ORLİCZ UZAYLARDA Δ_B OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ MAKSİMAL OPERATÖRLER

EBRU TAVALI

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Ortak Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Cansu KESKİN

Ocak- 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ebru TAVALI'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Orlicz uzaylarda Laplace Bessel operatörü ile ilgili maksimal operatörler" başlıklı bu tez, Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

03/01/2020

Prof. Dr. Önder UYSAL
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Danışman, Matematik Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Cansu KESKİN
Ortak Danışman, Matematik Bölümü

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU
Matematik Bölümü, Uşak Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Doç. Dr. Ali Serdar Nazlıpınar
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %30 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Ebru TAVALI

Dr. Öğr. Üyesi Cansu KESKİN

ORLİCZ UZAYLARDA Δ_B OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ MAKSİMAL OPERATÖRLER

Ebru TAVALI
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2019
Tez Danışmanı : Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Ortak Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Cansu KESKİN

ÖZET

Çalışmamız, harmonik analizde önemli yer tutan, singüler integral operatörler, Orlicz uzaylar ve genelleştirilmiş öteleme operatörleri ile ilişkili maksimal operatörlerin sınırlılığı ile ilgilidir. İlk önce giriş kısmında, tez konusu hakkında çalışmaları olan araştırmacılar ile ilgili bilgi verilerek, tez çalışması amacı hakkında bilgi verilecektir. İkinci bölüm, çalışmamızın temelini oluşturan ve ilerki kısımlarda gözönüne alınacak olan bazı temel kavram ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde, çalışmamızın önemli bir kısmını içeren Orlicz uzayları ve Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, ardından Orlicz uzayları kısaca incelenmiştir. Son bölümde, singüler integral operatörlerinin sınırlılık problemlerinin incelenmesinde önemli olan maksimal integral operatörlerin sınırlılıkları araştırılmış ve Orlicz uzaylarda genelleştirilmiş öteleme operatörüne bağlı B-maksimal operatörlerin sınırlılıkları ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleşmiş öteleme operatörü, Laplace Bessel operatörü, Lebesgue uzayı, Laplace Bessel operatörü ile ilgili Maksimal operatör, Maksimal operatör, Orlicz uzayı.

THE MAXIMAL OPERATORS ASSOCIATED WITH Δ_B OPERATORS ON ORLICZ SPACES

Ebru TAVALI
Department Of Mathematics, M.S. Thesis, 2019
Thesis Supervisor : Prof. İsmail EKİNCİOĞLU
Thesis Co-Supervisor : Asist. Prof. Cansu KESKİN

SUMMARY

Our study is related to the singular integral operators, Orlicz spaces, which are important in harmonic analysis, and the boundedness of maximal operators connected to generalized shift operator. Firstly, in the introduction part, information will be given about the researchers who have papers concerned with thesis study and information about the goal of our thesis will be given. The second chapter contains some main concepts, theorems which will be apply to succeeding chapters. By giving the information about Orlicz spaces and Young's functions, which contain a significant part of our study, then Orlicz spaces are investigated briefly in third chapter. In the final chapter, the maximal integral operators which are important in our thesis of the problems of the boundedness of singular integral operators are investigated and the some results associated with the boundedness of B-maximal operators connected to the generalized displacement operator in Orlicz spaces are given.

Keywords: Generalized Shift operators, Laplace Bessel operator, Lebesgue space, Maximal operator, Maximal operator related to Laplace Bessel operator, Orlicz space.

TEŞEKKÜR

Araştırmamın her anında bana yol gösteren, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan saygı değer hocalarım; Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU'na ve Dr. Öğr. Üyesi Cansu KESKİN'e ; desteklerini asla esirgemeyen aileme teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu öklid uzay
BMO	BMO Uzayı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L_p(\mathbb{R}_n)$	Lebesgue uzayı
$L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$	Laplace-Bessel operatörüne bağlı Lebesgue uzayı
$\|\cdot\|_{L^p}$	Lebesgue uzayında norm
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	zayıf Lebesgue uzayı
Φ	Young fonksiyonu
$\widetilde{\varphi}(t)$	φ fonksiyonunun sağ tersi
$\widetilde{\Phi}(t)$	Φ fonksiyonunun tümleyeni
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$WL^\Phi(\mathbb{R}^n)$	zayıf Orlicz uzayı
$\|\cdot\|_{L^\Phi}$	Orlicz uzayında norm
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
$\operatorname{ess\,sup}$	Esas supremum
$\operatorname{ess\,inf}$	Esas infimum
$f \otimes g$	Genelleştirilmiş ötelemeye bağlı konvolüsyon çarpım
M_γ	Δ_B-maksimal operatörü
B_n	Bessel operatörü
$\triangle_B$	Laplace-Bessel operatörü
T^y	Genelleştirilmiş öteleme operatörü

1. GİRİŞ

Harmonik analizde, singüler integral operatörler ile ilgili sınırlılık problemleri, bazı fonksiyon uzaylarda geniş bir şekilde incelenmiştir. Örneğin, Lebesgue uzaylarda, bu singüler integral operatörlerin zayıf ve kuvvetli tipli sınırlılıkları kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır (Stein, 1970, Bennett ve Sharpley, 1988, Torchinsky, 1986 ve Grafakos, 2004). Bu sonuçlara göre, bazı problemler Lebesgue uzaylarında, çalışılamadığından yeni uzaylara ihtiyaç doğmuştur. Bu nedenle, Orlicz uzayları ve Lorentz uzayları ortaya çıkmıştır.

$L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olan Orlicz uzayları, 1931 yılında ortaya konmuştur (Birnbaum ve Orlicz, 1931). Orlicz uzayları reel ve harmonik analizde önemli bir yere sahiptir. Harmonik analizde, Orlicz uzaylardaki Hardy-Littlewood maksimal operatörlerin sınırlılıkları ile ilgil sonuçlar, singüler ve kesirli singüler integral operatörler gibi operatörlerin sınırlılıkları için büyük kolaylıklar sağlarlar. Bu nedenle, Orlicz uzaylarda Hardy-Littlewood maksimal operatörler ve klasik singüler integral operatörler detaylı bir şekilde araştırılmıştır. Bu güne kadar Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (O'Neil, 1963; Strich, 1972; Torchinsky, 1976; Cianchi, 1996; Nakai, 2001; Gasanov, 2017, 2018). Biz çalışmamızda, Orlicz uzaylarda maksimal operatörler yerine bu operatörlerden farklı olan Laplace Bessel operatörü ile ilgili B-maksimal operatörlerin sınırlılık problemini ele alacağız. Kısaca bu çalışmada, singüler integral operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıkları göz önüne alınarak, Laplace-Bessel operatörüne bağlı maksimal operatörlerin (B-Maksimal operatörler) Orlicz uzaylarındaki sınırlılıklarının incelenmesi problemi incelenecektir.

Bu konular ile ilgili çalışmaları şu şekilde özetleyebiliriz: Kipriyanov, I.A. (Kipriyanov, 1967), Lyakhov, L.N. (Lyakhov, 1996), Gadjiev, A.D. ve Aliev, I.A.(Aliev ve Gadjiev,1988), I. Ekincioglu ve A.Serbetci (Ekincioglu, 2010), Vagif.S. Guliyev (Guliyev, vd., 2007), gibi araştırmacılardır. Vagif S. Guliyev (Guliyev, 2003)) Laplacean-Bessel diferansiyel operatörler ile elde edilen maksimal fonksiyonları araştırmıştır ve $L_{p,\gamma}$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarda bu fonksiyonların sınırlılıklarını takdim etmiştir.

Harmonik analizdeki konvolüsyon tipli singüler integral operatörlerin, ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılık problemleri incelenirken, farklı yaklaşımlar ortaya çıkmaktadır. Ancak bu yaklaşımlar içinde en çok kullanılan yöntem ise maksimal operatörlerin snırlılıkları ile ilgili sonuçlardır. Orlicz uzaylarında maksimal operatörler ve Calderon

Zygmund tipli singüler integral operatörlerin sınırlılıkları pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalarda genellikle sınırlılık problemleri ile ilgili sonuçlar elde edilirken maksimal operatörler ile ilgili sonuçlar kullanılmıştır. Bu maksimal operatörlere farklı bir açıdan bakmanın yeni bir çalışma olabileceği kanaati bizde uyanmıştır. Bu nedenle konvolüsyon tipli integral operatörleri genelleşmiş öteleme ile elde edilen singüler integraller olarak göz önüne aldık. Bunların sınırlılık problemlerini farklı bir uzay olan Orlicz uzaylarında incelemek için önce genelleşmiş öteleme ile ilgili maksimal operatörleri verdik ve daha sonra Orlicz uzaylarında genelleşmiş öteleme ile ilgili singüler integral operatörlerinin sınırlılık problemi çözümü ele alınmıştır. Burada, genelleşmiş öteleme k tane Laplace ve $n-k$ tane Bessel denkleminin çözümüne karşılık gelmektedir.

Bu tezin amacı, genelleşmiş ötelemeye bağlı singüler integral operatörlerin sınırlılıklarını incelemeye kolaylık sağlayacak sonuçlar elde etmek olduğundan, maksimal operatörleri yeniden tanımlamak gerekir. Çünkü konvolüsyon tipli singüler integrallerde öteleme kavramı söz konusudur. Bu nedenle maksimal operatörleri, farklı bir öteleme olarak göz önüne alacağımız genelleşmiş öteleme ile tanımlayarak sınırlılık sonuçları elde edilmiştir.

Bu çalışma, Laplace Bessel operatörü ile ilgili singüler integral operatörlerin Orlicz uzaylarında sınırlılıklarını çalışmak isteyen araştırmacılara yol gösterecek ve kolaylık sağlayacaktır. Örneğin Orlicz uzayları, Morrey uzayları veya Orlicz-Morrey uzaylarında Bessel operatörüne bağlı genelleşmiş öteleme ile elde edilen Riesz Bessel dönüşümleri, Riesz potansiyelleri gibi singüler integral operatörlerin sınırlılık problemlerinin araştırılmasını bu uzaylarda kolaylaştıracaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1. S boştan farklı cümle ve Υ, S'nin alt kümelerinin bir sınıfı olsun.

(i) $S \in \Upsilon$,

(ii) $\forall\ I \in \Upsilon$ iken $I^c \in \Upsilon$,

(iii) $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $I_i \in \Sigma$ için $\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i \in \Sigma$, şartları sağlanırsa Υ ailesine (sınıfına) S kümesi üzerinde cebir denir.

Eğer (iii) koşulu yerine, $\forall i \in \mathbb{N}$ ve $\mathrm{I}_i \in \Upsilon$ için $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i \in \Upsilon$ şartı sağlanırsa Υ sınıfına S kümesi üzerinde bir σ-cebir denir.

Tanım 2.1.2. S bir cümle ve Υ, S cümlesinde bir σ-cebiri olsun. O halde (S, Υ) ikilisine ölçü uzayı, Υ ailesindeki her bir cümleye de Υ-ölçülebilir cümle veya ölçülebilir cümle denir.

Tanım 2.1.3. (S, Υ) ölçül uzayı olsun. $\mu : S \to \mathbb{R}$ dönüşümü

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\forall\ I \in \Upsilon$ için $\mu(\Upsilon) \geq 0$,

(ii) (I_n) ayrık kümelerin bir dizisi olmak üzere $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$

şartlarını sağlarsa, μ dönüşümüne S kümesinde bir ölçü denir. Ayrıca (S, Υ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.4. E, F aynı F cisminde iki vektör uzayı ve $T : E \to F$ bir dönüşüm olsun.

(i) $\forall \xi, \zeta \in E$ için $T(\xi + \zeta) = T(\xi) + T(\zeta)$

(ii) $\forall \xi \in E$ ve $\forall \alpha \in F$ için $T(\alpha\xi) = \alpha T(\xi)$

koşulları sağlanırsa T dönüşümüne bir lineer operatör denir. Eğer $\forall \xi, \zeta \in E$ için $|T(\xi+\zeta)| \leq |T(\xi)| + |T(\zeta)|$ ve $|T(\alpha\xi)| = |\alpha||T(\xi)|$ şartları sağlanıyorsa bu durumda T operatörüne alt lineer operatör denir. Eğer $a > 0$ olmak üzere $T(\xi + \zeta) \leq a[T(\xi) + T(\zeta)]$ ve $|T(b\xi)| = |b||T(\xi)|$ şartları sağlanırsa, T operatörüne quasi-lineer operatör denir.

Tanım 2.1.5. $0 < p < \infty$ ve (S, Υ, μ) olmak üzere $L_p(S)$ uzayı,

$$\left\{ f : \int_S |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanır. Bu uzaya Lebesgue uzayı denir ve $1 \leq p < \infty$ için $L_p(S)$ uzayının normu

$$\|f\|_{L_p(S)} = \int\limits_S \left(|f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanır. Bu normu ile Lebesgue uzayı bir Banach uzayıdır. $p = \infty$ iken $\|f\|_{L_\infty(S)} = \operatorname*{ess\,sup}_{I \in S} |f(I)|$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6. (S, μ) bir ölçü uzayı ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in L^p(S)$ ve $g \in L^q(S)$ ise $fg \in L^1(S)$ dir ve

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. Özel olarak $p = q = 2$ hali Cauchy Swartz eşitsizliği olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7. $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Her $a, b > 0$ için $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ eşitsizliğine Young Eşitsizliği denir. Burada q, p'nin Hölder eşleniğidir.

Teorem 2.1.8. $\omega(S) = 1$ iken (S, η, ω) sonlu ölçü uzayı olsun. Eğer φ, $L^1(S, \omega)$de her $\theta \epsilon S$ için $\alpha < \varphi(\theta) < \beta$ şartını sağlayan reel değerli fonksiyon ve (α, β) üzerinde ϕ konveks ise; O zaman $\phi\big(\int_S \varphi d\omega\big) \leq \int_S \phi \circ \varphi d\omega$ Jensen eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.1.9. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ ve

$$\|\varphi\|_{WL_p} = \sup_{\nu > 0} \nu \left| \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n : |\varphi(\zeta)| > \nu \right\} \right|^{\frac{1}{p}}$$

iken

$$WL^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad \varphi \text{ ölçülebilir} \quad \|\varphi\|_{WL_p} < \infty \right\}.$$

fonksiyonlar kümesine zayıf Lebesgue uzayı denir.

Tanım 2.1.10. Ω, $\mathbb{R}^n$de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Ω nın kompakt alt kümelerinin tamamında, ρ inci mertebeden kuvvetleri integrallenen ve sınırlı kalan fonksiyonların uzayına Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı denir ve $L^p_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir. $\rho = 1$ için $L^1_{loc}(\Omega)$ şeklinde gösterlen bu uzay lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını ifade eder.

Tanım 2.1.11. $1 \leq p$, $q \leq \infty$ ve K bir quasi-lineer operatör olsun. $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to WL^q(\mathbb{R}^n)$ sınırlı ise bu operatöre (p, q) zayıf tiplidir denir. Her $\nu > 0$ ve $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left|\{\zeta \in \mathbb{R}^n : |K\varphi(\zeta)| > \nu\}\right| \leq \left(\frac{E}{\nu}\|\varphi\|_{L^p}\right)^q$$

olacak şekilde pozitif E sayısı mevcut ise K operatörüne (p, q) zayıf tiplidir denir. $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ operatörü sınırlı ise bu operatöre (p, q) kuvvetli tiplidir denir. $\forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|K\varphi\|_{L_q} \leq E\|\varphi\|_{L_p}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif $E > 0$ sayısı mevcut ise T operatörüne (p, q) kuvvetli tiplidir denir.

Uyarı 2.1.12. Eğer bir operatör (p, q) kuvvetli tipli bir operatör ise bu durumda bu operatör (p, q) zayıf tipli bir operatördür (Grafakos, 2004).

Tanım 2.1.13. $\log^+\zeta = maks(\log \zeta, 0)$ olmak üzere

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(\zeta)| \log^+|\phi(\zeta)| d\zeta < \infty$$

olacak şekilde ölçülebilir $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümler ailesine $L \log L$ uzayı adı verilir (Bennett ve Sharpley, 1988).

BMO uzayları, John ve Nirenberg tarafından 1961 yılında ilk defa tanıtılmıştır. BMO uzayı ile L^p Lebesgue uzayı bazı ortak özelliklere sahiptir ve L^∞ uzayı yerine alınabilir. Bu nendenle, $T : L^\infty \to L^\infty$ integral operatörleri sınırlı olduğundan $T : L^\infty \to \mathrm{BMO}$ olur.

Tanım 2.1.14. Φ, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyon olsun. O halde $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|\Phi\|_* = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(\xi, r)|} \int\limits_{B(\xi,r)} \left|\Phi(\xi) - \Phi_{B(\xi,r)}\right| d\xi < \infty$$

norma (yarı-norm) göre Banach uzayıdır. Burada $B(\xi, r)$, ξ bir yuvar, $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\Phi_{B(\xi,r)} = \frac{1}{|B(\xi, r)|} \int\limits_{B(\xi,r)} \Phi(\xi) d\xi$$

dir.

BMO uzayının $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayına denk olmadığına dikkat edilmelidir. Bununla birlikte $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. Buradan şu sonucu söyleyebiliriz: Her ϕ sınırlı ölçülebilen fonksiyonu için $\phi \in \mathrm{BMO}$ diyebiliriz. Fakat BMO uzayında bu özelliği sağlamayan fonksiyonlarda vardır. $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olup, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayına ait olmayan fonksiyonlar da vardır. Örnek olarak, $\phi(x) = \log|x|$ fonksiyonu verilebilir.

Örnek 2.1.15. $\phi(\xi) = \log \frac{1}{|\xi|} \mathrm{sign}(\xi)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda bu fonksiyon $\mathrm{BMO}([-1,1])$ uzayına ait değildir. O halde $0 < t < 1$ ve $I \equiv [-t,t]$ iken $\phi_1 = 0$ ve $t \to 0$ olduğunda

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I |\phi(\xi) - \phi_1| d\xi &= \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \left|\log \frac{1}{|\xi|}\right| d\xi = \frac{1}{t}\int_0^t \log\frac{1}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{t}\Big(-\int_0^t \log \xi d\xi\Big) = \frac{1}{t}\Big(t + t\log t\Big) \\ &= 1 + \log\frac{1}{t} \to \infty,\ t \to 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle, verdiğmiz bu örnek bize, bir fonksiyonun modülünün BMO uzayına ait olması, BMO uzayına ait olmasını gerektirmediği sonucunu vermektedir.

Uyarı 2.1.16.

i. $\forall\ \phi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve pozitif $t > 0$ sayısı için

$$|\{\xi \in \Omega : |\phi(\xi) - \phi_\Omega| > t\}| \le C_1 |\Omega| e^{-C_2 \lambda / \|\phi\|_*},$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde C_1 ve C_2 pozitif sayıları vardır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dir. Bu eşitsizliğie John-Nirenberg eşitsizliği adı verilir.

ii. Bu eşitsizlik, $1 < p < \infty$ olduğunda

$$\|\phi\|_* \approx \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{|B(\zeta,r)|}\int_{B(\zeta,r)} |\phi(\eta) - \phi_{B(\zeta,r)}| d\eta\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde elde edilir.

iii. $\phi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $0 < 2r < s$ için

$$\left|\phi_{B(\zeta,r)} - \phi_{B(\xi,s)}\right| \le C\|\phi\|_* \ln\frac{s}{r} \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir pozitif C sayısı mevcuttur. Burada C, ξ, r, s sayıları ve f fonksiyonundan bağımsız

Uyarı 2.1.17.

i. $\phi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ise $\phi(\Delta - \zeta) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|\phi(\cdot - \zeta\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} = \|\phi\|_{\mathrm{BMO}}$ dir.

ii. $\phi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ise $\phi(\lambda\zeta) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|\phi(\lambda\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} = \|\phi\|_{\mathrm{BMO}}$ dir.

iii. $\phi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\|\phi\|_{\mathrm{BMO}} \approx \sup_{B(\zeta,r)} \inf_{c\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(\zeta,r)|} \int_{B(\zeta,r)} |f(\eta) - c| d\eta$$

dir.

2.2. Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü

Tanım 2.2.1. $B_n = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{\gamma_n}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ Bessel operatörü ve $B_x v = B_\xi v$, $v(x,0) = \psi(x)$, $v_\xi(x,0) = 0$ başlangıç değer problemi olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\gamma}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \gamma > 0 \tag{2.2}$$

denkleminin $v\big|_{\xi=0} = \psi(x)$ ve $\frac{\partial v}{\partial \xi}\big|_{\xi=0} = 0$ koşullarını sağlayan çözüme $\mathbb{R}_+$ da öteleme denir. Bu çözüm

$$v(x,\xi) = T_x^\xi \psi(x) = \Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\pi^{\frac{-1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})^{-1}\int_0^\pi \psi(\left(x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbb{R}_+$ aralığında tanımlı olan bu ötelemeye $\mathbb{R}_+$ öteleme denir (Levitan, 1951).

Buradan $T_x^0\psi(x) = \psi(x)$ olduğu kolayca elde edilir. Eğer $\psi(x)$ fonksiyonunun sürekli türevlere sahip ise bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} T_x^\xi \psi(x)\big|_{\xi=0} = 0 \tag{2.3}$$

elde edilir. $\psi(x)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip ise $T_x^{\xi}\psi(x)$ operatörü, (2.2) denkleminin çözümüne karşılık gelir ve (2.3) denklemlerini sağlar. Eğer $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise $x', \xi' \in \mathbb{R}^k$ dir ve

$$\triangle_{B_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_j, \qquad B_j = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_{j-k}}{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$\triangle_B$ Laplace-Bessel operatörü olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_j} + \frac{\gamma_j}{x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} + \frac{\gamma_j}{\xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_j}$$

denkleminin önceden verilen başlangıç koşular altındaki çözümü

$$T_x^{\xi}\psi(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^{\pi} \psi\big(x' - \xi', \big(x_{n+1}^2 + \xi_{n+1}^2 - 2x_{n+1}\xi_{n+1}\cos\alpha\big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\big(x_{n+2}^2 + \xi_{n+2}^2 - 2x_{n+2}\xi_{n+2}\cos\alpha\big)^{\frac{1}{2}}, ..., \big(x_n^2 + \xi_n^2 - 2x_n\xi_n\cos\alpha\big)^{\frac{1}{2}}\big) \sin^{\gamma_i}\alpha d\alpha$$

dir. Bu elde edilen çözüm fonksiyonuna genelleştirilmiş öteleme operatörü adı verilir (Levitan, 1973). Eğer $\psi(x)$ sürekli bir fonksiyon ise bu durumda $\int_{\mathbb{R}_+^n} |\psi(x)|(x)^{\gamma} dx < \infty$ olur. Her $x > 0$ için $g(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon ise bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^{\xi}\psi(x) g(\xi)(\xi')^{\gamma} d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \psi(\xi) T_x^{\xi} g(x)(\xi')^{\gamma} d\xi$$

dir. E?er $g(x)$ fonksiyonunu 1 olarak alırsak aşağıdaki sonucu kolayca elde ederiz:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^{\xi}\psi(x)\xi^{\gamma} d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \psi(\xi)(\xi')^{\gamma} d\xi.$$

Tanım 2.2.2. f ve ψ ölçülebilir iki fonksiyon, $f, \psi \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ve T^{ξ} genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda

$$(f \otimes \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \psi(\xi) T^{\xi} f(x)\, (\xi')^{\gamma} d\xi, \qquad 1 \le p < \infty$$

çarpımına konvolüsyon çarpım ad verilirr.

2.3. İntegral Operatörler

Bu kısımda, temel singüler integral operatörler hakkında kısa temel bilgiler takdim edilecektir.

Tanım 2.3.1. $f, \mathbb{R}^n$ Öklid uzayında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(\xi)| d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

operatörüne Hardy-Littlewood maksimal operatör denir.

Tanım 2.3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sıfırncı mertebeden homojen bir fonksiyon olsun. E?er bu fonksiyon

$$w(t) = \sup \left\{ |\Omega(x) - \Omega(\xi)| : x, \xi \in S^{n-1}, \quad |x - \xi| \leq t \right\}$$

ve

$$\int_{\Omega} \frac{w(t)}{t} dt < \infty$$

(Dini şartı) şartlarını sağlarsa bu durumda,

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B(x,r)} \frac{\Omega(\xi)}{|\xi|^n} f(x - \xi) d\xi \tag{2.4}$$

operatörüne singüler integral operatör denir.

Tanım 2.3.3. f , $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilen bir fonksiyon ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. Bu durumda M_α kesirli maksimal operatör,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(\xi)| d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\alpha = 0$ ise $M_0 \equiv M$ dir.

Tanım 2.3.4. f , $\mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. B_n-maksimal fonksiyon

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} T^\xi |f(x)| \, (\xi')^\gamma \, d\xi$$

şeklinde tanımlanır ve $M_\gamma f$ ile gösterilir (Guliyev, 2003).

Teorem 2.3.5.

i. M maksimal operatörü, $1 \leq p \leq \infty$ için (p,p) zayıf tipli ise $1 < p \leq \infty$ için (p,p) kuvvetli tiplidir (Hardy ve Littlewood, 1928; Wiener, 1939).

ii. T, singüler integral operatör, $1 \leq p < \infty$ için (p,p) zayıf tipli ise $1 < p < \infty$ için (p,p) kuvvetli tiplidir (Bennett ve Rudnick, 1980; Bennett ve Sharpley, 1988).

iii. M_α kesirli maksimal operatör, $1 \leq p \leq \frac{\alpha}{n}$ için (p,q) zayıf tipli ise $1 < p \leq \frac{\alpha}{n}$ için (p,q) kuvvetli tiplidir. ($\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$) (Hardy ve Littlewood, 1928; 1932; Sobolev, 1938).

3. ORLICZ UZAYLARI

3.1. Young Fonksiyonları

Tanım 3.1.1. ϕ sembolü ile tüm fonksiyonların kümesini göstereceğiz. $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ negatif değildir, $[0,\infty)$ aralığında artandır ve aynı zamanda $\varphi(0_+) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ dur.

$\varphi \in \phi$ olmak üzere $\varphi(L)$ sınıfı tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfıdır. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ olmak üzere

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x))dx < \infty$$

dur. $\varphi \in \phi$ için φ ile ilgili tamamlayıcı fonksiyonu tanımlayabiliriz.

$$\psi(s) = \sup\{s\ t - \varphi(t);\ t > 0\}, \quad s \geq 0,$$

$$\psi(s) = \psi(-s), \quad s < 0\ .$$

Young eşitsizliğinden

$$t\ s \leq \varphi(t) + \psi(s), \quad t, s \geq 0.$$

Orlicz uzayları ile ilgili klasik görüş şöyledir:

φ konveks ve $\lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{\varphi(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{\varphi(t)} = 0$ olduğunda $\varphi \in \phi$ fonksiyonunun bir Young fonksiyonu olduğu söylenebilir. Bu durumda L_φ lineer örtüsü $\varphi(L)$ sınıfının Luxemburg normu ile oluşturulabilir.

$$\|f\|_{L_\varphi} = \inf\{\lambda > 0;\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x)/\lambda)dx \leq 1\}$$

Bu normlu lineer uzaya Orlicz uzayı denir. φ ye göre ϕ tamamlayıcı(Young) fonksiyon olduğunda Luxemburg normu Orlicz normuna eşittir.

$$\sup\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx;\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(g(x))dx \leq 1\right\}$$

Daha genel bir sınıf aşağıdaki şekilde tanıtılabilir:

Tanım 3.1.2. $\varphi \in \phi$ ve $0 \leq \lambda < n$ olsun. O halde Orlicz-Morrey sınıfı

$$\varphi_\lambda(L) = \Big\{f \ \text{ölçülebilir;}\ |f|_{\varphi,\lambda} = \sup_{r>0\ z\in\mathbb{R}^n} r^{-\lambda} \int\limits_{B(z,r)} \varphi(f(y))dy\ < \infty\Big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\varphi_0(L) = \varphi(L)$ olduğu açıkça görülür. Sadece $\varphi \in \phi$ olduğunda, L_φ Orlicz uzayını quasinormun lokal konveks bir topolojisiyle $\varphi(L)$nin lineer örtüsü olarak tanımlayabiliriz.

$$\inf\{\lambda > 0; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(y)/\lambda)dy \leq \lambda\}$$

Lokal olarak integrallenebilir pozitif $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olarak tanımlansın. $\varphi \in \phi$ olmak üzere ağırlıklı Orlicz sınıfı tüm f fonksiyonlarının kümesidir.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x))\varrho(x)dx < \infty$$

Ayrıca ağırlıklı Orlicz uzayı da onun lineer örtüsüdür. Sonraki kümeler için $L_\varphi(\varrho)$ notasyonunu alacağız. Eğer φ Young fonksiyonu ise, yukarıdaki ağırlıklı olmayan normlara benzer şekilde ağırlıklı Lüksemburg normu ve ağırlıklı Orlicz normu tanımlanabilir.

Aşağıdaki kavram, Orlicz uzayları ve sınıfları teorisinde en sık görülenlerdendir.

Tanım 3.1.3. $\varphi \in \phi$ bir fonksiyon ve $c > 0$ olacak şekilde Δ_2 koşulu sağlanıyorsa $\varphi(2t) \leq\ c\varphi(t),\ t > 0$ dır.

Eğer küçük t için(büyük t için) $\varphi(2t) \leq\ c\varphi(t)$ ise, o zaman φ fonksiyonu 0 yakınında(∞a yakınında) Δ_2 koşulunu sağlar. φ, Δ_2 koşulunu sağladığında bazen $\varphi \in \Delta_2$ yazılabilir.

Tanım 3.1.4. $\varphi \in \phi$, Δ_2 koşulunu sağlasın.

$$h_\varphi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)},\quad \lambda > 0$$

ifadesini yerine yazarsak, φ nin alt indeksi;

$$i(\varphi) = \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\log\ h_\varphi(\lambda)}{\log \lambda} = \sup_{0<\lambda<1} \frac{\log\ h_\varphi(\lambda)}{\log \lambda}$$

ve φ nin üst indeksi;

$$I(\varphi) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\log\ h_\varphi(\lambda)}{\log \lambda} = \inf_{1<\lambda<\infty} \frac{\log\ h_\varphi(\lambda)}{\log \lambda}$$

şeklinde ifade edilir.

İndeksler diğerleri arasında güç fonksiyonları sayesinde $\varphi \in \phi$, $\varphi \in \Delta_2$ şartlarını sağlayan bir fonksiyonun büyümesinin tahminini sağlar. Yani, $\varepsilon > 0$ alınırsa, orada bir C_ε sabiti olacaktır.

$$\varphi(\lambda\ t) \leq C_\varepsilon\ \max(\lambda^{i(\varphi)-\varepsilon}\ ,\ \lambda^{I(\varphi)+\varepsilon})\varphi(t); \quad \lambda, t \geq 0,$$

$$\varphi(\lambda\ t) \geq C_\varepsilon\ \min(\lambda^{i(\varphi)-\varepsilon}\ ,\ \lambda^{I(\varphi)+\varepsilon})\varphi(t); \quad \lambda, t \geq 0,$$

$\varphi \in \Delta_2$ ancak ve ancak $I(\varphi) < \infty$ olduğunda geçerlidir.

Şimdi yarı konveks fonksiyonların özel sınıfını inceleyelim.

Tanım 3.1.5. $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ bir fonksiyon olsun. $\omega(t) \leq \varphi(t) \leq c\omega(ct)$ ve $t \in [0, \infty)$ olmak üzere bir ω konveks fonksiyonu ve bir $c > 0$ sabiti varsa φ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde yarı konvekstir denir.

Lemma 3.1.6. $\varphi \in \phi$ olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:

i. φ, $[0, \infty)$ üzerinde yarı konvekstir;

ii. $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq c_1(t\ \varphi(c_1\ x_1) + (1-t)\ \varphi(c_1\ x_2))$ eşitsizliği $\forall\ x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ve $\forall\ t \in (0, 1)$ için ayrıca bağımsız c_1 sabiti için sağlanır;

iii. $\forall\ f \in L^1{}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve tüm sınırlı I aralıkları için c sabiti bağımsız olmak üzere,

$$\varphi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx\right) \leq \frac{c}{|I|}\int_I \varphi(cf(x))dx\ dir.$$

iv. $a > 1$ olmak üzere, $\forall\ 0 < x_1 < x_2$ için

$$\frac{\varphi(x_1)}{x_1} \leq \frac{a\varphi(a\ x_2)}{x_2} \quad dir.$$

İspat. $i \Rightarrow ii$ ve $i \Rightarrow iii$ çıkarımları konveks fonksiyonların özelliklerinden kolaylıkla görülür. $i \Leftrightarrow iv$ olduğunu gösterelim. $\varphi \in \phi$ olsun. φ nin yarı konveks olduğunu varsayalım. Böylece ω konveks fonksiyonu ve $c_1 > 0$ sabiti vardır.

$$\omega(t) \leq \varphi(t) \leq c_1\omega(c_1 t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Bir fonksiyon olarak $t \mapsto \omega(t)/t$ azalandır.

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1} \leq \frac{\omega(t_2)}{t_2}, \qquad 0 < t_1 < t_2$$

dir. Böylece

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \leq \frac{c_1\omega(c_1t_1)}{t_1} \leq \frac{c_1\omega(c_1t_2)}{t_2} \leq \frac{c_1\varphi(c_1t_2)}{t_2}$$

$i \Rightarrow iv$ e ispatı tamamladık. Şimdi tersine bakalım.

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \leq\ c_1\frac{\varphi(c_1t_2)}{t_2}, \qquad 0 < t_1 < t_2$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{c_1}\int\limits_0^{t/c_1} \sup_{0<\tau<s} \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\ ds\ .$$

ω, $[0, \infty)$ üzerinde konveks olsun.

$$\omega(t) \leq \frac{t}{{c_1}^2} \sup_{0<\tau<t/c_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \leq \varphi(t)\ ,$$

$$2c_1\omega(2c_1t) = 2\int\limits_0^{2t} \sup_{0<\tau\leq s} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} ds \geq \int\limits_t^{2t} \sup_{0<\tau\leq s} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} ds$$

$$\geq \frac{\varphi(t)}{t} t = \varphi(t)\ .$$

$iii \Rightarrow ii$ çıkarımını kanıtlayalım. Birim uzunluğunun keyfi aralığı I olsun. $0 < t < 1$ aralığında verilen bir t için $|I_1| = t$, $|I_2| = 1 - t$ olmak üzere $I = I_1 \cup I_2$ olarak alınırsa

$$u \in I_1 \quad ise \;\; f(u) = x_1 \;\; ; \;\; u \in I_2 \quad ise \;\; f(u) = x_2$$

dir. Böylece ii sağlanır.

Şimdi de $ii \Rightarrow iv$ çıkarımına bakalım. Açıkçası ii sayesinde t_1 ve t_2 için $0 < t_1 < t_2$,

$$\varphi(t_1) = \varphi\left(\frac{t_1}{t_2} \,.\, t_2\right) = \varphi\left(\frac{t_1}{t_2} \,.\, t_2 \;+\; \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right).0\right) \leq \frac{c_1 t_1}{t_2}\varphi(c_1 t_2)$$

Böylece iv elde edilmiş olur.

3.2. Maksimal Fonksiyonlar

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve

$$\widehat{M}f(x,t) = \sup \frac{1}{B} \int\limits_B |f(y)|dy \;, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+ \;, \tag{3.1}$$

genelleştirilmiş maksimal fonksiyon olsun. $x \in B$ ve $B \geq 2^{-1}t$ olmak üzere $B \subset \mathbb{R}^n$ şeklindeki tüm kürelere supremum sahiptir. $t = 0$ için, $Mf(x)$ klasik Hardy Littlewood-Wiener maksimum fonksiyonunu ele alalım.

Açık biçimde görülür ki

$$Mf(x) \sim \sup_{x \in Q} \frac{1}{Q} \int\limits_Q |f(y)|dy$$

dir. $1 < p < \infty$ için L_p de M nin sınırlı olduğu bilinmektedir. $\varphi \in \phi$ için bu fonksiyonların karakterizasyonunu inceleyelim. c sabiti $f$den bağımsız olmak üzere,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(Mf(x))dx \leq \; c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(c\; f(x))dx, \qquad f \in {L^1}_{\text{loc}} \tag{3.2}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikten modüler eşitsizlik olarak bahsedilebilir.

β sembolü $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$ üzerinde pozitif bir ölçü ve $B(x,r)$, $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli ve r yarıçaplı bir küre olsun. $\widehat{B}(x,r)$ ise $B(x,r) \times [0,2r)$ silindiri olsun.

(2.2.) için denk olan koşullar aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.2.1. $\varphi \in \phi$ olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

i. Pozitif bir c_1 sabiti vardır öyle ki c yerine c_1 yazarsak tüm $f \in L^1{}_{\text{loc}}$ ler için (2.2.) eşitsizliği doğru olur.

ii. φ^a fonksiyonu bazı $a \in (0,1)$ ler için yarı konvekstir.

iii. Pozitif bir c_2 sabiti vardır öyle ki

$$\int_0^\sigma \frac{\varphi(s)}{s^2}\, ds \leq \frac{c_2\varphi(c_2\sigma)}{\sigma}\ , \qquad 0 < \sigma < \infty\ ; \tag{3.3}$$

iv. $t > 0$ için bir c_3 pozitif sabiti vardır öyle ki

$$\int_0^t \frac{d\varphi(u)}{u} \ \leq \frac{c_3\varphi(c_3 t)}{t}\ ; \tag{3.4}$$

v. Bir $a > 1$ sabiti vardır öyle ki

$$\varphi(t) < \frac{1}{2a}\varphi(a\ t), \qquad t \geq 0. \tag{3.5}$$

Teoremin ispatını birkaç lemma olarak verelim ve teoremin anahtarını lemmadan sonra açıklayalım.

Lemma 3.2.2. $a \in (0,1)$ ve $a_1 > 1$ olsun.

$$\varphi(t)^\alpha \ < \frac{1}{2a_1}\varphi^\alpha(a_1\ t), \qquad t \in (0,\infty). \tag{3.6}$$

İspat. Herhangi bir $\alpha \ \in (0,1)$ için,

$$\varphi(t)^\alpha \ \leq \frac{1}{(2a)^\alpha}\varphi^\alpha(a\ t).$$

$\log_{2a}\dfrac{3a}{2} < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\varphi(t)^\alpha \ \leq \frac{2}{3a}\varphi^\alpha(a\ t)$$

olur. Sonuç olarak

$$\varphi(t)^\alpha \ \leq \frac{2}{3a}\frac{2}{3a}\varphi^\alpha(a^2\ t) \leq \frac{1}{2a^2}\varphi^\alpha(a^2\ t)\ ,$$

Bu da yalnızca $a_1 = a^2$ olduğunda mümkündür.

Lemma 3.2.3. (2.5.) ifadesi φ fonksiyonunun yarı konveksliğini ifade eder.

İspat. Lemma 2.1.6. sayesinde bir c_1 sabiti bulmamız ispatı tamamlayacaktır. $0 < t_1 < t_2$ olduğunda

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \leq \frac{c_1\varphi(c_1 t_2)}{t_2}. \tag{3.7}$$

$0 < t_1 < t_2$ ve $t_2 \leq a\ t_1$ olsun. φ, $(0, \infty]$ aralığında artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{\varphi(t_2)}{t_2} \geq \frac{\varphi(t_1)}{a\ t_1}$$

olur. Bu yüzden

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \leq \frac{a\varphi(t_2)}{t_2} \leq \frac{a\varphi(a\ t_2)}{t_2}.$$

dir. Şimdi $0 < t_1 < t_2$ ve $t_2 > a\ t_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) = \varphi\left(\frac{t_2}{t_1}.t_1\right) &= \varphi\left(a^{\log_a t_2/t_1} t_1\right) \geq \varphi\left(a^{[\log_a (t_2/t_1)]} t_1\right) \\
&\geq (2a)^{-1+\log_a (t_2/t_1)} \varphi(t_1) \\
&\geq\ 2^{-1+\log_a (t_2/t_1)}\ a^{-1+\log_a (t_2/t_1)}\ \varphi\ (t_1) \\
&\geq \frac{t_2}{t_1}\ a^{-1}\varphi(t_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \leq \frac{a\varphi(t_2)}{t_2} \leq \frac{a\varphi(a\ t_2)}{t_2}$$

olur ve sonuca varırız.

Tanım 3.2.4. $\varphi \in \phi$ ve $T : L_\varphi \to L_\varphi$ bir alt-lineer operatör olsun. Eğer bir $c > 0$ sabiti varsa T operatörü (φ, φ) zayıf tiplidir. Öyle ki $\forall f \in \varphi(L)$ ve $\forall \lambda > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\varphi(\lambda)|\{x\ \in\ \mathbb{R}^n;\ \ |Tf(x)| > \lambda\}| \leq\ c \int\limits_{\mathbb{R}}^{n} \varphi(c\ f(x))\ dx$$

Yukarıdaki tanım (p, p) zayıf tip kavramının doğal bir genellemesidir, $1 \leq p < \infty$. Eğer

$T : L_p \to L_p$ ve $1 \le p < \infty$ ise

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |Tf(x)| > \lambda\}| \le \ c \ \lambda^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

olacak şekilde pozitif bir c sayısı olduğunda T nin (p,p) zayıf tipli olduğu söylenebilir. $\varphi \ \in \ \phi$ nin homojen olmamasından dolayı (φ,φ) zayıf tipte başka bir değişken mümkündür, bunu ekstra zayıf tip olarak adlandırabiliriz.

Lemma 3.2.5. $c > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\varphi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ Mf(x) > \lambda\}| \le \ c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(cf(x)) \ dx \tag{3.8}$$

eşitsizliği ancak ve ancak φ yarı konveks bir fonksiyon olduğunda $\forall f \in {L^1}_{\text{loc}}$ ve $\forall \lambda > 0$ için geçerlidir.

İspat. φ yarı konveks fonksiyon olsun. O zaman Jensen eşitsizliği sayesinde uygun bir ω konveks fonksiyonu için,

$$\varphi(Mf(x)) \le c\omega(cMf(x)) \le cM(\omega(cf(x))) \le cM(\varphi(cf(x))).$$

ω fonksiyonu artan olduğundan,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ Mf(x) > \lambda\}| &= \varphi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(Mf(x)) > \varphi(\lambda)\}| \\ &\le \frac{c\varphi(\lambda)}{c}|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ M(\varphi(cf(x))) > \varphi(\lambda)/c\}| \\ &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(cf(x))dx \ ;\end{aligned}$$

Son eşitsizlik M operatörünün $(1,1)$ zayıf tipinden kaynaklanmaktadır. Böylece uygunluk kanıtlanmış oldu.

Lemmadaki eşitsizliğin doğru olduğunu kabul edelim. φ nin yarı konveks olduğunu gösterelim.

$0 < t_1 < t_2$ ve $I = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 < x_i < (t_1/t_2)^{1/n} \ , \ i = 1, ..., n\}$ olsun. $f(x) = t_2 \chi \ I(x)$ eşitliğini yerine yazalım. Herhangi bir $x \in (0,1)^n$ alalım.

$$Mf(x) \ge t_2|I| = t_1.$$

Böylece

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad Mf(x) > t_1\}| \geq 1$$

ve lemmadaki eşitsizlik gösteriyor ki

$$\varphi(t_1) \leq c \int\limits_I \varphi(cf(x))dx = c|I|\varphi(ct_2) = c\frac{t_1}{t_2}\varphi(ct_2) \ ,$$

lemmaya göre φ yarı konvekstir.

İspat. Teorem 2.2.1. $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ ve $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ ifadelerini kanıtlayacağız. $(v) \Rightarrow (ii)$ koşulu üstteki iki lemmadan görülmektedir. İlk olarak $(ii) \Rightarrow (i)$ koşulunu inceleyelim. $\alpha \in (0,1)$ olsun. φ^α yarı-konvekstir; Jensen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(Mf(x))dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^\alpha(Mf(x)))^{1/\alpha}dx \\
&\leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n} (M(\varphi^a(cf(x))))^{1/\alpha}dx \\
&\leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^a((cf(x))))^{1/\alpha}dx \\
&= c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(cf(x))^{1/\alpha}dx.
\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ koşulunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun.

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x-y| < r\}$$

küresini alalım ve $f_t(x) = \chi_{B(0,1)}\ (x) \quad , t > 0$ ifadesini yerine yazalım. Eğer $|x| > 1$ ise,

$$Mf_t(x) \geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int\limits_{B(x,2|x|)} \chi_{B(0,1)}(y)t\ dy \geq \frac{t}{2^n|x|^n}$$

$$\int\limits_{|x|>1} \varphi\left(\frac{t}{2^n|x|^n}\right) dx \leq c_1\varphi(c_1 t)$$

olur. Buradan,

$$\int_{0}^{2^{-n}t} \frac{\varphi(s)}{s^2}ds \le c\frac{\varphi(ct)}{t}$$

elde edilir. Teoremdeki (iii) koşulunda c_2 sabiti yerine $2^n c$ alınırsa yukarıdaki ifade görülür. Şimdi de $(iii) \Rightarrow (v)$ koşulunu kanıtlayalım. İlk olarak varsayalım ki (iii) doğru olsun. (iii) de $b > 1$ olacak şekilde bir reel sayı vardır.

$$\frac{\varphi(s_1)}{s_1} \le \frac{b\varphi(bs_2)}{s_2} \quad , \qquad 0 < s_1 < s_2.$$

$$\frac{\varphi(s_1)}{s_1} \le 2\int_{s_1}^{2s_1} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt \le 2\int_{0}^{2s_2} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt \le \frac{c_2\varphi(2c_2s_2)}{s_2}.$$

$b = 2c_2$ alındığında zaten denklem elde edilmiş olur. d, $2n$ den büyük bir sabit olsun.

$$\int_{td^{-1}}^{t2^{-n}} \frac{\varphi(s)}{s^2}ds \le \frac{c\varphi(ct)}{t},$$

Bu yüzden

$$d\varphi\left(\frac{t}{db}\right)\log\frac{d}{2^n} \le bc\varphi(ct).$$

Eğer $t(db)^{-1} = \tau$ ifadesini yerine yazarsak,

$$(bc)^2\left(\log\frac{d}{2^n}\right)^{-1} < \frac{1}{2},$$

$$\varphi(\tau) \le \frac{1}{2bcd}\varphi(bcd\tau)$$

elde edilir. $a = bcd$ alındığında sonuç görülmüş olur.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ koşulunu kanıtlayalım. Lemma 2.2.2, $\alpha \in (0,1)$ ifadesinin varlğını gösterir. $a_1 > 1$ olmak üzere

$$\varphi^{\alpha}(\tau) < \frac{1}{2a_1}\varphi^{\alpha}(a_1\tau), \qquad \tau > 0.$$

φ^{α} nın yarı-konveks olduğunu biliyoruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ nin ispatına bakalım. İlk olarak $(iii) \Rightarrow (iv)$ koşulu ile başlayalım.

$$\int_0^t \frac{d\varphi(s)}{s} \leq \frac{\varphi(t)}{t} + \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s^2}ds \leq \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{c_2\varphi(c_2t)}{t} \leq \frac{c_3\varphi(c_3t)}{t}.$$

$(iv) \Rightarrow (iii)$ şartı için; Öncelikle (iv) koşulu altında $\varphi(t)/t$ fonksiyonunun yarı artan olduğunu gösterelim. Eğer $0 < s_1 < s_2$ ise,

$$\frac{\varphi(s_1)}{s_1} \leq \frac{c_3\varphi(c_3s_2)}{s_2}$$

s_1 , s_2 den bağımsız bazı c_3 ler için doğrudur.

$$\frac{\varphi(s_1)}{s_1} = \frac{1}{s_1}\int_0^{s_1} d\varphi(u) \leq \int_0^{s_1} \frac{d\varphi(u)}{u} \leq \int_0^{s_2} \frac{d\varphi(u)}{u} \leq \frac{c_3\varphi(c_3s_2)}{s_2}.$$

Bundan dolayı

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s^2}ds \leq \frac{\varphi(c_3t)}{t} + \int_0^t \frac{d\varphi(s)}{s} \leq \frac{c_2\varphi(c_2t)}{t}.$$

Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Sonuç 3.2.6. $\varphi \in \phi$ ve farz edelim ki $c > 0$ olsun. $\forall f \in {L^1}_{\text{loc}}$ için (2.2.) yi ele alalım. O zaman $\beta \in (0,1)$ ve $c_1 > 0$ sabitleri için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{\beta}(Mf(x))dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{\beta}(c_1\, f(x))dx, \qquad f \in {L^1}_{\text{loc}} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.7. $\varphi \in \phi$ olsun. c bir pozitif sabit olmak üzere

$$\sup_{\lambda>0} \varphi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ c\, Mf(x) > \lambda\}| < \infty \ , \quad f \in \varphi(L) \tag{3.10}$$

eşitsizliği ancak ve ancak φ yarı konveks olduğunda sağlanır.

İspat. Farz edelim ki φ yarı-konveks olmasın. $t_k{}'$, $t_k{}'' > 0$ ve $t_k{}' < t_k{}''$ olsun.

$$\frac{\varphi(t_k{}')}{t_k{}'} > 4^k \frac{\varphi(4^k t_k{}'')}{t_k{}''}.$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k t_k{}'' \chi I_k(x)$$

Burada

$$\begin{aligned} I_k &= \{x = (x_1, ..., x_n) \ ; \quad a_k < x_i < a_{k+1} \ , \quad i = 1, 2, ..., n\}, \\ a_k &= \sum_{j=1}^{k-1} (2^j \varphi(4^j t_j{}''))^{-1/n} \end{aligned}$$

dir. $f \ \in \ \varphi(L)$ için

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x))dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(4^k t_k{}'')(a_{k+1} - a_k)^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty \end{aligned}$$

$c4^k > 1$ olacak şekilde bir k tamsayısı seçelim.

$$\begin{aligned} \varphi(t_k{}')|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad cMf(x) > t_k{}'\}| &\geq \varphi(t_k{}')|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad c4^k t_k{}'' M\chi I_k(x) > t_k{}'\}| \\ &\geq \varphi(t_k{}')|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad t_k{}'' M\chi I_k(x) > t_k{}'\}|. \end{aligned}$$

Eğer $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ise

$$J_k = \{x \ \in \ \mathbb{R}^n \ ; \quad a_k < x_i < a_k + \left(\frac{t_k{}''}{t_k{}' 2^k \varphi(4^k t_k{}'')}\right)^{1/n} \quad , \quad i = 1, 2, ..., n\},$$

Ardından $I_k \subset J_k$ ve

$$M\chi I_k(x) \geq \frac{|I_k|}{|J_k|} = \frac{t_k{}'}{t_k{}''}.$$

$$\varphi(t_k{}')|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad cMf(x) > t_k{}'\}| \geq \frac{\varphi(t_k{}')t_k{}''}{t_k{}' 2^k \varphi(4^k t_k{}'')} > 2^k$$

Büyük k değeri için bu bir çelişkidir.

Teorem 3.2.8. $\varphi \in \phi$ olsun. $\forall f \in \varphi(L)$ için $cMf \in \varphi(L)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti var olması için gerek ve yeter şart

$$\int_0^t \frac{d\varphi(s)}{s^2} \leq \frac{c_1 \varphi(c_1\ t)}{t}, \quad t > 0 \tag{3.11}$$

eşitsizliği t den bağımsız bazı c_1 sabitleri için sağlanmasıdır.

İspat. Farz edelim ki φ, (2.10.) şartını sağlamasın. $\forall k \in N$ için t_k vardır öyle ki

$$\int_0^{t_k} \frac{d\varphi(s)}{s}\, ds \geq \frac{2^k \varphi(2^k\ t_k)}{t_k}. \tag{3.12}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\ t_k\ \chi\ I_k\ (x)$$

olsun. Burada

$$I_k = \{x = (x_1, ..., x_n\ \in\ \mathbb{R}^n\ ;\ \ a_k < x_i < a_{k+1}\},$$

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} (2^j \varphi(2^j t_j))^{-1/n}.$$

Açıkça görülür ki $f\ \in\ \varphi(L)$ iken

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x))dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^k t_k)(a_{k+1} - a_k)^n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(2^k t_k)}{2^k \varphi(2^k t_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Ayrıca

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(cM\ f(x))dx = \int_0^{\infty} |\{x\ \in\ \mathbb{R}^n\ ;\ \ M(cf)(x) > \lambda\}| d\varphi(\lambda).$$

Maksimal fonksiyonlar için ters eşitsizliği kullanalım.

$$\int_0^\infty |\{x \ \in \ \mathbb{R}^n \ ; \quad M(cf)(x) > \lambda\}| d\varphi(\lambda)$$

$$\geq c \int_0^\infty \left(\int_{\{|cf(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx \right) \frac{d\varphi(\lambda)}{\lambda} = c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{c|f(x)|} \frac{d\varphi(\lambda)}{\lambda} \right) dx$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k t_k}{2^k \varphi(2^k t_k)} \int_0^{c2^k t_k} \frac{d\varphi(\lambda)}{\lambda} \geq \frac{ct_k}{\varphi(2^k t_k)} \int_0^{c2^k t_k} \frac{d\varphi(\lambda)}{\lambda}$$

k için $c2^k > 1$ ise

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(cM \ f(x)) dx \geq \ 2^k$$

elde edilir. Fakat bu bizim varsayımımızla çelişir.

4. ORLICZ UZAYLARINDA B-MAKSİMAL OPERATÖRLER

Singüler integral operatörler, harmonik analizde önemli bir yer tutmaktadır. Pek çok matemetikçi bu operatörleri çalışmaktadır. Özellikle, Laplacean-Bessel operatörler ile elde edilen singüler integral operatörler ele alınmaktadır. Bu alana, bazı matematikçiler yoğunlaşmışlardır.

4.1. Maksimal Operatörler

$\mathbb{R}^n$, n boyutlu öklid uzayı, $x' = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ve $y' = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ uzayının pozitif kısmını $\mathbb{R}^n_{k,+} = \{x^k : x^k = x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \quad x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n > 0\}$ ile gösterelim. γ pozitif bir sayısı için ölçülebilir f fonksiyonların sınıfını $L_{p,\gamma} \equiv L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ile ve $(x')^\gamma$ ve $(y')^\gamma$ ifadelerini $(x')^\gamma = x_1 \ldots x_n$ ve $(y')^\gamma = y_1 \ldots y_n$ şeklinde gösterelim. Bu durumda norm

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|^p (x')^\gamma dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $p = \infty$ ise

$$L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = L_\infty(\mathbb{R}^n_{k,+}) = \left\{ f : ||f||_{L_{\infty,\gamma}} = \underset{x \in \mathbb{R}^n_{k,+}}{ess \inf} |f(x)| < \infty \right\}$$

elde edilir. $E \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ ölçülebilir bir küme ve $|E|_\gamma = \int_E (x')^\gamma dx$ olsun. Bu durumda $\omega(n,\gamma) = |E(0,1)|_\gamma$ için $|E(0,r)|_\gamma = \omega(n,\gamma) r^{n+\gamma}$ elde edilir.

$T^y f(x)$ genelleştirilmiş öteleme operatörü ve

$$\triangle_{B_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_j, \qquad B_j = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_{j-k}}{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$\triangle_B$ Laplace-Bessel operatör olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_j} + \frac{\gamma_j}{x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} + \frac{\gamma_j}{\xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_j}$$

Δ_B-Laplace-Bessel differensiyel operatörü arasında sıkı bir ilişki vardır (Kipriyanov ve

Klyuchantsev, 1970; Levitan, 1951). Burada $B_n = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $\gamma > 0$ T^y genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen B_n konvolüsyon çarpım

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma dy.$$

dir. $f \in L_{1,\gamma}^{loc}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ve $(y')^\gamma = {y_1}^{\gamma_1} .....{y_k}^{\gamma_k}$ olsun. Bu durumda, maksimal fonksiyon

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} T^y |f(x)|\, (y')^\gamma\, dy.$$

eşitliği yazılır.

Teorem 4.1.1.

i) $f \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ve $\tau > 0$ için

$$\left|\left\{x' \in \mathbb{R}_{k,+}^n : M_\gamma f(x) > \tau\right\}\right|_\gamma \leq \frac{C_3}{\tau} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)|\, (x')^\gamma dx$$

dir. Burada C_3 sabit ve f den bağımsız sabittir.

ii) $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ve $1 < p \leq \infty$ olmak üzere $M_\gamma f(x) \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ve

$$\|M_\gamma f\|_{L_{p,\gamma}} \leq C_4 \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C_4 sabit ve f den bağımsızdır (Guliyev, 2003).

Sonuç 4.1.2. $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ve $(1 \leq p \leq \infty)$ ise her $x \in \mathbb{R}_{k,+}^n$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |B(0,\varepsilon)|_\gamma^{-1} \int_{B(0,\varepsilon)} T^y f(x)\ (y')^\gamma dy = f(x)$$

dir.

Uyarı 4.1.3. Teorem 4.1.1, $n = 1$ (bir boyutta) (Stempak, 1991) ve $n \geq 2$ (çok boyutta) için kanıtlanmıştır (Guliyev, 2003).

Maksimal operatörler, fonksiyonel analiz ve harmonik analizde önemli bir yere sahiptir (Stein, 1993). Klasik maksimal operatörler yerine genelleşmiş ötelemeye bağlı operatörler ele alınacaktır. Burada, genelleştirilmiş öteleme operatör, Laplace Bessel diferensiyel operatörü ile ilgilidir. Bu operatörler Lebesgue uzaylarında pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Ancak, bazı problemler L^1 Lebesgue uzayında çalışılamaz. Bu nedenle L^p Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olan Orlicz uzayları, L^1 Lebesgue uzayına iyi bir alternatiftir. Bu çalışmada Orlicz Bessel uzayları göz önüne alınacaktır. Dolayısıyla, bu operatör ile ilgili maksimal operatörü Orlicz Bessel uzaylarında incelemeden önce Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonları inceleyip, $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ Orlicz uzaylarında Δ_B operatörü ile ilgili maksimal operatörlerinin zayıf ve kuvvetli tipli sınırlılıklarını vereceğiz. Bunun için, Önce Orlicz uzaylarını takdim edebilmek için önce Young fonksiyonlarının tanımını ve bazı özelliklerini verelim.

Lemma 4.1.4. (Kokilashvili ve Krbec, 1991) Φ Young fonksiyonu

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, t > 0.$$

ve $\Phi \in \Delta_2$ olsun. $A \geq 2$ için $\Phi(2t) \leq A\Phi(t)$ dir. $\beta = \log_2 A$ için $p > \beta + 1$ olduğunda

$$\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^p} \lesssim \frac{\Phi(t)}{t^p}, \; t > 0.$$

olur. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} \lesssim \frac{\Phi(t)}{t}, \; t > 0.$$

dir.

4.2. $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ Orlicz uzayı

Orlicz uzayları, 1931 yılında Z.W. Birnbaum ve W. Orlicz tarafından klasik Lebesgue uzaylarının doğal bir genelleştirmesi olarak takdim edilmiştir. Bazı özel haller ise Fourier serisinin toplanabilirlik teorisi ile ilişkili olarak 1931 yılından önce incelenmişti. Bu genelleştirme Lebesgue uzayları tanımında yer alan fonksiyonu yerine daha genel bir Φ konveks fonksiyonu alınarak yapılmıştır. Günümüze kadar Orlicz uzayları pek çok yazar tarafından farklı bakış açılarıyla çalışılmıştır. Fakat bu çalışmaların çoğunda Orlicz uzayı tanımındaki konveks Φ fonksiyonu için farklı tanımlar kullanılmıştır. Bu çalışmada, Orlicz uzayları tanımında adı geçen Φ konveks fonksiyonlarının farklı tanımları arasındaki ilişkiler net bir şekilde incelenecek ve bu farklı fonksiyonlara karşı gelen Orlicz uzayları arasındaki farklılıklar belirlenecektir. Bu konu ile ilgili çalışmalarda kullanılan gösterimler farklı olabilir. Örneğin, M.A. Krasnosel ve J.B. Ruticki, Orlicz sınıfını $L_\Phi(\Omega)$ ile Orlicz uzayını ise $L_\Phi^*(\Omega)$ ile göstermiştir. A.C.Zaanen ise tam tersi Orlicz sınıfını $L_\Phi^*(\Omega)$ ile Orlicz uzayını ise $L_\Phi(\Omega)$ ile göstermiştir. Biz bu tezde Orlicz uzaylarını $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ile gösterecegiz.

Biz bu tezde, Orlicz uzaylarında Laplace Bessel operatörünün doğurduğu genelleşmiş öteleme operatörüne bağlı maksimal operatörlerin sınırlılığını inceleyeceğiz.

Tanım 4.2.1. Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = \left\{ f \in L^{loc}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) : \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi(k|f(x)|)\ (x')^\gamma\ dx < \infty \text{ for some } k > 0 \right\}$$

uzayına Orlicz uzayı denir.

$1 \leq p < \infty$ için eğer $\Phi(\xi) = r^p$ ise bu durumda, $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olur. Eğer $0 \leq \xi \leq 1$ için $\Phi(\xi) = 0$ ve $\xi > 1$ için $\Phi(\xi) = \infty$ ise $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = L_\infty(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ile gösterilir. $B \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ yuvarları için $f\chi_B \in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olsun. O halde, $L^{loc}_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayı, tüm f fonksiyonların kümesidir. Bu durumda $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ Orlicz uzayı

$$\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}} = \inf\big\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)\ (x')^\gamma\ dx \leq 1\big\}.$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

$f \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $t > 0$ için

$$m(f,t)_\gamma = \big|\{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} : |f(x)| > t\}\big|_\gamma$$

ise bu durumda, zayıf tipli Orlicz uzayı,

$$WL_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = \{f \in L^{loc}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) : \|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır ve Orlicz uzayının normu da

$$\|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}} = \inf\Big\{\lambda > 0\ :\ \sup_{t>0} \Phi(t) m\Big(\frac{f}{\lambda},\ t\Big)_\gamma\ \leq 1\Big\}$$

biçiminde ifade edilir. Görüldüğü üzere $\|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}$,

$$\sup_{t>0} \Phi(t) m(f,t)_\gamma = \sup_{t>0} t\, m(f, \Phi^{-1}(t))_\gamma = \sup_{t>0} t\, m(\Phi(|f|), t)_\gamma$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}}\Big)\ (x')^\gamma\ dx \leq 1, \qquad \sup_{t>0} \Phi(t) m\Big(\frac{f}{\|f\|_{WL_{\Phi,\gamma}}},\ t\Big)_\gamma \leq 1. \tag{4.1}$$

dir.

Şimdi, tezde kullandığımız bazı eşitsizliklerden biri olan eşitsizliği aşağıda verelim. Bu eşitsizlik, Hölder eşitsizliğinin bir benzeridir (Rao ve Ren, 2002).

Teorem 4.2.2. f ve g $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Φ Young fonksiyonu ve tümleyeni olan $\widetilde{\Phi}$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)g(x)|\ (x')^\gamma\ dx \leq 2\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}} \|g\|_{L_{\widetilde{\Phi},\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.2.3. $E \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ bir yuvar ve Φ bir Young fonksiyon ve olsun. Bu durumda

$$\|\chi_E\|_{L_{\Phi,\gamma}} = \|\chi_E\|_{WL_{\Phi,\gamma}} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]}$$

dir.

İspat. Bu lemmanın ispatı kolayca yapılabilir. Çünkü şağıdaki ifadeler

$$\begin{aligned}
\|\chi_E\|_{L_{\Phi,\gamma}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_E \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ (y')^\gamma\ dy \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_E (y')^\gamma\ dy \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \omega(n,\gamma)\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \leq \Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \leq \Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \lambda \geq \frac{1}{\Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]}\right\} \\
&= \frac{1}{\Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]}
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|\chi_E\|_{WL_{\Phi,\gamma}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}_n^+ : |\chi_E(x)| > t\}|_\gamma \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{0<t<1} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \Big|\{x \in \mathbb{R}_n^+ : |\chi_E(x)| > t\}\Big|_\gamma \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{0<t<1} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \leq \omega(n,\gamma)\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \omega(n,\gamma)\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \leq \Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \lambda \geq \frac{1}{\Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]}\right\} \\
&= \frac{1}{\Phi^{-1}\left[\omega(n,\gamma)\right]}
\end{aligned}
$$

kolayca elde edilir. Buradan ispat görülür.

(**??**) eşitsizliği, Teorem 4.2.2 ve Lemma 4.2.3 den aşagıdaki sonuç elde edilir:

Lemma 4.2.4. Φ bir Young fonksiyonu ve $B = B(x,r)$ x merkezli ve r yarıçaplı bir yuvar olsun. Bu durumda

$$\int_B |f(y)|\,(y')^\gamma\,dy \leq 2|B|_\gamma \Phi^{-1}\left(|B|_\gamma^{-1}\right) \|f\|_{L_{\Phi,\gamma}(B)}$$

dir.

4.3. $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ Orlicz uzayında Maksimal operatörler

Bu tezde, M_γ maksimal operatörün $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ Orlicz uzayında sınırlılığı gösterilecektir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem bu tezin esas teoremdir:

Teorem 4.3.1. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda M_γ maksimal operatörü $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ uzayından $WL_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca M_γ maksimal operatörü $\Phi \in \nabla_2$ için $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ uzayında da sınırlıdır.

İspat. Öncelikle M_γ maksimal operatörünün $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ uzayından $WL_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ uzayına sınırlılığını gösterelim. $f \in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ fonksiyonu

$$\rho_{\Phi,\gamma}(f) := \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \Phi(|f(x)|)\,(x')^\gamma\,dx \leq 1$$

ifadesini sağlasın ve $\|f|_{L_{\Phi,\gamma}} = 1$ olsun. Jensen eşitsizliği kullanılarak her B yuvar için

$$\Phi\left(\frac{1}{|B|_\gamma}\int_B |f(y)|\ (y')^\gamma\ dy\right) \leq \frac{1}{|B|_\gamma}\int_B \Phi(|f(y)|)\ (y')^\gamma\ dy \tag{4.2}$$

elde edilir. Maksimal operatörün tanımı ve (4.2) eşitsizliğinden

$$\Phi(M_\gamma f(x)) \leq M_\gamma[(\Phi\circ f)(x)] \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) ve maksimal operatörün $(1,1)_\gamma$ zayıf tipli sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\left|\{x\in\mathbb{R}^n_{k,+} : M_\gamma f(x) > t\}\right|_\gamma &= \left|\{x\in\mathbb{R}^n_{k,+} : \Phi(M_\gamma f(x)) > \Phi(t)\}\right|_\gamma \\
&\leq \left|\{x\in\mathbb{R}^n_{k,+} : M_\gamma(\Phi\circ f)(x) > \Phi(t)\}\right|_\gamma \\
&\leq \frac{C_\gamma}{\Phi(t)}\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi(|f(x)|)\ (x')^\gamma\ dx \\
&\leq \frac{C\gamma}{\Phi(t)} \leq \Phi^{-1}(\frac{t}{C_\gamma\|f\|_{L_\Phi}})
\end{aligned}$$

olur. $C_\gamma \geq 1$ ise $\|f\|_{L_\Phi} = 1$ ve $\frac{1}{C_\gamma}\Phi\left(t\right) \geq \Phi\left(\frac{t}{C_\gamma}\right)$ bulunur. $\|\cdot\|_{L_{\Phi,\gamma}}$ normunun homogenlik özelliği ve her $f\in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için

$$\left|\{x'\in\mathbb{R}^n_{k,+} : M_\gamma f(x) > t\}\right|_\gamma \leq \Phi^{-1}(\frac{t}{C_\gamma\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}})$$

eşitsizliği bulunur. Böylece $\Phi\in\nabla_2$ için M_γ B-maksimal operatörün $L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlılığı elde edilir. Şimdi $\alpha > 0$ ve $f\in L_{\Phi,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})\backslash\{0\}$ olarak alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\alpha}\right)\ (x')^\gamma\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}}\int_0^{\frac{M_\gamma f(x)}{\alpha}} \varphi(s)ds\ (x')^\gamma\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}}\int_0^\infty \chi_{\{s\in[0,\infty):\frac{M_\gamma f(x)}{\alpha}>s\}}\varphi(s)ds\ (x')^\gamma\ dx \\
&= \int_0^\infty \varphi(s)\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n_{k,+}:M_\gamma f(x)>\alpha s\}}\ (x')^\gamma\ dxds \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left|\{x'\in\mathbb{R}^n_{k,+} : M_\gamma f(x) > \lambda\}\right|_\gamma d\lambda \\
&= \frac{2}{\alpha}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\left|\{x'\in\mathbb{R}^n_{k,+} : M_\gamma f(x) > \lambda\}\right|_\gamma d\lambda
\end{aligned}$$

bulunur. Maksimal eşitsizlikten (Guliyev, 2003)

$$\left|\{x' \in \mathbb{R}^n_{k,+} : M_\gamma f(x) > 2\lambda\}\right|_\gamma \lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n_{k,+}:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\, (x')^\gamma\, dx$$

ve integral sırasını değiştirirsek

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\alpha}\right) (x')^\gamma\, dx &\lesssim \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n_{k,+}:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\, (x')^\gamma\, dx\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\lesssim \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)| \left(\int_0^{|f(x)|} \varphi\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\right) (x')^\gamma\, dx \\
&\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)| \left(\int_0^{2\alpha^{-1}|f(x)|} \varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right) (x')^\gamma\, dx
\end{aligned}$$

dir. Lemma 4.1.4'yi göz önüne alırsak, $f(x) \neq 0$ olduğunda,

$$\left(\int_0^{2\alpha^{-1}|f(x)|} \varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right) \lesssim |f(x)|^{-1}\alpha\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\alpha}\right)$$

elde edilir. $k \geq 1$, $t > 0$ ve Φ konveks ise $k\Phi(t) \leq \Phi(kt)$ olur.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\alpha}\right) (x')^\gamma\, dx &\leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\alpha}\right) (x')^\gamma\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\alpha}\right) (x')^\gamma\, dx
\end{aligned}$$

c_0 sabit olmak üzere yukarıdaki ifade elde edilmiş olur. Eğer $\alpha = c_0\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}$ alınırsa,

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \Phi\left(\frac{M_\gamma f(x)}{\alpha}\right) (x')^\gamma\, dx \leq 1.$$

ve

$$\|M_\gamma f\|_{L_{\Phi,\gamma}} \leq \alpha = c_0\|f\|_{L_{\Phi,\gamma}}$$

elde edilir.

5. SONUÇ

Çalışmamızda Laplace Bessel operatörü ile ilgili maksimal operatörlerin Orlicz uzaylarında sınırlılıklarını inceledik. Orlicz uzaylarında maksimal operatörler ve Calderon Zygmund tipli singüler integral operatörlerin sınırlılıkları pek çok matematikçi tarafından çalı?ılmı?tır. Bu çalı?malarda genellikle sınırlılık problemleri ile ilgili sonuçlar elde edilirken maksimal operatörler ile ilgili sonuçlar kullanılmıṣtır. Bu maksimal operatörlere farklı bir açıdan bakmanın yeni bir çalı?ma olabileceği kanaati bizde uyanmıṣtır. Bu nedenle konvolüsyon tipli integral operatörleri genelleṣmiṣ öteleme ile elde edilen singüler integraller olarak göz önüne aldık. Bunların sınırlılık problemlerini farklı bir uzay olan Orlicz uzaylarında incelemek için önce genelleṣmiṣ öteleme ile ilgili maksimal operatörleri verdik ve daha sonra Orlicz uzaylarında genelleşmiş öteleme ile ilgili singüler integral operatörlerinin sınırlılık problemi çözümü ele alınmıştır. Burada, genelleşmiş öteleme k tane Laplace ve $n - k$ tane Bessel denkleminin çözümüne karşılık gelmektedir. Tezimiz, Laplace Bessel operatörü ile ilgili singüler integral operatörlerin Orlicz uzaylarında sınırlılıklarını çal?ṣmak isteyen araṣtırmacılara yol gösterecek ve kolaylık sağlayacaktır. Örneğin Orlicz veya Orlicz-Morrey uzaylarında Bessel operatörüne bağlı genelleşmiş öteleme ile elde edilen Riesz Bessel dönüşümleri, singüler integral operatörlerin sınırlılık problemlerinin araştırılmasını ortaya çıkaracaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Adams, R.A., Fournier, J.J.F. (2003). Sobolev paces, Academic Press.

Aliev, I.A., Gadjiev, A.D. (1988). On classes of operators of potential types generated by a generalized shift. 3(2), 21-24.

Aliev, I.A. Gadjiev, A.D. (1992). Weighted estimates of multidimensional singular integrals generated by the generalized shift operator. Mat. Sb., 183(9), 45-66.

Bennett, C., Rudnick, K. (1980). On Lorentz-Zygmund spaces. Dissertationes Math., 175.

Bennett, C., Sharpley, R. (1988). Interpolation of operators. Academic Press, Boston,

Bibiana, I. (1996). Comparison of two weak versions of the Orlicz spaces. Rev. Un. Mat., Argentina 40(1-2), 191-202.

Birnbaum, Z., Orlicz, W. (1931). Über die verallgemeinerung des begriffes der zueinan-der konjugierten potenzen. Studia Math., 3, 1-67.

Byun, S.S. (2011). Gradient estimates in Orlicz spaces for nonlinear elliptic equations with BMO nonlinearity in nonsmooth domains, Forum Math., 23(4), 693-711.

Byun, S.S., Yao, F., Zhou, S. (2008). Gradient estimates in Orlicz space for nonlinear elliptic equations. J. Funct. Anal., 255(8), 1851-1873.

Cianchi, A. (1996). A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces. Indiana Uni. Math., J. 45, 39-65.

Cianchi, A. (1997). A note on two-weight inequalities for maximal functions and singular integrals. Bull. London Math. Soc., 29, 53-59.

Cianchi, A. (1999). Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces. J. London Math. Soc., 2(1), 187-202.

Coifman, R.R., Rochberg, R., Weiss, G. (1976). Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables. Ann. of Math., 103, 611-635.

Edgar, G. A., Sucheston, L. (1992). Stopping Times and Directed Processes. Cambridge University Press, Cambridge.

Ekincioglu, I. (2010). The Boundedness of high order Riesz-Bessel transformations generated by the generalized shift operator in weighted $L_{p,\omega,\gamma}$ -spaces with general weights, Acta Appl. Math. 109, 591-598.

Ekincioglu, S. Elifnur (2018). On the boundedness of the Bn-maximal operator on B_n-Orlicz spaces, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 38 (2018), no. 1, Mathematics, 43-51.

Fu, X., Yang, D., Yuan, W. (2012). Boundedness of multilinear commutators of Calderón-Zygmund operators on Orlicz spaces over non-homogeneous spaces. Taiwanese J. Math., 16, 2203-2238.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Gadjiev, A.D. Guliyev, E.V. (2005). Two-weighted inequality for singular integrals in Lebesgue spaces associated with the Laplace-Bessel differential operator. Proc. Razmadze Math. Inst. Vol. 138, 1-15.

Gadjiev, A. D., Guliyev, V.S. (2008). The Stein-Weiss type inequality for fractional integrals associated with the Laplace-Bessel differential operator, Fract. Calc. Appl. Anal., 11(1), 77-90.

Garcia-Cuerva, J., Harboure, E., Segovia, C., Torrea, J.L. (1991). Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals. Indiana Univ. Math. J. 40(4), 1397-1420.

Grafakos, L. (2004). Classical and Modern Fourier Analysis. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

Guliyev, V.S. (1998). Sobolev's thm for Riesz B-potentials. (Russian) Dokl. Akad. Nauk, 358(4), 450-451.

Guliyev, V.S. (1999). Sobolev thms for anisotropic Riesz-Bessel potentials on Morrey-Bessel spaces. Doklady Academy Nauk Russia, 367(2), 155-156.

Guliyev, V.S. (2003). On maximal function and fractional integral associated with the Bessel differential operator. Math. Inequal. Appl., 6(2), 317-330.

Guliyev, V.S., Serbetci, A., Ekincioglu, I. (2007a). Necessary and sufficient conditions for the boundedness of rough B-fractional integral operators in the Lorentz spaces. J. Math. Anal. Appl., 336(1), 425-437.

Guliyev, V.S., Serbetci, A., Ekincioglu, I. (2007b). On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms Spec. Funct., 18(12), 885-895.

Guliev, V.S., Deringoz, F., Gasanov, S.G. (2017). Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces. J. Inequal. Appl. 2017, Paper No. 75, 18 s.

Guliev, V.S., Deringoz, F., Gasanov, S.G. (2018). Commutators of a fractional maximal operator on Orlicz spaces. (Russian) Mat. Zametki, 104 (2018), no. 4, 516-526.

Hardy, G. H., Littlewood, J.E. (1928). Some properties of fractional integrals. I, Math. Z., 27, 565-606.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E.(1930). A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta Math., 54, 81-116.

Kipriyanov, I.A. (1967). Fourier-Bessel transformations and imbedding thms for weight classes. Trudy Math. Inst. Steklov, 89, 130-213.

Kipriyanov, I.A., Ivanov, L.A. (1983). The obtaining of fundamental solutions for homogeneous equations with singularities with respect to several variables. (Russian) Trudy Sem. S.L. Sobolev, (1) 55-77, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., Novosibirsk.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Kipriyanov I.A., Klyuchantsev, M.I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator. II, Sibirsk. Mat. Zh., 11(1970), 1060-1083.

Kita, H. (1996). On maximal functions in Orlicz spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 124, 3019-3025.

Kita, H. (1997). On Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces. Math. Nachr. 183, 135-155.

Klyuchantsev, M.I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator. I, Sibirsk. Math. Zh. **11**(1970), 810-821; translation in Siberian Math. J. 11, 612-620.

Kokilashvili, V., Krbec, M.M. (1991). Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces. World Scientific, Singapore.

Krasnoselskii, M. A., Rutickii, Ya.B. (1961). Convex Functions and Orlicz Spaces. English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen.

Kufner, A., John, O., Fucik, S. (1977). Function Spaces. Noordhoff International Publishing: Leyden, Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences: Prague.

Levitan, B.M. (1951). Bessel function expansions in series and Fourier integrals. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk, 2(42), 102-143.

Lieb, E., Loss, M. (2001). Analysis. American Mathematical Society, Providence, RI.

Lu, S., Ding, Y., Yan, D. (2007). Singular Integrals and Related Topics World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd..

Lyakhov, L.N. (1996). Multipliers of the Mixed Fourier-Bessel transform. Proc. Steklov Inst. Math. 214 (3), 227-242.

Maligranda, L. (1989). Orlicz Spaces and Interpolation. Seminars in Math. 5, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Megan, M., Sasu, A. L., Sasu, B. (2001). On a theorem of Rolewicz type for linear skew-product semiflows. International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca. Semin. Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, 3(2002), 63-72.

Nakai, E. (2001). On generalized fractional integrals. Taiwanese J. Math., 5(3), 587-602.

O'Neil, R. (1963). Convolution operators and $L_{(p,q)}$ spaces. Duke Math. J. 30, 129-142.

O'Neil, R. (1965). Fractional integration in Orlicz spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 115, 300-328.

Orlicz, W. (1936). Über Räume (L^M). Bull. Acad. Polon. A, 93-107.; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, (1988), 345-359.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Orlicz, W. (1988). Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Acad. Polon. A (1932) 207-220. ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 217-230.

Rao, M.M., Ren, Z.D. (1991). Theory of Orlicz Spaces. M. Dekker, Inc., New York.

Rao, M.M., Ren, Z.D. (2002). Application of Orlicz Spaces. M. Dekker, Inc., New York.

Sawano, Y. (2016). A Handbook of Harmonic Analysis. Erişim: http://www.comp.tmu.ac.jp/yosihiro /teaching/harmonic-analysis/ harmonic-analysis-textbook.pdf

Serbetci, A., Ekincioglu, I. (2004). Boundedness of Riesz potential generated by generalized shift operator on B_a spaces. Czech. Math. J., 54(3), 579-589.

Sobolev, S. L. (1938). On a theorem in functional analysis. Math. Sbornik, Russian, 4, 471-497. [0.5cm] Stein, E. M. (1970). Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press, Princeton, 304.

Stein, E.M. (1993). Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press, Princeton NJ.

Stempak, K. (1991). Almost everywhere summability of Laguerre series. Studia Math. 100(2), 129-147.

Strichartz, R.S. (1972). A note on Trudinger's extension of Sobolev's inequalities. Indiana Univ. Math. J., 21, 841-842.

Torchinsky, A. (1976). Interpolation of operators and Orlicz classes. Studia Math. 59, 177-207.

Torchinsky, A. (1986). Real Variable Methods in Harmonic Analysis. Academic, Press, San Diego.

Trudinger, N. S. (1967). On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. J. Math. Mech. 17, 473-483.

Wheeden, R.; Zygmund, A. (1977). Measure and Integral. Marcel Dekker, New York.

Wiener, N. (1939). The ergodic theorem. Duke Math. J., 5, 1-18.

Zaanen, A.C. (1983). Riesz spaces. II. North-Holland Mathematical Library, 30. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, xi+720 s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: TAVALI Ebru
Doğum Tarihi ve Yeri	: 25.02.1993, Kütahya
e-mail	: ebrutavali@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi	2016
Lise	Kütahya Anadolu Öğretmen Lisesi	2011

Yabancı Dil 63.75