T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA KİNEMATİK VİDA YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Danışman :
Prof. Dr. Erhan ATA

Hazırlayan :
Sefa KOÇUK

Kütahya – 2021

KABUL VE ONAY

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından

Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi	İmza	
	Kabul	**Red**
Prof. Dr. Erhan ATA (Danışman)		
Prof. Dr. Mine TURAN		
Prof. Dr. Ayşe BAYAR KORKMAZOĞLU		

Onay

İmza

Prof. Dr. Şahmurat ARIK

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım " Minkowski-3 Uzayında Kinematik Vida Yüzeyleri Üzerine" adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamaya kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığımı, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

…../…../2021

İmza

Sefa KOÇUK

ÖZET

MINKOWSKI 3-UZAYINDA KİNEMATİK VİDA YÜZEYLERİ ÜZERİNE

KOÇUK, Sefa
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı 2020
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan ATA
Ocak, 2021, 66 Sayfa

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Minkowski uzayında vida yüzeyleri üzerine araştırma yapmaktır.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın giriş bölümünde, konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde, 3-Boyutlu Öklid uzayında ve 3-Boyutlu Minkowski uzayında tezin devamında kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, 3-Boyutlu Minkowski uzayında yüzeyler ve spacelike veya timelike olma durumuna göre paralel yüzeyler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümünde, bölünmüş (split) kuaterniyonlar, dual bölünmüş (split) kuaterniyonlar ve bölünmüş (split) kuaterniyonlar yardımıyla dönme hareketi ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Beşinci bölümünde, 3-Boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike vida yüzeyleri tanıtılmıştır. Sonrasında yüzeylerin birim normal vektör alanı, temel formları, gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve şekil operatörü matrisi elde edilmiştir. Son olarakta spacelike veya timelike vida yüzeylerine ait birer örnek ile bölüm tamamlanmıştır.

Altıncı bölümünde, yapılanlar özetlenmiş ve konu ile ilgili çalışmak isteyenlere önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-Uzayı, Bölünmüş Kuaterniyon, Paralel Yüzey, Vida Yüzeyi, Şekil Operatörü, Eğrilikler

ABSTRACT

ON KINEMATIC SCREW SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

KOÇUK, Sefa

M.S. Thesis, Department of Mathematics, 2020

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Erhan ATA

January, 2021, 66 Pages

The purpose of this thesis is to research on screw surfaces in 3-dimensional Minkowski space.

In the introduction part of this six-part study, information is given about the historical development of the subject.

In the second part, basic definitions and theorems to be used in the continuation of the thesis are given in 3-Dimensional Euclidean space and 3-Dimensional Minkowski space.

In the third part, definitions and theorems about surfaces in 3-dimensional Minkowski space and parallel surfaces according to their spacelike or timelike are given.

In the fourth chapter, definitions and theorems related to rotational motion with the help of split quaternions, dual split quaternions and split quaternions are given.

In the fifth chapter, spacelike and timelike screw surfaces in 3-dimensional Euclidean space are introduced. Then the unit normal vector field of the surfaces, their basic forms, gaussian curvature, mean curvature and shape operator matrix were obtained. Finally, the section was completed with an example of spacelike or timelike screw surfaces.

In the sixth part, the subject is summarized and suggestions are made to those who want to work on the subject.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-space, Split Quaternion, Parallel Surface, Screw Surface, Shape Operator, Curvatures

TEŞEKKÜR

Çalışmamı hazırlarken kıymetli zamanını bana ayırarak katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Erhan ATA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi desteklerini her an yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Sefa KOÇUK

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
E_1^3	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı
$\wedge_L$	Minkowski Uzayında Vektörel Çarpım
$<\ ,\ >_L$	Minkowski Uzayında Skaler Çarpım
G'	Lie Grubu
H'	Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı
H'_D	Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı
$S(q), S(p), S(r)$	Bölünmüş Kuaterniyonlar
$S(Q), S(P), S(R)$	Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar
$\varphi(u,v)$	Yüzeyin Parametrik İfadesi
E, F, G	Yüzeyin Birinci Temel Form Katsayıları
e, f, g	Yüzeyin İkinci Temel Form Katsayıları
K	Yüzeyin Gauss Eğriliği
H	Yüzeyin Ortalama Eğrilik
$\varphi^r(u,v)$	Paralel Yüzeyin Parametrik İfadesi
E^r, F^r, G^r	Paralel Yüzeyin Birinci Temel Form Katsayıları
e^r, f^r, g^r	Paralel Yüzeyin İkinci Temel Form Katsayıları
K^r	Paralel Yüzeyin Gauss Eğriliği
H^r	Paralel Yüzeyin Ortalama Eğrilik
$\psi(u,v)$	Kinematik Vida Yüzeyinin Parametrik İfadesi
E^v, F^v, G^v	Kinematik Vida Yüzeyinin Birinci Temel Form Katsayıları
e^v, f^v, g^v	Kinematik Vida Yüzeyinin İkinci Temel Form Katsayıları
K^v	Kinematik Vida Yüzeyinin Gauss Eğriliği
H^v	Kinematik Vida Yüzeyinin Ortalama Eğriliği
S^v	Kinematik Vida Yüzeyinin Şekil Operatörü

1. GİRİŞ

Kinematik, cismin uzay-zaman'da kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen hareketin sadece bir nokta veya nokta sistemiyle zamana göre yer değiştirmesinin matematiksel olarak incelendiği bilim alanıdır (Müller, 1963).

Kuaterniyonlar hem teorik hem de uygulamalı matematikte birçok uygulama alanı bulmuştur. İlk olarak Hamilton (1843) tarafından tanımlanan kuaterniyonlar 3-boyutlu uzayda mekaniklere uygulanmıştır. Matematik, fizik, kinematik, dinamik, mühendislik ve daha birçok alanda artan bir şekilde ilgi odağı haline gelmiş ve kendine pek çok uygulama alanları bulmuştur. Reel ve dual kuaterniyonları Hacısalihoğlu (1983) ayrıntılı şekilde incelemiş, dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir.

Inoguchi (1998) 3-Boyutlu Minkowski uzayında bölünmüş (split) kuaterniyonları tanımlamıştır. Kula (2003) doktora tezinde 3-Boyutlu Minkowski uzayında bölünmüş (split) kuaterniyonlar ile dönme matrislerini tanımlamıştır. Kula ve Yaylı (2006) dual bölünmüş (split) kuaterniyonlar ile 3-Boyutlu Minkowski uzayında vida hareketlerini elde etmişlerdir. Özdemir ve Ergin (2006) 3-Boyutlu Minkowski uzayında dönme matrisinin gösterimini birim timelike bölünmüş (split) kuaterniyonlar ile ifade etmişlerdir.

Yüzeyler teorisinde; paralel yüzeyler, sabit sırt uzaklıklı yüzeyler, regle yüzeyler ve minimal yüzeyler gibi bazı özel yüzeyler üzerinde değişik çalışmalar yapılmış, makaleler ve kitaplar yazılmıştır. Einsenhert (1909) kitabında paralel yüzeylerden bahsetmiştir. Ünlütürk ve Özüsağlam (2013) 3-Boyutlu Minkowski uzayında paralel yüzeyleri incelemiştir. Kemer (2015) doktora tezinde kuaterniyonlarla ifade edilen katı cisim hareketinin özel hali olan vida hareketini 3-Boyutlu Öklid uzayında bir yüzeyin noktalarına uygulayarak paralel yüzeyin daha genel hali olan vida yüzeylerini elde etmiştir. Vida yüzeyinin şekil operatörü matrisi, gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tez çalışmamızda sıkça kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. A kümesi boş olmayan bir küme ve V reel sayılar üzerinde tanımlı n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\begin{aligned} f &: A \times A \to V \\ (P,Q) &\to f(P,Q) = \overline{PQ} \end{aligned} \tag{2.1}$$

fonksiyonu

(i) $\forall P,Q,R \in A$

$f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(ii) $\forall P \in A$, $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir $Q \in A$ vardır.

şartlarını sağlıyorsa A 'ya V vektör uzayı ile tanımlı n-boyutlu bir Afin uzay denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı oluyorsa A afin uzayı Öklid uzayı olur.

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayı ile birleşmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayı verilsin. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ve $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ olmak üzere

$$\langle \omega, \upsilon \rangle = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \upsilon_j \tag{2.2}$$

iç çarpım fonksiyonu verildiğinde $\mathbb{R}^3$ afin uzayı bir 3-Boyutlu Öklid uzayını oluşturur. Bu Öklid uzayı kısaca E^3 sembolü ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.2. 2-Boyutlu Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ ve $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2)$ vektörleri için

$$\langle \omega,\upsilon\rangle_L=\omega_1\upsilon_1-\omega_2\upsilon_2 \tag{2.3}$$

Lorentz iç çarpım ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ uzayıdır (Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.2.2. Her $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in L^2$ için

(i) $\langle\omega,\omega\rangle_L>0$ oluyorsa ω ye spacelike vektör

(ii) $\langle\omega,\omega\rangle_L<0$ oluyorsa ω ye timelike vektör

(iii) $\langle\omega,\omega\rangle_L=0$ ve $\omega\neq 0$ oluyorsa ω ye lightlike (null) vektör

olarak adlandırılır (O'Neill,1983; Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.2.3. Her $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in L^2$ için ω vektörünün normu $\|\omega\|=\left|\langle\omega,\omega\rangle_L\right|^{\frac{1}{2}}$ biçiminde ifade edilir (O'Neill,1983; Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.2.4. Her $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in L^2$ için

(i) $\|\omega\|>0$ dır

(ii) ω vektörü timelike ise $\|\omega\|^2=-\langle\omega,\omega\rangle_L$

(iii) ω vektörü spacelike ise $\|\omega\|^2=\langle\omega,\omega\rangle_L$

(iv) $\|\omega\|=0 \Leftrightarrow \omega$ lightlike (null) vektör

şeklinde ifade edilir (O'Neill,1983; Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.2.5. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı ve $\omega,\upsilon\in L^2$ olsun. $\langle\omega,\upsilon\rangle_L=0$ oluyorsa bu durumda ω ve υ Lorentz anlamında diktir denir (Birman ve Nomizu, 1984).

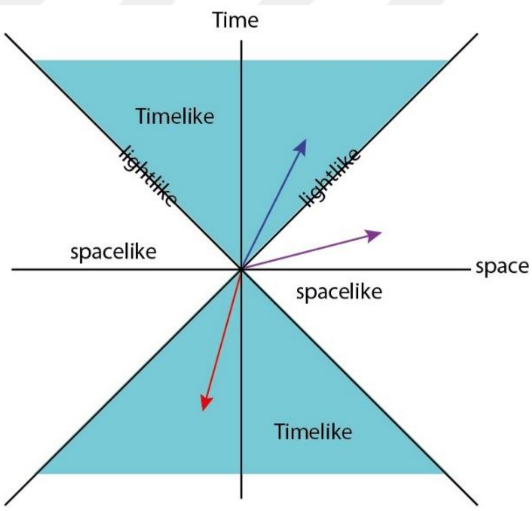
Teorem 2.2.1. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayında spacelike (veya timelike) olan iki vektör birbirine dik olamazlar (Birman ve Nomizu, 1984).

Sonuç 2.2.1. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayında iki vektörün birbirine dik olması için bu vektörlerden birinin spacelike diğerinin timelike olması gerekir (Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.2.6. $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in L^2$ timelike vektör ve için

(i) $\langle \omega, \omega \rangle_L > 0$ ise ω vektörü timelike past-pointing vektördür

(ii) $\langle \omega, \omega \rangle_L < 0$ ise ω vektörü timelike future-pointing vektördür (O'Neill,1983).



Şekil 2.1 2-boyutlu Lorentz uzatında time-koni

2.3. E_1^3 3-boyutlu Minkowski Uzayı

Tanım 2.3.1. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde tanımlı

$$\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R} \tag{2.4}$$

fonksiyonu bilineerlik ve simetri aksiyomlarını sağlıyorsa V vektör uzayın üzerinde simetrik bilineer form olarak adlandırılır (O'Neill,1983).

Tanım 2.3.2. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form $\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall \omega \in V$ için

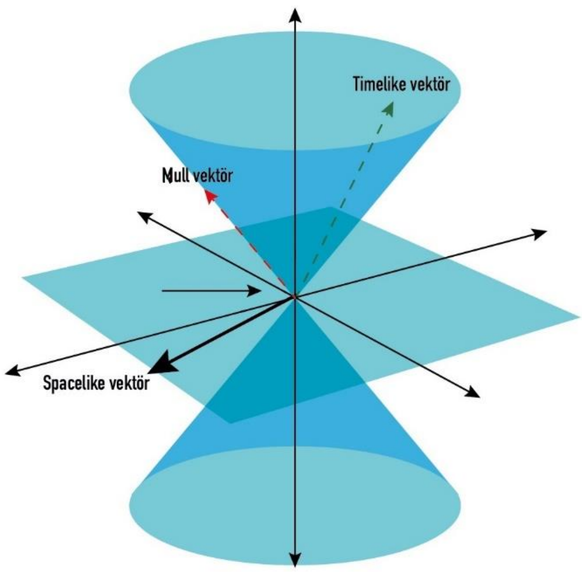
(i) $\omega \neq 0$ için $\langle \omega, \omega \rangle_L < 0$ ($\langle \omega, \omega \rangle_L > 0$) ise negatif (pozitif) tanımlı,

(ii) $\omega \neq 0$ için $\langle \omega, \omega \rangle_L \leq 0$ ($\langle \omega, \omega \rangle_L \geq 0$) ise yarı negatif (yarı pozitif) tanımlı,

(iii) $\forall \upsilon \in V$ için $\langle \omega, \upsilon \rangle_L = 0$ iken $\omega = 0$ ise non-dejenere,

(iv) $\forall \upsilon \in V$ için $\langle \omega, \upsilon \rangle_L = 0$ iken $\omega \neq 0$ ise dejenere denir (O'Neill,1983).

Tanım 2.3.3. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form $\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$ olsun. İndeksi $\langle , \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ negatif tanımlı olacak biçimde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuyla tanımlanır ve v ile gösterilir. $\langle , \rangle_L$ nın indeksi v olmak üzere $0 \leq \langle \omega, \omega \rangle_L \leq boy V$ (O'Neill,1983).



Şekil 2.1 E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında time-koni

Tanım 2.3.4. V skaler çarpım uzayı olsun. v, V nin indeksi olacak şekilde $v = 1$ ve $boy V \geq 2$ oluyorsa Minkowski uzayı veya Lorentz uzayı olarak ifade edilir (O'Neill,1983).

Tanım 2.3.5. V Lorentz uzayı olmak üzere $\forall \omega \in V$ için

(i) $\langle \omega, \omega \rangle_L < 0$ ise timelike (zamansı) vektör,

(ii) $\omega = 0$ veya $\langle \omega, \omega \rangle_L > 0$ ise spacelike (uzaysı) vektör,

(iii) $\langle \omega, \upsilon \rangle_L = 0$, $\omega \neq 0$ ise lightlike (izotropik veya null) vektördür (O'Neill,1983).

Tanım 2.3.6. V Lorentz uzayı verilsin $\forall \omega \in V$ vektörünün normu

$$\|\omega\| = \sqrt{\left|\langle \omega, \omega \rangle_L\right|} \tag{2.5}$$

reel sayısı biçiminde ifade edilir (O'Neill,1983).

Teorem 2.3.1. V Lorentz uzayı ve $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ timelike (zamansı) vektör verilsin. O halde

(i) $\left|\langle \omega, \upsilon \rangle_L\right| \geq \|\omega\| \, \|\upsilon\|$ şeklinde eşitsizlik vardır. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul ω ve υ timelike (zamansı) vektörleri lineer bağımlı olmalıdır.

(ii) ω ve υ timelike (zamansı) vektörleri aynı time-konide ise

$$\langle \omega, \upsilon \rangle_L = -\|\omega\| \|\upsilon\| \cosh \vartheta \tag{2.6}$$

biçiminde bir tek $\vartheta \geq 0$ sayısı mevcuttur. ϑ, ω ve υ timelike (zamansı) vektörleri arasındaki hiperbolik bir açıdır (O'Neill,1983).

(iii) ω ve υ timelike (zamansı) vektörleri aynı time-konide değilse

$$\left|\langle \omega, \upsilon \rangle_L\right| = \|\omega\| \|\upsilon\| \cosh \vartheta \tag{2.7}$$

biçimindedir.

(iv) V Lorentz uzayı ve ω ve υ spacelike (uzaysı) vektörler olsun

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \omega, \upsilon \rangle_L}{\|\omega\| \|\upsilon\|} \tag{2.8}$$

biçiminde bir tek $0 \leq \vartheta \leq \pi$ sayısı mevcuttur. ϑ, ω ve υ spacelike (uzaysı) vektörleri arasındaki bir açıdır. ω ve υ spacelike (uzaysı) vektörleri için

$$\left|\langle \omega, \upsilon \rangle_L\right| \leq \|\omega\| \, \|\upsilon\| \tag{2.9}$$

şeklinde eşitsizlik vardır (O'Neill,1983).

Tanım 2.3.7. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ve $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ iki vektör olacak şekilde

$$(\omega_3\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_3, \omega_1\upsilon_3 - \omega_3\upsilon_1, \omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1) \tag{2.10}$$

vektörü dış çarpım veya vektörel çarpım olarak adlandırılır. $\omega \wedge_L \upsilon$ veya $\omega \times_L \upsilon$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} i = j \Rightarrow 1 \\ i \neq j \Rightarrow 0 \end{cases} \text{ ise } \lambda = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \tag{2.11}$$

olacak şekilde

$$\omega \wedge_L \upsilon = \det \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

veya

$$\omega \wedge_L \upsilon = -\det \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

yardımı ile hesaplanabilir. Burada

$$\lambda_1 \wedge_L \lambda_2 = \lambda_3, \; \lambda_2 \wedge_L \lambda_3 = -\lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 \wedge_L \lambda_1 = -\lambda_2 \tag{2.14}$$

dir. Pozitif yön saat yönünün tersi kabul edilmiştir.

Burada negatif yön olarak saat yönünün tersini alacak olursak

$$\lambda_1 \wedge_L \lambda_2 = -\lambda_3 ,\ \lambda_2 \wedge_L \lambda_3 = \lambda_1 \text{ ve } \lambda_3 \wedge_L \lambda_1 = \lambda_2 \quad (2.15)$$

biçiminde ifade edilir. Ve

$$\omega \wedge_L \upsilon = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

şeklindedir (Turgut, 1995).

Teorem 2.3.2. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ ve $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ olsun. Bu taktirde

(i) $\langle \omega \wedge_L \upsilon, \eta \rangle_L = -\det(\omega, \upsilon, \eta)$

(ii) $(\omega \wedge_L \upsilon) \wedge_L \eta = -\langle \omega, \eta \rangle_L \upsilon + \langle \upsilon, \eta \rangle_L \omega$

(iii) $\langle \omega \wedge_L \upsilon, \omega \rangle_L = 0$ ve $\langle \omega \wedge_L \upsilon, \upsilon \rangle_L = 0$

(iv) $\langle \omega \wedge_L \upsilon, \omega \wedge_L \upsilon \rangle_L = -\langle \omega, \omega \rangle_L \langle \upsilon, \upsilon \rangle_L + \left(\langle \omega, \upsilon \rangle_L \right)^2$

biçimindedir (Turgut, 1995).

Tanım 2.3.8. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ve $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ iki vektör

(i) ω ve υ spacelike vektör olduğunda $\omega \wedge_L \upsilon$ timelike vektördür.

(ii) ω spacelike ve υ timelike vektör olduğunda $\omega \wedge_L \upsilon$ spacelike vektördür.

(iii) ω spacelike ve υ lightlike vektör olduğunda $\langle \omega, \upsilon \rangle_L = 0$ ise $\omega \wedge_L \upsilon$ lightlike vektör, $\langle \omega, \upsilon \rangle_L \neq 0$ ise $\omega \wedge_L \upsilon$ spacelike vektördür.

(iv) ω ve υ lightlike vektör olduğunda $\omega \wedge_L \upsilon$ spacelike vektördür.

(v) ω timelike ve υ lightlike vektör olduğunda $\omega \wedge_L \upsilon$ spacelike vektördür.

(vi) ω ve υ timelike vektör olduğunda $\omega \wedge_L \upsilon$ timelike vektördür (Turgut, 1995).

3. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEYLER

3.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

Tanım 3.1.1. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\bar{M}$ bir yüzey olsun. Her $P \in \bar{M}$ ve her $\omega_p \in T_p\bar{M}$, $\upsilon_p \in T_p\bar{M}$ için

$$\langle \omega_p, \upsilon_p \rangle_L = 0 \Rightarrow \upsilon_p = 0 \tag{3.1}$$

önermesi sağlanıyorsa $\bar{M}$ ye E_1^3 uzayında bir nondejenere yüzey denir (Beem, et al., 1996).

$\bar{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matrisi

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

dir. $\bar{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğinin nondejenere olması için gerek ve yeter koşul

$$\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.3}$$

olmasıdır.

$\bar{M}$ yüzeyinin nondejenere yüzey olması için gerek ve yeter koşul, yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır (Turgut, 1995).

Tanım 3.1.2. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\bar{M}$ bir yüzey olsun. $\bar{M}$ yüzey üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\bar{M}$ ye E_1^3 de bir spacelike yüzey denir (Beem, et al., 1996).

Teorem 3.1.1. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\bar{M}$ bir yüzey olsun. $\bar{M}$ yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul yüzey normalinin timelike bir vektör alanı, yani $\langle N, N \rangle_L < 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Tanım 3.1.3. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\bar{M}$ bir yüzey olsun. $\bar{M}$ yüzey üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\bar{M}$ ye E_1^3 de timelike yüzey denir (Beem, et al., 1996).

Teorem 3.1.2. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında $\bar{M}$ bir yüzey olsun. $\bar{M}$ yüzeyinin timelike bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul yüzey normalinin spacelike bir vektör alanı, yani $\langle N,N\rangle_L > 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Tanım 3.1.4. M , E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey ve bu yüzeyin birim normal vektör alanı N olsun. 3-Boyutlu Minkowski uzayının koneksiyonu D olmak üzere,

$\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S: \ \chi(M) &\to \chi(M) \\ X &\to S(X)=D_X N \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlı, S dönüşümüne M yüzeyinin Weingarten dönüşümü veya M yüzeyi üzerinde şekil operatörü denir (Görgülü ve Çöken, 1994).

Tanım 3.1.5. M , E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı N ve şekil operatörü S olsun. $P \in M$ ve $\varepsilon = \langle N,N\rangle_L = \pm 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K: \ M &\to \mathbb{R} \\ P &\to K(P)=\varepsilon \det S_P \end{aligned} \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. $K(P)$ değerine ise M yüzeyinin P noktasındaki Gauss eğriliği denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.6. M , E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı N ve şekil operatörü S olsun. $P \in M$ ve $\varepsilon = \langle N,N\rangle_L = \pm 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H: \quad M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P)=\frac{\varepsilon}{2} izS_P \end{aligned} \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona M yüzeyinin Ortalama eğrilik fonksiyonu denir. $H(P)$ değerine ise M yüzeyinin P noktasındaki Ortalama eğriliği denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.7. M yüzeyinin parametrik denklemi $X = X(u,v)$ olsun. Her bir noktada teğet düzlemin tabanı $B=\{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$E=\langle X_u, X_u\rangle_L, F=\langle X_u, X_v\rangle_L, G=\langle X_v, X_v\rangle_L \tag{3.7}$$

$E,F,G:U\rightarrow\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları denir. Bu taktirde birinci temel formu

$$I = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2 \tag{3.8}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} e &= -< X_u, N_u >_L = < N, X_{uu} >_L \\ f &= -< X_u, N_v >_L = < N, X_{uv} >_L \\ g &= -< X_v, N_v >_L = < N, X_{vv} >_L \end{aligned} \tag{3.9}$$

$e, f, g:U\rightarrow\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarına ikinci temel formun katsayıları denir. Bu taktirde ikinci temel formu

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \tag{3.10}$$

şeklinde yazabiliriz. $\mathcal{F}_I$ ve $\mathcal{F}_{II}$, 2×2 simetrik matrisleri

$$\mathcal{F}_I=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \mathcal{F}_{II}=\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece M yüzeyinin Ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla,

$$H = \varepsilon \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \tag{3.12}$$

$$K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{3.13}$$

şeklindedir (Lopez, 2008; Pressley, 2010).

Teorem 3.1.8. $\varphi(u,v)$, 3-Boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey ve φ nin birim normal vektör alanı N ve şekil operatörü S olsun. φ ye ait S şekil operatörünün $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ taban cinsinden eşitleri

$$-S(\varphi_u) = N_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2}\varphi_v \tag{3.14}$$

$$-S(\varphi_v) = N_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\varphi_v \tag{3.15}$$

dir (Sodsiri, 2005).

Yardımcı Teorem 3.1.1. 3-Boyutlu Minkowski uzayında M yüzeyi üzerindeki bir P noktasının umbilik nokta olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \tag{3.16}$$

dir (Gray, 1993; Hou ve Ji, 2007).

3.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Paralel Yüzeyler

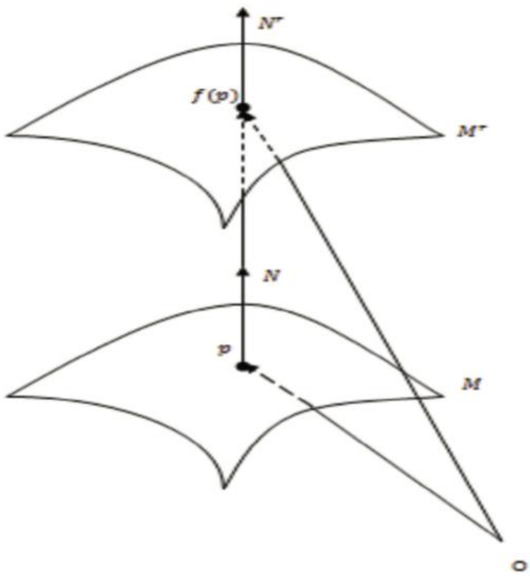
M ve M^r, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında iki yüzey ve x_i fonksiyonları C^∞ sınıfında reel değerli fonksiyonlar ve $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \pm 1$ olacak şekilde bir M yüzeyinin birim normal vektör alanı $N = (x_1, x_2, x_3)$ olsun. r sabit sayı olmak üzere

$$M^r = \{P + rN_P : P \in M\} \tag{3.17}$$

olsun. $P=(P_1,P_2,P_3)\in M$ ise

$$f: M \to M^r,\, f(P)=P+rN_P=(P_1+rx_1(P), P_2+rx_2(P), P_3+rx_3(P)) \tag{3.18}$$

olarak tanımlanan örten f fonksiyonu varsa M^r yüzeyine M nin paralel yüzeyi denir (Ünlütürk, 2011).



Şekil 3.1 3-boyutlu Minkowski Uzayında Paralel Yüzey

3.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike Paralel Yüzeyler

Tanım 3.2.1. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\varphi(u,v)$ spacelike yüzeyinin paraleli olan $\varphi^r(u,v)$ yüzeyi.

$$\varphi^r(u,v)=\varphi(u,v)+rN(u,v) \tag{3.19}$$

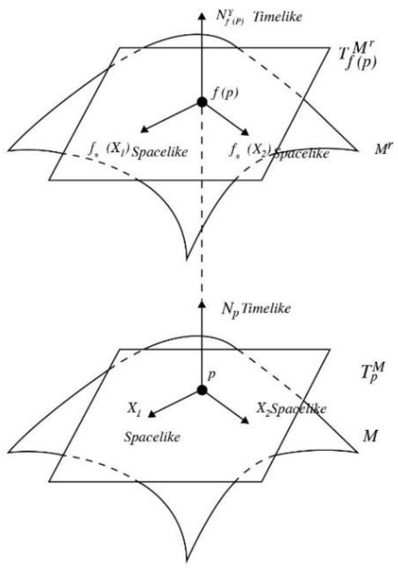
şeklinde tanımlanır. Burada N vektörü $\langle N,N\rangle_L=-1$ olacak şekilde $\varphi(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü ve r ise reel katsayıdır (Ünlütürk, 2011).

Yardımcı Teorem 3.2.1. E_1^3 de M spacelike yüzey ve M^r bu yüzeye paralel yüzey olsun. M yüzeyi spacelike yüzeydir ancak ve ancak M^r spacelike paralel yüzeydir (Ünlütürk, 2011).

Tanım 3.2.2. M ve M^r, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında iki yüzey olsun. M yüzeyi spacelike yüzey ve birim normal N vektör alanı olsun. M den M^r ye

$$\begin{aligned} f : M &\to M^r \\ P \to f(P) &= P + rN_P \end{aligned} \tag{3.20}$$

olacak şekilde örten f fonksiyonu varsa M^r yüzeyine M nin spacelike bir paralel yüzeyi denir (Ünlütürk, 2011).



Şekil 3.2 3-boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike Paralel Yüzey

Tanım 3.2.3. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. M^r nin birim normal vektör alanı N^r ve şekil operatörü S^r olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle_L = -1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K^r : M^r &\to \mathbb{R} \\ f(P) \to K^r(f(P)) &= -\det S^r_{f(P)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona M^r nin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. $K^r(f(P))$ değerine ise M^r nin $f(P)$ noktasındaki Gauss eğriliği denir (Ünlütürk, 2011).

Tanım 3.2.4. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. M^r nin birim normal vektör alanı N^r ve şekil operatörü S^r olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle_L = -1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H^r &: M^r \to \mathbb{R} \\ f(P) &\to H^r(f(P)) = -\frac{1}{2} izS^r_{f(P)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona M^r nin Ortalama eğrilik fonksiyonu denir. $H^r(f(P))$ değerine ise M^r nin $f(P)$ noktasındaki Ortalama eğriliği denir (Ünlütürk, 2011).

Teorem 3.2.1. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. M^r nin birim normal vektör alanı N^r ve şekil operatörü S^r olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle_L = -1$ olmak üzere, M^r paralel yüzeylerine ait I^r ve II^r temel form katsayıları cinsinden Gauss ve Ortalama eğrilikleri

$$K^r = -\frac{e^r g^r - f^{r2}}{E^r G^r - F^{r2}} \tag{3.23}$$

$$H^r = -\frac{e^r G^r - 2 f^r F^r + g^r E^r}{2(E^r G^r - F^{r2})} \tag{3.24}$$

dır (Ünlütürk, 2011).

Teorem 3.2.2. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $P \in M$ noktasında, M yüzeyinin Gauss eğriliği K ve Ortalama eğrilik H, $f(P) \in M^r$ noktasında, M^r paralel yüzeyinin Gauss eğriliği K^r ve Ortalama eğrilik H^r olsun. Bu durumda

$$K^r = \frac{K}{1 - 2rH - r^2 K}, \tag{3.25}$$

$$H^r = \frac{H + rK}{1 - 2rH - r^2K} \tag{3.26}$$

dır (Ünlütürk, 2011).

Teorem 3.2.3. M , E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye ait spacelike paralel yüzey olsun. M spacelike yüzeyi üzerindeki eğrilik çizgilerine, M^r yüzeyi üzerinde karşılık gelen eğriler de eğrilik çizgisidir (Ünlütürk, 2011).

3.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Paralel Yüzeyler

Tanım 3.2.5. E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\varphi(u,v)$ timelike yüzeyinin paraleli olan $\varphi^r(u,v)$ yüzeyi.

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v) \tag{3.27}$$

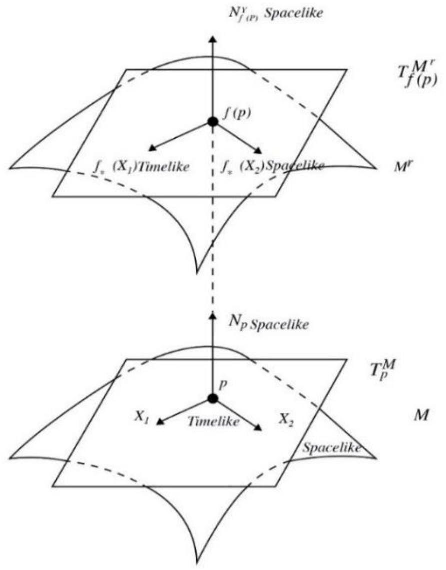
şeklinde tanımlanır. Burada N vektörü $\langle N,N \rangle_L = 1$ olacak şekilde $\varphi(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü ve r ise reel katsayıdır (Ünlütürk, 2011).

Yardımcı Teorem 3.2.2. E_1^3 de M timelike yüzey ve M^r, bu yüzeye paralel yüzey olsun. M yüzeyi timelike yüzeydir ancak ve ancak M^r timelike paralel yüzeydir (Ünlütürk, 2011).

Tanım 3.2.6. M ve M^r, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında iki yüzey olsun. M yüzeyi timelike yüzey ve birim normal N vektör alanı olsun. M den M^r ye

$$\begin{aligned} f : M &\to M^r \\ P &\to f(P) = P + rN_P \end{aligned} \tag{3.28}$$

olacak şekilde örten f fonksiyonu varsa M^r yüzeyine M nin timelike bir paralel yüzeyi denir (Ünlütürk, 2011).



Şekil 3.3 3-boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Paralel Yüzey

Tanım 3.2.7. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. M^r nin birim normal vektör alanı N^r ve şekil operatörü S^r olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle_L = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K^r &: M^r \to \mathbb{R} \\ f(P) &\to K^r(f(P)) = \det S^r_{f(P)} \end{aligned} \tag{3.29}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona M^r nin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. $K^r(f(P))$ değerine ise M^r nin $f(P)$ noktasındaki Gauss eğriliği denir (Ünlütürk, 2011).

Tanım 3.2.8. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. M^r nin birim normal vektör alanı N^r ve şekil operatörü S^r olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle_L = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H^r &: M^r \to \mathbb{R} \\ f(P) &\to H^r(f(P)) = \frac{1}{2} iz S^r_{f(P)} \end{aligned} \tag{3.30}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona M^r nin Ortalama eğrilik fonksiyonu denir. $H^r(f(P))$ değerine ise M^r nin $f(P)$ noktasındaki Ortalama eğriliği denir (Ünlütürk, 2011).

Teorem 3.2.4. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. M^r nin birim normal vektör alanı N^r ve şekil operatörü S^r olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle_L = 1$ olmak üzere, M^r paralel yüzeylerine ait I^r ve II^r temel form katsayıları cinsinden Gauss ve Ortalama eğrilikleri

$$K^r = \frac{e^r g^r - f^{r2}}{E^r G^r - F^{r2}} \tag{3.31}$$

$$H^r = \frac{e^r G^r - 2f^r F^r + g^r E^r}{2(E^r G^r - F^{r2})} \tag{3.32}$$

dır (Ünlütürk, 2011).

Teorem 3.2.5. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $P \in M$ noktasında, M yüzeyinin Gauss eğriliği K ve Ortalama eğrilik H, $f(P) \in M^r$ noktasında, M^r paralel yüzeyinin Gauss eğriliği K^r ve Ortalama eğrilik H^r olsun. Bu durumda

$$K^r = \frac{K}{1 + 2rH + r^2 K} \tag{3.33}$$

$$H^r = \frac{H + rK}{1 + 2rH + r^2 K} \tag{3.34}$$

dır (Ünlütürk, 2011).

Teorem 3.2.6. M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey ve M^r de bu yüzeye ait timelike paralel yüzey olsun. M timelike yüzeyi üzerindeki eğrilik çizgilerine, M^r yüzeyi üzerinde karşılık gelen eğriler de eğrilik çizgisidir (Ünlütürk, 2011).

4. BÖLÜNMÜŞ (SPLİT) KUATERNİYONLAR

4.1. Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar

Tanım 4.1.1. $H' = \left\{ q = a_0 1 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ cümlesini ele alalım. Burada $\left\{ 1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \right\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$
\begin{gathered}
\overrightarrow{e_1}^2 = -1,\ \overrightarrow{e_2}^2 = 1,\ \overrightarrow{e_3}^2 = 1 \\
\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3} \\
\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1}
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

H' nin her bir elemanına bir bölünmüş (split) kuaterniyon olarak adlandırılır (Inoguchi, 1998).

H' de verilen a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q bölünmüş kuaterniyonunun bileşenleri denir. Buna göre bir q split (bölünmüş) kuaterniyonu $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ şeklinde yazılabilir. Bundan sonraki bölümlerde, bir bölünmüş kuaterniyon için $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ gösterimi kullanılacaktır $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu reel vektör uzayının standart dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir.

q bölünmüş kuaterniyonu reel (skaler) ve imajiner (vektörel) olacak biçimde iki kısımdan oluşur.

Reel kısım $S(q) = a_0$ ve vektörel kısım ise $V(q) = a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3} = (a_1, a_2, a_3) \in E_1^3$ dır. Buradan q bölünmüş kuaterniyonu

$$
q = S(q) + V(q) \tag{4.2}
$$

biçiminde de yazılabilir.

Eğer $S(q) = 0$ ise q ya pure split kuaterniyon veya split kuaterniyon vektör adı verilir. Split kuaterniyon vektörlerin kümesi $\operatorname{Im} H' = E_1^3$ olur.

Tanım 4.1.2. Herhangi iki $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} q+p &= (S(q)+S(p)) + (V(q)+V(p)) \\ q+p &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2+b_2)\overrightarrow{e_2} + (a_3+b_3)\overrightarrow{e_3} \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

Tanım 4.1.3. Bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\overrightarrow{e_1} + (\lambda a_2)\overrightarrow{e_2} + (\lambda a_3)\overrightarrow{e_3} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

Tanım 4.1.4. Herhangi iki $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} \times : H' \times H' &\to H' \\ (q,p) &\to q \times p = qp \end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde verilen işlem

$$\begin{aligned} qp &= (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)\overrightarrow{e_1} \\ &+ (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)\overrightarrow{e_2} + (a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2)\overrightarrow{e_3} \\ qp &= S(q)S(p) + \langle V(q), V(p) \rangle_L + S(q)V(p) + S(p)V(q) + V(q) \wedge_L V(p) \end{aligned} \tag{4.6}$$

olarak tanımlanır

Burada

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle_L : \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' &\to \mathbb{R} \\ (V(q), V(p)) &\to \langle V(q), V(p) \rangle_L = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\wedge_L : \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' \to \operatorname{Im} H'$$

$$(V(q), V(p)) \to V(q) \wedge_L V(p) = \begin{bmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$= (a_3 b_2 - a_2 b_3)\overrightarrow{e_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\overrightarrow{e_3}$$

dir (Kula, 2003).

Tanım 4.1.5. $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyon , q nun eşleniği

$$\overline{q} = S(q) - V(q) = a_0 - a_1\overrightarrow{e_1} - a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3} \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre

$$\begin{aligned} I_q &= q\overline{q} = \overline{q}q \\ I_q &= a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur (Kula, 2003).

Tanım 4.1.6. $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu verilsin ve

$$I_q = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

şeklinde tanımlansın

$I_q < 0$ ise q bölünmüş kuaterniyonuna spacelike bölünmüş kuaterniyon,

$I_q > 0$ ise q bölünmüş kuaterniyonuna timelike bölünmüş kuaterniyon,

$I_q = 0$ ise q bölünmüş kuaterniyonuna lightlike bölünmüş kuaterniyon denir (Özdemir ve Ergin, 2005).

Tanım 4.1.8. Bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonunun normu

$$N_q = \sqrt{|q\overline{q}|} = \sqrt{|\overline{q}q|}$$
$$N_q = \sqrt{|a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2|} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $N_q = 1$ ise q bölünmüş kuaterniyonuna birim bölünmüş kuaterniyon denir (Özdemir ve Ergin, 2005).

Tanım 4.1.9. $I_q \neq 0$ olmak üzere $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonun tersi q^{-1} ile gösterilir

$$I_q = q \Rightarrow I_q q^{-1} = (\overline{q}q)q^{-1} \Rightarrow I_q q^{-1} = \overline{q} \Rightarrow q^{-1} = \frac{\overline{q}}{I_q}$$

olduğundan

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{I_q} = \frac{a_0 - a_1\overrightarrow{e_1} - a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3}}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2} \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Ergin, 2005).

Tanım 4.1.10. Skaler kısmı sıfır olan bölünmüş kuaterniyona bölünmüş vektör denir. Herhangi iki $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş vektörlerinin çarpımı

$$\times : H' \times H' \to H'$$
$$qp = V(q) \times V(p) = \langle V(q), V(p)\rangle_L + V(q) \wedge_L V(p) = \langle q, p\rangle_L + q \wedge_L p \tag{4.13}$$

şeklinde bulunur (Kula, 2003)

Tanım 4.1.11. Herhangi bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonunu alalım. Buna göre

(i) Eğer q birim spacelike kuaterniyon ise

$$q = N_q(sinh\theta + C\,cosh\theta) \tag{4.14}$$

formunda yazılabilir. Burada $sinh\theta = \dfrac{a_0}{N_q}$, $cosh\theta = \dfrac{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{N_q}$ ve $C = \dfrac{a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ vektörü E_1^3 uzayında spacelike birim vektördür.

(ii) Eğer q timelike kuaterniyon ve vektör kısmı spacelike ise

$$q = N_q(cosh\theta + C\,sinh\theta) \tag{4.15}$$

formunda yazılabilir. Burada $cosh\theta = \dfrac{|a_0|}{N_q}$, $sinh\theta = \dfrac{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{N_q}$ ve $C = \dfrac{a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ vektörü E_1^3 uzayında spacelike birim vektördür.

(iii) Eğer q timelike kuaterniyon ve vektör kısmı timelike ise

$$q = N_q(cos\theta + C\,sin\theta) \tag{4.16}$$

formunda yazılabilir. Burada $cos\theta = \dfrac{|a_0|}{N_q}$, $sin\theta = \dfrac{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}{N_q}$ ve $C = \dfrac{a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ vektörü E_1^3 uzayında timelike birim vektördür (Özdemir ve Ergin, 2005).

4.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Dönme Hareketi

Birim bölünmüş kuaterniyonun dönme hareketine karşılık geldiği biliniyor. Buna göre birim bölünmüş kuaterniyonun vektör kısmının spacelike veya timelike olmasına göre karşılık gelen dönme hareketinin matrislerle ifadesi veriliyor.

Durum 4.2.1. $q = a_0 + a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \in G'$ ve $\langle V(q), V(q)\rangle_L = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ olsun. $N_q = 1$ ve $V(q)$ spacelike bir vektör olduğundan q yu

$$\begin{aligned} q &= a_0 + \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\frac{a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\ &= \cosh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}C \end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılabiliriz. Burada

$$\begin{aligned}
&\cosh\frac{\theta}{2}=a_0\,,\sinh\frac{\theta}{2}=\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}\\
&c_1=\frac{a_1}{\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\,,c_2=\frac{a_2}{\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\,,c_3=\frac{a_3}{\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\\
&C=c_1\overrightarrow{e_1}+c_2\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3}\\
&\langle C,C\rangle_L=C^2=1
\end{aligned}\tag{4.18}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
Ad_q(C)&=qCq^{-1}\\
&=\left(\cosh\frac{\theta}{2}+\sinh\frac{\theta}{2}C\right)C\left(\cosh\frac{\theta}{2}-\sinh\frac{\theta}{2}C\right)\\
&=\left(\sinh\frac{\theta}{2}+\cosh\frac{\theta}{2}C\right)\left(\cosh\frac{\theta}{2}-\sinh\frac{\theta}{2}C\right)\\
&=\left(\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}-\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+\left(\cosh^2\frac{\theta}{2}-\sinh^2\frac{\theta}{2}\right)C\\
&=C
\end{aligned}\tag{4.19}$$

dir. B ve D, $CB=-BC=D, BD=-DB=C, DC=-CD=-B, B^2=-1, D^2=1$ olacak şekilde iki bölünmüş vektör olsun. Böylece B, C ve D bölünmüş vektörleriyle ortonormal bir baz elde etmiş oluruz. Şimdi Ad_q dönüşümü altında B ve D bölünmüş vektörlerinin görüntülerini bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
Ad_q(B)&=qBq^{-1}\\
&=\left(\cosh\frac{\theta}{2}+\sinh\frac{\theta}{2}C\right)B\left(\cosh\frac{\theta}{2}-\sinh\frac{\theta}{2}C\right)\\
&=\left(\sinh\frac{\theta}{2}D+\cosh\frac{\theta}{2}B\right)\left(\cosh\frac{\theta}{2}-\sinh\frac{\theta}{2}C\right)\\
&=\left(\cosh^2\frac{\theta}{2}+\sinh^2\frac{\theta}{2}\right)B+\left(\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}+\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)D\\
&=\cosh\theta B+\sinh\theta D
\end{aligned}\tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
Ad_q(D) &= qDq^{-1} \\
&= \left(\cosh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}C\right) D \left(\cosh\frac{\theta}{2} - \sinh\frac{\theta}{2}C\right) \\
&= \left(\sinh\frac{\theta}{2}B + \cosh\frac{\theta}{2}D\right)\left(\cosh\frac{\theta}{2} - \sinh\frac{\theta}{2}C\right) \\
&= \left(\cosh^2\frac{\theta}{2} + \sinh^2\frac{\theta}{2}\right)B + \left(\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)D \\
&= \sinh\theta B + \cosh\theta D
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Böylece $q = \cosh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}C$ birim bölünmüş kuaterniyonu ile ifade edilen Ad_q dönüşümü θ açısı kadar C spacelike bölünmüş vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönmedir. Bununla birlikte,

$$
\begin{aligned}
&\left(Ad_qC\right)\left(Ad_qB\right) = -\left(Ad_qB\right)\left(Ad_qC\right) = Ad_qD, \\
&\left(Ad_qB\right)\left(Ad_qD\right) = -\left(Ad_qD\right)\left(Ad_qB\right) = Ad_qC, \\
&\left(Ad_qD\right)\left(Ad_qC\right) = -\left(Ad_qC\right)\left(Ad_qD\right) = -Ad_qB, \\
&\left(Ad_qB\right)^2 = -1, \left(Ad_qC\right)^2 = 1, \left(Ad_qD\right)^2 = 1
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

eşitlikleri sağlandığından Ad_q dönüşümü $\{B, C, D\}$ sistemini $\{Ad_qB, Ad_qC, Ad_qD\}$ sistemine dönüştürür. Bu bağıntılar, verilen açı kadar, verilen eksen etrafında dönme matrisinin elemanlarını elde edebileceğimiz Ad_q ları üretir. Ad_q matrisinde (4.18) eşitliğini kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
&a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 + (-1 + \cosh\theta)\left(c_2^2 + c_3^2\right) \\
&a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = 1 + (-1 + \cosh\theta)\left(-c_1^2 + c_3^2\right) \\
&a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 1 + (-1 + \cosh\theta)\left(-c_1^2 + c_2^2\right) \\
&2\left(a_0a_3 + a_1a_2\right) = \sinh c_3 + (-1 + \cosh\theta)c_1c_2 \\
&2\left(a_0a_3 - a_1a_2\right) = \sinh c_3 - (-1 + \cosh\theta)c_1c_2 \\
&2\left(-a_0a_2 + a_1a_3\right) = -\sinh c_2 + (-1 + \cosh\theta)c_1c_3 \\
&-2\left(a_0a_2 + a_1a_3\right) = -\sinh c_2 - (-1 + \cosh\theta)c_1c_3 \\
&2\left(a_0a_1 - a_2a_3\right) = \sinh c_1 - (-1 + \cosh\theta)c_2c_3 \\
&-2\left(a_0a_1 + a_2a_3\right) = -\sinh c_1 - (-1 + \cosh\theta)c_2c_3
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

bulunur. Burada hiperbolik fonksiyonların $\cosh^2\frac{\theta}{2}+\sinh^2\frac{\theta}{2}=\cosh\theta$, $\cosh^2\frac{\theta}{2}-\sinh^2\frac{\theta}{2}=1$ $\cosh^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cosh\theta}{2}$, $\sinh^2\frac{\theta}{2}=\frac{-1+\cosh\theta}{2}$ ve $\sinh 2\theta=2\sinh\theta\cosh\theta$ eşitlikleri kullanıldı. O halde

$$Ad_q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\sinh\theta\begin{pmatrix}0&c_3&-c_2\\c_3&0&-c_1\\-c_2&c_1&0\end{pmatrix}+(-1+\cosh\theta)\begin{pmatrix}c_2^2+c_3^2&-c_1c_2&-c_1c_3\\c_1c_2&-c_1^2+c_3^2&-c_2c_3\\c_1c_3&-c_2c_3&-c_1^2+c_2^2\end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$Ad_q=I+\sinh\theta C+(-1+\cosh\theta)C^2 \quad (4.25)$$

$$Ad_q=I+\sinh\theta C+2\sinh^2\frac{\theta}{2}C^2 \quad (4.26)$$

$$Ad_q=I+\sinh\theta C+2\left(\sinh\frac{\theta}{2}C\right)^2 \quad (4.27)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada

$$C=\begin{pmatrix}0&c_3&-c_2\\c_3&0&-c_1\\-c_2&c_1&0\end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad (4.28)$$

olmak üzere

$$C^T=-\varepsilon C\varepsilon \quad (4.29)$$

dir. Yani C matrisi Minkowski 3-uzayında antisimetrik bir matristir. Ayrıca $C^{2n-1}=C$ ve $C^{2n}=C^2$ dir. Ad_q dönüşümü altında bir x bölünmüş vektörünün görüntüsü vektörel formda,

$$\begin{aligned}Ad_q x&=x+\sinh\theta\left(C\wedge_L x\right)+(-1+\cosh\theta)\left(C\wedge_L\left(C\wedge_L x\right)\right)\\&=x+\sinh\theta\left(C\wedge_L x\right)+(-1+\cosh\theta)\left(-\langle C,x\rangle_L C+\langle C,C\rangle_L x\right)\\&=(\cosh\theta)x+\sinh\theta\left(C\wedge_L x\right)+(1-\cosh\theta)\langle C,x\rangle_L C\end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde elde edilir. Burada C antisimetrik matrisine Minkowski 3-uzayında karşılık gelen bölünmüş vektör C dir (Kula, 2003).

Durum 4.2.2. $q = a_0 + a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \in G'$ ve $\langle V(q), V(q)\rangle_L = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 0$ olsun. $N_q = 1$ ve $V(q)$ timelike bir vektör olduğundan q yu

$$\begin{aligned} q &= a_0 + \sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}\,\frac{a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} C \end{aligned} \tag{4.31}$$

yazılabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\theta}{2} = a_0, \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \\ &c_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}, c_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}, c_3 = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} \\ &C = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} \\ &\langle C, C\rangle_L = C^2 = -1 \end{aligned} \tag{4.32}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} Ad_q(C) &= qCq^{-1} \\ &= \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} C\right) C \left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} C\right) \\ &= \left(-\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} C\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} C\right) \\ &= \left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) C \\ &= C \end{aligned} \tag{4.33}$$

dir. B ve D, $CB = -BC = D, BD = -DB = -C, DC = -CD = B, B^2 = 1, D^2 = 1$ olacak şekilde iki bölünmüş vektör olsun. Böylece B, C ve D bölünmüş vektörleriyle ortonormal bir baz elde etmiş oluruz. Şimdi Ad_q dönüşümü altında B ve D bölünmüş vektörlerinin görüntülerini bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
Ad_q\left(B\right) &= qBq^{-1} \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}C\right)B\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}C\right) \\
&= \left(\sin\frac{\theta}{2}D+\cos\frac{\theta}{2}B\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}C\right) \\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)B+\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)D \\
&= \cos\theta B+\sin\theta D
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
Ad_q\left(D\right) &= qDq^{-1} \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}C\right)D\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}C\right) \\
&= \left(-\sin\frac{\theta}{2}B+\cos\frac{\theta}{2}D\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}C\right) \\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)D-\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)D \\
&= -\sin\theta B+\cos\theta D
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Böylece $q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}C$ birim bölünmüş kuaterniyonu ile ifade edilen Ad_q dönüşümü θ açısı kadar C timelike bölünmüş vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönmedir. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}
&\left(Ad_qC\right)\left(Ad_qB\right)=-\left(Ad_qB\right)\left(Ad_qC\right)=Ad_qD, \\
&\left(Ad_qB\right)\left(Ad_qD\right)=-\left(Ad_qD\right)\left(Ad_qB\right)=-Ad_qC, \\
&\left(Ad_qD\right)\left(Ad_qC\right)=-\left(Ad_qC\right)\left(Ad_qD\right)=Ad_qB, \\
&\left(Ad_qB\right)^2=1,\ \left(Ad_qC\right)^2=-1,\ \left(Ad_qD\right)^2=1
\end{aligned} \tag{4.36}$$

eşitlikleri sağlandığından Ad_q dönüşümü $\{B,C,D\}$ sistemini $\{Ad_qB, Ad_qC, Ad_qD\}$ sistemine dönüştürür. Üstelik $Ad:q\rightarrow Ad_q$ dönüşümü birebir değildir. q ve $-q$ bölünmüş kuaterniyonlarına aynı dönme karşılık gelir. Bu bağıntılar, verilen bir açı kadar, verilen eksen etrafında dönme matrisinin elemanlarını elde edebileceğimiz Ad_q ları üretir. Ad_q matrisinde (4.32) eşitliğini kullanırsak,

$$Ad_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} c_2^2 + c_3^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ c_1c_2 & -c_1^2 + c_3^2 & -c_2c_3 \\ c_1c_3 & -c_2c_3 & -c_1^2 + c_2^2 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

$$Ad_q = I + \sin\theta C + (1-\cos\theta)C^2 \tag{4.38}$$

$$Ad_q = I + \sin\theta C + 2\sin^2\frac{\theta}{2}C^2 \tag{4.39}$$

$$Ad_q = I + \sin\theta C + 2\left(\sin\frac{\theta}{2}C\right)^2 \tag{4.40}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $C^{2n-1} = (-1)^{n+1} C$ ve $C^{2n} = (-1)^{n+1} C^2$ dir. Ad_q dönüşümü altında bir x bölünmüş vektörünün görüntüsü vektörel formda,

$$\begin{aligned} Ad_q x &= x + \sin\theta\left(C \wedge_L x\right) + (1-\cos\theta)\left(C \wedge_L \left(C \wedge_L x\right)\right) \\ &= x + \sin\theta\left(C \wedge_L x\right) + (1-\cos\theta)\left(-\langle C, x\rangle_L C + \langle C, C\rangle_L x\right) \\ &= (\cos\theta)x + \sin\theta\left(C \wedge_L x\right) - (1-\cos\theta)\langle C, x\rangle_L C \end{aligned} \tag{4.41}$$

şeklinde elde edilir. Burada C antisimetrik matrisine Minkowski 3-uzayında karşılık gelen bölünmüş vektör C dir (Kula, 2003).

4.3. Dual Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar

Tanım 4.3.1. Bir A dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ ifade edilir. Burada a ve a^* reel sayılar ve ε bir reel sayı olmayıp

$$\varepsilon \neq 0, 0\varepsilon = \varepsilon 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1, \varepsilon^2 = 0$$

kuralları ile belirlidir. Dual sayılar halkası $\mathbb{D}$ ile gösterilecektir.

$$H'_D = \left\{ Q = A_0 1 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3} \mid A_0, A_1, A_2, A_3 \in D \right\} \tag{4.42}$$

kümesini tanımyalım. Burada $\{1,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ birimlerinin çarpımı (4.1) deki özellikleri sağlar.

H'_D her bir elemanına bölünmüş bir dual bölünmüş kuaterniyon denir. Burada A_0, A_1, A_2, A_3 dual sayılarına Q dual bölünmüş kuaterniyonlarının bileşenleri denir.

$q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $q^* = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlar olmak üzere

$Q = q + \varepsilon q^* = \left(a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\right) + \varepsilon\left(b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}\right)$ olarak verilebilir. Q bölünmüş kuaterniyonu skaler (reel) ve vektörel (imajiner) olacak şekilde iki kısımdan oluşur. Reel kısım $S(Q) = A_0$ ve vektörel kısım ise $V(Q) = A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ dır. Buradan Q bölünmüş kuaterniyonu

$$Q = S(Q) + V(Q) \tag{4.43}$$

biçiminde de yazılabilir (Kula, 2003).

Tanım 4.3.2. Herhangi iki $Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ ve $P = B_0 + B_1\overrightarrow{e_1} + B_2\overrightarrow{e_2} + B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonların toplamı

$$\begin{aligned} Q + P &= (S(Q) + S(P)) + (V(Q) + V(P)) \\ &= (A_0 + B_0) + (A_1 + B_1)\overrightarrow{e_1} + (A_2 + B_2)\overrightarrow{e_2} + (A_3 + B_3)\overrightarrow{e_3} \end{aligned} \tag{4.44}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

Tanım 4.3.3. Bir $Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda Q = Q\lambda = (\lambda A_0) + (\lambda A_1)\overrightarrow{e_1} + (\lambda A_2)\overrightarrow{e_2} + (\lambda A_3)\overrightarrow{e_3} \tag{4.45}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

Tanım 4.3.4. Herhangi iki $Q = A_0 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$ ve $P = B_0 + B_1\vec{e_1} + B_2\vec{e_2} + B_3\vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times : H'_D \times H'_D &\to H'_D \\ (Q,P) &\to Q \times P = QP \end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklinde verilen işlem

$$\begin{aligned} QP &= (A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + (A_1B_0 + A_0B_1 - A_2B_3 + A_3B_2)\vec{e_1} \\ &+ (A_0B_2 + A_2B_0 - A_1B_3 + A_3B_1)\vec{e_2} + (A_0B_3 + A_3B_0 - A_2B_1 + A_1B_2)\vec{e_3} \\ &= qp + \varepsilon(qp^* + q^* p) \end{aligned} \tag{4.47}$$

veya

$$QP = S(Q)S(P) + < V(Q), V(P) >_L + S(Q)V(P) + S(P)V(Q) + V(Q) \wedge_L V(P) \tag{4.48}$$

olarak tanımlanır.

Burada

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_L : \operatorname{Im} H'_D \times \operatorname{Im} H'_D &\to D \\ (V(Q), V(P)) \to \langle V(Q), V(P) \rangle_L &= \langle V(P), V(Q) \rangle_L - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \end{aligned} \tag{4.49}$$

ve

$$\begin{aligned} \wedge_L : \operatorname{Im} H'_D \times \operatorname{Im} H'_D &\to \operatorname{Im} H'_D \\ (V(Q), V(P)) \to V(Q) \wedge_L V(P) &= \begin{bmatrix} -\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \\ &= (A_3B_2 - A_2B_3)\vec{e_1} + (A_3B_1 - A_1B_3)\vec{e_2} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{e_3} \end{aligned} \tag{4.50}$$

dir (Kula, 2003).

Tanım 4.3.5. $Q = q + \varepsilon q^* = S(Q) + V(Q) = A_0 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu olmak üzere, Q nun eşleniği

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= S(Q) - V(Q) = A_0 - A_1\vec{e_1} - A_2\vec{e_2} - A_3\vec{e_3} \\ &= \bar{q} + \varepsilon\overline{q^*}\ ;\ q, q^* \in H\end{aligned} \tag{4.51}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

Tanım 4.3.6. Bir $Q = A_0 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned}N_Q &= \sqrt{\left|Q\bar{Q}\right|} = \sqrt{\left|\bar{Q}Q\right|} \\ N_Q &= \sqrt{\left|A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2\right|} \\ &= \sqrt{\left|(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + 2\varepsilon(a_0a_0^* + a_1a_1^* - a_2a_2^* - a_3a_3^*)\right|} \\ &= \sqrt{\left|q\bar{q} + 2\varepsilon(q\overline{q^*} + q^*\bar{q})\right|} \\ &= \sqrt{\left|N_q - 2\varepsilon\langle q, q^*\rangle_L\right|} = \sqrt{\left|-\langle q, q\rangle_L - 2\varepsilon\langle q, q^*\rangle_L\right|}\end{aligned} \tag{4.52}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A_0 = a_0 + \varepsilon a_0$, $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1$, $A_2 = a_2 + \varepsilon a_2$, $A_3 = a_3 + \varepsilon a_3$ dır. Eğer $N_Q = 1$ ise Q bölünmüş kuaterniyonuna birim bölünmüş kuaterniyon denir. Q birim bölünmüş kuaterniyonu için $\left\langle q, q^*\right\rangle_L = 0$ olmalıdır (Kula, 2003).

Tanım 4.3.7. $\left(N_Q\right)^2 \neq 0$ olmak üzere $Q = A_0 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonun tersi Q^{-1} ile gösterilir ve

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{I_Q} = \frac{A_0 - A_1\vec{e_1} - A_2\vec{e_2} - A_3\vec{e_3}}{A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2} = q^{-1} - \varepsilon(q^{-1}q^*q^{-1}),\ N_Q \neq 0 \tag{4.53}$$

şeklinde tanımlanır (Kula, 2003).

Tanım 4.3.8. Skaler kısmı sıfır olan bölünmüş kuaterniyona bölünmüş vektör denir. Q ve P dual bölünmüş vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}&\wedge_L : \operatorname{Im} H'_D \times \operatorname{Im} H'_D \to \operatorname{Im} H'_D \\ &\qquad (V(Q), V(P)) \to V(Q) \wedge_L V(P) = \frac{1}{2}(QP - PQ)\end{aligned} \tag{4.54}$$

olarak bulunur (Kula, 2003).

Tanım 4.3.9. Herhangi iki $Q = S(Q) + V(Q) = A_0 1 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$ ve $P = S(P) + V(P) = B_0 1 + B_1\vec{e_1} + B_2\vec{e_2} + B_3\vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyon vektörlerin skaler çarpımı

$$
\begin{aligned}
\langle V(Q), V(P)\rangle &= -A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{Q}P - \bar{P}Q) \qquad (4.55) \\
&= \langle q, p\rangle_L + \varepsilon(\langle q, p^*\rangle_L + \langle q^*, p\rangle_L)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur (Kula, 2003).

Bir $Q = \bar{q} + \varepsilon\overline{q^*}$; $q, q^* \in H$ dual bölünmüş kuaterniyonu için $q = S(q) + V(q)$, $q^* = S(q^*) + V(q^*)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&Q = (S(q) + V(q)) + \varepsilon(S(q^*) + V(q^*)) \\
&Q = (S(q) + \varepsilon S(q^*)) + (V(q) + \varepsilon V(q^*)) \qquad (4.56) \\
&Q = S(Q) + V(Q);\ S(Q) = S(q) + \varepsilon S(q^*),\ V(Q) = V(q) + \varepsilon V(q^*)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buna göre

(i) Eğer $V(q)$ spacelike vektör ise $V(Q)$ dual bölünmüş kuaterniyon vektörü spacelikedır.

(ii) Eğer $V(q)$ timelike vektör ise $V(Q)$ dual bölünmüş kuaterniyon vektörü timelikedır.

(iii) Eğer $V(q)$ null (lightlike) vektör ise $V(Q)$ dual bölünmüş kuaterniyon vektörü null (lightlike) dır.

Herhangi bir $Q = \bar{q} + \varepsilon\overline{q^*} = (q, q^*)$; $q, q^* \in H$ dual bölünmüş kuaterniyonunun sınıflandırılması genel bir kural olarak ilk bileşen olan q ya göre yapılır.

Eğer q spacelike, timelike ve null (lightlike) bölünmüş kuaterniyon ise sırasıyla Q spacelike, timelike veya null (lightlike) dual bölünmüş kuaterniyon olur.

5. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA KİNEMATİK VİDA YÜZEYLERİ

5.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike Kinematik Vida Yüzeyleri

M ve M^{v}, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike yüzeyler ve $p \in M$ olsun. $v = (v_x, v_y, v_z)$ timelike birim vektörü etrafında θ açılık bir dönme

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(v_x \vec{e_1} + v_y \vec{e_2} + v_z \vec{e_3}) \tag{5.1}$$

timelike kuaterniyonu ve E_1^3 uzayında bir $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ öteleme vektörü için

$$\begin{aligned} f : M &\to M^{v} \\ p \to f(p) &= qp\bar{q} + \vec{t} \end{aligned} \tag{5.2}$$

biçiminde verilen M spacelike yüzeyindeki noktaları katı cisim hareketi, dönme ve öteleme ile M^{v} spacelike yüzeyine taşınabilir.

Eğer katı cisim hareketinde dönme ekseni yüzeyin timelike birim normal vektörü $\vec{N}$ ve öteleme vektörü de $\lambda\vec{N}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) alınırsa vida hareketine dönüşür. Böylece vida hareketi ile elde edilen M^{v} spacelike yüzeyine spacelike kinematik vida yüzeyi adı veriliyor.

Tanım 5.1.1. M ve M^{v}, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike iki yüzey ve $p \in M$ olsun. $\vec{N}$ timelike birim normal vektör alanı etrafında θ açılık dönme

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{N} \tag{5.3}$$

timelike kuaterniyonu ve E_1^3 uzayında bir öteleme vektörü $\lambda\vec{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : M &\to M^{v} \\ p \to f(p) &= qp\bar{q} + \lambda\vec{N} \end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde f fonksiyonu tanımlı ise M^v yüzeyine M yüzeyinin spacelike kinematik vida yüzeyi denir.

Buna göre spacelike kinematik vida yüzeyi fonksiyonu

$$f(p)=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)p\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)+\lambda\vec{N} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} f(p)=&\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\langle\vec{N},p\rangle_L+\left\langle\cos\frac{\theta}{2}p+\sin\frac{\theta}{2}\left(\vec{N}\wedge_L p\right)-\sin\frac{\theta}{2}\vec{N}\right\rangle_L \\ &+\left(\sin\frac{\theta}{2}\langle\vec{N},p\rangle_L\right)\left(-\sin\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)+\left(\cos\frac{\theta}{2}p+\sin\frac{\theta}{2}\left(\vec{N}p\right)\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &+\left(\cos\frac{\theta}{2}p+\sin\frac{\theta}{2}\left(\vec{N}\wedge_L p\right)\right)\wedge_L\left(-\sin\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)+\lambda\vec{N}\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} &=\cos\theta p+\sin\theta\left(\vec{N}\wedge_L p\right)+(-1+\cos\theta)\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L\vec{N}+\lambda\vec{N} \\ &=p+\sin\theta\left(\vec{N}\wedge_L p\right)+(1-\cos\theta)\left(-p-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L\vec{N}\right)+\lambda\vec{N}\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} =(&p_1+\sin\theta n_3p_2-\sin\theta n_2p_3+(1-\cos\theta)\left(-p_1-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L n_1\right)+\lambda n_1, \\ &p_2+\sin\theta n_3p_1-\sin\theta n_1p_3+(1-\cos\theta)\left(-p_2-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L n_2\right)+\lambda n_2, \\ &p_3+\sin\theta n_1p_2-\sin\theta n_2p_1+(1-\cos\theta)\left(-p_3-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L n_3\right)+\lambda n_3)\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} f(p)=&\begin{pmatrix} 1+(1-\cos\theta)(n_2^2+n_3^2) & \sin\theta n_3-(1-\cos\theta)(n_1n_2) & -\sin\theta n_2-(1-\cos\theta)(n_1n_3) \\ \sin\theta n_3+(1-\cos\theta)(n_1n_2) & 1+(1-\cos\theta)(-n_1^2+n_3^2) & -\sin\theta n_1-(1-\cos\theta)(n_2n_3) \\ -\sin\theta n_2+(1-\cos\theta)(n_1n_3) & \sin\theta n_1-(1-\cos\theta)(n_2n_3) & 1+(1-\cos\theta)(-n_1^2+n_2^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} \\ &+\lambda\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\sin\theta\begin{pmatrix}0&n_3&-n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}+(1-\cos\theta)\begin{pmatrix}n_2^2+n_3^2&-n_1n_2&-n_1n_3\\n_1n_2&-n_1^2+n_3^2&-n_2n_3\\n_1n_3&-n_2n_3&-n_1^2+n_2^2\end{pmatrix} \tag{5.9}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

S, $\overrightarrow{N}$ timelike birim normal vektörüne (dönme ekseni) karşılık gelen anti-simetrik matris

$$S^2 = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_1^2 + n_3^2 & -n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & -n_2 n_3 & -n_1^2 + n_2^2 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

(5.10) , (5.11) ve (5.12) eşitlikleri yardımıyla

$$R = I_3 + \sin\theta S + (1 - \cos\theta) S^2 \tag{5.13}$$

alırsak f fonksiyonu

$$f(p) = Rp + \lambda \overrightarrow{N} \tag{5.14}$$

biçiminde ifade edilebilir.

M spacelike yüzeyinin bir parametrizasyonu (φ, U) olmak üzere

$$\varphi : U \to M$$
$$(u,v) \to \varphi(u,v) = p$$

olsun. Buna göre M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin bir parametrik ifadesi

$$\psi(u,v) = R\varphi(u,v) + \lambda N(u,v)$$

verilebilir. Burada R matrisi $\overrightarrow{N}$ timelike birim normal vektörü etrafında θ açılık bir dönme matrisidir. (5.13) deki eşitlik R yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\psi(u,v) &= (I_3 + \sin\theta S + (1-\cos\theta)S^2)\varphi(u,v) + \lambda N(u,v) \\ &= I_3\varphi(u,v) + \sin\theta S\varphi(u,v) + (1-\cos\theta)S^2\varphi(u,v) + \lambda N(u,v)\end{aligned} \tag{5.15}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\delta(u,v) &= I_3\varphi(u,v) + \lambda N(u,v) = \left(a(u,v), b(u,v), c(u,v)\right) \\ \tau(u,v) &= S\varphi(u,v) = \left(d(u,v), h(u,v), j(u,v)\right) \\ \zeta(u,v) &= S^2\varphi(u,v) = \left(k(u,v), m(u,v), o(u,v)\right)\end{aligned} \tag{5.16}$$

olmak üzere

$$\psi(u,v) = \delta(u,v) + \tau(u,v)\sin\theta + \zeta(u,v)(1-\cos\theta) \tag{5.17}$$

şeklinde M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin $\psi(u,v)$ parametrik ifadesi elde edilir.

5.1.1. M^v Spacelike Kinematik Vida Yüzeyinin Birim Normal Vektör Alanı

Tanım 5.1.2. M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\psi(u,v) = \delta(u,v) + \tau(u,v)\sin\theta + \zeta(u,v)(1-\cos\theta)$$

olduğundan

$$\psi_u = \delta_u + \tau_u \sin\theta + \zeta_u(1-\cos\theta) \tag{5.18}$$

ve

$$\psi_v = \delta_v + \tau_v \sin\theta + \zeta_v(1-\cos\theta) \tag{5.19}$$

olur. Buna göre M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin timelike birim normal vektör alanı

$$\overrightarrow{N^v} = \frac{\psi_u \wedge_L \psi_v}{\left\|\psi_u \wedge_L \psi_v\right\|} \tag{5.20}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Buna göre (5.18) ve (5.19) eşitliklerini kullanarak

$$\psi_u \wedge_L \psi_v = \delta_u \wedge_L \delta_v + \left(\delta_u \wedge_L \tau_v + \tau_u \wedge_L \delta_v\right)\sin\theta + \left(\delta_u \wedge_L \zeta_v + \zeta_u \wedge_L \delta_v\right)(1-\cos\theta)$$
$$+ \tau_u \wedge_L \tau_v \sin^2\theta + \zeta_u \wedge_L \zeta_v (1-\cos\theta)^2 + \left(\tau_u \wedge_L \zeta_v + \zeta_u \wedge_L \tau_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{5.21}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\delta_u &= \left(a_u, b_u, c_u\right), \delta_v = \left(a_v, b_v, c_v\right) \\
\tau_u &= \left(d_u, h_u, j_u\right), \tau_v = \left(d_v, h_v, j_v\right) \\
\zeta_u &= \left(k_u, m_u, o_u\right), \zeta_v = \left(k_v, m_v, o_v\right)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
\delta_u \wedge_L \delta_v &= \left(c_u b_v - b_u c_v, c_u a_v - a_u c_v, a_u b_v - b_u a_v\right) \\
\delta_u \wedge_L \tau_v &= \left(c_u h_v - b_u j_v, c_u d_v - a_u j_v, a_u h_v - b_u d_v\right) \\
\tau_u \wedge_L \delta_v &= \left(j_u b_v - h_u c_v, j_u a_v - d_u c_v, d_u b_v - h_u a_v\right) \\
\delta_u \wedge_L \zeta_v &= \left(c_u m_v - b_u o_v, c_u k_v - a_u o_v, a_u m_v - b_u k_v\right) \\
\zeta_u \wedge_L \delta_v &= \left(o_u b_v - m_u c_v, o_u a_v - k_u c_v, k_u b_v - m_u a_v\right) \\
\tau_u \wedge_L \tau_v &= \left(j_u h_v - h_u j_v, j_u d_v - d_u j_v, d_u h_v - h_u d_v\right) \\
\zeta_u \wedge_L \zeta_v &= \left(o_u m_v - m_u o_v, o_u k_v - k_u o_v, k_u m_v - m_u k_v\right) \\
\tau_u \wedge_L \zeta_v &= \left(j_u m_v - h_u o_v, j_u k_v - d_u o_v, d_u m_v - h_u k_v\right) \\
\zeta_u \wedge_L \tau_v &= \left(o_u h_v - m_u j_v, o_u d_v - k_u j_v, k_u h_v - m_u d_v\right)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

alırsak

$$\begin{aligned}
\psi_u \wedge_L \psi_v = & \left(c_u b_v - b_u c_v, c_u a_v - a_u c_v, a_u b_v - b_u a_v\right) \\
& + [\left(c_u h_v - b_u j_v, c_u d_v - a_u j_v, a_u h_v - b_u d_v\right) \\
& + \left(j_u b_v - h_u c_v, j_u a_v - d_u c_v, d_u b_v - h_u a_v\right)]\sin\theta \\
& + [\left(c_u m_v - b_u o_v, c_u k_v - a_u o_v, a_u m_v - b_u k_v\right) \\
& + \left(o_u b_v - m_u c_v, o_u a_v - k_u c_v, k_u b_v - m_u a_v\right)(1-\cos\theta) \\
& + \left(j_u h_v - h_u j_v, j_u d_v - d_u j_v, d_u h_v - h_u d_v\right)\sin^2\theta \\
& + \left(o_u m_v - m_u o_v, o_u k_v - k_u o_v, k_u m_v - m_u k_v\right)(1-\cos\theta)^2 \\
& + [\left(j_u m_v - h_u o_v, j_u k_v - d_u o_v, d_u m_v - h_u k_v\right) \\
& + \left(o_u h_v - m_u j_v, o_u d_v - k_u j_v, k_u h_v - m_u d_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$
\begin{aligned}
=[(&\left(c_u b_v - b_u c_v + c_u h_v - b_u j_v + j_u b_v - h_u c_v\right)\sin\theta \\
&+\left(c_u m_v - b_u o_v + o_u b_v - m_u c_v\right)(1-\cos\theta) + \left(j_u h_v - h_u j_v\right)\sin^2\theta \\
&+\left(o_u m_v - m_u o_v\right)(1-\cos\theta)^2 + \left(j_u m_v - h_u o_v + o_u h_v - m_u j_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta)), \\
&((c_u a_v - a_u c_v + c_u d_v - a_u j_v + j_u a_v - d_u c_v)\sin\theta \\
&+\left(c_u k_v - a_u o_v + o_u a_v - k_u c_v\right)(1-\cos\theta) + \left(j_u d_v - d_u j_v\right)\sin^2\theta \\
&+\left(o_u k_v - k_u o_v\right)(1-\cos\theta)^2 + \left(j_u k_v - d_u o_v + o_u d_v - k_u j_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta)), \\
&((a_u b_v - b_u a_v + a_u h_v - b_u d_v + d_u b_v - h_u a_v)\sin\theta \\
&+\left(a_u m_v - b_u k_v + k_u b_v - m_u a_v\right)(1-\cos\theta) + \left(d_u h_v - h_u d_v\right)\sin^2\theta \\
&+\left(k_u m_v - m_u k_v\right)(1-\cos\theta)^2 + [\left(d_u m_v - h_u k_v + k_u h_v - m_u d_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta))]
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

elde edilir. Burada (5.25) denklemini

$$\psi_u \wedge_L \psi_v = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \tag{5.26}$$

ve

$$\left\|\psi_u \wedge_L \psi_v\right\| = A \tag{5.27}$$

alırsak (5.20) verilen M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin timelike birim normal vektör alanı (5.26) ve (5.27) yardımıyla

$$\overrightarrow{N^v} = \frac{\psi_u \wedge_L \psi_v}{\left\|\psi_u \wedge_L \psi_v\right\|} = \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{A}, \frac{z}{A}\right) \tag{5.28}$$

yazabiliriz. Burada $\left\langle \overrightarrow{N^v}, \overrightarrow{N^v} \right\rangle = -1$ dir.

5.1.2. M^v Spacelike Kinematik Vida Yüzeyinin Temel Formları

Tanım 5.1.3. M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin parametrik fonksiyonu $\psi(u,v)$ olmak üzere her bir noktasındaki teğet düzleminin tabanı $\{\psi_u, \psi_v\}$ olsun. Buna göre M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin birinci temel formu I^v

$$I^v = E^v du^2 + F^v dudv + G^v dv^2 \tag{5.29}$$

ve ikinci temel formu II^{v}

$$II^{v}=e^{v}du^{2}+2f^{v}dudv+g^{v}dv^{2} \tag{5.30}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$E^{v}=\langle\psi_u,\psi_u\rangle_L,F^{v}=\langle\psi_u,\psi_v\rangle_L,G^{v}=\langle\psi_v,\psi_v\rangle_L \tag{5.31}$$

fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} e^{v}&=-\left\langle\psi_u,\overrightarrow{N_u^{v}}\right\rangle_L=\left\langle\overrightarrow{N^{v}},\psi_{uu}\right\rangle_L\\ f^{v}&=-\left\langle\psi_u,\overrightarrow{N_v^{v}}\right\rangle_L=\left\langle\overrightarrow{N^{v}},\psi_{uv}\right\rangle_L\\ g^{v}&=-\left\langle\psi_v,\overrightarrow{N_v^{v}}\right\rangle_L=\left\langle\overrightarrow{N^{v}},\psi_{vv}\right\rangle_L \end{aligned} \tag{5.32}$$

fonksiyonlarına ikinci temel formun katsayıları

Buna göre

$$\begin{gathered} \langle\delta_u,\delta_u\rangle_L=-a_u^2+b_u^2+c_u^2,\langle\delta_v,\delta_v\rangle_L=-a_v^2+b_v^2+c_v^2\\ \langle\tau_u,\tau_u\rangle_L=-d_u^2+h_u^2+j_u^2,\langle\tau_v,\tau_v\rangle_L=-d_v^2+h_v^2+j_v^2\\ \langle\zeta_u,\zeta_u\rangle_L=-k_u^2+m_u^2+o_u^2,\langle\zeta_v,\zeta_v\rangle_L=-k_v^2+m_v^2+o_v^2\\ \langle\delta_u,\tau_u\rangle_L=\langle\tau_u,\delta_u\rangle_L=-a_ud_u+b_uh_u+c_uj_u\\ \langle\delta_u,\zeta_u\rangle_L=\langle\zeta_u,\delta_u\rangle_L=-a_uk_u+b_um_u+c_uo_u\\ \langle\tau_u,\zeta_u\rangle_L=\langle\zeta_u,\tau_u\rangle_L=-d_uk_u+h_um_u+j_uo_u\\ \langle\delta_v,\tau_v\rangle_L=\langle\tau_v,\delta_v\rangle_L=-a_vd_v+b_vh_v+c_vj_v\\ \langle\delta_v,\zeta_v\rangle_L=\langle\zeta_v,\delta_v\rangle_L=-a_vk_v+b_vm_v+c_vo_v\\ \langle\tau_v,\zeta_v\rangle_L=\langle\zeta_v,\tau_v\rangle_L=-d_vk_v+h_vm_v+j_vo_v\\ \langle\delta_u,\delta_u\rangle_L=-a_ua_v+b_ub_v+c_uc_v,\ \langle\delta_u,\tau_v\rangle_L=-a_ud_v+b_uh_v+c_uj_v\\ \langle\tau_u,\delta_v\rangle_L=-d_ua_v+h_ub_v+j_uc_v,\ \langle\delta_u,\zeta_v\rangle_L=-a_uk_v+b_um_v+c_uo_v\\ \langle\zeta_u,\delta_v\rangle_L=-k_ua_v+m_ub_v+o_uc_v,\langle\tau_u,\tau_v\rangle_L=-d_ud_v+h_uh_v+j_uj_v\\ \langle\zeta_u,\zeta_v\rangle_L=-k_uk_v+m_um_v+o_uo_v,\langle\tau_u,\zeta_v\rangle_L=-d_uk_v+h_um_v+j_uo_v\\ \langle\zeta_u,\tau_v\rangle_L=-k_ud_v+m_uh_v+o_uj_v \end{gathered} \tag{5.33}$$

eşitliklerinden

$$E^{v}=\langle\psi_u,\psi_u\rangle_L=\langle\delta_u,\delta_u\rangle_L+\left(\langle\delta_u,\tau_u\rangle_L+\langle\tau_u,\delta_u\rangle_L\right)\sin\theta+\left(\langle\delta_u,\zeta_u\rangle_L+\langle\zeta_u,\delta_u\rangle_L\right)(1-\cos\theta)$$
$$+\langle\tau_u,\tau_u\rangle_L\sin^2\theta+\langle\zeta_u,\zeta_u\rangle_L(1-\cos\theta)^2+\left(\langle\tau_u,\zeta_u\rangle_L+\langle\zeta_u,\tau_u\rangle_L\right)\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}E^{v}=\langle\psi_u,\psi_u\rangle_L&=\left(-a_u^2+b_u^2+c_u^2\right)+2\left(-a_ud_u+b_uh_u+c_uj_u\right)\sin\theta\\&+2\left(-a_uk_u+b_um_u+c_uo_u\right)(1-\cos\theta)+\left(-d_u^2+h_u^2+j_u^2\right)\sin^2\theta\\&+\left(-k_u^2+m_u^2+o_u^2\right)(1-\cos\theta)^2+2\left(-d_uk_u+h_um_u+j_uo_u\right)\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$F^{v}=\langle\psi_u,\psi_v\rangle_L=\langle\delta_u,\delta_v\rangle_L+\left(\langle\delta_u,\tau_v\rangle_L+\langle\tau_u,\delta_v\rangle_L\right)\sin\theta+\left(\langle\delta_u,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_u,\delta_v\rangle_L\right)(1-\cos\theta)$$
$$+\langle\tau_u,\tau_v\rangle_L\sin^2\theta+\langle\zeta_u,\zeta_v\rangle_L(1-\cos\theta)^2+\left(\langle\tau_u,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_u,\tau_v\rangle_L\right)\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}F^{v}=\langle\psi_u,\psi_v\rangle_L&=\left(-a_ua_v+b_ub_v+c_uc_v\right)+[\left(-a_ud_v+b_uh_v+c_uj_v\right)+\left(-d_ua_v+h_ub_v+j_uc_v\right)]\sin\theta\\&+[\left(-a_uk_v+b_um_v+c_uo_v\right)+\left(-k_ua_v+m_ub_v+o_uc_v\right)](1-\cos\theta)\\&+\left(-d_ud_v+h_uh_v+j_uj_v\right)\sin^2\theta+\left(-k_uk_v+m_um_v+o_uo_v\right)(1-\cos\theta)^2\\&+[\left(-d_uk_v+h_um_v+j_uo_v\right)+\left(-k_ud_v+m_uh_v+o_uj_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$G^{v}=\langle\psi_v,\psi_v\rangle_L=\langle\delta_v,\delta_v\rangle_L+\left(\langle\delta_v,\tau_v\rangle_L+\langle\tau_v,\delta_v\rangle_L\right)\sin\theta+\left(\langle\delta_v,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_v,\delta_v\rangle_L\right)(1-\cos\theta)$$
$$+\langle\tau_v,\tau_v\rangle_L\sin^2\theta+\langle\zeta_v,\zeta_v\rangle_L(1-\cos\theta)^2+\left(\langle\tau_v,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_v,\tau_v\rangle_L\right)\sin\theta(1-\cos\theta) \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}G^{v}=\langle\psi_v,\psi_v\rangle_L&=\left(-a_v^2+b_v^2+c_v^2\right)+2\left(-a_vd_v+b_vh_v+c_vj_v\right)\sin\theta\\&+2\left(-a_vk_v+b_vm_v+c_vo_v\right)(1-\cos\theta)+\left(-d_v^2+h_v^2+j_v^2\right)\sin^2\theta\\&+\left(-k_v^2+m_v^2+o_v^2\right)(1-\cos\theta)^2+2\left(-d_vk_v+h_vm_v+j_vo_v\right)\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{5.39}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi_{uu}&=\delta_{uu}+\tau_{uu}\sin\theta+\zeta_{uu}(1-\cos\theta)\\\psi_{uv}&=\delta_{uv}+\tau_{uv}\sin\theta+\zeta_{uv}(1-\cos\theta)\\\psi_{vv}&=\delta_{vv}+\tau_{vv}\sin\theta+\zeta_{vv}(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{5.40}$$

olup

$$\begin{aligned}&\delta_{uu}=\left(a_{uu},b_{uu},c_{uu}\right),\delta_{uv}=\left(a_{uv},b_{uv},c_{uv}\right),\delta_{vv}=\left(a_{vv},b_{vv},c_{vv}\right)\\&\tau_{uu}=\left(d_{uu},h_{uu},j_{uu}\right),\tau_{uv}=\left(d_{uv},h_{uv},j_{uv}\right),\tau_{vv}=\left(d_{vv},h_{vv},j_{vv}\right)\\&\zeta_{uu}=\left(k_{uu},m_{uu},o_{uu}\right),\zeta_{uv}=\left(k_{uv},m_{uv},o_{uv}\right),\zeta_{vv}=\left(k_{vv},m_{vv},o_{vv}\right)\end{aligned} \tag{5.41}$$

eşitliklerini (5.40) da yazarsak

$$\begin{aligned}
\psi_{uu} &= \left(a_{uu}, b_{uu}, c_{uu}\right) + \left(d_{uu}, h_{uu}, j_{uu}\right)\sin\theta + \left(k_{uu}, m_{uu}, o_{uu}\right)(1-\cos\theta) \\
\psi_{uv} &= \left(a_{uv}, b_{uv}, c_{uv}\right) + \left(d_{uv}, h_{uv}, j_{uv}\right)\sin\theta + \left(k_{uv}, m_{uv}, o_{uv}\right)(1-\cos\theta) \\
\psi_{vv} &= \left(a_{vv}, b_{vv}, c_{vv}\right) + \left(d_{vv}, h_{vv}, j_{vv}\right)\sin\theta + \left(k_{vv}, m_{vv}, o_{vv}\right)(1-\cos\theta)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
e^{v} = -\left\langle \psi_u, \overrightarrow{N_u^v} \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{N^v}, \psi_{uu} \right\rangle_L = \frac{1}{A}[& -\left(a_{uu} + d_{uu}\sin\theta + k_{uu}(1-\cos\theta)\right)x \\
& +\left(b_{uu} + h_{uu}\sin\theta + m_{uu}(1-\cos\theta)\right)y \\
& +\left(c_{uu} + j_{uu}\sin\theta + o_{uu}(1-\cos\theta)\right)z]
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
f^{v} = -\left\langle \psi_u, \overrightarrow{N_v^v} \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{N^v}, \psi_{uv} \right\rangle_L = \frac{1}{A}[& -\left(a_{uv} + d_{uv}\sin\theta + k_{uv}(1-\cos\theta)\right)x \\
& +\left(b_{uv} + h_{uv}\sin\theta + m_{uv}(1-\cos\theta)\right)y \\
& +\left(c_{uv} + j_{uv}\sin\theta + o_{uv}(1-\cos\theta)\right)z]
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
g^{v} = -\left\langle \psi_v, \overrightarrow{N_v^v} \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{N^v}, \psi_{vv} \right\rangle_L = \frac{1}{A}[& -\left(a_{vv} + d_{vv}\sin\theta + k_{vv}(1-\cos\theta)\right)x \\
& +\left(b_{vv} + h_{vv}\sin\theta + m_{vv}(1-\cos\theta)\right)y \\
& +\left(c_{vv} + j_{vv}\sin\theta + o_{vv}(1-\cos\theta)\right)z]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

bulunur.

5.1.3. M^v Spacelike Kinematik Vida Yüzeyinin Gauss ve Ortalama Eğriliği

Tanım 5.1.4. M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin bir $p \in M^v$ noktasındaki Gauss ve Ortalama eğrilikleri sırasıyla K^v ve H^v olsun. Bu eğriliklerin birinci ve ikinci temel formun katsayıları cinsinden değerleri

$$K^{v} = -\frac{e^{v}g^{v} - \left(f^{v}\right)^{2}}{E^{v}G^{v} - \left(F^{v}\right)^{2}} \tag{5.46}$$

$$H^v = -\frac{e^v G^v - 2 f^v F^v + g^v E^v}{2\left(E^v G^v - \left(F^v\right)^2\right)} \tag{5.47}$$

olur. Buna göre, birinci ve ikinci temel formun katsayı değerleri yerlerine yazılarak M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin gauss ve ortalama eğrilikleri bulunur.

5.1.4. M^v Spacelike Kinematik Vida Yüzeyinin Şekil Operatörü Matrisi

Tanım 5.1.5. M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin parametrik ifadesi $\psi(u,v)$, timelike birim normal vektör alanı $\overrightarrow{N^v}$ ve şekil operatörü S^v olsun. M^v spacelike kinematik vida yüzeyinin $\{\psi_u, \psi_v\}$ taban vektörlerinin S^v altındaki görüntüleri

$$-S^v(\varphi_u) = \overrightarrow{N_u^v} = \frac{f^v F^v - e^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_u + \frac{e^v F^v - f^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_v \tag{5.48}$$

$$-S^v(\varphi_v) = \overrightarrow{N_v^v} = \frac{g^v F^v - f^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_u + \frac{f^v F^v - g^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_v \tag{5.49}$$

olur. Buna göre S^v şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S^v = \begin{pmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \varsigma_3 & \varsigma_4 \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= -\frac{f^v F^v - e^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \quad , \quad \varsigma_2 = -\frac{e^v F^v - f^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \\ \varsigma_3 &= -\frac{g^v F^v - f^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \quad , \quad \varsigma_4 = -\frac{f^v F^v - g^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \end{aligned} \tag{5.51}$$

dir.

Özel Durum 5.1.1.

M^{ν} spacelike kinematik vida yüzeyinde θ açılık dönme hareketini ifade eden $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{N}$ timelike birim kuaterniyonunda $\theta = 0^{\circ}$ alınırsa $r = 1$ olur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
f(p) &= qp\overline{q} + \lambda\vec{N} \\
&= p + \lambda\vec{N}
\end{aligned}
$$

fonksiyonu ile spacelike kinematik vida yüzeyi M^{r} spacelike paralel yüzey olur.

Örnek 5.1.1. $M = \left\{ \phi(u,\nu) \mid \phi(\upsilon,\nu) = (\upsilon,\nu,\upsilon\nu), -1 \le \upsilon \le 1, \frac{5}{2} \le \nu \le \frac{7}{2} \right\}$ yüzeyini düşünelim.

M yüzeyinin timelike birim normal vektör alanını bulalım

$\phi_{\upsilon} = (1,0,\nu)$ ve $\phi_{\nu} = (0,1,\upsilon)$ olmak üzere

$\phi_{\upsilon} \wedge_L \phi_{\nu} = (\nu,-\upsilon,1)$ ve $\left\| \phi_{\upsilon} \wedge_L \phi_{\nu} \right\| = \sqrt{-\upsilon^2 + \nu^2 - 1}$ olduğundan

Yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{N} = \dfrac{\phi_{\upsilon} \wedge_L \phi_{\nu}}{\left\| \phi_{\upsilon} \wedge_L \phi_{\nu} \right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{-\upsilon^2 + \nu^2 - 1}}(\nu,-\upsilon,1)$ olarak elde edilir.

$P = (0,3,0) \in M$ noktası için birim normal vektörü $\vec{N_P} = \frac{1}{\sqrt{8}}(3,0,1)$ olur. $\left\langle \vec{N_P}, \vec{N_P} \right\rangle_L = -1$ olduğundan M spacelike yüzey olur

M yüzeyinin birinci temel form katsayıları Tanım 3.1.7. de verilen (3.7) denklemlerini kullanarak

$$E = -1 + \nu^2 \ , \ F = \upsilon\nu \ , \ G = 1 + \upsilon^2$$

ve ikinci temel form katsayıları Tanım 3.1.7. de verilen (3.9) denklemlerini kullanarak

$$e = 0 \ , \ f = \frac{1}{\sqrt{\left| -\nu^2 + \upsilon^2 + 1 \right|}} \ , \ g = 0$$

M yüzeyinin ortalama eğriliği ve gauss eğriliği sırasıyla Tanım 3.1.7. de verilen (3.12) ve (3.13) denklemleri hesaplandığında

$$H = \frac{\upsilon\nu}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}}$$

$$K = \frac{1}{\left(-1-\upsilon^2+\nu^2\right)^2}$$

dir. Ve şekil operatörü matrisi

$$S = \begin{pmatrix} -\dfrac{\upsilon\nu}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}} & \dfrac{-1+\nu^2}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}} \\ \dfrac{1+\upsilon^2}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}} & -\dfrac{\upsilon\nu}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

olur.

P noktası için ortalama eğriliği, gauss eğriliği ve şekil operatörü matrisi sırasıyla

$$H(P) = 0$$

$$K(P) = \frac{1}{64}$$

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{32} & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi M spacelike yüzeyinin timelike birim normal vektör alanı etrafında $\theta = \frac{\pi}{2}$ açılık dönme ve $\lambda = 2$ birim ötelenmesiyle elde edilen M^v spacelike kinematik vida yüzeyini bulalım.

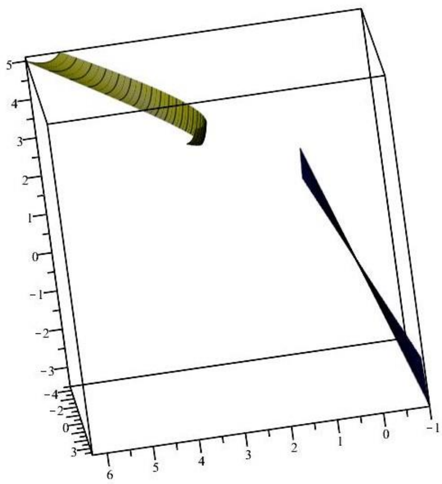
$$\psi(\upsilon,\nu) = R\varphi(\upsilon,\nu) + \lambda N(\upsilon,\nu)$$

$$\psi(\upsilon,\nu) = \begin{pmatrix} -\dfrac{(-\upsilon\nu\sqrt{(-\upsilon^2+\nu^2-1)}+(\upsilon^2+3)(\upsilon^2-\nu^2+1))\nu}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}}, \\ \dfrac{\upsilon(-\upsilon\nu\sqrt{(-\upsilon^2+\nu^2-1)}+(\nu^2+1)\upsilon^2-\nu^4+1)}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}}, \\ \dfrac{-\upsilon^4+\nu^4+\upsilon\nu\sqrt{(-\upsilon^2+\nu^2-1)}-3\upsilon^2+\nu^2-2}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

dir. $\psi(\upsilon,\nu)$, M^{ν} spacelike kinematik vida yüzeyinin parametrik ifadesidir.

$$M^{\nu} = \left\{ \psi(\upsilon,\nu) \mid \psi(\upsilon,\nu) = \begin{pmatrix} -\dfrac{(-\upsilon\nu\sqrt{(-\upsilon^2+\nu^2-1)}+(\upsilon^2+3)(\upsilon^2-\nu^2+1))\nu}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}}, \\ \dfrac{\upsilon(-\upsilon\nu\sqrt{(-\upsilon^2+\nu^2-1)}+(\nu^2+1)\upsilon^2-\nu^4+1)}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}}, \\ \dfrac{-\upsilon^4+\nu^4+\upsilon\nu\sqrt{(-u^2+\nu^2-1)}-3\upsilon^2+\nu^2-2}{\left(-\upsilon^2+\nu^2-1\right)^{3/2}} \end{pmatrix}, -1 \le \upsilon \le 1, \frac{5}{2} \le \nu \le \frac{7}{2} \right\}$$

dir (Şekil 5.1.).



Şekil 5.1. Mavi : M spacelike yüzey. Sarı : M^{ν} spacelike kinematik vida yüzeyi

M^{v} yüzeyinin P noktasındaki görüntüsü $f(P)=\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{4},0,\dfrac{11\sqrt{2}}{4}\right)$ dir.

$$\psi_{\upsilon}=\left(\begin{array}{c}\dfrac{\nu(\nu(\upsilon^{2}+\nu^{2}-1)\sqrt{-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1}+\upsilon(\upsilon^{2}-\nu^{2}+1)(\upsilon^{2}-2\nu^{2}-1))}{\left(-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1\right)^{5/2}},\\ \dfrac{(\nu-1)(\nu+1)(\upsilon^{2}\nu^{2}-\nu^{4}-2\upsilon\nu\sqrt{-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1}+\upsilon^{2}+1)}{\left(-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1\right)^{5/2}},\\ \dfrac{\nu(\upsilon^{2}+\nu^{2}-1)\sqrt{-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1}+\upsilon(\upsilon^{2}-\nu^{2}+1)(\upsilon^{2}-3\nu^{2})}{\left(-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1\right)^{5/2}}\end{array}\right)$$

$$\psi_{\nu}=\left(\begin{array}{c}\dfrac{(\upsilon^{2}+1)(-2\upsilon\nu\sqrt{-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1}+(\upsilon^{2}+3)(\upsilon^{2}-\nu^{2}+1))}{\left(-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1\right)^{5/2}},\\ -\dfrac{2\upsilon\left(-\dfrac{\upsilon(\upsilon^{2}+\nu^{2}+1)\sqrt{-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1}}{2}+\nu\left(\upsilon^{2}-\nu^{2}+1\right)\left(\upsilon^{2}-\dfrac{\nu^{2}}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\right)}{\left(-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1\right)^{5/2}},\\ \dfrac{3\left(-\dfrac{\upsilon(\upsilon^{2}+\nu^{2}+1)\sqrt{-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1}}{3}+\nu\left(\upsilon^{2}-\dfrac{\nu^{2}}{3}+\dfrac{4}{3}\right)\left(\upsilon^{2}-\nu^{2}+1\right)\right)}{\left(-\upsilon^{2}+\nu^{2}-1\right)^{5/2}}\end{array}\right)$$

eşitliklerini kullanarak Tanım 5.1.2. den timelike birim normal vektör alanı bulunur. Ve M^{v} yüzeyinin $f(P)$ noktasındaki timelike birim normal vektörü

$$\overrightarrow{N^{v}_{f(P)}}=\left(\frac{25\sqrt{33}}{132},-\frac{\sqrt{66}}{22},-\frac{5\sqrt{33}}{132}\right) \text{ dir.}$$

Tanım 5.1.3. deki gerekli hesaplamalar yapılıp temel form katsayıları bulunabilir. Bulunan temel form katsayıları yardımıyla Tanım 5.1.4. deki ve Tanım 5.1.5. deki hesaplamalar yapılarak M^{v} spacelike kinematik vida yüzeyinin $f(P)$ noktasındaki ortalama eğriliği, gauss eğriliği ve şekil operatörü matrisi sırasıyla

$$H^{v}(f(P))=\frac{8333\sqrt{33}}{156816}$$

$$K^{\nu}(f(P)) = -\frac{5646011}{10036224}$$

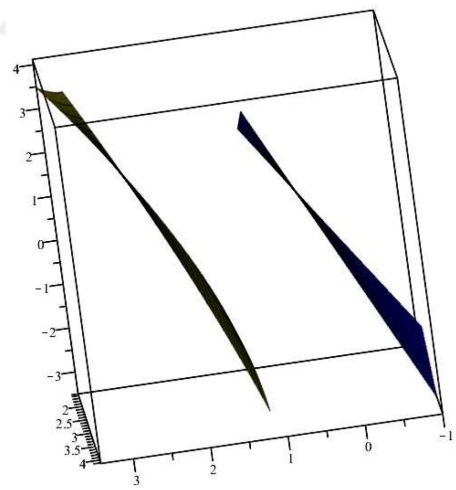
$$S^{\nu}(f(P)) = \begin{pmatrix} -\frac{305\sqrt{66}}{8712} & \frac{4391\sqrt{33}}{19602} \\ \frac{\sqrt{33}}{99} & -\frac{127\sqrt{66}}{1782} \end{pmatrix}$$

dir.

M spacelike yüzeyi için özel durum 5.1.1. i düşünelim yani $\theta = 0^{\circ}$ ve $\lambda = 2$ olsun. Bu durumda spacelike kinematik vida yüzeyi M^r paralel yüzeyi olur ve

$$M^{\nu} = \left\{ \psi(u,\nu) \,|\, \psi(u,\nu) = \left(\frac{\upsilon\sqrt{-\upsilon^2+\nu^2-1}+2\nu}{\sqrt{-\upsilon^2+\nu^2-1}}, \frac{\nu\sqrt{-\upsilon^2+\nu^2-1}-2\upsilon}{\sqrt{-\upsilon^2+\nu^2-1}}, \frac{\upsilon\nu\sqrt{-\upsilon^2+\nu^2-1}+2}{\sqrt{-\upsilon^2+\nu^2-1}} \right), -1 \le \upsilon \le 1, \frac{5}{2} \le \nu \le \frac{7}{2} \right\}$$

dir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. Mavi : M spacelike yüzey. Sarı : M^r spacelike paralel yüzey

5.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Kinematik Vida Yüzeyleri

M ve M^v, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike yüzeyler ve $p \in M$ olsun. $v=(v_x,v_y,v_z)$ spacelike birim vektörü etrafında θ açılık dönme

$$q=\cosh\frac{\theta}{2}+\sinh\frac{\theta}{2}(v_x\vec{e_1}+v_y\vec{e_2}+v_z\vec{e_3}) \tag{5.52}$$

timelike kuaterniyonu ve E_1^3 uzayında bir $\vec{t}=(t_x,t_y,t_z)$ öteleme vektörü için

$$\begin{aligned} f: M &\to M^v \\ p &\to f(p)=qp\bar{q}+\vec{t} \end{aligned} \tag{5.53}$$

biçiminde verilen M timelike yüzeyindeki noktaları katı cisim hareketi, dönme ve öteleme ile bir M^v timelike yüzeyine taşınabilir.

Eğer katı cisim hareketinde dönme ekseni yüzeyin spacelike birim normal vektörü $\vec{N}$ ve öteleme vektörü de $\lambda\vec{N}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) alınırsa vida hareketine dönüşür. Böylece vida hareketi ile elde edilen M^v timelike yüzeyine timelike kinematik vida yüzeyi adı veriliyor.

Tanım 5.2.1. M ve M^v, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike iki yüzey ve $P \in M$ olsun. $\vec{N}$ birim normal vektörü etrafında θ açılık dönme

$$q=\cosh\frac{\theta}{2}+\sinh\frac{\theta}{2}\vec{N} \tag{5.54}$$

timelike kuaterniyonu ve E_1^3 uzayında bir öteleme vektörü $\lambda\vec{N}$ vektörü olmak üzere

$$\begin{aligned} f: M &\to M^v \\ p &\to f(p)=qp\bar{q}+\lambda\vec{N} \end{aligned} \tag{5.55}$$

şeklinde f fonksiyonu tanımlı ise M^v yüzeyine M yüzeyinin timelike kinematik vida yüzeyi denir.

Buna göre timelike kinematik vida yüzeyi fonksiyonu

$$f(p)=\left(\cosh\frac{\theta}{2}+\sinh\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)p\left(\cosh\frac{\theta}{2}-\sinh\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)+\lambda\vec{N} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned} f(p)=&\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\langle\vec{N},p\rangle_L+\left\langle\cosh\frac{\theta}{2}p+\sinh\frac{\theta}{2}\left(\vec{N}\wedge_L p\right),-\sinh\frac{\theta}{2}\vec{N}\right\rangle_L\\ &+\left(\sinh\frac{\theta}{2}\langle\vec{N},p\rangle_L\right)\left(-\sinh\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)+\left(\cosh\frac{\theta}{2}p+\sinh\frac{\theta}{2}\left(\vec{N}\wedge_L p\right)\right)\left(\cosh\frac{\theta}{2}\right)\\ &+\left(\left(\cosh\frac{\theta}{2}p+\sinh\frac{\theta}{2}\left(\vec{N}\wedge_L p\right)\right)\wedge_L\left(-\sinh\frac{\theta}{2}\vec{N}\right)\right)+\lambda\vec{N} \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} &=\cosh\theta p+\sinh\theta\left(\vec{N}\wedge_L p\right)+(-1+\cosh\theta)\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L\vec{N}+\lambda\vec{N}\\ &=p+\sinh\theta\left(\vec{N}\wedge_L p\right)+(-1+\cosh\theta p)\left(p-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L\vec{N}\right)+\lambda\vec{N} \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned} =(&p_1+\sinh\theta n_3p_2-\sinh\theta n_2p_3+\left(\cosh\theta-1\right)\left(p_1-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L n_1\right)+\lambda n_1,\\ &p_2+\sinh\theta n_3p_1-\sinh\theta n_1p_3+\left(\cosh\theta-1\right)\left(p_2-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L n_2\right)+\lambda n_2,\\ &p_3+\sinh\theta n_1p_2-\sinh\theta n_2p_1+\left(\cosh\theta-1\right)\left(p_3-\left\langle\vec{N},p\right\rangle_L n_3\right)+\lambda n_3) \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$f(p)=\begin{pmatrix} 1+(-1+\cosh\theta)(n_2^2+n_3^2) & \sinh\theta n_3-(-1+\cosh\theta)(n_1n_2) & -\sinh\theta n_2-(-1+\cosh\theta)(n_1n_3)\\ \sinh\theta n_3+(-1+\cosh\theta)(n_1n_2) & 1+(-1+\cosh\theta)(-n_1^2+n_3^2) & -\sinh\theta n_1-(-1+\cosh\theta)(n_2n_3)\\ -\sinh\theta n_2+(-1+\cosh\theta)(n_1n_3) & \sinh\theta n_1-(-1+\cosh\theta)(n_2n_3) & 1+(-1+\cosh\theta)(-n_1^2+n_2^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$$
$$+\lambda\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$$

yazılabilir. Eğer

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\sinh\theta\begin{pmatrix}0&n_3&-n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}+(-1+\cosh\theta)\begin{pmatrix}n_2^2+n_3^2&-n_1n_2&-n_1n_3\\n_1n_2&-n_1^2+n_3^2&-n_2n_3\\n_1n_3&-n_2n_3&-n_1^2+n_2^2\end{pmatrix} \tag{5.60}$$

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{5.61}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

S, $\overrightarrow{N}$ spacelike birim normal vektörüne (dönme ekseni) karşılık gelen anti-simetrik matristir.

$$S^2 = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_1^2 + n_3^2 & -n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & -n_2 n_3 & -n_1^2 + n_2^2 \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

(5.61) , (5.62) ve (5.63) eşitlikleri yardımıyla

$$R = I_3 + \sinh\theta S + (-1 + \cosh\theta) S^2 \tag{5.64}$$

alırsak f fonksiyonu

$$f(p) = Rp + \lambda \overrightarrow{N} \tag{5.65}$$

biçiminde ifade edilebilir.

M timelike yüzeyinin bir parametrizasyonu (φ, U) olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi &: U \to M \\ &(u,v) \to \varphi(u,v) = p \end{aligned}$$

olsun. Buna göre M^v timelike kinematik vida yüzeyinin bir parametrik ifadesi

$$\psi(u,v) = R\varphi(u,v) + \lambda N(u,v)$$

verilebilir. Burada R matris $\overrightarrow{N}$ spacelike birim normal vektörü etrafında θ açılık bir dönme matrisidir. (5.64) deki eşitlik R yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi(u,v) &= (I_3 + \sinh\theta S + (-1 + \cosh\theta) S^2)\varphi(u,v) + \lambda N(u,v) \\ &= I_3 \varphi(u,v) + \sinh\theta S\varphi(u,v) + (-1 + \cosh\theta) S^2 \varphi(u,v) + \lambda N(u,v) \end{aligned} \tag{5.66}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \delta(u,v) &= I_3\varphi(u,v)+\lambda N(u,v)=\big(a(u,v),b(u,v),c(u,v)\big) \\ \tau(u,v) &= S\varphi(u,v)=\big(d(u,v),h(u,v),j(u,v)\big) \\ \zeta(u,v) &= S^2\varphi(u,v)=\big(k(u,v),m(u,v),o(u,v)\big) \end{aligned} \tag{5.67}$$

olmak üzere

$$\psi(u,v)=\delta(u,v)+\tau(u,v)\sinh\theta+\zeta(u,v)(-1+\cosh\theta) \tag{5.68}$$

şeklinde M^v timelike kinematik vida yüzeyinin $\psi(u,v)$ parametrik ifadesi elde edilir.

5.2.1. M^v Timelike Kinematik Vida Yüzeyinin Birim Normal Vektör Alanı

Tanım 5.2.2. M^v timelike kinematik vida yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\psi(u,v)=\delta(u,v)+\tau(u,v)\sinh\theta+\zeta(u,v)(-1+\cosh\theta)$$

olduğundan

$$\psi_u=\delta_u+\tau_u\sinh\theta+\zeta_u(-1+\cosh\theta) \tag{5.69}$$

ve

$$\psi_v=\delta_v+\tau_v\sinh\theta+\zeta_v(-1+\cosh\theta) \tag{5.70}$$

olur. Buna göre M^v timelike kinematik vida yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı

$$\overrightarrow{N^v}=\frac{\psi_u\wedge_L\psi_v}{\|\psi_u\wedge_L\psi_v\|} \tag{5.71}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Buna göre (5.69) ve (5.70) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \psi_u\wedge_L\psi_v &= \delta_u\wedge_L\delta_v+\big(\delta_u\wedge_L\tau_v+\tau_u\wedge_L\delta_v\big)\sinh\theta+\big(\delta_u\wedge_L\zeta_v+\zeta_u\wedge_L\delta_v\big)(-1+\cosh\theta) \\ &+\tau_u\wedge_L\tau_v\sinh^2\theta+\zeta_u\wedge_L\zeta_v(-1+\cosh\theta)^2+\big(\tau_u\wedge_L\zeta_v+\zeta_u\wedge_L\tau_v\big)\sinh\theta(-1+\cosh\theta) \end{aligned} \tag{5.72}$$

elde edilir.

Burada

$$
\begin{aligned}
&\delta_u=(a_u,b_u,c_u),\delta_v=(a_v,b_v,c_v)\\
&\tau_u=(d_u,h_u,j_u),\tau_v=(d_v,h_v,j_v)\\
&\zeta_u=(k_u,m_u,o_u),\zeta_v=(k_v,m_v,o_v)
\end{aligned}
\tag{5.73}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\delta_u\wedge_L\delta_v=(c_ub_v-b_uc_v,c_ua_v-a_uc_v,a_ub_v-b_ua_v)\\
&\delta_u\wedge_L\tau_v=(c_uh_v-b_uj_v,c_ud_v-a_uj_v,a_uh_v-b_ud_v)\\
&\tau_u\wedge_L\delta_v=(j_ub_v-h_uc_v,j_ua_v-d_uc_v,d_ub_v-h_ua_v)\\
&\delta_u\wedge_L\zeta_v=(c_um_v-b_uo_v,c_uk_v-a_uo_v,a_um_v-b_uk_v)\\
&\zeta_u\wedge_L\delta_v=(o_ub_v-m_uc_v,o_ua_v-k_uc_v,k_ub_v-m_ua_v)\\
&\tau_u\wedge_L\tau_v=(j_uh_v-h_uj_v,j_ud_v-d_uj_v,d_uh_v-h_ud_v)\\
&\zeta_u\wedge_L\zeta_v=(o_um_v-m_uo_v,o_uk_v-k_uo_v,k_um_v-m_uk_v)\\
&\tau_u\wedge_L\zeta_v=(j_um_v-h_uo_v,j_uk_v-d_uo_v,d_um_v-h_uk_v)\\
&\zeta_u\wedge_L\tau_v=(o_uh_v-m_uj_v,o_ud_v-k_uj_v,k_uh_v-m_ud_v)
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

alırsak

$$
\begin{aligned}
\psi_u\wedge_L\psi_v=&(c_ub_v-b_uc_v,c_ua_v-a_uc_v,a_ub_v-b_ua_v)\\
&+[(c_uh_v-b_uj_v,c_ud_v-a_uj_v,a_uh_v-b_ud_v)\\
&+(j_ub_v-h_uc_v,j_ua_v-d_uc_v,d_ub_v-h_ua_v)]\sinh\theta\\
&+[(c_um_v-b_uo_v,c_uk_v-a_uo_v,a_um_v-b_uk_v)\\
&+(o_ub_v-m_uc_v,o_ua_v-k_uc_v,k_ub_v-m_ua_v)(-1+\cosh\theta)\\
&+(j_uh_v-h_uj_v,j_ud_v-d_uj_v,d_uh_v-h_ud_v)\sinh^2\theta\\
&+(o_um_v-m_uo_v,o_uk_v-k_uo_v,k_um_v-m_uk_v)(-1+\cosh\theta)^2\\
&+[(j_um_v-h_uo_v,j_uk_v-d_uo_v,d_um_v-h_uk_v)\\
&+(o_uh_v-m_uj_v,o_ud_v-k_uj_v,k_uh_v-m_ud_v)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

$$
\begin{aligned}
=[(&\left(c_u b_v - b_u c_v + c_u h_v - b_u j_v + j_u b_v - h_u c_v\right)\sinh\theta \\
&+\left(c_u m_v - b_u o_v + o_u b_v - m_u c_v\right)(-1+\cosh\theta) + \left(j_u h_v - h_u j_v\right)\sinh^2\theta \\
&+\left(o_u m_v - m_u o_v\right)(-1+\cosh\theta)^2 + \left(j_u m_v - h_u o_v + o_u h_v - m_u j_v\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)), \\
&(\left(c_u a_v - a_u c_v + c_u d_v - a_u j_v + j_u a_v - d_u c_v\right)\sinh\theta \\
&+\left(c_u k_v - a_u o_v + o_u a_v - k_u c_v\right)(-1+\cosh\theta) + \left(j_u d_v - d_u j_v\right)\sinh^2\theta \\
&+\left(o_u k_v - k_u o_v\right)(-1+\cosh\theta)^2 + \left(j_u k_v - d_u o_v + o_u d_v - k_u j_v\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)), \\
&(\left(a_u b_v - b_u a_v + a_u h_v - b_u d_v + d_u b_v - h_u a_v\right)\sinh\theta \\
&+\left(a_u m_v - b_u k_v + k_u b_v - m_u a_v\right)(-1+\cosh\theta) + \left(d_u h_v - h_u d_v\right)\sinh^2\theta \\
&+\left(k_u m_v - m_u k_v\right)(-1+\cosh\theta)^2 + [\left(d_u m_v - h_u k_v + k_u h_v - m_u d_v\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta))]
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

elde edilir. Burada (5.76) denklemini

$$\psi_u \wedge_L \psi_v = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \tag{5.77}$$

ve

$$\left\|\psi_u \wedge_L \psi_v\right\| = A \tag{5.78}$$

alırsak (5.71) verilen M^v timelike kinematik vida yüzeyinin birim normal vektör alanı (5.77) ve (5.78) yardımıyla

$$\overrightarrow{N^v} = \frac{\psi_u \wedge_L \psi_v}{\left\|\psi_u \wedge_L \psi_v\right\|} = \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{A}, \frac{z}{A}\right) \tag{5.79}$$

yazabiliriz. Burada $\left\langle \overrightarrow{N^v}, \overrightarrow{N^v} \right\rangle = 1$ dir.

5.2.2. M^v Timelike Kinematik Vida Yüzeyinin Temel Formları

Tanım 5.2.3. M^v timelike kinematik vida yüzeyinin parametrik fonksiyonu $\psi(u,v)$ olmak üzere her bir noktasındaki teğet düzleminin tabanı $\{\psi_u, \psi_v\}$ olsun. Buna göre M^v timelike kinematik vida yüzeyinin birinci temel formu I^v

$$I^v = E^v du^2 + F^v dudv + G^v dv^2 \tag{5.80}$$

ve ikinci temel formu II^v

$$II^v = e^v du^2 + 2f^v du dv + g^v dv^2 \tag{5.81}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$E^v = \langle \psi_u, \psi_u \rangle_L, F^v = \langle \psi_u, \psi_v \rangle_L, G^v = \langle \psi_v, \psi_v \rangle_L \tag{5.82}$$

fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
e^v &= -\left\langle \psi_u, \overrightarrow{N_u^v} \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{N^v}, \psi_{uu} \right\rangle_L \\
f^v &= -\left\langle \psi_u, \overrightarrow{N_v^v} \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{N^v}, \psi_{uv} \right\rangle_L \\
g^v &= -\left\langle \psi_v, \overrightarrow{N_v^v} \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{N^v}, \psi_{vv} \right\rangle_L
\end{aligned} \tag{5.83}$$

fonksiyonlarına ikinci temel formun katsayıları

Buna göre

$$\begin{gathered}
\langle \delta_u, \delta_u \rangle_L = -a_u^2 + b_u^2 + c_u^2, \langle \delta_v, \delta_v \rangle_L = -a_v^2 + b_v^2 + c_v^2 \\
\langle \tau_u, \tau_u \rangle_L = -d_u^2 + h_u^2 + j_u^2, \langle \tau_v, \tau_v \rangle_L = -d_v^2 + h_v^2 + j_v^2 \\
\langle \zeta_u, \zeta_u \rangle_L = -k_u^2 + m_u^2 + o_u^2, \langle \zeta_v, \zeta_v \rangle_L = -k_v^2 + m_v^2 + o_v^2 \\
\langle \delta_u, \tau_u \rangle_L = \langle \tau_u, \delta_u \rangle_L = -a_u d_u + b_u h_u + c_u j_u \\
\langle \delta_u, \zeta_u \rangle_L = \langle \zeta_u, \delta_u \rangle_L = -a_u k_u + b_u m_u + c_u o_u \\
\langle \tau_u, \zeta_u \rangle_L = \langle \zeta_u, \tau_u \rangle_L = -d_u k_u + h_u m_u + j_u o_u \\
\langle \delta_v, \tau_v \rangle_L = \langle \tau_v, \delta_v \rangle_L = -a_v d_v + b_v h_v + c_v j_v \\
\langle \delta_v, \zeta_v \rangle_L = \langle \zeta_v, \delta_v \rangle_L = -a_v k_v + b_v m_v + c_v o_v \\
\langle \tau_v, \zeta_v \rangle_L = \langle \zeta_v, \tau_v \rangle_L = -d_v k_v + h_v m_v + j_v o_v \\
\langle \delta_u, \delta_u \rangle_L = -a_u a_v + b_u b_v + c_u c_v, \langle \delta_u, \tau_v \rangle_L = -a_u d_v + b_u h_v + c_u j_v \\
\langle \tau_u, \delta_v \rangle_L = -d_u a_v + h_u b_v + j_u c_v, \langle \delta_u, \zeta_v \rangle_L = -a_u k_v + b_u m_v + c_u o_v \\
\langle \zeta_u, \delta_v \rangle_L = -k_u a_v + m_u b_v + o_u c_v, \langle \tau_u, \tau_v \rangle_L = -d_u d_v + h_u h_v + j_u j_v \\
\langle \zeta_u, \zeta_v \rangle_L = -k_u k_v + m_u m_v + o_u o_v, \langle \tau_u, \zeta_v \rangle_L = -d_u k_v + h_u m_v + j_u o_v \\
\langle \zeta_u, \tau_v \rangle_L = -k_u d_v + m_u h_v + o_u j_v
\end{gathered} \tag{5.84}$$

eşitliklerinden

$$E^{v}=\langle\psi_u,\psi_u\rangle_L=\langle\delta_u,\delta_u\rangle_L+\left(\langle\delta_u,\tau_u\rangle_L+\langle\tau_u,\delta_u\rangle_L\right)\sinh\theta$$
$$+\left(\langle\delta_u,\zeta_u\rangle_L+\langle\zeta_u,\delta_u\rangle_L\right)(-1+\cosh\theta)+\langle\tau_u,\tau_u\rangle_L\sinh^2\theta \tag{5.85}$$
$$+\langle\zeta_u,\zeta_u\rangle_L(-1+\cosh\theta)^2+\left(\langle\tau_u,\zeta_u\rangle_L+\langle\zeta_u,\tau_u\rangle_L\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)$$

$$E^{v}=\langle\psi_u,\psi_u\rangle_L=\left(-a_u^2+b_u^2+c_u^2\right)+2\left(-a_ud_u+b_uh_u+c_uj_u\right)\sinh\theta$$
$$+2\left(-a_uk_u+b_um_u+c_uo_u\right)(-1+\cosh\theta)+\left(-d_u^2+h_u^2+j_u^2\right)\sinh^2\theta \tag{5.86}$$
$$+\left(-k_u^2+m_u^2+o_u^2\right)(-1+\cosh\theta)^2+2\left(-d_uk_u+h_um_u+j_uo_u\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)$$

$$F^{v}=\langle\psi_u,\psi_v\rangle_L=\langle\delta_u,\delta_v\rangle_L+\left(\langle\delta_u,\tau_v\rangle_L+\langle\tau_u,\delta_v\rangle_L\right)\sinh\theta$$
$$+\left(\langle\delta_u,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_u,\delta_v\rangle_L\right)(-1+\cosh\theta)+\langle\tau_u,\tau_v\rangle_L\sinh^2\theta \tag{5.87}$$
$$+\langle\zeta_u,\zeta_v\rangle_L(-1+\cosh\theta)^2+\left(\langle\tau_u,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_u,\tau_v\rangle_L\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)$$

$$F^{v}=\langle\psi_u,\psi_v\rangle_L=\left(-a_ua_v+b_ub_v+c_uc_v\right)+[\left(-a_ud_v+b_uh_v+c_uj_v\right)+\left(-d_ua_v+h_ub_v+j_uc_v\right)]\sinh\theta$$
$$+[\left(-a_uk_v+b_um_v+c_uo_v\right)+\left(-k_ua_v+m_ub_v+o_uc_v\right)](-1+\cosh\theta)$$
$$+\left(-d_ud_v+h_uh_v+j_uj_v\right)\sinh^2\theta+\left(-k_uk_v+m_um_v+o_uo_v\right)(-1+\cosh\theta)^2 \tag{5.88}$$
$$+[\left(-d_uk_v+h_um_v+j_uo_v\right)+\left(-k_ud_v+m_uh_v+o_uj_v\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)$$

$$G^{v}=\langle\psi_v,\psi_v\rangle_L=\langle\delta_v,\delta_v\rangle_L+\left(\langle\delta_v,\tau_v\rangle_L+\langle\tau_v,\delta_v\rangle_L\right)\sinh\theta$$
$$+\left(\langle\delta_v,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_v,\delta_v\rangle_L\right)(-1+\cosh\theta)+\langle\tau_v,\tau_v\rangle_L\sinh^2\theta \tag{5.89}$$
$$+\langle\zeta_v,\zeta_v\rangle_L(-1+\cosh\theta)^2+\left(\langle\tau_v,\zeta_v\rangle_L+\langle\zeta_v,\tau_v\rangle_L\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)$$

$$G^{v}=\langle\psi_v,\psi_v\rangle_L=\left(-a_v^2+b_v^2+c_v^2\right)+2\left(-a_vd_v+b_vh_v+c_vj_v\right)\sinh\theta$$
$$+2\left(-a_vk_v+b_vm_v+c_vo_v\right)(-1+\cosh\theta)+\left(-d_v^2+h_v^2+j_v^2\right)\sinh^2\theta \tag{5.90}$$
$$+\left(-k_v^2+m_v^2+o_v^2\right)(-1+\cosh\theta)^2+2\left(-d_vk_v+h_vm_v+j_vo_v\right)\sinh\theta(-1+\cosh\theta)$$

ve

$$\psi_{uu}=\delta_{uu}+\tau_{uu}\sinh\theta+\zeta_{uu}(-1+\cosh\theta)$$
$$\psi_{uv}=\delta_{uv}+\tau_{uv}\sinh\theta+\zeta_{uv}(-1+\cosh\theta) \tag{5.91}$$
$$\psi_{vv}=\delta_{vv}+\tau_{vv}\sinh\theta+\zeta_{vv}(-1+\cosh\theta)$$

olup

$$\begin{aligned}
\delta_{uu} &= \left(a_{uu}, b_{uu}, c_{uu}\right), \delta_{uv} = \left(a_{uv}, b_{uv}, c_{uv}\right), \delta_{vv} = \left(a_{vv}, b_{vv}, c_{vv}\right) \\
\tau_{uu} &= \left(d_{uu}, h_{uu}, j_{uu}\right), \tau_{uv} = \left(d_{uv}, h_{uv}, j_{uv}\right), \tau_{vv} = \left(d_{vv}, h_{vv}, j_{vv}\right) \\
\zeta_{uu} &= \left(k_{uu}, m_{uu}, o_{uu}\right), \zeta_{uv} = \left(k_{uv}, m_{uv}, o_{uv}\right), \zeta_{vv} = \left(k_{vv}, m_{vv}, o_{vv}\right)
\end{aligned} \tag{5.92}$$

eşitliklerini (5.91) de yazarsak

$$\begin{aligned}
\psi_{uu} &= \left(a_{uu}, b_{uu}, c_{uu}\right) + \left(d_{uu}, h_{uu}, j_{uu}\right)\sinh\theta + \left(k_{uu}, m_{uu}, o_{uu}\right)(-1+\cosh\theta) \\
\psi_{uv} &= \left(a_{uv}, b_{uv}, c_{uv}\right) + \left(d_{uv}, h_{uv}, j_{uv}\right)\sinh\theta + \left(k_{uv}, m_{uv}, o_{uv}\right)(-1+\cosh\theta) \\
\psi_{vv} &= \left(a_{vv}, b_{vv}, c_{vv}\right) + \left(d_{vv}, h_{vv}, j_{vv}\right)\sinh\theta + \left(k_{vv}, m_{vv}, o_{vv}\right)(-1+\cosh\theta)
\end{aligned} \tag{5.93}$$

elde edilir. Bu eşitlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
e^{v} = -\left\langle \psi_{u}, \overrightarrow{N_{u}^{v}} \right\rangle_{L} = \left\langle \overrightarrow{N^{v}}, \psi_{uu} \right\rangle_{L} = \frac{1}{A}[&-\left(a_{uu} + d_{uu}\sinh\theta + k_{uu}(-1+\cosh\theta)\right)x \\
&+\left(b_{uu} + h_{uu}\sinh\theta + m_{uu}(-1+\cosh\theta)\right)y \\
&+\left(c_{uu} + j_{uu}\sinh\theta + o_{uu}(-1+\cosh\theta)\right)z]
\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}
f^{v} = -\left\langle \psi_{u}, \overrightarrow{N_{v}^{v}} \right\rangle_{L} = \left\langle \overrightarrow{N^{v}}, \psi_{uv} \right\rangle_{L} = \frac{1}{A}[&-\left(a_{uv} + d_{uv}\sinh\theta + k_{uv}(-1+\cosh\theta)\right)x \\
&+\left(b_{uv} + h_{uv}\sinh\theta + m_{uv}(-1+\cosh\theta)\right)y \\
&+\left(c_{uv} + j_{uv}\sinh\theta + o_{uv}(-1+\cosh\theta)\right)z]
\end{aligned} \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned}
g^{v} = -\left\langle \psi_{v}, \overrightarrow{N_{v}^{v}} \right\rangle_{L} = \left\langle \overrightarrow{N^{v}}, \psi_{vv} \right\rangle_{L} = \frac{1}{A}[&-\left(a_{vv} + d_{vv}\sinh\theta + k_{vv}(-1+\cosh\theta)\right)x \\
&+\left(b_{vv} + h_{vv}\sinh\theta + m_{vv}(-1+\cosh\theta)\right)y \\
&+\left(c_{vv} + j_{vv}\sinh\theta + o_{vv}(-1+\cosh\theta)\right)z]
\end{aligned} \tag{5.96}$$

bulunur.

5.2.3. M^v Timelike Kinematik Vida Yüzeyinin Gauss ve Ortalama Eğriliği

Tanım 5.2.4. M^{v} timelike kinematik vida yüzeyinin bir $p \in M^{v}$ noktasındaki Gauss ve Ortalama eğrilikleri sırasıyla K^{v} ve H^{v} olsun. Bu eğriliklerin birinci ve ikinci temel formun katsayıları cinsinden değerleri

$$K^v = \frac{e^v g^v - \left(f^v\right)^2}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \tag{5.97}$$

$$H^v = \frac{e^v G^v - 2 f^v F^v + g^v E^v}{2\left(E^v G^v - \left(F^v\right)^2\right)} \tag{5.98}$$

olur. Buna göre, birinci ve ikinci temel formun katsayı değerleri yerlerine yazılarak M^v timelike kinematik vida yüzeyinin Gauss ve Ortalama eğrilikleri bulunur.

5.2.4. M^v Timelike Kinematik Vida Yüzeyinin Şekil Operatörü Matrisi

Tanım 5.2.5. M^v timelike kinematik vida yüzeyinin parametrik ifadesi $\psi(u,v)$, birim normal vektör alanı $\overrightarrow{N^v}$ ve şekil operatörü S^v olsun.

M^v timelike yüzeyinin $\{\psi_u, \psi_v\}$ taban vektörlerinin S^v altındaki görüntüleri

$$-S^v(\varphi_u) = \overrightarrow{N_u^v} = \frac{f^v F^v - e^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_u + \frac{e^v F^v - f^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_v \tag{5.99}$$

$$-S^v(\varphi_v) = \overrightarrow{N_v^v} = \frac{g^v F^v - f^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_u + \frac{f^v F^v - g^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2}\varphi_v \tag{5.100}$$

olur. Buna göre S^v şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S^v = \begin{pmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \varsigma_3 & \varsigma_4 \end{pmatrix} \tag{5.101}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= -\frac{f^v F^v - e^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \quad , \quad \varsigma_2 = -\frac{e^v F^v - f^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \\ \varsigma_3 &= -\frac{g^v F^v - f^v G^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \quad , \quad \varsigma_4 = -\frac{f^v F^v - g^v E^v}{E^v G^v - \left(F^v\right)^2} \end{aligned} \qquad \text{dir.} \tag{5.102}$$

Özel Durum 5.2.1.

M^v timelike kinematik vida yüzeyinde θ açılık dönme hareketini ifade eden $q = \cosh\frac{\theta}{2} + \sinh\frac{\theta}{2}\overrightarrow{N}$ timelike birim kuaterniyonunda $\theta = 0^\circ$ alınırsa $r = 1$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(p) &= qp\overline{q} + \lambda\overrightarrow{N} \\ &= p + \lambda\overrightarrow{N} \end{aligned}$$

fonksiyonu ile timelike kinematik vida yüzeyi M^r timelike paralel yüzey olur.

Örnek 5.2.1. $M = \{\phi(\upsilon,\nu) \mid \phi(\upsilon,\nu) = (\sinh\upsilon, \cosh\upsilon, \nu), -1 \le \upsilon \le 1, -1 \le \nu \le 1\}$ hiperbolik silindirini düşünelim.

M yüzeyinin birim normal vektör alanını bulalım

$\phi_\upsilon = (\cosh\upsilon, \sinh\upsilon, \nu)$ ve $\phi_\nu = (0,0,1)$ olmak üzere

$\phi_\upsilon \wedge_L \phi_\nu = (-\sinh\upsilon, -\cosh\upsilon, 0)$ ve $\|\phi_\upsilon \wedge_L \phi_\nu\| = 1$ olduğundan

Yüzeyin birim normal vektör alanı $\overrightarrow{N} = \dfrac{\phi_\upsilon \wedge_L \phi_{\nu\nu}}{\|\phi_\upsilon \wedge_L \phi_\nu\|} = (-\sinh\upsilon, -\cosh\upsilon, 0)$ olarak elde edilir.

$P = (0,0,1) \in M$ noktası için spacelike birim normal vektörü $\overrightarrow{N_P} = (0,-1,0)$ olur. $\left\langle \overrightarrow{N_P}, \overrightarrow{N_P} \right\rangle_L = 1$ olduğundan M timelike yüzey olur.

M yüzeyinin birinci temel form katsayıları Tanım 3.1.7. de verilen (3.7) denklemlerini kullanarak

$$E = -1,\ F = 0,\ G = 1$$

ve ikinci temel form katsayıları Tanım 3.1.7. de verilen (3.9) denklemlerini kullanarak

$$e = -1,\ f = 0,\ g = 0$$

M yüzeyinin ortalama eğriliği ve gauss eğriliği sırasıyla Tanım 3.1.7. de verilen (3.12) ve (3.13) denklemleri hesaplandığında

$$H=\frac{1}{2}\ ,K=0$$

dir. Ve şekil operatörü matrisi

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

olur.

P noktası için ortalama eğriliği, gauss eğriliği ve şekil operatörü matrisi sırasıyla

$$H(P)=\frac{1}{2}\ ,\ K(P)=0\ ,S(P)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

dir.

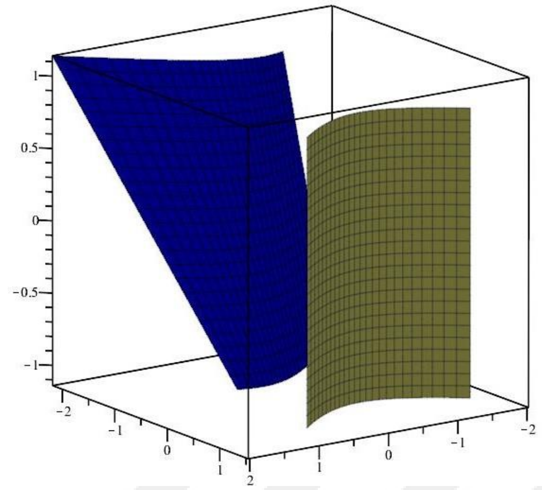
Şimdi M timelike yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı etrafında $\theta=\frac{\pi}{6}$ açılık dönme ve $\lambda=2$ birim ötelenmesiyle elde edilen M^{ν} timelike kinematik vida yüzeyini bulalım.

$$\begin{aligned}&\psi(\upsilon,\nu)=R\varphi(\upsilon,\nu)+\lambda N(\upsilon,\nu)\\&\psi(\upsilon,\nu)=\left(\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\cosh(\upsilon)\nu\text{ - }\sinh(\upsilon),\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\sinh(\upsilon)\nu\text{ - }\cosh(\text{u}),\cosh\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu\right)\end{aligned}$$

dir. $\psi(u,v)$, M^{ν} timelike kinematik vida yüzeyinin parametrik ifadesidir.

$$\begin{aligned}M^{\nu}=\{\psi(\upsilon,\nu)\,|\,\psi(\upsilon,\nu)=\left(\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\cosh(\upsilon)\nu\text{ - }\sinh(\upsilon),\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\sinh(\upsilon)\nu\text{ - }\cosh(\upsilon),\cosh\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu\right),\\ -1\le\upsilon\le 1,-1\le\nu\le 1\}\end{aligned}$$

dir (Şekil 5.3). M^{ν} yüzeyinin P noktasındaki görüntüsü $f(P)=(0,-1,0)$ dir.



Şekil 5.3. Sarı : M timelike yüzey. Mavi : M^{ν} timelike kinematik vida yüzeyi

$$\psi_{\upsilon} = \left(\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\sinh(\upsilon)\nu - \cosh(\upsilon), \sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\cosh(\upsilon)\nu - \sinh(\upsilon), 0 \right)$$

$$\psi_{\nu} = \left(\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\cosh(\upsilon), \sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\sinh(\upsilon), \cosh\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

eşitliklerini kullanarak Tanım 5.2.2. den spacelike birim normal vektör alanı

$$\overrightarrow{N^{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu^2 + \cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \nu^2}} \begin{pmatrix} \left(-\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\cosh(\upsilon)\nu + \sinh(\upsilon) \right)\cosh\left(\frac{\pi}{6}\right), \\ \left(-\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\sinh(\upsilon)\nu + \cosh(\upsilon) \right)\cosh\left(\frac{\pi}{6}\right), \\ \sinh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu \end{pmatrix}$$

ve $f(P)$ noktasındaki spacelike birim normal vektörü $\overrightarrow{N^{\nu}_{f(P)}} = (0,1,0)$ dir.

M^{ν} timelike kinematik vida yüzeyinin temel form katsayıları Tanım 5.2.3. den

$$E = \cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu^2 - \nu^2 - 1, \; F = \sinh\left(\frac{\pi}{6}\right), \; G = 1$$

$$e=\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu^2-\nu^2-1\right)}{\sqrt{-\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu^2+\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\nu^2}},\ f=\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{6}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{-\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\nu^2+\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\nu^2}},\ g=0$$

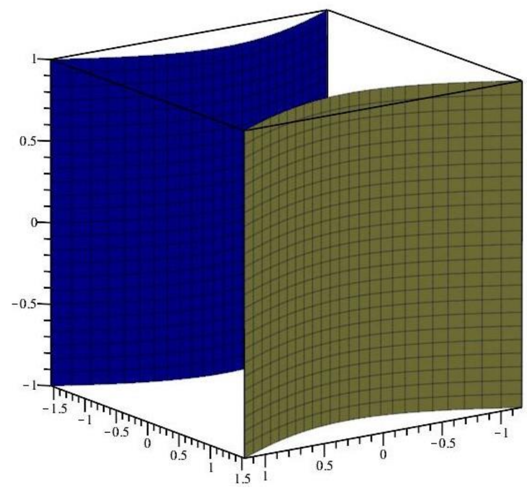
dir. Temel form katsayıları yardımıyla Tanım 5.2.4. ve Tanım 5.2.5. deki hesaplamalar yapılarak M^v timelike kinematik vida yüzeyinin $f(P)$ noktasındaki ortalama eğriliği, gauss eğriliği ve şekil operatörü matrisi sırasıyla

$$H^v(f(P))=\frac{-1+2\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\quad,\quad K^v(f(P))=\tanh^2\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

$$S^v(f(P))=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\sinh\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\cosh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} & \tanh^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix}$$

dir. M timelike yüzeyi için özel durum 5.2.1. i düşünelim yani $\theta=0^\circ$ ve $\lambda=2$ olsun. Bu durumda timelike kinematik vida yüzeyi M^r timelike paralel yüzeyi olur ve

$$M^r=\left\{\psi(\upsilon,\nu)\,|\,\psi(\upsilon,\nu)=\left(-\sinh\upsilon,-\cosh\upsilon,\nu\right),-1\leq\upsilon\leq1,-1\leq\nu\leq1\right\}$$ dir (Şekil 5.4).



Şekil 5.4. Sarı : M timelike yüzey. Mavi : M^r timelike paralel yüzey

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında alınan M yüzeyinin noktalarına kinematik geometrinin temel araçlarından olan dönme ve öteleme hareketlerini (vida hareketi) uygulayarak M^v vida yüzeyi elde ediliyor. M ve M^v yüzeylerinin temel diferansiyel geometrik olan birim normal vektör alanı, şekil operatörü, temel formları, gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanıyor. Böylece vida hareketi altında bu kavramlardaki değişimler inceleniyor. Vida hareketinin özel durumu olarak dönme açısı $\theta = 0^\circ$ alınarak kinematik M^v vida yüzeyi diferansiyel geometride çok iyi bilinen paralel yüzeye dönüşür.

Kinematik geometri kavramlarıyla diferansiyel geometrinin temel kavramlarının incelenmesi farklı bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım diferansiyel geometrinin diğer yüzey ve eğrilerine uygulanarak çok daha zengin ve farklı sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akutagawa, K., & Nishikawa, S. (1990). The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. *Töhoku Mathematical Journal,* 42(1), 67-82.

Birman, G.S., & Nomizu, K. (1984). The Gauss–Bonnet theorem for two-dimensional spacetimes. *Michigan Mathematical Journal,* 31, 77-81.

Beem, J.K., & Ehrlich, P.E. (1981). *Global Lorentzian Geometry.* New York: Marcel Dekker Inc.

Beem, J.K., Ehrlich, P.E., & Easley, K.E. (1996). *Global Lorentzian Geometry*. New York: Marcel Dekker Inc.

Blaschke, W. (1949). *Diferensiyel Geometri Dersleri*. İstanbul Üniversitesi.

Ekici, C. (2019). *Diferensiyel Geometri Eğriler ve Yüzeyler Ders Notları*. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi: ESOGÜ Basımevi.

Görgülü, A., & Çöken, C. (1994). The dupin indicatrix for parallel psendo-Euclidean hypersurfaces in psendo-Euclidean space in semi-Euclidean space $\mathbb{R}_1^n$. *Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences (Mathematics Series),* 7 (1994), 221–225.

Gray, A. (1983). *Modern differential geometry of curves and surfaces*. CRC Press Inc.

Hacısalihoğlu, H. H., (2000). *Diferensiyel Geometri*. Hacısalihoğlu Yayınları.

Hou, Z. H., & Ji, F. (2007). Helicoidal surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 325(1), 101-113.

Inoguchi, J. (1998). Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3- space. *Tokyo Journal of Mathematical*, 21(1), 141-152.

Kemer, Y. (2015). *Eğri ve yüzeylerin kinematik geometrisi üzerine* (Doktora Tezi). Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.

Kula, L. (2003). *Bölünmüş Kuaterniyonlar ve geometrik uygulamaları* (Doktora Tezi). Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kula, Y. & Yaylı, Y. (2006). Dual splt quaternions and screw motion in Minkowski 3-Space. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A: Science,* 30(3), 245-258.

Kühnel, W. (1994). Ruled W-surfaces, *Archiv der Mathematik,* 62, 475-480.

Kühnel, W., (2006). *Differential geometry of curves-surfaces-manifolds, Second Edition.* Providence: AMS.

Lopez, R. (2008). *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz Minkowski space, Mini-Course taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP).* University of Sao Paulo, Brasil.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Müller, H.R. (1963). *Kinematik Dersleri*. Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. New York: Academic Press.

O'Neill, B. (2006). *Elementary Differential Geometry*. New York: Academic Press.

Özdemir, M., and Ergin, A.A. (2005). Some Geometric Applications Of Timelike Quaternions. *16th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society,* 16, 108-115.

Pressley, A. (2010). *Elementary diferential geometry*. Springer-Verlag London Ltd.

Sabuncuoğlu, A. (2010). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık.

Sodsiri, W. (2005). *Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space* (PhD Thesis). Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

Turgut, A. (1995). *3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler* (Doktora Tezi). Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Uras, F. (1992). *Diferensiyel Geometri Dersleri*. Yıldız Teknik Üniversitesi Yayın Komisyonu.

Ünlütürk, Y. (2011). *3-boyutlu Minkowski uzayında paralel regle yüzeyler üzerine* (Doktora Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Ünlütürk, Y., & Özüsağlam, E. (2013). On Parallel Surfaces In Minkowski 3-Space, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics,* 3(2), 214-222.

ÖZGEÇMİŞ

Sefa KOÇUK 1990 yılında Kütahya'da doğdu. İlk ve Orta Öğretimi Kütahya'da tamamladı. 2016 yılında Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl formasyon belgesini aldı. 2017 yılında Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2016 yılından itibaren ücretli öğretmen olarak farklı okullarda Matematik öğretmenliği yaptı ve halen Kütahya Mesleki Eğitim Merkezinde Matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.