İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WEYL UZAYLARININ KONHARMONİK DÖNÜŞÜMÜ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Füsun ÖZEN
509950040012

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Şubat 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 16 Eylül 1999

Tez Danışmanı	:	**Doç.Dr. Aynur Uysal**
Diğer Jüri Üyeleri	:	**Prof.Dr. Abdülkadir Özdeğer (İ.T.Ü)**
		Prof.Dr. İ.Hakkı Erdoğan (İ.T.Ü)
		Prof.Dr. Yılmaz Akyıldız (B.Ü)
		Prof.Dr. Ertuğrul Özdamar (U.Ü)

EYLÜL 1999

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yönlendirilmesinde bilgisi, önerileri ve eşsiz teşviki ile bana rehberlik eden değerli hocam Doç.Dr. Aynur Uysal'a teşekkürlerimi sunarım.

Eylül, 1999 **Yük. Mat. Müh. Füsun Özen**

İÇİNDEKİLER

WEYL UZAYLARININ KONHARMONİK DÖNÜŞÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada, g_{ij} metrik tensörü ve T_k komplemanter vektörü ile verilen $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzaylarının konharmonik dönüşümü tanımlanmış ve bu dönüşüm altında, bazı özel Weyl uzaylarının özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışma, üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Weyl uzaylarına ait bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Weyl uzaylarında konharmonik dönüşüm tanımlanmış ve bu dönüşüm altında invaryant kalan büyüklükler elde edilmiştir. Daha sonra, bu ifadelerin yardımıyla, bazı Weyl uzaylarının konharmonik dönüşümü ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Teorem: $\tau : W_n \to W_n^*$ konform dönüşümünün konharmonik olması için gerek ve yeter koşul, W_n'nin skaler eğriliğinin invaryant kalmasıdır.

Teorem: $\tau : W_n \to W_n^*$ konform dönüşümünün konharmonik olması için gerek ve yeter koşul, $T^i = g^{ij}T_j$ olmak üzere, $g^{ij}\nabla_j T_i + \frac{1}{2}(n-2)T^i T_i$ ifadesinin invaryant kalmasıdır.

Teorem: $\tau : W_n \to W_n^*$ konharmonik bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm altında W_n ve W_n^* Weyl uzaylarının Ricci-Rekürant olması için gerek ve yeter koşul

$$P_{kij} = \frac{2}{(2-n)} P_{k[ij]} \tag{1}$$

olmasıdır, burada

$$P_{kij} = \nabla_k P_{ij} - \phi_k P_{ij} - P_{kj} P_i - P_{ik} P_j + g_{ik} P^h P_{hj} + g_{jk} P^h P_{ih} \tag{2}$$

$$P_{k[ij]} = \nabla_k P_{[ij]} - \phi_k P_{[ij]} - P_{[kj]} P_i - P_{[ik]} P_j + g_{ik} P^h P_{[hj]} + g_{jk} P^h P_{[ih]} \tag{3}$$

$$P_{[ij]} = \nabla_{[j} P_{i]} \tag{4}$$

dir.

Teorem: W_n ve W_n^* Ricci-Rekürant Weyl uzayları olsun. Eğer $\tau : W_n \to W_n^*$ konharmonik bir dönüşüm ise $P^h R_{[hj]} = 0$ bağıntısı sağlanır.

Teorem: W_n ve W_n^* uzaylarının Einstein-Weyl uzayları olduğunu kabul edelim. $\tau : W_n \to W_n^*$ konformal dönüşümünün aynı zamanda konharmonik bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, $R_{(ij)}$ tensörünün invaryant kalmasıdır.

Teorem: W_n ve W_n^* uzaylarının Einstein-Weyl uzayları olduğunu kabul edelim. $\tau : W_n \to W_n^*$ konformal dönüşümünün aynı zamanda konharmonik bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, $P_{ij} = \nabla_{[j} P_{i]}$ olmasıdır.

Üçüncü bölümde ise, konharmonik eğrilik tensörü elde edilmiş ve bu tensör yardımıyla konharmonik eğrilik tensörüne sahip rekürant, ricci-konharmonik-rekürant ve ricci-konharmonik-birekürant Weyl uzayları tanımlanarak bu uzaylara ait aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem: n-boyutlu bir Weyl uzayının K^h_{ijk} konharmonik eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$K^h_{ijk} + K^h_{jki} + K^h_{kij} \tag{5}$$

$$K^h_{ijk} = -K^h_{ikj} \tag{6}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} R \quad (K_{ij} = K^h_{ijh}) \tag{7}$$

Teorem: W_n Weyl uzayı konharmonik eğrilik tensörüne sahip rekürant bir uzay ise, $\phi_s - 2T_s$ ifadesi lokal olarak gradyenttir.

Teorem: W_n Weyl uzayı ricci-rekürant bir uzay olsun. Eğer W_n, konharmonik eğriliğe sahip rekürant bir Weyl uzayı ise, bu uzay aynı zamanda rekürranttır.

Teorem: W_n uzayı ricci-konharmonik-birekürant tensörüne sahip bir Weyl uzayı olsun. ϕ_{sr} birekürans tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşul, W_n'nin Riemannien olmasıdır.

Teorem: W_n Weyl uzayına ait konformal eğrilik tensörü C^h_{ijk} ve konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk} olmak üzere, bunlar arasında

$$K^h_{ijk} = C^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}(\delta^h_k K_{ij} - \delta^h_j K_{ik}) \tag{8}$$

bağıntısı mevcuttur.

Teorem: W_n Weyl uzayı konharmonik rekürant bir uzay ise, aynı zamanda konformal rekürranttır.

CONHARMONİC TRANSFORMATIONS OF WEYL SPACES

SUMMARY

In this work, the properties of some special Weyl spaces, under a conharmonic transformation are investigated.

This work contains three chapters.

In chapter I, the fundamental definitions and theorems concerning the Weyl space $W_n(g_{ij}, T_k)$ are given.

In chapter II, the conharmonic transformations of Weyl spaces are defined and the invariants of this transformation are obtained.

Next, by means of these invariants, the following theorems concerning the conharmonic transformations of some Weyl spaces are proved.

Theorem: In a Weyl space $W_n(g_{ij}, T_k)$, a necessary and sufficient condition that the conformal transformation $\tau : W_n \rightarrow W_n^*$ be conharmonic is that the scalar curvature be unaltered.

Theorem: In a Weyl space $W_n(g_{ij}, T_k)$, a necessary and sufficient condition that the conformal transformation $\tau : W_n \rightarrow W_n^*$ be conharmonic is that the expression $g^{ij}\nabla_j T_i + \frac{1}{2}(2-n)T^i T_i$ be unaltered, where $T^i = g^{ij}T_j$.

Theorem: Let $\tau : W_n \rightarrow W_n^*$ be a conharmonic transformation. Under this transformation, a necessary and sufficient condition that W_n and W_n^* be two ricci-recurrent Weyl sapces is that the expression

$$P_{kij} = \frac{2}{(n-2)} P_{k[ij]} \tag{1}$$

be satisfied, where

$$P_{kij} = \nabla_k P_{ij} - \phi_k P_{ij} - P_{kj}P_i - P_{ik}P_j + g_{ik}P^h P_{hj} + g_{jk}P^h P_{ih} \tag{2}$$

$$P_{k[ij]} = \nabla_k P_{[ij]} - \phi_k P_{[ij]} - P_{[kj]}P_i - P_{[ik]}P_j + g_{ik}P^h P_{[hj]} + g_{jk}P^h P_{[ih]} \tag{3}$$

$$P_{[ij]} = \nabla_{[j}P_{i]} \tag{4}$$

Theorem: Let W_n and W_n^* be ricci-recurrent Weyl spaces. If $\tau : W_n \rightarrow W_n^*$ is a conharmonic transformation, then the condition $P^h R_{[hj]} = 0$ holds.

Theorem: Let W_n and W_n^* be two Einstein-Weyl spaces. A necessary and sufficient condition that $\tau : W_n \rightarrow W_n^*$ be a conharmonic transformation is that $R_{(ij)}$ be an invariant.

Theorem: Let W_n and W_n^* be two Einstein-Weyl spaces. A necessary and sufficient condition $\tau : W_n \rightarrow W_n^*$ be a conharmonic transformation is that the condition $P_{ij} = \nabla_{[j}P_{i]}$ be satisfied.

In chapter III, the conharmonic curvature tensor is obtained and by means of this tensor, conharmonically recurrent, ricci-conharmonic-recurrent and ricci-conharmonic-birecurrent Weyl spaces are defined. In this case, the following theorems concerning these spaces are proved.

Theorem: In an n-dimensional Weyl space, the conharmonic curvature tensor, K^h_{ijk}, satisfies the following conditions:

$$K^h_{ijk} + K^h_{jki} + K^h_{kij} \tag{5}$$

$$K^h_{ijk} = -K^h_{ikj} \tag{6}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} R \quad (K_{ij} = K^h_{ijh}) \tag{7}$$

Theorem: If W_n Weyl space is a conharmonically recurrent, then $\phi_s - 2T_s$ is locally gradient.

Theorem: Let W_n be a ricci-recurrent Weyl space. If W_n is conharmonically recurrent Weyl space, then W_n is recurrent.

Theorem: Let W_n be a ricci-conharmonic-birecurrent Weyl space. A necessary and sufficient condition that the birecurrence tensor ϕ_{sr} be symmetric is that W_n be a Riemannien.

Theorem: Let C^h_{ijk} be the conformal curvature tensor and K^h_{ijk} be the conharmonic curvature tensor of a Weyl space. Then the condition

$$K^h_{ijk} = C^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}(\delta^h_k K_{ij} - \delta^h_j K_{ik}) \tag{8}$$

holds.

Theorem: If W_n is a conharmonically recurrent Weyl space, then it is also conformally recurrent.

1. GİRİŞ

g_{ij} metrik tensörüne ve simetrik ∇ konneksiyonuna sahip diferensiyellenebilir bir W_n manifoldunda

$$\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0 \tag{1.1}$$

şartı sağlanıyorsa, W_n'ye n-boyutlu Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ ile gösterilir. T_k, bir kovaryant vektör alanı olup, komplemanter vektör adını alır.

λ bir skaler fonksiyon olmak üzere, g_{ij} metrik tensörünün

$$\breve{g_{ij}} = \lambda^2 g_{ij} \tag{1.2}$$

şeklindeki dönüşümü altında, T_k komplemanter vektörü,

$$\breve{T}_k = T_k + \partial_k ln\lambda \tag{1.3}$$

şeklinde değişmektedir [1].

∇_k simetrik konneksiyonunun Γ^i_{kl} ile gösterilen katsayılar ve metrik tensör yardımıyla

$$\Gamma_{jki} = g_{ih}\Gamma^h_{jk} \tag{1.4}$$

fonksiyonları tanımlanmış olsun [2].

Riemann Geometrisi'ndeki ifadeye benzer şekilde, Weyl uzayının g_{ij} metrik tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj}\Gamma^h_{ik} - g_{ih}\Gamma^h_{jk} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

∇_k simetrik konneksiyonunun Γ^i_{kl} katsayıları için (1.1) den

$$\Gamma^i_{kl} = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} - g^{im}\left(g_{mk}T_l + g_{ml}T_k - g_{kl}T_m\right) \tag{1.6}$$

bulunur. Buna göre (1.1) bağıntısını sağlayan T_k kovaryant vektörü ve g_{ij} metrik tensörü varsa, (1.6) ifadesi simetrik bir konneksiyon tanımlar.

Bir A büyüklüğü metrik tensörün (1.2) deki dönüşümü altında

$$\breve{A} = \lambda^p A \tag{1.7}$$

şeklinde değişiyorsa, A'ya g_{ij} tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı bir uydusu denir [3].

g_{ij} tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş türevi

$$\dot{\partial}_k A = \partial_k A - pT_k A \tag{1.8}$$

ile tanımlanır [4].

g_{ij} tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\dot{\nabla}_k A = \nabla_k A - pT_k A \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanmaktadır ve ∇_k alışılmış kovaryant türevi göstermektedir.

Bu takdirde, kontravaryant bileşeni A^h ve ağırlığı $\{p\}$ olan bir A uydusunun genelleştirilmiş kovaryant türevi (1.9) yardımıyla

$$\dot{\nabla}_k A^h = \dot{\partial}_k A^h + \Gamma^h_{kl} A^l \tag{1.10}$$

dir. (1.10) bağıntısı g_{ij} metrik tensörün herhangi bir A uydusu için geçerlidir.

Bir uydunun ağırlığını koruyan genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş kovaryant türev aşağıdaki bağıntıları sağlar

$$\dot{\partial}_k(AB) = (\dot{\partial}_k A)B + A(\dot{\partial}_k B) \tag{1.11}$$

$$\dot{\nabla}_k(AB) = (\dot{\nabla}_k A)B + A(\dot{\nabla}_k B) \tag{1.12}$$

g_{ij} metrik tensörü ve T_k komplemanter vektörü (1.1) ifadesini sağlıyorsa, (1.2) ve (1.3) bağıntıları ile verilen $\breve{g}_{ij}$ metrik tensörü ve $\breve{T}_k$ komplemanter vektörü de aynı bağıntıyı sağlar. (1.2) ve (1.3) ile verilen bu dönüşüme Gauge dönüşümü adı verilir.

(1.2), (1.3) ve (1.4)'den Γ^h_{ij}'nin Gauge invaryant olduğu kolayca görülebilir.

R^i_{jkl}, W_n Weyl uzayının eğrilik tensörü olmak üzere

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk} \tag{1.13}$$

şeklindedir. R^i_{jkl}'nin ağırlığı $\{0\}$ dır ve

$$R_{mjkl} = g_{mi} R^i_{jkl} \tag{1.14}$$

bağıntısını gerçekler. R_{mjkl} tensörüne, W_n nin kovaryant eğrilik tensörü denir ve ağırlığı $\{2\}$ dir.

(1.14) ifadesi g^{ml} ile çarpılır, m üzerine toplam alınır ve $g^{ml}g_{im} = \delta_i^l$ olduğu hatırlanırsa

$$g^{ml}R_{mjkl} = R_{jk} \tag{1.15}$$

dir. R_{jk} tensörüne, W_n uzayının Ricci tensörü denir.

$$g^{jk}R_{jk} = R \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlanan R ifadesine W_n uzayının skaler eğriliği adı verilir.

Weyl konneksiyonu metrik olmadığından, Ricci tensörü simetrik değildir. Bu takdirde, $R_{(ij)}$ ve $R_{[ij]}$,sırasıyla, R_{ij} tensörünün simetrik ve antisimetrik kısımlarını göstermek üzere

$$R_{ij} = R_{(ij)} + R_{[ij]} \tag{1.17}$$

dir. Diğer taraftan

$$R_{(ij)} = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}), \quad R_{[ij]} = \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = n\nabla_{[i}T_{j]} \tag{1.18}$$

dir.

Bir Weyl uzayına ait eğrilik tensörü R^h_{ijk} ise, bu uzayda I.Bianchi Özdeşliği

$$R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0 \tag{1.19}$$

dir [5].

2. WEYL UZAYLARININ KONHARMONİK DÖNÜŞÜMÜ VE BU DÖNÜŞÜM ALTINDA İNVARYANT KALAN BÜYÜKLÜKLER

2.1. Weyl Uzaylarının Konharmonik Dönüşümü

Bu bölümde, $W_n(g_{ij}, T_k)$ ve $W_n^*(g_{ij}^*, T_k^*)$ şeklinde verilen iki Weyl uzayı arasında ele alınan τ konformal dönüşümü yardımıyla konharmonik dönüşüm tanımını vereceğiz.

Bir A^i kontravaryant vektör alanının u^i'ye göre kovaryant türevi,

$$\nabla_i A^i = \partial_i A^i + \Gamma_{ji}^i A^j \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada Γ_{ji}^i katsayıları için (1.6) bağıntısı yardımıyla

$$\Gamma_{ji}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j \sqrt{g} - nT_j \tag{2.2}$$

bulunur. Eğer (2.2) ifadesi (2.1)'de yerine yazılırsa

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (A^i \sqrt{g}) - nA^i T_i \tag{2.3}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (1.9) ve (2.3) bağıntıları kullanılarak A^i'nin genelleştirilmiş kovaryant türevinin daraltılmışı

$$\begin{aligned} dot\nabla_i A^i = div A^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_i (A^i \sqrt{g}) - \sqrt{g}(n-1) A^i T_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \dot{\partial}_i (A^i \sqrt{g}) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeye A^i vektör alanının diverjansı adı verilir [6].

A, $\{p\}$ ağırlıklı, diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. A'nın u^k ve u^l'ye göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş kovaryant türevi (1.9) yardımıyla

$$\dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_l A = \nabla_k \nabla_l A - p(\nabla_k T_l) A - pT_l(\nabla_k A) - pT_k(\nabla_l A) + p^2 T_k T_l A \tag{2.4}$$

olarak bulunur.

Eğer $\nabla_k\nabla_l A = \partial_k\partial_l A - \Gamma^h_{kl}\partial_h A$ ve $\nabla_k T_l = \partial_k T_l - \Gamma^h_{kl}T_h$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{\partial}_k\dot{\partial}_l A &= \nabla_k\nabla_l A + \Gamma^h_{kl}(\partial_h A) - p(\nabla_k T_l)A - p\Gamma^h_{kl}T_h A \\ &- pT_l(\nabla_k A) - pT_k(\nabla_l A) + p^2 T_k T_l A\end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. Bu taktirde, (2.4) ve (2.5) bağıntıları yardımıyla

$$\dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_l A = \dot{\partial}_k\dot{\partial}_l A - \Gamma^h_{kl}\dot{\partial}_h A \tag{2.6}$$

olduğu kolayca görülür.

A'nın gradyenti

$$gradA = g^{kl}\dot{\partial}_l A = g^{kl}\dot{\nabla}_l A$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda, A'nın Laplasyeni

$$\Delta A = div(gradA) = \dot{\nabla}_k(g^{kl}\dot{\nabla}_l A)$$

dir. Böylece

$$\Delta A = g^{kl}\dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_l A \tag{2.7}$$

olarak bulunur.

$W_n(g_{ij}, T_k)$ ve $W^*_n(g^*_{ij}, T^*_k)$ Weyl uzayları arasında

$$\tau : W_n \to W^*_n$$

konformal dönüşümünü ele alalım. [1]'e göre W_n ve W^*_n Weyl uzaylarının, sırasıyla, g_{ij} ve g^*_{ij} metrik tensörlerinin konformal dönüşümü

$$g^*_{ij} = g_{ij}, \qquad g^{*ij} = g^{ij} \tag{2.8}$$

şeklinde verilmiştir. (1.6) ve (2.8) kullanılarak, W^*_n uzayının Γ^{*i}_{kl} konneksiyon katsayıları için

$$\begin{aligned}\Gamma^{*i}_{kl} &= \left\{ {i \atop kl} \right\}^* - g^{*im}\left(g^*_{mk}T^*_l + g^*_{ml}T^*_k - g^*_{kl}T^*_m\right) \\ &= \left\{ {i \atop kl} \right\} - g^{im}\left(g_{mk}T_l + g_{ml}T_k - g_{kl}T^m\right) + g^{im}(g_{mk}P_l + g_{ml}P_k - g_{kl}P_m) \\ &= \Gamma^i_{kl} + \delta^i_k P_l + \delta^i_l P_k - g_{kl}g^{im}P_m\end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. Burada, P_k vektörüne konformal dönüşüm vektörü adı verilir ve

$$P_k = T_k - T^*_k \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır [1,7].

g_{ij} metrik tensörüne sahip $\{u\}$ lokal koordinatlı ve n-boyutlu W_n $(n > 2)$ Weyl uzayına ait bir A harmonik fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu taktirde,

$$g^{kl}\dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_l A = 0 \tag{2.11}$$

dir.

g_{ij} metrik tensörünün (2.8)'deki ve $\{p\}$ ağırlıklı A harmonik fonksiyonunun $\sigma_{,k} = P_k = T_k - T_k^*$ olmak üzere

$$A^* = e^{c\sigma} A \tag{2.12}$$

şeklindeki konformal dönüşümlerini göz önüne alalım. (2.6) ve (2.7) bağıntıları kullanılarak

$$\Delta^* A^* = g^{*kl}\dot{\nabla}_k^*\dot{\nabla}_l^* A^* = g^{*kl}(\dot{\partial}_k^*\dot{\partial}_l^* A^* - \Gamma_{kl}^{*h}\dot{\partial}_h^* A^*) \tag{2.13}$$

olarak elde edilir. (2.12) ifadesinin her iki tarafının u^l'ye göre genelleştirilmiş türevi alınırsa ve A harmonik fonksiyonunun $\{p\}$ ağırlıklı olduğu kullanılırsa, (1.8) ve (2.10)'den

$$\dot{\partial}_l^* A^* = e^{c\sigma}(\dot{\nabla}_l A + (c+p)P_l A) \tag{2.14}$$

elde edilir. (2.14) ifadesinin her iki tarafının u^k'ya göre genelleştirilmiş türevi alınırsa ve (1.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\partial}_k^*\dot{\partial}_l^* A^* &= \dot{\partial}_k^*[e^{c\sigma}((c+p)P_l A + \partial_l A - pT_l A)]\\ &= \partial_k^*[e^{c\sigma}((c+p)P_l A + \partial_l A - pT_l A)]\\ &\quad - pT_k^*[e^{c\sigma}((c+p)P_l A + \partial_l A - pT_l A)]\end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur. (2.10) bağıntısı kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa (2.15)

$$\begin{aligned}\dot{\partial}_k^*\dot{\partial}_l^* A^* = e^{c\sigma}[&(c+p)^2 P_k P_l A + (c+p)P_k(\partial_l A) - p(c+p)P_k T_l A\\ &+ (c+p)(\partial_k P_l)A + (c+p)P_l(\partial_k A) + \partial_k\partial_l A - p(\partial_k T_l)A\\ &- pT_l(\partial_k A) - p(c+p)T_k P_l A - pT_k(\partial_l A) + p^2 T_k T_l A]\end{aligned} \tag{2.16}$$

halini alır.

Diğer taraftan, Γ_{kl}^h'nin konformal dönüşümü olan (2.9) ifadesi göz önüne alınırsa ve (2.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_{kl}^{*h}\dot{\partial}_h^* A^* = e^{c\sigma}[&(c+p)\Gamma_{kl}^h P_h A + \Gamma_{kl}^h(\partial_h A) - p\Gamma_{kl}^h T_h A\\ &+ (c+p)P_k P_l A + (\partial_k A)P_l - pT_k P_l A + (c+p)P_k P_l A\\ &+ P_l(\partial_k A) - pT_k P_l A - (c+p)g_{kl}g^{mh}P_m P_h A\\ &- g_{kl}g^{mh}P_m(\partial_h A) + pg_{kl}g^{mh}P_m T_h A]\end{aligned} \tag{2.17}$$

bulunur. Bu durumda, (2.16) ve (2.17) bağıntıları (2.13)'de yerine yazılırsa ve (2.8) kullanılırsa, A harmonik fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}\Delta^*A^* = g^{kl}e^{c\sigma}[&(c+p)(c+p+n-2)P_kP_lA + p^2T_kT_lA \\ &+ \nabla_k\nabla_lA - p(2c+2p+n-2)P_kT_lA - p(\nabla_kT_l)A - 2pT_l(\partial_kA) \\ &+ (2c+2p+n-2)P_k(\partial_lA) - (c+p)\Gamma^h_{kl}P_hA + (c+p)(\partial_kP_l)A]\end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak bulunur.

(1.8) kullanılır ve $\nabla_kP_l = \partial_kP_l - \Gamma^h_{kl}P_h$ olduğu hatırlanırsa, (2.18) ifadesi

$$\begin{aligned}\Delta^*A^* = g^{kl}e^{c\sigma}[&(c+p)(c+p+n-2)P_kP_lA + (c+p)(\nabla_kP_l)A \\ &+ (2c+2p+n-2)P_k\dot{\nabla}_lA + \dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_lA]\end{aligned} \tag{2.19}$$

şekline gelir.

W_n ve W_n^* uzaylarına ait diferensiyellenebilen A ve A^* harmonik fonksiyonları yardımıyla (2.11)'in (2.19)'da yerine yazılmasıyla elde edilen denklemin çözümünün mevcut olabilmesi için c

$$c = \frac{2-n-2p}{2} \tag{2.20}$$

olmalıdır. (2.11) ve (2.20) bağıntıları yardımıyla, (2.19) ifadesi

$$\frac{2-n}{2}g^{kl}e^{\frac{2-n-2p}{2}\sigma}[\nabla_kP_l + \frac{1}{2}(n-2)P_kP_l]A = 0$$

halini alır. Bu durumda P_k üzerine elde edilen şart,

$$g^{kl}\nabla_kP_l + \frac{1}{2}(n-2)P^kP_k = 0 \tag{2.21}$$

dir, burada $P^k = g^{kl}P_l$ ile gösterilmektedir.

(2.21) ifadesini sağlayan bir konformal dönüşüm, bir harmonik fonksiyonu (2.12) ve (2.20) bağıntıları yardımıyla başka bir harmonik fonksiyona dönüştürür. Bu dönüşüme, Konharmonik dönüşüm diyeceğiz.

W_n ve W_n^* uzaylarının komplemanter vektörleri olan T_k ve T_k^*'ın sıfır veya gradyent seçilmesiyle, bu uzaylar Riemann uzayları olup, P_k izdüşüm vektörü de sıfır veya gradyent olur. Bu durumda (2.16) bağıntısı yardımıyla

$$\sigma^k_{,k} + \frac{1}{2}(n-2)\sigma^k_{,}\sigma_{,k} = 0$$

bulunur [8].

2.2. Bir Weyl Uzayının Konharmonik Dönüşüm Altındaki İnvaryantları

Bu bölümde, W_n ve W_n^* Weyl uzayları arasında tanımladığımız τ konharmonik dönüşümü altında invaryant kalan bazı büyüklükleri elde edeceğiz.

(2.8) ve (2.9) şeklinde tanımlanan $\tau : W_n \to W_n^*$ konformal dönüşümünün aynı zamanda konharmonik olduğunu varsayalım. Bu durumda, W_n^* Weyl uzayına ait kovaryant eğrilik tensörü (1.13), (1.14), (2.8) ve (2.9) yardımıyla

$$\begin{aligned} R^*_{hijk} &= g^*_{hm} R^{*m}_{ijk} \\ &= g^*_{hm}\left(\frac{\partial^* \Gamma^{*m}_{ik}}{\partial^* x^{*j}} - \frac{\partial^* \Gamma^{*m}_{ij}}{\partial^* x^{*k}} + \Gamma^{*m}_{sj}\Gamma^{*s}_{ik} - \Gamma^{*m}_{sk}\Gamma^{*s}_{ij}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^* \Gamma^{*m}_{ik}}{\partial^* x^{*j}} &= \frac{\partial^* (\Gamma^m_{ik} + \delta^m_i P_k + \delta^m_k P_i - g_{ik} g^{hm} P_h)}{\partial^* x^{*j}} \\ &= \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \delta^m_i}{\partial x^j} P_k + \delta^m_i \frac{\partial P_k}{\partial x^j} + \frac{\partial \delta^m_k}{\partial x^j} P_i + \delta^m_k \frac{\partial P_i}{\partial x^j} \\ &\quad - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} g^{hm} P_h - g_{ik} \frac{\partial (g^{hm} P_h)}{\partial x^j} \end{aligned} \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. δ^m_i'nin ağırlığı $\{0\}$ olduğundan

$$\frac{\partial \delta^m_i}{\partial x^j} = \Gamma^s_{ij}\delta^m_s - \Gamma^m_{sj}\delta^s_i \tag{2.24}$$

dir. (1.5) ve (2.24), (2.23)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^* \Gamma^{*m}_{ik}}{\partial^* x^{*j}} &= \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + P_k(\Gamma^s_{ij}\delta^m_s - \Gamma^m_{sj}\delta^s_i) + \delta^m_i \frac{\partial P_k}{\partial x^j} + P_i(\Gamma^s_{kj}\delta^m_s - \Gamma^m_{sj}\delta^s_k) \\ &\quad + \delta^m_k \frac{\partial P_i}{\partial x^j} - 2T_j g_{ik} g^{hm} P_h - g_{hk}\Gamma^h_{ij} - g_{ih}\Gamma^h_{kj} - g_{ik} g^{hm} \frac{\partial P_h}{\partial x^j} \\ &\quad + 2T_j g^{hm} g_{ik} P_h + g_{ik} g^{sh} \Gamma^m_{sj} P_h + g_{ik} g^{sm} \Gamma^h_{sj} P_h \end{aligned} \tag{2.25}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.9) bağıntısı kullanıldığı takdirde

$$\begin{aligned} \Gamma^{*m}_{sj}\Gamma^{*s}_{ik} &= \Gamma^m_{sj}\Gamma^s_{ik} + \Gamma^m_{ij} P_k + \Gamma^m_{kj} P_i - g_{ik} g^{rs} \Gamma^m_{sj} P_r \\ &\quad + \Gamma^m_{ik} P_j + \delta^m_i P_j P_k + \delta^m_k P_i P_j - g_{ik} g^{rm} P_r \\ &\quad + \delta^m_j \Gamma^s_{ik} P_s + \delta^m_j P_i P_k + \delta^m_j P_i P_k - g_{ik} g^{rs} \delta^m_j P_r P_s \\ &\quad - g_{sj} g^{mh} \Gamma^s_{ik} P_h - g_{ij} g^{mh} P_k P_h - g_{kj} g^{mh} P_i P_h + g_{ik} P_j P_h \end{aligned} \tag{2.26}$$

bulunur. (2.8), (2.25) ve (2.26) bağıntıları kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

(2.22)

$$
\begin{aligned}
R^*_{hijk} &= R_{hijk} + g_{ih}(\nabla_j P_k - \nabla_k P_j) + g_{hk}(\nabla_j P_i - P_i P_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} P_k P_l) \\
&\quad + g_{ij}(\nabla_k P_h - P_h P_k + \frac{1}{2} g_{hk} g^{mn} P_m P_n) \\
&\quad - g_{ik}(\nabla_j P_h - P_h P_j + \frac{1}{2} g_{hj} g^{mn} P_m P_n) \\
&\quad - g_{hj}(\nabla_k P_i - P_i P_k + \frac{1}{2} g_{ik} g^{mn} P_m P_n)
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

halini alır. O halde (2.27)'de

$$P_{ij} = \nabla_j P_i - P_i P_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} P_k P_l \tag{2.28}$$

alınırsa ve $\nabla_j P_k - \nabla_k P_j = 2\nabla_{[j} P_{k]}$ olduğu hatırlanırsa, R_{hijk} kovaryant eğrilik tensörünün konformal dönüşümü

$$R^*_{hijk} = R_{hijk} + g_{hk} P_{ij} + g_{ij} P_{hk} - g_{ik} P_{hj} - g_{hj} P_{ik} + 2 g_{ih} \nabla_{[j} P_{k]} \tag{2.29}$$

olarak bulunur. (2.29) ifadesinin her iki tarafı g^{*hm} ile çarpılırsa ve (2.8) göz önünde bulundurulursa, R^h_{ijk} eğrilik tensörünün konform dönüşümü olarak

$$R^{*h}_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k P_{ij} - \delta^h_j P_{ik} + g_{ij} g^{hm} P_{mk} - g_{ik} g^{hm} P_{mj} + 2\delta^h_i \nabla_{[j} P_{k]} \tag{2.30}$$

bulunur. (2.29), g^{*hk} ile çarpılırsa ve (2.8) kullanılırsa, W_n Weyl uzayının Ricci tensörü R_{ij}'nin konformal dönüşümü, $P^h_h = g^{hm} P_{hm}$ olmak üzere

$$R^*_{ij} = R_{ij} + (n-2) P_{ij} + g_{ij} P^h_h + 2\nabla_{[j} P_{i]} \tag{2.31}$$

dir.

Eğer (2.8) ve (2.9) ile belirlenen konformal dönüşüm konharmonik ise, bu takdirde, (2.21) ve (2.28) bağıntıları yardımıyla

$$
\begin{aligned}
P^h_h &= g^{hk} \nabla_h P_k - g^{hk} P_h P_k + \frac{1}{2} g^{hk} g^{lm} g_{hk} P_m P_l \\
&= g^{hk} \nabla_h P_k + \frac{1}{2}(n-2) P^h P_h = 0
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

bulunur. (2.32) bağıntısı (2.31)'de yerine yazılırsa, Ricci tensörünün konharmonik dönüşümü

$$R^*_{ij} = R_{ij} + (n-2) P_{ij} + 2\nabla_{[j} P_{i]} \tag{2.33}$$

olarak elde edilir.

$R_{(ij)}$, R_{ij} tensörünün simetrik kısmını göstermek üzere, bu tensörün konharmonik dönüşümü, (2.33)'den

$$\begin{aligned} R^*_{(ij)} &= \frac{1}{2}(R^*_{ij} + R^*_{ji}) \\ &= \frac{1}{2}(R_{ij} + (n-2)P_{ij} + 2\nabla_{[j}P_{i]} + R_{ji} + (n-2)P_{ji} + 2\nabla_{[i}P_{j]}) \qquad (2.34) \\ &= R_{(ij)} + \frac{1}{2}(n-2)(P_{ij} + P_{ji}) \end{aligned}$$

dir. (1.17) ve (2.34)'den yararlanarak Ricci tensörünün antisimetrik kısmı $R_{[ij]}$'nin konharmonik dönüşümü ise

$$R^*_{[ij]} = R_{[ij]} + n\nabla_{[j}P_{i]} \qquad (2.35)$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.1. $\tau : W_n(g_{ij}, T_k) \to W^*_n(g^*_{ij}, T^*_k)$ konformal dönüşümünün konharmonik olması için gerek ve yeter koşul, W_n'nin skaler eğriliğinin invaryant kalmasıdır.

İspat. τ, konform dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde, (2.33) bağıntısının her iki tarafı g^{*ij} ile çarpılırsa

$$R^* = R + 2(n-1)P^h_h \qquad (2.36)$$

elde edilir. Eğer, τ konformal dönüşümü konharmonikse, (2.32) bağıntısı (2.36)'de yerine yazıldığı taktirde

$$R^* = R \qquad (2.37)$$

bulunur.

Tersine, eğer (2.37) bağıntısı mevcutsa, (2.36) ifadesinden $P^h_h = 0$ $(n > 2)$ bulunur. O halde, (2.32)'den τ konformal dönüşümünün aynı zamanda konharmonik olduğu aşikardır.

Teorem 2.2.2. $\tau : W_n \to W^*_n$ konformal dönüşümünün konharmonik olması için gerek ve yeter koşul, $T^i = g^{ij}T_j$ olmak üzere, τ konformal dönüşümü altında

$$g^{ij}\nabla_j T_i + \frac{1}{2}(n-2)T_i T^i$$

bağıntısının invaryant kalmasıdır.

İspat. $\tau : W_n \to W^*_n$ konform dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde, (2.9) ve (2.10) yardımıyla

$$\nabla^*_j T^*_j = \nabla_j T_i - \nabla_j P_i + (g_{ij}g^{hm}P_m - \delta^h_j P_i - \delta^h_i P_j)(T_h - P_h) \qquad (2.38)$$

bulunur.

(2.38) ifadesinin her iki tarafı g^{*ij} ile çarpılır ve i,j üzerine toplam alınırsa, $P^h = g^{hm}P_m$ olmak üzere

$$g^{*ij}\nabla_j^* T_i^* = g^{ij}\nabla_j T_i - g^{ij}\nabla_j P_i + (n-2)P^h(T_h - P_h) \tag{2.39}$$

elde edilir.

Şimdi, $g^{*ij}\nabla_j^* T_i^* + \frac{1}{2}(n-2)T_i^* T^{*i}$ ifadesini göz önüne alalım. Bu durumda, (2.10) ve (2.39)'den

$$\begin{aligned} g^{*ij}\nabla_j^* T_i^* + \frac{1}{2}(n-2)T_i^* T^{*i} &= g^{ij}\nabla_j T_i + \frac{1}{2}(n-2)T_i T^i \\ &\quad - (g^{ij}\nabla_j P_i + \frac{1}{2}(n-2)P_i P^i) \end{aligned} \tag{2.40}$$

bulunur. Eğer, $g^{ij}\nabla_j T_i + \frac{1}{2}(n-2)T_i T^i$ ifadesi τ konformal dönüşümü altında invaryant ise, (2.40) bağıntısı

$$g^{ij}\nabla_j P_i + \frac{1}{2}(n-2)P_i P^i = 0$$

şekline girer. Bu, τ dönüşümünün aynı zamanda konharmonik bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Tersine, eğer τ dönüşümü konharmonikse, (2.32) bağıntısı (2.40)'de yerine yazıldığı taktirde,

$$g^{*ij}\nabla_j^* T_i^* + \frac{1}{2}(n-2)T_i^* T^{*i} = g^{ij}\nabla_j T_i + \frac{1}{2}(n-2)T_i T^i$$

olduğu görülür. Yani, verilen ifade konharmonik dönüşüm altında invaryanttır.

Şimdi, n-boyutlu Riemann uzayındaki eğrilik tensörünün ifadesine analog olarak W_n Weyl uzayında

$$\begin{aligned} G^h_{ijk} = R^h_{ijk} &- \frac{1}{(n-2)}(g^{hm}g_{ij}R_{mk} - g^{hm}g_{ik}R_{mj} + \delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}) \end{aligned} \tag{2.41}$$

tensörünü göz önüne alalım. Bu taktirde, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.3. W_n ve W_n^* Weyl uzayları arasında $\tau : W_n \to W_n^*$ konharmonik dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde, $G_{ij} = G^h_{ijh}$ tensörü konharmonik invaryanttır.

İspat. $\tau : W_n \to W_n^*$ dönüşümü konharmonik bir dönüşüm olsun. Bu taktirde, (2.41) ile verilen G^h_{ijk} tensörünün konharmonik dönüşümü, (2.8), (2.30), (2.33), (2.37) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
G^{*h}_{ijk} &= R^h_{ijk} + \delta^h_k P_{ij} - \delta^h_j P_{ik} + g_{ij} g^{hm} P_{mk} - g_{ik} g^{hm} P_{mj} + 2\delta^h_i \nabla_{[j} P_{k]} \\
&- \frac{1}{n-2} [g^{hm} g_{ij} (R_{mk} + (n-2) P_{mk} + 2\nabla_{[k} P_{m]}) \\
&- g^{hm} g_{ik} (R_{mj} + (n-2) P_{mj} + 2\nabla_{[j} P_{m]}) \\
&+ \delta^h_k (R_{ij} + (n-2) P_{ij} + 2\nabla_{[j} P_{i]}) - \delta^h_j (R_{ik} + (n-2) P_{ik} + 2\nabla_{[k} P_{i]}) \\
&+ \frac{R}{(n-1)(n-2)} (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede (2.41) yerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
G^{*h}_{ijk} = G^h_{ijk} - \frac{2}{n-2} (g^{hm} g_{ij} \nabla_{[k} P_{m]} - g^{hm} g_{ik} \nabla_{[j} P_{m]} + \delta^h_k \nabla_{[j} P_{i]} \\
- \delta^h_j \nabla_{[k} P_{i]} - (n-2) \delta^h_i \nabla_{[j} P_{k]})
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

olarak elde edilir. (2.42) ifadesinde h ile k üzerinde daraltma yapılırsa,

$$
G^*_{ij} = G_{ij}
$$

dir.

2.3. Bazı Weyl Uzaylarının Konharmonik Dönüşümü

Bu bölümde, bazı Weyl uzayları arasında göz önüne alınan bir τ konformal dönüşümünün konharmonik olması için gerek ve yeter koşulları içeren teoremleri vereceğiz.

$W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayı, eğer uzayın Ricci tensörü, $\phi_k (\neq T_k)$ sıfırdan farklı kovaryant vektör alanı olmak üzere

$$
\dot{\nabla}_k R_{ij} = \phi_k R_{ij} \tag{2.43}
$$

bağıntısını gerçekliyorsa, bu uzaya Ricci-rekürant-Weyl uzayı adı verilir [9].

Teorem 2.3.1. $\tau : W_n \to W^*_n$ konharmonik bir dönüşüm ve W_n Ricci-rekürant bir Weyl uzayı olsun. W^*_n uzayının ricci-rekürant olması için gerek ve yeter koşul

$$
P_{kij} = \frac{2}{(2-n)} P_{k[ij]}
$$

bağıntısının sağlanmasıdır, burada

$$
P_{kij} = \nabla_k P_{ij} - \phi_k P_{ij} - P_{kj} P_i - P_{ik} P_j + g_{ik} P^h P_{hj} + g_{jk} P^h P_{ih}
$$

$$
P_{k[ij]} = \nabla_k P_{[ij]} - \phi_k P_{[ij]} - P_{[kj]} P_i - P_{[ik]} P_j + g_{ik} P^h P_{[hj]} + g_{jk} P^h P_{[ih]}
$$

$$P_{[ij]} = \nabla_{[j}P_{i]}$$

dir.

İspat. $\tau : W_n \to W_n^*$ dönüşümünün konharmonik bir dönüşüm olduğunu varsayalım. $W_n^*(g_{ij}^*, T_k^*)$ Weyl uzayına ait R_{ij}^* Ricci tensörünün u^k'ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa ve ağırlığının $\{0\}$ olduğu hatırlanırsa, (1.17)'den

$$\dot{\nabla}_k^* R_{ij}^* = \nabla_k^* R_{ij} = \partial_k^* R_{ij}^* - \Gamma_{ik}^{*h} R_{hj}^* - \Gamma_{jk}^{*h} R_{ih}^*$$

dir. Bu ifadede (2.9) ve (2.33) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k^* R_{ij}^* &= \dot{\nabla}_k R_{ij} + (n-2)A_{kij} + 2A_{k[ij]} - 2R_{ij}P_k - R_{kj}P_i \\ &- R_{ik}P_j + g_{ik}P^h R_{hj} + g_{jk}P^h R_{ih}\end{aligned} \tag{2.44}$$

bulunur, burada

$$A_{kij} = \nabla_k P_{ij} - 2P_{ij}P_k - P_{kj}P_i - P_{ik}P_j + g_{ik}P^h P_{hj} + g_{jk}P^h P_{ih},$$

$$A_{k[ij]} = \nabla_k P_{[ij]} - 2P_{[ij]}P_k - P_{[kj]}P_i - P_{[ik]}P_j + g_{ik}P^h P_{[hj]} + g_{jk}P^h P_{[ih]}$$

$$P_{[ij]} = \nabla_{[j}P_{i]} \tag{2.45}$$

alınmıştır.

Şimdi, $\dot{\nabla}_k^* R_{ij}^* - \phi_k^* R_{ij}^*$ ifadesini göz önüne alalım. Bu durumda, (2.44)'den

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k^* R_{ij}^* - \phi_k^* R_{ij}^* &= \dot{\nabla}_k R_{ij} - (\phi_k^* + 2P_k)R_{ij} + (n-2)(A_{kij} - \phi_k^* P_{ij}) \\ &+ 2(A_{k[ij]} - \phi_k^* \nabla_{[j}P_{i]}) - R_{kj}P_i - R_{ik}P_j \\ &+ g_{ik}P^h R_{hj} + g_{jk}P^h R_{ih}\end{aligned} \tag{2.46}$$

dir. Eğer $\phi_k = \phi_k^* + 2P_k$ alınırsa, (2.46) bağıntısı

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k^* R_{ij}^* - \phi_k^* R_{ij}^* &= \dot{\nabla}_k R_{ij} - \phi_k R_{ij} + (n-2)(A_{kij} - \phi_k P_{ij} + 2P_k P_{ij}) \\ &+ 2(A_{k[ij]} - \phi_k \nabla_{[j}P_{i]} + P_k \nabla_{[j}P_{i]})\end{aligned} \tag{2.47}$$

olarak elde edilir. (2.47)'de (2.45) ifadesi kullanıldığında, ve gerekli işlemler yapıldığında

$$P_{kij} = \nabla_k P_{ij} - \phi_k P_{ij} - P_{kj}P_i - P_{ik}P_j + g_{ik}P^h P_{hj} + g_{jk}P^h P_{ih}$$

$$P_{k[ij]} = \nabla_k P_{[ij]} - \phi_k P_{[ij]} - P_{[kj]}P_i - P_{[ik]}P_j + g_{ik}P^h P_{[hj]} + g_{jk}P^h P_{[ih]}$$

$$P_{[ij]} = \nabla_{[j}P_{i]} \tag{2.48}$$

kısaltmaları sonucu

$$\dot{\nabla}^*_k R^*_{ij} - \phi^*_{ij} R^*_{ij} = \dot{\nabla}_k R_{ij} - \phi_k R_{ij} + (n-2) P_{kij} + 2P_{k[ij]} \tag{2.49}$$

bulunur. W_n uzayı ricci-rekürant uzay olduğundan eğer W^*_n Weyl uzayı da ricci-rekürant bir uzay ise, (2.49) ve (2.43) kullanıldığında

$$P_{kij} = \frac{2}{(2-n)} P_{k[ij]} \tag{2.50}$$

elde edilir.

Tersine, eğer (2.50) şartı varsa, W^*_n uzayı da ricci-reküranttır.

Teorem 2.3.2. W_n ve W^*_n ricci-rekürant Weyl uzayları olsun. Eğer, $\tau : W_n \to W^*_n$ dönüşümü konharmonik ise, $R_{[hj]}$, Ricci tensörünün antisimetrik kısmını göstermek üzere

$$P^h R_{[hj]} = 0$$

dir.

İspat. $\tau : W_n \to W^*_n$ konformal dönüşümü konharmonik bir dönüşüm ve W_n ile W^*_n uzayları Ricci-rekürant Weyl uzayları olsun. Bu durumda, W_n ve W^*_n uzaylarına ait Ricci tensörünün simetrik ve antisimetrik kısımları (1.18) ve (2.43) yardımıyla, sırasıyla, aşağıdaki şartları sağlar [9]

$$\dot{\nabla}^*_k R^*_{(ij)} = \phi^*_k R^*_{(ij)} \tag{2.51}$$

ve

$$\dot{\nabla}^*_k R^*_{[ij]} = \phi^*_k R^*_{[ij]}. \tag{2.52}$$

Bu durumda, (2.34) ifadesinin her iki tarafının u^k'ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alındığı takdirde,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}^*_k R^*_{(ij)} &= \dot{\nabla}_k R_{(ij)} - 2P_k R_{(ij)} - P_i R_{(kj)} - P_j R_{(ik)} + g_{ik} P^h R_{(hj)} \\ &\quad + g_{kj} P^h R_{(ih)} + (n-2)(\nabla_k P_{ij} - 2P_k P_{(ij)} - P_i P_{(kj)} - P_j P_{(ik)} \\ &\quad + g_{ik} P^h P_{(hj)} + g_{kj} P^h P_{(ih)}) \end{aligned} \tag{2.53}$$

bulunur, burada $P_{(ij)} = \frac{1}{2}(P_{ij} + P_{ji}),\ P^h = g^{hm} P_m$ dir.

Şimdi, $\dot{\nabla}^*_k R^*_{(ij)} - \phi^*_k R^*_{(ij)}$ ifadesini göz önüne alalım. Bu takdirde, (2.34) ve (2.53)'den, $\phi^*_k = \phi_k + 2P_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}^*_k R^*_{(ij)} - \phi^*_k R^*_{(ij)} &= \dot{\nabla}_k R_{(ij)} - \phi_k R_{(ij)} - P_i R_{(kj)} - P_j R_{(ik)} \\ &\quad + g_{ik} P^h R_{(hj)} + g_{jk} P^h R_{(ih)} + (n-2) P_{k(ij)} \end{aligned} \tag{2.54}$$

elde edilir. Burada

$$P_{k(ij)} = \nabla_k P_{(ij)} - \phi_k P_{(ij)} - P_i P_{(kj)} - P_j P_{(ik)} + g_{ik} P^h P_{(hj)} + g_{jk} P^h P_{(ih)} \tag{2.55}$$

dir. W_n ve W_n^* uzayları Ricci-rekürant Weyl uzayları olduğundan (2.43) kullanılırsa

$$P_{k(ij)} = \frac{1}{n-2}(P_i R_{(kj)} + P_j R_{(ik)} - g_{ik} P^h R_{(hj)} - g_{kj} P^h R_{(ih)}) \tag{2.56}$$

bulunur. Benzer şekilde, R_{ij}'nin antisimetrik kısmı, $R_{[ij]}$ için (2.35) ifadesinin her iki tarafının u^k'ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa ve $R_{[ij]}$'nin ağırlığının $\{0\}$ olduğu hatırlanırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k^* R_{[ij]}^* - \phi_k^* R_{[ij]}^* = \dot{\nabla}_k R_{[ij]} - \phi_k R_{[ij]} - P_i R_{[kj]} - P_j R_{[ik]} \\ + g_{ik} P^h R_{[hj]} + g_{jk} P^h R_{[ih]} + n P_{k[ij]} \end{aligned} \tag{2.57}$$

bulunur. Burada $P_{k[ij]}$ ifadesi $(2.48)_2$'deki gibidir. W_n ve W_n^* uzayları Ricci-rekürant olarak kabul edildiğinden, (2.57) bağıntısı yardımıyla

$$P_{k[ij]} = \frac{1}{n}(P_i R_{[kj]} + P_j R_{[ik]} - g_{ik} P^h R_{[hj]} - g_{kj} P^h R_{[ih]}) \tag{2.58}$$

elde edilir. (2.56) ve (2.58) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa, (1.17)'den

$$n P_{k[ij]} + (n-2) P_{k(ij)} = P_i R_{hj} + P_j R_{ik} - g_{ik} P^h R_{hj} - g_{jk} P^h R_{ih} \tag{2.59}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.28), (2.48) ve (2.55) ifadeleri kullanıldığında $P_{k[ij]} + P_{k(ij)} = P_{kij}$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, (2.59) bağıntısı, Teorem 2.3.1'den dolayı

$$P_i R_{kj} + P_j R_{ik} - g_{ik} P^h R_{hj} - g_{jk} P^h R_{ih} = 0 \tag{2.60}$$

halini alır.

Daha sonra, (2.60)'nin her iki tarafı g^{ik} ile çarpılırsa

$$P_j R = (n-1) P^h R_{hj} + P^h R_{jh} \tag{2.61}$$

bulunur.

Benzer şekilde, (2.60) bağıntısının her iki tarafı g^{kj} ile çarpılırsa

$$P_j R = (n-1) P^h R_{jh} + P^h R_{hj} \tag{2.62}$$

elde edilir. (2.61) ve (2.62) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan, sağ taraflarının da eşitlenmesi ile

$$P^h R_{hj} = P^h R_{jh} \tag{2.63}$$

bulunur. Böylece $(1.18)_2$ ve (2.63)'den

$$P^h R_{[hj]} = 0 \quad (n > 2)$$

olduğu aşikardır.

Tanım 2.3.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının Ricci tensörünün simetrik kısm $R_{(ij)}$ aşağıdaki şartı gerçekliyorsa, W_n uzayına Einstein-Weyl uzayı denir [10].

$$R_{(ij)} = \frac{R}{n} g_{ij} \tag{2.64}$$

Şimdi, Einstein-Weyl uzayları arasında ele alınan konformal dönüşümün konharmonik dönüşüm olması durumunda elde edilen teoremleri vereceğiz.

Teorem 2.3.3. $W_n(g_{ij}, T_k)$ ve $W_n(g^*_{ij}, T^*_k)$ uzayları Einstein-Weyl uzayları olsun. Bu durumda, $\tau : W_n \to W^*_n$ konformal dönüşümünün konharmonik olması için gerek ve yeter koşul, $R_{(ij)}$'nin invaryant kalmasıdır.

İspat. W_n ve W^*_n uzaylarının Einstein-Weyl uzayları olduğunu varsayalım. $\tau : W_n \to W^*_n$ konharmonik bir dönüşüm olsun. Bu şart altında, Teorem 2.2.1 kullanılırsa, (2.64)'den

$$R_{(ij)} = \frac{R}{n} g_{ij} = \frac{R^*}{n} g^*_{ij} = R^*_{(ij)} \tag{2.65}$$

bulunur. O halde, $R_{(ij)}$ konharmonik invaryanttır.

Tersine, $R^*_{(ij)} = R_{(ij)}$ olduğunu varsayalım. (2.64) bağıntısından, $R = R^*$ dir. Bu durumda, Teorem 2.2.1'e göre, τ dönüşümü konharmoniktir.

Teorem 2.3.4. $W_n(g_{ij}, T_k)$ ve $W_n(g^*_{ij}, T^*_k)$ uzayları Einstein-Weyl uzayları olsun. Bu iki uzay arasında ele alınan τ konformal dönüşümünün konharmonik bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul

$$P_{ij} = \nabla_{[j} P_{i]}$$

bağıntısının mevcut olmasıdır.

İspat. W_n ve W^*_n uzayları Einstein-Weyl uzayları olsun. Bu durumda (1.17) bağıntısı W^*_n uzayı için göz önüne alınırsa,

$$R^*_{ij} = R^*_{(ij)} + R^*_{[ij]} \tag{2.66}$$

dir. (2.35), (2.64) ifadeleri (2.66)'de yerine yazılırsa

$$R^*_{ij} = R_{ij} + n \nabla_{[j} P_{i]} \tag{2.67}$$

elde edilir. Bu durumda, (2.33) ve (2.67) kullanılarak

$$P_{ij} = \nabla_{[j} P_{i]} \tag{2.68}$$

bulunur.

Tersine, (2.68) bağıntısı mevcut olsun. Bu ifadenin her iki tarafı g^{ij} ile çarpılırsa

$$P_i^i = g^{ij} \nabla_{[j} P_{i]} = 0 \tag{2.69}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.32) ve (2.69)'den τ konformal dönüşümünün konharmonik olduğu aşikardır.

3. KONHARMONİK EĞRİLİĞE SAHİP BAZI WEYL UZAYLARI

3.1. Bir Weyl Uzayının Konharmonik Eğrilik Tensörü

Bu bölümde, ilk olarak ikinci bölümde ele alınan iki Weyl uzayı arasındaki τ konharmonik dönüşümü yardımıyla konharmonik eğrilik tensörü elde edilmiş ve bazı Weyl uzaylarında bu eğrilik tensörünün özellikleri incelenmiştir.

(2.8) ve (2.9) ifadeleri ile belirlenen konformal dönüşüm aynı zamanda konharmonik bir dönüşüm olsun.

(2.35) ifadesinden $\nabla_{[j}P_{i]}$ çekilirse

$$\nabla_{[j}P_{i]} = \frac{R^*_{[ij]} - R_{[ij]}}{n} \tag{3.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.33) bağıntısından P_{ij} ifadesi çekilirse, $(1.18)_2$ ve (3.1) bu ifadede yerine yazılırsa

$$P_{ij} = \frac{(n-1)(R^*_{ij} - R_{ij}) + (R^*_{ji} - R_{ji})}{n(n-2)} \tag{3.2}$$

bulunur.

P_{ij} için elde edilen (3.2) bağıntısına benzer olarak P_{hk}, P_{hj}, P_{ik} ifadeleri bulunursa ve bu üç denklem ile (3.1) ve (2.30)'den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
R^{*h}_{ijk} - \delta^{*h}_{k}\frac{(n-1)R^*_{ij} + R^*_{ji}}{n(n-2)} - g^*_{ij}\frac{(n-1)g^{*hm}R^*_{mk} + g^{*hm}R^*_{km}}{n(n-2)} - 2\delta^{*h}_{i}\frac{R^*_{[kj]}}{n} \\
+g^*_{ik}\frac{(n-1)g^{*hm}R^*_{mj} + g^{*hm}R^*_{jm}}{n(n-2)} + \delta^{*h}_{j}\frac{(n-1)R^*_{ik} + R^*_{ki}}{n(n-2)} \\
= R^{h}_{ijk} - \delta^{h}_{k}\frac{(n-1)R_{ij} + R_{ji}}{n(n-2)} - g_{ij}\frac{(n-1)g^{hm}R_{mk} + g^{hm}R_{km}}{n(n-2)} - 2\delta^{h}_{i}\frac{R_{[kj]}}{n} \\
+g_{ik}\frac{(n-1)g^{hm}R_{mj} + g^{hm}R_{jm}}{n(n-2)} + \delta^{h}_{j}\frac{(n-1)R_{ik} + R_{ki}}{n(n-2)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.3) denkleminin sağ tarafındaki ifadenin konharmonik dönüşüm altında invaryant kaldığı görülebilir. Bu ifadeyi K^{h}_{ijk} ile gösterelim.

Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
K^h_{ijk} &= R^h_{ijk} - \frac{1}{n}(\delta^h_k R_{[ij]} - \delta^h_j R_{[ik]} + g_{ij}g^{hm}R_{[mk]} - g_{ik}g^{hm}R_{[mj]} + 2\delta^h_i R_{[kj]}) \\
&- \frac{1}{(n-2)}(\delta^h_k R_{(ij)} - \delta^h_j R_{(ik)} + g_{ij}g^{hm}R_{(mk)} - g_{ik}g^{hm}R_{(mj)})
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

olmak üzere

$$K^{*h}_{ijk} = K^h_{ijk}$$

dir.

Konharmonik dönüşüm altında, uzayın eğrilik tensörü yardımıyla elde edilen invaryant ve $\{0\}$ ağırlıklı K^h_{ijk} tensörünü, $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının konharmonik tensörü olarak adlandıracağız.

Eğer, uzay Riemann uzayı ise, bu uzayın Ricci tensörü simetrik olduğundan $R_{(ij)} = R_{ij}$, yani $R_{[ij]} = 0$ dir. Bu durumda, (3.4)'den Riemann uzayına ait konharmonik eğrilik tensörü (Z^h_{ijk}) dür.

(3.4) bağıntısının her iki tarafı g_{hm} ile çarpılırsa,

$$
\begin{aligned}
K_{hijk} &= R_{hijk} - \frac{1}{n}(g_{hk}R_{[ij]} - g_{hj}R_{[ik]} + 2g_{ih}R_{[kj]} + g_{ij}R_{[hk]} - g_{ik}R_{[hj]}) \\
&- \frac{1}{n-2}(g_{hk}R_{(ij)} - g_{hj}R_{(ik)} + g_{ij}R_{(hk)} - g_{ik}R_{(hj)}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

bulunur.

Teorem 3.1.1. Bir $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayına ait K^h_{ijk} konharmonik eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıları sağlar

i) $K^h_{ijk} + K^h_{jki} + K^h_{kij} = 0$

ii) $K^h_{ijk} = -K^h_{ikj}$

iii) $K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij}R$

İspat. i) W_n Weyl uzayına ait konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk} ise, (3.4) ifadesinde i,j,k indislerinin yerleri devirsel olarak değiştirilirse ve elde edilen üç ifade toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
K^h_{ijk} + K^h_{jki} + K^h_{kij} &= R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} + \frac{1}{(n-2)}\delta^h_k(R_{(ji)} - R_{(ij)}) \\
&+ \frac{1}{(n-2)}\delta^h_j(R_{(ik)} - R_{(ki)}) + \frac{1}{(n-2)}\delta^h_i(R_{(kj)} - R_{(jk)})
\end{aligned}
$$

dir.Bu ifadede $(1.18)_1$ kullanıldığı takdirde

$$K^h_{ijk} + K^h_{jki} + K^h_{kij} = R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} \tag{3.6}$$

bulunur. Bir Weyl uzayında, (1.19) ile verilen I. Bianchi Özdeşliği (3.6)'de yerine yazılırsa

$$K^h_{ijk} + K^h_{jki} + K^h_{kij} = 0$$

elde edilir.

ii) (3.4) ifadesinde j ile k'nın yerleri değiştirilirse ve (1.13) kullanılırsa

$$K^h_{ijk} = -K^h_{ikj}. \tag{3.7}$$

olduğu kolayca görülür.

iii) (3.4)'de h ile k üzerine daraltma yapılırsa, $\{0\}$ ağırlıklı K_{ij} tensörü için

$$K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} g^{mk} R_{(mk)} \tag{3.8}$$

bağıntısı elde edilir. Bu durumda, (1.16) ve (1.18) ifadeleri (3.8)'de yerine yazılırsa

$$K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} R \tag{3.9}$$

bulunur.

3.2. Konharmonik Rekürant Weyl Uzayları

Tanım 3.2.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk}, $\phi_s(\neq T_s)$ sıfırdan farklı kovaryant bir vektör alanı olmak üzere, aşağıdaki şartı sağlıyorsa, W_n Weyl uzayına konharmonik eğriliğe sahip Rekürant Weyl uzayı adını vereceğiz ve özel olarak konharmonik rekürant Weyl uzayı olarak adlandıracağız

$$\dot{\nabla}_s K_{hijk} = \phi_s K_{hijk}. \tag{3.10}$$

Teorem 3.2.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayı rekürant bir uzay ise, aynı zamanda konharmonik rekürant bir uzaydır.

İspat. W_n, rekürant Weyl uzayı olsun. Bu takdirde, R_{hijk} eğrilik tensörü, $\phi_s(T_s \neq 0)$ sıfırdan farklı kovaryant bir vektör alanı olmak üzere aşağıdaki şartı sağlıyorsa, W_n uzayına rekürant Weyl uzayı denir [5]

$$\dot{\nabla}_s R_{hijk} = \phi_s R_{hijk} \tag{3.11}$$

(3.5) ifadesinin her iki tarafının u^s'e göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa ve (3.11) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_s K_{hijk} = \phi_s (R_{hijk} &- \frac{1}{n}(g_{hk}R_{[ij]} - g_{hj}R_{[ik]} + 2g_{ih}R_{[kj]} + g_{ij}R_{[hk]} - g_{ik}R_{[hj]}) \\ &- \frac{1}{n-2}(g_{hk}R_{(ij)} - g_{hj}R_{(ik)} + g_{ij}R_{(hk)} - g_{ik}R_{(hj)}))\end{aligned} \tag{3.12}$$

ifadesi bulunur. Daha sonra, (3.5) ve (3.11) bağıntıları (3.12)'da yerine yazılırsa

$$\dot{\nabla}_s K_{hijk} = \phi_s K_{hijk}$$

elde edilir. O halde W_n Weyl uzayı aynı zamanda konharmonik reküranttır.

Teorem 3.2.2. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayı konharmonik rekürant bir uzay olsun (rekürant olmayabilir), bu takdirde $\phi_s - 2T_s$ ifadesi lokal olarak gradyenttir.

İspat. W_n Weyl uzayı konharmonik rekürant bir uzay olsun (rekürant olmayabilir). Bu takdirde, (3.10) bağıntısı mevcuttur. Bu bağıntının her iki tarafı $g^{hk}g^{ij}$ ile çarpılır ve $\dot{\nabla}_k g^{ij} = 0$ olduğu hatırlanırsa, $K_{ij}g^{ij} = K$ olmak üzere

$$\dot{\nabla}_s K = \phi_s K \tag{3.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.9) ifadesi g^{ij} ile çarpılırsa

$$K = \frac{n}{2-n} R \tag{3.14}$$

bulunur. (3.14)'nin her iki tarafının u^s'ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$\dot{\nabla}_s K = \frac{n}{2-n} \dot{\nabla}_s R \tag{3.15}$$

dir. (3.13) ifadesi (3.15)'de yerine yazıldığı takdirde

$$\dot{\nabla}_s R = \phi_s R \tag{3.16}$$

bulunur.

W_n uzayına ait R skaler eğriliğinin ağırlığının $\{-2\}$ olduğu hatırlanırsa ve (1.9) kullanılırsa, (3.16) bağıntısı

$$\frac{\nabla_s R}{R} = \phi_s - 2T_s \quad (R \neq 0)$$

şekline gelir. Sonuç olarak, $\phi_s - 2T_s$ lokal olarak gradyenttir.

3.3. Ricci-Konharmonik Rekürant Weyl Uzayları

Tanım 3.3.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk} yardımı ile elde edilen Ricci-konharmonik tensörü K_{ij} , $\phi_s(\neq T_s)$ sıfırdan farklı kovaryant bir vektör alanı olmak üzere aşağıdaki bağıntıyı gerçekliyorsa, bu şart altında W_n uzayına Ricci-konharmonik rekürant Weyl uzayı adını vereceğiz

$$\dot{\nabla}_s K_{ij} = \phi_s K_{ij} \tag{3.17}$$

Teorem 3.3.1. Bir W_n Weyl uzayı Ricci rekürant bir uzay ise, aynı zamanda Ricci-konharmonik reküranttır.

İspat. W_n Weyl uzayı Ricci rekürant bir uzay olsun. (3.9) ifadesinin her iki tarafının u^s'ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$\dot{\nabla}_s K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} \dot{\nabla}_s R \tag{3.18}$$

bulunur. W_n uzayı Ricci rekürant bir uzay olduğundan (2.43)'e göre

$$\dot{\nabla}_s K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} \phi_s R \tag{3.19}$$

dir. (3.19) ifadesinde (3.9) yerine yazılırsa

$$\dot{\nabla}_s K_{ij} = \phi_s K_{ij}$$

elde edilir. O halde, W_n Weyl uzayı aynı zamanda Ricci-konharmonik rekürant bir uzaydır.

Teorem 3.3.2. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayı Ricci rekürant bir uzay olsun. Eğer W_n, konharmonik rekürant bir uzay ise, bu uzay aynı zamanda rekürant bir Weyl uzayıdır.

İspat. W_n uzayının Ricci-rekürant olduğunu kabul edelim. (3.5)'nin her iki tarafının u^s'ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (2.43) bulunan ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_s K_{hijk} = \dot{\nabla}_s R_{hijk} - \frac{\phi_s}{n}[(g_{hk}R_{[ij]} - g_{hj}R_{[ik]} + 2g_{ih}R_{[kj]} + g_{ij}R_{[hk]} - g_{ik}R_{[hj]}) \\ - \frac{1}{(n-2)}(g_{hk}R_{(ij)} - g_{hj}R_{(ik)} + g_{ij}R_{(hk)} - g_{ik}R_{(hj)})] \end{aligned} \tag{3.20}$$

bulunur. (3.5) bağıntısından $K_{hijk} - R_{hijk}$ ifadesinin eşiti çekilerek (3.20)'de yerine yazılırsa

$$\dot{\nabla}_s K_{hijk} - \phi_s K_{hijk} = \dot{\nabla}_s R_{hijk} - \phi_s R_{hijk}$$

elde edilir. Sonuç olarak, eğer Ricci-rekürant W_n Weyl uzayı konharmonik-rekürant bir uzay ise, rekürantttır.

3.4. Ricci-Konharmonik Bireküran Weyl Uzayları

Tanım 3.4.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ ile verilen bir Weyl uzayının Ricci-konharmonik tensörü K_{ij}, ϕ_{sr} sıfırdan farklı kovaryant bir tensör alanı olmak üzere aşağıdaki bağıntıyı sağlıyorsa, bu durumda W_n uzayına Ricci-konharmonik birekürant Weyl uzayı adını vereceğiz.

$$\dot{\nabla}_r \dot{\nabla}_s K_{ij} = \phi_{sr} K_{ij} \tag{3.21}$$

Teorem 3.4.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayı Ricci-konharmonik birekürant bir uzay olsun. ϕ_{sr} birekürans tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşul uzayın Riemann uzayı olmasıdır ($R \neq 0$).

İspat. W_n Weyl uzayı Ricci-konharmonik birekürant bir uzay olsun. (3.9) ifadesinin her iki tarafının u^r ve u^s'ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa ve bulunan ifade (3.21)'de yerine yazılırsa

$$\dot{\nabla}_r \dot{\nabla}_s K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} \dot{\nabla}_r \dot{\nabla}_s R \tag{3.22}$$

elde edilir.

R'nin ağırlığı $\{-2\}$ olduğundan, (1.9) bağıntısı yardımıyla

$$\dot{\nabla}_r \dot{\nabla}_s R = \nabla_r \nabla_s R + 2(\nabla_r T_s)R + 2T_s(\nabla_r R) + 2T_r(\nabla_s R) + 4T_s T_r R \tag{3.23}$$

ifadesi bulunur. (3.23) ifadesi (3.22)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_r \dot{\nabla}_s K_{ij} = & \frac{1}{2-n} g_{ij} [\nabla_r \nabla_s R + 2(\nabla_r T_s)R + 2T_s(\nabla_r R) + 2T_r(\nabla_s R) \\ & + 4T_r T_s R] \end{aligned} \tag{3.24}$$

dir. (3.24)'nin r ve s indislerine göre antisimetrik kısmı alınırsa

$$\dot{\nabla}_{[r} \dot{\nabla}_{s]} K_{ij} = \frac{1}{2-n} g_{ij} (\nabla_{[r} \nabla_{s]} R + 2\nabla_{[r} T_{s]} R) \tag{3.25}$$

elde edilir. $\nabla_{[r}\nabla_{s]}R = 0$ olduğu hatırlanırsa ve $(1.18)_2$ kullanılırsa, (3.25)'den

$$\dot{\nabla}_{[r} \dot{\nabla}_{s]} K_{ij} = \frac{2}{n} K_{ij} R_{[rs]} \tag{3.26}$$

ifadesi mevcut olur.

W_n Ricci-konharmonik birekürant Weyl uzayı olduğundan, (3.21)'den

$$(\phi_{sr} - \phi_{rs}) K_{ij} = \frac{2}{n} K_{ij} R_{[rs]} \tag{3.27}$$

dir. Bu durumda, eğer ϕ_{sr} birekürans tensörü simetrik ise, (3.27) ifadesi

$$K_{ij} R_{[rs]} = 0 \tag{3.28}$$

halini alır. $K_{ij} \neq 0$ olduğundan dolayı (3.28) ifadesinden

$$R_{[rs]} = 0 \tag{3.29}$$

bulunur. Yani uzay Riemann uzayıdır.

Tersine, W_n Riemann uzayı ise, birekürans tensörü ϕ_{sr}'nin simetrik olacağı aşikardır.

3.5. Bir Weyl Uzayının Konformal Eğrilik Tensörü

Bu bölümde, bir Weyl uzayının konformal eğrilik tensörü elde edilmiştir. Daha sonra, bu tensör ve konharmonik eğrilik tensörü arasındaki bağıntı elde edilerek bununla ilgili teoremlere yer verilmiştir.

(2.31) ifadesinden P_{ij} için

$$P_{ij} = \frac{(n-1)(R^*_{ij} - R_{ij}) + (R^*_{ji} - R_{ji}) - n g_{ij} P^h_h}{n(n-2)} \tag{3.30}$$

ifadesi bulunur.

Eğer (3.30), g^{ij} ile çarpılırsa, bu takdirde

$$P^h_h = \frac{n}{2(n-1)} g_{ij}(R^* - R) \tag{3.31}$$

dir. (3.31), (3.30)'da yerine yazılırsa ve P_{ij} için elde edilen (3.30) bağıntısına benzer olarak P_{hk}, P_{hj}, P_{ik} ifadeleri bulunursa ve bu denklemler (2.29)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} C^h_{ijk} = R^h_{ijk} &+ \frac{2}{n(n-2)}(\delta^h_k R_{[ij]} - \delta^h_j R_{[ik]} + g_{ij} g^{hm} R_{[mk]} - g_{ik} g^{hm} R_{[mj]} \\ &- (n-2)\delta^h_i R_{[kj]}) - \frac{1}{(n-1)}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} + g_{ij} g^{hm} R_{mk} - g_{ik} g^{hm} R_{mj}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

bağıntısının invaryant kaldığı görülür. Yani

$$C^{*h}_{ijk} = C^h_{ijk}$$

dir. Bu takdirde, W_n ve W^*_n uzayları arasında ele alınan τ konformal dönüşümü yardımıyla R^h_{ijk} tensörü yardımıyla elde edilen invaryant ve $\{0\}$ ağırlıklı C^h_{ijk} tensörüne W_n Weyl uzayının konformal eğrilik tensörü adını vereceğiz.

Teorem 3.5.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk} ve konformal eğrilik tensörü C^h_{ijk} arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$K^h_{ijk} = C^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}(\delta^h_k K_{ij} - \delta^h_j K_{ik})$$

İspat. W_n Weyl uzayına ait konharmonik eğrilik tensörü (3.4) şeklinde bulunmuştur. Bu takdirde, (3.4) ve (3.32) bağıntılarından R^h_{ijk} eğrilik tensörünün ifadeleri birbirine eşitlenirse konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk} ve konformal eğrilik tensörü C^h_{ijk} arasında aşağıda aşağıdaki bağıntının bulunduğu kolayca görülebilir.

Tanım 3.5.1. $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının konformal eğrilik tensörü C^h_{ijk}, $\phi_s(\neq T_s)$ sıfırdan farklı kovaryant bir vektör alanını göstermek üzere, aşağıdaki koşulu sağlıyorsa W_n uzayına konformal eğriliğe sahip rekürant Weyl uzayı adını vereceğiz ve kısaca konformal rekürant Weyl uzayı diyeceğiz

$$\dot{\nabla}_s C^h_{ijk} = \phi_s C^h_{ijk} \tag{3.36}$$

Teorem 3.5.2. W_n Weyl uzayının konformal eğrilik tensörü C^h_{ijk} ve konharmonik eğrilik tensörü K^h_{ijk} olsun. Eğer W_n Weyl uzayı konharmonik rekürant ise, aynı zamanda konformal reküranttır.

İspat. W_n Weyl uzayı konharmormonik rekürant bir uzay olsun. Bu durumda, Tanım 3.5.1'e göre, (3.10) bağıntısı sağlanmaktadır.

(3.35) ifadesinin her iki tarafının u^s'e göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa ve $\dot{\nabla}_k g^{ij} = 0$ olduğu hatırlanırsa

$$\dot{\nabla}_s K^h_{ijk} = \dot{\nabla}_s C^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}(\delta^h_k \dot{\nabla}_s K_{ij} - \delta^h_j \dot{\nabla}_s K_{ik}) \tag{3.37}$$

elde edilir. Bu durumda, W_n konharmonik rekürant bir uzay olduğundan (3.10), (3.35), (3.37)'de yerine yazılırsa (3.36) elde edilir. O halde W_n Weyl uzayı aynı zamanda konformal rekürranttır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, esas itibarıyla bir $W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayının konharmonik dönüşümü tanımlanmış ve bu dönüşüm altında, bazı Weyl uzaylarının özellikleri incelenmiştir.

İlk olarak, Weyl uzaylarının konharmonik dönüşümü tanımlanmış ve bu dönüşüm altında, Weyl uzayına ait skaler eğriliğin invaryant kaldığı ispat edilmiştir. Konharmonik dönüşüm yardımıyla ricci-reküran Weyl uzaylarının dönüşümü incelenmiş ve Einstein Weyl uzayının ricci tensörünün simetrik kısmının invaryant kaldığı gösterilmiştir.

Daha sonra, n-boyutlu Weyl uzayına ait konharmonik eğrilik tensörü elde edilmiş ve bu tensör yardımı ile konharmonik eğrilik tensörüne sahip rekürant Weyl uzayı, ricci-konharmonik-rekürant, ricci-konharmonik-birekürant Weyl uzaylarının tanımı verilmiştir. n-boyutlu Weyl uzayının konharmonik rekürant olması durumunda $\phi_s - 2T_s$ ifadesinin lokal olarak gradyent olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, ricci-rekürant Weyl uzayı konharmonik eğrilik tensörüne sahip rekürant Weyl uzayı ise, uzayın aynı zamanda rekürant bir uzay olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, ricci-konharmonik-birekürant tensörüne sahip Weyl uzaylarının birekürans tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşulun, uzayın Riemannien olmasından ibaret olduğu ispatlanmıştır.

Son olarak, bir Weyl uzayının konformal eğrilik tensörü elde edilmiş ve konharmonik eğrilik tensörü ile bağlantısı yapılmıştır.

Bundan sonra, pseudo-simetrik Weyl uzaylarında konharmonik dönüşüm tanımlanarak, bu dönüşüm altında invaryant kalan büyüklükleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Norden, A.**, 1976. Affinely Connected Spaces, GRFML Moscow.

[2] **Synge , J., and Schild , A.** 1956. Tensor Calculus, *University of Toronto press.*

[3] **Zlatanov, G.**, 1989. Special networks in the n-dimensional space of Weyl, *Tensor(N.S)*, **48**.

[4] **Hlavaty ,V.** 1934. Les Courbes de la Variete W_n. *Memor.Sci. Math.,Paris.*

[5] **Canfes, E. and Özdeğer, A.** 1997. Some Applications Of Prolonged Covariant Differentiation In Weyl Space. *Journal of Geometry*, **51**, 7-16.

[6] **Kofoğlu, N.** 1997. Weyl Uzaylarında Bazı Özel Eğri Şebekeleri, Doktora Tezi, İ.T.Ü, Fen-Bilimleri Enstitüsü,İstanbul.

[7] **Zlatanov G.** 1991. On The Conformal Geometry Of Nets In An n-Dimensional Weyl space, *IZV. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math.*, No.8, , 19-26.

[8] **Tsareva, B and Zlatanov, G.** 1990. On The Geometry Of The Nets In The n-Dimensional Space Of Weyl. *Journal of Geometry*, **38** 182-197.

[9] **Yoshihito, I** 1957. On Conharmonic Transformations , *Tensor(N.S)*, **7**, 73-80.

[10] **Canfes, E.** 1995. Some Applications Of Prolonged Covariant Differentiation In Weyl Geometry, İ.T.Ü., Institute of Science and Technology, Ph.D.Thesis.

[11] **Pedersen, H. and Tod, K.P.**, 1993. Three Dimensional Einstein-Weyl Geometry *Advances In Mathematics*, **97**. No.1, 74-109.

ÖZGEÇMİŞ

1968 yılında Malatya'da doğdu. 1985 yılında Beşiktaş Kız Lisesi ve 1991 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı. 1994 yılında İ.T.Ü Matematik Mühendisliği yüksek lisans programını tamamladı. 1995 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü'nde doktora öğrenimine başladı. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.