MINKOWSKI 3-UZAYINDA HİPERBOLİK YÜKSELTİLMİŞ AÇILABİLİR YÜZEYLER ÜZERİNE

Aybüke EKİCİ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2020

MINKOWSKI 3-UZAYINDA HİPERBOLİK YÜKSELTİLMİŞ AÇILABİLİR YÜZEYLER ÜZERİNE

Aybüke EKİCİ

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Mine TURAN
Ortak Danışman: Prof. Dr. Cumali EKİCİ

Haziran-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Aybüke EKİCİ tarafından hazırlanan " MINKOWSKI 3-UZAYINDA HİPERBOLİK YÜKSELTİLMİŞ AÇILABİLİR YÜZEYLER ÜZERİNE " adlı tez çalışması, aşağıda belirtilen jüri tarafından Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

15/06/2020

Prof. Dr. Şahmurat ARIK
Enstitü Müdürü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü _______________

Prof. Dr. Erdal ULUALAN
Anabilim Dalı Başkanı, Matematik Anabilim Dalı _______________

Prof. Dr. Mine TURAN
Danışman, Matematik Anabilim Dalı _______________

Prof. Dr. Cumali EKİCİ
Ortak Danışman, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı _______________

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Mine TURAN
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Cumali EKİCİ
Matematik-Bilgisayar Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Erhan ATA
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Mahmut KOÇAK
Matematik-Bilgisayar Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi _______________

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %19 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Danışman Prof. Dr. Mine TURAN

İmzası

Aybüke EKİCİ

İmzası

Ortak Danışman Prof. Dr. Cumali EKİCİ

İmzası

MINKOWSKI 3-UZAYINDA HİPERBOLİK YÜKSELTİLMİŞ AÇILABİLİR YÜZEYLER ÜZERİNE

Aybüke EKİCİ
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2020
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mine TURAN
Ortak Danışmanı: Prof. Dr.Cumali EKİCİ

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Minkowski uzayında hiperbolik yükseltilmiş açılabilir yüzeyler üzerine araştırma yapmaktır.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın giriş bölümünde, konu ile ilgili tarih sırasına göre yapılmış çalışmalar hakkında bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölüm olan temel kavramlar bölümünde ise, bu çalışmada yararlanacağımız temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, çalışmamıza temel oluşturan, düzlemsel eğriden bir yükseltme dönüşümü kullanarak $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = x^2 - y^2$ hiperbolik paraboloidi ile 3-boyutlu Öklid uzayına yükseltilmiş bir uzay eğrisi boyunca tanjant düzlemlerin tek parametreli ailesinin zarfı olarak oluşan açılabilir bir yüzey inşasının hesapları verilmiştir. Sonra bu açılabilir yüzeyin, minimal yüzey ve sabit ortalama eğrilikli yüzey olma koşulları elde edilmiştir. Son bölümde de Minkowski 3-uzayında timelike, spacelike veya null eğriler kullanılarak yükseltme dönüşümü yardımıyla bir paraboloid ve bir hiperbolik paraboloid ile oluşturulan açılabilir yüzeyler için benzer hesaplamalar yapılmıştır. Ayrıca ifade edilen bu hesaplamaların kullanıldığı bazı örnekler de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Açılabilir Yüzey, Eğri Yükseltme, Eğrilikler, Lorentz Uzayı, Minkowski 3-uzayı, Regle Yüzey.

ON HYPERBOLIC LIFTED DEVELOPABLE SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

Aybüke EKİCİ
Department of Mathematics, M.S. Thesis, 2020
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mine TURAN
Thesis Co-Advisor: Prof. Dr. Cumali EKİCİ

SUMMARY

The objective of this thesis is to examine the hyperbolic lifted developable surfaces in 3-dimensional Minkowski space.

In the introduction of this study, which consists of four chapters, information about the study done chronologically is given. In the second chapter, also called basic concepts section, fundamental definitions and theorems that will be used in this thesis are expressed. The use of a lifting transformation to a plane curve with $z = x^2 + y^2$ paraboloid and $z = x^2 - y^2$ hyperbolic paraboloid, generated calculations as an envelope of a one-parameter family of tangent planes along a lifted space curve of the 3- dimensional Euclidean space has been given in the third chapter. Thereafter, the conditions of the developable surface being minimal surface and constant mean curvature surface were obtained. In the concluding chapter, similar calculations were made for the developable surfaces formed by a paraboloid and a hyperbolic paraboloid with the help of amplification transformation using timelike, spacelike or null curves in the Minkowski 3-space. Examples of the mentioned calculations are also given.

Keywords: Curve Lifting, Curvatures, Developable Surface, Lorentz Space, Minkowski 3-Space, Ruled Surface.

TEŞEKKÜR

Çalışmamı hazırlarken kıymetli zamanını bana ayırarak katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Mine TURAN' a, çalışmamın her aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen ikinci danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Cumali EKİCİ' ye teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi desteklerini her an yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Aybüke EKİCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_1^3$	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı
L^2	Lorentzian 2-Uzay
$\boldsymbol{t}$	Birim Teğet Vektörü
$\boldsymbol{n}$	Birim Normal Vektörü
$\boldsymbol{b}$	Birim Binormal Vektörü
$\wedge$	Vektörel Çarpım Fonksiyonu
$<\ ,\ >$	Skaler Çarpım Fonksiyonu
k_1	Birinci Eğrilik
k_2	İkinci Eğrilik
κ	Eğrilik
τ	Burulma-Torsiyon
$C(s)$	Düzlemsel Eğri
$\hat{C}(s)$	Yükseltilmiş Eğri
$D_{C(s)}(s,v)$	Zarf Yüzeyi
$\mathcal{U}(s)$	Birim Olmayan Normal Vektör
$T_{\hat{C}(s)}(Q)$	Teğet Düzlem Ailesi
$\Psi(u,v)$	Regle Yüzey
E, F, G	Birinci Temel Form Katsayıları
e, f, g	İkinci Temel Form Katsayıları
K	Gauss Eğriliği
H	Ortalama Eğrilik

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride, 2-boyutlu veya 3-boyutlu Öklid uzayı ile Minkowski uzayında eğriler ve yüzeylerin geometrik özellikleri birçok bilim insanı tarafından araştırılmıştır.

Bir malzemenin gerilmesi, kesilmesi ya da kırışması olmaksızın düzlemsel bir yüzeyin normal bükülmesiyle oluşturulan yüzeylere açılabilir yüzey denir (Ravani ve Ku, 1991; Frey ve Mancewicz, 1992; Choi vd., 1997; Güven vd., 2020). Bu yüzeyler, silindir veya koni gibi tek seferde sadece bir yönde bükülme ile karakterize edilir. Açılabilir yüzeyler, yuvarlak formların kontrplak, saç veya kumaş gibi düz malzemelerden yapılmasına izin verdikleri için faydalıdır. Bu tür yüzeyler, çoğu zaman nakliye, çadır dikme ve havalandırma kanalları imalatı için kullanılır.

Açılabilir yüzeyler, birçok mühendislik ve imalat alanında da doğal uygulamalara sahiptir. Örneğin; uçak kanatlarının uçak tasarımcısı tarafından tasarlanması ya da farklı şekillerde iki tüpten metal levhaların düzlemsel parçalarının teneke ile birbirine bağlaması için kullanılır. Bu yüzeyler, gerilmeden ve yırtılmadan düzleme serilebilme özelliğinden dolayı sheet-metal ve plate-metal temelli endüstrilerde (Boersma ve Molenaar, 1995; Frey ve Mancewicz, 1992; Izumuya ve Takeuchi, 2004), deniz araçlarının yüzeyleri ile uçak yüzeylerinde (Pegna ve Wolter, 1992) ve mimari yapılarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu yüzden açılabilir yüzeyler, genel yüzeylerden daha uygundur.

Literatürde açılabilir yüzeyler hakkında pek çok çalışma vardır. Choi, Kim ve Elber, yükseltilmiş eğri boyunca tek bir parametreli teğet düzlemlerin zarfı olarak açılabilir bir yüzeyi, $z = x^2 + y^2$ paraboloidi için de rasyonel düzlemsel bir eğriyi yükselterek inşa ettiler (Choi vd.,1997). Buradaki zarf yüzeyi için Ferreol bir düzlem eğrisinin veya yüzeyin bir ailesinin zarf yüzeylerinin açıklamasını yapmıştır (Ferreol, 2017, 2019). Izumuya ve Takeuchi, jeodezik olarak böyle özel bir eğrinin varlığı koşuluyla, özel olarak açılabilir yüzeyler için bir sınıflandırma yapmıştır (Izumuya ve Takeuchi, 2004).

Yüzey geometrisi teorisinde, regle yüzeyler de önemli bir yere sahiptir. Bu yüzeyler, yapıcı geometrinin kurucusu olan Fransız matematikçi Gaspard Mange tarafından bulunmuştur. $\mathbb{R}^3$ uzayında bulunan bir regle yüzey, yüzeydeki düz bir çizginin hareket ettirilerek süpürülmesi ile elde edilen noktalar kümesi olarak tanımlanabilen bir yüzeydir. Bu nedenle,

$\Psi(s,v)=\alpha(s)+v\delta(s)$ formunun bir parametrizasyonu vardır. Buradan α ve δ sırasıyla taban eğrisi ve doğrultman olarak adlandırılan yüzey üzerinde uzanan eğrilerdir. Regle yüzeyin denklemi kullanılarak α' nın asla sıfır olmadığını ve δ ‘nın sıfır olmadığını farz ederiz. Regle yüzeyin kenarları asimptotiktir. Dahası, regle yüzeyin Gauss eğriliği her yerde pozitif değildir. Yüzeyin her bir noktasında duran iki ayrı çizgi varsa, bir regle yüzey ikiye katlanır. Açılabilir bir yüzey, her yerde Gauss eğriliği $K = 0$ olan bir regle yüzeydir. Bu nedenle açılabilir yüzeyler, koni, silindir, eliptik koni, hiperbolik silindir ve düzlemi içerir. Son zamanlarda, birçok matematikçi Öklid uzayı ve Minkowski uzayında eğriler ve regle (doğrusal) yüzeyler üzerinde çalışmıştır. Bu konuyla ilgili bazı çalışmalar (Öztekin ve Ergüt, 2011; Öztürk vd., 2013; Ali vd., 2013; Çöken vd., 2008; Izumuya ve Takeuchi, 2003; Yu vd., 2014; Ekici, 2019) ile verilmiştir. Ayrıca Kühnel, regle W-yüzeyi olarak adlandırılan bir dizi regle yüzey üzerinde çalışmış ve bir regle W-yüzeyinin sahip olduğu özellikleri vermiştir (Kühnel, 1994).

Silindir, koni, helikoid(helisoid), Mobius şeridi, sağ konoid gibi çeşitli yüzeyler ile hiperbolik paraboloid ve bir tabakanın hiperboloidi de bazı iki kanatlı yüzeylerdir (Gray, 1993; Uras, 1992).

Minimal yüzey, yüzeyi kaplamak için gerekli olan en az miktarda alana sahip olan şekildir. Şekiller oluşturmak için gereken malzeme en az olduğu için mimari, endüstriyel tasarım ve matematikte minimal yüzeyler tercih edilir. Bu yüzden matematikçiler, bu tür yüzeyleri uzun bir süre boyunca araştırdılar (Osserman, 1986). Bazı iyi bilinen minimal yüzeyler; düzlem, helikoid(helisoid) ve catenoid(katenoid) şeklindedir.

Bu çalışmada, öncelikle düzlemsel eğriden bir yükseltme dönüşümü kullanarak bir $z=x^2+y^2$ paraboloidi ile ve bir iki kanatlı yüzey olan $z=x^2-y^2$ hiperbolik paraboloidi ile 3-boyutlu Öklid uzayına yükseltilmiş bir uzay eğrisi boyunca tanjant düzlemlerin tek parametreli ailesinin örtüsü(zarfı) olarak oluşan açılabilir bir yüzey inşa edilmiştir. Sonra bu açılabilir yüzeyin, minimal yüzey ve sabit ortalama eğrilikli yüzey olma koşulları verilmiştir. Daha sonra ise Minkowski 3-uzayında timelike, spacelike veya null eğriler kullanılarak yükseltme dönüşümü yardımıyla bir paraboloid ve bir hiperbolik paraboloid ile oluşturulan açılabilir yüzeyler için benzer hesaplamalar yapılmıştır. Ayrıca, burada ele alınan her bir üreteç eğrisi için hesaplamaların kullanıldığı birkaç örnek, maple ile şekiller de çizdirilerek verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tez çalışmamızın bu bölümü boyunca faydalanacağımız, gerekli olduğu düşünülen bazı temel özellikler ile tanımlar ve teoremler aktarılmıştır.

2.1. Öklidyen Uzay

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı ile birleşmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayı verilsin. İki vektör $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ve $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı üzerinde

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \tag{2.1}$$

Öklid iç çarpımı verildiğinde $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, Öklid 3-uzayını oluşturur ve kısaca E^3 sembolü kullanılarak ifade edilir. Genel olarak reel Afin uzayları ve Öklid uzayları farklı yapıdadırlar. $\mathcal{W}$ reel vektör uzayı ile birleştirilen A afin uzayı üzerindeki metrik özellikler, $\mathcal{W}$ uzayı üzerindeki iç çarpım kullanılarak elde edilir. Öklid uzayı ile Afin uzayı arasındaki farklılıklar bu nedenledir (Hacısalioğlu, 1998).

2.2. Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

Eğrilerin diferensiyel geometrik özellikleri genelde Frenet r-ayaklısı yardımıyla elde edilir. Uzay eğrileri, küresel eğriler, eğri çiftleri, basit ve kapalı eğriler Frenet çatısı kullanılarak incelenmiştir. Bu kısımda, bir eğri için Frenet r-ayaklısının kullanıldığı esas kavramlar ifade edilmiştir.

Tanım 2.2.1. M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verildiğinde

$$\begin{aligned} \alpha: \quad & I \to \quad E^n, \quad I \subseteq \mathbb{R} \\ & s \mapsto \quad \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

parametrik olarak yazılmış $M=\alpha(I)\subset E^n$ cümlesine uzay eğrisi denir. Kısaca α sembolü kullanılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere, (I,α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan M eğrisi $\forall s\in I$ alındığında $\|\alpha'(s)\|=1$ olursa bu koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri adını alır. Bu durumda s ise yay-parametresi olarak adlandırılır (Ekici, 2019; Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.3. (I,α) koordinat komşuluğu yardımıyla M eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha:\ & I \to & & E^3 \\ & s \to & & \alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\alpha_3(s)) \end{aligned}$$

biçiminde verildiğinde s yay-parametresi olmak üzere eğrinin birim teğeti $\boldsymbol{t}(s)=V_1(s)$, birim normali $\boldsymbol{n}(s)=V_2(s)$ ve binormali $\boldsymbol{b}(s)=V_3(s)$ alındığında $\{\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\}$ sistemi Frenet 3-ayaklısı adını alır. O zaman

$$\boldsymbol{t}(s)=\frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}=\alpha'(s) \tag{2.3}$$

ve

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}=\frac{\boldsymbol{t}'(s)}{\|\boldsymbol{t}'(s)\|} \tag{2.4}$$

iken

$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\wedge\boldsymbol{n}(s) \tag{2.5}$$

binormal vektördür. Bu durumda

$$\boldsymbol{b}(s)=\frac{\alpha'(s)\wedge\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \tag{2.6}$$

olur (Hacısalihoğlu, 1998; Sabuncuoğlu, 2010; Ekici, 2019).

Tanım 2.2.4. $\alpha(I)=M\subset E^n$ eğrisi için her $s\in I$ yay-parametresi ile bulunan $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ verildiğinde

$$\begin{aligned} k_i:\ & I \to & & \mathbb{R},\ i=1,...,r \text{ için} \\ & s \mapsto & & k_i(s)=\left\langle V_i'(s),V_{i+1}(s)\right\rangle \end{aligned} \tag{2.7}$$

olarak verilen k_i fonksiyonu kullanıldığında $s \in I$ değerine karşılık gelen $k_i(s)$ reel değerli ifadesine eğrinin *i*-inci eğriliği adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998; Ekici, 2019).

Teorem 2.2.1. $\alpha(I) = M \subset E^n$ eğrisi için $s \in I$ yay-parametresi ile bulunan $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet *r*-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ ve eğrilik fonksiyonları da $k_i(s)$ olsun. Bu durumda $V_1^{'}(s) = k_1(s)V_2(s)$ ve $V_r^{'}(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$ olmak üzere

$$V_j(s) = -k_{j-1}(s)V_{j-1}(s) + k_j(s)V_{j+1}(s), \quad 1 < j < r \tag{2.8}$$

şeklindedir (Uras, 1992; Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.5. s yay-parametresi ile verilen $M = \alpha(I) \subset E^3$ eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha: \quad I &\to \quad E^3 \\ s &\to \quad \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

parametrik olarak ifade edilsin. Eğrinin $\alpha(s)$ deki $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ Frenet üç-ayaklısı olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= k_1(s).\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' &= -k_1(s).\boldsymbol{t} + k_2(s).\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' &= -k_2(s).\boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde verilir. Özel olarak $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ alındığında

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

matris gösterimi de vardır (Hacısalihoğlu, 1998). Ayrıca $k_1 = \kappa$ eğrilik ve $k_2 = \tau$ α eğrisinin burulması olmak üzere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= \kappa \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' &= -\kappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' &= -\tau \boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{2.12}$$

denklem sistemi şeklinde de verilir (Uras, 1992; Sabuncuoğlu, 2010).

Sonuç s yay-parametresi iken $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğriliği $k_1(s) = \left\| \alpha''(s) \right\|$ değerine eşittir (Carmo, 1976; Ekici, 2019).

2.3. 2-Boyutlu Lorentz Uzayı

Tanım 2.3.1. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ile $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ vektörleri için

$$\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \right\rangle_L = u_1 w_1 - u_2 w_2 \tag{2.13}$$

Lorentz iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ uzayıdır (Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.3.2. Her $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in L^2$ için

$i)$ $\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle < 0$ olduğunda $\mathbf{u}$ ya timelike vektör,

$ii)$ $\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle > 0$ olduğunda $\mathbf{u}$ ya spacelike vektör ve

$iii)$ $\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle = 0$ ve $\mathbf{u} \neq 0$ ise $\mathbf{u}$ ya null vektör

adı verilir (O'Neill, 1983; Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.3.3. Her $\mathbf{u} \in L^2$ için $\mathbf{u}$ vektörünün normu $\left\| \mathbf{u} \right\|_L = \sqrt{\left| \left\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle \right|}$ şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983; Birman ve Nomizu, 1984).

Teorem 2.3.1. Her $\mathbf{u} \in L^2$ olmak üzere,

$a)$ $\left\| \mathbf{u} \right\| > 0$ olur,

$b)$ $\left\| \mathbf{u} \right\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}$ lightlike vektörü olur,

$c)$ $\mathbf{u}$ vektörü timelike olduğunda $\left\| \mathbf{u} \right\|^2 = -\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle$ yazılır,

$d)$ $\mathbf{u}$ spacelike vektör olduğunda $\left\| \mathbf{u} \right\|^2 = \left\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle$ yazılır (O'Neill, 1983; Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.3.4. L^2 2-boyutlu Lorentz uzayı ve $\mathbf{u},\mathbf{w}\in L^2$ olsun. $\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = 0$ olması durumunda $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerine Lorentz anlamında dik vektörler denir (Birman ve Nomizu, 1984).

Teorem 2.3.2. 2-boyutlu L^2 Lorentz uzayı üzerinde timelike (veya spacelike) iki vektör dik olamaz (Birman ve Nomizu, 1984).

İspat $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L^2$ iki timelike vektör olsun. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ ve $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ için

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1^2 < x_2^2, y_1^2 - y_2^2 < 0 \Rightarrow y_1^2 < y_2^2 \\ &\Rightarrow \quad x_1^2 y_1^2 < x_2^2 y_2^2 \\ &\Rightarrow \quad \left|x_1^2 y_1^2\right| < \left|x_2^2 y_2^2\right| \\ &\Rightarrow \quad x_1^2 y_1^2 \neq x_2^2 y_2^2 \\ &\Rightarrow \quad x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_2^2 \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \neq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

olur. Yani x ve y vektörleri dik olamazlar. Benzer bir ispat spacelike iki vektör için de yazılabilir (Birman ve Nomizu, 1984).

Sonuç L^2 de biri timelike diğeri spacelike olan iki vektör ortogonaldir (Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.3.5. $\boldsymbol{x}\in L^2$ timelike vektör ve $e=(0,1)$ için

$a)$ $\langle \boldsymbol{x},e\rangle < 0$ oluyorsa $\boldsymbol{x}$ vektörüne bir timelike future-pointing vektör,

$b)$ $\langle \boldsymbol{x},e\rangle > 0$ oluyorsa $\boldsymbol{x}$ vektörüne bir timelike past-pointing vektör adı verilir (Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.3.6. $\mathbb{R}^n$ n-uzayı üzerinde $\forall p\in\mathbb{R}^n$ ve $\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{w}_p\in T_p\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle \boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{w}_p\rangle = \sum_{i=1}^{n-v} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^{n} v_i w_i \tag{2.15}$$

şeklinde verildiğinde indeksi v olan metrik tensör ile donatılan uzaya, yarı-Öklidyen uzay adı verilir ve $\mathbb{R}_v^n$ şeklinde yazılır (O'Neill, 1983).

2.4. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı

Matematikçi Hermann Minkowski (Alman uyrukludur) ilk olarak 1907 de Minkowski uzayı kavramını ortaya atmıştır. Minkowski uzayı, Einstein tarafından ifade edilen izafiyet teorisini formüle etmede kullanışlıdır. Minkowski spacetime uzayı, uzayın genelde üç boyutu ve bir de zaman boyutu birleştirilerek oluşan 4 boyutlu bir manifold yapısıdır. H. Minkowski, görecelik teorisini açıklayan Albert Einstein'dan sonra uzayı ve zamanı aynı yapıda kullanmış ve bunu tek çatı altında ifade etmiştir. Fizikteki bazı olaylar, spacetime ile açıklanmaya çalışılmıştır. Mesela, gezegenlerin güneş etrafındaki bazı hareketleri spacetime kullanılarak ifade edilmiştir.

Genelde dikey boyut olarak zaman boyutu kullanılmıştır. Spacetime uzayındaki metriğin farklılığı yardımıyla Öklid uzayında çember gibi olan Dünya ile Ay gezegenlerinin birlikte olan hareketi Minkowski uzayı kullanıldığında bir eğilim çizgisi şeklinde gözlemlenir.

Tanım 2.4.1. $\mathcal{W}$ bir reel vektör uzayı üzerinde tanımlı

$$g : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R} \tag{2.16}$$

şeklinde verilen dönüşüm, iki lineer ve simetrik olursa $\mathcal{W}$ vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form adını alır. g dönüşümü bir de non-dejenere olursa $\mathcal{W}$ üzerinde bir skaler çarpım adını alır. O zaman $\mathcal{W}$ uzayına bir skaler çarpım uzayı adını alır (O'Neill, 1983).

Diğer taraftan g dönüşümüne

$a)$ Her $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$ ve $\boldsymbol{u} \neq 0$ alındığında $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) > 0$ oluyorsa pozitif tanımlı,

$b)$ Her $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$ ve $\boldsymbol{u} \neq 0$ alındığında $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) < 0$ oluyorsa negatif tanımlı,

$c)$ Her $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$ ve $\boldsymbol{u} \neq 0$ alındığında $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geq 0$ oluyorsa yarı-pozitif tanımlı,

$d)$ Her $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$ ve $\boldsymbol{u} \neq 0$ alındığında $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \leq 0$ oluyorsa yarı-negatif tanımlı adı verilir (O'Neill, 1983). Ayrıca

$e)$ $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = 0$ ve $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$ için $\boldsymbol{u} = 0$ oluyorsa non-dejenere adı verilir.

$f)$ $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = 0$ ve $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$ için $\boldsymbol{u} \neq 0$ oluyorsa dejenere adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.2. Skaler çarpım uzayı $\mathcal{W}$, üzerindeki indirgenmiş skaler çarpımı negatif tanımlı olan bir $\mathcal{W}$ altuzayı olacak şekilde $\mathcal{W}$ uzayının en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{W}$ altuzayının boyutuna g skaler çarpımının indeksi denir. g skaler çarpımının indeksi v ise $0 \le v \le boyut\mathcal{W}$ şeklindedir. Ayrıca $\mathcal{W}$ skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

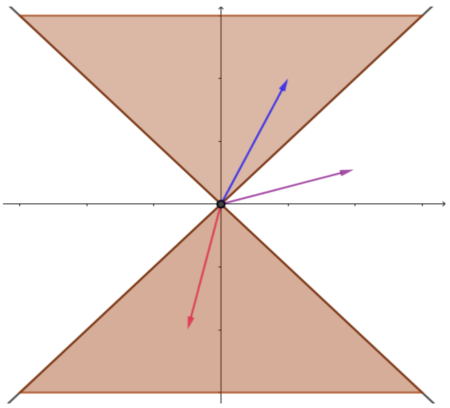
Tanım 2.4.3. İndeksi v olan $\mathcal{W}$ skaler çarpım uzayı $v=1$ ve $boyut\mathcal{W} \ge 2$ olursa Lorentz uzayı veya Minkowski uzayı adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.4. Lorentz uzayı $\mathcal{W}$ olmak üzere $\boldsymbol{v} \in \mathcal{W}$ vektörü, sırasıyla $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$ veya $\boldsymbol{v}=0$, $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})<0$ ve $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ ve $\boldsymbol{v} \ne 0$ ise spacelike vektör, timelike vektör ve null (lightlike) vektör adı verilir. Diğer taraftan $\|\boldsymbol{v}\| = |g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})|^{\frac{1}{2}}$ sayısına $\boldsymbol{v}$ vektörünün normu adı verilir (O'Neill, 1983).

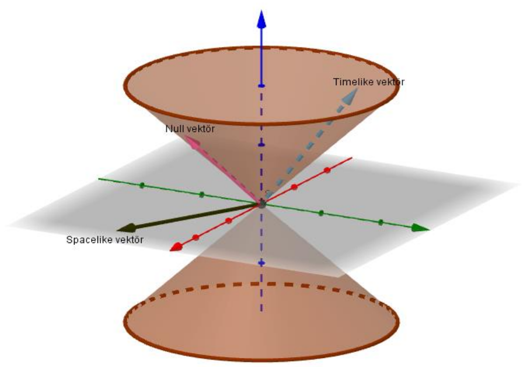
$\mathcal{W}$ Lorentz uzayı için timelike vektörlerin kümesi $\Gamma \subset \mathcal{W}$ olsun. $\boldsymbol{w} \in \Gamma$ timelike vektörü alındığında

$$C(\boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{v} \in \Gamma \,|\, g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})<0\} \tag{2.17}$$

kümesine Lorentz uzayının time-konisi adı verilir (O'Neill, 1983).



Şekil 2.1 L^2 Lorentz uzayında time-koni



Şekil 2.2 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında time-koni

Teorem 2.4.1. $\mathcal{W}$ Lorentz uzayı verilsin. Bu uzayda $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ iki timelike vektör olsun. O zaman

$a)\ |g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})| \geq \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{w}\|$ eşitsizliği geçerlidir. $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ vektörlerinin lineer bağımlı olması halinde eşitlik olur.

$b)$ Aynı time-konide $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ timelike vektörleri için

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = -\|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{w}\| ch\varphi \tag{2.18}$$

eşitliği ile verilen bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. $\varphi,$ timelike iki vektör olan $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ arasındaki hiperboliktır (O'Neill, 1983).

$c)$ Aynı time-konide olmayan $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ vektöri için

$$|g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})| = \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{w}\| ch\varphi \tag{2.19}$$

şeklindedir.

V Lorentz uzayına ait iki spacelike vektör $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ ise

$$\cos\theta = \frac{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{w}\|} \tag{2.20}$$

olarak ifade edilen $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı tektir. Bu $\theta,$ spacelike olan $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ iki vektör arasındaki açı adını alır. $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{w}$ spacelike vektörleri

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \leq \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{w}\| \tag{2.21}$$

eşitsizliğini sağlar (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.5. (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin $s \in I$ yay-parametresi için $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet üç yüzlüsü alınsın. O zaman

$$\begin{array}{cccc} \kappa & : & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & s & \rightarrow & \kappa(s) = \langle \boldsymbol{t}', \boldsymbol{n} \rangle \end{array} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanan κ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $s \in I$ için $\kappa(s)$ sayısına da M eğrisinin eğriliği adı verilir (Kobayashi, 1983; Turgut, 1995).

Tanım 2.4.6. (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin $s \in I$ yay-parametresi için $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet 3-ayaklısı verildiğinde

$$\begin{array}{ccccc} \tau & : & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & s & \to & \tau(s) = \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b} \rangle \end{array} \tag{2.23}$$

olan τ fonksiyonu α nın burulma fonksiyonu, $\tau(s)$ sayısına da M nin burulması adı verilir (Kobayashi, 1983; Turgut, 1995).

2.5. Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.5.1. $\mathcal{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold ve bunun üzerindeki sabit indeksli g metrik tensörü için $(\mathcal{M},g)$ çiftine yarı-Riemann manifoldu adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.2. Yarı-Riemann manifoldu $(\mathcal{M},g)$ için g metriğinin sabit indeksine $\mathcal{M}$ nin de indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.3. Yarı-Riemann manifoldu $\mathcal{M}$ olmak üzere 1 indeksli ve $boyut\mathcal{M} \geq 2$ olduğunda $\mathcal{M}$ yarı-Rieman manifolduna Lorentz manifoldu adı verilir (O'Neill, 1983).

Bu durumda $\mathcal{M}$ Lorentz manifoldu söz konusu olduğunda metrik

$$g\left(\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{w}_p\right) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\big|_p \, w_i\big|_p - v_n\big|_p \, w_n\big|_p , \;\; p \in \mathcal{M}, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_p \in T_p\mathcal{M} \tag{2.24}$$

biçimindedir.

Tanım 2.5.4. $\mathcal{M}$ Lorentz manifoldu ve üzerindeki $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ eğrisi verilsin. Bu α eğrisinin her bir noktası üzerindeki $\boldsymbol{t}$ birim teğet vektör alanı olmak üzere sırasıyla, $g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}) < 0$, $g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}) > 0$ ve $g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}) = 0$ $\left(\boldsymbol{t} \neq 0\right)$ oluyorsa α ya timelike, spacelike, null(lightlike) eğri adı verilir (O'Neill, 1983).

Eğri olarak doğru alındığında bunun doğrultman vektörü timelike vektörse timelike doğru, doğrultman vektörü spacelike vektörse spacelike doğru, doğrultman vektörü null(lightlike) vektörse null(lightlike) doğru olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

2.6. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

Tanım 2.6.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w}$ vektörlerinin bileşenleri sırasıyla u_i ve w_i, *i=1,2,3* olmak üzere

$$(u_3w_2 - u_2w_3, u_1w_3 - u_3w_1, u_1w_2 - u_2w_1) \tag{2.25}$$

vektörüne $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{w}$ vektörlerinin vektörel çarpımı adı verilir. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$ veya $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ biçiminde yazılır (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} i = j \text{ olduğunda } 1 \\ i \neq j \text{ olduğunda } 0 \end{cases} \text{ ve } \xi_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \tag{2.26}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} = -\det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & -\xi_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

ya da

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} = \det \begin{bmatrix} -\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

yardımıyla ifade edilir. Ek olarak saat yönünün tersi pozitif yön olmak üzere

$$\xi_2 \wedge \xi_3 = -\xi_1,\ \xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_3 \text{ ve } \xi_3 \wedge \xi_1 = -\xi_2 \tag{2.29}$$

şeklindedir.

Negatif yön saat yönünün tersi alınırsa

$$\xi_2 \wedge \xi_3 = \xi_1,\ \xi_1 \wedge \xi_2 = -\xi_3 \text{ ve } \xi_3 \wedge \xi_1 = \xi_2 \tag{2.30}$$

olarak ifade edilir. O zaman

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} = \det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & -\xi_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

biçiminde yazılır (Turgut, 1995).

Teorem 2.6.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri için

$$\begin{aligned} &a)\ \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = -\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &b)\ (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{u} \\ &c)\ \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \\ &d)\ \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle + (\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle)^2 \end{aligned} \tag{2.32}$$

şeklindedir (Turgut, 1995).

Teorem 2.6.2. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ile $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ iki vektör olsun. O zaman

$a)$ $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{w}$ spacelike vektör iken $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ bir timelike vektör

$b)$ $\boldsymbol{u}$ spacelike ve $\boldsymbol{w}$ timelike vektör iken $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ bir spacelike vektör

$c)$ $\boldsymbol{u}$ spacelike ve $\boldsymbol{w}$ null(lightlike) vektör olduğunda $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$ iken $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ null(lightlike) vektör, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle \neq 0$ olduğunda $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ bir spacelike vektör

$d)$ $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{w}$ null vektörler iken $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ bir spacelike vektör

$e)$ $\boldsymbol{u}$ timelike ve $\boldsymbol{w}$ null vektör iken $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ bir spacelike vektör

$f)$ $\boldsymbol{u}$ ile $\boldsymbol{w}$ timelike iken $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ bir spacelike vektör olur(Turgut, 1995).

Tanım 2.6.2. Hız vektörü her noktada farklı sıfır oluyorsa eğri, regüler eğri adını alır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.6.3. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\bar{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995).

Teorem 2.6.3. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında (V,Ψ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \Psi:\ & V\subset\mathbb{R}^2 \to && \mathbb{R}_1^3 \\ & (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \quad \to && \Psi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=(\psi_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\psi_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\psi_3(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})) \end{aligned} \tag{2.33}$$

yüzeyinin normali bir timelike vektör alanı olduğunda yüzey spacelike yüzeydir. Yani $\mathcal{U}$ yüzeyin normal vektör alanı için

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}><0 \tag{2.34}$$

şeklindedir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995).

Tanım 2.6.4. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayındaki bir $\tilde{M}$ yüzeyine indirgenmiş metrik, Lorentz metriği oluyorsa $\tilde{M}$ yüzeyine timelike yüzey adı verilir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995).

Teorem 2.6.4. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayındaki $\tilde{M}$ yüzeyinin normali bir spacelike vektör alanı olduğunda yüzey timelike yüzeydir. Yani $\mathcal{U}$ yüzeyin normal vektör alanı için

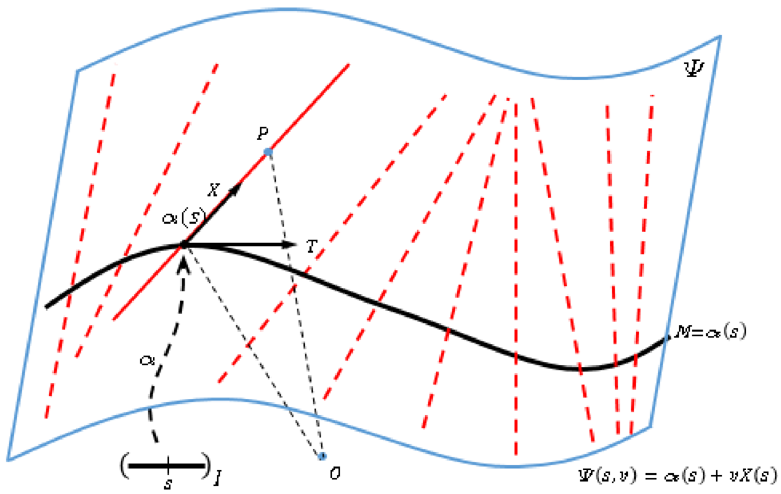
$$<\mathcal{U},\mathcal{U}>>0 \tag{2.35}$$

biçimindedır (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995).

Tanım 2.6.5. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, bir ℓ doğrusu, bir α eğrisi boyunca hareket ettirildiğinde bir yüzey oluşuyorsa, bu oluşan yüzey Minkowski 3-uzayında bir regle yüzey adını alır. O zaman bir regle yüzey için verilen α eğrisine, dayanak eğrisi ve verilen ℓ doğrusuna da bir anadoğrusu denir (O'Neill, 2006; Hacısalihoğlu, 1983; Turgut, 1995).

Tanım 2.6.6. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir regle yüzey verilsin. Bu yüzeye açılabilir regle yüzey adı verilir ancak anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olmalıdır (O'Neill, 2006; Hacısalihoğlu, 1983; Turgut, 1995).

Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında da bir eğriye dayanarak hareket eden doğrunun oluşturduğu yüzeye regle yüzey adı verilir (Ekici, 2019; Hacısalihoğlu, 1983). Bu Şekil 2.3 ile gösterilen, bir regle yüzeydir.



Şekil 2.3 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzey

Tanım 2.6.7. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\Psi(u,v)$ parametresiyle verilen yüzey ve bu yüzeyin $\mathcal{U}$ normal vektör alanı için

$$\begin{aligned} E &=<\Psi_u,\Psi_u>,\ F=<\Psi_u,\Psi_v>\ ve\ G=<\Psi_v,\Psi_v>, \\ e &=<\Psi_{uu},N>,\ f=<\Psi_{uv},N>\ ve\ g=<\Psi_{vv},N>, \end{aligned} \tag{2.36}$$

E,F,G birinci ve *e,g,f* ikinci temel form katsayıları olmak üzere Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= (eg-f^2)(EG-F^2)^{-1} \\ 2H &= (eG-2fF+gE)(EG-F^2)^{-1} \end{aligned} \tag{2.37}$$

eşitlikleri ile bulunur (O'Neill, 2006; Hacısalihoğlu, 1983; Turgut, 1995)

Şimdi, (Do Carmo, 1976; Frey ve Mancewicz, 1992; Gray, 1993; Kühnel, 2006; Ekici, 2019) çalışmalarında da görülebilecek bazı temel kavramları verelim.

- Bir zarf eğrisi, bir düzlemde eğri ailesinin her birine teğet olan bir eğridir.
- Bir zarf yüzeyi, bir yüzey ailesinin her bir üyesi için teğet olan bir yüzeydir.
- Bir açılabilir yüzey, Gauss eğriliğinin sıfır olduğu bir yüzeydir.
- Bir minimal yüzey, ortalama eğriliğin sıfır olduğu bir yüzeydir.

3. HİPERBOLİK YÜKSELTİLMİŞ AÇILABİLİR YÜZEYLER

Bu bölümde, düzlemsel eğriden bir yükseltme dönüşümü kullanarak $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = x^2 - y^2$ hiperbolik paraboloidi ile 3-boyutlu Öklid uzayına yükseltilmiş bir uzay eğrisi boyunca tanjant düzlemlerin tek parametreli ailesinin zarfı olarak oluşan açılabilir bir yüzey verilmiştir (Güven, vd. 2020). Sonra bu açılabilir yüzeyin, minimal yüzey ve sabit ortalama eğrilikli yüzey olma koşulları elde edilmiştir.

3.1. Parabolik Yükseltilmiş Açılabilir Yüzeyler

Choi'nin (1997) de bahsetmiş olduğu paraboloidin bir eğri boyunca teğet düzlemlerin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$C(s) = (x(s), y(s))$ rasyonel düzlemsel eğri ki regüler (yani $C'(s) \neq 0$) olsun. Q; $z = x^2 + y^2$ paraboloid yüzeyi ile bu eğrinin yükseltmesi olan eğri

$$\hat{C}(s) = (x(s), y(s), x^2(s) + y^2(s)) \tag{3.1}$$

şeklinde inşa edilir. Ayrıca Q yüzeyinin birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ olsun. Bu durumda yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile hesaplandığında

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -1) \tag{3.3}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s) = (2x(s), 2y(s), -1) \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır. Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s) = (2x'(s), 2y'(s), 0) \tag{3.5}$$

olur. (3.2) ve (3.5) denklemleri kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ 2x & 2y & -1\\ 2x' & 2y' & 0\end{vmatrix}=(2y',-2x',4xy'-4x'y) \tag{3.6}$$

bulunur.

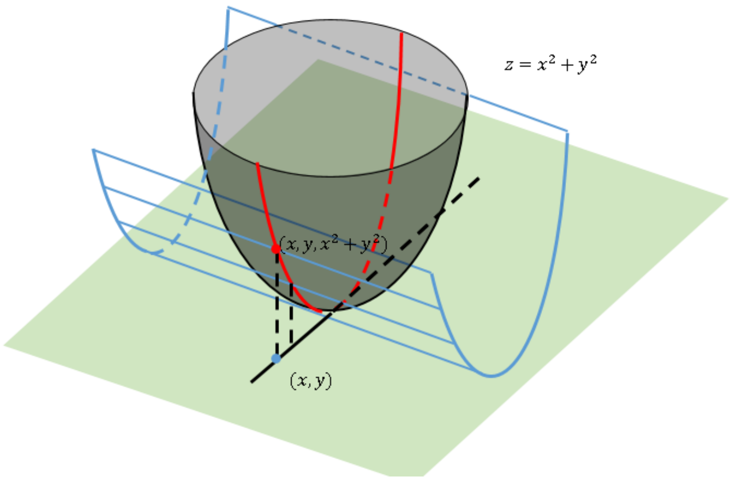
Bir $\hat{C}(s)$ uzay eğrisi boyunca Q yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(Q)\right\}$ teğet düzlemlerinin bir parametre ailesi göz önünde bulundurulduğunda zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ dayanak eğrisi ve $\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)$ doğrultman vektörü tarafından inşa edilir. Bu zarf yüzeyi

$$D_{C(s)}(s,v)=\hat{C}(s)+v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \tag{3.7}$$

şeklinde yazılır.

$C(s)$ eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir, Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır (Choi, 1997).

Şekil 3.1 ile gösterilen, paraboloid yüzeyi ile bir düzlem eğrsinin yükseltilmesi olan eğridir.



Şekil 3.1 Paraboloid yüzeyi ile bir düzlem eğrsinin yükseltilmesi olan eğri

Uyarı: $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ düzlemsel eğri, kuadratiklerin tümüne yükseltilebilir ve $\hat{C}(s)$ eğrisi, kuadratik yüzeyin denklemi ile oluşturulabilir. Ayrıca kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametre ailesinin zarf yüzeyi, (3.7) denklemi ile verilir.

Teorem 3.2.1. Herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin $D_{C(s)}(s,v)$ denklemi ile verilen zarf yüzeyinin minimal olması için

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>v+<\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>=0 \qquad (3.8)$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır (Güven, vd. 2020).

İspat (3.7) ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
D_s &= v(\mathcal{U}\times\mathcal{U}'')+\hat{C}' \\
D_{sv} &= \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' \\
D_{ss} &= v(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''+\mathcal{U}\times\mathcal{U}''')+\hat{C}'' \\
D_v &= \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \\
D_{vv} &= 0
\end{aligned} \qquad (3.9)$$

bulunur. (2.36) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
E &=< D_s,D_s >= v^2 <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}''> +2v(\hat{C}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'')+<\hat{C}',\hat{C}'> \\
F &=< D_s,D_v >= v<\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>+<\hat{C}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\
G &=< D_v,D_v >=<\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>
\end{aligned} \qquad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
e &=<\mathcal{U},D_{ss}>= v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>+<\hat{C}'',\mathcal{U}> \\
f &=<\mathcal{U},D_{sv}>=<\mathcal{U},\mathcal{U}\times\mathcal{U}''>=0 \\
g &=<\mathcal{U},D_{vv}>=0
\end{aligned} \qquad (3.11)$$

olur. Bulunan bu denklemler ile (3.9) denklemi ve (3.7) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H=\frac{eG}{2(EG-F^2)} \qquad (3.12)$$

elde edilir. Buradan

$$eG = v < \mathcal{U}'\times\mathcal{U}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' > + < \mathcal{U}, \hat{C}'' >< \mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' > \tag{3.13}$$

denklemi bulunur.

Teorem 3.2.2. Herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (3.7) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir (Güven, vd. 2020).

İspat (3.10), (3.11) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliğini kullanarak $g = 0$ ve $f = 0$ olduğunda

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \tag{3.14}$$

bulunur.

3.2. Hiperbolik Paraboloid Yüzeyinin Zarf Yüzeyleri

Hiperbolik paraboloidin zarf yüzeyini vermeden önce, aşağıdaki teoremleri ve bunların yukarıda verilen paraboloidin zarf yüzeyi $D_{C(s)}(s,v)$ ile ilgili ifade etmesini sağladık.

Zarf yüzeyini, $C(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s))$ düzlemsel eğrisini kullanarak ve $\mathrm{z} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2$ ile verilen hiperbolik paraboloid S yüzeyine kaldırarak inşa ederiz. Buna kaldırma olarak hiperbolik kaldırma denir ve S yüzeyindeki eğri her s için

$$\hat{C} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2) \tag{3.15}$$

olur. Denklem (3.7) ile aynı $\Phi_{C(s)}(s,v)$ olarak adlandırdığımız $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca hiperbolik paraboloid yüzeyinin S teğet düzlemleri $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ ın bir parametre ailesinin zarf yüzeyini

$$\Phi_{C(s)}(s,v) = D_{C(s)}(s,v) = \hat{C}(s) + v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \tag{3.16}$$

şeklinde oluşturur. $\hat{C}(s)$ dayanak eğrisidir ve $\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)$ yön belirleyicidir. Ayrıca S yüzeyinin $\mathcal{U}(s)$ birim olmayan normal vektör alanı ve $\mathcal{U}(s)$ türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(s) &= (2\mathrm{x}(s), -2\mathrm{y}(s), -1) \\ \mathcal{U}'(s) &= (2\mathrm{x}'(s), -2\mathrm{y}'(s), 0) \end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. (3.17) denklemleri kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\end{vmatrix}=(-2y'(s),-2x'(s),4x(s)y'(s)-4x'(s)y(s)) \quad (3.18)$$

elde edilir.

Notasyon S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi her s için

$$D_{C(s)}(s,v) \;=\; (x-2vy', y-2vx', x^2-y^2+4v(x'y-xy')) \quad (3.19)$$

parametrik denklemi ile ifade edilir (Güven, vd. 2020).

Sonuç S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir (Güven, vd. 2020).

Teorem 3.2.3. Bir düzlemsel üreteç eğri

$$C(s)=(x(s),\pm x(s)+k) \quad (3.20)$$

şeklinde çizgi parametreli ise S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimaldir (Güven, vd. 2020).

İspat Kısalığın hatırına $x=x(s)$ ve $y=y(s)$ alınır, (3.16) denkleminde verilen zarf yüzeyi için (3.10) denklemleri ve (3.18) denklemlerinden yararlanarak iç (skaler) çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2y',-2x',4x'y-4xy'),(-2y',-2x',4x'y-4xy')> \\ &= 4y'^2+4x'^2+16[x'y-xy']^2 \\ &= 4(y'^2+x'^2)+16(\frac{x}{y})'y^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \hat{C}(s) &= (x,y,x^2-y^2) \\ \hat{C}'(s) &= (x',y',2xx'-2yy') \\ \hat{C}''(s) &= (x'',y'',2(x'^2-y'^2+xx''-yy'')) \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur. (3.22) denklemlerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} <\hat{C}'', \mathcal{U}> &= <(x'', y'', 2(x'^2 - y'^2 + xx'' - yy'')), (2x, -2y, -1)> \\ &= 2(y'^2 - x'^2) \end{aligned} \tag{3.23}$$

olur. Ayrıca (3.17) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' = (0, 0, 4(y'x'' - x'y'')) \tag{3.24}$$

elde edilir. Buradan iç (skaler) çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> &= <(2x, -2y, -1), (0, 0, 4(y'x'' - x'y''))> \\ &= 4(y'x'' - x'y'') \\ &= 4(\frac{y'}{x'})'x'^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

bulunur. Ayrıca (3.23) ve (3.25) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e &= <\hat{C}'', \mathcal{U}> + v <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> \\ &= 2(y'^2 - x'^2 + 4v(\frac{y'}{x'})'x'^2) \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Ayrıca $f = 0$ ve $g = 0$ olduğunda, ortalama eğrilik

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{3.27}$$

şeklinde yazılır. (3.27) ile verilen G nin denkleminden $G \neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$<\hat{C}'', \mathcal{U}> = 0 \text{ ve } <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> = 0 \tag{3.28}$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (3.30) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. (3.26) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$y'^2(s) - x'^2(s) = 0 \tag{3.29}$$

olur. (3.29) denklem çözülürse $y'(s) = |x'(s)|$ veya $y'(s) = \pm x'(s)$ buradan

$$y(s) = \pm x(s) + k \tag{3.30}$$

bulunur. (3.26) diferansiyel denkleminin ikinci kısmından

$$(\frac{y'(s)}{x'(s)})' = 0 \tag{3.31}$$

yazılır. (3.31) denkleminin çözümü yapılırsa $(\frac{y'(s)}{x'(s)}) = c$ veya $y'(s) = cx'(s)$ buradan

$$y(s) = cx(s) + k \tag{3.32}$$

olur. Burada *c* bir sabittir. (3.30) ve (3.32) denklemlerinden

$$e = 0 \tag{3.33}$$

elde edilir. Yani $H = 0$ demektir.

Teorem 3.2.4. $c, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel eğri

$$C(t) = (x(s), cx(s) + k) \tag{3.34}$$

şeklinde çizgi parametrik verilmişse S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\{T_{\hat{C}(s)}(S)\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi sabit ortalama eğriliktir (Güven, vd. 2020).

Örnek 3.2.1. $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$C(s) = (s, 3s)$$

ile verilen bir doğruyu alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s) = (s, 3s, -8s^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

$$D_{C(s)}(s, v) = (s - 6v, 3s - 2v, -8s^2)$$

olarak parametrelendirilir.

Şekil 3.2 $C(s)$ üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey

Bu yüzeyin *K* Gauss eğriliği ve *H* ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K = 0,\ H = -10240$$

olarak hesaplanır. Şekil 3.2 de $C(s)$ üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey gösterilmiştir.

Örnek 3.2.2. $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$C(s) = (\sinh s, \cosh s)$$

ile verilen bir doğruyu alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s) = (\sinh s, \cosh s, -1)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

$$D_{C(s)}(s,v) = (\sinh s - 2v\sinh s, \cosh s - 2v\cosh s, -1+4v)$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K = 0,\ \ H = -16(2v-1)^2(2\cosh^2 s + 3)$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit olmayan ortalama eğrilikli yüzey Şekil 3.3 de görülmektedir.

Şekil 3.3 $D_{C(s)}$ sabit olmayan ortalama eğrilikli yüzey

4. MINKOWSKI 3-UZAYINDA HİPERBOLİK YÜKSELTİLMİŞ AÇILABİLİR YÜZEYLER

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında timelike veya spacelike eğriler kullanılarak yükseltme dönüşümü yardımıyla bir paraboloid ve bir hiperbolik paraboloid ile oluşturulan açılabilir yüzeyler için minimal yüzey ve sabit ortalama eğrilikli yüzey olma koşulları verilmiştir. Ayrıca ifade edilen bu hesaplamaların yapıldığı bazı örnekler de verilmiştir.

Çalışmamız boyunca $\mathbb{R}_1^2$ uzayı $ds^2 = dx^2 - dy^2$ Lorentz metriği ile verilen $\mathbb{R}^2;(+,-)$ işaretli Lorentz uzayı ve $\mathbb{R}_1^3$ uzayı $ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$ Lorentz metriği ile verilen $\mathbb{R}^3;(+,-,+)$ işaretli Lorentz uzayı olarak kullanılmıştır.

4.1. Minkowski 3-Uzayında Parabolik Yükseltilmiş Açılabilir Yüzeyler

Bu alt kısım hesaplamaları yapılırken düzlemsel eğrilerin causal (nedensel) özelliklerine göre sınıflandırma yapılmıştır.

a) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $0 < x(s) < y(s)$ olacak şekilde $C(s) = (x(s), y(s))$ regüler düzlem eğrisi alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$\frac{dC(s)}{ds} = (x'(s), y'(s)) \tag{4.1}$$

olur. Buradan

$$< \frac{dC(s)}{ds}, \frac{dC(s)}{ds} >= x'(s)^2 - y'(s)^2 < 0 \tag{4.2}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel timelike eğridir.

Minkowski 3-uzayda bir $\hat{C}(s)$ uzay eğrisi boyunca Q yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(Q)\right\}$ teğet düzlemlerinin bir parametre ailesini göz önünde bulundurulduğunda zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ dayanak eğrisi ve $\mathcal{U}(s) \times \mathcal{U}'(s)$ doğrultman vektörü tarafından inşa edilir. Bu zarf yüzeyi

$$D_{C(s)}(s,v) = \hat{C}(s) + v(\mathcal{U}(s) \times \mathcal{U}'(s)) \tag{4.3}$$

şeklinde yazılır.

Q yüzeyi; $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $C(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s) = (x(s), y(s), x^2(s) + y^2(s)) \tag{4.4}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten s ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (x'(s), y'(s), 2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s)) \tag{4.5}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $x'(s)^2 < y'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} < \hat{C}'(s), \hat{C}'(s) > &= x'(s)^2 - y'(s)^2 + (2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s))^2 \\ &> x'(s)^2 - x'(s)^2 + (2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s))^2 \\ &> 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0 \tag{4.7}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -1) \tag{4.8}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s) = (2x(s), 2y(s), -1) \tag{4.9}$$

şeklinde yazılır.

i) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $0 < x(s) < y(s) < 1$ olsun. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$< \mathcal{U}, \mathcal{U} > = (2x(s))^2 - (2y(s))^2 + 1 = 4(x^2(s) - y^2(s)) + 1 \tag{4.10}$$

olur. Bu durumda $< \mathcal{U}, \mathcal{U} > > 0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike paraboloid yüzeydir.

ii) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $1 < x(s) < y(s)$ olsun. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$< \mathcal{U}, \mathcal{U} > = (2x(s))^2 - (2y(s))^2 + 1 = 4(x^2(s) - y^2(s)) + 1 \tag{4.11}$$

olur. Bu durumda $< \mathcal{U}, \mathcal{U} > < 0$ olup $\mathcal{U}(s)$ timelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ timelike normal vektör alanı olduğundan spacelike paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin *s* ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s) = (2x'(s), 2y'(s), 0) \tag{4.12}$$

olur. (4.7) ve (4.12) kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkoswki-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa her *s* için

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U}' = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x & 2y & -1 \\ 2x' & 2y' & 0 \end{vmatrix} = (-2y', -2x', 4x'y - 4xy') \tag{4.13}$$

bulunur.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ timelike eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca *Q* paraboloid yüzeyine teğet olduğu için *Q* paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.1.1. Üreteç eğrisi timelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' > < \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} > < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > = 0 \tag{4.14}$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_s &= v(\mathcal{U} \times \mathcal{U}'') + \hat{C}' \\ D_{sv} &= \mathcal{U} \times \mathcal{U}'' \\ D_{ss} &= v(\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' + \mathcal{U} \times \mathcal{U}''') + \hat{C}'' \\ D_v &= \mathcal{U} \times \mathcal{U}' \\ D_{vv} &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur. (2.36) daki denklem kullanılırsa

$$E = < D_s, D_s > = v^2 < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'' > + 2v(\hat{C}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'') + < \hat{C}', \hat{C}' >$$
$$F = < D_s, D_v > = v < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \tag{4.16}$$
$$G = < D_v, D_v > = < \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' >$$

$$e = < D_{ss}, \mathcal{U} > = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >$$
$$f = < D_{sv}, \mathcal{U} > = < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} > = 0 \tag{4.17}$$
$$g = < D_{vv}, \mathcal{U} > = 0$$

olur. Bulunan bu denklemler ile (2.37) denklemi ve (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.18}$$

elde edilir. Buradan

$$eG = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' > < \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} > < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \tag{4.19}$$

denklemi bulunur.

Teorem 4.1.2. Üreteç eğrisi timelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliğini kullanarak $g = 0$ ve $f = 0$ olduğunda

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \tag{4.20}$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi timelike olan S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Notasyon S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s)+v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s)+v(-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s)) \\ &= (x(s)-2vy'(s),y(s)-2vx'(s),x^2(s)+y^2(s)+4v(x'(s)y(s)-x(s)y'(s))) \end{aligned} \tag{4.21}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.1.3. Üreteç eğrisi timelike olan çizgi parametreli bir eğri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat Kısalığın hatırına $x=x(s)$ ve $y=y(s)$ alınır. (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için, (4.15) denklemleri ile (4.16) denklemlerinden yararlanarak Minkoswki-Lorentzian iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2y',-2x',4x'y-4xy'),(-2y',-2x',4x'y-4xy')> \\ &= 4y'^2+4x'^2+16[x'y-xy']^2 \\ &= 4(y'^2+x'^2)+16(\frac{x}{y})'y^2 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}=(x,y,x^2-y^2) \\ &\hat{C}'=(x',y',2xx'-2yy') \\ &\hat{C}''=(x'',y'',2(x'^2-y'^2+xx''-yy'')) \end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) denklemlerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} <\hat{C}'',\mathcal{U}> &= <(x'',y'',2(x'^2-y'^2+xx''-yy'')),(2x,-2y,-1)> \\ &= 2(y'^2-x'^2) \end{aligned} \tag{4.24}$$

olur. Ayrıca (4.12) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''=(0,0,4(y'x''-x'y'')) \tag{4.25}$$

elde edilir. Buradan Lorentzian iç (skaler) çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> &= <(2x,-2y,-1),(0,0,4(y'x''-x'y''))> \\ &= 4(y'x''-x'y'') \qquad (4.26) \\ &= 4\left(\frac{y'}{x'}\right)'x'^2 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (4.24) ve (4.26) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e &= <\hat{C}'',\mathcal{U}> + v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\ &= 2(y'^2 - x'^2 + 4v\left(\frac{x'}{y'}\right)'x'^2) \end{aligned} \qquad (4.27)$$

elde edilir. Ayrıca $f=0$ ve $g=0$ olduğundan ortalama eğrilik

$$H = \frac{eG}{2(EG-F^2)} \qquad (4.28)$$

şeklinde yazılır. (4.28) ile verilen G nin denkleminden $G \neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$<\hat{C}'',\mathcal{U}>=0 \text{ ve } <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>=0 \qquad (4.29)$$

olmalıdır. Daha sonra, yüzeyin minimal olması için (4.29) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi timelike olduğundan (4.27) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$y'^2 - x'^2 = 0 \qquad (4.30)$$

olamaz. Bu durumda $H=0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $y'^2(s) - x'^2(s) - 2y(s)y''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s) = (x(s), y(s))$ timelike üreteç eğrileri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.1.4. S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c,k \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel timelike üreteç eğrisi

$$C(s) = (x(s), cx(s)+k) \text{ ve } x'(s) = \text{sabit} \qquad (4.31)$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.1.3. ispatı göz önüne alındığında S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için

$C(s)=(x(s),y(s))$ timelike üreteç eğrisinin bileşenleri $y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $x(s)$ nin türevi $\frac{dx(s)}{ds}=$ sabit ve

$$\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)' = 0 \tag{4.32}$$

olmalıdır. Buradan (4.32) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)=c$ veya $y'(s)=cx'(s)$ buradan

$$y(s)=cx(s)+k \tag{4.33}$$

eşitliği elde edilir. Burada *c,k* bir sabittir.

Örnek 4.1.1. $\forall s\in\mathbb{R}$ için

$$C(s)=(2s-5,3s+1)$$

ile verilen bir timelike üreteç eğrisini alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş spacelike eğrisi

$$\hat{C}(s)=(2s-5,3s+1,(2s-5)^2+(3s+1)^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

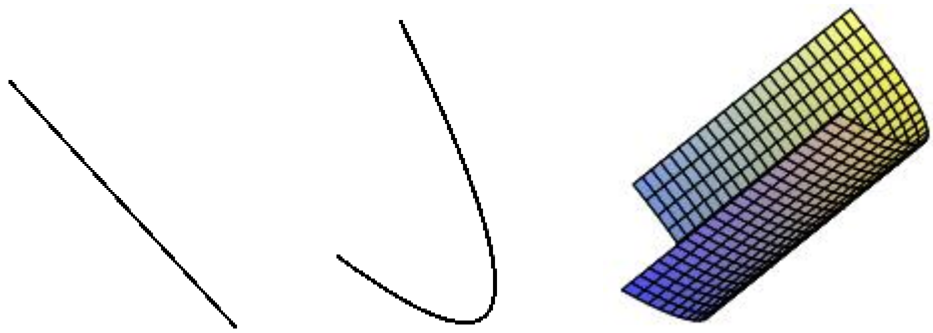
$$D_{C(s)}(s,v)=(2s-5-6v,3s+1-4v,68v+13s^2-14s+26)$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin *K* Gauss eğriliği ve *H* ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K=0,\ H=-1207440$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ timelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey Şekil 4.1 de görülmektedir.



Şekil 4.1 $C(s)$ timelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey

b) $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ regüler düzlem eğrisi $\forall s\in\mathbb{R}$ için $\mathrm{x}(s)>\mathrm{y}(s)>0$ olacak şekilde alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$C'(s)=(\mathrm{x}'(s),\mathrm{y}'(s)) \tag{4.34}$$

olur. Buradan

$$<C'(s),C'(s)>=\mathrm{x}'(s)^2-\mathrm{y}'(s)^2>0 \tag{4.35}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel spacelike eğridir.

$\mathrm{z}=\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2$ paraboloidi ile $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s),\mathrm{x}^2(s)+\mathrm{y}^2(s)) \tag{4.36}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten s ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s)=(\mathrm{x}'(s),\mathrm{y}'(s),2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s)+2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s)) \tag{4.37}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $\mathrm{x}'(s)^2>\mathrm{y}'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$<\hat{C}'(s),\hat{C}'(s)> \;=\; \mathrm{x}'(s)^2-\mathrm{y}'(s)^2+(2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s)+2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s))^2>0 \tag{4.38}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı hesaplandığında

$$\mathcal{U}(s)=(2\mathrm{x}(s),2\mathrm{y}(s),-1) \tag{4.39}$$

yani

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-\mathrm{z}=0 \tag{4.40}$$

$$\nabla f=(2\mathrm{x},2\mathrm{y},-1) \tag{4.41}$$

yüzeyin normalini verir. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}>=(2\mathrm{x}(s))^2-(2\mathrm{y}(s))^2+1=4(\mathrm{x}(s)^2-\mathrm{y}(s)^2)+1 \tag{4.42}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}>>0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$N'(s) = (2x'(s), 2y'(s), 0) \tag{4.43}$$

olur. (4.39) ve (4.43) kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkowski-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s) \times \mathcal{U}'(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x(s) & 2y(s) & -1 \\ 2x'(s) & 2y'(s) & 0 \end{vmatrix} = (-2y'(s), -2x'(s), 4x'(s)y(s) - 4x(s)y'(s)) \tag{4.44}$$

bulunur.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ spacelike eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.1.5. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > = 0 \tag{4.45}$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanır, (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.46}$$

olacağından

$$eG = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \tag{4.47}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliğini kullanarak, $g=0$ ve $f=0$ olduğunda

$$K=(eg-f^2)(EG-F^2)^{-1}=0 \tag{4.48}$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi spacelike olan S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Notasyon S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s)+v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s)+v(-2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)) \\ &= (\mathrm{x}(s)-2v\mathrm{y}'(s),\mathrm{y}(s)-2v\mathrm{x}'(s),\mathrm{x}^2(s)+\mathrm{y}^2(s)+4v(\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s))) \end{aligned} \tag{4.49}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.1.7. Üreteç eğrisi spacelike olan çizgi parametreli bir eğri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat Kısalığın hatırına $\mathrm{x}=\mathrm{x}(s)$ ve $\mathrm{y}=\mathrm{y}(s)$ alınır. (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için (4.15) denklemleri ile (4.16) denklemlerinden yararlanarak Minkowski-Lorentzian iç çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle \\ &= \langle(-2\mathrm{y}',-2\mathrm{x}',4\mathrm{x}'\mathrm{y}-4\mathrm{x}\mathrm{y}'),(-2\mathrm{y}',-2\mathrm{x}',4\mathrm{x}'\mathrm{y}-4\mathrm{x}\mathrm{y}')\rangle \\ &= 4\mathrm{y}'^2+4\mathrm{x}'^2+16[\mathrm{x}'\mathrm{y}-\mathrm{x}\mathrm{y}']^2 \\ &= 4(\mathrm{y}'^2+\mathrm{x}'^2)+16(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}})'\mathrm{y}^2 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$e=\langle \hat{C}'',\mathcal{U}\rangle+v\langle \mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''\rangle$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\hat{C} &= (x, y, x^2 - y^2)\\ \hat{C}' &= (x', y', 2xx' - 2yy')\\ \hat{C}'' &= (x'', y'', 2(x'^2 - y'^2 + xx'' - yy''))\end{aligned} \tag{4.51}$$

bulunur. (4.51) denklemlerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}<\hat{C}'', \mathcal{U}> &= <(x'', y'', 2(x'^2 - y'^2 + xx'' - yy'')), (2x, -2y, -1)>\\ &= 2(y'^2 - x'^2)\end{aligned} \tag{4.52}$$

olur. Ayrıca (4.43) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' = (0, 0, 4(y'x'' - x'y'')) \tag{4.53}$$

elde edilir. Buradan Lorentzian iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}<\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> &= <(2x, -2y, -1), (0, 0, 4(y'x'' - x'y''))>\\ &= 4(y'x'' - x'y'')\\ &= 4(\frac{y'}{x'})'x'^2\end{aligned} \tag{4.54}$$

bulunur. Ayrıca (4.52) ve (4.54) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}e &= <\hat{C}'', \mathcal{U}> + v <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''>\\ &= 2(y'^2 - x'^2 + 4v(\frac{y'}{x'})'x'^2)\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. Ayrıca $f = 0$ ve $g = 0$ olduğunda ortalama eğrilik

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.56}$$

şeklinde yazılır. (4.56) ile verilen G nin denkleminden $G \neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$<\hat{C}'', \mathcal{U}> = 0 \text{ ve } <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> = 0 \tag{4.57}$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (4.57) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi spacelike olduğundan (4.55) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$y'^2(s) - x'^2(s) = 0 \tag{4.58}$$

olamaz. Bu durumda $H = 0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $y'^2(s) - x'^2(s) - 2y(s)y''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s) = (x(s), y(s))$ spacelike üreteç eğrileri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.1.8. S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel spacelike üreteç eğrisi

$$C(s) = (x(s), cx(s) + k) \text{ ve } x'(s) = \text{sabit} \tag{4.59}$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.1.7. ispatı göz önüne alındığında S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s) = (x(s), y(s))$ spacelike üreteç eğrisinin bileşenleri $y'^2(s) - x'^2(s) - 2y(s)y''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $\dfrac{dx(s)}{ds} = \text{sabit}$ ve

$$\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)' \quad = \quad 0 \tag{4.60}$$

olmalıdır. Buradan (4.60) denklemi kullanılırsa $\left(\dfrac{y'(s)}{x'(s)}\right) = c$ veya $y'(s) = cx'(s)$ buradan

$$y(s) = cx(s) + k \tag{4.61}$$

eşitliği elde edilir. Burada c,k bir sabittir.

c) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $x(s) < y(s) < 0$ olacak şekilde $C(s) = (x(s), y(s))$ regüler (yani $C'(s) \neq 0$) düzlem eğrisi alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$C'(s) = (x'(s), y'(s)) \tag{4.62}$$

olur. Buradan

$$< C'(s), C'(s) >= x'(s)^2 - y'(s)^2 > 0 \tag{4.63}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel spacelike eğridir.

$z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $C(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s) = (x(s), y(s), x^2(s) + y^2(s)) \tag{4.64}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten s ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (x'(s), y'(s), 2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s)) \tag{4.65}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $x'(s)^2 > y'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$<\hat{C}'(s), \hat{C}'(s)> \;=\; x'(s)^2 - y'(s)^2 + (2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s))^2 > 0 \tag{4.66}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \tag{4.67}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -1) \tag{4.68}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s) = (2x(s), 2y(s), -1) \tag{4.69}$$

yazılır.

Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U}, \mathcal{U}> = (2x(s))^2 - (2y(s))^2 + 1 = 4(x^2(s) - y^2(s)) + 1 \tag{4.70}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U}, \mathcal{U}> > 0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s) = (2x'(s), 2y'(s), 0) \tag{4.71}$$

olur. (4.67) ve (4.71) kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkoswki-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & 2y(s) & -1\\ 2x'(s) & 2y'(s) & 0\end{vmatrix}=(-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s)) \tag{4.72}$$

bulunur.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ spacelike eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.1.9. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>+<\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>=0 \tag{4.73}$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanır, (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H=\frac{eG}{2(EG-F^2)} \tag{4.74}$$

olacağından

$$eG=v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>+<\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \tag{4.75}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.10. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliğini kullanarak $g=0$ ve $f=0$ olduğunda

$$K=(eg-f^2)(EG-F^2)^{-1}=0 \tag{4.76}$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi spacelike olan S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Notasyon S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s)+v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s)+v(-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s)) \\ &= (x(s)-2vy'(s),y(s)-2vx'(s),x^2(s)+y^2(s)+4v(x'(s)y(s)-x(s)y'(s))) \end{aligned} \tag{4.77}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.1.11. Üreteç eğrisi spacelike olan çizgi parametreli bir eğri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için (4.15) denklemleri ve (4.16) denklemlerinden yararlanarak Minkowski-Lorentzian iç (skaler) çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s)), \\ &\quad (-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s))> \\ &= 4y'^2(s)+4x'^2(s)+16[x'(s)y(s)-x(s)y'(s)]^2 \\ &= 4(y'^2(s)+x^2(s))+16(\frac{x(s)}{y(s)})'y^2(s) \end{aligned} \tag{4.78}$$

$e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}(s)=(x(s),y(s),x^2(s)-y^2(s)) \\ &\hat{C}'(s)=(x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s)) \\ &\hat{C}''(s)=(x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s))) \end{aligned} \tag{4.79}$$

bulunur. (4.79) denklemlerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} <\hat{C}'',\mathcal{U}> &= <(x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s))), \\ &\quad (2x(s),-2y(s),-1)> \\ &= 2(y'^2(s)-x'^2(s)) \end{aligned} \tag{4.80}$$

olur. Ayrıca (4.71) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''=(0,0,4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s))) \tag{4.81}$$

elde edilir. Buradan Minkowski-Lorentzian iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> &= <(2x(s),-2y(s),-1), \\ &\quad (0,0,4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s)))> \\ &= 4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s)) \\ &= 4(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s) \end{aligned} \tag{4.82}$$

bulunur. Ayrıca (4.80) ve (4.82) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e &= <\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\ &= 2(y'^2(s)-x'^2(s)+4v(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s)) \end{aligned} \tag{4.83}$$

elde edilir. Ayrıca $f=0$ ve $g=0$ olduğunda ortalama eğrilik

$$H=\frac{eG}{2(EG-F^2)} \tag{4.84}$$

şeklinde yazılır. (4.84) ile verilen G nin denkleminden $G\neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$<\hat{C}'',\mathcal{U}>=0 \text{ ve } <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>=0 \tag{4.85}$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (4.85) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi spacelike olduğundan (4.83) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$y'^2(s)-x'^2(s) \quad = \quad 0 \tag{4.86}$$

olamaz. Bu durumda $H=0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s)=(x(s),y(s))$ spacelike üreteç eğrileri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.1.12. S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c,k \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel spacelike üreteç eğrisi

$$C(s)=(\mathrm{x}(s), c\mathrm{x}(s)+k) \text{ ve } \mathrm{x}'(s)=\text{sabit} \tag{4.87}$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.1.11. ispatı göz önüne alındığında S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ spacelike üreteç eğrisinin bileşenleri $\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $\mathrm{x}'(s)=$ sabit ve

$$\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)' = 0 \tag{4.88}$$

olmalıdır. Buradan (4.88) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)=c$ veya $\mathrm{y}'(s)=c\mathrm{x}'(s)$ buradan

$$\mathrm{y}(s)=c\mathrm{x}(s)+k \tag{4.89}$$

eşitliği elde edilir. Burada *c*,*k* bir sabittir.

Örnek 4.1.2. $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$C(s)=(4s+6, 3s-1)$$

ile verilen bir spacelike üreteç eğrisini alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin paraboloid ile $\hat{C}(s)$ spacelike yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s)=(4s+6, 3s-1, (4s+6)^2+(3s-1)^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

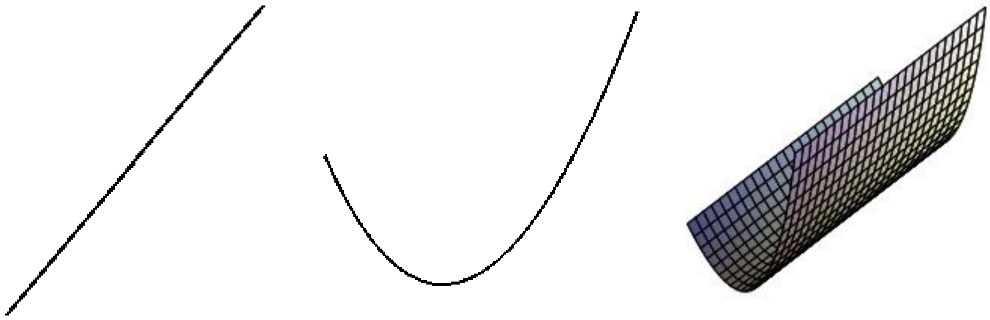
$$D_{C(s)}(s,v)=(4s-6v+6, 3s-8v-1, 25s^2+42s+37-88v)$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin *K* Gauss eğriliği ve *H* ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K=0,\ H=5401200$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ spacelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey Şekil 4.2 deki gibi görülür.



Şekil 4.2 $C(s)$ spacelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey

d) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $x(s) > y(s) > 0$ olacak şekilde $C(s) = (x(s), y(s))$ regüler (yani $C'(s) \neq 0$) null üreteç eğrisi alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$C'(s) = (x'(s), y'(s)) \tag{4.90}$$

olur. Buradan

$$< C'(s), C'(s) >= x'(s)^2 - y'(s)^2 = 0 \tag{4.91}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel null (lightlike) eğridir.

$z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $C(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s) = (x(s), y(s), x^2(s) + y^2(s)) \tag{4.92}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten s ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (x'(s), y'(s), 2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s)) \tag{4.93}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $x'(s)^2 > y'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$< \hat{C}'(s), \hat{C}'(s) > \;=\; x'(s)^2 - y'(s)^2 + (2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s))^2 > 0 \tag{4.94}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \tag{4.95}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -1) \tag{4.96}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s) = (2x(s), 2y(s), -1) \tag{4.97}$$

yazılır. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}>=(2\mathrm{x}(s))^2-(2\mathrm{y}(s))^2+1=4(\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s))+1 \tag{4.98}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}>>0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s)=(2\mathrm{x}'(s),2\mathrm{y}'(s),0) \tag{4.99}$$

olur. (4.95) ve (4.99) kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkowski-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2\mathrm{x}(s) & 2\mathrm{y}(s) & -1\\ 2\mathrm{x}'(s) & 2\mathrm{y}'(s) & 0\end{vmatrix}=(-2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)) \tag{4.100}$$

bulunur.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ null(lightlike) eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.1.13. Üreteç eğrisi null(lightlike) olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v<\mathcal{U}'\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>+<\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}''>=0 \tag{4.101}$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanır, (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.102}$$

olacağından

$$eG = v < \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'' > \tag{4.103}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.14. Üreteç eğrisi null(lightlike) olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliğini kullanarak $g = 0$ ve $f = 0$ olduğunda

$$K = (eg - f^2)(EG - F^2)^{-1} = 0 \tag{4.104}$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi null(lightlike) olan S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Uyarı: $EG - F^2 = 0$ olduğunda Gauss eğriliği hesaplanamaz. Dolayısıyla yüzeyin açılabilirliği hakkında bilgi verilemez.

Notasyon S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s) + v(\mathcal{U}(s) \times \mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s) + v(-2\mathrm{y}'(s), -2\mathrm{x}'(s), 4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s) - 4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)) \\ &= (\mathrm{x}(s) - 2v\mathrm{y}'(s), \mathrm{y}(s) - 2v\mathrm{x}'(s), \mathrm{x}^2(s) + \mathrm{y}^2(s) + 4v(\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s) \\ &\quad -\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s))) \end{aligned} \tag{4.105}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.1.15. Üreteç eğrisi null(lightlike) olan çizgi parametreli bir eğri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için (4.15) denklemleri ile (4.16) denklemlerinden yararlanarak Minkowski-Lorentzian iç (skaler) çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s)), \\ &\quad (-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s))> \\ &= 4y'^2(s)-4x'^2(s)+16[x'(s)y(s)-x(s)y'(s)]^2 \\ &= 16(\frac{x(s)}{y(s)})'y^2(s) \end{aligned} \tag{4.106}$$

$C(s)=(x(s),y(s))$ null üreteç eğrisi ve (4.106) denklemi kullanılırsa

$$G=16[(\frac{x(s)}{y(s)})'y^2(s)]^2 \tag{4.107}$$

elde edilir. $e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}(s)=(x(s),y(s),x^2(s)-y^2(s)) \\ &\hat{C}'(s)=(x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s)) \\ &\hat{C}''(s)=(x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s))) \end{aligned} \tag{4.108}$$

bulunur. $C(s)=(x(s),y(s))$ null üreteç eğrisi ile (4.108) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} <\hat{C}'',N> &= <(x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s))), \\ &\quad (2x(s),-2y(s),-1)> \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.109}$$

olur. Ayrıca (4.99) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''=(0,0,4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s))) \tag{4.110}$$

elde edilir. Buradan Minkowski-Lorentzian iç (skaler) çarpım yapılırsa

$$
\begin{aligned}
<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> &= <(2\mathrm{x}(s),-2\mathrm{y}(s),-1), \\
&\quad (0,0,4(\mathrm{y}'(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}''(s)))> \\
&= 4(\mathrm{y}'(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}''(s)) \qquad (4.111)\\
&= 4(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)})'\mathrm{x}'^2(s)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.109) ve (4.111) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
e &= <\hat{C}'',\mathcal{U}> + v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\
&= 8v(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)})'\mathrm{x}'^2(s)
\end{aligned} \qquad (4.112)
$$

elde edilir. Diğer taraftan $f=0$ ve $g=0$ olduğundan ortalama eğrilik

$$H=\frac{eG}{2(EG-F^2)} \qquad (4.113)$$

şeklinde yazılır. (4.113) ile verilen G nin denkleminden $G\neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$<\hat{C}'',\mathcal{U}>=0 \text{ ve } <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>=0 \qquad (4.114)$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (4.114) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi null olduğundan (4.112) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s) = 0 \qquad (4.115)$$

olduğundan $H=0$ elde edilir. Yani yüzey minimaldir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $\mathrm{x}'^2(s)+\mathrm{y}'^2(s)+2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ null(lightlike) üreteç eğrileri için S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.1.16. S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c,k\in\mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel null(lightlike) üreteç eğrisi

$$C(s)=(\mathrm{x}(s),c\mathrm{x}(s)+k) \text{ ve } \mathrm{x}'(s)=\text{sabit} \qquad (4.116)$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.1.15. ispatı göz önüne alındığında S paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ null(lightlike) üreteç eğrisinin bileşenleri $\mathrm{x}'^2(s)+\mathrm{y}'^2(s)+2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $\mathrm{x}'(s)=$ sabit ve

$$\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)' \quad = \quad 0 \tag{4.117}$$

olmalıdır. Buradan (4.117) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)=c$ veya $\mathrm{y}'(s)=c\mathrm{x}'(s)$ buradan

$$\mathrm{y}(s)=c\mathrm{x}(s)+k \tag{4.118}$$

eşitliği elde edilir. Burada c,k bir sabittir.

Örnek 4.1.3. $\forall s\in\mathbb{R}$ için

$$C(s)=(2s-5,2s+1)$$

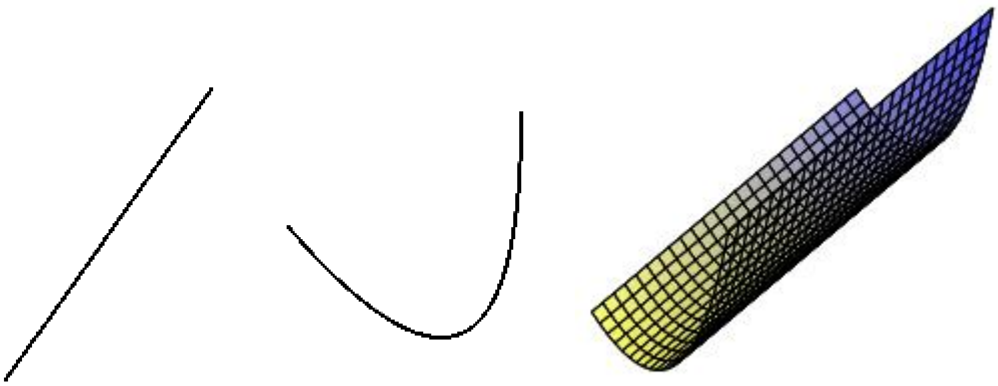
ile verilen bir null(lightlike) üreteç eğrisi alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş spacelike eğrisi

$$\hat{C}(s)=(2s-5,2s+1,(2s-5)^2+(2s+1)^2)$$

olur. Bununla oluşturulan yüzey

$$D_{C(s)}(s,v)=(2s-5-4v,2s+1-4v,8s^2-16s+48v+26)$$

olarak parametrelendirilir.



Şekil 4.3 $C(s)$ null(lightlike) üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey

Bu yüzeyin $EG - F^2 = 0$ olduğundan Gauss eğriliği hesaplanamaz ve ortalama eğrilik $H = 0$ olup yüzey minimaldir.

$C(s)$ null(lightlike) üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ minimal yüzey Şekil 4.3 de görülmektedir.

4.2. Minkowski 3-Uzayında Hiperbolik Paraboloid Yüzeyinin Zarf Yüzeyleri

Minkowski 3-uzayında hiperbolik paraboloidin zarf yüzeyini vermeden önce, yukarıda verilen paraboloidin $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi için gerekli işlemler ve teoremler benzer olarak ifade edilmiştir. Bu alt kısım hesaplamaları yapılırken düzlemsel eğrilerin causal (nedensel) özelliklerine göre sınıflandırma yapılmıştır.

a) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $0 < \mathrm{x}(s) < \mathrm{y}(s)$ olacak şekilde $C(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s))$ regüler (yani $C'(s) \neq 0$) düzlem eğrisi alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$C'(s) = (\mathrm{x}'(s), \mathrm{y}'(s)) \tag{4.119}$$

olur. Buradan

$$< C'(s), C'(s) >= \mathrm{x}'(s)^2 - \mathrm{y}'(s)^2 < 0 \tag{4.120}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel timelike eğridir.

Q yüzeyi; $\mathrm{z} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2$ hiperbolik paraboloidi ile $C(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s), \mathrm{x}^2(s) - \mathrm{y}^2(s)) \tag{4.121}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten s ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (\mathrm{x}'(s), \mathrm{y}'(s), 2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s) - 2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s)) \tag{4.122}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $\mathrm{x}'(s)^2 < \mathrm{y}'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} < \hat{C}'(t), \hat{C}'(s) > &= \mathrm{x}'(s)^2 - \mathrm{y}'(s)^2 + (2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s) - 2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s))^2 \\ &> \mathrm{x}'(s)^2 - \mathrm{x}'(s)^2 + (2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s) - 2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s))^2 \\ &> 0 \end{aligned} \tag{4.123}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 - \mathrm{z} = 0 \tag{4.124}$$

$$\nabla f = (2\mathrm{x}, -2\mathrm{y}, -1) \tag{4.125}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s)=(2x(s),-2y(s),-1) \tag{4.126}$$

yazılır.

i) $\forall s\in\mathbb{R}$ için $0<x(s)<y(s)<1$ olsun. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}>=(2x(s))^2-(2y(s))^2+1=4(x^2(s)-y^2(s))+1 \tag{4.127}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}>>0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike hiperbolik paraboloid yüzeydir.

ii) $\forall s\in\mathbb{R}$ için $1<x(s)<y(s)$ olsun. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $N(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}>=(2x(s))^2-(2y(s))^2+1=4(x^2(s)-y^2(s))+1 \tag{4.128}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}><0$ olup $N(s)$ timelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ timelike normal vektör alanı olduğundan spacelike hiperbolik paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s)=(2x'(s),-2y'(s),0) \tag{4.129}$$

olur. $ds^2=dx^2-dy^2+dz^2$ metriği ile verilen $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz-Minkowski uzayındaki bir uzay eğrisi $\hat{C}(s)=(x'(s),y'(s),x^2(s)-y^2(s))$ olsun. Buna göre $\hat{C}(s)=(x'(s),y'(s),x^2(s)-y^2(s))$ eğrisinin türevi alınırsa

$$\hat{C}'(s)=(x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s)) \tag{4.130}$$

bulunur. (4.130) denkleminin türevi hesaplanırsa

$$\hat{C}''(s) = (x''(s), y''(s), 2(x'^2(s) - y'^2(s) + x(s)x''(s) - y(s)y''(s))) \tag{4.131}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{U}(s)$ birim olmayan normal vektör alanının 3. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'(s) &= (2x'(s), -2y'(s), 0) \\ \mathcal{U}''(s) &= (2x''(s), -2y''(s), 0) \\ \mathcal{U}'''(s) &= (2x'''(s), -2y'''(s), 0) \end{aligned} \tag{4.132}$$

bulunur. (4.124) ve (4.132) denklemleri kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkowski-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x(s) & -2y(s) & -1 \\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0 \end{vmatrix} = (2y'(s), -2x'(s), 4x(s)y'(s) - 4x'(s)y(s)) \tag{4.133}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}''(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x(s) & -2y(s) & -1 \\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0 \end{vmatrix} = (2y''(s), -2x''(s), 4x''(s)y(s) - 4x(s)y''(s)) \tag{4.134}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'''(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x(s) & -2y(s) & -1 \\ 2x'''(s) & -2y'''(s) & 0 \end{vmatrix} = (2y'''(s), -2x'''(s), -4x'''(s)y(s) + 4x(s)y'''(s)) \tag{4.135}$$

$$\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0 \\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 4x'(s)y''(s) - 4x''(s)y'(s)) \tag{4.136}$$

bulunur.

Ayrıca $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin s ile v ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_s &= \hat{C}' + v(\mathcal{U}\times\mathcal{U}'') \\ &= (x'(s) + v2y''(s), y'(s) - v2x''(s), \\ &\quad 2(x(s)x'(s) - y(s)y'(s)) - 4v(x''(s)y(s) - x(s)y''(s))) \end{aligned} \tag{4.137}$$

$$D_v = \mathcal{U}\times\mathcal{U}' = (2y'(s), -2x'(s), 4x(s)y'(s) - 4x'(s)y(s)) \tag{4.138}$$

$$\begin{aligned} D_{ss} &= \hat{C}''+v(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''+\mathcal{U}\times\mathcal{U}''') \\ &= (x''(s),y''(s),2(x(s)x''(s)-y(s)y''(s))) \\ &\quad +v((0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s))+(2y'''(s),-2x'''(s), \\ &\quad -4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s))) \\ &= (x''(s)+v2y'''(s),y''(s)-2vx'''(s),2(x(s)x''(s)+y(s)y''(s)) \\ &\quad -4v(x'''(s)y(s)-x(s)y'''(s)+x''(s)y'(s)-x'(s)y''(s))) \end{aligned} \tag{4.139}$$

$$D_{sv} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' = (2y''(s),-2x''(s),-4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s)) \tag{4.140}$$

ve

$$D_{vv} = 0 \tag{4.141}$$

elde edilir. (4.137), (4.138), (4.139), (4.140) ve (4.141) denklemleri ile Minkowski-Lorentzian skaler (iç) ve vektörel çarpım kullanılırsa

$$\begin{aligned} E &= \langle D_s, D_s \rangle \\ &= \langle \hat{C}', \hat{C}' \rangle + 2v(\hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'') + v^2 \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' \rangle \\ &= 4(x(s)x'(s)-y(s)y'(s))^2 + 2v(2x'(s)y''(s)+2x''(s)y'(s) \\ &\quad +8[y''(s)(x^2(s)x'(s)-x(s)y(s)y'(s))-x''(s)(x(s)x'(s)y(s)+y'(s)y^2(s))] \\ &\quad +v^2(4y''(s)^2-4x''(s)^2+16(-x''(s)y(s)+x(s)y''(s))^2) \end{aligned} \tag{4.142}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle D_s, D_v \rangle \\ &= \langle \hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle + v \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle \\ &= 4x'(s)y'(s)(1-2y^2(s)+2x^2(s))-8x(s)y(s)(x'^2(s)+y'^2(s)) \\ &\quad +v(4y'(s)y''(s)-4x''(s)x'(s)+16(x''(s)+y''(s))(x'(s)y^2(s)-x(s)y(s)y'(s))) \end{aligned} \tag{4.143}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle D_v, D_v \rangle \\ &= \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle \\ &= 4(y'^2(s)-x'^2(s))+16(x(s)y'(s)-x'(s)y(s))^2 \\ &= 4(y'^2(s)-x'^2(s))+16\left(\frac{y(s)}{x(s)}\right)'x^2(s) \end{aligned} \tag{4.144}$$

ve

$$\begin{aligned} e &= <D_{ss},\mathcal{U}> \\ &= <\hat{C}'',\mathcal{U}> + v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\ &= 2x(s)x''(s) - 2y(s)y''(s) - 2(x'^2(s) - y'^2(s) + x(s)x''(s) - y(s)y''(s)) \\ &\quad + v(-4(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s)) \end{aligned} \tag{4.145}$$

$$\begin{aligned} f &= <D_{sv},\mathcal{U}> = <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}> = 0 \\ g &= <D_{vv},\mathcal{U}> = 0 \end{aligned}$$

bulunur. (4.142), (4.143), (4.144) ve (4.145) denklemi ve (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.146}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$eG = v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> + <\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \tag{4.147}$$

denklemi bulunur.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ timelike eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q hiperbolik paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q hiperbolik paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.2.1. Üreteç eğrisi timelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> + <\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> = 0 \tag{4.148}$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
&D_s = \hat{C}' + v(\mathcal{U} \times \mathcal{U}'') \\
&D_{sv} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}'' \\
&D_{ss} = \hat{C}'' + v(\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' + \mathcal{U} \times \mathcal{U}''') \\
&D_v = \mathcal{U} \times \mathcal{U}' \\
&D_{vv} = 0
\end{aligned}
\tag{4.149}
$$

bulunur. (2.36) daki denklem kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&E =< D_s, D_s >= v^2 < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'' > + 2v(\hat{C}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'') + < \hat{C}', \hat{C}' > \\
&F =< D_s, D_v >= v < \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \\
&G =< D_v, D_v >=< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' >
\end{aligned}
\tag{4.150}
$$

$$
\begin{aligned}
&e =< D_{ss}, \mathcal{U} >= v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} > \\
&f =< D_{sv}, \mathcal{U} >=< \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \mathcal{U}'' >= 0 \\
&g =< D_{vv}, \mathcal{U} >= 0
\end{aligned}
\tag{4.151}
$$

olur. Bulunan bu denklemler ile (2.37) denklemi ve (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$
H = \frac{eG}{2(EG - F^2)}
\tag{4.152}
$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$
eG = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' >
\tag{4.153}
$$

denklemini bularak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2. Üreteç eğrisi timelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliği kullanılarak, $g = 0$ ve $f = 0$ olduğunda

$$
K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0
\tag{4.154}
$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi timelike olan S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Notasyon (4.3) denklemi ile verilen $\hat{C}(s)=(x(s),y(s),x^2(s)-y^2(s))$ uzay eğrisi ve (4.133) eşitliği kullanılırsa S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s)+v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s)+v(2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)-4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)) \\ &= (\mathrm{x}(s)+2v\mathrm{y}'(s),\mathrm{y}(s)-2v\mathrm{x}'(s),\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s)+4v(\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)-\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s))) \end{aligned} \tag{4.155}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.2.3. Üreteç eğrisi timelike olan çizgi parametreli bir eğri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için, (4.15) denklemleri ve (4.16) denklemlerinden yararlanarak Minkowski-Lorentzian iç (skaler) çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)), \\ &\quad (-2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s))> \\ &= 4\mathrm{y}'^2(s)-4\mathrm{x}'^2(s)+16[\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)]^2 \\ &= 4(\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s))+16[(\frac{\mathrm{x}(s)}{\mathrm{y}(s)})'\mathrm{y}^2(s)]^2 \end{aligned} \tag{4.156}$$

$e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s),\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s)) \\ &\hat{C}'(s)=(\mathrm{x}'(s),\mathrm{y}'(s),2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s)) \\ &\hat{C}''(s)=(\mathrm{x}''(s),\mathrm{y}''(s),2(\mathrm{x}'^2(s)-\mathrm{y}'^2(s)+\mathrm{x}(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))) \end{aligned} \tag{4.157}$$

ve (4.157) denklemlerinden yararlanılırsa

$$
\begin{aligned}
<\hat{C}'',\mathcal{U}> \quad &= \quad <(x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s))),\\
&\qquad (2x(s),-2y(s),-1)> \\
&= \quad 2(y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s))
\end{aligned}
\tag{4.158}
$$

olur. Ayrıca (4.129) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$
\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0 \\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0 \end{vmatrix} = (0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s)) \tag{4.159}
$$

elde edilir. Buradan Minkowski-Lorentzian iç çarpımı yapılırsa

$$
\begin{aligned}
<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \quad &= \quad <(2x(s),-2y(s),-1),\\
&\qquad (0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s))> \\
&= \quad 4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s)) \\
&= \quad 4(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s)
\end{aligned}
\tag{4.160}
$$

bulunur. Ayrıca (4.158) ve (4.160) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
e \quad &= \quad <\hat{C}'',\mathcal{U}> + v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\
&= \quad 2(y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)) + 4v(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s)
\end{aligned}
\tag{4.161}
$$

elde edilir. Ayrıca $f=0$ ve $g=0$ olduğundan ortalama eğrilik

$$
H = \frac{eG}{2(EG-F^2)} \tag{4.162}
$$

şeklinde yazılır. (4.162) ile verilen G nin denkleminden $G \neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$
<\hat{C}'',\mathcal{U}>=0 \text{ ve } <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>=0 \tag{4.163}
$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (4.163) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi timelike olduğundan (4.161) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$
y'^2(s)-x'^2(s) \quad = \quad 0 \tag{4.164}
$$

olamaz. Bu durumda $H=0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s)=(x(s),y(s))$ timelike üreteç eğrileri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.2.4. S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c,k\in\mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel timelike üreteç eğrisi

$$C(s)=(x(s),cx(s)+k) \text{ ve } x'(s)=\text{sabit} \tag{4.165}$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.2.3. ispatı göz önüne alındığında S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s)=(x(s),y(s))$ timelike üreteç eğrisinin bileşenleri $y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $x'(s)=\text{sabit}$ ve (3.28) eşitliğinden

$$\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)' = 0 \tag{4.166}$$

olmalıdır. Buradan (4.166) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)=c$ veya $y'(s)=cx'(s)$ buradan

$$y(s)=cx(s)+k \tag{4.167}$$

eşitliği elde edilir. Burada *c*,*k* bir sabittir.

Örnek 4.2.1. $\forall s\in\mathbb{R}$ için

$$C(s)=(2s-7,3s+4)$$

ile verilen timelike doğruyu alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s)=(2s-7,3s+4,(2s-7)^2-(3s+4)^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

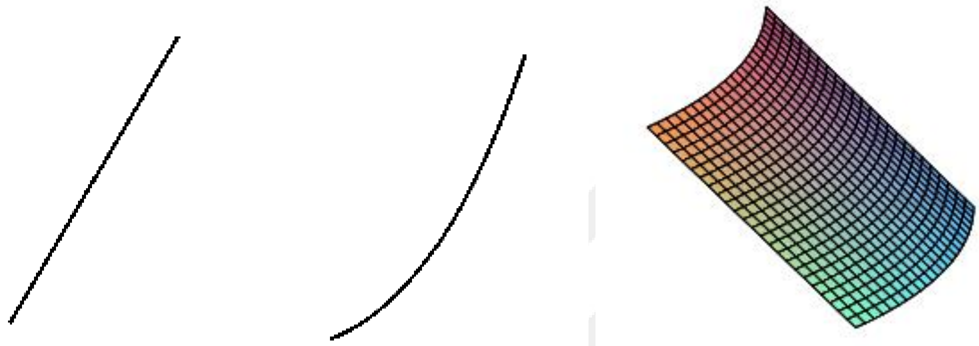
$$D_{C(s)}(s,v)=(2s-6v-7,3s-4v+4,33-5s^2-52s-116v)$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K=0,\ H=-3503760$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ timelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey Şekil 4.4 de görülmektedir.



Şekil 4.4 $C(s)$ timelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey

b) $\forall s\in\mathbb{R}$ için $x(s)>y(s)>0$ olacak şekilde $C(s)=(x(s),y(s))$ regüler (yani $C'(s)\neq 0$) düzlem eğrisi alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$C'(s)=(x'(s),y'(s)) \tag{4.168}$$

olur. Buradan

$$<C'(s),C'(s)>=x'(s)^2-y'(s)^2>0 \tag{4.169}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel spacelike eğridir.

$z=x^2-y^2$ hiperbolik paraboloidi ile $C(s)=(x(s),y(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s)=(x(s),y(s),x^2(s)-y^2(s)) \tag{4.170}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten s ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s)=(x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s)) \tag{4.171}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $x'(s)^2>y'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$<\hat{C}'(s),\hat{C}'(s)> \;=\; x'(s)^2-y'(s)^2+(2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s))^2>0 \tag{4.172}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z = 0 \tag{4.173}$$

$$\nabla f = (2x, -2y, -1) \tag{4.174}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s) = (2x(s), -2y(s), -1) \tag{4.175}$$

yazılır. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}> = (2x(s))^2 - (2y(s))^2 + 1 = 4(x^2(s) - y^2(s)) + 1 \tag{4.176}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}> > 0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike hiperbolik paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s) = (2x'(s), -2y'(s), 0) \tag{4.177}$$

olur. $ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$ metriği ile verilen $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz-Minkowski uzayındaki bir uzay eğrisi $\hat{C}(s) = (x'(s), y'(s), x^2(s) - y^2(s))$ olsun. Buna göre $\hat{C}(s) = (x'(s), y'(s), x^2(s) - y^2(s))$ eğrisinin türevi alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (x'(s), y'(s), 2x(s)x'(s) - 2y(s)y'(s)) \tag{4.178}$$

bulunur. (4.178) denkleminin türevi hesaplanırsa

$$\hat{C}''(s) = (x''(s), y''(s), 2(x'^2(s) - y'^2(s) + x(s)x''(s) - y(s)y''(s))) \tag{4.179}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{U}(s)$ birim olmayan normal vektör alanının 3. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'(s) &= (2x'(s), -2y'(s), 0) \\ \mathcal{U}''(s) &= (2x''(s), -2y''(s), 0) \\ \mathcal{U}'''(s) &= (2x'''(s), -2y'''(s), 0) \end{aligned} \tag{4.180}$$

bulunur. (4.173) ve (4.180) kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkowski-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\end{vmatrix}=(2y'(s),-2x'(s),4x(s)y'(s)-4x'(s)y(s)) \tag{4.181}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0\end{vmatrix}=(2y''(s),-2x''(s),4x''(s)y(s)-4x(s)y''(s)) \tag{4.182}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'''(s) & -2y'''(s) & 0\end{vmatrix}=(2y'''(s),-2x'''(s),-4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s)) \tag{4.183}$$

$$\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0\end{vmatrix}=(0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s)) \tag{4.184}$$

bulunur.

Ayrıca $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin s ile v ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_s &= \hat{C}'+v(\mathcal{U}\times\mathcal{U}'')\\ &= (x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s))\\ &\quad +v(2y''(s),-2x''(s),-4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s)) \end{aligned} \tag{4.185}$$

$$D_v = \mathcal{U}\times\mathcal{U}'=(2y'(s),-2x'(s),4x(s)y'(s)-4x'(s)y(s)) \tag{4.186}$$

$$\begin{aligned} D_{ss} &= \hat{C}''+v(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''+\mathcal{U}\times\mathcal{U}''')\\ &= (x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s)))\\ &\quad +v((0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s))+(2y'''(s),-2x'''(s),-4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s)))\\ &= (x''(s)+2vy'''(s),y''(s)-2vx'''(s),2(x'^2(s)+y'^2(s)+x(s)x''(s)+y(s)y''(s))\\ &\quad -4v(x'''(s)y(s)-x(s)y'''(s)+x''(s)y'(s)-x'(s)y''(s)) \end{aligned} \tag{4.187}$$

$$D_{sv} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}''=(2y''(s),-2x''(s),-4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s)) \tag{4.188}$$

ve

$$D_{vv} = 0 \tag{4.189}$$

elde edilir. (4.185), (4.186), (4.187), (4.188) ve (4.189) denklemleri ile Minkowski-Lorentzian skaler (iç) ve vektörel çarpım kullanılırsa

$$\begin{aligned} E &= <D_s, D_s> \\ &= <\hat{C}', \hat{C}'> + 2v(\hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'') + v^2 <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}''> \\ &= x'^2(s) - y'^2(s) + 4(x(s)y'(s) - y(s)y'(s))^2 + 4v(x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) \\ &\quad +4[y''(s)(x^2(s)x'(s) - x(s)y(s)y'(s)) - x''(s)(x(s)x'(s)y(s) + y'(s)y^2(s))] \\ &\quad + v^2(4y''(s)^2 - 4x''(s)^2 + 16(-x''(s)y(s) + x(s)y''(s))^2) \end{aligned} \tag{4.190}$$

$$\begin{aligned} F &= <D_s, D_v> \\ &= <\hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> + v <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= 4x'(s)y'(s) + 8[x'(s)y'(s)(y^2(s) + x^2(s)) - x(s)y(s)(x'^2(s) + y'^2(s))] \\ &\quad + v(4y'(s)y''(s) - 4x''(s)x'(s) + 16[x'(s)(x''(s)y^2(s) - x(s)y(s)y''(s)) \\ &\quad - y'(s)(x(s)y(s)x''(s) - x^2(s)y''(s))] \end{aligned} \tag{4.191}$$

$$\begin{aligned} G &= <D_v, D_v> \\ &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= 4(x'^2(s) - x'^2(s)) + 16(x(s)y'(s) - x'(s)y(s))^2 \\ &= 4(y'^2(s) - x'^2(s)) + 16\left(\frac{y(s)}{x(s)}\right)' x^2(s) \end{aligned} \tag{4.192}$$

ve

$$\begin{aligned} e &= <D_{ss}, \mathcal{U}> \\ &= <\hat{C}'', \mathcal{U}> + v <\mathcal{U}, \mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\ &= 2(x(s)x''(s) - y(s)y''(s) - x'^2(s) - y'^2(s)) + v\left(-4\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)' x'^2(s)\right) \end{aligned} \tag{4.193}$$

$$\begin{aligned} f &= <D_{sv}, \mathcal{U}> = <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}> = 0 \\ g &= <D_{vv}, \mathcal{U}> = 0 \end{aligned}$$

bulunur. (4.190), (4.191), (4.192) ve (4.193) denklemleri ile $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.194}$$

olacağından

$$eG = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \qquad (4.195)$$

elde edilir.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ spacelike eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır oluğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q hiperbolik paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q hiperbolik paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.2.5. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' >= 0 \qquad (4.196)$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin s ile v ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanır, (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \qquad (4.197)$$

olacağından

$$eG = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \qquad (4.198)$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.6. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliği kullanılırsa, $g = 0$ ve $f = 0$ olduğundan

$$K = (eg - f^2)(EG - F^2)^{-1} = 0 \tag{4.199}$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi spacelike olan S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Notasyon (4.3) ile verilen $\hat{C}(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s), \mathrm{x}^2(s) - \mathrm{y}^2(s))$ uzay eğrisi ve (4.42) eşitliği kullanılırsa S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s) + v(\mathcal{U}(s) \times \mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s) + v(2\mathrm{y}'(s), -2\mathrm{x}'(s), 4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s) - 4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)) \\ &= (\mathrm{x}(s) + 2v\mathrm{y}'(s), \mathrm{y}(s) - 2v\mathrm{x}'(s), \mathrm{x}^2(s) - \mathrm{y}^2(s) + 4v(\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s) - \mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s))) \end{aligned} \tag{4.200}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.2.7. Üreteç eğrisi spacelike olan çizgi parametreli bir eğri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için (4.15) denklemleri ve (4.16) denklemlerinden yararlanarak iç (skaler) çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= \langle \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' \rangle \\ &= \langle (-2\mathrm{y}'(s), -2\mathrm{x}'(s), 4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s) - 4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)), \\ &\quad (-2\mathrm{y}'(s), -2\mathrm{x}'(s), 4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s) - 4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)) \rangle \\ &= 4\mathrm{y}'^2(s) - 4\mathrm{x}'^2(s) + 16[\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s) - \mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)]^2 \\ &= 4(\mathrm{y}'^2(s) - \mathrm{x}'^2(s)) + 16[(\frac{\mathrm{x}(s)}{\mathrm{y}(s)})'\mathrm{y}^2(s)]^2 \end{aligned} \tag{4.201}$$

$e = \langle \hat{C}'', \mathcal{U} \rangle + v \langle \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' \rangle$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s), \mathrm{x}^2(s) - \mathrm{y}^2(s)) \\ &\hat{C}'(s) = (\mathrm{x}'(s), \mathrm{y}'(s), 2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s) - 2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s)) \\ &\hat{C}''(s) = (\mathrm{x}''(s), \mathrm{y}''(s), 2(\mathrm{x}'^2(s) - \mathrm{y}'^2(s) + \mathrm{x}(s)\mathrm{x}''(s) - \mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))) \end{aligned} \tag{4.202}$$

bulunur. (4.202) denklemlerinden yararlanılırsa

$$
\begin{aligned}
<\hat{C}'',\mathcal{U}> &= <(\mathrm{x}''(s),\mathrm{y}''(s),2(\mathrm{x}'^2(s)-\mathrm{y}'^2(s)+\mathrm{x}(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))),\\
&\quad (2\mathrm{x}(s),-2\mathrm{y}(s),-1)> \\
&= 2(\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))
\end{aligned} \tag{4.203}
$$

olur. Ayrıca (4.177) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$
\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2\mathrm{x}'(s) & -2\mathrm{y}'(s) & 0\\ 2\mathrm{x}''(s) & -2\mathrm{y}''(s) & 0\end{vmatrix}=(0,0,4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}''(s)-4\mathrm{x}''(s)\mathrm{y}'(s)) \tag{4.204}
$$

elde edilir. Minkowski-Lorentzian iç çarpımı yapılırsa

$$
\begin{aligned}
<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> &= <(2\mathrm{x}(s),-2\mathrm{y}(s),-1),\\
&\quad (0,0,4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}''(s)-4\mathrm{x}''(s)\mathrm{y}'(s))> \\
&= 4(\mathrm{y}'(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}''(s)) \\
&= 4\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)'\mathrm{x}'^2(s)
\end{aligned} \tag{4.205}
$$

bulunur. Ayrıca (4.203) ve (4.205) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
e &= <\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\
&= 2(\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))+4v\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)'\mathrm{x}'^2(s)
\end{aligned} \tag{4.206}
$$

elde edilir. Ayrıca $f=0$ ve $g=0$ olduğundan ortalama eğrilik

$$
H=\frac{eG}{2(EG-F^2)} \tag{4.207}
$$

şeklinde yazılır. (4.207) ile verilen G nin denkleminden $G\neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$
<\hat{C}'',\mathcal{U}>=0 \text{ ve } <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>=0 \tag{4.208}
$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (3.30) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi spacelike olduğundan (4.27) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$
\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s) = 0 \tag{4.209}
$$

olamaz. Bu durumda $H=0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ spacelike üreteç eğrileri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.2.8. S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c,k\in\mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel spacelike üreteç eğrisi

$$C(s)=(\mathrm{x}(s),c\mathrm{x}(s)+k) \text{ ve } \mathrm{x}'(t)=\text{sabit} \tag{4.210}$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.2.7. ispatı göz önüne alındığında S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ spacelike üreteç eğrisinin bileşenleri $\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $\mathrm{x}'(s)=\text{sabit}$ ve

$$\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)' = 0 \tag{4.211}$$

olmalıdır. Buradan (4.211) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)=c$ veya $\mathrm{y}'(s)=c\mathrm{x}'(s)$ buradan

$$\mathrm{y}(s)=c\mathrm{x}(s)+k \tag{4.212}$$

eşitliği elde edilir. Burada c,k bir sabittir.

Örnek 4.2.2. $\forall s\in\mathbb{R}$ için

$$C(s)=(3s-8,2s+5)$$

ile verilen bir spacelike üreteç eğrisini alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ spacelike yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s)=(3s-8,2s+5,(3s-8)^2-(2s+5)^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

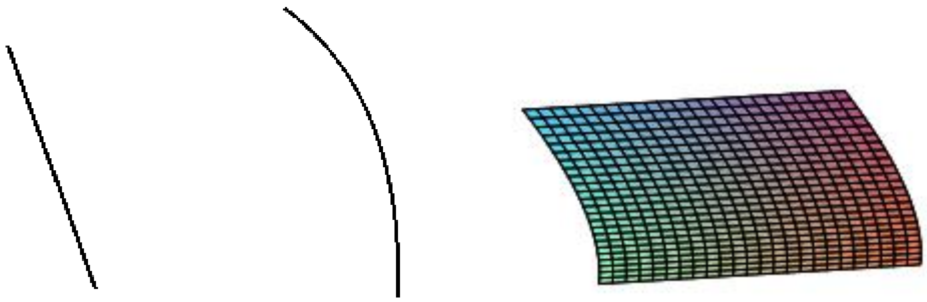
$$D_{C(s)}(s,v)=\hat{C}(s)=(4v+3s-8,2s+5-6v,5s^2-124v-68s+39)$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K=0,\ H=3992560$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ spacelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey Şekil 4.5 deki gibi görülür.



Şekil 4.5 $C(s)$ spacelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit ortalama eğrilikli yüzey

Örnek 4.2.3. Burada aksi bir örnek yapalım. $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$C(s) = (7s^2 - 3, 2s^2 + 1)$$

ile verilen bir spacelike üreteç eğrisini alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s) = (7s^2 - 3, 2s^2 + 1, (7s^2 - 3)^2 - (2s^2 + 1)^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

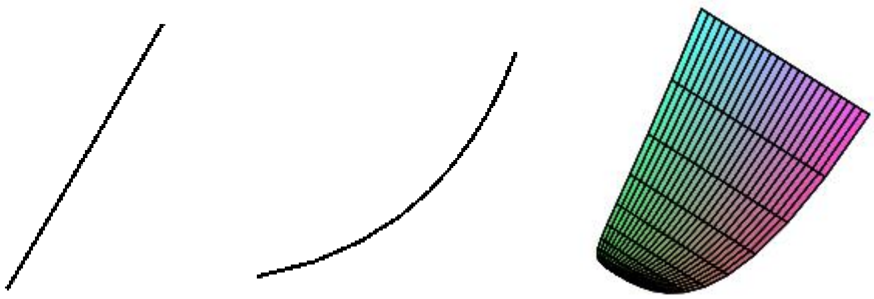
$$D_{C(s)}(s,v) = (7s^2 - 3 - 8sv, 2s^2 + 1 - 28sv, (7s^2 - 3)^2 - (2s^2 + 1)^2 + v(16(7s^2 - 3)s - 56(2s^2 + 1)s))$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K = 0, \; H = 1541053440s^6$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ spacelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit olmayan ortalama eğrilikli yüzey Şekil 4.6 da görülmektedir.



Şekil 4.6 $C(s)$ spacelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit olmayan ortalama eğrilikli yüzey

c) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{x}(s) < \mathrm{y}(s) < 0$ olsun. Buradan

$$< C'(s), C'(s) >= \mathrm{x}'(s)^2 - \mathrm{y}'(s)^2 > 0 \tag{4.213}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel spacelike eğridir. Ayrıca $x'(s)^2 > y'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$<\hat{C}'(s),\hat{C}'(s)> \;=\; x'(s)^2 - y'(s)^2 + (2x(s)x'(s) - 2y(s)y'(s))^2 > 0 \tag{4.214}$$

bulunur. Buradan $\hat{C}(s)$ uzay eğrisi de spacelike eğridir. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}> = (2x(s))^2 - (2y(s))^2 + 1 = 4(x^2(s) - y^2(s)) + 1 \tag{4.215}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}> > 0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s) = (2x'(s), -2y'(s), 0) \tag{4.216}$$

olur. $ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$ metriği ile verilen $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz-Minkowski uzayındaki bir uzay eğrisi $\hat{C}(s) = (x'(s), y'(s), x^2(s) - y^2(s))$ olsun. Buna göre $\hat{C}(s) = (x'(s), y'(s), x^2(s) - y^2(s))$ eğrisinin türevi alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (x'(s), y'(s), 2x(s)x'(s) - 2y(s)y'(s)) \tag{4.217}$$

bulunur. (4.217) denkleminin türevi hesaplanırsa

$$\hat{C}''(s) = (x''(s), y''(s), 2(x'^2(s) - y'^2(s) + x(s)x''(s) - y(s)y''(s))) \tag{4.218}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{U}(s)$ birim olmayan normal vektör alanının 3. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'(s) &= (2x'(s), -2y'(s), 0) \\ \mathcal{U}''(s) &= (2x''(s), -2y''(s), 0) \\ \mathcal{U}'''(s) &= (2x'''(s), -2y'''(s), 0) \end{aligned} \tag{4.219}$$

olur. $\mathcal{U}(s)$ ve (4.219) denklemleri kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkowski-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\end{vmatrix}=(2y'(s),-2x'(s),4x(s)y'(s)-4x'(s)y(s)) \tag{4.220}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0\end{vmatrix}=(2y''(s),-2x''(s),4x''(s)y(s)-4x(s)y''(s)) \tag{4.221}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'''(s) & -2y'''(s) & 0\end{vmatrix}=(2y'''(s),-2x'''(s),-4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s)) \tag{4.222}$$

$$\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s)=-\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0\end{vmatrix}=(0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s)) \tag{4.223}$$

bulunur.

Ayrıca $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_s &= \hat{C}'+v(\mathcal{U}\times\mathcal{U}'')\\ &= (x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s))\\ &\quad +v(2y''(s),-2x''(s),-4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s)) \end{aligned} \tag{4.224}$$

$$D_v = \mathcal{U}\times\mathcal{U}' = (2y'(s),-2x'(s),4x(s)y'(s)-4x'(s)y(s)) \tag{4.225}$$

$$\begin{aligned} D_{ss} &= \hat{C}''+v(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''+\mathcal{U}\times\mathcal{U}''')\\ &= (x''(s),y''(s),2(x'^2(s)-y'^2(s)+x(s)x''(s)-y(s)y''(s)))\\ &\quad +v((0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s))+(2y'''(s),-2x'''(s),\\ &\quad -4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s)))\\ &= (x''(s)+2vy'''(s),y''(s)-2vx'''(s),2(x'^2(s)+y'^2(s)+x(s)x''(s)+y(s)y''(s)))\\ &\quad -4v(x'''(s)y(s)-x(s)y'''(s)+x''(s)y'(s)-x'(s)y''(s)) \end{aligned} \tag{4.226}$$

$$D_{sv} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' = (2y''(s),-2x''(s),-4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s)) \tag{4.227}$$

ve

$$D_{vv}=0 \tag{4.228}$$

elde edilir. (4.224), (4.225), (4.226), (4.227) ve (4.228) denklemleri ile Minkowski-Lorentzian skaler ve vektörel çarpım kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
E &= <D_s, D_s> \\
&= v^2 <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}''> + 2v(\hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'') + <\hat{C}', \hat{C}'> \\
&= x'^2(s) - y'^2(s) + 4(x(s)x'(s) - y(s)y'(s))^2 + 2v(2x'(s)y''(s) + 2x''(s)y'(s) \\
&\quad +8(-x(s)x'(s)x''(s)y(s) - y^2(s)y'(s)x''(s) + x^2(s)x'(s)y''(s) \\
&\quad -x(s)y(s)y'(s)y''(s))) + v^2(4y''(s)^2 - 4x''(s)^2 + 16(-x''(s)y(s) + x(s)y''(s))^2)
\end{aligned}
\tag{4.229}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= <D_s, D_v> \\
&= <\hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> + v <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\
&= 4x'(s)y'(s) + 8[x'(s)y'(s)(y^2(s) + x^2(s)) - x(s)y(s)(x'^2(s) + y'^2(s))] \\
&\quad +v(4y'(s)y''(s) - 4x''(s)x'(s) + 16[x'(s)(x''(s)y^2(s) - x(s)y(s)y''(s)) \\
&\quad - y'(s)(x(s)y(s)x''(s) - x^2(s)y''(s))])
\end{aligned}
\tag{4.230}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= <D_v, D_v> \\
&= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\
&= 4(y'^2(s) - x'^2(s)) + 16(x(s)y'(s) - x'(s)y(s))^2 \\
&= 4(y'^2(s) - x'^2(s)) + 16\left(\frac{y(s)}{x(s)}\right)' x^2(s)
\end{aligned}
\tag{4.231}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
e &= <D_{ss}, \mathcal{U}> \\
&= <\hat{C}'', \mathcal{U}> + v <\mathcal{U}, \mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\
&= 2x(s)x''(s) - 2y(s)y''(s) - 2(x'^2(s) - y'^2(s) + x(s)x''(s) - y(s)y''(s)) \\
&\quad +v\left(-4\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)' x'^2(s)\right)
\end{aligned}
\tag{4.232}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= <D_{sv}, \mathcal{U}> = <\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}> = 0 \\
g &= <D_{vv}, \mathcal{U}> = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.229), (4.230), (4.231) ve (4.232) denklemleri ile $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$
H = \frac{eG}{2(EG - F^2)}
\tag{4.233}
$$

olacağından

$$
eG = v <\mathcal{U}, \mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'> + <\hat{C}'', \mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'>
\tag{4.234}
$$

elde edilir.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ spacelike eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir. Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q hiperbolik paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q hiperbolik paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.2.9. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>+<\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>=0 \qquad (4.235)$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanır, (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H=\frac{eG}{2(EG-F^2)} \qquad (4.236)$$

olacağından

$$eG=v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''><\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'>+<\hat{C}'',\mathcal{U}><\mathcal{U}\times\mathcal{U}'',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \qquad (4.237)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.10. Üreteç eğrisi spacelike olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliği kullanılarak, $g=0$ ve $f=0$ olduğundan

$$K=(eg-f^2)(EG-F^2)^{-1}=0 \qquad (4.238)$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi spacelike olan S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Notasyon (4.3) ile verilen $\hat{C}(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s),\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s))$ uzay eğrisi ve (4.220) eşitliği kullanılırsa S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s)+v(\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s)+v(2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)-4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)) \\ &= (\mathrm{x}(s)+2v\mathrm{y}'(s),\mathrm{y}(s)-2v\mathrm{x}'(s),\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s)+4v(\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)-\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s))) \end{aligned} \tag{4.239}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.2.11. Üreteç eğrisi spacelike olan çizgi parametreli bir eğri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için, (4.15) denklemleri ve (4.16) denklemlerinden yararlanarak iç çarpım ve işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)), \\ &\quad (-2\mathrm{y}'(s),-2\mathrm{x}'(s),4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s))> \\ &= 4\mathrm{y}'^2(s)-4\mathrm{x}'^2(s)+16[\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)-\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s)]^2 \\ &= 4(\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s))+16[(\frac{\mathrm{x}(s)}{\mathrm{y}(s)})'\mathrm{y}^2(s)]^2 \end{aligned} \tag{4.240}$$

$e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s),\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s)) \\ &\hat{C}'(s)=(\mathrm{x}'(s),\mathrm{y}'(s),2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s)) \\ &\hat{C}''(s)=(\mathrm{x}''(s),\mathrm{y}''(s),2(\mathrm{x}'^2(s)-\mathrm{y}'^2(s)+\mathrm{x}(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))) \end{aligned} \tag{4.241}$$

bulunur. (4.241) denklemlerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} <\hat{C}'',N> &= <(\mathrm{x}''(s),\mathrm{y}''(s),2(\mathrm{x}'^2(s)-\mathrm{y}'^2(s)+\mathrm{x}(s)\mathrm{x}''(s)-\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s))), \\ &\quad (2\mathrm{x}(s),-2\mathrm{y}(s),-1)> \\ &= 2(\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)) \end{aligned} \tag{4.242}$$

olur. Ayrıca (4.216) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s) = -\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0 \\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0 \end{vmatrix} = (0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s)) \tag{4.243}$$

elde edilir. Buradan Minkowski-Lorentzian iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> &= <(2x(s),-2y(s),-1), \\ &\quad (0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s))> \\ &= 4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s)) \\ &= 4(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s) \end{aligned} \tag{4.244}$$

bulunur. Ayrıca (4.242) ve (4.244) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e &= <\hat{C}'',\mathcal{U}> + v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> \\ &= 2(y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)) + 4v(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s) \end{aligned} \tag{4.245}$$

elde edilir. Ayrıca $f=0$ ve $g=0$ olduğundan ortalama eğrilik

$$H = \frac{eG}{2(EG-F^2)} \tag{4.246}$$

şeklinde yazılır. (4.246) ile verilen G nin denkleminden $G\neq 0$ olduğu görülür. Öyleyse

$$<\hat{C}'',\mathcal{U}>=0 \text{ ve } <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>=0 \tag{4.247}$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (4.247) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Üreteç eğrisi spacelike olduğundan (4.245) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$y'^2(s)-x'^2(s) = 0 \tag{4.248}$$

olamaz. Bu durumda $H=0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (4.247) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s)=(x(s),y(s))$ spacelike üreteç eğrileri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.2.12. S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c,k\in\mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel spacelike üreteç eğrisi

$$C(s)=(\mathrm{x}(s),c\mathrm{x}(s)+k)\ \text{ ve }\ \mathrm{x}'(s)=\text{sabit} \tag{4.249}$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.2.11. ispatı göz önüne alındığında S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ spacelike üreteç eğrisinin bileşenleri $\mathrm{y}'^2(s)-\mathrm{x}'^2(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $\mathrm{x}'(s)=\text{sabit}$ ve

$$\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)' \quad = \quad 0 \tag{4.250}$$

olmalıdır. Buradan (4.250) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)=c$ veya $\mathrm{y}'(s)=c\mathrm{x}'(s)$ buradan

$$\mathrm{y}(s)=c\mathrm{x}(s)+k \tag{4.251}$$

eşitliği elde edilir. Burada *c,k* bir sabittir.

d) $\forall s\in\mathbb{R}$ için $\mathrm{x}(s)>\mathrm{y}(s)>0$ olacak şekilde $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ regüler (yani $C'(s)\neq 0$) null üreteç eğrisi alınsın. Bu durumda s ye göre türev alınırsa

$$C'(s)=(\mathrm{x}'(s),\mathrm{y}'(s)) \tag{4.252}$$

olur. Buradan

$$<C'(s),C'(s)>=\mathrm{x}'(s)^2-\mathrm{y}'(s)^2=0 \tag{4.253}$$

olduğundan $C(s)$ bir düzlemsel null(lightlike) eğridir.

$\mathrm{z}=\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2$ hiperbolik paraboloidi ile $C(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s))$ eğrisinin yükseltmesiyle oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki

$$\hat{C}(s)=(\mathrm{x}(s),\mathrm{y}(s),\mathrm{x}^2(s)-\mathrm{y}^2(s)) \tag{4.254}$$

uzay eğrisi bir spacelike eğridir. Gerçekten *s* ye göre türev alınırsa

$$\hat{C}'(s)=(\mathrm{x}'(s),\mathrm{y}'(s),2\mathrm{x}(s)\mathrm{x}'(s)-2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}'(s)) \tag{4.255}$$

olur. Minkowski-Lorentz metriği altında incelenir ve $x'(s)^2 > y'(s)^2$ olduğu kullanılırsa

$$<\hat{C}'(s),\hat{C}'(s)> \quad = \quad x'(s)^2 - y'(s)^2 + (2x(s)x'(s) - 2y(s)y'(s))^2 > 0 \tag{4.256}$$

bulunur.

Yüzeyin gradiyent fonksiyonu ile hesaplandığında

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z = 0 \tag{4.257}$$

$$\nabla f = (2x, -2y, -1) \tag{4.258}$$

yüzeyin normalini verir. Yani $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanı

$$\mathcal{U}(s) = (2x(s), -2y(s), -1) \tag{4.259}$$

yazılır. Buna göre Minkowski-Lorentz metriği altında $\mathcal{U}(s)$ normal vektör alanının causal (nedensel) özelliği incelenirse

$$<\mathcal{U},\mathcal{U}> = (2x(s))^2 - (2y(s))^2 + 1 = 4(x^2(s) - y^2(s)) + 1 \tag{4.260}$$

olur. Bu durumda $<\mathcal{U},\mathcal{U}> > 0$ olup $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanıdır.

Bu koşullarda kullanılan Q yükseltme yüzeyi, $\mathcal{U}(s)$ spacelike normal vektör alanı olduğundan timelike hiperbolik paraboloid yüzeydir.

Birim olmayan normal vektör alanı $\mathcal{U}(s)$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathcal{U}'(s) = (2x'(s), -2y'(s), 0) \tag{4.261}$$

olur. $ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$ metriği ile verilen $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz-Minkowski uzayındaki bir uzay eğrisi $\hat{C}(s) = (x'(s), y'(s), x^2(s) - y^2(s))$ olsun. Buna göre $\hat{C}(s) = (x'(s), y'(s), x^2(s) - y^2(s))$ eğrisinin türevi alınırsa

$$\hat{C}'(s) = (x'(s), y'(s), 2x(s)x'(s) - 2y(s)y'(s)) \tag{4.262}$$

bulunur. Üreteç eğrisinin null olduğu kullanılır ve (4.39) denkleminin türevi hesaplanırsa

$$\hat{C}''(s) = (x''(s), y''(s), 2(x(s)x''(s) - y(s)y''(s))) \tag{4.263}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{U}(s)$ birim olmayan normal vektör alanının 3. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{U}'(s) &= (2x'(s),-2y'(s),0)\\ \mathcal{U}''(s) &= (2x''(s),-2y''(s),0)\\ \mathcal{U}'''(s) &= (2x'''(s),-2y'''(s),0)\end{aligned} \tag{4.264}$$

bulunur. (4.257) ve (4.264) kullanılarak Tanım 2.6.1 ile verilen Minkowski-Lorentzian vektörel çarpım yapılırsa

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'(s) = -\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\end{vmatrix} = (2y'(s),-2x'(s),4x(s)y'(s)-4x'(s)y(s)) \tag{4.265}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}''(s) = -\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0\end{vmatrix} = (2y''(s),-2x''(s),4x''(s)y(s)-4x(s)y''(s)) \tag{4.266}$$

$$\mathcal{U}(s)\times\mathcal{U}'''(s) = -\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x(s) & -2y(s) & -1\\ 2x'''(s) & -2y'''(s) & 0\end{vmatrix} = (2y'''(s),-2x'''(s),-4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s)) \tag{4.267}$$

$$\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s) = -\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2 & \xi_3\\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0\\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0\end{vmatrix} = (0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s)) \tag{4.268}$$

bulunur.

Ayrıca $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin s ile v ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}D_s &= \hat{C}'+v(\mathcal{U}\times\mathcal{U}'')\\ &= (x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s))\\ &\quad +v(2y''(s),-2x''(s),-4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s))\\ &= (x'(s)+2vy''(s),x'(s)-2vx''(s),\\ &\quad 2(x(s)x'(s)-y(s)y'(s))-4v(x''(s)y(s)-x(s)y''(s)))\end{aligned} \tag{4.269}$$

$$\begin{aligned}D_v &= \mathcal{U}\times\mathcal{U}'\\ &= (2y'(s),-2x'(s),4(x(s)y'(s)-x'(s)y(s)))\end{aligned} \tag{4.270}$$

elde edilir. (4.262), (4.267) ve (4.268) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_{ss} &= \hat{C}''+v(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''+\mathcal{U}\times\mathcal{U}''') \\ &= (x''(s), y''(s), 2(x(s)x''(s)-y(s)y''(t))) \\ &\quad +v(2y'''(s), -2x'''(s), -4x'''(s)y(s)+4x(s)y'''(s)-4x''(s)y'(s)+4x'(s)y''(s)) \\ &= (x''(s)+2vy'''(s), y''(s)-2vx'''(s), 2(x(s)x''(s)-y(s)y''(s)) \\ &\quad -4v(x'''(s)y(s)-x(s)y'''(s)+x''(s)y'(s)-x'(s)y''(s))) \end{aligned} \tag{4.271}$$

olur. (4.266) eşitliğinden

$$D_{sv} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' = (2y''(s), -2x''(s), -4x''(s)y(s)+4x(s)y''(s)) \tag{4.272}$$

yazılır ve

$$D_{vv} = 0 \tag{4.273}$$

elde edilir. (4.269), (4.270), (4.271), (4.272) ve (4.273) denklemleri ile Minkowski-Lorentzian skaler ve vektörel çarpım kullanılırsa

$$\begin{aligned} E &= \langle D_s, D_s \rangle \\ &= \langle \hat{C}', \hat{C}' \rangle + 2v(\hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'') + v^2 \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}'' \rangle \\ &= 4(x(s)x'(s)-y(s)y'(s))^2 + 2v(2x'(s)y''(s)+2x''(s)y'(s) \\ &\quad +8(x''(s)[-x(s)x'(s)y(s)-y^2(s)y'(s)]-y''(s)[x(s)y(s)y'(s)-x^2(s)x'(s)])) \\ &\quad +v^2(4y''(s)^2-4x''(s)^2+16(-x''(s)y(s)+x(s)y''(s))^2) \end{aligned} \tag{4.274}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle D_s, D_v \rangle \\ &= \langle \hat{C}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle + v \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}'', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle \\ &= 4x'(s)y'(s)+8[-2x(s)x'^2(s)y(s)+x'(s)y'(s)(y^2(s)+x^2(s))] \\ &\quad +4v(y'(s)y''(s)-x''(s)x'(s)+4[x''(s)(x'(s)y^2(s)-x(s)y(s)y'(s)) \\ &\quad +y''(s)(x^2(s)y'(s)-x(s)x'(s)y(s))]) \end{aligned} \tag{4.275}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle D_v, D_v \rangle \\ &= \langle \mathcal{U}\times\mathcal{U}', \mathcal{U}\times\mathcal{U}' \rangle \\ &= 16(x(s)y'(s)-x'(s)y(s))^2 \\ &= 16\left(\frac{y(s)}{x(s)}\right)' x^2(s) \end{aligned} \tag{4.276}$$

ve

$$
\begin{aligned}
e &= <D_{ss}, \mathcal{U}> \\
&= <\hat{C}'', \mathcal{U}> + v <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> \\
&= -4v\left(\left(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)}\right)' \mathrm{x}'^2(s)\right), \qquad (4.277) \\
f &= <D_{sv}, \mathcal{U}> = <\mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U}> = 0, \\
g &= <D_{vv}, \mathcal{U}> = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.274), (4.275), (4.276) ve (4.277) denklemleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$
H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \qquad (4.278)
$$

olacağından

$$
eG = v <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''><\mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'> + <\hat{C}'', \mathcal{U}><\mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'> \qquad (4.279)
$$

elde edilir.

3-boyutlu Minkowski uzayında bir $C(s)$ null(lightlike) eğrisi rasyonel olduğunda yüzey rasyoneldir, Gauss eğriliği $K(s,v)$ sıfır olduğunda ise yüzey açılabilirdir. Ayrıca $H(s,v)$ ortalama eğriliği sıfır ise yüzey minimaldir. $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi, $\hat{C}(s)$ eğrisi boyunca Q hiperbolik paraboloid yüzeyine teğet olduğu için Q hiperbolik paraboloid yüzeyinin normalleştirilmemiş normal vektör alanı ve $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi aynıdır.

Teorem 4.2.13. Üreteç eğrisi null(lightlike) olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin minimal olması için

$$
v <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''><\mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'> + <\hat{C}'', \mathcal{U}><\mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}'> = 0 \qquad (4.280)
$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada $\mathcal{U}$, kuadratik yüzeyin birim olmayan normal vektör alanıdır.

İspat (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin *s* ile *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplanır, (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.281}$$

olacağından

$$eG = v < \mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > + < \hat{C}'', \mathcal{U} >< \mathcal{U} \times \mathcal{U}'', \mathcal{U} \times \mathcal{U}' > \tag{4.282}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.14. Üreteç eğrisi null(lightlike) olan herhangi bir kuadratik yüzeyin teğet düzlemlerinin bir parametreli ailesinin (4.3) denklemi ile verilen $D_{C(s)}(s,v)$ zarf yüzeyi açılabilirdir.

İspat (4.16), (4.17) denklemleri ve (2.37) denklemi ile Gauss eğriliği kullanarak, $g = 0$ ve $f = 0$ olduğunda

$$K = (eg - f^2)(EG - F^2)^{-1} = 0 \tag{4.283}$$

bulunur. O halde üreteç eğrisi null(lightlike) olan S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi açılabilirdir.

Uyarı: $EG - F^2 = 0$ olduğunda Gauss eğriliği hesaplanamaz. Dolayısıyla yüzeyin açılabilirliği hakkında bilgi verilemez.

Notasyon (4.3) ile verilen $\hat{C}(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s), \mathrm{x}^2(s) - \mathrm{y}^2(s))$ uzay eğrisi ve (4.265) eşitliği kullanılırsa S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi

$$\begin{aligned} D_{C(s)}(s,v) &= \hat{C}(s) + v(\mathcal{U}(s) \times \mathcal{U}'(s)) \\ &= \hat{C}(s) + v(2\mathrm{y}'(s), -2\mathrm{x}'(s), 4\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s) - 4\mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s)) \\ &= (\mathrm{x}(s) + 2v\mathrm{y}'(s), \mathrm{y}(s) - 2v\mathrm{x}'(s), \mathrm{x}^2(s) - \mathrm{y}^2(s) + 4v(\mathrm{x}(s)\mathrm{y}'(s) - \mathrm{x}'(s)\mathrm{y}(s))) \end{aligned} \tag{4.284}$$

parametrik denklemi ile ifade edilir.

Teorem 4.2.15. Üreteç eğrisi null(lightlike) olan çizgi parametreli bir eğri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal değildir.

İspat (4.3) denkleminde verilen zarf yüzeyi için (4.15) denklemleri ile (4.16) denklemlerinden yararlanarak yapılan Minkowski-Lorentzian iç çarpım ve işlemler ile

$$\begin{aligned} G &= <\mathcal{U}\times\mathcal{U}',\mathcal{U}\times\mathcal{U}'> \\ &= <(-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s)), \\ &\quad (-2y'(s),-2x'(s),4x'(s)y(s)-4x(s)y'(s))> \\ &= 16[x'(s)y(s)-x(s)y'(s)]^2 \\ &= 16[(\frac{x(s)}{y(s)})'y^2(s)]^2 \end{aligned} \tag{4.285}$$

elde edilir. $e=<\hat{C}'',\mathcal{U}>+v<\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''>$ eşitliğini hesaplamak için öncelikle $\hat{C}(s)$ eğrisi ve bu eğrinin 2. mertebeye kadar türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &\hat{C}(s)=(x(s),y(s),x^2(s)-y^2(s)) \\ &\hat{C}'(s)=(x'(s),y'(s),2x(s)x'(s)-2y(s)y'(s)) \\ &\hat{C}''(s)=(x''(s),y''(s),2(x(s)x''(s)-y(s)y''(s))) \end{aligned} \tag{4.286}$$

bulunur. $C(s)=(x(s),y(s))$ null üreteç eğrisi ile (4.286) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} <\hat{C}'',\mathcal{U}> &= <(x''(s),y''(s),2(x(s)x''(s)-y(s)y''(s))),(2x(s),-2y(s),-1)> \\ &= 2(y'^2(s)-x'^2(s)-2y(s)y''(s)) \\ &= -4y(s)y''(s) \end{aligned} \tag{4.287}$$

olur. Ayrıca (4.261) eşitliği ve türevi kullanılırsa

$$\mathcal{U}'(s)\times\mathcal{U}''(s)=-\begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \xi_3 \\ 2x'(s) & -2y'(s) & 0 \\ 2x''(s) & -2y''(s) & 0 \end{vmatrix}=(0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s)) \tag{4.288}$$

elde edilir. Buradan Minkowski-Lorentzian iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} <\mathcal{U},\mathcal{U}'\times\mathcal{U}''> &= <(2x(s),-2y(s),-1), \\ &\quad (0,0,4x'(s)y''(s)-4x''(s)y'(s))> \\ &= 4(y'(s)x''(s)-x'(s)y''(s)) \\ &= 4(\frac{y'(s)}{x'(s)})'x'^2(s) \end{aligned} \tag{4.289}$$

bulunur. (4.287) ve (4.289) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e &= <\hat{C}'', \mathcal{U}> + v <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> \\ &= -4\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s) + 4v(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)})'\mathrm{x}'^2(s) \end{aligned} \tag{4.290}$$

elde edilir. Diğer taraftan $f = 0$ ve $g = 0$ olduğundan ortalama eğrilik

$$H = \frac{eG}{2(EG - F^2)} \tag{4.291}$$

şeklinde yazılır. (4.291) denklemi göz önüne alınırsa $G \neq 0$ olduğu görülür. Bu durumda

$$<\hat{C}'', \mathcal{U}> = 0 \text{ ve } <\mathcal{U}, \mathcal{U}' \times \mathcal{U}''> = 0 \tag{4.292}$$

olmalıdır. Daha sonra yüzeyin minimal olması için (4.292) denklemleri sağlanacak şekilde çözüm yapılmalıdır. Yani null üreteç eğrisi ve (4.290) diferansiyel denklemi ele alınırsa

$$\mathrm{y}'^2(s) - \mathrm{x}'^2(s) = 0 \tag{4.293}$$

olmasına rağmen ilk kısım sıfır olamaz. Bu durumda $H = 0$ olamayacağından yüzey minimal değildir.

Sonuç (3.30) eşitlikleri sağlanacak şekildeki bileşenleri $\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sıfır yapan $C(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s))$ null(lightlike) üreteç eğrileri için S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi minimal olur.

Teorem 4.2.16. S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyinin sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $c, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir düzlemsel null(lightlike) üreteç eğrisi

$$C(s) = (\mathrm{x}(s), c\mathrm{x}(s) + k) \text{ ve } \mathrm{x}'(s) = \text{sabit} \tag{4.294}$$

olacak şekilde parametrik olarak verilmelidir.

İspat Teorem 4.2.15. ispatı göz önüne alındığında S hiperbolik paraboloid yüzeyinin $\left\{T_{\hat{C}(s)}(S)\right\}$ teğet düzleminin bir parametreli ailesinin zarf yüzeyi sabit ortalama eğrilikli yüzey olması için $C(s) = (\mathrm{x}(s), \mathrm{y}(s))$ null(lightlike) üreteç eğrisinin bileşenleri $\mathrm{y}'^2(s) - \mathrm{x}'^2(s) - 2\mathrm{y}(s)\mathrm{y}''(s)$ ifadesini sabit yapmalı yani $\mathrm{x}'(s) = \text{sabit}$ ve

$$(\frac{\mathrm{y}'(s)}{\mathrm{x}'(s)})' = 0 \tag{4.295}$$

olmalıdır. (4.295) denklemi kullanılırsa $(\frac{y'(s)}{x'(s)})=c$ veya $y'(s)=cx'(s)$ buradan

$$y(s)=cx(s)+k \tag{4.296}$$

eşitliği elde edilir. Burada c,k bir sabittir.

Örnek 4.2.4. $\forall s\in\mathbb{R}$ için

$$C(s)=(5s+4,5s-3)$$

ile verilen bir null(lightlike) üreteç eğrisini alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğrisi

$$\hat{C}(s)=(5s+4,5s-3,(5s+4)^2-(5s-3)^2)$$

olur. Bunun açılabilir yüzeyi

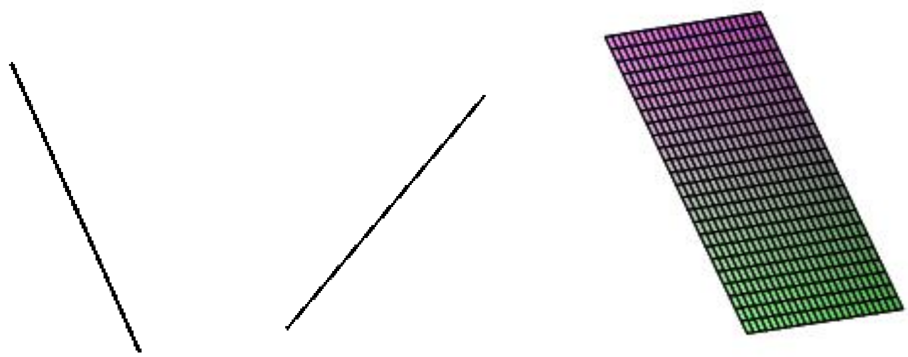
$$D_{C(s)}(s,v)=(5s+4-10v,5s-10v-3,70s+140v+7)$$

olarak parametrelendirilir. Bu yüzeyin *K* Gauss eğriliği ve *H* ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K=0,\ H=0$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ null(lightlike) üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ açılabilir minimal yüzey Şekil 4.7 de görülmektedir.



Şekil 4.7 $C(s)$ null(lightlike) üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ açılabilir minimal yüzey

Bir de açılabilir, minimal ve sabit ortalama eğrilikli olmayan bir zarf yüzeyi örneği verelim.

Örnek 4.2.5. $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$C(s) = (\cosh s, \sinh s)$$

ile verilen bir timelike üreteç eğrisini alalım. Bu durumda $C(s)$ eğrisinin hiperbolik paraboloid ile $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğrisi

$$C(s) = (\cosh s, \sinh s, \cosh s^2 + \sinh s^2)$$

ve bunun açılabilir yüzeyi ise

$$D_{C(s)}(s,v) = (-4\cosh s(2\cosh s^2 + 2v - 3), -4\sinh s(2\cosh s^2 + 2v - 1), 4v - 2)$$

olarak parametrelendirilmiştir. Bu yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K = \frac{64\sinh s^2 \cosh s^2}{16\cosh s^4 - 16\cosh s^2 - 5 - 20v^2 + 20v}$$
$$H = -512\cosh s^4 + 192\cosh s^2 + 640\cosh s^2 v + 240 - 640v + 320v^2$$

olarak hesaplanır.

$C(s)$ timelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit olmayan ortalama eğrilikli yüzey Şekil 4.8 de görülmektedir.

Şekil 4.8 $C(s)$ timelike üreteç eğrisi, $\hat{C}(s)$ yükseltilmiş eğri ve $D_{C(s)}$ sabit olmayan ortalama eğrilikli yüzey

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında paraboloid ve hiperbolik paraboloid ile yükseltilmiş açılabilir yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeyler, öncelikle bir düzlemsel eğri yardımıyla $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = x^2 - y^2$ hiperbolik paraboloidi kullanılarak ifade edilen yükseltme dönüşümü ile 3-boyutlu Öklid uzayına yükseltilmiş bir uzay eğrisi boyunca tanjant düzlemlerin tek parametreli ailesinin zarfı olarak oluşan açılabilir yüzeyler şeklinde verilmiştir. Bu açılabilir yüzeyin, minimal yüzey ve sabit ortalama eğrilikli yüzey olma koşulları incelenmiştir. Sonrasında, Minkowski 3-uzayında timelike, spacelike veya null üreteç eğrileri kullanılarak yükseltme dönüşümü yardımıyla bir paraboloid ve bir hiperbolik paraboloid ile oluşturulan açılabilir yüzeyler için benzer koşullar araştırılmıştır. Ayrıca ifade edilen bu hesaplamaların kullanıldığı bazı örnekler de verilmiştir.

Bu çalışma yardımıyla 4-boyutlu Öklid ve 4-boyutlu Minkowski uzaylarında paraboloid ve hiperbolik paraboloid ile yükseltilmiş açılabilir hiperyüzeyler inşa edilebilir. Ayrıca bu açılabilir hiperyüzeyler için minimal hiperyüzey veya sabit eğrilikli hiperyüzey olma koşulları araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akutagawa, K., ve Nishikawa, S., (1990). The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. *Töhoku Math. J.* 42, 67-82.

Ali, A.T., Aziz, H.S. ve Sorour, A.H., (2013). Ruled surfaces generated by some special curves in Euclidean 3-space. *J. of the Egyp. Math. Soc.* 21, 285-294.

Baky, R.A., (2003). On The Blaschke approach of ruled surface. *Tamkang Journal of Mathematics.* 34(2), 107-116.

Birman, G.S., ve Nomizu, K., (1984). The Gauss–Bonnet theorem for two-dimensional spacetimes. *Mich. Math. J.* 31, 77-81.

Beem, J.K., Ehrlich, P.E., (1981). *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker. Inc., New York, 656.

Blaschke, W., (1949). *Diferensiyel Geometri Dersleri*, İstanbul Üniversitesi, 433.

Boersma, J. ve Molenaar, J., (1995). Geometry of the shoulder of a packaging machine, *SIAM Review*, 37 (3), 406-422.

Choi, J.J., Kim, M.S. ve Elber, G., (1997). Computing Planar Bisector Curves Based on Developable SSI, *Preprint, POSTECH*, Korea.

Çelik, B., (2014). *Maple ve Maple ile Matematik*, Dora Yayıncılık, 728.

Çöken, A. C., Çiftci, Ü. ve Ekici, C., (2008). On parallel timelike ruled surfaces with timelike rulings, *Kuwait Journal of Science & Engineering*, 35 (1), 21-31.

Do Carmo, M.P., (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Clifs, NJ, 503.

Eisenhart, L.P., (1909). *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, Boston, New York, 492.

Ekici, C., (2019). *Diferensiyel Geometri Eğriler ve Yüzeyler Ders Notları*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, ESOGÜ basımevi, 328.

Ferreol, R., (2017). Envelope surface of a family of surfaces, https://www.mathcurve.com/surfaces.gb/enveloppe/enveloppe.shtml

Ferreol, R., (2019). Envelope surface of a family of plane curves, https://www.mathcurve.com/courbes2d/enveloppe/enveloppe.shtml

Frey, W. H. ve Mancewicz, M. J., (1992). *Developable Surfaces: Properties, Representations and Methods of Design*, Technical Report, GM Research Publication GMR- 7637.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gray, A., (1993). *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica*, 2nd Ed., BocaRaton, FL: Crc Press, 664.

Güven, İ., Dede, M. ve Ekici, C., (2020). A study on hyperbolic lifted developable surfaces, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* (Basımda).

Hacısalihoğlu, H. H., (2000). *Diferensiyel Geometri*, Hacısalihoğlu Yayınları, Cilt 1, Cilt 2, 273, 339.

Izumiya, S., Takeuchi, N., (2004). New special curves and developable surfaces, *Turk. J. Math.* 28, 153-163.

Izumiya, S., Takeuchi, N., (2003). Special curves and ruled surfaces, *Contributions to Algebra and Geometry*, 44 (1), 203-212.

Kühnel, W., (1994). Ruled W-surfaces, *Arch. Math.*, 62, 475-480.

Kühnel, W., (2006). *Differential geometry of curves-surfaces-manifolds*. Second Ed. AMS, Providence, 380.

O'Neill, B., (1983). *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New-York, 488.

O'Neill, B., (2006). *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New-York, 520.

Osserman, R., (1986). *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 207.

Öztekin, H., Ergüt, M., (2011). Null Mannheim curves in the Minkowski 3-space E_1^3, *Turkish Journal of Mathematics*, 35, 107-114.

Öztürk, U., Koç Öztürk, E., B. ve İlarslan, K., (2013). On the involute-evolute of the pseudonull curve in Minkowski 3-space, *Journal of Applied Mathematics*, 1-6.

Pegna, J. ve Wolter, E-E., (1992). Geometrical criteria to guarantee curvature continuity of blend surfaces, *ASME Journal of Mechanical Design*, 114, 201-210.

Ravani, B. ve Ku, T.S., (1991). Bertrand offsets of ruled and developable surfaces, *Comp. Aided Geom. Design*, 23(2), 145-152.

Sabuncuoğlu, A., (2010). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık, 515.

Shifrin, T., (2011). *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*. Preliminary Version, University of Georgia, Athens, Georgia, 125.

Turgut, A., (1995). 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 96.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Uras, F., (1992). *Diferensiyel Geometri Dersleri*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayın Komisyonu, 200.

Yu, Y., Liu, H. ve Jung, S.D., (2014). Structure and characterization of ruled surfaces in Euclidean 3-space, *Applied Math. and Comp*., 233, 252-259.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,adı	: Ekici Aybüke
Doğum Tarihi ve yeri	: 26.03.1994 - Odunpazarı/ESKİŞEHİR
e-mail	: aybkekici@gmail.com

Eğitim Bilgileri

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü	2017
Lise	Eskişehir Atatürk Lisesi	2012

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015	Eskişehir Odunpazarı Belediyesi Eskişehir - Türkiye	Bilgi İşlem Stajyeri
2017	Gazi Mustafa Kemal Anadolu Lisesi Eskişehir – Türkiye	Matematik Öğretmeni Stajyeri
2018	Türk Dünyası Bilim Kültür ve Sanat Merkezi Eskişehir – Türkiye	Rehber
2019	Türk Dünyası Bilim Kültür ve Sanat Merkezi Eskişehir – Türkiye	Rehber

Yabancı Dil

06.05.2019 – 14.06.2019 EF Brighton (Education First Brighton) Brighton - İngiltere - İngilizce (B1)

2017 – 2018 Amerikan Kültür - İngilizce (B1) Eskişehir – Türkiye

Yayınlar

Aybüke EKİCİ, Temel ERMİŞ	‘An Apollonius Circle In The Taxicab PlaneGeometry’ 14. Uluslararası GeometriSempozyumu, Pamukkale Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016, Denizli (Özet Bildiri/ Poster)
Temel ERMİŞ, Aybüke EKİCİ, Özcan GELİŞGEN	‘A Taxicab Version of Apollonius’s Circle’ 15. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Amasya Üniversitesi,3-6 Temmuz 2017,Amasya (Özet Bildiri/ Sözlü Sunum)
Temel ERMİŞ, Özcan GELİŞGEN, Aybüke EKİCİ	‘A Taxicab Version of A Triangle’s Apollonius Circle’ Journal Of Mahani Mathematical Research Center Vol. 7, Numbers 1-2 (2018) 25-36.