırsa ışık hızına oranı çok küçük olur. Bu durumda denklem

$$x = x' + vt', \quad t = t' \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. Kuantum fiziği, nasıl çok küçük boyutlarda Newton fiziğinden farklı bir dünya olduğunu gösteriyorsa Özel Relavite de, ışık hızına yakın hızlarda Newton fiziğinin değiştiğini göstermektedir. Göreceli hızlar küçükse sorun yoktur. Işık hızına yakın hızlarda ise durum değişir. Sonuç olarak;

1. Görece hız ışık hızına yaklaştığında mesafeler daralmaktadır.
2. Görece hız ışık hızına yaklaştığında zaman yavaşlamaktadır.

Anlaşılması daha kolay olsun diye buna şöyle bir örnek verilebilir; GPS sistemlerinin tamamı, yörüngedeki uyduların dünyanın çevresinde çok hızlı dönmesinden kaynaklı yaşanan(çok ufakta olsa) zaman kayması hesap edilerek tasarlanmaktadır.

Ya da şu örnek seçilebilir; meşhur  $E = mc^2$  denklemi

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.11)$$

bağıntısında az önce  $x$  ve  $t$  için bulunan bağıntıları kullanarak elde edilebilir. Buradaki soru şudur. Göreceli hız sabit değilse ne olacaktır?

Tam bu noktada Twin Paradoksundan bahsedilirse, paradoks şöyledir: ikiz kardeşler düşünülün. Bu kardeşlerden biri rokete atlayıp uzayda yolculuğa çıkıp 30 yıl sonra geri dönsün diğeri dünyada kalsın. İkiz kardeşi ile tekrar karşılaştığında uzaydaki kardeş 26 yıl yaşlanırken dünyadaki kardeşin 30 yıl yaşlandığı görülür. Bu durum nasıl meydana gelmiştir?

Burada Dünyadaki kardeş rokettekini sabit hızla uzaklaşırken, roketteki kardeş de dünyadakini sabit hızla uzaklaşırken görüyor. Birbirlerinin ortamları hakkında algıları görünüşte aynı iken rokettekini daha genç dönmesinin sebebi, uzay yolculuğu yapan kardeşin tam geri dönme sırasında sabit hızlı ortam özelliğini kaybedip ivmelenmesidir. Tam bu dönüş anındaki ivmenin yaşandığı esnada dünyadaki kardeş 4 yıl yaşlanmıştır.

Bu bilgiler ışığında Özel Göreliliğin temel prensipleri hakkında bilgi sahibi olunabilir. Einstein'ın Genel Görelilik kuramında karşılaşılan Einstein Alan denklemi aşağıdaki gibidir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

Bu kısımda Einstein Alan denklemlerinde geçen; Metrik Tensör, Ricci Tensör, Ricci sabiti, Christoffel Sembolü gibi matematiksel terimler incelenmiştir. Konu ile alakalı olduğu için Fizikteki Stress-Enerji Tensöründen de kısaca bahsedilmiştir.

(3.12) denklemin sağ tarafı Stress-Enerji Tensörü ( $T_{\mu\nu}$ ), G Newton'un yerçekimi sabiti ve c ışık hızını içermektedir. Ve sol tarafında ise Metrik Tensör ( $g_{\mu\nu}$ ), Ricci Tensör ( $R_{\mu\nu}$ ), Ricci sabiti (R) yani Tensör kavramı vardır. Bu konudan Riemann geometri konu başlığı altında bahsedilmesinin nedeni Riemann'ın manifold kavramı tanımlaması ile Öklid dışı geometrilerin varlığını bulması, Tensör ve Metrik Tensörü tanımlamasıdır.

Öncelikle Stres-Enerji tensörü şu şekilde açıklanabilir:

Düz bir zemin üzerinde iki nokta arasındaki en kısa mesafeyi veren rota, o iki noktanın birleştirilmesi ile oluşan doğrudur. Yalnız zemin küre veya başka bir yapı olabilir. Genel olarak herhangi bir geometrik yapı üzerinde iki nokta arasındaki en kısa mesafeyi veren eğriye jeodezik denmektedir. Bu geometrik yapı bir küre olsun. Küre üzerinde iki noktayı birleştiren en kısa yol; bu noktaları birleştiren eğriye teğet olan doğru için  $\frac{dx^m}{dt}$  türevinin sifıra eşitlenmesidir.

$$\nabla \frac{dx^m}{dt} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{d^2x^m}{dt^2} + \Gamma = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{d^2x^m}{dt^2} = -\Gamma \quad (3.15)$$

(3.15)'de sol taraf ivme; yani  $F=ma$  formülünden Cristoffel Sembolü  $\Gamma \sim F$  dir. Özetle Cristoffel sembolü denilen matematiksel kavramın kuvvetle doğrudan bir ilişkisi vardır. Cristoffel sembolü; türevin farklı geometrilerdeki (uzaylardaki) karşılığında gelen ekstra düzeltme terimi iken burada

kuvvet ile doğrudan eşit olduğu bulunmuştur. Türev yüzeyin eğimini hesaplar yani bir anlamda; her hangi bir geometrideki eğim hesabının normal kartezyen uzaya göre olandan farklı (ekstra) kısmını veren terimin (Cristoffel sembolünün) aslında kuvvet terimi olduğu görülmüştür. Bu bir anlamda geometrinin getirdiği yüzey gerilimi olarak düşünülebilir.

Aslında Christoffel sembolünün açık hali

$$\Gamma = \frac{1}{2}g^{ad} \left( \frac{\partial g^{dc}}{\partial x^b} + \frac{\partial g^{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g^{bc}}{\partial x^d} \right) \quad (3.16)$$

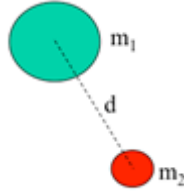
şeklindedir. Tamamen yavaş hareketler incelenirse genel görelilik, Newton mekaniğine yaklaşır. Metrik Tensör olan g terimi bir sabite dönüşür. g'nin tek önemli terimi zaman terimi olur. Buradan

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{00}}{\partial x} \equiv F \quad (3.17)$$

dır. Yine temel fizik derslerinden her kuvvetin bir P potansiyelden doğduğu hatırlanırsa.

$$F = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\nabla P \quad (3.18)$$

dır. Yani  $g^{00} = -2V + \text{sabit}$  olur. Yine temel fizikten iki kütle arasındaki temel çekimi veren kuvvet formülü  $F = -\frac{GMm}{r^2}$  ve  $Fg = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$  dir.



**Şekil 3.2.**  $m_1, m_2$  ve aralarındaki mesafenin gösterimi.

Burada m birim kütle yani 1 alınır; m'nin M etrafında çevrelediği tüm daire üzerindeki kuvvet

$$\int F dA = -GM4\pi \quad (3.19)$$

olarak hesaplanabilir. Yani bir anlamda M kütleinin r çapındaki çember yüzeyine uyguladığı toplam kuvvettir. Bu aşamada Divergence teoreminden (Herhangi bir vektörün bir yüzey alanındaki toplam değeri, o vektörün türevinin kapalı yüzeyin hacminin içindeki toplam değerine eşittir.) yararlanılırsa

$$\int F dA = \int \nabla F dV \quad (3.20)$$

olur.

$$\nabla F = -4\pi G\rho \quad (\rho:\text{yoğunluk terimi}) \quad (3.21a)$$

$$\nabla^2 P = 4\pi G\rho \quad (P:\text{potansiyel}) \quad (3.21b)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{2}g^{00} = 4\pi G\rho \quad (3.22)$$

$$\nabla^2 g^{00} = 8\pi G\rho \quad (3.23)$$

Sağ taraftaki yoğunluk teriminin en genel hali bir cismin her yüzeyindeki kuvvetini veren Stress-Enerji Tensörü ile yer değiştirilirse  $8\pi GT^{mn}$  elde edilir. Soldaki  $\nabla^2 g^{00}$  terimi Ricci Tensörünün

$$R_{mn}w = (\nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m)w \quad (3.24)$$

Newton mekaniğindeki halinin yakınsaması gibidir. Yalnız dikkat edilmesi gereken eğer

$$R^{mn} = 8\pi GT^{mn} \quad (3.25)$$

yazılırsa yanlış olur. Çünkü enerjinin korunumu yasasından  $\nabla T^{mn}=0$  dır. Bu kullanılırsa  $\nabla R^{mn} \neq 0$  fakat Ricci Tensörden

$$\nabla R^{mn} = \frac{1}{2}(\nabla g^{mn} R) \quad (3.26)$$

ya da

$$\nabla \left( R^{mn} - \frac{1}{2}(g^{mn} R) \right) = 0 = \nabla T^{mn} \quad (3.27)$$

türevler kullanılırsa

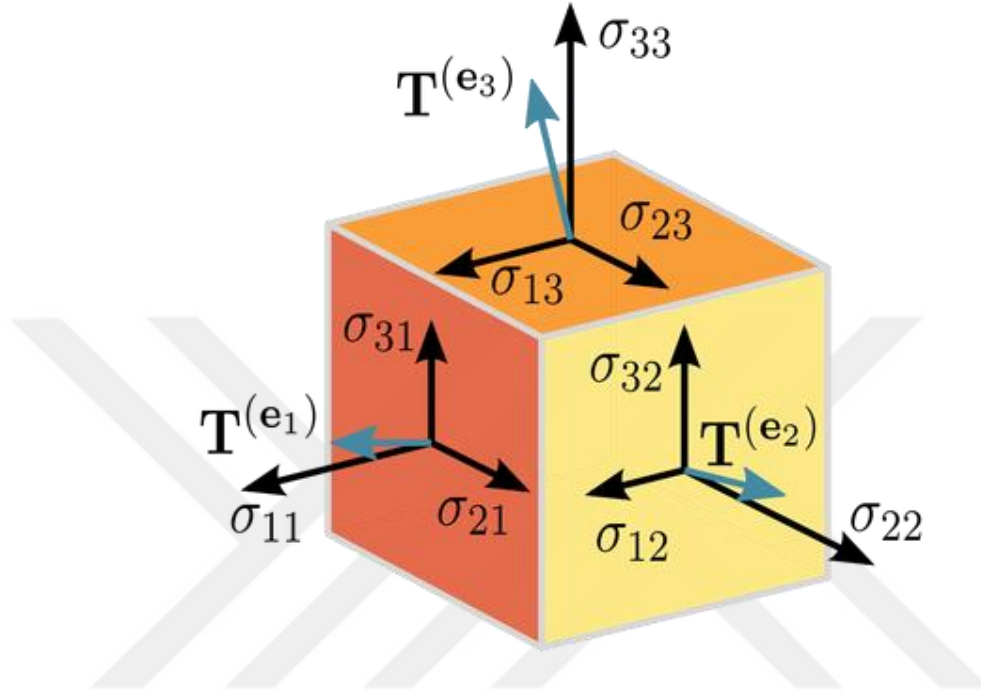
$$R^{mn} - \frac{1}{2}(g^{mn} R) + \text{sabit} g^{mn} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{mn} \quad (3.28)$$

olur. Sabit terime kozmolojik sabit denir.

Artık denklemin sol tarafında bulunan Metrik tensör, Ricci tensör ve Cristoffell Sembolleri özetlenecek olursa;

Tensör en genel haliyle bir ölçü birimidir. Örneğin; skaler basitçe herhangi bir fiziksel ölçümün değeridir(25kg,32celcius, vb...) ve herhangi bir yön unsuru içermez sadece nicelik simgeler. Vektör ise hem nicelik hem de yön belirten bir kavramdır. Burada skaler 0. dereceden,

vektör de 1. dereceden tensördür. 2. dereceden tensör olarak  $T_{mv}$   $m,v=x,y,z$  alınırsa bu tensör 3 boyutlu herhangi bir cismin her yüzeyine uygulanan kuvvetin total bir gösterimidir.



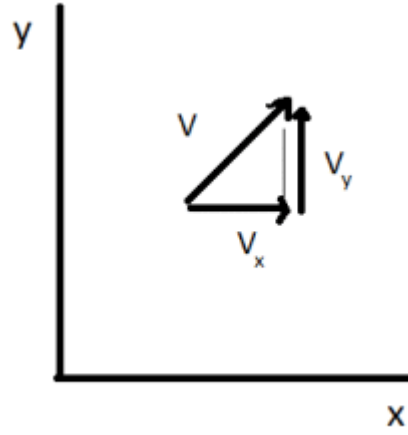
Şekil 3.3. Üç Boyutlu her hangi bir cismin her yüzeyine uygulanan kuvvetin gösterimi.

Örneğin;  $T_{xy}$   $xy$  düzlemine etkiyen,  $T_{zx}$   $zx$  düzlemine etkiyen kuvveti temsil etsin. Bu kuvvetlerin hepsi bir matriste  $\begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$  şeklinde gösterilebilir. Bunu daha yüksek boyutlara taşımak mümkündür. Bu da 3. dereceden, 5. dereceden vb. kavramlarını ortaya çıkarır.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

Einstein denklemlerinde her şey 2. dereceden tensörler cinsinden yazılmıştır. Hepsinin örnekte verildiği gibi, bir cismin içinde her yöne etki eden kuvvetlerin temsiline benzer şekilde bir anlamı vardır.

Metrik tensör ise en basit anlatımla; bir vektörün boyu Pisagor bağıntısıyla



**Şekil 3.4.** Koordinat düzleminde bir vektörün boyutunun Pisagor bağıntısıyla gösterimi.

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad (3.29)$$

şeklinde bulunur. Bu uzaklığı çok küçük bir vektör için hesaplarken türev notasyonu kullanılabilir.  $ds$  adını vereceğimiz küçük vektör benzer şekilde hem  $x$  yönünde hem  $y$  yönünde değişimlerin toplamı olacaktır.  $x$  yönündeki ufak bir değişim  $dx$ ,  $y$  yönündeki ufak bir değişim  $dy$  olsun;

$$\vec{ds} = \vec{dx} + \vec{dy} \text{ ve } ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.30)$$

olur.

Dolayısıyla herhangi bir  $Q$  büyüklüğü verildiğinde  $Q$ 'nun  $s$  vektörü yönündeki değişimini incelemek için  $Q$ 'nun hem  $x$  hem de  $y$  yönündeki değişimlerini incelemek gerekir.

$$dQ_x = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (3.31)$$

$$dQ_y = \frac{\partial Q}{\partial y} dy \quad (3.32)$$

$$dQ_s = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \quad (3.33)$$

Bu durumu sadece  $xy$  düzlemi için değil en genel hali olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  boyutlu koordinat sistemi için yazmak gerekirse

$$dQ_s = \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial Q}{\partial x_n} dx_n \quad (3.34)$$



$$dQ_s = \sum_1^n \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i \quad (3.35)$$

olur. Yani yapılan iş, her yöndeki değişimi alıp toplamaktan ibarettir.

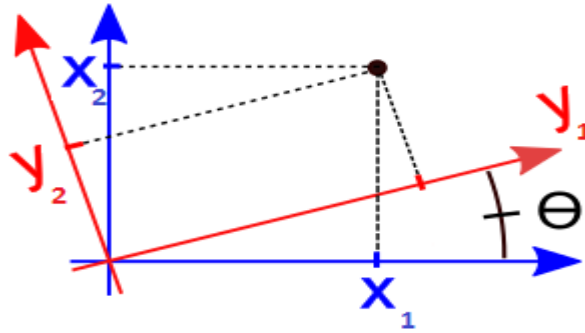
Benzer şekilde

$$ds^2 = \sum_{mn} x^m x^n = \delta_{mn} \sum_{mn} x^m x^n \quad (3.36)$$

olur. Burada

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3.37)$$

Kronecher Delta olarak adlandırılır.  $\delta_{mn}$   $ds^2$  yi dx'lerin karelerinin toplamı olarak yazmayı kolaylaştırmaktadır. Şimdi x- koordinat sisteminden farklı bir y-koordinat sistemine geçilirse



Şekil 3.5. İki boyutta bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçişin gösterimi.

Bu durumun en genel hali;

$$ds^2 = \delta_{mn} \sum_{mn} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} dy_r \frac{\partial x_n}{\partial y_s} dy_s \quad (3.38)$$

(r,s indisleri üzerinden toplam alınmaktadır.)

Ve burada terimler yeniden düzenlenir ise

$$ds^2 = \delta_{mn} \sum_{mn} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} \frac{\partial x_n}{\partial y_s} dy_r dy_s \quad (3.39)$$

olur. Normalde

$$ds^2 = \delta_{rs} dy_r dy_s \quad (3.40)$$

olduğu için bu iki terim arasındaki fark koordinat değişiminden gelen ekstra bir ifadedir. İşte bu ifadeye metrik tensör denir. Bu nedenle

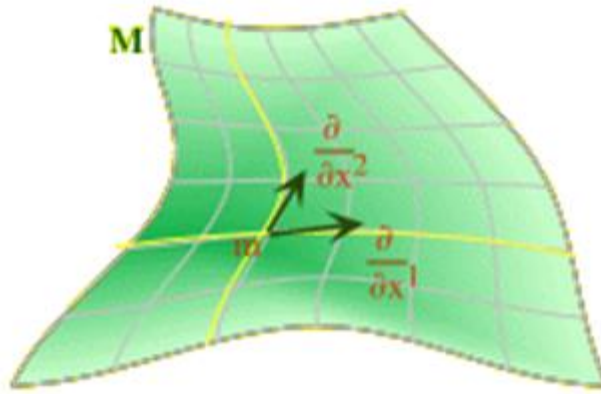
$$g_{rs} = \delta_{mn} \sum_{mn} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} \frac{\partial x_n}{\partial y_s} \quad (3.41)$$

ile gösterilmektedir.

Bunu yorumlamak gerekirse öncelikle normal bir kartezyen koordinat sisteminde, bir vektörün büyüklüğü hesaplanılmış sonra koordinat değişimi yapılmış ve bu vektörün büyüklüğünü veren denklemde, metrik tensör ifadesi gibi bir değişim faktörü bulunmuştur.

Buradan çıkarılacak sonuç, bir vektörün büyüklüğü hesabı için koordinat değişimi yine benzer bir kartezyen sistemde yapılır ise büyüklük değişmez. Ancak bu vektörün büyüklüğü örneğin bir kürenin üzerinde hesaplanırsa o zaman metrik tensör kadar bir kalibrasyon olur.

Özetle Metrik tensör; içinde bulunan uzayın geometrisinin normal kartezyen koordinat sisteminden yani Öklid uzayından ne kadar farkı var ve ne kadar kalibre olmuş onu açıklamaktadır.



$$g_{11} = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad g_{21} = \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad g_{12} = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad g_{22} = \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

**Şekil 3.6.** Herhangi bir uzayın geometrisin metrik tensör sayesinde normal kartezyen koordinat sisteminden farkının bulunabileceğinin gösterimi.

Bu bilgiler ile Einstein alan denklemi daha iyi anlaşılmaktadır. Burada metrik tensör kavramı önemlidir. Hem farklı uzayların yapısını tek bir ifadede özetleyen bir araçtır hem de birini diğerine göre kıyaslama imkanı vermektedir. Fizikçilerin evreni doğru modelleyen

kuramları arayışındaki en temel noktalardan biri de, modeli doğru bir geometride (yani doğru bir metrikte) tanımlamak gereksinimidir.

Şimdi Ricci tensör, Ricci sabiti ve Cristoffell Sembolleri incelenebilir. Fakat öncesinde tensörler için geçerli olan şöyle genel bir bilgi verilebilir:

Herhangi iki  $W, V$  tensörleri  $x$ -koordinat sisteminde eşitse yani  $W_{\mu\theta}(x) = V_{\mu\theta}(x)$  ise bu eşitlik koordinat sisteminde gösterilebilir. Ancak bu durum tensörlerin türevleri için geçerli değildir. Çünkü fonksiyonun belirli bir noktadaki türevi, farklı koordinat sistemlerinde farklı olabilir. Yani

$$T_{\mu\theta}(x) = \frac{dV_{\mu}(x)}{dx_{\theta}} \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanmış bir tensör varsa; Bu tensör başka bir  $y$ -koordinat sisteminde otomatik olarak

$$T_{\mu\theta}(y) = \frac{dV_{\mu}(y)}{dx_{\theta}} \quad (3.43)$$

olacaktır denilemez. Farklı bir koordinat sistemine geçildiğinde (hesaplar atlanılmıştır) bir tensörün türevi şöyledir:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^m} + \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{\partial x^r}{\partial y^m} V_r(x) \quad (3.44)$$

Burada

$$\frac{\partial}{\partial y^n} \frac{\partial x^r}{\partial y^m} = \Gamma \quad (3.45)$$

olur.  $\Gamma$  Christoffel Sembolü olarak adlandırılmaktadır. Böylece bir tensörün bir koordinat sistemindeki türevi, başka bir koordinatta Christoffel Sembolü kadar bir değişime uğruyor denilebilir.

Buradan bir tensörün türevinin genel tanımı

$$T_{mn} = \nabla_n V_m(x) = \frac{\partial V_m}{\partial y^n} + \Gamma_{mn}^r V_r \quad (3.46)$$

şeklinde ifade edilir. Bu tanımdan  $T_{mn}$ 'nin türevi

$$\nabla_n T_{mn} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial y^p} + \Gamma_{pm}^r T_{rn} + \Gamma_{pn}^r T_{mr} \quad (3.47)$$

dır.

Metrik tensör özetle bir uzayın kartezyen koordinatlara göre farkını vermektedir yani içinde bulunulan uzayın geometrisini tanımlamaktadır. O zaman bir tensörün türevini alma işlemi (3.44) denklemindeki gibi yapılır ve bu metrik tensör için uygulanırsa üzerinde çalışılan uzayın eğimi hesaplanmış olur.

Metrik tensör için

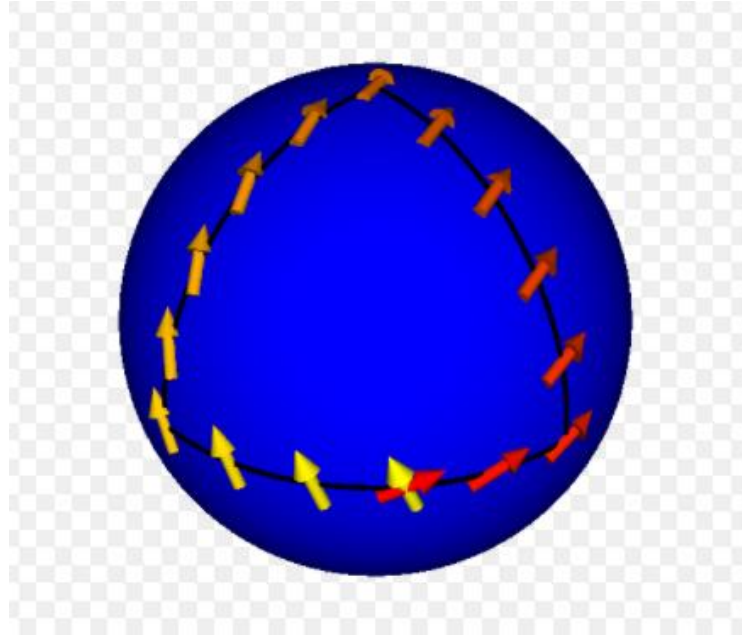
$$g_{mn} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3.48)$$

kovaryant türevi sıfırdır. Yalnız bir tensörün kovaryant türevi bir koordinatta 0 ise her koordinatta 0 olması gerektiği için

$$\nabla_n g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial y^p} + \Gamma_{pm}^r g_{rn} + \Gamma_{pn}^r g_{mr} = 0 \quad (3.49)$$

olur. Buradan Christoffel sembolleri hesaplanabilir.

Bu (3.49) denkleminde Christoffel sembollerinin geçmesinin ve önemli olmasının nedeni bir örnekle şu şekilde açıklanabilir. Bir küre üzerinde bir üçgen ve bu üçgen üzerinde bir vektör alınır. Eğer bu vektör üçgen üzerinde kendisine paralel olarak taşınırsa vektör başladığı noktaya geldiğinde, büyüklü aynı kalırken, yönü farklı olacaktır.



**Şekil 3.7.** Küre üzerinde bir üçgen ve bu üçgen üzerinde bir vektörün paralel taşınması sonucu başlangıç noktasına geri geldiğinde uzunluğu aynı kalırken yönünün değişeceğinin gösterimi.

Bunun aynısı küre üzerinde değilde dikdörtgen üzerinde yapılırsa, vektörün ne yönü ne boyutu değişir. Paralel taşıma dediğimiz işlemi yaptığımızda bir vektör aynı da kalabilir farklı da olabilir. Bu iki vektör arasındaki fark  $dV$  diye tanımlanırsa;

$$dV = dx^m dx^n V(\nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m) \quad (3.50)$$

$$R_{mn} w = (\nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m) \quad (3.51)$$

olur.

Burada  $R_{mn}$  Ricci tensör olarak adlandırılır. Yani Ricci tensör bir anlamda içinde bulunduğu uzayda bir vektör paralel taşıdığı anda her noktada uğradığı değişimin, normal kartezyen koordinattaki durumundan farkını verir.

Bu bölümü özetlenirse:

- 1) Metrik tensör, bir uzayın kartezyen koordinatlara göre farkının (ya da ne kadar kalibre olduğunun) bilgisini veren tensördür. Yani içinde bulunulan uzayın geometrisini tanımlayan tensördür.
- 2) Farklı koordinatlarda bir tensörün türevinin ne kadar kalibre olduğunun ölçüsünü Cristoffel sembolleri vermektedir.
- 3) Bazı geometrilere bir vektör paralel taşıdığı anda aynı şekilde geriye dönmeyebilir. Bu taşıma işlemi sırasında bir vektörün her noktada ki bilinen kartezyen koordinatlara göre farklılığının ölçüsü Ricci tensör tarafından belirlenir.
- 4) Einstein denkleminde  $R$  şeklinde geçen ve Ricci sabiti olarak adlandırılan sabitte tamamen bu Ricci tensöründen çıkarılan bir sabittir.  $R=0$  ise uzay, eğimi olmayan Öklid uzaydır.  $R \neq 0$  ise uzay eğimlidir.
- 5) Bir cismin her yüzeyine uygulanan kuvvetin miktarını Einstein alan denkleminin sağ tarafında bulunan Stress-Enerji tensörü verir.

Böylece Einstein denkleminde bulunan bütün semboller özetlenmiştir. Denklemin sol tarafı Ricci tensör, Ricci sabiti ve metrik tensörden oluşmaktadır. Yani içinde bulunulan uzay geometrisi ile ilgilidir. Sağ taraf ise geometriye dair hiçbir şey içermemektedir. Stres- Enerji tensörü içerir.

Sonuç olarak kütle çekiminin uzayın geometrisinden ileri gelen bir kavram olduğu gözlemi Einstein denkleminin bu yapısından gelmektedir. Ayrıca hangi geometri de olduğuna vurgu yapmaz. Yani bu denklemin çok farklı boyuttaki veya özellikteki uzaylarda (geometrilere) çok ilginç çözümleri mümkündür.

### 3.1. Riemann Manifold ve Pseudo-Riemann Manifold

Bir önceki bölümde daha az matematik gerektiren bilgiler(sadece meraklı olanlar için) verildikten sonra Riemann geometrisinin matematik dilinde ayrıntılı bir anlatımı yapılarak örnekler verilecektir.

Bir manifold lokal olarak  $R^n$  gibi görünen bir topolojik uzaydır. Manifold üzerindeki hesap düzgün koordinat sistemlerinin varlığı ile sağlanır. Bir manifold  $R^n$  de iki vektör arasındaki iç çarpımın doğal genellemesi olan bir metrik tensör ile donatılmışsa başka bir yapı taşıyabilir. Bu yeni yapı ile  $T_pM$  tanjant uzayında iki vektör arasında bir iç çarpım tanımlanabilir. Ayrıca bir  $p \in M$  noktasındaki bir vektör bir  $p' \in M$  noktasındaki başka bir vektörle “koneksiyon” yardımıyla karşılaştırılabilir. (Riemann Geometri hakkında birçok kitap vardır. Burada Mikio Nakahara'nın “Geometry, Topology and Physics kitabından yararlanılmıştır.)

#### 3.1.1. Metrik tensör

Geometride, U ve V vektörleri arasındaki iç çarpım

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^m U_i V_i \quad (3.52)$$

biçiminde tanımlanmıştır.  $U_i$  ve  $V_i$  bileşenleri  $R^m$  üzerindeki birer vektör olsun. Bir manifold üzerinde her  $T_pM$  Tanjant uzayı için bir iç çarpım tanımlanabilir.

Tanım 3.1. M bir türevlenebilir manifold olsun. bir g Riemann metriğinin M üzerinde (0,2) tipinde tensör olması için her  $p \in M$  için

- (i)  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
- (ii)  $g_p(U, U) \geq 0$ ,  $U=0$  olduğunda eşitlik geçerlidir.

şartlarını sağlaması gerekir. Burada  $U, V \in T_pM$  ve  $g_p = g|_p$  dir. Kısaca  $g_p$  simetrik pozitif tanımlı bilineer formdur. Bir (0,2) tipindeki g tensör alanı eğer (i) doğru ve (ii)  $g_p(U, V) = 0$  ise her  $U \in T_pM$  ve  $V=0$  şartlarını sağlarsa g'ye Pseudo-Riemann metrik denir.

$V \in T_M$  vektörü ve dual vektör  $W \in T_p^*M$  arasındaki iç çarpımı

$$\langle , \rangle: T_p^*M \times T_pM \rightarrow R \quad (3.53)$$

dönüşümü olarak da tanımlanabilir. Eğer bir g metriği varsa  $U, V \in T_pM$  iki vektörü  $g_p(U, V)$  sayesinde iç çarpım olarak tanımlanır.  $g_p$  dönüşümü

$$T_pM \otimes T_pM \rightarrow R \quad (3.54)$$

olduğundan

$$g_p(U, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.55)$$

$V \rightarrow g_p(U, V)$  sayesinde bir lineer dönüşüm olarak tanımlanır. Daha sonra  $g_p(U, \cdot), \omega_U \in T_p^* M$ 'nin bir biçimi ile tanımlanır. Benzer şekilde  $\omega \in T_p^* M$  ve  $V_\omega \in T_p M$

$$\langle \omega, U \rangle = g(V_\omega, U) \quad (3.56)$$

eşitliği ile sonuca varılır. Bu yüzden  $g_p$  metriği üzerinde  $T_p M$  ve  $T_p^* M$  arasında bir izomorfizm vardır.  $(U, \varphi), M$  de bir harita ve  $\{x^\mu\}$ 'de koordinatları olsun.  $g \in \tau_2^0(M)$  olduğundan  $dx^\mu \otimes dx^\nu$  terimleri de genişletilir.

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (3.57)$$

Bu ifade düzenlenirse;

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\nu\mu}(p) \quad (p \in M) \quad (3.58)$$

olur.

$(g_{\mu\nu})$ : girdileri  $g_{\mu\nu}$  ler olan  $(\mu, \nu)$  tipinde matris olarak yazılabilir.  $(g_{\mu\nu})$  matrisi bir ranka sahip olduğundan

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda \quad (3.59)$$

eşitliğine göre  $(g_{\mu\nu})$ 'nin tersi vardır. Ve  $g$ 'nin determinantı  $\det(g_{\mu\nu})$  şeklinde gösterilmek üzere  $\det(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$  olduğu açıktır.  $T_p M$  ve  $T_p^* M$  arasındaki izomorfizm

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu, \quad U^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu \quad (3.60)$$

şeklinde ifade edilebilir.

(3.57) ve (3.58) den metriğin karesi alınır ve  $dx^\mu, \partial/\partial x^\mu \in T_p$  g de yazılırsa;

$$ds^2 = g \left( dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu dx^\nu g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.61)$$

olur.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.62)$$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (3.63)$$

Metrik tensör olmasına rağmen bir metriktir.

$(g^{\mu\nu})$  bir simetrik matris olduğundan öz değerleri reel sayıdır.  $g$  Riemann ise tüm öz değerler kesinlikle pozitifdir. Eğer  $g$  Pseudo-Riemann ise bazıları negatif olabilir.  $i$  pozitif,  $j$

negatif öz değerleri için (i,j) çifti metriğin indeksi olarak adlandırılır. Eğer j=1 ise metrik Lorenz metriği olarak adlandırılır. Metrik uygun bir ortogonal matris ile köşegenleştirildikten sonra baz vektörlerin uygun bir artışını pozitif sayılarla  $\pm 1$  tüm köşegen elemanlarını azaltmak kolaydır. Bir Riemann metriği ile başlanırsa Öklidyen metrik  $\delta = \text{diag}(1, \dots, 1)$  ile bitirilir. Ve Lorenz metrik ile başlanırsa Minkovski metrik  $\eta = \text{diag}(-1, \dots, 1)$  ile bitirilir.

Eğer (M,g) Lorenziansa  $T_p M$ 'nin elemanları aşağıdaki gibi üç sınıfa bölünür.

- (i)  $g(U, U) > 0 \rightarrow U$  spacelike
- (ii)  $g(U, U) = 0 \rightarrow U$  lightlike(veya null)
- (iii)  $g(U, U) < 0 \rightarrow U$  timelike

(3.64)

olur.

Eğer M bir manifold g Riemann metriği olarak kabul edilirse (M,g) çifti bir Riemann manifoldu olarak adlandırılır. Eğer g Pseudo-Riemann metriği ise (M,g) Pseudo-Riemann manifoldu olarak adlandırılır. Eğer g Lorenzian ise (M,g) Lorenz manifoldu olarak adlandırılır. Lorenz manifoldları izafiyet teorisinde özel ilgi alanındadır. Örneğin m-boyutlu bir Öklid uzayı  $(R^m, \delta)$  bir Riemann manifoldudur. Ve m-boyutlu bir Minkowski uzayı  $(R^m, \eta)$  bir Lorenz manifoldudur.

### 3.1.2. İndirgenmiş metrik

M, n-boyutlu ve  $g_N$  metrikli Riemann manifoldunun m-boyutlu bir alt manifoldu olsun. Eğer  $f : M \rightarrow N$  gömme ise  $f^*$  ın geri çekilme dönüşümü M üzerinde doğal metrik  $g_M = f^* g_N$  olsun.

$$g_{M\mu\nu}(x) = g_{N\alpha\beta}(f(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} \quad (3.65)$$

şeklindedir. Burada  $f^\alpha$ , f(x) in koordinatlarını gösterir. Örneğin,  $(R^3, \delta)$  de gömülen birim küre üzerindeki metrik göz önüne alınsın.  $S^2$  nin  $(\theta, \phi)$  polar koordinatları verilsin.

$$f: (\theta, \Phi) \rightarrow (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (3.66)$$

şeklinde tanımlanırsa buradan İndirgenmiş Metrik;

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\Phi \otimes d\Phi \quad (3.67)$$

şeklinde elde edilir.



### 3.2. Paralel Taşınma, Koneksiyon ve Kovaryant Türev

Bir  $X$  vektörü  $f \in \mathcal{F}(M)$  ile  $X:f \rightarrow X[f]$  yönlü türevidir.  $M$  üzerindeki diferansiyel yapıda  $(p,q)$  tipinde tensör alanı üzerinde yönlü türev yoktur. (Lie türevi  $L_V X = [V, X]$  yönlü türev değildir. Çünkü  $V$ 'nin türevine bağlıdır.) Burada koneksiyon denilen ekstra yapıya ihtiyaç vardır. Bu bir eğri boyunca hangi tensörle taşıma yapılacağını gösterir.

#### 3.2.1. Bulgusal tanım

Burada ilk olarak paralel taşımaya ve kovaryant türevlere bulgusal bir yaklaşım yapılmaktadır. Bilindiği gibi, farklı noktalarda tanımlanmış iki vektör birbiriyle öylece karşılaştırılmaz. Bir  $R^m$  Öklid uzayındaki vektör alanının türevinin nasıl tanımlandığına bakılırsa  $V = V^\mu e_\mu$  bir vektör alanına  $x^v$ 'yi göz önünde bulundurduğundaki türevi m. bileşene sahiptir.

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^v} = \lim_{\Delta x^v \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^v + \Delta x^v, \dots) - V^\mu(\dots, x^v, \dots)}{\Delta x^v} \quad (3.68)$$

denklemin sol tarafındaki ilk terim

$$x + \Delta x = (x^1, \dots, x^v + \Delta x^v, \dots, x^m) \quad (3.69)$$

üzerinde tanımlanabilir. Diğer taraftan ikinci terim  $x = (x^\mu)$  de tanımlanır.  $V^\mu(x)$ 'i  $V^\mu(x + \Delta x)$  den çıkarmak için  $V^\mu(x)$  değiştirilmeden taşınmalıdır. Buradaki fark kaydedilmelidir. Vektörün bu taşınmasına paralel taşınma denir.  $V|x$  paraleli  $x + \Delta x$ 'e taşınmıştır ve aynı bileşen  $V^\mu(x)$ 'e sahiptir. Bununla birlikte bir manifold içerisinde bir vektörü paralel taşımada başka bir yol yoktur.

$\tilde{V}|x + \Delta x$ ,  $V|x$  vektörü  $x + \Delta x$ 'e paralel taşınmış olarak belirtilsin. Bileşenlerin aşağıdakileri sağlaması gerekir.

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x \quad (3.70a)$$

$$(V^\mu + \tilde{W}^\mu)(x + \Delta x) = \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x) \quad (3.70b)$$

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) \Delta x^\nu \quad (3.71)$$

$V$ 'nin kovaryant türevi  $x^v$  ye bağlı olarak tanımlanır ise

$$\lim_{\Delta x^v \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^v} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial V^\mu}{\partial x^v} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.72)$$

$x + \Delta x$  miktarı  $V|x + \Delta x$  ve  $\tilde{V}|x + \Delta x$  vektörleri arasındaki farktır.  $\Gamma$ 'nin her bir seçimi için pek çok farklı paralel taşıma kuralı vardır. Eğer manifold bir metrik ile donatılmışsa bu Levi-Civita koneksiyonu olarak adlandırılır. (Bölüm 3.4'e bakın)

Örneğin; iki boyutlu Öklid uzayı  $(R^2, \delta)$  verilsin. Paralel taşınma kartezyen koordinat sisteminde

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x, y + \Delta y) = V^\mu(x, y) \quad (3.73)$$

her hangi bir  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  den dolayı  $\Gamma$ 'nin tüm bileşenleri ortadan kaybolur. Daha sonra kutupsal koordinatlar  $(r, \phi)$  olarak alınır. Eğer

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (3.74)$$

bir gömme olarak görülürse,

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi \quad (3.75)$$

İndirgenmiş metriği bulunur.

$$V = \frac{V^r \partial}{\partial r} + \frac{V^\phi \partial}{\partial \phi} \quad (3.76)$$

$(r, \phi)$ 'da tanımlanan bir vektör olsun. Eğer bu vektör

$(r+\Delta r, \phi)$  paralel vektörüne paralel taşınırsa

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{V}^r \partial}{\partial r|(r+\Delta r, \phi)} + \frac{\tilde{V}^\phi \partial}{\partial \phi|(r+\Delta r, \phi)} \quad (3.77)$$

şeklinde yeni bir vektör oluşur. (şekil 3.8(a))  $V = \sqrt{g(V, V)}$ 'nin ve  $\theta$ 'nin  $V$  ve  $\partial/\partial r$  arasında ki açı

$$V^r = V \cos \theta \text{ ve } V^\theta = V \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \quad (3.78a)$$

olur. Buradan  $\tilde{V}^r = V^r$  ve

$$\tilde{V}^\phi = \frac{r}{r+\Delta r} V^\phi \simeq V^\phi - \frac{\Delta r}{r} V^\phi \quad (3.78b)$$

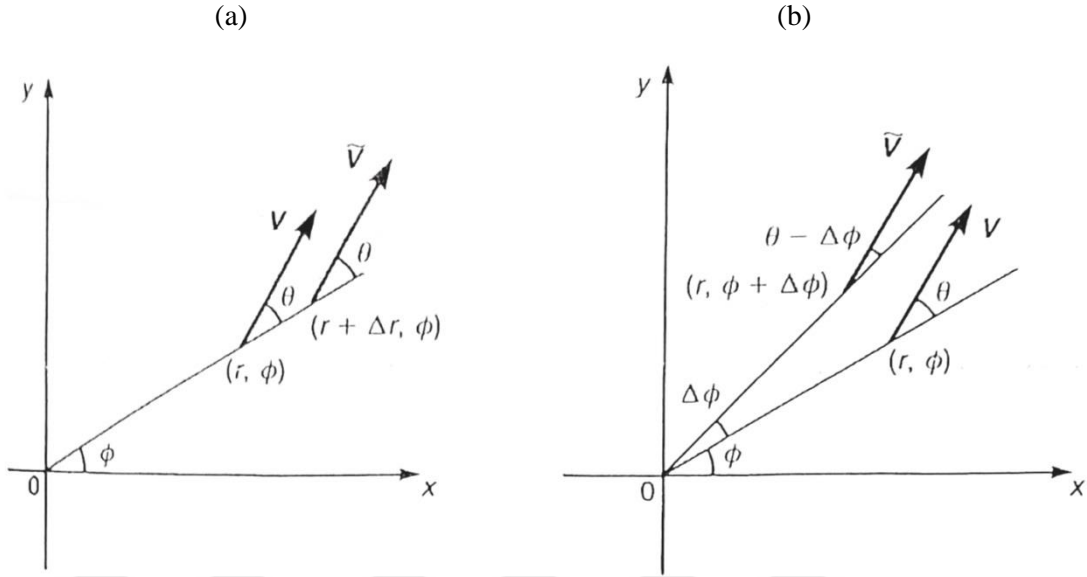
elde edilir.

Bu bileşenleri (3.71) ile karşılaştırarak kolaylıkla aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\Gamma_{rr}^r = 0 \quad \Gamma_{r\phi}^r = 0 \quad \Gamma_{rr}^\phi = 0 \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (3.79)$$

Benzer bir şekilde  $V$ 'nin  $(r, \phi + \Delta \phi)$ 'ye paralel taşınması şu şekilde gerçekleşir;

$$\tilde{V} = \tilde{V}^r \frac{\partial}{\partial r} |(r, \phi + \Delta \phi) + \tilde{V}^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} |(r, \phi + \Delta \phi) \quad (3.80)$$



**Şekil 3.8.**  $\tilde{V}$  bir vektördür. Ve (a)'da  $(r + \Delta r, \phi)$  ile, (b)'de  $(r, \phi + \Delta \phi)$  ile  $V$ 'ye paralel taşındığının gösterimi.

Burada

$$\tilde{V}^r = V \cos(\theta - \Delta \phi) \simeq V \cos \theta + V \sin \theta \Delta \phi = V^r + V^\phi r \Delta \phi \quad (3.81)$$

ve

$$\tilde{V}^\phi = V \frac{\sin(\theta - \Delta \phi)}{r} \simeq V \frac{\sin \theta}{r} - V \cos \theta \frac{\Delta \phi}{r} = V^\phi - V^r \frac{\Delta \phi}{r} \quad (\text{şekil 3.8b})$$

olur. Buradan

$$\Gamma_{\phi r}^r = 0 \quad \Gamma_{\phi \phi}^r = -r \quad \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\phi \phi}^\phi = 0 \quad (3.82)$$

elde edilir.  $\Gamma$ 'nin  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  simetriğini verir.

Bir vektörün normu paralel taşıma altında invaryanttır. Bu iki şartı sağlayan paralel taşımının kuralı Levi-Civita koneksiyonu olarak adlandırılır.

### 3.2.2. Afin koneksiyonlar

Tanım 3.2. Afin bir  $\nabla$  koneksiyonu  $\nabla: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  nin bir dönüşümüdür.

$(x, y) \rightarrow \nabla_x Y$  şeklinde gösterilir. Bu da aşağıdaki şartları sağlar:

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (3.83a)$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (3.83b)$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y \quad (3.83c)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y \quad (3.83d)$$

$f \in \mathcal{F}(M)$  ve  $X, Y, Z \in X(M)$ 'dir.  $M$  üstünde koordinatları  $x = \varphi(p)$  ile gösterilen  $(U, \varphi)$  haritası ve  $m^3$  lere  $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$  fonksiyonları koneksiyon katsayıları diye adlandırılır.

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad (3.84)$$

Burada  $\{e_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$ ,  $T_p M$ 'nin koordinat bazlarıdır. Koneksiyon katsayıları baz vektörlerinin bir noktadan başka bir noktaya nasıl değiştiklerini belirler.  $\nabla$  nin baz vektörler üstündeki hareketi tanımlandığında  $\nabla$ 'nin herhangi bir vektör üstündeki hareketi hesaplanabilir.

$V = V^\mu e_\mu$  ve  $W = W^\nu e_\nu$  de  $T_p(M)$ 'nin elemanları olsunlar.

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu \left( e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu \right) \\ &= V^\mu \left( \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Koneksiyon katsayısının bu tanımı önceki (3.72) bulgusal sonucu ile örtüşür. Bu tanımla,  $\nabla$  dönüşümü (3.85) ile  $V$  den  $W$  ye giden yeni bir vektöre dönüştürür.  $\lambda$ . bileşen  $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu \quad (3.86)$$

olduğu yerdir.

$\nabla_\mu W^\lambda$  vektör  $\nabla_\mu W = \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$ 'nin  $\lambda$ . bileşeni olduğu ve bir  $W^\lambda$  bileşenin kovaryant türevi ile karıştırılmaması gerekir.  $\nabla_V W$ ,  $V$ 'nin türevinden bağımsızdır. Bu açıdan

$$\mathcal{L}_V W = [V, W] \quad (3.87)$$

türevi Lie'ye benzemez. Dolayısıyla kovaryant türev, fonksiyonun ve tensörlerin yönlü türevinin uygun şekilde genelleştirilmesidir.

### 3.2.3. Paralel taşımalar ve jeodezikler

Bir  $M$  manifoldun da verilmiş olan bir eğri göz önüne alındığında bir vektörün eğri boyunca paralel taşınması tanımlanabilir.

$$C: (a, b) \rightarrow M \quad (3.88)$$

$M$ 'de bir eğri olsun. Basitlik için koordinatları  $x = \varphi(p)$  olan tek bir  $(U, \varphi)$  haritası üzerinde verilsin.  $X$  (en azından)  $c(t)$  boyunca tanımlanmış bir vektör alanı olsun.  $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  iken

$$X|c(t) = X^\mu(c(t))e_\mu|c(t) \quad (3.89)$$

olur. Eğer X

$$\nabla_v X = 0, \quad t \in (a, b) \quad (3.90a)$$

şartını sağlarsa  $V = \frac{d}{dt} = \left(\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right)e_\mu|c(t)$  tanjant vektörü olduğunda X'e c(t) boyunca paralel taşıma denir. (3.90a) şartı bileşenler bakımından şu şekilde

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0 \quad (3.90b)$$

yazılabilir. Eğer V(t) tanjant vektörü c(t) boyunca paralel taşıma ve

$$\nabla_V V = 0 \quad (3.91a)$$

ise c(t) boyunca Jeodezik diye adlandırılır. Jeodezikler Riemann manifold üzerindeki mümkün olan en düz eğrilerdir. (3.91a) jeodezik denklemi c(t)'nin  $\{x^\mu\}$  koordinatları yardımıyla

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \quad (3.91b)$$

elde edilir.(3.91a) yerine  $f \in F(M)$  olmak üzere

$$\nabla_V V = fV \quad (3.92)$$

şartıda alınabilir. 'V deki değişim V'ye paraleldir.' Bununla birlikte  $t \rightarrow t'$  şeklinde yeniden parametrize edilmesi durumunda tanjant vektörün bileşenleri

$$\frac{dx^\mu}{dt} \rightarrow \frac{dt}{dt'} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (3.93)$$

şeklinde değişir. Eğer  $t'$

$$\frac{d^2 t'}{dt^2} = f \frac{dt'}{dt} \quad (3.94)$$

şartını sağlarsa (3.92), (3.91a)'ya kısıtlanır. Bu yüzden eğriyi yeniden parametrize etme her zaman mümkündür. Bu sayede jeodezik denklem (3.91a) biçimini alır.

### 3.2.4. Tensör alanların kovaryant türevleri

$\nabla_X$  türev anlamına sahip olduğundan  $f \in F(M)$ 'nin kovaryant türevini sıradan yönlü türev ile tanımlamak mümkündür.

$$\nabla_X f = X[f] \quad (3.95)$$

O zaman (3.83d) Leibnitz kuralına

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y \quad (3.83d)$$

benzemektedir.  $T_1$  ve  $T_2$  tensör alanlarının tensörel çarpımı

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2) \quad (3.96)$$

dır. Bu genellikle  $\omega \in \Omega'(M)$  1-formunun kovaryant türevidir.  $\langle \omega, Y \rangle \in F(M)$ ,  $Y \in X(M)$  için

$$X[\langle \omega, Y \rangle] = \nabla_X[\langle \omega, Y \rangle] = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle. \quad (3.97)$$

sağlanır. Burada her iki taraf bileşenler cinsinden yazılırsa

$$(\nabla_X \omega)_v = X^\mu \partial_\mu \omega_v - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (3.98)$$

elde edilir. Özellikle  $X = e_\mu$  için

$$(\nabla_\mu \omega)_v = \partial_\mu \omega_v - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (3.99)$$

dır ve  $w = dx^v$  (3.84) de yerine yazılırsa

$$\nabla_\mu dx^v = -\Gamma_{\mu\lambda}^v dx^\lambda \quad (3.100)$$

elde edilir. Bu sonuçlar

$$\begin{aligned} \nabla_v t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \partial_v t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + \Gamma^{\lambda_1}_{v\kappa} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\kappa \lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots \\ &+ \Gamma^{\lambda_p}_{v\kappa} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} \kappa} - \Gamma^\kappa_{v\mu_1} t_{\kappa \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - \dots \\ &- \Gamma^\kappa_{v\mu_q} t_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \kappa}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \end{aligned} \quad (3.101)$$

şeklinde genellenebilir.

Örneğin,  $g$  bir metrik tensör olmak üzere

$$(\nabla_v g)_{\lambda\mu} = \partial_v g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{v\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{v\mu} g_{\lambda\kappa} \quad (3.102)$$

sağlanır.

### 3.2.5. Koneksiyon katsayılarının dönüşüm özellikleri

Koordinatları  $y = \psi(p)$  olan ve  $U \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $(V, \psi)$  haritasının koordinatları  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$  ve  $\{f_\alpha\} = \{\partial/\partial y^\alpha\}$  şeklinde gösterilir. Koneksiyon katsayıları  $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$  tarafından  $y$  koordinatları göz önüne alınarak gösterilirse baz vektör  $f_\alpha$

$$\nabla_{f_\alpha} f_\beta = \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} f_\gamma \quad (3.103)$$

denklemini sağlar.

$f_\alpha = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right) e_\mu$  alınırsa denklemin sol tarafı

$$\begin{aligned}\nabla_{f_\alpha} f_\beta &= \nabla_{f_\alpha} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} e_\mu\right) = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} e_\mu + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \nabla_{e_\lambda} e_\mu \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\right) e_\nu\end{aligned}\quad (3.104)$$

olur. (3.103)'ün sağ tarafı  $\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\gamma}\right) e_\nu$ 'ye eşit olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu}\quad (3.105)$$

şekline dönüşür.

Bu dönüşüm kuralının  $\nabla_X Y$  bir vektör yani

$$\tilde{X}^\alpha (\tilde{\partial}_\alpha \tilde{Y}^\gamma + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \tilde{Y}^\beta) f_\gamma = X^\lambda (\partial_\lambda Y^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} Y^\mu) e_\nu\quad (3.106)$$

şekline dönüştürdüğü ispatlanabilir.

### 3.2.6. Metrik koneksiyon

Burada manifold bir metrik ile verildiğinden koneksiyonların olası biçimleri üzerine sınırlamalar getirilebilir.  $g_{\mu\nu}$  metriğinin kovaryant sabit olduğu bir durum kabul edilsin. Öyle ki  $X$  ve  $Y$  iki vektörü herhangi bir eğri boyunca paralel taşınırsa o zaman onların arasındaki iç çarpım paralel taşıma sırasında sabit kalır. Vektörlerin paralel taşındıkları keyfi bir eğri boyunca  $V$  bir tanjant vektör olsun. O zaman

$$0 = \nabla_V [g(X, Y)] = V^\kappa [(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)]\quad (3.107)$$

$$= V^\kappa X^\mu Y^\nu (V^\kappa g)_{\mu\nu}\quad (3.108)$$

ki  $\nabla_\kappa X = \nabla_\kappa Y = 0$  elde edilir.

Bu durum herhangi bir eğri ve vektör için doğru olduğundan

$$(V^\kappa g)_{\mu\nu} = 0\quad (3.109a)$$

dır. Ya da (3.98) den

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0\quad (3.109b)$$

olur. Eğer (3.109a) sağlanırsa afin koneksiyon  $\nabla$ 'nın metrik koneksiyon olduğu söylenir. Burada sadece metrik koneksiyonlar ele alınacaktır. Döngüsel permütasyonlar  $(\lambda, \mu, \nu)$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} = 0\quad (3.109c)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} = 0 \quad (3.109d)$$

şeklindedir.

-(3.109b)+(3.109c)+(3.109d) ifadesi düzenlenirse

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + T^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - 2\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} = 0 \quad (3.110)$$

sağlanır. Burada  $T^\kappa_{\lambda\mu} \equiv 2\Gamma^\kappa_{[\lambda\mu]} \equiv \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$  ve  $\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^\kappa_{\nu\mu} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu})$  olur.  $T^\kappa_{\lambda\mu}$  tensörü küçük indisleri bakımından anti simetriktir. Yani  $T^\kappa_{\lambda\mu} = -T^\kappa_{\mu\lambda}$ 'dir. Bu da Torsion Tensör olarak adlandırılır. (3.110) denklemini  $\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)}$  için çözülür ise

$$\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(T^\kappa_{\nu\mu} + T^\kappa_{\mu\nu}) \quad (3.111)'i$$

sağlanır. Yani

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (3.112)$$

tarafından tanımlanmış Cristoffell Sembolleridir. Nihayetinde koneksiyon katsayıları

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} + \Gamma^\kappa_{[\mu\nu]} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(T^\kappa_{\nu\mu} + T^\kappa_{\mu\nu} + T^\kappa_{\mu\nu}) \quad (3.113)$$

şeklindedir. (3.113)'ün son ifadesinin ikinci terimine contorsiyon adı verilir.  $K^\kappa_{\mu\nu}$  şeklinde gösterilir.

$$K^\kappa_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(T^\kappa_{\mu\nu} + T^\kappa_{\nu\mu} + T^\kappa_{\nu\mu}) \quad (3.114)$$

olur. Eğer Torsion tensörü bir M manifoldu üstünde sıfır ise  $\nabla$  metrik koneksiyonuna ya Levi-Civita koneksiyonu adı verilir. Levi-Civita koneksiyonları yüzeylerin klasik geometri üzerinde tanımlanmış koneksiyonların doğal genellemeleridir.

### 3.3. Eğrilik ve Torsion

#### 3.3.1. Tanımlar

$\Gamma$  tensör olmadığından bir manifoldun ne kadar kıvrıldığıнын ölçümü intrinc geometride anlamı olmaz. Torsion Tensörü

$$T: \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \quad (3.115)$$

ve Riemann Eğrilik Tensörü (Riemann Tensörü) de

$$R: \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)'yi$$



$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.116)$$

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.117)$$

olarak tanımlanır.  $R(X, Y, Z)$  yerine  $R(X, Y)Z$  yazmak yaygındır. Böylece  $R, Z$  üzerinde bir operatör olarak görülür. Buradan

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \quad R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \quad (3.118)$$

sağlanır.

$R$ 'nin tensörel özelliğinin olduğu şu şekilde ispatlanabilir.

$$\begin{aligned} R(fX, gY)hZ &= f\nabla_X\{g\nabla_Y(hZ)\} - g\nabla_Y\{f\nabla_X(hZ)\} - fX[g]\nabla_Y(hZ) \\ &\quad + gY[f]\nabla_X(hZ) - fg\nabla_{[X, Y]}(hZ) \\ &= fg\nabla_X\{Y[h]Z + h\nabla_Y Z\} - gf\nabla_Y\{X[h]Z + h\nabla_X Z\} \\ &\quad - fg[X, Y][h]Z - fgh\nabla_{[X, Y]}Z \\ &= fgh\{\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z\} \\ &= fghR(X, Y)Z \end{aligned} \quad (3.119)$$

Buradan  $R$ 'nin

$$R(X, Y)Z = X^\lambda Y^\mu Z^\nu R(e_\lambda e_\mu) e_\nu \quad (3.120)$$

sağladığı görülebilir. Bu da  $R$ 'nin tensörel özelliğini doğrular.  $R$  dönüşümü bir vektör alanını bir vektör alanına dönüştürür ve (1,3) tipinde tensör alanıdır.

Örneğin;  $T, (3.116)$  tarafından tanımlanan bir çoklineer dönüşümü

$$T(X, Y) = X^\mu Y^\nu T(e_\mu, e_\nu) \quad (3.121)$$

ile gösterilen (1,2) tipinde tensör alanıdır.

$\{e_\mu\}$  baz koordinatlarını ve dualleri göz önünde bulundurularak bu tensörlerin bileşenleri

$$\begin{aligned} T^\lambda_{\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma^\eta_{\mu\nu} e_\eta - \Gamma^\eta_{\nu\mu} e_\eta \rangle = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (3.122)$$

şeklinde ve

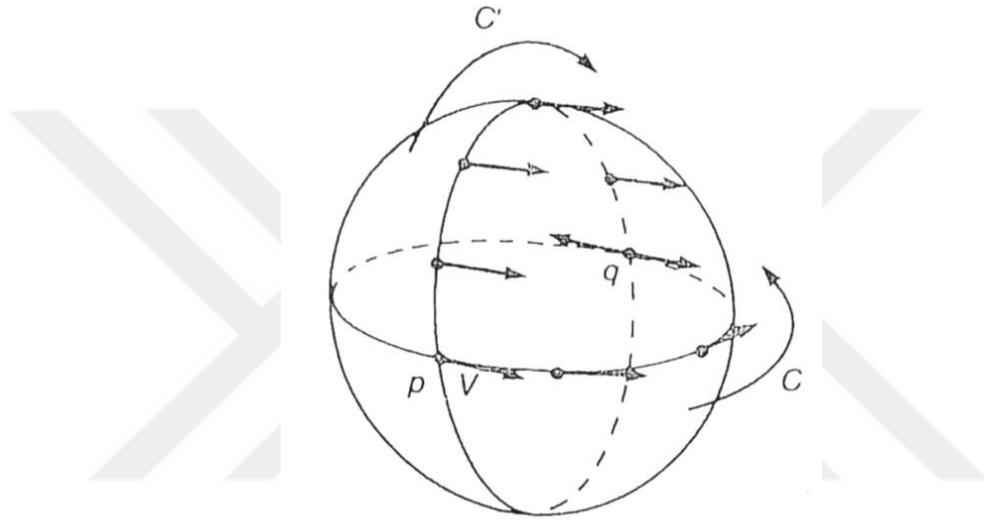
$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} e_\eta) - \nabla_\nu (\Gamma^\eta_{\mu\lambda} e_\eta) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle dx^\kappa, (\partial_\mu \Gamma^\eta_{\nu\lambda})e_\eta + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\xi_{\mu\eta} e_\xi - (\partial_\nu \Gamma^\eta_{\mu\lambda})e_\eta - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\xi_{\nu\eta} e_\xi \rangle \\
&= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta}.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

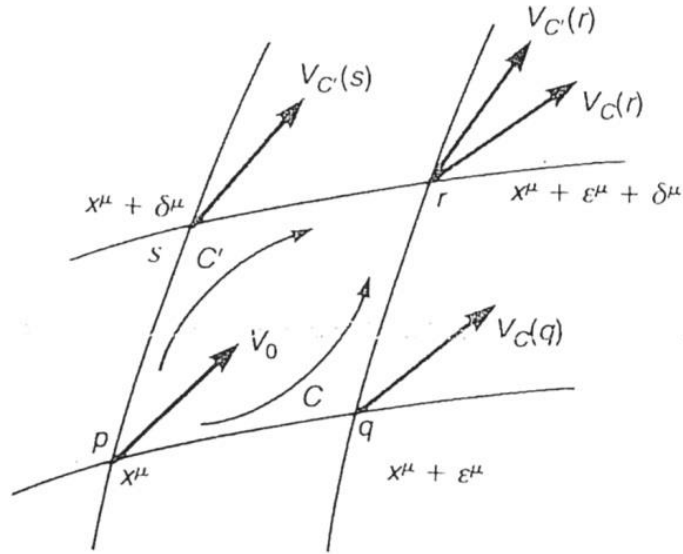
şeklinde verilebilir. Buradan

$$T^\lambda_{\mu\nu} = -T^\lambda_{\nu\mu} \quad R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = -R^\kappa_{\lambda\nu\mu} \tag{3.124}$$

olur.



**Şekil 3.9.** V'nin büyük daire ile yaptığı açı sabit tutulursa ve p'deki V, C ve C' daireleri boyunca paralel olarak taşınırsa, ortaya çıkan vektörler, q noktasında zıt yönlerde q vektörüne paralel taşındığının gösterimi.



**Şekil 3.10.** p deki bir  $V_0$  vektörü C ve C'nün r deki  $V_C(r)$  ve  $V_{C'}(r)$ 'yi verdiği paralel taşınma durumu.

### 3.3.2. Riemann tensörünün ve torsion tensörünün geometrik anlamı

Bu bölümde tensörlerin geometrik anlamlarından bahsedilecektir. İlk olarak Riemann Tensörü incelenecektir. Önemli bir gözlem şudur. Eğer iki farklı C ve C' eğrileri boyunca bir V vektörü p den q ya paralel taşınırsa q daki nihai vektörler genelde (şekil 3.9) farklıdır. Eğer bir Öklid uzayında bir vektör paralel taşınırsa oluşan yeni vektör paralel taşındığı yola bağlı değildir. Bu paralel taşınmanın, integrelenemezliği ve eğrilik kavramını karakterize ettiği beklenir. O halde seçilen özel koordinatlara bağlı olmaz. Koordinatları  $\{x^\mu\}$ ,  $\{x^\mu + \epsilon^\mu\}$ ,  $\{x^\mu + \epsilon^\mu + \delta^\mu\}$  ve  $\{x^\mu + \delta^\mu\}$  yerine  $\epsilon^\mu$  ve  $\delta^\mu$  sonsuz küçük olarak (şekil 3.10) bir sonsuz küçük pqrs paralel kenarı alınır. Bir  $V_0 \in T_p M$  vektörü C=pqr boyunca paralel olarak taşınır ve bir  $V_C(r) \in T_r M$  vektörü elde edilir. Vektör  $V_0$  C boyunca q'ya paralel taşınmıştır.

$$V_C^\mu(q) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \epsilon^\nu \quad (3.125)$$

o zaman  $V_C^\mu(r)$  aşağıdakiyle verilir.

$$\begin{aligned} V_C^\mu(r) &= V_C^\mu(q) - V_C^\kappa(q) \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu \\ &= V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \epsilon^\nu - [V_0^\kappa - V_0^\rho \Gamma_{\zeta\rho}^\kappa(p) \epsilon^\zeta] \\ &\quad \times [\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) + \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \epsilon^\lambda] \delta^\nu \\ &\simeq V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \epsilon^\nu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu \end{aligned}$$

$$-V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\nu\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu \quad (3.126)$$

Burada  $\varepsilon$  ve  $\delta$  de önermek için terimler değiştirilmez. Benzer şekilde  $V_0$ 'ın  $C' = psr$  boyunca paralel taşınma aşağıdaki gibi verilmiş olan başka bir vektör alan  $V_{C'}(r) \in T_r M$ 'yi gerektirir.

$$\begin{aligned} V_{C'}^\mu(r) &\simeq V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \delta^\nu - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\nu \\ &\quad - V_0^\kappa [\partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}(p) - \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu \end{aligned} \quad (3.127)$$

$r$ 'deki iki vektör

$$\begin{aligned} V_{C'}(r) - V_C(r) &= V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}(p) - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\nu\rho}(p) + \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p) \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(p)] \varepsilon^\lambda \delta^\nu \\ &= V_0^\kappa R^\mu_{\kappa\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu \end{aligned} \quad (3.128)$$

tarafından farklılık gösterir. Daha sonra Torsion Tensörünün geometrik anlamına bakılır.  $p \in M$  koordinatları  $\{x^\mu\}$  olan bir nokta olsun.

$$X = \varepsilon^\mu e_\mu \text{ ve } Y = \delta^\mu e_\mu \quad (3.129)$$

$T_p M$  de son derece küçük vektörler olsunlar. Eğer bu vektörler son derece küçük olarak farz edilirse  $p$  komşuluğundaki  $q$  ve  $s$  olan iki noktayı tanımlarlar bunların koordinatları  $\{x^\mu + \varepsilon^\mu\}$  ve  $\{x^\mu + \delta^\mu\}$  (şekil 3.11) gibidir. Eğer  $X$   $ps$  çizgisi boyunca paralel taşınırsa bileşenleri;

$$\varepsilon^\mu - \varepsilon^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta^\nu \quad (3.130)$$

olan bir  $sr_1$  vektörü elde edilir.  $P$  ve  $r_1$ 'i bağlayan son derece küçük vektör şudur:

$$pr_1 = ps + sr_1 = \delta^\mu + \varepsilon^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu \quad (3.131)$$

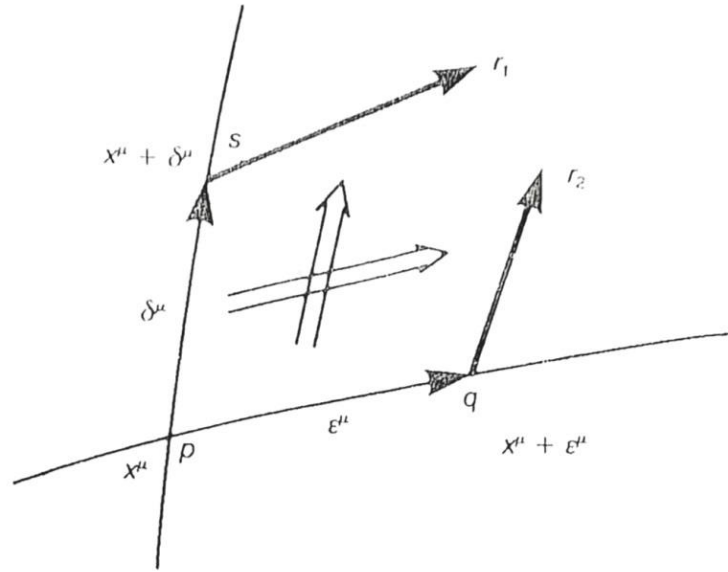
Benzer şekilde  $\delta^\mu$ 'nün  $pq$  boyunca paralel taşınması

$$pr_2 = pq + qr_2 = \varepsilon^\mu + \delta^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu \quad (3.132)$$

vektörünü sağlar. Genel olarak  $r_1$  ve  $r_2$  arasındaki fark

$$r_2 r_1 = pr_2 - pr_1 = (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) \varepsilon^\lambda \delta^\nu = T^\mu_{\nu\lambda} \varepsilon^\lambda \delta^\nu \quad (3.133)$$

olur.



**Şekil 3.11.**  $qr_2(sr_1)$  vektörünün,  $q(s)$ 'ye paralel taşınan  $ps(pq)$  vektörü olduğunun gösterimi.

Bu yüzden Torsion tensörü son derece küçük vektörlerden ve onların paralel taşınmalarından oluşmuş paralelkenarı ölçer.

### Örnek 3.1.

Dünyanın yüzeyinde gemi ile yolculuk yapıldığı varsayalım. Eğer vektör ve enlem arasındaki açı yolculuk esnasında sabit tutulursa vektör paralel taşınmış olarak tanımlanabilir. (not: paralel taşınmanın bu tanımı alışılmış olanı değildir. Örneğin jeodezik, Merkatorun izdüşümünde büyük bir daire değil, düz bir çizgidir.) Enlemlerden ve boylamlardan (şekil 3.12a)oluşmuş küçük bir pqrs dörtgeni boyunca yol aldığı varsayalım. Vektör p den pqr ve psr boyunca paralel taşınır. Aynı bir şekilde paralel taşınma tanımına göre r'deki iki vektör aynı olmalı, bu yüzden eğrilik tensörü ortadan kaybolmalıdır. Torsionu bulmak için p,q,r noktaları (şekil3.12b)'deki gibi parametrelerle ifade edilebilir. Torsion (3.133) de olduğu gibi  $pr_1$  ve  $pr_2$  boyunca paralel taşınırsa uzunluğu  $R \sin \theta d\phi$  olan  $sr_1$  vektörü elde edilir. Ne var ki vektör ps'nin pq boyunca paralel taşınması bir  $qr_2 = qr$  vektörünü sağlar. sr;

$$R \sin(\theta - d\theta) d\phi \simeq R \sin \theta d\phi - R \cos \theta d\theta d\phi \quad (3.134)$$

uzunluğuna sahip olduğundan  $r_1 r_2$ 'nin

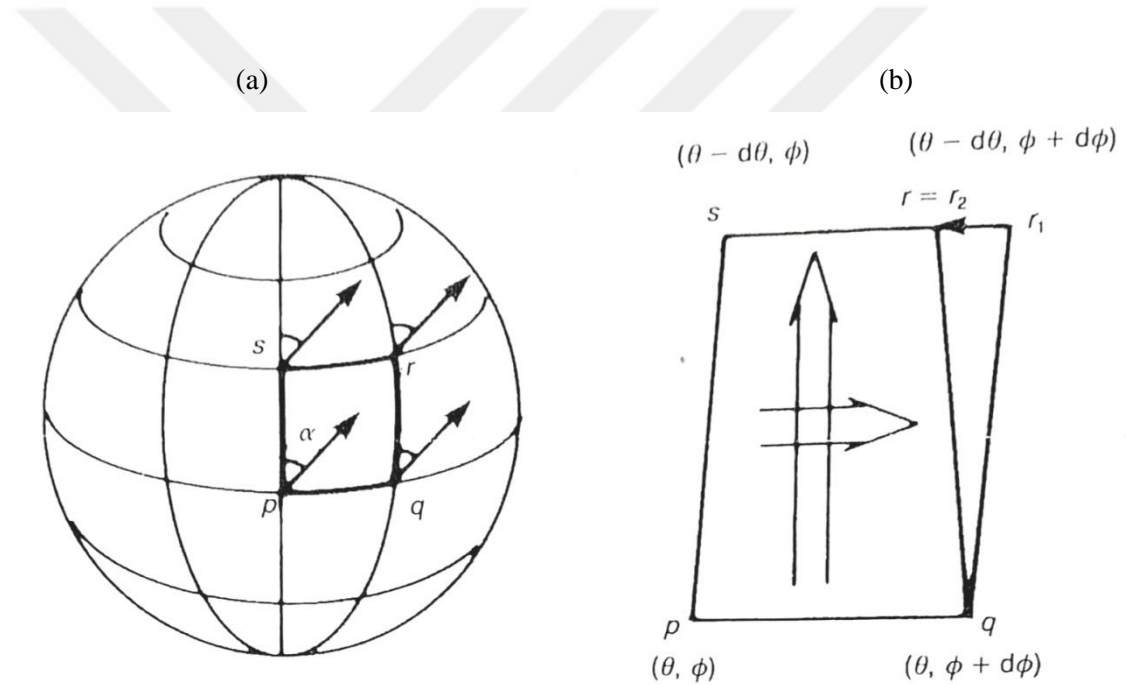
$$R \cos \theta d\theta d\phi \quad (3.135)$$

uzunluğuna eşit olduğu bulunur.  $r_1 r_2$ ,  $-\partial/\partial\phi$ 'ya paralel olduğundan koneksiyon, bir  $T^{\phi}_{\theta\phi}$  Torsionuna sahiptir.(3.133'e bakın)  $g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta$ 'dan  $r_1 r_2$ 'nin  $(0, -\cot \theta d\theta d\phi)$  bileşenlerine sahip olduğu bulunur.  $r_1 r_2$ 'nin  $\phi$  bileşeni  $T^{\phi}_{\theta\phi} d\theta d\phi$ 'ya eşit olduğundan

$$T^{\phi}_{\theta\phi} = -\cot \theta \quad (3.136)$$

elde edilir.

$\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi} \right\}$  bazı kutuplarda iyi tanımlıdır.  $S^2$  küresinin  $S^2$  üzerinde lineer bağımsız iki vektör alanı kabul etmediği bilinir.  $S^2$  üzerindeki herhangi bir vektör alanı  $S^2$  üzerinde ortadan kaybolabilir. Ve bu yüzden aradaki diğer vektör alanları lineer bağımsız olamaz.



**Şekil 3.12.** (a) Eğer bir vektör p deki boylamla bir  $\alpha$  açısı yaparsa bu açının paralel taşınma esnasında sabit tutulduğunun gösterimi. (b)  $s r_1(q r_2)$  vektörü,  $s(q)$ 'ya paralel taşınmış ise  $p q(p s)$  vektörü olduğu ve Torsionun ortadan kaybolduğunun gösterimi.

Eğer m-boyutlu bir M manifoldu lineer bağımsız olan m Vektör Alanlarını kabul ederse M'nin paralelleştirilebilir olduğu söylenir. Parallelleştirilebilir bir manifold üstünde M'nin her noktasında bir tanjant uzayı tanımlamak için bu m Vektör Alanları kullanılabilir. Eğer  $V_p$ 'nin  $T_p M$  deki tüm bileşenleri  $V_q$ 'nun  $T_q M$  dekileriyle eşit ise bir  $V_p \in T_p M$  vektörünün paralel olduğu tanımlanır. Vektör Alanlar M boyunca tanımlandıklarından bu paralelleşe p ve q'yu bağlayan yoldan bağımsız olmalıdır. Bu yüzden Torsion tensörü genelde olmamasına rağmen Riemann tensörü ortadan kaybolur.  $S^m$  için bu sadece  $m=1,3$  ve  $7$  olduğunda mümkündür. Benzer şekilde

bu durum karmaşık sayıların kuaterniyonlarının ve aktiyonlarının varlığıyla yakından bağlantılıdır.

$$S^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \mid \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1\} \quad (3.137)$$

$(R^4, \delta)$  içine yerleştirilmiş üç ortanormal vektör;

$$\begin{aligned} e_1(x) &= (-x^2, x^1, -x^4, x^3) \\ e_2(x) &= (-x^3, x^4, x^1, -x^2) \\ e_3(x) &= (-x^4, -x^3, x^2, x^1) \end{aligned} \quad (3.138)$$

$x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ 'e ortanormaldir. Ve  $S^3$  üstünde her yerde lineer bağımsızdır. Buradan tanjant uzay  $T_x S^3$ 'ü tanımlansın.  $V_1(x)$  ve  $V_2(y)$  iki vektörü eğer

$$V_1(x) = \sum c^i e_i(x) \text{ ve } V_2(y) = \sum c^i e_i(y) \quad (3.139)$$

ise paraleldirler. Koneksiyon katsayıları (3.84) den biliniyorlar.  $\varepsilon e_1(x)$ ,

$$\begin{aligned} x &= (x^1, x^2, x^3, x^4) \text{'ün} \\ x' &= x + \varepsilon e_1(x) = \{x^1 - \varepsilon x^2, x^2 - \varepsilon x^1, x^3 - \varepsilon x^4, x^4 - \varepsilon x^3\} \end{aligned} \quad (3.140)$$

değiştirdiği durumdaki son derece küçük vektör olsun.  $x$  deki ve  $x'$  deki baz vektörler arasındaki fark

$$\begin{aligned} &e_2(x') - e_2(x) \\ &= (-x^3 - \varepsilon x^4, x^4 + \varepsilon x^3, x^1 - \varepsilon x^2, -x^2 - \varepsilon x^1) - (-x^3, x^4, x^1, -x^2) \\ &= -\varepsilon e_3(x) = \varepsilon \Gamma^{\mu}_{12} e_{\mu}(x) \end{aligned} \quad (3.141)$$

olur. Bu yüzden  $\Gamma^3_{12} = -1, \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$ 'dır. Benzer şekilde  $\Gamma^3_{21}=1$  bu yüzden  $\Gamma^3_{21} = -2$  bulunur. Burada koneksiyon katsayılarının kompütasyonu tamamlanmalıdır. Ve  $T^{\lambda}_{\mu\nu} = -2(+2)$ 'nin eğer  $(\lambda_{\mu\nu})$ 'nin (123)'ün bir çift tek permütasyonu olduğu ve aksi takdirde kaybolduğunun doğruluğu ispat edilmelidir.

$S^3$  ün bu paralelleştirilebilmesinin kuaterniyonların varlığıyla nasıl bağlantılı olduğu görülür. Bu kuaterniyonun çarpım kuralı:

$$\begin{aligned} &(x^1, x^2, x^3, x^4) \cdot (y^1, y^2, y^3, y^4) = \\ &(x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 - x^4 y^4, x^1 y^2 + x^2 y^1 + x^3 y^4 - x^4 y^3, \\ &x^1 y^3 - x^2 y^4 + x^3 y^1 + x^4 y^2, x^1 y^4 + x^2 y^3 - x^3 y^2 + x^4 y^1) \end{aligned} \quad (3.142)$$

$S^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) | x \cdot \bar{x} = 1\}$  burada  $x$ 'in eşleniği  $\bar{x} = (x^1, -x^2, -x^3, -x^4)$  tarafından tanımlanmıştır. (3.138)'e göre  $x_0=(1,0,0,0)$  daki tanjant uzay şununla dağıtılmıştır.

$$e_1 = (0,1,0,0), \quad e_2 = (0,0,1,0), \quad e_3 = (0,0,0,1) \quad (3.143)$$

O zaman (3.138) daki baz vektörler tanjant uzayının  $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$  deki kuaterniyon bileşenleri olarak ifade edilir.

$$e_1(x) = e_1 \cdot x \quad e_2(x) = e_2 \cdot x \quad e_3(x) = e_3 \cdot x \quad (3.144)$$

Bu cebirden dolayı  $x_0=(1,0,0,0)$  noktasında  $S^3$  ün baz vektörlerini bulmak mümkündür. Aynı şekilde Lie grubu paralelleştirilebilir. Eğer bir Lie G grubunun e birim elemanına  $\{V_1, \dots, V_m\}$  baz vektörleri kümesi verilirse  $\{V_m\}$  kümesi tarafından  $T_g G$ 'nin baz vektörleri her zaman bulunabilir.

$$\{V_1, \dots, V_n\} \xrightarrow{L_{g^*}} \{X_1|g, \dots, X_n|g\} \quad (3.145)$$

### 3.3.3. Ricci tensörü ve skaler eğrilik

Riemann eğrilik tensöründen indisleri kısaltarak yeni tensörler inşa edilir. Ricci Tensörü Ric bir (0,2) tipinde tensördür.

$$Ric(X, Y) \equiv \langle dx^\mu, R(e_\mu, Y)X \rangle \quad (3.146a)$$

Diğer bir bileşeni

$$Ric_{\mu\nu} = Ric(e_\mu, e_\nu) = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (3.146b)$$

R de skaler eğrilik daha fazla indeksin karşılığı ile elde edilir.

$$R \equiv g^{\mu\nu} Ric(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \quad (3.147)$$

## 3.4. Levi-Civita Koneksiyonları

### 3.4.1. Levi-civita temel teoremi

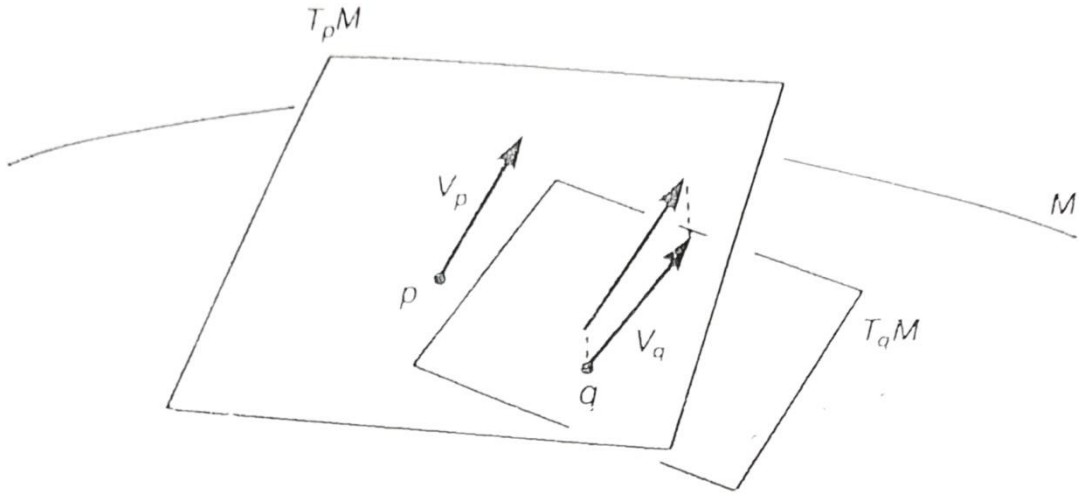
Afin koneksiyonları arasında Levi-Civita adında özel bir koneksiyon vardır. Bu koneksiyon yüzeylerin klasik Diferansiyel geometrideki koneksiyonlarının doğal bir genellemesidir. Torsion Tensörü ortadan kaldırılarak oluşturulan  $\nabla$  koneksiyonu Simetrik koneksiyon olarak adlandırılabilir. Burada baz koordinatları için Simetrik bir koneksiyonun koneksiyon koordinatları yeterli olacaktır.

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \quad (3.148)$$



### Teorem 3.1. (Pseudo-Riemann Geometri Temel Teoremi)

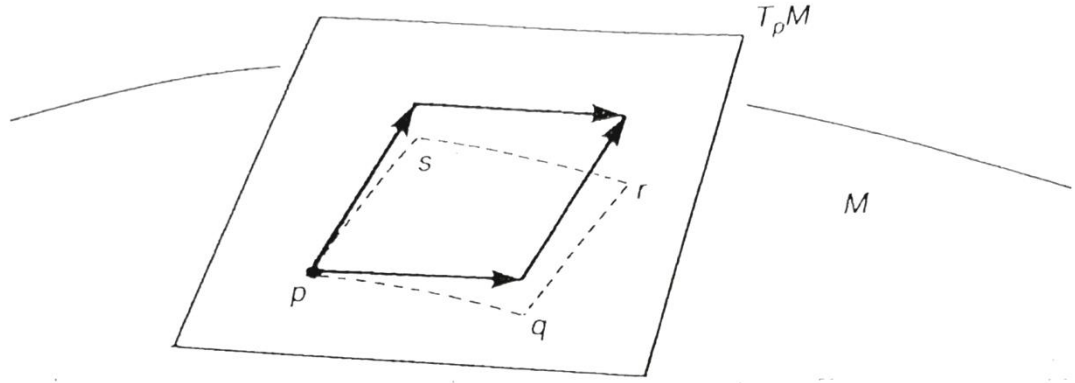
$(M, g)$  bir Pseudo-Riemann manifold olsun.  $g$  metriği ile uyumlu benzersiz bir simetrik koneksiyon vardır. Bu koneksiyona Levi-Civita koneksiyonu denir.



**Şekil 3.13.**  $M$  yüzeyinde bir  $V_p \in T_p M$  vektörünün  $V_q \in T_q M$  vektörüne paralel olması ve  $V_p$ 'nin  $T_p M$  üzerinde  $R^2$  deki sıradan paralellik anlamında  $V_q$  vektörüne paralel olmasının gösterimi.

#### 3.4.2. Klasik geometrik yüzeyler üzerinde levi-civita koneksiyonları

$R^3$  de gömülmüş klasik diferansiyel geometri yüzeylerinde, Levi-Civita  $p$  ve  $q$  noktaları komşuluğundaki vektörlerin paralellığı (şekil 3.13)'da tanımlanmaktadır. Tanjant uzayında uzanan  $p$  deki tanjant düzlemi  $V_p$  vektörü alınsın. Ayrıca  $V_q$ 'nin  $p$ 'deki tanjant düzlemine izdüşümü  $V_p$ 'ye paralel ise  $q$ 'daki  $V_q$  vektörü  $V_p$ 'ye paralel olarak tanımlanır. Şimdi (şekil 3.14)'da olduğu gibi  $p$ 'nin komşuluğunda iki nokta  $q$  ve  $s$  olsun. Ayrıca yer değişen vektörler  $pq$  boyunca  $ps$ ,  $ps$  boyunca  $pq$  paralel olarak taşınınsın. Eğer paralellik Levi-Civita ile tanımlanırsa,  $p$ 'deki tanjant düzlemine yansıyan yer değişen vektörler kapalı bir paralelkenar oluşturur. Bu yüzden bu paralellik bükümü yok eder.(3.1) teoreminden burada tanımlanan paralellığı rasgele manifoldlara genelleyen, bükülmeyi yok eden özel bir koneksiyon vardır.



**Şekil 3.14.** Paralellik Levi-Civita anlamında tanımlanırsa Torsionunun kaybolduğunun gösterimi.

### 3.4.3. Jeodezik

Levi-Civita koneksiyonu kullanıldığında, koneksiyon katsayıları, Riemann tensörleri ve bunları içeren birçok ilişki hesaplanabilir. Bunun yanı sıra Levi-Civita koneksiyonu, verilen iki noktayı birleştiren mümkün olan en kısa eğri olan başka bir deyişle Jeodeziği de sağlar. Newton mekaniğinde serbest parçacıkların yörüngesi mümkün olan en düz, mümkün olan en kısa eğri yani düz bir çizgidir. Einstein bu özelliğin genel görelilikte de yerine getirilmesi gerektiğini söylemiştir. Yerçekimi uzay-zaman geometrisinin bir parçası olarak düşünülürse serbest düşen bir parçacık mümkün olan en kısa yolu takip etmelidir. Levi-Civita koneksiyonuna göre tanımlanmış bir Jeodezik, iki noktayı birleştiren bir eğrinin uzunluğunu verir.

**Örnek 3.2.**  $U$  üst yarı düzlem  $U \equiv \{(x, y) | y > 0\}$  olsun. Buradan Poincare metrik

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2} \quad (3.149)$$

Jeodezik denklemler

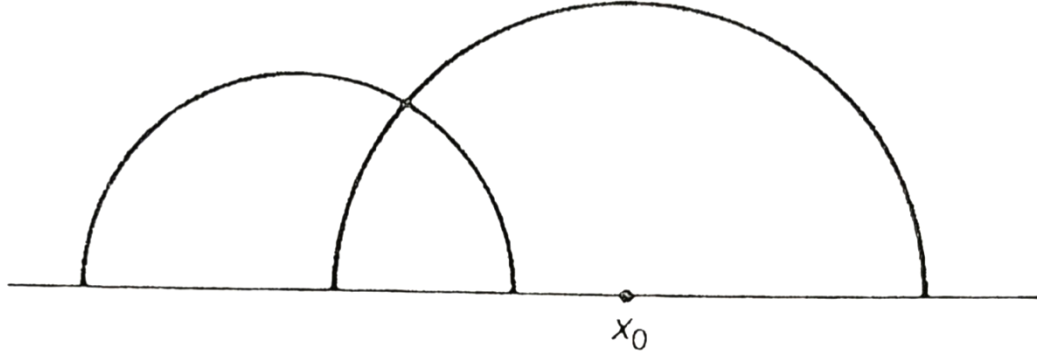
$$x'' - \frac{2}{y} x' y' = 0 \quad (3.150)$$

$$y'' - \frac{1}{y} [x'^2 + 3y'^2] = 0 \quad (3.151)$$

Burada  $x' \equiv \frac{dx}{ds}$  vs. dir. (3.150) denklemini  $x'$  ile bölünürse kolaylıkla;

$$\frac{x'}{y^2} = \frac{1}{R} \quad (3.152)$$

elde edilir.



**Şekil 3.15.** de Poincare Metrik tarafından jeodezikler üst yarı düzlemde tanımlanır ve Jeodezik sonsuz bir uzunluğa sahiptir ifadelerinin gösterimi.

Buradaki  $R$  bir sabittir.  $s$  parametresi,  $(x', y')$  vektörü birim uzunluğuna sahip olacak şekilde alındığından

$$(x'^2 + y'^2)/y^2 = 1 \quad (3.153)$$

verir. (3.152) den bu  $\frac{y^2}{R^2} + (\frac{y'}{y})^2 = 1$  veya

$$ds = \frac{dy}{y\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}} = \frac{dt}{\sin t} \quad (3.154)$$

$y = R \sin t$  yazılırsa denklem (3.152) den

$$x' = \frac{y^2}{R} = R(\sin t)^2$$

Buradan  $x, t$  için çözülmüş olur.

$$\begin{aligned} x &= \int x' ds = \int \frac{dx ds}{ds dt} dt \\ &= \int R \sin t dt = -R \cos t + x_0 \end{aligned}$$

$$x = -R \cos t + x_0 \quad y = R \sin t \quad (y > 0) \quad (3.155)$$

$(x_0, 0)$  yarıçapı  $R$  olan bir dairedir. Maksimum genişletilmiş Jeodezikler, uzunluğu sonsuz olan  $0 < t < \pi$  (şekil 3.15) ile gösterilir.

$$\begin{aligned}
I &= \int ds = \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{ds}{dt} dt = \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{1}{\sin t} dt \\
&= -\frac{1}{2} \log \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \Big|_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

#### 3.4.4. Normal koordinat sistemi

Buradaki konu Levi-Civita koneksiyonları ile sınırlandırılmaz. Ancak Levi-Civita koneksiyonu kullanıldığında özellikle basit bir form alır.  $C(t)$  uygun bir  $\nabla$  koneksiyonuna göre  $(M,g)$  de tanımlanan Jeodezik olsun.

$$c(0) = p, \quad \frac{d}{dt} \Big|_p = X = X^\mu e_\mu \in T_p M \tag{3.157}$$

Burada  $\{e_\mu\}$ ,  $p$ 'nin koordinatlarıdır.  $p$ 'den çıkan herhangi bir jeodezik,  $X \in T_p M$  verilerek belirtilir.  $P$ 'nin komşuluğunda bir  $q$  noktası alınırsa  $p$  ve  $q$ 'yu bağlayan birçok Jeodezik vardır. Ancak  $c_p(1)=q$  gibi benzersiz bir Jeodezik  $c_p$  vardır.  $X \in T_p M$ , bu Jeodeziğin,  $p$ 'deki tanjant vektörü olsun.  $q$ ,  $p$ 'den uzak olmamak üzere  $q$  benzersiz bir şekilde  $X_q = X_q^\mu e_\mu \in T_p M$  ve  $\varphi: q \rightarrow X_q^\mu$ 'yi belirtir.  $p$  üzerinde bir koordinat sistemi görevi görür. Bu koordinat sistemi  $p$  üzerinde normal koordinat sistemi olarak adlandırılır. Koordinatlar  $\{e_\mu\}$  iken  $\varphi(p)=0$  olduğu açıktır. Burada  $EXP: T_p M \rightarrow M$  ile  $EXP: X_q \rightarrow q$  dönüşümleri tanımlanmıştır.

$$\varphi(EXP X_q^\mu e_\mu) = X_q^\mu \tag{3.158}$$

Bu koordinat sistemine göre,  $c(0)=p$  ve  $c(1)=p$  ile bir Jeodezik  $c(t)$  şu koordinat gösterimine sahiptir.

$$\varphi(c(t)) = X^\mu = X_q^\mu t \tag{3.159}$$

Buradaki  $X_q^\mu$ ,  $q$ 'nun normal koordinatlarıdır.

Şimdi Levi-Civita koneksiyon katsayılarının normal koordinat sisteminde kaybolduğu gözükür. Jeodezik denklemi normal koordinat sisteminde yazılırsa;

$$0 = \frac{d^2 X^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X_q^\kappa t) \frac{dX^\nu}{dt} \frac{dX^\lambda}{dt} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X_q^\kappa t) X_q^\nu X_q^\lambda. \tag{3.160}$$

$p$ 'deki herhangi bir  $X_q^\nu$  için  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) X_q^\nu X_q^\lambda = 0$ 'dan  $t=0$  bulunur. koneksiyon simetrik olduğundan  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(p) = 0$  bulunur.

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p) = 0 \tag{3.161}$$

Sonuç olarak, bu koordinat sistemindeki herhangi bir tensörün kovaryant türevi,  $p$ 'de son derece basit bir form alır.

$$\nabla_X t^{\dots} = X[t^{\dots}]. \quad (3.162)$$

Burada denklem (3.161),  $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ 'nin  $q \neq p$ ) da kayborduğu anlamına gelmez. (Aslında (3.123) den bulundu.) Ve

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}(p) = \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}(p) - \partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}(p) \quad (3.163)$$

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}(p) \neq 0 \text{ in } \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}(p) \neq 0 \quad (3.164)$$

olur.

### 3.4.5. Riemann eğrilik tensörü ile levi-civita koneksiyonları

$\nabla$  Levi-Civita koneksiyonu olsun. Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri (3.123) ile verilmiştir.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \quad (3.165)$$

Torsion tensörü tanım gereği ortadan kaybolurken Levi-Civita koneksiyonları kullanılarak bir çok formül basitleştirilmiştir.

#### Teorem 3.2. (Bianchi Özdeşlikleri)

$R$  Levi-Civita koneksiyonuna göre tanımlanan Riemann tensörü olsun.  $R$  aşağıdaki özdeşlikleri sağlar.

$$R(X, Y)Z + R(Y, X)Z + R(Z, X)Y = 0 \quad (3.166a)$$

(Birinci Bianchi Özdeşliği)

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V = 0 \quad (3.166b)$$

(İkinci Bianchi Özdeşliği)

### 3.4.6. Einstein tensör

Bianchi Özdeşlikleri sayesinde

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\kappa}_{\nu\lambda\mu} = 0 \quad (3.167a)$$

(Birinci Bianchi Özdeşliğinden)

$$(\nabla_{\kappa} R)^{\xi}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_{\mu} R)^{\xi}_{\lambda\nu\kappa} + (\nabla_{\nu} R)^{\xi}_{\lambda\kappa\mu} = 0 \quad (3.167b)$$

(İkinci Bianchi Özdeşliğinden)

İkinci Bianchi Özdeşliğinin  $\xi$  ve  $\mu$  indekslerini kısaltılarak önemli bir ilişki elde edilir.

$$(\nabla_{\kappa} \text{Ric})_{\lambda\nu} + (\nabla_{\mu} R)_{\lambda\nu\kappa} - (\nabla_{\nu} \text{Ric})_{\lambda\kappa} = 0 \quad (3.168)$$

$\lambda$  ve  $\nu$  indisleri daha da kısaltılır ise

$$\nabla_{\mu}(R\delta - 2\text{Ric})^{\mu}_{\kappa} = 0 \quad (3.169)$$

veya

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (3.170)$$

Burada  $G^{\mu\nu}$  tarafından tanımlanan Einstein tensör

$$G^{\mu\nu} = \text{Ric}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} \quad (3.171)$$

olur.

## 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada her ne kadar Einstein Alan denklemini incelemekle yola çıkılsa da aslında çok daha kapsamlı bir yol izlenebileceğinin farkına varıldı. Örneğin;

- Özel Relavite
- Genel Relavite ve Riemann Geometrisi
- Kara delikler

Çünkü son yılların en önemli konusu kara deliklerdir. Kara delikler konusuna birçok açıdan yaklaşılabilmektedir;

İlk olarak matematiksel bakış açısıyla; Genel Görelilik prensipleri, Einstein Alan Denklemini vermektedir. Einstein'in Genel Görelilik kuramından sonra, bu prensibin farklı metriklerdeki(dolayısıyla geometrilerdeki) çözümleri yıllar içinde tekrar detaylıca incelenmiştir. Fakat Einstein denklemini çözen metrikler, bazı noktalarda tekillikler içermektedir. Tekillik belirli koordinatlarda denklemin sonsuza gitmesidir. Matematiksel olarak kara delik kavramının varlığı bu ilk çözümlerden başlamıştır.

Fizik açısından ise bu; “bazı yıldızların” belli bir aşamadan sonra kendi içlerine çökmeye başlayıp süpernova patlamalarının oluşabileceği bir asır önceden hesaplanabilmiştir. Bu hesaplamalar Einstein denklemleri ile neden ilgilidir? Çünkü Einstein denklemlerinin çözümü Schwarzschild metriğinden de elde edilmektedir.(Schwarzschild yarıçapı; temel olarak bir yıldızdan ışığın bile kaçamaması için gerekli olan yarıçap uzunluğudur.) prensipte “olay ufku” denilen kavramın sınırlarını belirleyen yarıçap, bu yarıçaptır.

Bu ve benzer nedenlerden Einstein Alan Denklemleri ilgi çekmeye devam edecektir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Çallıalp, F. (2001). *Örneklerle Soyut Cebir*. İstanbul: Birsen Yayınevi, 65s.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferansiyel Geometri ve Giriş*. İstanbul: Matbaa Teknisyenleri Basım Evi, 9, 73-97, 140s.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1982). *Lineer Cebir* (Dördüncü Baskı). Ankara: Gazi Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Matbaası, 275s.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Diferansiyel Geometri*. Ankara: Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi, 1-59s.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1996). *Lineer Cebir 2. Cilt*(Beşinci Baskı). Ankara, 465s.
- Hacısalıhoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N. (2003). *Tensör Geometri*, Ankara, 79-98s.
- Hacısalıhoğlu, H. H.; Özel, Z. ve Sabuncuoğlu, A. (1989). *Soyut Cebire Giriş*. Ankara: Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Matbaası, 97-101s.
- <https://cangurses.wordpress.com/2017/09/11/einstein-ozel-genel-gorelilik-kuramlari-yazi-dizisi/>
- Karaman, Ç. (2016). Riemann Manifoldları Üzerindeki Bazı Özel Yapılar ve  $F$ -Konneksiyonlar, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 1-2s.
- Nakahara M. *Geometry, Topology and Physics* (İkinci Baskı). Amerika: Fizik Yayıncılık Kurumu.
- Sağlamer A. F. (1995). Değme Manifoldları, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya, 4-9s.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel bilgiler

Soyadı, adı : YILDIRIM Muhammet  
Doğum tarihi ve yeri : 21/04/1991 Kütahya  
e-mail : mhmmtyldrm@hotmail.com

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Cumhuriyet Üni. Eğitim Fak. Mat. Öğrt.	2014
Lise	Tavşanlı İMKB Anadolu Öğrt. Lisesi	2009

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-2016	Batman TP Fatıma Zehra KAIH Lisesi	Matematik Öğretmeni
2016-2017 Bahar dön.	Gediz Yunus Emre MTA Lisesi	Matematik Öğretmeni
2017-	Kütahya Lisesi	Matematik Öğretmeni

### Yabancı Dil

İngilizce (orta düzey)