İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ
Ayşe Füsun ÜNAL
509942081

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Şubat 2001
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Haziran 2001

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. Aynur UYSAL**
Diğer Jüri Üyeleri : **Prof.Dr. Yılmaz AKYILDIZ (B.Ü.)**
Prof.Dr. Ayşe Hümeyra BİLGE
Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN (İ.Ü.)
Doç.Dr. Uğur DURSUN

HAZİRAN 2001

ÖNSÖZ

Doktora tezimin hazırlanmasında, bana büyük destek veren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. S.Aynur UYSAL'a, manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen eşim Prof.Dr. Gazanfer ÜNAL'a ve tezimin son aşamasında bana yardımcı olan arkadaşım Yar.Doç.Dr.Songül ESİN'e ve öğrencim Nazlıgül Gözde RONA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Haziran-2001 Ayşe Füsun ÜNAL

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

g_{ij} : metrik tensör

g^{ij} : karşıt metrik tensör

T_k : W-manifoldunun komplemanter vektörü

∇_k : W-manifoldunun simetrik konneksiyona göre kovaryant türev operatörü

Γ^i_{jk} : W-manifoldunda tanımlı simetrik konneksiyon katsayıları

$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$: Riemann konneksiyon katsayıları

R^i_{jkl} : W-manifoldunun eğrilik tensörü

R_{ij} : W-manifoldunun Ricci tensörü

R : W-manifoldunun skaler eğriliği

C^i_{jkl} : W-manifoldunun konform eğrilik tensörü

W^i_{jkl} : W-manifoldunun projektif eğrilik tensörü

L^i_{jk} : WS-manifoldunda tanımlı semi-simetrik konneksiyon katsayıları

T^i_{jk} : WS-manifoldunun burulma tensörü

$\overline{\nabla}_k$: WS-manifoldunun semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türev operatörü

$\overline{R}^i_{jkl}$: WS-manifoldunun eğrilik tensörü

$\overline{R}_{ij}$: WS-manifoldunun Ricci tensörü

$\overline{R}$: WS-manifoldunun skaler eğriliği

$\overline{C}^i_{jkl}$: WS-manifoldunun konform eğrilik tensörü

$\overline{W}^i_{jkl}$: WS-manifoldunun projektif eğrilik tensörü

K^i_{jkl} : WS-manifoldunun genelleştirilmiş reküranlık tensörü

E_{ij} : W-manifoldunun Einstein tensörü

$\overline{E}_{ij}$: WS-manifoldunun Einstein tensörü

SEMİ-SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

ÖZET

Bu çalışmada, semi-simetrik konneksiyonlu Weyl manifoldları incelenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde, Weyl manifoldları ile ilgili temel tanımlar ve özellikler hatırlatılmıştır.

İkinci bölümde, Weyl manifoldu üzerinde semi-simetrik konneksiyon tanımı verilerek, böyle bir konneksiyonla tanımlı Weyl manifoldu WS ile, simetrik konneksiyonla tanımlı Weyl manifoldu ise W ile gösterilmiştir. WS- manifoldunun eğrilik tensörü bulunduktan sonra aşağıdaki teoremler elde edilmiştir:

Teorem 1: W ve WS-manifoldları aynı eğrilik tensörüne sahip iseler, S_k vektörü gradienttir.

Teorem 2: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ise, T_k vektörü gradienttir.

Teorem 3: WS-grup manifoldu lokal-düzdür.

Üçüncü bölümün ilk kısmında, WS-manifoldlarına konform dönüşüm uygulanarak, eğrilik tensörünün bu dönüşüm altında nasıl değiştiği incelenmiş ve konform eğrilik tensörü bulunmuştur. WS-manifoldunda konform eğrilik tensörü ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler elde edilmiştir:

Teorem 4: W ve WS-manifoldlarına ait konform eğrilik tensörleri aynıdır.

Teorem 5: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ise, manifold konform-düzdür.

Teorem 6: WS-grup manifoldu konform-düzdür.

Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise, WS-manifoldlarına projektif dönüşüm uygulanarak, projektif eğrilik tensörü bulunduktan sonra W ve WS-manifoldlarının projektif eğrilik tensörleri arasında bir bağıntı elde edilmiştir. WS-manifoldunda, projektif eğrilik tensörü ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler verilmiştir:

Teorem 7: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ve S_k vektörü gradient ise, konneksiyon projektif-düzdür.

Teorem 8: WS-grup manifoldunda, simetrik ve semi-simetrik konneksiyona göre projektif eğrilik tensörleri aynıdır.

Teorem 9: WS- grup manifoldu ve bu manifold üzerinde tanımlanan semi-simetrik konneksiyon projektif-düzdür.

Teorem 10: WS-grup manifolduna ait konform eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü aynıdır.

Çalışmanın son bölümünde ise, genelleştirilmiş rekürant WS-manifoldları ele alınmıştır. Önce rekürant ve genelleştirilmiş-rekürant WS- manifold tanımları yapılmış, daha sonra bu manifoldlar arasındaki ilişki incelenmiştir.Genelleştirilmiş-rekürant Einstein tensörüne sahip WS-manifoldu, genelleştirilmiş konform-rekürant WS-manifoldu ve genelleştirilmiş projektif-rekürant WS-manifoldu tanımları

verildikten sonra; W ve WS-manifoldlarına ait eğrilik tensörü, konform eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü ve Einstein tensörünün semi-simetrik konneksiyona ve simetrik konneksiyona göre kovaryant türevleri arasındaki ilişkiler bulunarak, şu teoremler elde edilmiştir:

Teorem 11: Genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant Einstein tensörüne sahip WS-manifoldudur.

Teorem 12: Genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldu, genelleştirilmiş konform-rekürant WS-manifoldudur.

Teorem 13: Genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldunda S_k vektörü gradient ise, manifold genelleştirilmiş projektif-reküranttır.

Teorem 14: WS-grup manifoldunun genelleştirilmiş konform-rekürant olabilmesi için gerek ve yeter şart: genelleştirilmiş projektif-rekürant olmasıdır.

Teorem 15: Semi-simetrik konneksiyona göre rekürant S_{ij} tensörüne sahip rekürant WS-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant W-manifoldudur.

Teorem 16: Konform-rekürant WS-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant W-manifoldudur ve konform-rekürant W-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldudur.

Teorem 17: Semi-simetrik konneksiyona göre rekürant S_{ij} ve K_{ij} tensörlerine sahip projektif-rekürant WS-manifoldu, genelleştirilmiş projektif-rekürant W-manifoldudur.

Teorem 18: Semi-simetrik konneksiyona göre rekürant S_{ij} tensörlü rekürant-Einstein tensörüne sahip WS-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant Einstein tensörüne sahip W-manifoldudur.

WEYL MANIFOLDS WITH SEMI-SYMMETRIC CONNECTION

SUMMARY

In this work, Weyl manifolds with semi-symmetric connection are examined.

In the first chapter, the fundamental definitions and properties about Weyl manifolds are given.

In the second chapter, by giving the definition of semi-symmetric connection on the Weyl manifold; this manifold is denoted by WS and the Weyl manifold defined with a symmetric connection is denoted by W. After finding the curvature tensor of WS-manifold, the following theorems are obtained:
Theorem 1: If W and WS-manifolds have the same curvature tensors, then the vector S_k is gradient.
Theorem 2: Semi-symmetric connection defined on the WS-manifold is local-flat, then the vector T_k is gradient.
Theorem 3: WS-group manifold is local-flat.

In the first part of the third chapter, by applying conformal transformation to the WS-manifolds, the changing of the curvature tensor under this transformation is examined and conformal curvature tensor is obtained. In the WS-manifolds, the following theorems are given:
Theorem 4: Conformal curvature tensors of W and WS-manifolds coincide.
Theorem 5: If semi-symmetric connection defined on the WS-manifold is local-flat, then manifold is conformal-flat.
Theorem 6: WS-group manifold is conformal-flat.

In the second part of the third chapter, by applying projective transformation to the WS-manifolds, the projective curvature tensor is obtained and a relation between projective curvature tensors of W and WS-manifolds is found. After, the following theorems about projective curvature tensor on the WS-manifolds are given:
Theorem 7: If semi-symmetric connection defined on the WS-manifold is local-flat and the vector S_k is gradient, then connection is projective-flat.
Theorem 8: Projective curvature tensors with respect to symmetric and semi-symmetric connections on the WS-group manifold coincide.
Theorem 9: The WS-group manifold and the semi-symmetric connection defined on this manifold are projective-flat.
Theorem 10: Conformal curvature tensor and projective curvature tensor defined on the WS-group manifold coincide.

In the last part of the work, generalized-recurrent WS-manifolds are examined. At first, the definitions of recurrent and generalized-recurrent WS-manifolds are given. Later, the relation between these manifolds are obtained. After by giving the definitions of WS-manifold with generalized- recurrent Einstein tensor,

generalized conformal-recurrent WS-manifold and generalized projective-recurrent WS-manifold, the relations between covariant derivatives of curvature tensor, conformal curvature tensor, projective curvature tensor and Einstein tensor with respect to semi-symmetric connection and symmetric connection are found and the following theorems are obtained:

Theorem 11: Generalized-recurrent WS-manifold is WS-manifold with generalized-recurrent Einstein tensor.

Theorem 12: Generalized-recurrent WS-manifold is generalized conformal-recurrent WS-manifold.

Theorem 13: If the vector S_k is gradient in the generalized-recurrent WS-manifold, then the manifold is generalized projective-recurrent.

Theorem 14: The WS-group manifold is generalized conformal-recurrent if and only if it is generalized projective-recurrent.

Theorem 15: Recurrent WS-manifold where the tensor S_{ij} is recurrent with respect to the semi-symmetric connection is generalized-recurrent W-manifold.

Theorem 16: Conformal-recurrent WS-manifold is generalized-recurrent W-manifold and conformal-recurrent W-manifold is generalized-recurrent WS-manifold.

Theorem 17: Projective-recurrent WS-manifold where the tensors S_{ij} and K_{ij} are recurrent with respect to the semi-symmetric connection is generalized projective-recurrent W-manifold.

Theorem 18: WS-manifold with recurrent Einstein tensor where the tensor S_{ij} is recurrent with respect to the semi-symmetric connection is W-manifold with generalized recurrent Einstein tensor.

1.GİRİŞ

Simetrik (burulmasız) bir konneksiyona ve konform bir g_{ij} metrik tensörüne sahip n -boyutlu bir manifoldda metrik tensör ile konneksiyon arasında

$$\nabla_k g_{ij} - 2 g_{ij} T_k = 0 \tag{1.1}$$

uygunluk koşulu mevcut ise, manifolda Weyl manifoldu denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ şeklinde gösterilir. Burada, T_k kovaryant bir vektör olup, Weyl manifoldunun komplemanter vektörü adını alır.

λ, skaler bir fonksiyon olmak üzere, g_{ij} metrik tensörünün

$$\widetilde{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \tag{1.2}$$

şeklindeki dönüşümü altında T_k komplemanter vektörü

$$\widetilde{T}_k = T_k + \partial_k (\ln \lambda) \tag{1.3}$$

kuralına uygun olarak dönüşür,[1].

$(g_{ij} \ , \ T_k)$ tensör çiftine (1.2) ve (1.3) bağıntıları yardımıyla, yeni bir $(\widetilde{g}_{ij} \ , \widetilde{T}_k)$ tensör çifti karşılık getiren dönüşüme gauge dönüşümü denir.

Simetrik konneksiyonun katsayıları, (1.1) yardımı ile,

$$\Gamma^i_{jk} = \{^{\,i}_{jk}\} - g^{im}(g_{mj} T_k + g_{mk} T_j - g_{jk} T_m) \tag{1.4}$$

şeklinde bulunur. Buna göre, (1.1) bağıntısını sağlayan T_k kovaryant vektörü ve g_{ij} metrik tensörü varsa, (1.4) bağıntısı simetrik bir konneksiyon tanımlar.

Bir A büyüklüğü, metrik tensörün $\widetilde{g}_{ij}=\lambda^2 g_{ij}$ şeklindeki dönüşümü altında

$$\widetilde{A}=\lambda^p A \tag{1.5}$$

şeklinde değişiyorsa, A büyüklüğüne g_{ij} tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı uydusu denir. Bu uydunun genelleştirilmiş türevi ve genelleştirilmiş kovaryant türevi, sırasıyla, $\dot{\partial}_k A$ ve $\dot{\nabla}_k A$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır,[2]:

$$\dot{\partial}_k A=\partial_k A-pT_k A \qquad (1.6)_1$$

$$\dot{\nabla}_k A=\nabla_k A-pT_k A \qquad (1.6)_2$$

Genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş kovaryant türev uyduların ağırlıklarını korur ve adi türevdeki çarpım kuralı geçerlidir.

Weyl manifolduna ait eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik, sırasıyla,

$$R^i_{jkl}=\partial_k\Gamma^i_{jl}-\partial_l\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl}-\Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk} \qquad (1.7)_1$$

$$R_{ij}=R^a_{ija} \qquad (1.7)_2$$

$$R=R_{ij}g^{ij} \qquad (1.7)_3$$

şeklinde tanımlanmıştır ve eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir,[1]:

(i). $R_{mijk}+R_{mikj}=0$ $\qquad (1.8)_1$

(ii). $R_{mijk}+R_{imjk}=2g_{mi}(\partial_k T_j-\partial_j T_k)=g_{mi}\nabla_{[k}T_{j]}$ $\qquad (1.8)_2$

(iii). $R^h_{hjk}=2R_{[kj]}$ $\qquad (1.8)_3$

(Burada, $R_{[kj]}$, R_{kj} Ricci tensörünün k ve j indislerine göre antisimetrik kısmını gösterir.)

(iv). $R^h_{ijk}+R^h_{jki}+R^h_{kij}=0$ $\qquad (1.8)_4$

(v). $\nabla_l R^h_{ijk}+\nabla_k R^h_{ilj}+\nabla_j R^h_{ikl}=0$ $\qquad (1.8)_5$

(vi). $R_{[ij]}=n\nabla_{[i}T_{j]}$ $\qquad (1.8)_6$

(Burada, $\nabla_{[i}T_{j]}$, $\nabla_i T_j$ kovaryant türevinin i ve j indislerine göre antisimetrik kısmını gösterir.)

Weyl manifolduna konform dönüşüm uygulandığında, $P_i = T_i - T_i^*$ ve $P_{ij} = \nabla_j P_i - P_i P_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} P_k P_l$ olmak üzere, eğrilik tensörünün bu dönüşüm altında

$$R_{ijk}^{h\,*} = R_{ijk}^{h} + 2\delta_i^h \nabla_{[j} P_{k]} + \delta_k^h P_{ij} - \delta_j^h P_{ik} + g_{ij} g^{hl} P_{lk} - g_{ik} g^{hl} P_{lj} \qquad (1.9)$$

şeklinde değiştiği ve konform eğrilik tensörünün

$$C_{mijk} = R_{mijk} - \frac{2}{n} g_{mi} R_{[kj]} + \frac{1}{n-2}\left\{g_{mj} R_{(ik)} - g_{mk} R_{(ij)} - g_{ij} R_{(mk)} + g_{ik} R_{(mj)}\right\} + \frac{1}{n}\left\{g_{mj} R_{[ik]} - g_{mk} R_{[ij]} - g_{ij} R_{[mk]} + g_{ik} R_{[mj]}\right\} - \frac{R}{(n-1))(n-2)} G_{mijk} \qquad (1.10)$$

olduğu görülmüştür,[3]. Burada, $G_{mijk} = g_{mj} g_{ik} - g_{mk} g_{ij}$ şeklinde tanımlanan bir tensördür. Konform eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i). $C_{mijk} + C_{mikj} = 0$ $\qquad (1.11)_1$

(ii). $C_{hjk}^{h} = 0$ $\qquad (1.11)_2$

(iii). $C_{ij} = 0$ $\qquad (1.11)_3$

(iv). $C_{ijk}^{h} + C_{jki}^{h} + C_{kij}^{h} = 0$ $\qquad (1.11)_4$

Weyl manifolduna projektif dönüşüm uygulandığında ise, projektif eğrilik tensörü

$$W_{ijk}^{h} = R_{ijk}^{h} + \frac{\delta_i^h}{n+1}(R_{jk} - R_{kj}) + \frac{1}{n^2-1}\left[\delta_j^h (R_{ki} + nR_{ik}) - \delta_k^h (R_{ji} + nR_{ij})\right] \qquad (1.12)$$

şeklinde elde edilmektedir,[4] ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i). $W_{ijk}^{h} + W_{ikj}^{h} = 0$ $\qquad (1.13)_1$

(ii). $W_{hjk}^{h} = 0$ $\qquad (1.13)_2$

(iii). $W_{jkh}^{h} = W_{jk} = 0$ $\qquad (1.13)_3$

(iv). $W_{ijk}^{h} + W_{jki}^{h} + W_{kij}^{h} = 0$ $\qquad (1.13)_4$

2.SEMİ-SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

1924 yılında, Friedmann ve Schouten [5] diferansiyellenebilir manifold üzerinde semi-simetrik lineer konneksiyonu tanımlamıştır. 1932'de Hayden [6] Riemann manifoldunda burulmalı metrik konneksiyon tanımını yapmıştır. Bu tanım, K.Yano [7], T.Imai [8,9], Z.Nakao [10], K.Amur ve S.S.Pujar[11] tarafından geliştirilmiştir. 1990 yılında, U.C.De [12] , birekürant Riemann manifoldu üzerinde semi-simetrik metrik konneksiyonu incelemiştir. 1992'de ise, N.S.Agashe ve M.R.Chafle [13] Riemann manifoldu üzerinde metrik olmayan semi-simetrik konneksiyonu, U.C.De ve N.Guha [14] psödo-simetrik manifold üzerinde semi-simetrik konneksiyonu incelemiştir.

Weyl manifoldu üzerinde genelleştirilmiş bir konneksiyon

$$L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + a_{jkh}\, g^{hi} \quad \text{ve} \quad a_{jkh} = g_{jl}\, \Omega^l_{kh} + g_{lk}\, \Omega^l_{jh} + g_{lh}\, \Omega^l_{jk}$$

şeklinde tanımlanmıştır,[15]. Burada Ω^i_{jk}; $\Omega^i_{jk} = \delta^i_j\, a_k - \delta^i_k\, a_j$ olarak seçildiğinde; Weyl manifoldu üzerinde semi-simetrik konneksiyon tanımlanmış olur. Daha açık bir ifade ile semi-simetrik konneksiyonu aşağıdaki formda tanımlayabiliriz:

$$L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k\, S_j - g_{jk}\, S^i \qquad (2.1)$$

Burada, $T^i_{jk} = \delta^i_k\, S_j - \delta^i_j\, S_k$ ($S_i = -2a_i$) tensörü, semi-simetrik konneksiyona ait burulma tensörüdür. Bu konneksiyonla tanımlanmış Weyl manifoldunu WS ile, simetrik konneksiyonla tanımlanmış Weyl manifoldunu ise W ile göstereceğiz.

Semi-simetrik konneksiyonu; W-manifoldunun tanımındaki simetrik konneksiyon yardımı ile ifade ettiğimiz için, WS-manifoldunun eğrilik tensörünü de W-manifoldunun eğrilik tensörü yardımı ile ifade edeceğiz.

Lemma 2.1: WS-manifoldunun uygunluk koşulu $\overline{\nabla}_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0$ şeklindedir.Burada $\overline{\nabla}$ operatörü semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi göstermektedir.

İspat: Kovaryant türevin tanımından $\overline{\nabla}_k g_{ij}$, $\overline{\nabla}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj} L_{ik}^h - g_{ih} L_{jk}^h$ şeklindedir. (2.1) yardımıyla,

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj}(\Gamma_{ik}^h + \delta_k^h S_i - g_{ik} S^h) - g_{ih}(\Gamma_{jk}^h + \delta_k^h S_j - g_{jk} S^h)$$

$$= \partial_k g_{ij} - g_{hj} \Gamma_{ik}^h - g_{kj} S_i + g_{ik} S_j - g_{ih} \Gamma_{jk}^h - g_{ik} S_j + g_{jk} S_i$$

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj} \Gamma_{ik}^h - g_{ih} \Gamma_{jk}^h = \nabla_k g_{ij}$$

eşitliği elde edilir.Burada ∇ operatörü simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi göstermektedir. W-manifoldunda uygunluk koşulunun $\nabla_k g_{ij} = 2T_k g_{ij}$ olduğu hatırlanırsa, $\overline{\nabla}_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0$ sonucu elde edilir.

Teorem 2.1: WS-manifoldunun eğrilik tensörü

$$\overline{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h S_{ij} - \delta_j^h S_{ik} + g_{ij} g^{hr} S_{rk} - g_{ik} g^{hr} S_{rj} \tag{2.2}$$

şeklindedir. Burada $S_{ij} = \nabla_j S_i - S_i S_j + \frac{1}{2} g_{ij} S_s S^s$ dir.

İspat: $\overline{R}_{ijk}^h = \partial_j L_{ik}^h - \partial_k L_{ij}^h + L_{sj}^h L_{ik}^s - L_{sk}^h L_{ij}^s$ ifadesinde (2.1) kullanılır ve

$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h + \Gamma_{sj}^h \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{sk}^h \Gamma_{ij}^s$ eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{R}_{ijk}^h = {} & R_{ijk}^h + \delta_k^h (\partial_j S_i) - (\partial_j g_{ik}) g^{hr} S_r - g_{ik}(\partial_j g^{hr}) S_r - g_{ik} g^{hr}(\partial_j S_r) - \delta_j^h(\partial_k S_i) + \\ & (\partial_k g_{ij}) g^{hr} S_r + g_{ij}(\partial_k g^{hr}) S_r + g_{ij} g^{hr}(\partial_k S_r) + \Gamma_{sj}^h \delta_k^s S_i - \Gamma_{sj}^h g_{ik} S^S + \\ & \delta_j^h S_s \Gamma_{ik}^s + \delta_j^h S_s \delta_k^s S_i - \delta_j^h S_s g_{ik} S^s - g_{sj} S^h \Gamma_{ik}^s - g_{sj} S^h \delta_k^s S_i + g_{sj} g_{ik} S^h S^s - \\ & \Gamma_{sk}^h \delta_j^s S_i + \Gamma_{sk}^h g_{ij} S^S - \delta_k^h S_s \Gamma_{ij}^s - \delta_k^h S_j S_i + \delta_k^h g_{ij} S_s S^s + g_{sk} \Gamma_{ij}^s S^h + g_{jk} S_i S^h - \\ & g_{ij} S_k S^h\end{aligned}$$

ifadesi elde edilmiş olur.Bu ifadede geçen $\partial_j g_{ik}$ ve $\partial_j g^{ik}$ kısmi türevleri için, Lemma 2.1 yardımı ile $\partial_j g_{ik} = 2T_j g_{ik} + g_{rk}\Gamma_{ij}^r + g_{ir}\Gamma_{kj}^r$ ve

$\partial_j g^{ik} = -2T_j g^{ik} - g^{rk}\Gamma_{rj}^i - g^{ir}\Gamma_{rj}^k$ eşitlikleri , yukarıdaki ifadede yerine konulursa,

$$\overline{R}_{ijk}^{h}=R_{ijk}^{h}+\delta_{k}^{h}(\partial_{j}S_{i})-2T_{j}g_{ik}g^{hr}S_{r}-g_{tk}\Gamma_{ij}^{t}g^{hr}S_{r}-g_{it}\Gamma_{kj}^{t}g^{hr}S_{r}+2T_{j}g_{ik}g^{hr}S_{r}+$$

$$g_{ik}g^{tr}\Gamma_{tj}^{h}S_{r}+g_{ik}g^{ht}\Gamma_{tj}^{r}S_{r}-g_{ik}g^{hr}(\partial_{j}S_{r})-\delta_{j}^{h}(\partial_{k}S_{i})+2T_{k}g_{ij}g^{hr}S_{r}+g_{tj}g^{hr}\Gamma_{ik}^{t}S_{r}+$$

$$g_{it}\Gamma_{jk}^{t}g^{hr}S_{r}-2g_{ij}T_{k}g^{hr}S_{r}-g_{ij}g^{tr}\Gamma_{tk}^{h}S_{r}-g_{ij}g^{ht}\Gamma_{tk}^{r}S_{r}+g_{ij}g^{hr}(\partial_{k}S_{r})+\Gamma_{kj}^{h}S_{i}-$$

$$\Gamma_{sj}^{h}g_{ik}S^{s}+\delta_{j}^{h}S_{s}\Gamma_{ik}^{s}+\delta_{j}^{h}S_{k}S_{i}-\delta_{j}^{h}g_{ik}S_{s}S^{s}-g_{sj}S^{h}\Gamma_{ik}^{s}-g_{kj}g^{hr}S_{r}S_{i}+$$

$$g_{ik}g^{hr}S_{r}S_{j}-\Gamma_{jk}^{h}S_{i}+\Gamma_{sk}^{h}g_{ij}S^{s}-\delta_{k}^{h}S_{s}\Gamma_{ij}^{s}-\delta_{k}^{h}S_{j}S_{i}+\delta_{k}^{h}g_{ij}S_{s}S^{s}+g_{sk}\Gamma_{ij}^{s}S^{h}+$$

$$g_{jk}g^{hr}S_{r}S_{i}-g_{ij}g^{hr}S_{r}S_{k}$$

eşitliği bulunur. Birbirini yokeden terimler çıkarıldıktan sonra, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\overline{R}_{ijk}^{h}=R_{ijk}^{h}+\delta_{k}^{h}(\partial_{j}S_{i}-S_{s}\Gamma_{ij}^{s}-S_{j}S_{i}+g_{ij}S_{s}S^{s})-\delta_{j}^{h}(\partial_{k}S_{i}-S_{s}\Gamma_{ik}^{s}-S_{k}S_{i}+g_{ik}S_{s}S^{s})+$$

$$g_{ij}g^{hr}(\partial_{k}S_{r}-S_{t}\Gamma_{rk}^{t}-S_{r}S_{k})-g_{ik}g^{hr}(\partial_{j}S_{r}-S_{t}\Gamma_{rj}^{t}-S_{r}S_{j})$$

Sonuç olarak, $S_{ij}=\nabla_{j}S_{i}-S_{i}S_{j}+\frac{1}{2}g_{ij}S_{s}S^{s}$ kısaltması yapılarak,

$$\overline{R}_{ijk}^{h}=R_{ijk}^{h}+\delta_{k}^{h}S_{ij}-\delta_{j}^{h}S_{ik}+g_{ij}g^{hr}S_{rk}-g_{ik}g^{hr}S_{rj}$$ bulunur.

$\overline{R}_{mijk}=g_{mh}\overline{R}_{ijk}^{h}$ olduğundan

$$\overline{R}_{mijk}=R_{mijk}+g_{mk}S_{ij}-g_{mj}S_{ik}+g_{ij}S_{mk}-g_{ik}S_{mj} \tag{2.3}$$

şeklindedir. Ricci eğrilik tensörünün tanımından faydalanarak

$$\overline{R}_{ij}=R_{ij}+(n-2)S_{ij}+S\,g_{ij} \tag{2.4}$$

elde edilir. Burada $S=g^{mk}S_{mk}$ olarak tanımlanmıştır. Skaler eğrilik ise

$$\overline{R}=R+2(n-1)S \tag{2.5}$$

eşitliği ile verilmektedir.

$\overline{R}_{ij}$ Ricci tensörü $\overline{R}_{ij}=\overline{R}_{(ij)}+\overline{R}_{[ij]}$ şeklinde ifade edilir. Burada $\overline{R}_{(ij)}$ ve $\overline{R}_{[ij]}$, sırasıyla, $\overline{R}_{ij}$ tensörünün simetrik ve anti-simetrik kısımlarını göstermektedir.

$\overline{R}_{(ij)}=\frac{1}{2}(\overline{R}_{ij}+\overline{R}_{ji})$ ve $\overline{R}_{[ij]}=\frac{1}{2}(\overline{R}_{ij}-\overline{R}_{ji})$ olduğundan,

$$\overline{R}_{(ij)}=R_{(ij)}+(n-2)[\ \nabla_{(j}S_{i)}-S_i\,S_j+\frac{1}{2}\,g_{ij}\,S_s\,S^s\ ]+S\,g_{ij} \tag{2.6}$$

ve

$$\overline{R}_{[ij]}=R_{[ij]}+(n-2)\ \nabla_{[j}S_{i]} \tag{2.7}$$

dir. Yukarıdaki eşitliklerde, $\nabla_{(j}S_{i)}$ ve $\nabla_{[j}S_{i]}$, sırasıyla, $\nabla_j S_i$ kovaryant türevinin j ve i indislerine göre simetrik ve antisimetrik kısımlarını göstermektedir.

Teorem 2.2: WS-manifoldunun eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $\overline{R}_{mijk}+\overline{R}_{mikj}=0$

ii) $\overline{R}_{mijk}+\overline{R}_{imjk}=2\,g_{mi}\,(T_{j.k}-T_{k.j})$

iii) $\overline{R}^{i}_{ijk}=R^{i}_{ijk}=2\,R_{[kj]}$

iv) $\overline{R}^{h}_{ijk}+\overline{R}^{h}_{jki}+\overline{R}^{h}_{kij}=2(\delta^h_i\ \nabla_{[k}S_{j]}+\delta^h_j\ \nabla_{[i}S_{k]}+\delta^h_k\ \nabla_{[j}S_{i]})$

İspat:

i) $\overline{R}_{mijk}=R_{mijk}+g_{mk}\,S_{ij}-g_{mj}\,S_{ik}+g_{ij}\,S_{mk}-g_{ik}\,S_{mj}$

ve

$$\overline{R}_{mikj}=R_{mikj}+g_{mj}\,S_{ik}-g_{mk}\,S_{ij}+g_{ik}\,S_{mj}-g_{ij}\,S_{mk}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve simetrik konneksiyona ait eğrilik tensörünün benzer özelliği hatırlanırsa, $\overline{R}_{mijk}+\overline{R}_{mikj}=0$ elde edilir.

ii) $\overline{R}_{mijk}=R_{mijk}+g_{mk}\,S_{ij}-g_{mj}\,S_{ik}+g_{ij}\,S_{mk}-g_{ik}\,S_{mj}$

ve

$$\overline{R}_{imjk}=R_{imjk}+g_{ik}\,S_{mj}-g_{ij}\,S_{mk}+g_{mj}\,S_{ik}-g_{mk}\,S_{ij}$$

eşitlikleri üzerinde yukarıdaki işlem uygulanırsa,

$$\overline{R}_{mijk}+\overline{R}_{imjk}=2\,g_{mi}(T_{j.k}-T_{k.j})$$

bulunur.

iii) $\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\delta^h_k\,S_{ij}-\delta^h_j\,S_{ik}+g_{ij}\,g^{hr}\,S_{rk}-g_{ik}\,g^{hr}\,S_{rj}$ ifadesinde h ve i indisleri üzerinde daraltma yapılırsa, $\overline{R}^i_{ijk}=R^i_{ijk}=2\,R_{[kj]}$ sonucuna ulaşılır.

iv) $\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\delta^h_k\,S_{ij}-\delta^h_j\,S_{ik}+g_{ij}\,g^{hr}\,S_{rk}-g_{ik}\,g^{hr}\,S_{rj}$

$$\overline{R}^h_{jki}=R^h_{jki}+\delta^h_i\,S_{jk}-\delta^h_k\,S_{ji}+g_{jk}\,g^{hr}\,S_{ri}-g_{ji}\,g^{hr}\,S_{rk}$$

$$\overline{R}^h_{kij}=R^h_{kij}+\delta^h_j\,S_{ki}-\delta^h_i\,S_{kj}+g_{ki}\,g^{hr}\,S_{rj}-g_{kj}\,g^{hr}\,S_{ri}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\overline{R}^h_{ijk}+\overline{R}^h_{jki}+\overline{R}^h_{kij}=(R^h_{ijk}+R^h_{jki}+R^h_{kij})+\delta^h_i(S_{jk}-S_{kj})+\delta^h_j(S_{ki}-S_{ik})+\delta^h_k(S_{ij}-S_{ji}) \qquad (2.8)$$

elde edilir. $R^h_{ijk}+R^h_{jki}+R^h_{kij}=0$ olduğu W-manifoldlarından biliniyor. Diğer taraftan,

$$S_{ij}=\nabla_j\,S_i-S_i\,S_j+\frac{1}{2}\,g_{ij}\,S_s\,S^s \quad \text{ve} \quad S_{ji}=\nabla_i\,S_j-S_j\,S_i+\frac{1}{2}\,g_{ji}\,S_s\,S^s$$

olduğundan,

$$S_{ij}-S_{ji}=2\,\nabla_{[j}S_{i]} \qquad (2.9)$$

eşitliği (2.8)de yerine yazılırsa,

$$\overline{R}^h_{ijk}+\overline{R}^h_{jki}+\overline{R}^h_{kij}=2(\delta^h_i\,\nabla_{[k}S_{j]}+\delta^h_j\,\nabla_{[i}S_{k]}+\delta^h_k\,\nabla_{[j}S_{i]})$$

elde edilir.

Sonuç 2.1: WS-manifoldunda S_i vektörü gradient ise, $\overline{R}^h_{ijk}+\overline{R}^h_{jki}+\overline{R}^h_{kij}=0$ özdeşliği sağlanır.

Teorem 2.3: WS ve W-manifoldları aynı eğrilik tensörüne sahip iseler, S_i vektörü gradienttir.

İspat: $\overline{R}_{mijk} = R_{mijk}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (2.3)den

$$g_{mk}\ S_{ij} - g_{mj}\ S_{ik} + g_{ij}\ S_{mk} - g_{ik}\ S_{mj} = 0 \tag{2.10}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı g^{mk} karşıt tensörü ile çarpılır, m ve k indisleri üzerinden toplam alınırsa,

$$\text{(n}-2)\ S_{ij} + S\ g_{ij} = 0 \tag{2.11}$$

bulunur. (2.11) eşitliğinden,

$$2(\text{n}-1)\ S = 0 \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.12), (2.11)de yerine konulursa,

$$S_{ij} = 0$$

bulunur. Bu da, S_i vektörünün gradient olması demektir.

Lemma 2.2: WS-manifoldunda S_i vektörünün gradient olması için gerek ve yeter şart: S_{ij} tensörünün simetrik olmasıdır.

Tanım 2.1: WS-manifoldu üzerinde $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ şartı sağlanıyorsa, semi-simetrik konneksiyona lokal-düz konneksiyon adı verilir.

Tanım 2.2: $R^h_{ijk} = 0$ şartını sağlayan WS-manifolduna lokal-düz WS-manifoldu adı verilir.

Teorem 2.4: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ise, T_k vektörü gradienttir.

İspat: Tanım 2.1 ve (2.3)den,

$$R_{mijk} = g_{mj}\ S_{ik} - g_{mk}\ S_{ij} + g_{ik}\ S_{mj} - g_{ij}\ S_{mk} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.13) bağıntısı g^{mi} ile çarpılır ve $(1.8)_3$ ile $(1.8)_6$ bağıntıları gözönüne alınırsa,

$$n\,(T_{j,k} - T_{k,j}) = n(\nabla_k T_j - \nabla_j T_k) = 0$$

sonucu elde edilir. Bu da T_k nın gradient olması demektir. Yani WS-manifoldu semi-simetrik konneksiyonlu Riemann manifoldudur,[16].

Tanım 2.3: WS-manifoldu üzerinde, $\overline{R}_{ijk}^{h} = 0$ ve $S_{ij} = 0$ şartları sağlanırsa, bu manifolda WS-grup manifoldu adı verilir [17].

Lemma 2.3: WS-grup manifoldunda, S_k vektörü gradienttir.

Teorem 2.5: WS-grup manifoldu lokal-düzdür.

İspat: Tanım 2.3 deki $\overline{R}_{ijk}^{h} = 0$, $S_{ij} = 0$ şartları (2.2) den $R_{ijk}^{h} = 0$ eşitliğini gerektirmektedir. Bu ise, Tanım 2.2 ye göre, manifoldun lokal-düz olması demektir.

3.SEMİ-SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARINDA DÖNÜŞÜMLER

3.1.KONFORM DÖNÜŞÜMLER

WS-manifoldunun WS*-manifolduna konform bir dönüşümü σ olsun. Bu bölümde, $\sigma : WS \to WS^*$ dönüşümü altında, WS ve WS*-manifoldlarına ait L^i_{jk} ve $L^i_{jk}{}^*$ konneksiyon katsayıları ile $\overline{R}^h_{ijk}$ ve $\overline{R}^h_{ijk}{}^*$ eğrilik tensörleri arasındaki bağıntıyı inceleyeceğiz.

Teorem 3.1.1: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon $\sigma : WS \to WS^*$ dönüşümü altında , $L^i_{jk}{}^* = L^i_{jk} + \delta^i_j P_k + \delta^i_k (P_j - Q_j) - g_{jk}(P^i - Q^i)$ şeklinde değişmektedir. Burada $P_j = T_j - T_j^*$ ve $Q_j = S_j - S_j^*$ dir.

İspat: Bilindiği gibi, WS ve WS*- manifoldlarının karşı gelen noktalarında $g^{ij} = g^{ij*}$ ve $g_{ij} = g_{ij}{}^*$ yapılabilir,[1]. WS*-manifoldunun konneksiyon katsayıları, (2.1) yardımıyla, $L^i_{jk}{}^* = \Gamma^i_{jk}{}^* + \delta^i_k S_j{}^* - g_{jk}{}^* S^{i*}$ şeklinde elde edilir. Bu eşitlikte, simetrik konneksiyon için $\Gamma^i_{jk}{}^*$ [3, p.p.5] ve $S_j{}^*$ tanımları kullanıldığında,

$$L^i_{jk}{}^* = (\Gamma^i_{jk} + \delta^i_j P_k + \delta^i_k P_j - g_{jk} P^i) + \delta^i_k (S_j - Q_j) - g_{jk} (S^i - Q^i)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$L^i_{jk}{}^* = (\Gamma^i_{jk} + \delta^i_k S_j - g_{jk} S^i) + \delta^i_j P_k + \delta^i_k (P_j - Q_j) - g_{jk}(P^i - Q^i)$$

$$L^i_{jk}{}^* = L^i_{jk} + \delta^i_j P_k + \delta^i_k (P_j - Q_j) - g_{jk}(P^i - Q^i) \qquad (3.1.1)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2: σ-konform dönüşümü altında, WS-manifolduna ait eğrilik tensörü

$$\overline{R}_{ijk}^{h\,*} = \overline{R}_{ijk}^{h} + 2\delta_i^h(\nabla_{[j}P_{k]} + P_{[j}S_{k]}) + \delta_k^h W_{ij} - \delta_j^h W_{ik} + g_{ij}g^{hl}W_{lk} - g_{ik}g^{hl}W_{lj} + 2g^{sl}P_sQ_lG_{ijk}^h$$

şeklinde değişir. Burada, $P_{ij} = \nabla_j P_i - P_iP_j + \frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}P_kP_l$, $\underline{P}_{ij} = P_{ij} - P_iS_j$, $Q_{ij} = \nabla_j Q_i + Q_iQ_j - \frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}Q_kQ_l$, $\underline{Q}_{ij} = Q_{ij} - Q_iS_j$ olmak üzere $W_{ij} = \underline{P}_{ij} - Q_{ij} + 2P_{(i}Q_{j)}$ ve $G_{ijk}^h = \delta_j^h g_{ik} - \delta_k^h g_{ij}$ dir.

İspat: $(1.7)_1$ den,

$$\overline{R}_{ijk}^{h\,*} = \partial_j L_{ik}^{h\,*} - \partial_k L_{ij}^{h\,*} + L_{lj}^{h\,*}L_{ik}^{l\,*} - L_{lk}^{h\,*}L_{ij}^{l\,*}$$

dir.(3.1.1) ve $(1.7)_1$ den,

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{ijk}^{h\,*} = {} & \overline{R}_{ijk}^{h} + \delta_i^h(\partial_j P_k) + \delta_k^h(\partial_j\{P_i - Q_i\}) - (\partial_j g_{ik})(P^h - Q^h) - g_{ik}(\partial_j\{P^h - Q^h\}) - \\
& \delta_i^h(\partial_k P_j) - \delta_j^h(\partial_k\{P_i - Q_i\}) + (\partial_k g_{ij})(P^h - Q^h) + g_{ij}(\partial_k\{P^h - Q^h\}) + L_{ij}^h P_k + \\
& L_{kj}^h(P_k - Q_i) - L_{lj}^h g_{ik}g^{ls}(P_s - Q_s) + L_{ik}^h P_j + \delta_i^h P_jP_k + \delta_k^h P_j(P_k - Q_i) - \\
& g_{ik}g^{hs}P_j(P_s - Q_s) + \delta_j^h(P_l - Q_l)L_{ik}^l + \delta_j^h(P_i - Q_i)P_k + \\
& \delta_j^h(P_k - Q_k)(P_i - Q_i) - \delta_j^h(P_i - Q_i)(P_s - Q_s)g_{ik}g^{ls} - \\
& g_{lj}g^{hs}(P_s - Q_s)L_{ik}^l - g_{ij}g^{hs}(P_s - Q_s)P_k - g_{kj}g^{hs}(P_s - Q_s)(P_i - Q_i) + \\
& g_{ik}g^{hs}(P_j - Q_j)(P_s - Q_s) - L_{ik}^h P_j - L_{jk}^h(P_i - Q_i) + L_{lk}^h g_{ij}g^{ls}(P_s - Q_s) - L_{ij}^h P_k - \\
& \delta_i^h P_kP_j - \delta_j^h P_k(P_i - Q_i) + g_{ij}g^{hs}P_k(P_s - Q_s) - \delta_k^h(P_l - Q_l)L_{ij}^l - \\
& \delta_k^h(P_i - Q_i)P_j - \delta_k^h(P_j - Q_j)(P_i - Q_i) + \delta_k^h(P_l - Q_l)(P_s - Q_s)g_{ij}g^{ls} + \\
& g_{lk}g^{hs}(P_s - Q_s)L_{ij}^l + g_{ik}g^{hs}(P_s - Q_s)P_j + g_{jk}g^{hs}(P_s - Q_s)(P_i - Q_i) - \\
& g_{ij}g^{hs}(P_s - Q_s)(P_k - Q_k)
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

bulunur.

$\overline{R}_{ijk}^{h\,*} = \overline{R}_{ijk}^{h} + \{P'li\ \ terimler\} + \{Q'lu\ \ terimler\} + \{P'li\ \ ve\, Q'lu\ \ terimler\}$ ifadesini kullanabiliriz. Şimdi burada adı geçen terimleri sırasıyla elde edeceğiz. Kısaltma olması bakımından, P'li terimleri $\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(P)$, Q'lu terimleri $\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(Q)$, P'li ve Q'lu terimleri $\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(P-Q)$ olarak ifade edelim.

Lemma 2.1 ve $P^h = g^{hl}P_l$ yardımıyla, $\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(P)$ için,

$$\begin{aligned}\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(P) = {} & \delta_i^h(\partial_j P_k)+\delta_k^h(\partial_j P_i)-2T_j g_{ik}g^{hs}P_s+2T_j g_{ik}g^{hs}P_s-g_{lk}g^{hs}L_{ij}^l P_s-g_{il}g^{hs}L_{kj}^l P_s+g_{ik}g^{sl}L_{ij}^h P_s+\\ & g_{ik}g^{hs}L_{sj}^l P_l-g_{ik}g^{hs}(\partial_j P_s)-\delta_i^h(\partial_k P_j)-\delta_j^h(\partial_k P_i)+2T_k g_{ij}g^{hs}P_s+\\ & g_{lj}g^{hs}L_{ik}^l P_s+g_{il}g^{hs}L_{sk}^l P_s-2T_k g_{ij}g^{hs}P_s-g_{ij}g^{sl}L_{lk}^h P_s-g_{ij}g^{hs}L_{sk}^l P_l+\\ & g_{ij}g^{hs}(\partial_k P_s)+L_{ij}^h P_k+L_{kj}^h P_i-g_{ik}g^{ls}L_{lj}^h P_s+L_{ik}^h P_j+\delta_i^h P_j P_k+\delta_k^h P_j P_i-\\ & g_{ik}g^{hs}P_j P_s+\delta_j^h P_l L_{ik}^l+\delta_j^h P_i P_k+\delta_j^h P_k P_i-\delta_j^h g_{ik}g^{ls}P_l P_s-g_{lj}g^{hs}L_{ik}^l P_s-\\ & \delta_j^h P_k P_i-\delta_j^h g_{ik}g^{ls}P_l P_s-g_{lj}g^{hs}L_{ik}^l P_s-g_{ij}g^{hs}P_s P_k-g_{kj}g^{hs}P_s P_i+\\ & g_{ik}g^{hs}P_s P_j-L_{ik}^h P_j-L_{jk}^h P_i+g_{ij}g^{sl}L_{lk}^h P_s-L_{ij}^h P_k-\delta_i^h P_j P_k-\delta_j^h P_k P_i+\\ & g_{ij}g^{hs}P_s P_k-\delta_k^h P_l L_{ij}^l-\delta_k^h P_i P_j-\delta_k^h P_j P_i+\delta_k^h g_{ij}g^{sl}P_l P_s+g_{lk}g^{hs}L_{ij}^l P_s+\\ & g_{ik}g^{hs}P_s P_j+g_{kj}g^{hs}P_i P_s-g_{ij}g^{hs}P_k P_s\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$P_{ij} = \partial_j P_i - P_l L_{ij}^l - P_i P_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} P_k P_l \tag{3.1.3}$$

ve

$$\underline{P}_{ij} = P_{ij} - P_i S_j \tag{3.1.4}$$

tanımlamaları yapılarak,

$$\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(P) = 2\delta_i^h(\nabla_{[j}P_{k]} + P_{[j}S_{k]}) + \delta_k^h \underline{P}_{ij} - \delta_j^h \underline{P}_{ik} + g_{ij}g^{hl}\underline{P}_{lk} - g_{ik}g^{hl}\underline{P}_{lj} \tag{3.1.5}$$

elde edilir.

Şimdi $\overline{R}_{ijk}^{h\,*}(Q)$ yu oluşturalım:

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_{ijk}^{h\ *}(Q) = &-\delta_k^h(\partial_j Q_k) + 2T_j g_{ik} g^{hs} Q_s + g_{lk} g^{hs} L_{ij}^l Q_s + g_{is} g^{hl} L_{kj}^s Q_l - 2T_j g_{ik} g^{hs} Q_s - g_{ik} g^{sl} L_{lj}^h Q_s - \\
& g_{ik} g^{hl} L_{lj}^s Q_s + g_{ik} g^{hl}(\partial_j Q_l) + \delta_j^h(\partial_k Q_i) - 2T_k g_{ij} g^{hs} Q_s - g_{lj} g^{hs} L_{ik}^l Q_s - \\
& g_{il} g^{hs} L_{jk}^l Q_s + 2T_k g_{ij} g^{hs} Q_s + g_{lj} g^{sl} L_{lk}^h Q_s + g_{ij} g^{hs} L_{sk}^l Q_l - g_{ij} g^{hs}(\partial_k Q_s) - L_{kj}^h Q_i + g_{ik} g^{ls} L_{lj}^h Q_s - \\
& \delta_j^h L_{ik}^l Q_l + \delta_j^h Q_k Q_i - \delta_j^h g_{ik} g^{ls} Q_l Q_s + g_{lj} g^{hs} L_{ik}^l Q_s - g_{kj} g^{hs} Q_s Q_i + g_{ik} g^{hs} Q_j Q_s + \\
& L_{jk}^h Q_i - g_{ij} g^{sl} L_{lk}^h Q_s + \delta_k^h L_{ij}^l Q_l - \delta_k^h Q_i Q_j + \delta_k^h g_{ij} g^{sl} Q_l Q_s - g_{lk} g^{hs} L_{ij}^l Q_s + \\
& g_{kj} g^{hs} Q_i Q_s - g_{ij} g^{hs} Q_k Q_s
\end{aligned}
$$

eşitliğinde gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılır ve

$$
Q_{ij} = \partial_j Q_i - Q_l L_{ij}^l + Q_i Q_j - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} Q_k Q_l \tag{3.1.6}
$$

ifadesi kullanılarak,

$$
\underline{Q}_{ij} = Q_{ij} - Q_i S_j \tag{3.1.7}
$$

denirse,

$$
\overline{R}_{ijk}^{h\ *}(Q) = -\delta_k^h \underline{Q}_{ij} + \delta_j^h \underline{Q}_{ik} + g_{ik} g^{hl} Q_{lj} - g_{ij} g^{hl} \underline{Q}_{lk} \tag{3.1.8}
$$

elde edilir.

Şimdi de son olarak, $\overline{R}_{ijk}^{h\ *}(P-Q)$ yu elde edelim:

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_{ijk}^{h\ *}(P-Q) = &-\delta_k^h(P_j Q_i) + g_{ik} g^{hl} P_j Q_l - \delta_j^h(P_k Q_i) - \delta_j^h(P_k Q_i) - \delta_j^h(P_i Q_k) + \delta_j^h g_{ik} g^{sl} P_l Q_s + \\
& \delta_j^h g_{ik} g^{sl} P_s Q_l + g_{ij} g^{hl} P_k Q_l + g_{kj} g^{hl} P_l Q_i + g_{kj} g^{hl} P_i Q_l - g_{ik} g^{hl} P_j Q_l - \\
& g_{ik} g^{hl} P_l Q_j + \delta_j^h(P_k Q_i) - g_{ij} g^{hl} P_k Q_l + \delta_k^h(P_j Q_i) + \delta_k^h(P_j Q_i) + \delta_k^h(P_i Q_j) - \\
& \delta_k^h g_{ij} g^{sl} P_l Q_s - \delta_k^h g_{ij} g^{sl} P_s Q_l - g_{ik} g^{hl} P_j Q_l - g_{jk} g^{hl} P_l Q_i - g_{jk} g^{hl} P_i Q_l + g_{ij} g^{hl} P_l Q_k + \\
& g_{ij} g^{hl} P_k Q_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_{ijk}^{h\ *}(P-Q) = &-\delta_k^h(-P_j Q_i - P_i Q_j + g_{ij} g^{sl} P_l Q_s + g_{ij} g^{sl} P_s Q_l) + \delta_j^h(-P_k Q_i - P_i Q_k + g_{ik} g^{sl} P_l Q_s + g_{ik} g^{sl} P_s Q_l) + \\
& g_{ik} g^{hl}(-P_l Q_j - P_j Q_l) + g_{ij} g^{hl}(P_k Q_l + P_l Q_k)
\end{aligned}
$$

Bulunan son eşitlikte, simetrik fark yardımıyla terimler düzenlenir ve $G^h_{ijk} = \delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}$ olduğu hatırlanırsa,

$$\overline{R}^{h\,*}_{ijk}(P-Q) = 2\delta^h_k P_{(i}Q_{j)} - 2\delta^h_j P_{(i}Q_{k)} - 2g_{ik}g^{hl}P_{(j}Q_{l)} + 2g_{ij}g^{hl}P_{(k}Q_{l)} + 2g^{sl}P_sQ_lG^h_{ijk} \qquad (3.1.9)$$

elde edilir.

$$W_{ij} = \underline{P}_{ij} - \underline{Q}_{ij} + 2P_{(i}Q_{j)} \qquad (3.1.10)$$

kısaltması yapılarak, nihayet, (3.1.5), (3.1.8) ve (3.1.9) dan, (3.1.2) denklemi

$$\overline{R}^{h\,*}_{ijk} = \overline{R}^h_{ijk} + 2\delta^h_i(\nabla_{[j}P_{k]} + P_{[j}S_{k]}) + \delta^h_k W_{ij} - \delta^h_j W_{ik} + g_{ij}g^{hl}W_{lk} - g_{ik}g^{hl}W_{lj} + 2g^{sl}P_sQ_lG^h_{ijk} \qquad (3.1.11)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.2 de verilen (3.1.11) eşitliği yardımıyla aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\overline{R}_{mijk}^{\;*} = \overline{R}_{mijk} + 2g_{mi}(\nabla_{[j}P_{k]} + P_{[j}S_{k]}) + g_{mk}W_{ij} - g_{mj}W_{ik} + g_{ij}W_{mk} - g_{ik}W_{mj} + 2g^{sl}P_sQ_lG_{mijk} \qquad (3.1.12)$$

$$\overline{R}_{ij}^{\;*} = \overline{R}_{ij} + 2(\nabla_{[j}P_{i]} + P_{[j}S_{i]}) + (n-2)W_{ij} + g_{ij}W - 2(n-1)g_{ij}g^{sl}P_sQ_l \qquad (3.1.13)$$

$$\overline{R}^{\,*} = \overline{R} + 2(n-1)(W - ng^{sl}P_sQ_l) \qquad (3.1.14)$$

Şimdi σ-konform dönüşümü altında invaryant kalan konform eğrilik tensörü elde edilecektir.

Teorem 3.1.3: WS-manifoldunda konform eğrilik tensörü

$$\overline{C}^h_{ijk} = \overline{R}^h_{ijk} - \frac{2}{n}\delta^h_i R_{[kj]} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_j \overline{R}_{ik} - \delta^h_k \overline{R}_{ij} - g_{ij}g^{mh}\overline{R}_{mk} + g_{ik}g^{mh}\overline{R}_{mj}) -$$
$$\frac{2}{n(n-2)}\{\delta^h_j R_{[ik]} - \delta^h_k R_{[ij]} - g_{ij}g^{mh}R_{[mk]} + g_{ik}g^{mh}R_{[mj]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)}G^h_{ijk}$$

şeklindedir.

İspat: (3.1.13) bağıntısından W_{ij} ,

$$W_{ij} = \frac{(\overline{R}_{ij}^{\;*} - \overline{R}_{ij}) - 2(\nabla_{[j}P_{i]} + P_{[j}S_{i]}) - g_{ij}W + 2(n-1)g_{ij}g^{sl}P_sQ_l}{n-2}$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntı, aşağıdaki (3.1.15) ile denktir:

$$W_{ij} = \frac{n(\overline{R}_{ij}{}^{*} - \overline{R}_{ij}) - 2n(\nabla_{[j}P_{i]} + P_{[j}S_{i]}) - ng_{ij}W + 2n(n-1)g_{ij}g^{sl}P_sQ_l}{n(n-2)} \tag{3.1.15}$$

(3.1.13) yardımı ile, $\overline{R}_{ij}{}^{*} - \overline{R}_{ji}{}^{*}$ farkı oluşturulursa,

$$\overline{R}_{ij}{}^{*} - \overline{R}_{ji}{}^{*} = (\overline{R}_{ij} - \overline{R}_{ji}) + 4(\nabla_{[j}P_{i]} + P_{[j}S_{i]}) + (n-2)(W_{ij} - W_{ji}) \tag{3.1.16}$$

elde edilir. (3.1.10), (3.1.4) ve (3.1.7) yardımıyla daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$W_{ij} = P_{ij} - P_iS_j - Q_{ij} + Q_iS_j + P_iQ_j + P_jQ_i \tag{3.1.17}$$

bulunur. (3.1.3), (3.1.6) ve (3.1.10) ifadeleri (3.1.16) da yerine konulursa

$$\overline{R}_{ij}{}^{*} - \overline{R}_{ji}{}^{*} = (\overline{R}_{ij} - \overline{R}_{ji}) + 2n(\nabla_{[j}P_{i]} - P_{[i}S_{j]} - \nabla_{[j}Q_{i]} + Q_{[i}S_{j]}) - 4(-\nabla_{[j}Q_{i]} + Q_{[i}S_{j]}) \tag{3.1.18}$$

bağıntısı elde edilir ve bu bağıntı yardımıyla,

$$(\overline{R}_{ij}{}^{*} - \overline{R}_{ij}) - 2n(\nabla_{[j}P_{i]} + P_{[j}S_{i]}) = (\overline{R}_{ji}{}^{*} - \overline{R}_{ji}) + 2(n-2)(\nabla_{[i}Q_{j]} + Q_{[i}S_{j]}) \tag{3.1.19}$$

bulunur. (3.1.15) bağıntısından faydalanarak,

$$W_{ij} = \frac{(n-1)(\overline{R}_{ij}{}^{*} - \overline{R}_{ij}) + (\overline{R}_{ji}{}^{*} - \overline{R}_{ji}) + 2(n-2)(\nabla_{[i}Q_{j]} + Q_{[i}S_{j]}) - ng_{ij}W + 2n(n-1)g_{ij}g^{sl}P_sQ_l}{n(n-2)} \tag{3.1.20}$$

elde edilir. $g^{ij}W_{ij} = g^{mj}W_{mj} = W$ olduğu gözönüne alınır ve

$$W = \frac{n(\overline{R}{}^{*} - \overline{R}) - n^2W + 2n^2g^{sl}P_sQ_l}{n(n-2)}$$

bağıntısı düzenlenirse,

$$W = \frac{\overline{R}{}^{*} - \overline{R}}{2(n-1)} + ng^{sl}P_sQ_l \tag{3.1.21}$$

veya

$$ng^{sl}P_sQ_l = W - \frac{\overline{R}^* - \overline{R}}{2(n-1)} \tag{3.1.22}$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan, (3.1.12) bağıntısı $g^{mi^*} = g^{mi}$ ile çarpılıp, m ve i indisleri üzerinden toplam alınırsa,

$$\overline{R}^*_{mijk}\, g^{mi^*} = \overline{R}_{mijk}\, g^{mi} + 2n(\nabla_{[j}P_{k]} + P_{[j}S_{k]}) \tag{3.1.23}$$

elde edilir. Bu bağıntı, (3.1.19) da yerine konulursa,

$$(\overline{R}_{ij}{}^* - \overline{R}_{ij}) - (\overline{R}_{ji}{}^* - \overline{R}_{ji}) - (\overline{R}^*_{mkji}g^{mk^*} - \overline{R}_{mkji}g^{mk}) = 2(n-2)(\nabla_{[i}Q_{j]} + Q_{[i}S_{j]}) \tag{3.1.24}$$

ve (3.1.22) ve (3.1.24), (3.1.20) de yerine konulursa,

$$W_{ij} = \frac{n(\overline{R}_{ij}{}^* - \overline{R}_{ij}) + (\overline{R}^*_{mkji}g^{mk^*} - \overline{R}_{mkji}g^{mk}) + (n-2)g_{ij}W - g_{ij}(\overline{R}^* - \overline{R})}{n(n-2)} \tag{3.1.25}$$

elde edilir. (3.1.23) ve (3.1.25) bağıntıları da (3.1.12) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overline{R}^*_{mijk} = \overline{R}_{mijk} &+ \frac{1}{n}g_{mi}(\overline{R}^*_{lsjk}g^{ls^*} - \overline{R}_{lsjk}g^{ls}) + \frac{g_{mk}}{n(n-2)}\{n(\overline{R}^*_{ij} - \overline{R}_{ij}) + (n-2)Wg_{ij} - g_{ij}(\overline{R}^* - \overline{R}) - \\
&(\overline{R}^*_{lsji}g^{ls^*} - \overline{R}_{lsji}g^{ls})\} - \frac{g_{mj}}{n(n-2)}\{n(\overline{R}^*_{ik} - \overline{R}_{ik}) + (n-2)Wg_{ik} - g_{ik}(\overline{R}^* - \overline{R}) - \\
&(\overline{R}^*_{lski}g^{ls^*} - \overline{R}_{lski}g^{ls})\} + \frac{g_{ij}}{n(n-2)}\{n(\overline{R}^*_{mk} - \overline{R}_{mk}) + (n-2)Wg_{mk} - g_{mk}(\overline{R}^* - \overline{R}) - \\
&(\overline{R}^*_{lskm}g^{ls^*} - \overline{R}_{lskm}g^{ls})\} - \frac{g_{ik}}{n(n-2)}\{n(\overline{R}^*_{mj} - \overline{R}_{mj}) + (n-2)Wg_{mj} - g_{mj}(\overline{R}^* - \overline{R}) - \\
&(\overline{R}^*_{lsjm}g^{ls^*} - \overline{R}_{lsjm}g^{ls})\} + 2(g_{mj}g_{ik} - g_{mk}g_{ij})\{\frac{W}{n} - \frac{\overline{R}^* - \overline{R}}{2n(n-1)}\}
\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

bağıntısı bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında yer alan Wg_{ij}, Wg_{ik}, Wg_{mk}, Wg_{mj} ve $\frac{W}{n}$'li terimler düzenlendiğinde birbirini yoketmektedir. Geriye kalan ifade ise, tamamen yıldızlı ve yıldızsız terimler şeklinde eşitliğin sol ve sağ tarafında yer almaktadır. Böylece,

$$\overline{C}_{mijk} = \overline{R}_{mijk} - \frac{2}{n} g_{mi} R_{[kj]} + \frac{1}{n-2}(g_{mj}\overline{R}_{ik} - g_{mk}\overline{R}_{ij} - g_{ij}\overline{R}_{mk} + g_{ik}\overline{R}_{mj}) -$$

$$\frac{2}{n(n-2)}\{g_{mj}R_{[ik]} - g_{mk}R_{[ij]} - g_{ij}R_{[mk]} + g_{ik}R_{[mj]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G_{mijk} \qquad (3.1.27)$$

olmak üzere, $\overline{C}^{*}_{mijk} = \overline{C}_{mijk}$ eşitliği elde edilir. Konform dönüşüm altında invaryant kalan (3.1.27) ifadesine WS-manifoldunun konform eğrilik tensörü adı verilir.

Teorem 3.1.4: WS-manifolduna ait konform eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{mikj} = 0$

(ii) $\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{imjk} = 0$

(iii) $\overline{C}^{h}_{hjk} = \overline{C}^{h}_{ijh} = 0$

(iv) $\overline{C}^{h}_{ijk} + \overline{C}^{h}_{jki} + \overline{C}^{h}_{kij} = 0$

İspat:

(i) (3.1.27) yardımı ile, $\overline{R}_{mijk} + \overline{R}_{mikj} = 0$ ve $\overline{G}_{mijk} + \overline{G}_{mikj} = 0$ eşitlikleri gözönüne alınırsa, kolayca $\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{mikj} = 0$ bulunur.

(ii) $\overline{R}_{mijk} + \overline{R}_{imjk} = 2g_{mi}(T_{j,k} - T_{k,j})$ ve $G_{mijk} + G_{imjk} = 0$ olduğundan, (3.1.27) yardımıyla, $\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{imjk} = 2g_{mi}(T_{j,k} - T_{k,j}) - \frac{4}{n} g_{mi} R_{[kj]}$ elde edilir. Bu ifadede $R_{[kj]} = n\nabla_{[k}T_{j]}$,[1], olduğu kullanılırsa,

$$\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{imjk} = 2g_{mi}(T_{j,k} - T_{k,j}) - 4g_{mi}\nabla_{[k}T_{j]}$$

$$\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{imjk} = 2g_{mi}(T_{j,k} - T_{k,j}) - 2g_{mi}(T_{j,k} - T_{k,j})$$

$$\overline{C}_{mijk} + \overline{C}_{imjk} = 0$$

bulunur.

(iii) $$\overline{C}^{h}_{ijk} = \overline{R}^{h}_{ijk} - \frac{2}{n}\delta^{h}_{i} R_{[kj]} + \frac{1}{n-2}(\delta^{h}_{j}\overline{R}_{ik} - \delta^{h}_{k}\overline{R}_{ij} - g_{ij}g^{mh}\overline{R}_{mk} + g_{ik}g^{mh}\overline{R}_{mj}) -$$

$$\frac{2}{n(n-2)}\{\delta^{h}_{j}R_{[ik]} - \delta^{h}_{k}R_{[ij]} - g_{ij}g^{mh}R_{[mk]} + g_{ik}g^{mh}R_{[mj]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G^{h}_{ijk} \qquad (3.1.28)$$

eşitliğinde h ve i indisleri üzerinden daraltma yapılırsa,

$$\overline{C}^h_{hjk} = \overline{R}^h_{hjk} - 2\overline{R}_{[jk]} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G^h_{hjk}$$

elde edilir. $\overline{R}^h_{hjk} = 2\overline{R}_{[kj]}$ ve $G^h_{hjk} = 0$ olduğundan, $\overline{C}^h_{hjk} = 0$ bulunur.

(iv) $$\overline{C}^h_{ijk} = \overline{R}^h_{ijk} - \frac{2}{n}\delta^h_i R_{[kj]} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_j \overline{R}_{ik} - \delta^h_k \overline{R}_{ij} - g_{ij} g^{mh} \overline{R}_{mk} + g_{ik} g^{mh} \overline{R}_{mj}) -$$
$$\frac{2}{n(n-2)}\{\delta^h_j R_{[ik]} - \delta^h_k R_{[ij]} - g_{ij} g^{mh} R_{[mk]} + g_{ik} g^{mh} R_{[mj]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G^h_{ijk}$$

$$\overline{C}^h_{jki} = \overline{R}^h_{jki} - \frac{2}{n}\delta^h_j R_{[ik]} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_k \overline{R}_{ji} - \delta^h_i \overline{R}_{jk} - g_{jk} g^{mh} \overline{R}_{mi} + g_{ji} g^{mh} \overline{R}_{mk}) -$$
$$\frac{2}{n(n-2)}\{\delta^h_k R_{[ji]} - \delta^h_i R_{[jk]} - g_{jk} g^{mh} R_{[mi]} + g_{ji} g^{mh} R_{[mk]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G^h_{jki}$$

$$\overline{C}^h_{kij} = \overline{R}^h_{kij} - \frac{2}{n}\delta^h_k R_{[ji]} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_i \overline{R}_{kj} - \delta^h_j \overline{R}_{ki} - g_{ki} g^{mh} \overline{R}_{mj} + g_{kj} g^{mh} \overline{R}_{mi}) -$$
$$\frac{2}{n(n-2)}\{\delta^h_i R_{[kj]} - \delta^h_j R_{[ki]} - g_{ki} g^{mh} R_{[mj]} + g_{kj} g^{mh} R_{[mi]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G^h_{kij}$$

bağıntıları taraf tarafa toplanarak, WS ve W-manifoldlarına ait eğrilik tensörlerinin özellikleri gözönünde bulundurulursa, $\overline{C}^h_{ijk} + \overline{C}^h_{jki} + \overline{C}^h_{kij} = 0$ elde edilir.

Teorem 3.1.5: W ve WS-manifoldlarına ait konform eğrilik tensörleri aynıdır.

İspat: W ve WS-manifoldlarına ait konform eğrilik tensörleri, sırası ile, C_{mijk} ve $\overline{C}_{mijk}$ dır. $\overline{R}_{ij} = \overline{R}_{(ij)} + \overline{R}_{[ij]}$ ve $\frac{2}{n(n-2)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}$ eşitlikleri (3.1.27) bağıntısında yerine konulursa,

$$\overline{C}_{mijk} = \overline{R}_{mijk} - \frac{2}{n} g_{mi} R_{[kj]} + \frac{1}{n-2}\{g_{mj}\overline{R}_{(ik)} - g_{mk}\overline{R}_{(ij)} - g_{ij}\overline{R}_{(mk)} + g_{ik}\overline{R}_{(mj)}\} +$$
$$\frac{1}{n-2}\{g_{mj}\overline{R}_{[ik]} - g_{mk}\overline{R}_{[ij]} - g_{ij}\overline{R}_{[mk]} + g_{ik}\overline{R}_{[mj]}\} +$$
$$(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-2})\{g_{mj} R_{[ik]} - g_{mk} R_{[ij]} - g_{ij} R_{[mk]} + g_{ik} R_{[mj]}\} - \frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)} G_{mijk}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, $\overline{R}_{mijl}$ ve $\overline{R}_{ij}$ tensörlerinin ifadeleri yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\overline{C}_{mijk} = C_{mijk} + g_{mk}S_{ij} - g_{mj}S_{ik} + g_{ij}S_{mk} - g_{ik}S_{mj} + g_{mj}\{\nabla_{(k}S_{i)} - S_iS_k + \frac{1}{2}g_{ik}g^{sl}S_sS_l\} -$$
$$g_{mk}\{\nabla_{(j}S_{i)} - S_iS_j + \frac{1}{2}g_{ij}g^{sl}S_sS_l\} - g_{ij}\{\nabla_{(k}S_{m)} - S_mS_k + \frac{1}{2}g_{mk}g^{sl}S_sS_l\} +$$
$$g_{ik}\{\nabla_{(j}S_{m)} - S_mS_j + \frac{1}{2}g_{mj}g^{sl}S_sS_l\} + \frac{1}{n-2}(g_{mj}g_{ik} - g_{mk}g_{ij} - g_{ij}g_{mk} + g_{mj}g_{ik})S -$$
$$\frac{2}{n-2}SG_{mijk} + g_{mj}\nabla_{[k}S_{i]} - g_{mk}\nabla_{[j}S_{i]} - g_{ij}\nabla_{[k}S_{m]} + g_{ik}\nabla_{[j}S_{m]}$$

bulunur. $\nabla_kS_i = \nabla_{(k}S_{i)} + \nabla_{[k}S_{i]}$ olduğu gözönüne alınır ve $S_{ik} = \nabla_kS_i - S_iS_k + \frac{1}{2}g_{ik}g^{sl}S_sS_l$ tanımından faydalanılırsa , sonuç olarak $\overline{C}_{mijk} = C_{mijk}$ eşitliği elde edilir, yani W ve WS-manifoldları aynı konform eğrilik tensörüne sahiptir.

Tanım 3.1.1: WS-manifolduna, üzerinde simetrik konneksiyona göre tanımlanan konform eğrilik tensörü için $C^h_{ijk}=0$ şartı sağlanıyorsa, konform-düz WS-manifoldu adı verilir.

Tanım 3.1.2: WS-manifoldu üzerinde konform eğrilik tensörü $\overline{C}^h_{ijk}=0$ ise, semi-simetrik konneksiyona konform-düz adı verilir.

Sonuç 3.1.1: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyonun konform-düz olabilmesi için gerek ve yeter şart:manifoldun konform-düz WS-manifoldu olmasıdır.

Teorem 3.1.6: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ise, manifold konform-düzdür ve $S_{ij} = \frac{-1}{n-2}R_{ij} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{ij}$ bağıntısı sağlanmaktadır [18].

İspat: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ise, $\overline{R}_{mijk}=0$ ve dolayısıyla $\overline{R}_{ij}=0$ ve $\overline{R}=0$ dır. Bu eşitlikler WS-manifoldunun konform eğrilik tensörünün ifadesinde yerine konulursa, $\overline{C}_{mijk}=0$ ve Teorem 3.1.5 e göre $C_{mijk}=0$ elde edilir, yani WS-manifoldu konform-düzdür.

Diğer taraftan, $\overline{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)S_{ij} + Sg_{ij}$ ve $\overline{R} = R + 2(n-1)S$ bağıntılarında $\overline{R}_{ij}$=0 ve $\overline{R}$=0 eşitlikleri kullanıldığında, ikinci eşitlikten elde edilen $S = \frac{-R}{2(n-1)}$ ifadesi birinci eşitlikten elde edilen $S_{ij} = \frac{-1}{n-2}R_{ij} - \frac{S}{n-2}g_{ij}$ ifadesinde yerine konulursa, istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2: WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ve S_i vektörü gradient ise, WS-manifoldu Riemannien manifolduna indirgenmiş olur.

Teorem 3.1.7: WS-grup manifoldu konform-düzdür.

İspat: Tanım 2.3 ün gerektirdiği $\overline{R}^h_{ijk}$=0 ve S_{ij}=0 şartları, Teorem 2.1 de yerine konulursa, R^h_{ijk}=0 eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ise, (1.10) bağıntısı yardımıyla, W-manifolduna ait konform eğrilik tensörünün ifadesinde yerine konulursa, C^h_{ijk}=0 bulunur. Bu da WS-grup manifoldunun konform-düz olması demektir.

3.2.PROJEKTİF DÖNÜŞÜMLER

Simetrik ve anti-simetrik kısımlara sahip genelleştirilmiş bir konneksiyon $L^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \Omega^i_{jk}$ şeklinde ifade edildiğinde, bu konneksiyona göre tanımlanan eğrilik tensörü de $L^i_{jkl} = B^i_{jkl} + \Omega^i_{jkl}$ olarak yazılır. Burada, B^i_{jkl} : konneksiyonun simetrik kısmı $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ya bağlı terimleri, Ω^i_{jkl} : konneksiyonun antisimetrik kısmı Ω^i_{jk} ya bağlı terimleri göstermektedir. Bu durumda projektif eğrilik tensörü,[4],

$$\overline{W}^i_{jkl} = B^i_{jkl} + \frac{\delta^i_j}{n+1}(B_{kl} - B_{lk}) + \frac{1}{n^2-1}\{\delta^i_k B_{lj} - \delta^i_l B_{kj}\} + \frac{n}{n^2-1}\{\delta^i_k B_{jl} - \delta^i_l B_{jk}\} \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Biz, burada, WS-manifolduna ait projektif eğrilik tensörünü elde ederek, bu tensörle ilgili bazı teoremler vereceğiz.

Teorem 3.2.1: WS-manifoldunda, projektif eğrilik tensörü

$$\overline{W}^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl} + \frac{\delta^i_j}{n+1}\{(\overline{R}_{kl} - \overline{R}_{lk}) + 2(n-1)\nabla_{[k}S_{l]}\} + \frac{1}{n^2-1}(\delta^i_k\{n\overline{R}_{jl} + \overline{R}_{lj} + 2(n-1)\nabla_{[l}S_{j]}\} -$$

$$\delta^i_l\{n\overline{R}_{jk} + \overline{R}_{kj} + 2(n-1)\nabla_{[k}S_{j]}\}) \quad (3.2.2)$$

şeklindedir.

İspat: Semi-simetrik konneksiyon $L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k S_j - g_{jk}S^i$ şeklinde tanımlandığına göre,

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}(\delta^i_k S_j + \delta^i_j S_k) - g_{jk}S^i \quad \text{ve} \quad \Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}(\delta^i_k S_j - \delta^i_j S_k) \text{ dır.}$$

B^i_{jkl}; eğrilik tensörünün, konneksiyonun simetrik kısmından gelen terimlerini gösterdiğine göre $B^i_{jkl} = \partial_k \overline{\Gamma}^i_{jl} - \partial_l \overline{\Gamma}^i_{jk} + \overline{\Gamma}^i_{sk}\,\overline{\Gamma}^s_{jl} - \overline{\Gamma}^i_{sl}\,\overline{\Gamma}^s_{jk}$ şeklinde ifade edilir. $(1.7)_1$ ve Lemma 2.1den

$$B^i_{jkl}=R^i_{jkl}+\frac{1}{2}\delta^i_l S_{jk}+\delta^i_j\nabla_{[k}S_{l]}-\frac{1}{2}\delta^i_k S_{jl}+g_{jk}g^{ih}S_{hl}-g_{jl}g^{ih}S_{hk}-\frac{1}{2}\delta^i_l g_{jk}g^{sr}S_sS_r+$$
$$\frac{1}{2}\delta^i_k g_{jl}g^{sr}S_sS_r+\frac{1}{4}\delta^i_l g_{jk}g^{sh}S_sS_h+\frac{1}{4}\delta^i_l S_kS_j-\frac{1}{4}\delta^i_k g_{jl}g^{sh}S_sS_h-\frac{1}{4}\delta^i_k S_lS_j+$$
$$\{\frac{1}{2}\delta^i_l S_{jk}-\frac{1}{2}\delta^i_l S_{jk}+\frac{1}{2}\delta^i_k S_{jl}-\frac{1}{2}\delta^i_k S_{jl}\}$$

bulunur. Burada,

$$\overline{R}^i_{jkl}=R^i_{jkl}+\delta^i_l S_{jk}-\delta^i_k S_{jl}+g_{jk}g^{ih}S_{hl}-g_{jl}g^{ih}S_{hk}$$

olduğu hatırlanırsa

$$B^i_{jkl}=\overline{R}^i_{jkl}+\delta^i_j\nabla_{[k}S_{l]}+\frac{1}{4}\delta^i_k g_{jl}g^{sh}S_sS_h-\frac{1}{4}\delta^i_l g_{jk}g^{sh}S_sS_h+\frac{1}{4}\delta^i_l S_kS_j-\frac{1}{4}\delta^i_k S_lS_j+$$
$$\frac{1}{2}\delta^i_k S_{jl}-\frac{1}{2}\delta^i_l S_{jk} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. (3.2.3) denkleminde,

$$\overline{S}_{jk}=\frac{1}{2}(S_{jk}-\frac{1}{2}S_jS_k+\frac{1}{2}g_{jk}g^{sr}S_sS_r)$$

kısaltması kullanılarak,

$$B^i_{jkl}=\overline{R}^i_{jkl}+\delta^i_j\nabla_{[k}S_{l]}+\delta^i_k\overline{S}_{jl}-\delta^i_l\overline{S}_{jk} \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.2.4) denkleminde i ve l indisleri üzerinden daraltma yapılırsa,

$$B_{jk}=\overline{R}_{jk}+\nabla_{[k}S_{j]}-(n-1)\overline{S}_{jk}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$B_{jk}-B_{kj}=(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(n-3)\nabla_{[k}S_{j]}$$

elde edilir. Bulunan B^i_{jkl} ve B_{jk} tensörleri ile $B_{jk}-B_{kj}$ farkı, (3.2.1)de yerlerine yazılırsa,

$$\overline{W}^i_{jkl} = (\overline{R}^i_{jkl} + \delta^i_j \nabla_{[k} S_{l]} + \delta^i_k \overline{S}_{jl} - \delta^i_l \overline{S}_{jk}) + \frac{\delta^i_j}{n+1}\{(\overline{R}_{kl} - \overline{R}_{lk}) - (n-3)\nabla_{[l} S_{k]}\} +$$

$$\frac{1}{n^2-1}\Big(\delta^i_k \Big\{n\big[\overline{R}_{jl} + \nabla_{[l} S_{j]} - (n-1)\overline{S}_{jl}\big] + \big[\overline{R}_{lj} + \nabla_{[j} S_{l]} - (n-1)\overline{S}_{lj}\big]\Big\} -$$

$$\delta^i_k \Big\{n\big[\overline{R}_{jk} + \nabla_{[k} S_{j]} - (n-1)\overline{S}_{jk}\big] + \big[\overline{R}_{kj} + \nabla_{[j} S_{k]} - (n-1)\overline{S}_{kj}\big]\Big\}\Big)$$

bulunur. Bu eşitlik üzerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\overline{W}^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl} + \frac{\delta^i_j}{n+1}\{(\overline{R}_{kl} - \overline{R}_{lk}) + 2(n-1)\nabla_{[k} S_{l]}\} +$$

$$\frac{1}{n^2-1}(\delta^i_k \{n\overline{R}_{jl} + \overline{R}_{lj} + 2(n-1)\nabla_{[l} S_{j]}\} - \delta^i_l \{n\overline{R}_{jk} + \overline{R}_{kj} + 2(n-1)\nabla_{[k} S_{j]}\})$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.2: W ve WS-manifoldlarına ait projektif eğrilik tensörleri arasında, $K_{jl} = nS_{jl} + S_{lj} + (n+1)Sg_{jl}$ olmak üzere, aşağıdaki bağıntı mevcuttur:

$$\overline{W}^i_{jkl} = W^i_{jkl} + \frac{2\delta^i_j}{n+1}\nabla_{[k} S_{l]} + \frac{1}{n^2-1}(\delta^i_l K_{jk} - \delta^i_k K_{jl}) + g_{jk} g^{ir} S_{rl} - g_{jl} g^{ir} S_{rk} \qquad (3.2.5)$$

İspat: (2.2) ve (2.4) ile verilen $\overline{R}^i_{jkl}$ ve $\overline{R}_{jk}$ tensörlerinin tanımları (3.2.2) de kullanılırsa,

$$\overline{W}^i_{jkl} = (R^i_{jkl} + \delta^i_l S_{jk} - \delta^i_k S_{jl} + g_{jk} g^{ih} S_{hl} - g_{jl} g^{ih} S_{hk}) +$$

$$\frac{\delta^i_j}{n+1}(2R_{[kl]} + 2(n-2)\nabla_{[l} S_{k]} + 2(n-1)\nabla_{[k} S_{l]}) +$$

$$\frac{1}{n^2-1}(\delta^i_k \{n(R_{jl} + (n-2)S_{jl} + Sg_{jl}) + (R_{lj} + (n-2)S_{lj} + Sg_{lj}) + 2(n-1)\nabla_{[l} S_{j]}\} -$$

$$\delta^i_l \{n(R_{jk} + (n-2)S_{jk} + Sg_{jk}) + (R_{kj} + (n-2)S_{kj} + Sg_{kj}) + 2(n-1)\nabla_{[k} S_{j]})$$

elde edilir. (1.12) yardımıyla,

$$\overline{W}^i_{jkl} = W^i_{jkl} + \frac{2\delta^i_j}{n+1}\nabla_{[k}S_{l]} + \frac{1}{n^2-1}[\delta^i_l(nS_{jk}+S_{kj}-(n+1)Sg_{jk})-$$

$$(\delta^i_k\, nS_{jl}+S_{lj}-(n+1)Sg_{jl})] + g_{jk}g^{ir}S_{rl} - g_{jl}g^{ir}S_{rk}$$

bulunur. Burada, $K_{jk} = nS_{jk} + S_{kj} - (n+1)Sg_{jk}$ kısaltması yapılarak, istenen sonuç sağlanmış olur.

Teorem 3.2.3: WS-manifolduna ait projektif eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\overline{W}^i_{jkl} + \overline{W}^i_{jlk} = 0$

(ii) $\overline{W}^i_{ikl} = 0$

(iii) $\overline{W}^i_{jki} = \overline{W}_{jk} = 0$

(iv) $\overline{W}^i_{jkl} + \overline{W}^i_{klj} + \overline{W}^i_{ljk} = 0$

İspat:

(i) (3.2.2)de k ve l indislerinin yerleri değiştirilerek

$$\overline{W}^i_{jlk} = \overline{R}^i_{jlk} + \frac{\delta^i_j}{n+1}\{(\overline{R}_{lk} - \overline{R}_{kl}) + 2(n-1)\nabla_{[l}S_{k]}\} + \frac{1}{n^2-1}(\delta^i_l\{n\overline{R}_{jk} + \overline{R}_{kj} + 2(n-1)\nabla_{[k}S_{j]}\}$$
$$- \delta^i_k\{n\overline{R}_{jl} + \overline{R}_{lj} + 2(n-1)\nabla_{[l}S_{j]}\}) \tag{3.2.6}$$

elde edilir. (3.2.2) ve (3.2.6) taraf tarafa toplanarak ve Teorem 2.2 den faydalanılarak, $\overline{W}^i_{jkl} + \overline{W}^i_{jlk} = 0$ sonucu elde edilir.

(ii) (3.2.2) de i ve j indisleri üzerinden daraltma yapılırsa,

$$\overline{W}^i_{ikl} = \overline{R}^i_{ikl} + \frac{n}{n+1}\{(\overline{R}_{kl} - \overline{R}_{lk}) + 2(n-1)\nabla_{[k}S_{l]}\} + \frac{1}{n^2-1}(\{n\overline{R}_{kl} + \overline{R}_{lk} + 2(n-1)\nabla_{[l}S_{k]}\} -$$
$$\{n\overline{R}_{lk} + \overline{R}_{kl} + 2(n-1)\nabla_{[k}S_{l]}\})$$

elde edilir. Burada da yine Teorem 2.2 den faydalanılarak

$$\overline{W}^i_{ikl} = 2R_{[lk]} + \frac{2n}{n+1}\overline{R}_{[kl]} + \frac{2n(n-1)}{n+1}\nabla_{[k}S_{l]} + \frac{1}{n+1}(\overline{R}_{kl} - \overline{R}_{lk}) + \frac{4}{n+1}\nabla_{[l}S_{k]}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra, kolayca $\overline{W}^{i}_{ikl}=0$ olduğu görülür.

(iii) (3.2.2) de i ve l indisleri üzerinde daraltma yapılırsa,

$$\overline{W}_{jk}=\overline{R}_{jk}+\frac{1}{n+1}\{(\overline{R}_{kj}-\overline{R}_{jk})+2(n-1)\nabla_{[k}S_{j]}\}+$$
$$\frac{1}{n^{2}-1}(\{n\overline{R}_{jk}+\overline{R}_{kj}+2(n-1)\nabla_{[k}S_{j]}\}-n\,\{n\overline{R}_{jk}+\overline{R}_{kj}+2(n-1)\nabla_{[k}S_{j]}\})$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra, $\overline{W}_{jk}=0$ sonucu elde edilir.

(iv) (3.2.2) de j, k ve l indisleri üzerinde dairesel değişim yapılarak, elde edilen

$$\overline{W}^{i}_{jkl}=\overline{R}^{i}_{jkl}+\frac{\delta^{i}_{j}}{n+1}\{(\overline{R}_{kl}-\overline{R}_{lk})+2(n-1)\nabla_{[k}S_{l]}\}+\frac{1}{n^{2}-1}(\delta^{i}_{k}\{n\overline{R}_{jl}+\overline{R}_{lj}+2(n-1)\nabla_{[l}S_{j]}\}$$
$$-\delta^{i}_{l}\{n\overline{R}_{jk}+\overline{R}_{kj}+2(n-1)\nabla_{[k}S_{j]}\})\ ,$$

$$\overline{W}^{i}_{klj}=\overline{R}^{i}_{klj}+\frac{\delta^{i}_{k}}{n+1}\{(\overline{R}_{lj}-\overline{R}_{jl})+2(n-1)\nabla_{[l}S_{j]}\}+\frac{1}{n^{2}-1}(\delta^{i}_{l}\{n\overline{R}_{kj}+\overline{R}_{jk}+2(n-1)\nabla_{[j}S_{k]}\}$$
$$-\delta^{i}_{j}\{n\overline{R}_{kl}+\overline{R}_{lk}+2(n-1)\nabla_{[l}S_{k]}\})$$

ve

$$\overline{W}^{i}_{ljk}=\overline{R}^{i}_{ljk}+\frac{\delta^{i}_{l}}{n+1}\{(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})+2(n-1)\nabla_{[j}S_{k]}\}+\frac{1}{n^{2}-1}(\delta^{i}_{j}\{n\overline{R}_{lk}+\overline{R}_{kl}+2(n-1)\nabla_{[k}S_{l]}\}$$
$$-\delta^{i}_{k}\{n\overline{R}_{lj}+\overline{R}_{jl}+2(n-1)\nabla_{[j}S_{l]}\})$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa ve Teorem 2.2 den faydalanılırsa

$\overline{W}^{i}_{jkl}+\overline{W}^{i}_{klj}+\overline{W}^{i}_{ljk}=0$ bulunur.

Tanım 3.2.1: WS -manifoldu üzerinde $\overline{W}^{i}_{jkl}=0$ şartını sağlayan semi-simetrik konneksiyona projektif-düz konneksiyon adı verilir.

Tanım 3.2.2: $W^{i}_{jkl}=0$ şartını sağlayan WS-manifolduna projektif-düz WS-manifoldu adı verilir.

Teorem 3.2.4: WS- manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-düz ve S_k vektörü gradient ise, konneksiyon projektif-düzdür.

İspat: Konneksiyon lokal-düz olduğu için $\overline{R}^{i}_{jkl}=0$ ve $\overline{R}_{jk}=0$ dır. Ayrıca, S_k vektörü gradient olduğundan, $\nabla_{[j}S_{k]}=0$ eşitliği mevcuttur. Bu sonuçlar , (3.2.2) de kullanılırsa, $\overline{W}^{i}_{jkl}=0$ elde edilir. Bu da, Tanım 3.2.1'e göre konneksiyonun projektif-düz olması demektir.

Teorem 3.2.5: WS- grup manifoldunda simetrik ve semi-simetrik konneksiyona göre projektif eğrilik tensörleri aynıdır.

İspat: WS-grup manifoldunun tanımındaki $\overline{R}^{i}_{jkl}=0$ ve $S_{jk}=0$ şartları, (3.2.5)de yerine konulursa, $K_{jk}=0$ ve $\nabla_{[j}S_{k]}=0$ eşitlikleri sağlandığından $\overline{W}^{i}_{jkl}=W^{i}_{jkl}$ elde edilir.

Teorem 3.2.6: WS-grup manifoldu ve bu manifold üzerinde tanımlanan semi-simetrik konneksiyon projektif-düzdür.

İspat: WS-grup manifoldunun tanımından, $\overline{R}^{i}_{jkl}=0$, $S_{jk}=0$ ve (2.2) ile $(1.7)_2$ bağıntılarından $R^{i}_{jkl}=0$, $R_{jk}=0$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (1.12) de kullanılırsa, $W^{i}_{jkl}=0$ elde edilir ki bu da, Tanım 3.2.2 ye göre, WS-grup manifoldunun projektif-düz olması demektir ve Teorem 3.2.5 den $\overline{W}^{i}_{jkl}=0$ eşitliği elde edilir. Bu da,Tanım 3.2.1 e göre, semi-simetrik konneksiyonun projektif-düz olması demektir.

Teorem 3.2.7: WS-grup manifolduna ait konform eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü aynıdır.

İspat: W-manifoldu üzerinde konform eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü arasında, (1.10) ve (1.12) yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
C^{h}_{ijk} &= W^{h}_{ijk} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\{\delta^{h}_{j}R_{ik} - \delta^{h}_{k}R_{ij} + (n-1)(g_{ik}g^{hm}R_{mj} - g_{ij}g^{hm}R_{mk}) - RG^{h}_{ijk}\} + \\
&2\{\frac{\delta^{h}_{i}}{n(n+1)}R_{[jk]} - \frac{1}{n(n-2)}(\delta^{h}_{j}R_{[ik]} - \delta^{h}_{k}R_{[ij]} + g_{ik}g^{hm}R_{mj} - g_{ij}g^{hm}R_{mk}) + \\
&\frac{1}{n^2-1}(\delta^{h}_{j}R_{[ik]} - \delta^{h}_{k}R_{[ij]})\} \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

bağıntısı elde edilir. Teorem 3.1.5 den $\overline{C}^h_{ijk} = C^h_{ijk}$ ve WS-grup manifoldlarında $\overline{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk}$ olduğunu biliyoruz. (3.2.7) bağıntısı yardımıyla, WS-grup manifoldu için

$$\overline{C}^h_{ijk} = \overline{W}^h_{ijk} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\{\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + (n-1)(g_{ik} g^{hm} R_{mj} - g_{ij} g^{hm} R_{mk}) - RG^h_{ijk}\} +$$

$$2\{\frac{\delta^h_i}{n(n+1)} R_{[jk]} - \frac{1}{n(n-2)}(\delta^h_j R_{[ik]} - \delta^h_k R_{[ij]} + g_{ik} g^{hm} R_{mj} - g_{ij} g^{hm} R_{mk}) +$$

$$\frac{1}{n^2-1}(\delta^h_j R_{[ik]} - \delta^h_k R_{[ij]})\}$$

elde edilir. WS-grup manifoldunun tanımından $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ ve $S_{ij} = 0$ dır, dolayısıyla $R^h_{ijk} = 0$, $R_{ij} = 0$ ve $R = 0$ eşitlikleri sağlandığından, $\overline{C}^h_{ijk} = \overline{W}^h_{ijk}$ elde edilir.

Sonuç 3.2.1: WS-grup manifoldu ve bu manifold üzerinde tanımlanan semi-simetrik konneksiyon konform-düzdür.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ REKÜRANT WS-MANİFOLDLARI

Pavel Enghiş, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann manifoldlarındaki rekürantlığı ve genelleştirilmiş-rekürantlığı incelemiştir,[19-25]. Biz ise, bu bölümde WS-manifoldlarının genelleştirilmiş rekürantlığını inceleyerek, semi-simetrik konneksiyona ve simetrik konneksiyona göre rekürantlık ve genelleştirilmiş-rekürantlık arasındaki ilişkileri bulmaya çalışacağız.

Tanım 4.1:
$$\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \lambda_r \overline{R}^h_{ijk} \tag{4.1}$$

eşitliğinin sağlandığı WS-manifolduna rekürant WS-manifoldu adı verilir.

Tanım 4.2: WS-manifoldunda

$$\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk} \tag{4.2}$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu manifolda genelleştirilmiş rekürant WS-manifoldu adı verilir. Burada, φ_r ve a_r: genelleştirilmiş rekürantlık vektörleri, K^h_{ijk}: genelleştirilmiş rekürantlık tensörüdür.

Tanım 4.3:
$$\overline{\nabla}_r \overline{R}_{ij} = \varphi_r \overline{R}_{ij} + a_r K_{ij} \tag{4.3}$$

eşitliğinin sağlandığı WS-manifolduna genelleştirilmiş Ricci-rekürant WS-manifoldu adı verilir.

Tanım 4.4:
$$\overline{\nabla}_r \overline{R} = \varphi_r \overline{R} + a_r K \tag{4.4}$$

eşitliğinin sağlandığı WS-manifolduna genelleştirilmiş skaler rekürant WS-manifoldu adı verilir.

Teorem 4.1: Rekürant WS- manifoldu genelleştirilmiş reküranttır.

İspat: Manifold rekürant olsun. Tanım 4.1 gereğince, $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \lambda_r \overline{R}^h_{ijk}$ dır. Bu eşitliğin sağ tarafına $\varphi_r \overline{R}^h_{ijk}$ terimi eklenip çıkarılırsa, $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + (\lambda_r - \varphi_r)\overline{R}^h_{ijk}$ elde edilir ki, bu da genelleştirilmiş rekürantlık vektörleri φ_r ve $a_r = \lambda_r - \varphi_r$, genelleştirilmiş rekürantlık tensörü $K^h_{ijk} = \overline{R}^h_{ijk}$ olmak üzere genelleştirilmiş rekürantlığı ifade etmektedir.

Teorem 4.2: Genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldunun rekürant olması için gerek ve yeter şart genelleştirilmiş rekürantlık tensörünün eğrilik tensörü ile doğru orantılı olmasıdır.

İspat: Genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldu rekürant olsun. $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk}$ ve $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \lambda_r \overline{R}^h_{ijk}$ bağıntıları mevcuttur. $\lambda_r \overline{R}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk}$ eşitliğinden, $(\lambda_r - \varphi_r)\overline{R}^h_{ijk} = a_r K^h_{ijk}$ ve $a_r a^r = a$, $(\lambda_r - \varphi_r) a^r = \lambda - \varphi$ kısaltmaları yardımı ile $K^h_{ijk} = [(\lambda - \varphi)/a]\overline{R}^h_{ijk}$ elde edilir. Bu eşitlik de genelleştirilmiş rekürantlık tensörünün, eğrilik tensörü ile orantılı olduğunu ifade eder.

Tersine; genelleştirilmiş rekürant WS-manifoldunda, genelleştirilmiş rekürantlık tensörü , eğrilik tensörü ile orantılı olsun. Yani,

$$\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk} \quad , K^h_{ijk} = \alpha \overline{R}^h_{ijk}$$

olsun.Bu durumda, $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = (\varphi_r + \alpha a_r)\overline{R}^h_{ijk}$ elde edilir ki, bu da $\lambda_r = \varphi_r + \alpha a_r$ olmak üzere, $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \lambda_r \overline{R}^h_{ijk}$ demektir.

Teorem 4.3: Genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldu, genelleştirilmiş Ricci-rekürant ve genelleştirilmiş skaler-reküranttır.

İspat: WS-manifoldu genelleştirilmiş rekürant olsun. Bu takdirde, (4.2) bağıntısının her iki tarafında h ve k indisleri üzerinden daraltma yapılarak, (4.3) elde edilir. Tanım 4.3 e göre, WS-manifoldu genelleştirilmiş Ricci-reküranttır. (4.3) bağıntısının her iki tarafı g^{ij} karşıt tensörü ile çarpılır ve i,j üzerinden toplam alınırsa, (4.4) bağıntısı bulunur. Bu ise, Tanım 4.4 e göre, WS-manifoldunun genelleştirilmiş skaler-rekürant olması demektir.

Tersine, genelleştirilmiş Ricci rekürant ve genelleştirilmiş skaler rekürant WS-manifoldlarının genelleştirilmiş rekürant olmadığı açıktır.

Teorem 4.4: Semi-simetrik konneksiyona göre rekürant S_{ij} tensörüne sahip rekürant WS-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant W-manifoldudur.

İspat: (2.2) ile verilen WS-manifoldunun eğrilik tensörünün semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi alınırsa ve Lemma 2.1 kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_l \overline{R}^h_{ijk} = \overline{\nabla}_l R^h_{ijk} + \delta^h_k(\overline{\nabla}_l S_{ij}) - \delta^h_j(\overline{\nabla}_l S_{ik}) + g_{ij} g^{hr}(\overline{\nabla}_l S_{rk}) - g_{ik} g^{hr}(\overline{\nabla}_l S_{rj}) \qquad (4.5)$$

elde edilir. Burada $\overline{\nabla}_l R^h_{ijk}$; W-manifoldunun eğrilik tensörünün semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevini göstermektedir. R^h_{ijk} tensörünün simetrik konneksiyona göre kovaryant türevini ve (2.1) bağıntışını kullanarak,

$$\overline{\nabla}_l R^h_{ijk} = \nabla_l R^h_{ijk} + R^h_{ijkl} \qquad (4.6)$$

bulunur. Burada, R^h_{ijkl};

$$R^h_{ijkl} = S^m(R^h_{mjk} g_{il} + R^h_{imk} g_{jl} + R^h_{ijm} g_{kl}) - (R^h_{ljk} S_i + R^h_{ilk} S_j + R^h_{ijl} S_k) + R^m_{ijk}(\delta^h_l S_m - g_{ml} S^h)$$

şeklindedir. (4.6), (4.5) de kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_l \overline{R}^h_{ijk} - \delta^h_k(\overline{\nabla}_l S_{ij}) + \delta^h_j(\overline{\nabla}_l S_{ik}) - g_{ij} g^{hr}(\overline{\nabla}_l S_{rk}) + g_{ik} g^{hr}(\overline{\nabla}_l S_{rj}) = \nabla_l R^h_{ijk} + R^h_{ijkl} \qquad (4.7)$$

elde edilir. Teoremin hipotezinde verilen $\overline{\nabla}_l S_{ij} = \overline{\varphi}_l S_{ij}$ ve $\overline{\nabla}_l \overline{R}^h_{ijk} = \overline{\varphi}_l \overline{R}^h_{ijk}$ şartları, (4.7) de kullanılırsa, (2.2) yardımıyla, $\nabla_l R^h_{ijk} = \overline{\varphi}_l R^h_{ijk} - R^h_{ijkl}$ eşitliği bulunur. Bu da, manifoldun genelleştirilmiş-rekürant W-manifoldu olması demektir.

Tanım 4.5: WS-manifoldunun

$$\overline{E}_{ij} = \overline{R}_{(ij)} - \frac{\overline{R}}{n} g_{ij} \qquad (4.8)$$

şeklinde tanımlanan Einstein tensörü $\overline{\nabla}_r \overline{E}_{ij} = \Omega_r \overline{E}_{ij} + b_r H_{ij}$ şartını sağlıyorsa, bu manifolda genelleştirilmiş rekürant Einstein tensörüne sahip WS- manifoldu adı verilir.

Teorem 4.5: Genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldu, genelleştirilmiş rekürant Einstein tensörüne sahip WS-manifoldudur.

İspat: WS-manifoldu genelleştirilmiş rekürant olsun. Bu takdirde, (4.2) ve (4.3) bağıntıları geçerlidir. (4.8) ile tanımlı Einstein tensörünün semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi alınır, (4.2) ve (4.3) bağıntıları yerine konursa,

$$\overline{\nabla}_r \overline{E}_{ij} = \overline{\nabla}_r \overline{R}_{(ij)} - \frac{\overline{\nabla}_r \overline{R}}{n} g_{ij}$$

$$\overline{\nabla}_r \overline{E}_{ij} = \varphi_r \{ \overline{R}_{(ij)} - \frac{g_{ij}}{n} \overline{R} \} + a_r \{ K_{(ij)} - \frac{g_{ij}}{n} K \} \quad , K_{(ij)} - \frac{K}{n} g_{ij} = \overline{K}_{ij}$$

$$\overline{\nabla}_r \overline{E}_{ij} = \varphi_r \overline{E}_{ij} + a_r \overline{K}_{ij}$$

elde edilir.

Teorem 4.6: Genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldunun, aynı φ_r rekürant vektörlü rekürant-Einstein tensörüne sahip WS-manifoldu olabilmesi için gerek ve yeter şart: $K_{(ij)} = \frac{K}{n} g_{ij}$ olmasıdır.

İspat: Genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldu, aynı rekürant φ_r vektörlü rekürant Einstein tensörüne sahip WS-manifoldu olsun. Teorem 4.5 e göre, $\overline{\nabla}_r E_{ij} = \varphi_r E_{ij} + a_r \{ K_{(ij)} - \frac{K}{n} g_{ij} \}$ olduğundan, $K_{(ij)} - \frac{K}{n} g_{ij} = 0$ elde edilir.

Tersine; genelleştirilmiş rekürant WS- manifoldunda, $K_{(ij)} = \frac{K}{n} g_{ij}$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.5 gereğince, $\overline{\nabla}_r \overline{E}_{ij} = \varphi_r \overline{E}_{ij} + a_r \{ K_{(ij)} - \frac{K}{n} g_{ij} \}$ eşitliği, $\overline{\nabla}_r \overline{E}_{ij} = \varphi_r \overline{E}_{ij}$ haline dönüşür ki, bu da WS-manifoldunun rekürant-Einstein tensörüne sahip olması demektir.

Teorem 4.7: Semi-simetrik konneksiyona göre rekürant S_{ij} tensörlü rekürant Einstein tensörüne sahip WS-manifoldu, genelleştirilmiş-rekürant Einstein tensörüne sahip W-manifoldudur.

İspat: WS-manifoldunun Einstein tensörü (4.8) ve W-manifoldunun Einstein tensörü de

$$E_{ij} = R_{(ij)} - \frac{R}{n} g_{ij} \tag{4.9}$$

ile verilmiştir. (2.5), (2.6), (4.8) ve (4.9) yardımıyla,

$$\overline{E}_{ij} = E_{ij} + (n-2)\{S_{(ij)} - \frac{1}{n} S g_{ij}\} \tag{4.10}$$

bağıntısı bulunur. (4.10) un semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\overline{\nabla}_l \overline{E}_{ij} = \overline{\nabla}_l E_{ij} + (n-2)\left\{\overline{\nabla}_l S_{(ij)} - \frac{1}{n}\left[\{\overline{\nabla}_l S\} g_{ij} + S\{\overline{\nabla}_l g_{ij}\}\right]\right\} \tag{4.11}$$

elde edilir. $\overline{\nabla}_l E_{ij}$, W-manifoldunun Einstein tensörünün simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi ve (2.1) yardımıyla,

$$\overline{\nabla}_l E_{ij} = \nabla_l E_{ij} + E_{ijl} \tag{4.12}$$

şeklinde bulunur. Burada, E_{ijl};

$$E_{ijl} = S^m (E_{mj} g_{il} + E_{im} g_{jl}) - (E_{lj} S_i + E_{il} S_j)$$

şeklindedir. Lemma 2.1 ve $S = S_{kr} g^{kr}$ eşitliği gözönünde bulundurularak; (4.12), (4.11) de yerine konursa,

$$\overline{\nabla}_l \overline{E}_{ij} - (n-2)\overline{\nabla}_l S_{(ij)} + \frac{n-2}{n}(\overline{\nabla}_l S_{kr}) g^{kr} g_{ij} = \nabla_l E_{ij} + E_{ijl} \tag{4.13}$$

elde edilir. Teoremin hipotezindeki $\overline{\nabla}_l S_{ij} = \overline{\varphi}_l S_{ij}$ ve $\overline{\nabla}_l \overline{E}_{ij} = \overline{\varphi}_l \overline{E}_{ij}$ şartları, (4.13) de kullanılırsa, $\nabla_l E_{ij} = \overline{\varphi}_l E_{ij} - E_{ijl}$ bulunur. Bu da, manifoldun genelleştirilmiş-rekürant Einstein tensörüne sahip W-manifoldu olduğunu gösterir.

Tanım 4.6: $$\overline{\nabla}_r \overline{C}^h_{ijk} = \chi_r \overline{C}^h_{ijk} + c_r M^h_{ijk} \tag{4.14}$$

eşitliğinin sağlandığı manifolda genelleştirilmiş konform-rekürant WS- manifoldu adı verilir.

Teorem 4.8: Genelleştirilmiş-rekürant WS- manifoldu, genelleştirilmiş konform-reküranttır.

İspat: WS-manifoldu genelleştirilmiş-rekürant olduğundan, $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk}$ eşitliği geçerlidir.

Diğer yandan, (3.1.28) ile tanımlı konform eğrilik tensörünün semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\overline{\nabla}_r \overline{C}^h_{ijk} = \overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n}\delta^h_i \overline{\nabla}_r \overline{R}^l_{ljk} + \frac{1}{n-2}\{\delta^h_j \overline{\nabla}_r \overline{R}_{ik} - \delta^h_k \overline{\nabla}_r \overline{R}_{ij} - g_{ij}\, g^{mh} \overline{\nabla}_r \overline{R}_{mk} +$$

$$g_{ik}\, g^{mh} \overline{\nabla}_r \overline{R}_{mj}\} - \frac{1}{n(n-2)}\{\delta^h_j \overline{\nabla}_r \overline{R}^l_{lki} - \delta^h_k \overline{\nabla}_r \overline{R}^l_{lji} - g_{ij}\, g^{mh} \overline{\nabla}_r \overline{R}^l_{lkm} +$$

$$g_{ik}\, g^{mh} \overline{\nabla}_r \overline{R}^l_{ljm}\} - \frac{\overline{\nabla}_r \overline{R}}{(n-1)(n-2)} G^h_{ijk} \tag{4.15}$$

bulunur. (4.15) eşitliğinde, (4.2), (4.3) ve (4.4) kullanılırsa:

$$\overline{\nabla}_r \overline{C}^h_{ijk} = (\varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk}) - \frac{1}{n}\delta^h_i(\varphi_r \overline{R}^l_{ljk} + a_r K^l_{ljk}) + \frac{1}{n-2}\{\delta^h_j(\varphi_r \overline{R}_{ik} + a_r K_{ik}) -$$

$$\delta^h_k(\varphi_r \overline{R}_{ij} + a_r K_{ij}) - g_{ij}\, g^{mh}(\varphi_r \overline{R}_{mk} + a_r K_{mk}) + g_{ik}\, g^{mh}(\varphi_r \overline{R}_{mj} + a_r K_{mj})\} -$$

$$\frac{1}{n(n-2)}\{\delta^h_j(\varphi_r \overline{R}^l_{lki} + a_r K^l_{lki}) - \delta^h_k(\varphi_r \overline{R}^l_{lji} + a_r K^l_{lji}) -$$

$$g_{ij}\, g^{mh}(\varphi_r \overline{R}^l_{lkm} + a_r K^l_{lkm}) + g_{ik}\, g^{mh}(\varphi_r \overline{R}^l_{ljm} + a_r K^l_{ljm})\} - \frac{(\varphi_r \overline{R} + a_r K)}{(n-1)(n-2)} G^h_{ijk}$$

elde edilir. $\overline{C}^h_{ijk}$ nın tanımı yardımıyla, M^h_{ijk} tensörü

$$M^h_{ijk} = K^h_{ijk} - \frac{1}{n}\delta^h_i K^l_{ljk} + \frac{1}{n-2}\{\delta^h_j K_{ik} - \delta^h_k K_{ij} - g_{ij}\, g^{mh} K_{mk} + g_{ik}\, g^{mh} K_{mj}\} -$$

$$\frac{1}{n(n-2)}\{\delta^h_j K^l_{lki} - \delta^h_k K^l_{lji} - g_{ij}\, g^{mh} K^l_{lkm} + g_{ik}\, g^{mh} K^l_{ljm}\} - \frac{K}{(n-1)(n-2)} G^h_{ijk}$$

şeklinde olmak üzere,

$\overline{\nabla}_r \overline{C}^h_{ijk} = \varphi_r \, \overline{C}^h_{ijk} + a_r \, M^h_{ijk}$ bulunur.

Teorem 4.9: Genelleştirilmiş konform-rekürant WS- manifoldunun aynı rekürantlık vektörüne sahip genelleştirilmiş-rekürant olabilmesi için gerek ve yeter şart manifoldun genelleştirilmiş Ricci-rekürant olmasıdır.

İspat: Genelleştirilmiş konform- rekürant WS- manifoldu , genelleştirilmiş rekürant olsun. Bu durumda, Teorem 4.3 e göre, manifold genelleştirilmiş Ricci-rekürantdır.

Tersine,genelleştirilmiş konform-rekürant WS- manifoldu, aynı rekürantlık vektörüne sahip olmak üzere, genelleştirilmiş Ricci-rekürant olsun. Bu takdirde,

$$\overline{\nabla}_r \overline{C}^h_{ijk} = \chi_r \, \overline{C}^h_{ijk} + c_r \, M^h_{ijk} \tag{4.16}$$

ve

$$\overline{\nabla}_r \overline{R}_{ij} = \chi_r \, \overline{R}_{ij} + c_r \, K_{ij} \tag{4.17}$$

eşitlikleri geçerlidir. $\overline{C}^h_{ijk}$ nın tanımı ve (4.17) bağıntısı, (4.16) da kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n}\delta^h_i \overline{\nabla}_r \overline{R}^l_{ljk} - \frac{1}{n(n-2)}\{\delta^h_j \, \overline{\nabla}_r \, \overline{R}^l_{lki} - \delta^h_k \, \overline{\nabla}_r \, \overline{R}^l_{lji} - g_{ij} \, g^{mh} \, \overline{\nabla}_r \, \overline{R}^l_{lkm} +$$

$$g_{ik} \, g^{mh} \, \overline{\nabla}_r \, \overline{R}^l_{ljm}\} = (\chi_r \, \overline{R}^h_{ijk} + c_r \, K^h_{ijk}) - \frac{1}{n}\delta^h_i(\chi_r \overline{R}^l_{ljk} + c_r K^l_{ljk}) -$$

$$\frac{1}{n(n-2)}\{\delta^h_j(\chi_r \, \overline{R}^l_{lki} + c_r \, K^l_{lki}) - \delta^h_k(\chi_r \, \overline{R}^l_{lji} + c_r \, K^l_{lji}) - g_{ij} \, g^{mh}(\chi_r \, \overline{R}^l_{lkm} + c_r \, K^l_{lkm}) +$$

$$g_{ik} \, g^{mh}(\chi_r \, \overline{R}^l_{ljm} + c_r \, K^l_{ljm})\}$$

elde edilir. Bu eşitlik ise, ancak $\overline{\nabla}_r \overline{R}^h_{ijk} = \chi_r \, \overline{R}^h_{ijk} + c_r \, K^h_{ijk}$ olması ile mümkündür. Bu da WS-manifoldunun genelleştirilmiş-rekürant olması demektir.

Teorem 4.10: Konform-rekürant WS-manifoldu genelleştirilmiş-rekürant W-manifoldudur ve konform-rekürant W-manifoldu genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldudur.

İspat: $\overline{C}^h_{ijk} = C^h_{ijk}$ olduğundan,

$$\overline{\nabla}_l \overline{C}^h_{ijk} = \overline{\nabla}_l C^h_{ijk} \tag{4.18}$$

dır ve burada, W-manifoldunun konform eğrilik tensörünün semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevinin hesaplanması için (2.1) bağıntısı ve C^h_{ijk} tensörünün simetrik konneksiyona göre kovaryant türevini kullanmak yeterlidir. Gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılarak,

$$\overline{\nabla}_l C^h_{ijk} = \nabla_l C^h_{ijk} + C^h_{ijkl} \tag{4.19}$$

elde edilir. Burada, C^h_{ijkl} ;

$$C^h_{ijkl} = S^m (C^h_{mjk} g_{il} + C^h_{imk} g_{jl} + C^h_{ijm} g_{kl}) - (C^h_{ljk} S_i + C^h_{ilk} S_j + C^h_{ijl} S_k) + C^m_{ijk} (\delta^h_l S_m - g_{ml} S^h)$$

şeklindedir. (4.19), (4.18) de yerine konursa,

$$\overline{\nabla}_l \overline{C}^h_{ijk} = \nabla_l C^h_{ijk} + C^h_{ijkl} \tag{4.20}$$

bulunur. Teoremin hipotezinden elde edilen $\overline{\nabla}_l \overline{C}^h_{ijk} = \overline{\varphi}_l \overline{C}^h_{ijk}$ eşitliği, (4.20) de kullanılırsa, $\nabla_l C^h_{ijk} = \overline{\varphi}_l C^h_{ijk} - C^h_{ijkl}$ elde edilir. Bu, WS-manifoldunun genelleştirilmiş-rekürant W-manifoldu olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $\nabla_l C^h_{ijk} = \varphi_l C^h_{ijk}$ eşitliği, (4.20) de yerine konursa, W-manifoldunun genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldu olduğunu ifade eden $\overline{\nabla}_l \overline{C}^h_{ijk} = \varphi_l \overline{C}^h_{ijk} + C^h_{ijkl}$ eşitliği bulunur.

Tanım 4.7: $$\overline{\nabla}_r \overline{W}^h_{ijk} = \phi_r \overline{W}^h_{ijk} + d_r N^h_{ijk} \tag{4.21}$$

eşitliğinin sağlandığı manifolda genelleştirilmiş projektif-rekürant WS-manifoldu adı verilir.

Teorem 4.11: WS- manifoldu genelleştirilmiş rekürant ve S_k vektörü gradient ise, manifold genelleştirilmiş projektif-rekürranttır.

İspat: WS- manifoldunda S_k vektörü gradient ise, (3.2.2) ile tanımlı projektif eğrilik tensörünün kovaryant türevi alınıp, genelleştirilmiş rekürantlık şartı uygulanırsa,

$$\overline{\nabla}_r \overline{W}^h_{ijk} = (\varphi_r \overline{R}^h_{ijk} + a_r K^h_{ijk}) + \frac{\delta^h_i}{n+1}\{(\varphi_r \overline{R}_{jk} + a_r K_{jk}) - (\varphi_r \overline{R}_{kj} + a_r K_{kj})\} +$$

$$\frac{1}{n^2-1}[\delta^h_j\{n(\varphi_r \overline{R}_{ik} + a_r K_{ik}) + (\varphi_r \overline{R}_{ki} + a_r K_{ki})\} -$$

$$\delta^h_k\{n(\varphi_r \overline{R}_{ij} + a_r K_{ij}) + (\varphi_r \overline{R}_{ji} + a_r K_{ji})\}] \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) de (3.2.2) kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_r \overline{W}^h_{ijk} = \varphi_r \overline{W}^h_{ijk} + a_r N^h_{ijk}$$

bulunur. Burada N^h_{ijk};

$$N^h_{ijk} = K^h_{ijk} + \frac{\delta^h_i}{n+1}(K_{jk} - K_{kj}) + \frac{1}{n^2-1}[\delta^h_j(n K_{ik} + K_{ki}) - \delta^h_k(n K_{ij} + K_{ji})$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1: Genelleştirilmiş rekürant WS- grup manifoldu, genelleştirilmiş projektif-reküranttır.

Teorem 4.12: WS- grup manifoldunun genelleştirilmiş konform-rekürant olabilmesi için gerek ve yeter şart genelleştirilmiş projektif-rekürant olmasıdır.

İspat: WS-grup manifoldu, genelleştirilmiş konform-rekürant ise; $\overline{\nabla}_r \overline{C}^h_{ijk} = \chi_r \overline{C}^h_{ijk} + c_r M^h_{ijk}$ eşitliği mevcuttur. WS-grup manifoldunda, $\overline{C}^h_{ijk} = \overline{W}^h_{ijk}$ olduğundan; $\overline{\nabla}_r \overline{W}^h_{ijk} = \chi_r \overline{W}^h_{ijk} + c_r M^h_{ijk}$ elde edilir. Bu eşitlik ise, grup manifoldunun genelleştirilmiş projektif-rekürant olduğunu gösterir. Tersi de aynı şekilde doğrudur.

Teorem 4.13: Semi-simetrik konneksiyona göre rekürant S_{ij} ve K_{ij} tensörlerine sahip projektif-rekürant WS-manifoldu genelleştirilmiş projektif-rekürant W-manifoldudur.

İspat: (3.2.5) bağıntısının semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi alınarak, Lemma 2.1 ve (2.11) yardımıyla,

$$\overline{\nabla}_l \overline{W}^h_{ijk} = \overline{\nabla}_l W^h_{ijk} + \frac{2\delta^h_i}{n+1}\overline{\nabla}_l S_{[kj]} + \frac{1}{n^2-1}(\delta^h_k \overline{\nabla}_l K_{ij} - \delta^h_j \overline{\nabla}_l K_{ik}) + g_{ij} g^{hr}(\overline{\nabla}_l S_{rk}) -$$

$$g_{ik} g^{hr}(\overline{\nabla}_l S_{rj}) \tag{4.23}$$

elde edilir. $\overline{\nabla}_l W_{ijk}^h$, W-manifoldunun projektif eğrilik tensörünün simetrik konneksiyona göre kovaryant türevi ve (2.1) bağıntısı gözönüne alınırsa,

$$\overline{\nabla}_l W_{ijk}^h = \nabla_l W_{ijk}^h + W_{ijkl}^h \tag{4.24}$$

olarak bulunur. Burada, W_{ijkl}^h;

$$W_{ijkl}^h = S^m (W_{mjk}^h g_{il} + W_{imk}^h g_{jl} + W_{ijm}^h g_{kl}) - (W_{ljk}^h S_i + W_{ilk}^h S_j + W_{ijl}^h S_k) +$$
$$W_{ijk}^m (\delta_l^h S_m - g_{ml} S^h)$$

şeklindedir. (4.24), (4.23) de kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_l \overline{W}_{ijk}^h - \frac{2\delta_i^h}{n+1} \overline{\nabla}_l S_{[kj]} - \frac{1}{n^2-1} (\delta_k^h \overline{\nabla}_l K_{ij} - \delta_j^h \overline{\nabla}_l K_{ik}) - g_{ij} g^{hr} (\overline{\nabla}_l S_{rk}) +$$
$$g_{ik} g^{hr} (\overline{\nabla}_l S_{rj}) = \nabla_l W_{ijk}^h + W_{ijkl}^h \tag{4.25}$$

bağıntısı bulunur. Teoremin hipotezindeki $\overline{\nabla}_l S_{ij} = \overline{\varphi}_l S_{ij}$, $\overline{\nabla}_l K_{ij} = \overline{\varphi}_l K_{ij}$ ve $\overline{\nabla}_l \overline{W}_{ijk}^h = \overline{\varphi}_l \overline{W}_{ijk}^h$ şartları (4.25) de kullanılırsa, $\nabla_l W_{ijk}^h = \overline{\varphi}_l W_{ijk}^h - W_{ijkl}^h$ elde edilir. Bu da, manifoldun genelleştirilmiş projektif-rekürant W-manifoldu olması demektir.

Sonuç 4.2: Projektif-rekürant WS-grup manifoldu genelleştirilmiş projektif-rekürant W-manifoldudur.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, semi-simetrik konneksiyonlu Weyl manifoldları incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

W ve WS-manifoldları aynı eğrilik tensörüne sahip iseler, S_k vektörü gradienttir. WS-manifolduna ait semi-simetrik konneksiyon lokal-flat ise, T_k vektörü gradienttir yani, WS-manifoldu Riemanniendir. Ayrıca, W ve WS-manifoldlarının konform eğrilik tensörlerinin aynı olduğu, WS-grup manifoldunda ise, simetrik ve semi-simetrik konneksiyona göre projektif eğrilik tensörlerinin aynı olduğu ispatlanmıştır. Bu yüzden, WS-grup manifoldunda, konform eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörünün de birbirine eşit olduğu görülmüştür.

Son olarak, genelleştirilmiş-rekürant WS-manifoldları tanımlanmış ve bununla ilgili olarak bazı teoremler elde edilmiştir. Bu teoremler; W ve WS-manifoldlarının eğrilik tensörü, konform eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü ve Einstein tensörünün simetrik ve semi-simetrik konneksiyona göre kovaryant türevlerinden faydalanarak, W ve WS-manifoldları arasındaki ilişkilerden bahsetmektedir.

Bu çalışmanın devamında, rekürant konneksiyonlu genelleştirilmiş Weyl manifoldları tanımlanarak, benzer teoremler incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Norden, A.,** 1976. Affinely Connected Spaces, GRMFL, Moscow.

[2] **Hlavaty, V.,** 1934. Les courbes de la variete W_n, Memor. Sci. Math., Paris.

[3] **Özen, F.,** 1999. Weyl Uzaylarının Konharmonik Dönüşümü, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[4] **Eisenhart, L.P.,** 1927. Non-Riemannian Geometry, American Math. Society Colloqium Publications, Vol.**8**, U.S.A.

[5] **Friedmann, A. and Schouten, J.A.,** 1924. Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung, *Math. Zeitschr.*, **21,** 211-223.

[6] **Hayden, H. A.,** 1932. Subspaces of a space with torsion, *Proc. London Math. Soc.*, **34,** 27-50.

[7] **Yano, K.,** 1970. On semi-symmetric metric connection, *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.*, **15,** 1579-1586.

[8] **Imai, T.,** 1972.Hypersurfaces of a Riemannian maanifold with semi-symmetric metric connection, *Tensor N.S.*, **23,** 300-306.

[9] **Imai, T.,** 1972. Notes on semi-symmetric metric connections, *Tensor N.S.*, **24,** 293-296.

[10] **Nakao, Z.,** 1976. Submanifolds of a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connections, *Proc. Am. Math. Soc.*, **54,** 261-266.

[11] **Amur, K. and Pujar, S.S.,** 1978. On submanifolds of a Riemannian manifold admitting a metric semi-symmetric connection, *Tensor N.S.*, **32,** 35-38.

[12] **De, U.C.,** 1990. On a type of semi-symmetric connection on a Riemannian manifold, *Indian Journal Pure and Appl. Math.*, **21(4),** 334-338.

[13] **Agashe, N.S. and Chafle, M.R.,** 1992. A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **23(6),** 399-409.

[14] **De, U.C. and Guha, N.,** 1992. On pseudo-symmetric manifolds admitting a type of semi-symmetric connection, *Bull. Math. De la Soc. Sci. Math. De Roumaine*, **36(84),** 255-258.

[15] **Murgescu,V.,** 1968. Espaces de Weyl a torsion et leurs representations conformes, *Ann. Sci. Univ.Timisoara*, 221-228.

[16] **Synge, J.L. and Schild, A.,** 1956. Tensor Calculus, University of Toronto Press, U.S.A.

[17] **Eisenhart, L.P.,** 1933. Continuous Groups of Transformations, Princeton Univ. Press, U.S.A.

[18] **Liang, Y.,** 1994. On semi-symmetric recurrent-metric connection, *Tensor N.S.*, **55,** 107-112.

[19] **Enghiş, P. and Boroica, Gh.,** 1987. On the generalized D-recurrent spaces, *the 18.National Conference on Geometry and Topology*, Oradea, October 4-7.

[20] **Enghiş, P. and Mot, G.,** 1987. Remarks on spaces with semi-symmetric connection, *the 18.National Conference on Geometry and Topology*, Oradea, October 4-7.

[21] **Enghiş, P.,** 1992. Relations between the tensors of various curvatures of a D-connection, *Proceedings of symposium in Geometry(Cluj-Napoca and Tirgu-Mures)*, 99-102.

[22] **Enghiş, P. and Mot, G.,** 1986. Semi-symmetric connections and applications in theoretical physics, *Univ.Cluj-Napoca, Preprint Number:***10,**, 127- 140.

[23] **Enghiş, P. and Boer, M.,** 1988. Generalized recurrency in spaces with affine connection, *Studia Univ. Babes-Bolyai, Math.,***33-2,** 74-79.

[24] **Enghiş, P.,** 1984. E-conexiuni semi-simetrice, *Studia Univ. Babes-Bolyai, Math.,***29,** 66-69.

[25] **Enghiş, P.,** 1984. Subspatii recurrente intr-un spatiu euclidian, *Bull. Inst.Pol. Cluj-Napoca,* 109-112.

ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında İstanbul'da doğdu. 1986 yılında Beşiktaş Atatürk Lisesini bitirdikten sonra, aynı yıl girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 1990 yılında birincilik derecesi ile mezun oldu. Yükseklisans eğitimini 1990-1994 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tamamladıktan sonra, doktora eğitimine de aynı enstitüde 1994 yılından beri devam etmektedir.

1992 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünde asistan olarak başladığı çalışma hayatını 1999 yılına kadar bu birimde sürdürdükten sonra, 1999 yılından beri Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde aynı ünvanla görevine devam etmektedir.