T.C.
KİLİS 7 ARALIK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q −LOGARİTMİK KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE

İbrahim KARABAYIR

1.Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ
2.Danışman: Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2014
KİLİS

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ ve Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ danışmanlığında, İbrahim KARABAYIR tarafından hazırlanan **"*q* −Logaritmik Konveks Fonksiyonlar Üzerine"** adlı tez çalışması 21./.01/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı, Adı Soyadı (Kurumu)**	**İmza**
Başkan	Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ (Gaziantep Üniv. Fen-Edebiyat Fak.)	
Üye	Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM (Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniv. Fen-Edebiyat Fak.)	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN (Gaziantep Üniv. Fen-Edebiyat Fak.)	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ (Kilis 7 Aralık Üniv. Fen-Edebiyat Fak.)	
Üye	Yrd. Doç. Dr. İrfan DELİ (Kilis 7 Aralık Üniv. Eğitim Fak.)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ....../....../2014 tarih ve ..../....... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Tez No: ....

Doç. Dr. Şükrü ÇAKMAKTEPE

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

q −LOGARİTMİK KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE

İbrahim KARABAYIR

Kilis 7 Aralık Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

1.Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ
2.Danışman: Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Yıl: 2014 Sayfa: 40

Bu tezde, konveks fonksiyonlar içerisinde önemli bir yer tutan logaritmik konveks fonksiyonlara kuantum kalkülüs yardımıyla yeni bir perspektiften bakıldı ve böylece yeni bir tanıma ulaşıldı. Ayrıca bu tanım üzerine yeni teoremler ve lemmalar inşa edildi. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları, pozitif reel sayıların özel ortalamaları ve kuantum kalkülüs ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu tezde bahsedeceğimiz konulardan bazıları q −konveks fonksiyonlar, q −Hermite-Hadamard Eşitsizliği ve q −logaritmik konveks fonksiyonlardır.

Anahtar Kelimeler: q −konveks fonksiyonlar, q −logaritmik konveks fonksiyonlar

ABSTRACT

MSc. Thesis

ON q −LOGARITHMIC CONVEX FUNCTIONS

İbrahim KARABAYIR

Kilis 7 Aralık University
The Institute for Graduate Studies in Sciences and Engineering
Department of Mathematics

Supervisor 1: Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ
Supervisor 2: Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Year: 2014 Page: 40

In this thesis, logarithmic convex functions that have important role in convex functions are viewed from a new perspective with the help of quantum calculus and thus, a new definition has been reached. In addition, the new theorems and lemmas have been built on this definition. To this end, in the second part of the study, it is given some of the basic definitions and theorems in mathematics, some convex function classes, particular means of positive real number and basic concepts of quantum calculus. Also, in this thesis, it will be mentioned q −convex functions, q −Hermite-Hadamard Inequality and q −logarithmic convex functions.

Key Words: q −convex functions, q −logarithmic convex functions

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma, Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN'a en içten teşekkürlerimi arz ederim.

İbrahim KARABAYIR
Ocak 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$C(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$f^{'}$	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$f^{''}$	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
I°	I'nın İçi
$J(I)$	Jensen-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m(b)$	m −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α, m) −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log-Konveks Fonksiyonlar sınıfı
$L_1[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_r(x,y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalaması
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$P(I)$	P −Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n −boyutlu Euclidean Uzay
$SV(h,I)$	h −Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h,I)$	h −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$S^{*}(b)$	Starshaped Fonksiyonlar Sınıfı
$W(I)$	Wright-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$WQC(I)$	Wright-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$D_q f$	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden q −Türevi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kalkülüs, matematiksel analiz için başlangıçtır ve diferansiyel kalkülüs ve integral kalkülüs olmak üzere iki ana kola sahiptir. Diferansiyel kalkülüs değişim oranları ve eğri eğimleri ile ilgilenirken, integral kalkülüs miktarların birikimi ve eğri altındaki alanla uğraşır.

Kalkülüsün temel bilimlerde, ekonomide ve mühendislikte geniş bir kullanım alanı vardır. Ayrıca kalkülüs, cebirin yalnız başına çözemeyeceği birçok problemin üstesinden de gelebilir.

Çok önceleri, kalkülüsten infinitezimallerin kalkülüsü veya infinitezimal kalkülüs diye bahsedilirdi. Bu aşamada infinitezimal nedir sorusunun cevabı verilmelidir ve burada sadece sözlük anlamı verilecektir. İnfinitezimal, sözlükte sonsuz küçük veya ölçülemeyecek kadar küçük anlamına gelir. Latincede kalkülüs (calculus) kelimesi ise saymak ya da hesap yapmak anlamına gelen çakıl taşı demektir. Daha genel olarak, kalkülüs ifadelerin sembolik manipülasyonu tarafınca rehber edilen herhangi hesap metodu ya da sistemini ifade eder (Kac and Cheung, 2002).

Kuantum kalkülüs bazen limitsiz kalkülüs anlamına gelir, limit notasyonu olmaksızın geleneksel infinitezimal, kalkülüse eşdeğer bir anlama sahiptir.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

İfadesinde, fonksiyondaki değişimin, değişkendeki değişime oranı göz önüne alınsın. x, x_0' a yaklaşırken bu oranın limiti (eğer varsa) $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki $\frac{df}{dx}$ türev tanımını verdiği görülür. Bununla beraber, eğer $x=qx_0$ ya da $x=x_0+h$ ise limit alınamaz. Burada q, 1' den farklı bir sabit sayı ve h, 0 dan farklı bir sabit sayıdır. İşte bu durum bizi Kuantum Kalkülüs dünyasına götüren bir anahtardır. Burada karşımıza $q-$kalkülüs ve $h-$kalkülüs çıkacaktır (Kac and Cheung, 2002). Ancak bu tezde sadece $q-$kalkülüs ile ilgilenilecektir.

Geleneksel kalkülüs yardımıyla ve kuantum kalkülüsü kullanarak birçok önemli kavram bulabiliriz. Örneğin, x^n 'in $q-$türevi $[n]x^{n-1}$ dir. Burada n nin $q-$analog ifadesi,

$$[n]=\frac{q^n-1}{q-1}$$

dir ($q\to 1$ iken $[n]$ ' nin limiti n 'dir).

Konvekslikten de kısaca bahsedecek olursak, geçmişi Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanır. Ancak matematikte yer alması 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından konveks fonksiyonların sistematik olarak ilk kez ele alınmaya başladığı söylenebilir.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların ek olarak "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (Mitrinović *et al.* 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinović *et al.* 1993), "Mathematical Inequalities" (Pachpatte 2005b) ve "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu and Perssons 2006) literatürde var olan diğer kaynaklardır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler? "sorusu için 1978 yılında Richard Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.”

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Lineer operatör): X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X 'in bir alt uzayı ve her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

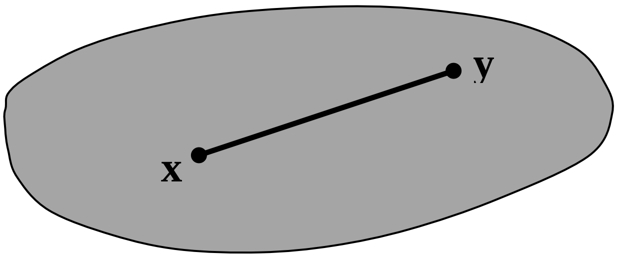
$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne lineer operatör denir (Bayraktar 2000).

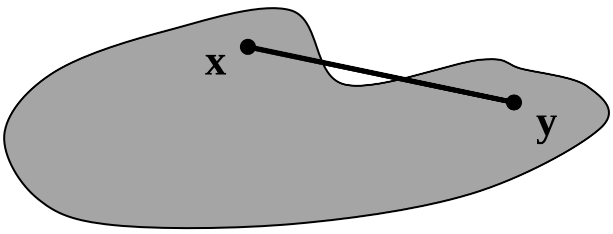
Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Örneğin aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir.

Tanım 2.1.3. (J −Konveks Fonksiyon): I, ℝ'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Kesin J − Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.5. (Konveks Fonksiyon): I, ℝ'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \qquad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić *et al*. 1992).

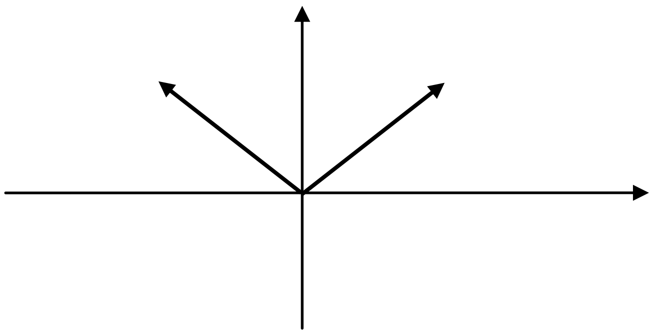
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J −konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

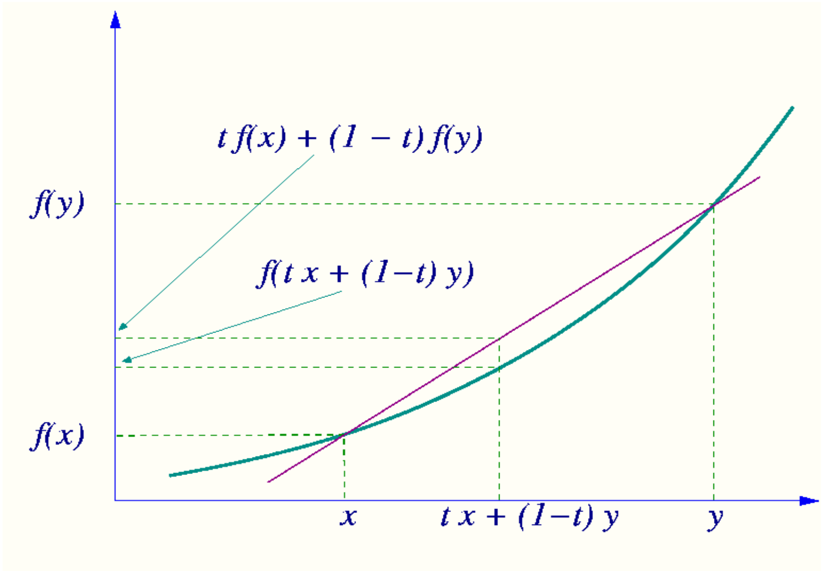
olmasıdır (Mitrinović 1970).

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bakınız Şekil 2.4.



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.2}$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar.

Tanım 2.1.6. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ şartını sağlayan her } x_1, x_2 \in S \text{ için } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S'de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.8. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.3. f, S'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S'de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.9. (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n}|b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter and Brunt 2000).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 2.1.1. $[a, b] \subseteq I^{\circ}$ olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak, f $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I°'de süreklidir (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.2. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f, (a, b) aralığında süreklidir ve

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.10. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I'da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
(d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır
denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.3. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda
(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.
(Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.4. f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.4. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I°'de artandır (kesin artandır) (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f''nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.6. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.1.11. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ −konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye strictly $quasi$ −konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ −konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye strictly $quasi$ −konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.12. f hem $quasi$ −konveks hem de $quasi$ −konkav ise f'ye $quasi$ −monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.1.5. Herhangi bir konveks fonksiyon $quasi$ −konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani $quasi$ −konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [-2,-1] \\ t^2, & t \in [-1,2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında $quasi$ −konveks fonksiyondur (Ion 2007).

Tanım 2.1.13. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye $I \subseteq \mathbb{R}$'de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.14. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f((1-\alpha)x + \alpha y)] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x+\delta)] \leq max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f'ye $I \subseteq \mathbb{R}$'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.15. (J −Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J - quasi$ −konvekstir denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.16. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon, $\forall x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1-\alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.17. (P −Fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I, \alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P −fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al*. 1995).

x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1-\lambda) y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.18. (r −Konveks Fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq M_r(f(x), f(y); \alpha)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r −konveks fonksiyon denir (Gill *et al*. 1997).

Bu tanımdan 0 −konveks fonksiyonların log −konveks fonksiyonlar ve 1 −konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılır.

r −konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1-\lambda) f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al*. 1998).

Tanım 2.1.19. (Birinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s −konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.20. (İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s −konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s −konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s −konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.1.1. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.21. (h −Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y) \tag{2.3}$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h −konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h −konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$'dır (Varošanec 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$'dır; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$'dir (Varošanec 2007).

Tanım 2.1.22. (Starshaped Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.23. (m −Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m −konvekstir denir (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m −konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m −konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m −konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m −konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.1.24. ($(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$ −Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha) f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m) −konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm (α, m) −konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^\alpha(b)$ ile gösterilir. Ayrıca, $(\alpha, m) \in \{(0,0), (1,0), (1, m), (1,1)\}$ için sırasıyla artan, starshaped, m −konveks ve konveks fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$ sınıfında sadece $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar yer alır, yani $K_1^1(b)$, $[0, b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Teorem 2.1.7. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n −lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.8. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.6. (Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Reel ve kompleks sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.9. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Teorem 2.1.10. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

2.2. Kuantum Kalkülüs

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir. Giriş kısmında da bahsedildiği gibi kuantum kalkülüsün q −kalkülüs ve h −kalkülüs olmak üzere iki tipi vardır. Bu araştırmada tamamen q −kalkülüs üzerinde durulmuştur.

Tanım 2.2.1. (q −diferansiyel): Bir $f(x)$ fonksiyonunun q −diferansiyeli

$$(d_q f)(x) = f(qx) - f(x)$$

olur (Kac and Cheung 2002). Özel olarak,

$$d_q x = (q-1)x$$

yazılır. İki fonksiyonun çarpımının q −diferansiyeli ise;

$$d_q\big(f(x)g(x)\big) = f(qx)g(qx) - f(x)g(x)$$

$$= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x)$$

dir. Buradan

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x).$$

yazılır. Görüldüğü gibi geleneksel diferansiyeldeki iki fonksiyonun çarpımının diferansiyelindeki simetri özelliği kuantum diferansiyelinde yoktur (Kac and Cheung 2002).

Tanım 2.2.2. (q −türev): Bir $f(x)$ fonksiyonunun q −türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

ile gösterilir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilirse

$$lim_{q\to 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

olur. Basit anlamdaki türevde olduğu gibi, q −türevde de bir fonksiyonun q −türevini alma işlemi bir lineer operatördür. Yani

$$D_q(af(x)+bg(x))=aD_qf(x)+bD_qg(x)$$

dir (Kac and Cheung 2002).

Örnek 2.2.1. n pozitif tamsayı olmak üzere, $f(x)=x^{\mathrm{n}}$ fonksiyonunun q −türevi tanım yardımıyla

$$D_qx^{\mathrm{n}}=\frac{(qx)^{\mathrm{n}}-x^{\mathrm{n}}}{(q-1)x}=\frac{q^{\mathrm{n}}-1}{q-1}x^{\mathrm{n}-1}$$

şeklinde bulunur.

$(q^{\mathrm{n}}-1)/(q-1)$ ifadesi çok sık kullanılacağından, bu ifade yerine aşağıdaki notasyon kullanılmıştır.

Herhangi pozitif n pozitif tamsayısı için;

$$[n]=\frac{q^{\mathrm{n}}-1}{q-1}=q^{\mathrm{n}-1}+\ldots+1$$

dir. Bu ifadeye n nin q −analogu denir. O halde $f(x)=x^{\mathrm{n}}$ fonksiyonunun q −türevi tekrar yazılacak olursa,

$$D_qx^{\mathrm{n}}=[n]x^{\mathrm{n}-1}$$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edildiğinde son yazılan eşitliğin, x^{n} nin geleneksel anlamdaki türevine benzer olduğu görülür. $q\to 1$ iken $[n]=q^{\mathrm{n}-1}+\ldots+1\to 1+1+\ldots+1=n$ olur. n tam sayısının geleneksel kalkülüsteki yaptığı işi, kuantum kalkülüste $[n]$ ifadesi yapar (Kac and Cheung 2002).

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımının ve bölümünün q −türevlerinin ne olduğu sorusuna gelinirse

$$D_q\big(f(x)g(x)\big)=f(qx)D_qg(x)+g(x)D_qf(x) \tag{2.5}$$

eşitliği ortaya çıkar. Bu eşitlik ise

$$D_q\big(f(x)g(x)\big)=f(x)D_qg(x)+g(qx)D_qf(x) \tag{2.6}$$

eşitliğine denktir. (2.5) eşitliğini

$$g(x).\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$$

eşitliğine uygularsak

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x) = D_q f(x)$$

olur. Buradan

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.7}$$

olur. (2.6) eşitliği yardımıyla da

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.7) ve (2.8) formülleri için her ikisinin de doğru ancak bazı özel durumlarda birinin diğerinden daha kullanışlı olduğu söylenebilir.

Tüm bu verilen formüllerden sonra zincir kuralının nasıl olduğunu öğrenmek istememiz şaşırtıcı olmayacaktır. Ancak q −türevler için genel bir zincir kuralından söz edilmemektedir. Ayrıca istisna olarak $u = u(x) = \alpha x^{\beta}$, α ve β sabit olmak üzere $f(u(x))$ formunda bir fonksiyonun diferansiyelinden söz edilebilir. Zincir kuralı;

$$D_q[f(u(x))] = D_q[f(\alpha x^{\beta})] = \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{qx - x}$$

$$= \frac{f\left(\alpha q^{\beta} x^{\beta}\right) - f(\alpha x^{\beta})}{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}} \frac{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}}{qx - x}$$

$$= \frac{f\left(q^{\beta}\mathrm{u}\right) - f(u)}{q^{\beta}\mathrm{u} - \mathrm{u}} \frac{u(qx) - u(x)}{qx - x}$$

olarak uygulanır ve buradan;

$$D_q f\left(u(x)\right) = \left(D_{q^{\beta}} f\right)\left(u(x)\right) D_q u(x) \tag{2.9}$$

bulunur (Kac and Cheung 2002).

Bir $f(x)$ fonksiyonunun ikinci q −türevinin ne olduğu sorusunun cevabına gelindiğinde aşağıdaki eşitlikle karşılaşılır;

$$D_q^2 f(x) = D_q\left(D_q\big(f(x)\big)\right) = \ D_q\left(\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}\right)$$

$$= \frac{(q-1)xD_q\big(f(qx)-f(x)\big)-\big(f(qx)-f(x)\big)D_q\big((q-1)x\big)}{(q-1)x(q-1)qx}$$

$$= \frac{(q-1)x\left(D_q f(qx)-D_q f(x)\right)-\big(f(qx)-f(x)\big)D_q\big((q-1)x\big)}{q(q-1)^2x^2}$$

$$= \frac{(q-1)x\left(\frac{f(q^2x)-f(qx)}{(q-1)x}-\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}\right)-\big(f(qx)-f(x)\big)\frac{(q-1)qx-(q-1)x}{(q-1)x}}{q(q-1)^2x^2}$$

$$= \frac{f(q^2x)-2f(qx)+f(x)-\big(f(qx)-f(x)\big)(q-1)}{q(q-1)^2x^2}$$

$$= \frac{f(q^2x)+qf(x)-(1+q)f(qx)}{q(q-1)^2x^2}.$$

Bu şekilde $f(x)$ gibi bir fonksiyonun daha üst mertebeden q −türevlerine ulaşılabilir.

Sonuç olarak

$$D_q^2 f(x) = \frac{f(q^2x)+qf(x)-(1+q)f(qx)}{q(q-1)^2x^2} \tag{2.10}$$

bulunur. Bu ifade özellikle q −konvekslik ve tanımı ileride yer alan q −logaritmik konvekslik gibi tanımlarda kullanılan önemli bir ifadedir.

Geleneksel kalkülüste, tüm türevleri olan bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ civarında bir kuvvet seri olarak gösterilebilirse $x=a$ da analitiktir denir. Taylor teoremine göre kuvvet serileri;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \tag{2.11}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.3. $(x-a)^{\mathrm{n}}$ nin q −anoloğu

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & , \quad n=0 \ ise \\ (x-a)(x-qa)\ldots(x-q^{n-1}a) & , \quad n\geq 1 \ ise \end{cases}$$

dir (Kac and Cheung 2002).

Önerme 2.2.1. $n \geq 1$ için,

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$$

dir. (Kac and Cheung 2002).

İspat. Formül $n = 1$ için açıkça doğrudur. Herhangi bir k tamsayısı için

$$D_q(x-a)_q^k = [k](x-a)_q^{k-1}$$

olduğunu varsayılsın. Yukarıdaki tanıma göre $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k(x-q^k a)$ olur. Çarpım kuralı (2.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k + (qx-q^k a)D_q(x-a)_q^k \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a)[k](x-a)_q^{k-1} = (1+q[k])(x-a)_q^k \\ &= [k+1](x-a)_q^k \end{aligned}$$

bulunur. O halde önerme k üzerindeki varsayımla birlikte kanıtlanmış olur (Kac and Cheung 2002).

Teorem 2.2.1. Herhangi bir N dereceli $f(x)$ fonksiyonu ve herhangi bir c sayısı için q −Taylor açılımı;

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_j^q f)(c) \frac{(x-c)_j^q}{[j]!}.$$

şeklindedir. Bu açılımdan q −binom kofaktörü elde edilir;

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!}.$$

Burada n ve j negatif olmayan tamsayılar ve $n \geq j$ dir. Yine burada $q \to 1$ iken q −binom kofaktörünün geleneksel binom kofaktörüne indirgendiğine dikkat edilmelidir. q −binom kofaktörünün bazı özelliklerini aşağıda verilmiştir;

a)

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$$

b) q −Pascal kuralları ise şu şekilde tanımlanır;

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}.$$

olarak tanımlanır. Burada $1 \leq j \leq n-1$ dir.

Öte yandan, q −Taylor açılımından yararlanarak Gauss' un Binom formülü ise

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} \alpha^j x^{n-j}$$

şeklinde yazılır. Burada n negatif olmayan bir tamsayı, α bir sayı, $f(x) = (x+a)_q^n$ bir fonksiyon ve $j \leq n$ olduğu kabul edilmiştir (Kac and Cheung 2002).

Tanım 2.2.4. (q −Üstel Fonksiyonlar): e^x klasik üstel fonksiyonunun q −analogu

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}$$

dir. Klasik üstel fonksiyonun diğer bir q −analogu ise

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty}$$

dir (Kac and Cheung 2002).

Bu iki q −üstel fonksiyonun q −türevi ise

$$D_q e_q^x = e_q^x \quad \text{ve} \quad D_q E_q^x = E_q^{qx}$$

ile verilir.

Ayrıca $yx = qxy$ ise

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y}$$

olur. Ancak genelde $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$ dir.

Tanım 2.2.5.(q −Trigonometrik Fonksiyonlar): q −Trigonometrik fonksiyonlar

$$sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \qquad Sin_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}$$

$$cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \qquad Cos_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}$$

eşitlikleri ile ifade edilirler. Burada $Sin_q x = sin_{1/q} x$ ve $Cos_q x = cos_{1/q} x$.

Ayrıca

$$e_q^x E_q^{-x} = 1$$

eşitliği önemlidir. Bu eşitlikten faydalanarak

$$cos_q x\, Cos_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}$$

ve

$$sin_q x\, Sin_q x = -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan da

$$cos_q x\, Cos_q x + sin_q x\, Sin_q x = 1$$

eşitliği elde edilir. Bu fonksiyonların q −türevleri ise

$$D_q sin_q x = cos_q x\,, \qquad D_q Sin_q x = Cos_q qx,$$

$$D_q cos_q x = -sin_q x\,, \qquad D_q Cos_q x = -Sin_q qx\,.$$

dir (Kac and Cheung 2002).

Tanım 2.2.6. (q −Antitürev): Eğer $D_q F(x) = f(x)$ ise, $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ in bir q −antitürevidir ve

$$\int f(x) d_q x\,.$$

ile gösterilir. Burada dikkat edilmesi gereken önemli nokta yukarıda "q −antitürev" yerine "bir q −antitürev" yazılmasıdır. Bunun sebebi ise geleneksel kalkülüste olduğu gibi bir antitürevin tek olmadığıdır (Kac and Cheung 2002).

α ve β sabitler olmak üzere $u = u(x) = \alpha x^\beta$ fonksiyonu için değişken değiştirmesi yapılmak istensin, ayrıca $F(x)$'in $f(x)$' in bir q −antitürevi olduğu farzedilsin. O halde

$$\int f(u) d_q u = F(u) = F(u(x))$$

olur. Herhangi q' için (2.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} F(u(x)) &= \int D_{q'} F(u(x)) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^\beta} F)(u(x)) D_{q'} u(x) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^\beta} F)(u(x)) d_{q'} u(x) \end{aligned}$$

olur, burada $q' = q^{1/\beta}$ seçilirse $D_{q',\beta}F = D_q F = f$ olur ve

$$\int f(u) d_q u = \int f(u(x)) d_{q^{1/\beta}} u(x)$$

elde edilir. Bu formülün anlamı şudur: $f(u(x)) D_{q^{1/\beta}} u(x)$, $f(u)$ nun q −antitürevlerinden biridir (Kac and Cheung 2002).

Tanım 2.2.7. (q −İntegral): $0 < a < b$ olsun. q −integral

$$\int_0^b f(x)\, d_q x = (1-q)b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b), \tag{2.12}$$

ve

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x. \tag{2.13}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Aşağıda kısıtlanmış q −integral tanımından ve q −integralin özel bir tipinden bahsedilecektir.

Tanım 2.2.8. $0 < q < 1,\ b > 0$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere kısıtlanmış q −integral

$$\int_{bq^n}^b f(x)\, d_q x$$

ile tanımlanır (Gauchman 2002).

$f(x)$ 'e ek olarak kısıtlanmış q −integral aynı zamanda q, b ve n'ye bağlıdır. Çalışmanın bundan sonraki kısmında aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

$$j \in \{0,1,\dots,n\} \text{ için } c_j = b_j\,, a = c_n = bq^n.$$

Aşağıdaki formül yukarıdaki (2.12) ve (2.13) den elde edilmiştir;

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_{bq^n}^b f(x)\, d_q x = (1-q)b \sum_{j=0}^{n-1} q^j f(bq^j) = (1-q) \sum_{j=0}^{n-1} c_j\ f(c_j).$$

Ayrıca

$$\int_a^b D_q f\, d_q x = f(b) - f(a)$$

eşitliği q −integral için önemlidir.

Eğer $[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\, d_q x \geq \int_a^b g(x)\, d_q x$ olur ve eğer $0 < k < n$ ise

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_a^{c_k} f(x)\, d_q x + \int_{c_k}^b f(x)\, d_q x$$

eşitliği vardır (Gauchman 2002).

Kısmi q −integrasyon formülü;

$$\int_a^b f(x)\big(D_q g\big)(x)\, d_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)\big(D_q f\big)(x)\, d_q x$$

eşitliği ile verilir. $a = bq^n,\ q = (a/b)^{1/n}$ olduğundan, a, b sabitleri ve $n \to \infty$ için $q \to 1$ olacağından ve eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Rieamann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olarak varsayılırsa

$$\int_a^b f(x)\, d_q x \to \int_a^b f(x)\, dx$$

olur (Kac and Cheung 2002).

2.3. İki Pozitif Reel Sayı İçin Bazı Ortalamalar

Bu bölümde a, b gibi pozitif iki reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen *et al.* 1988; Bullen 2003);

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a, b) \coloneqq \frac{a + b}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a, b) \coloneqq \sqrt{ab},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a, b) \coloneqq \frac{2ab}{a + b},$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$L = L(a, b) \coloneqq \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{b - a}{lnb - lna}, & a \neq b \end{cases}$$

(5) Identric ortalama:

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases}$$

(6) $p -$ logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases}$$

(7) Kuadratik ortalama:

$$K = K(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p'nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I,\ L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{r}{r+1}.\dfrac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & r \neq 0, -1, x \neq y \\ \dfrac{x-y}{lnx - lny}, & r = 0, x \neq y \\ xy\dfrac{lnx - lny}{x-y}, & r = -1, x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1. q −Konveks Fonksiyon ve Bazı Eşitsizlikler

Tanım 3.1.1. (Log-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konvekstir denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 3.1.2. (q −konveks fonksiyon): $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $[a,b]$ üzerinde $D_q^2 f \geq 0$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde q −konvekstir denir (Gauchman 2002).

O halde $f(x)$ fonksiyonu $x \in [a,b]$ ve $q^2 x \in [a,b]$ olmak üzere her x için eğer $f(q^2x) + qf(x) - (1+q)f(qx) \geq 0$ ise q −konvekstir denir. $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise aynı zamanda yine $[a,b]$ üzerinde q −konvekstir (Gauchman 2002).

Tanım 3.1.3. $x \in [a,b]$ ve $qx \in [a,b]$ için eğer $f(qx) \leq f(x)$ (veya $f(qx) \geq f(x)$) ise $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde q −artan (veya q −azalan) olarak tanımlanır (Gauchman 2002).

Diğer bir ifade ile $x \in [a,b]$ ve $qx \in [a,b]$ için $\left(D_q f\right)(x) \geq 0$ $\left(\left(D_q f\right)(x) \leq 0 \right)$ eşitsizliği sağlanıyor ise $f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde q −artan (q −azalan) denir. Açıkça görüleceği gibi $f(x)$ fonksiyonu artan (azalan) ise aynı zamanda q −artan (q −azalan) da olur (Gauchman 2002).

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, ℝ'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al*. 1992).

İspat. Teorem 2.1.2'den dolayı f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani $x = (1-t)a + tb$, $0 \leq t \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)dt \\ &\leq f(a)\int_0^1 (1-t)dt + f(b)\int_0^1 tdt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

olur ve bu (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafın ispatı verilirse

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

integralini

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\quad = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde yazıp (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimde $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimde $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx = -\frac{b-a}{2}\int_{1}^{0} f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1} f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılabilir. (3.2)'de bu sonuçlar kullanılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$
$$\geq \int_{0}^{1} f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Azpeitia 1994).

Teorem 3.1.2. (q −Hermite-Hadamard Eşitsizliği):

i. f fonksiyonu q −konveks ve q −monoton olsun. f fonksiyonu q −azalan ise $c_k \geq (aq+b)/(1+q)$ ve f fonksiyonu q −artan ise $c_k \leq (aq+b)/(1+q)$ olduğu varsayılsın. O halde,

$$f(c_k) - \frac{a(1-q)}{b-qa}f(a) \leq \frac{1}{b-qa}\int_{a}^{b} f(x)\,d_q x.$$

ii. f fonksiyonu q −konveks ve q −monoton olsun. f fonksiyonu q −azalan ise $c_k \geq \big(q(a+b)\big)/(1+q)$ ve f fonksiyonu q −artan ise $c_k \geq \big(q(a+b)\big)/(1+q)$ olduğu varsayılsın. O halde,

$$f(c_k) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(qx)\,d_q x.$$

iii. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde q −konveks olsun. O halde,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,d_q x \leq \frac{1}{1+q}[(bq-a)f(a)+(bq-a)f(b)],$$
$$\int_{a}^{b} f(qx)\,d_q x \leq \frac{1}{1+q}[(b-qa)f(a)+(qb-a)f(b)],$$
$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\frac{f(x)+f(qx)}{2}\,d_q x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

vardır (Gauchman 2002).

Çalışmanın bundan sonraki kısmında geçecek olan bazı gösterimler belirtilenecek olunursa; $n \in N$ olmak üzere $b > 0$ için $a = bq^n$ dir ve

$$[a,b]_q = \{bq^k : 0 \leq k \leq n\}, \qquad (a,b]_q = [q^{-1}a,b]_q$$

gösterimleri mevcuttur.

Lemma 3.1.1: $p \geq 1$ ve $g(x)$, $[a,b]_q$ üzerinde negatif olmayan monoton fonksiyon olsun. O halde,

$$pg^{p-1}(qx)D_q g(x) \leq D_q\big(g^p(x)\big) \leq pg^{p-1}(x)D_q g(x), \qquad x \in (a,b]_q \qquad (3.3)$$

eşitsizliği vardır (Brahim, Bettaibi and Sellemi 2008).

Sonuç 3.1.1: Lemma 3.1.1 de g fonksiyonun azalmayan bir fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca g artmayan bir fonksiyon ise (3.3) eşitsizliği yön değiştirir. Eğer g azalmayan bir fonksiyon ve $0 < p < 1$ ise (3.3) eşitsizliğinin yön değiştirdiğini göstermek kolay olacaktır (Sulaiman 2011).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. q −Logaritmik Konveks Fonksiyon

Tanım 4.1.1.(q −logaritmik konveks fonksiyon): $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer logf, q −konveks ise f fonksiyonuna q −logaritmik konveks fonksiyon denir. Bu tanıma denk olarak ; $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $x, qx, q^2x \in [a,b]$, $0 < q < 1$ olmak üzere, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f^{q+1}(qx)f^{q}(x) \leq f(q^2x) \tag{4.1}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde q −logaritmik konveks fonksiyon denir. (4.1) eşitsizliği yön değiştirirse f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde q −logaritmik konkav fonksiyon denir.

Diğer bir ifade ile $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $D_q^2(logf) \geq 0$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde q −logaritmik konveks fonksiyon denilir. Öncelikle $D_q^2(logf) \geq 0$ eşitsizliğinin ne ifade ettiği gösterilmelidir.

$$D_q^2(logf)(x) = D_q\left(D_q\big((logf)(x)\big)\right) = D_q\left(\frac{(logf)(qx) - (logf)(x)}{(q-1)x}\right)$$
$$= \frac{(logf)(q^2x) + q(logf)(x) - (1+q)(logf)(qx)}{q(q-1)^2x^2} \geq 0$$

olduğu (2.10) yardımıyla bulunur. Buradan,

$$(logf)(q^2x) + q(logf)(x) - (1+q)(logf)(qx) \geq 0,$$
$$(logf)(q^2x) + (logf^{q})(x) - (logf^{q+1})(qx) \geq 0,$$
$$log\big(f^{q}(x)f(q^2x)\big) \geq (logf^{q+1})(qx),$$

işlemleri yapıldığında, $f^{q+1}(qx)f^{q}(x) \leq f(q^2x)$ eşitsizliği elde edilir.

Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun q −logaritmik konveksliği üzerinde duruldu. Eğer k bir pozitif tamsayı ve $q^kx \in [a,b]$ olmak üzere, $f(q^kx)$ için (4.1) eşitsizliği bulunurken kullanılan yöntem tekrar kullanılırsa, tümevarım yöntemi ile

$$f^{q+1}(q^{k+1}x)f^{-q}(q^kx) \geq f(q^{k+2}x) \tag{4.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ ve $f: I \to (0, \infty)$ q −logaritmik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

i. $f^{q+1}(qx) \leq \frac{\left(f^q(x) + f(q^2x)\right)^2}{4}$

ii. $f^{q+1}(qx) \leq \frac{f^{2q}(x) + f^2(q^2x)}{2}$

İspat.

i. (4.1) eşitsizliği

$$f^{q+1}(qx) \leq f^q(x) f(q^2x) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına $G(p,q) \leq A(p,q), (p,q \geq 0)$ eşitsizliği uygulanırsa

$$f^{q+1}(qx) \leq \frac{\left(f^q(x) + f(q^2x)\right)^2}{4}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. (4.3) eşitsizliğinin sağ tarafına $G(p,q) \leq K(p,q), (p,q \geq 0)$ eşitsizliği uygulanırsa

$$f^{q+1}(qx) \leq \frac{f^{2q}(x) + f^2(q^2x)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.1: Bir q −logaritmik konveks fonksiyon aynı zamanda q −konveks fonksiyondur. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

İspat. $f = explogf$ olarak yazılabileceğinden logaritmik q −konveks fonksiyon aynı zamanda q −konveks fonksiyon olur.

Lemma 4.1.2. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde logaritmik konveks ise aynı zamanda yine $[a, b]$ üzerinde q −logaritmik konvekstir.

İspat. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde logaritmik konveks ise $logf$ fonksiyonu konvestir. O halde, $logf$ fonksiyonu q −konvekstir. Tanım 4.1.1 yardımıyla, f fonksiyonu q −logaritmik konveks fonksiyon olur ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.1. Yukarıdaki açıklamalardan sonra q −logaritmik konveks fonksiyon için örnek fonksiyonlar vermek oldukça kolay olacaktır. Örneğin, $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu

q −logaritmik konvekstir. Bunu göstermek için önce bu fonksiyonun logaritmik konveks olup olmadığına bakılmalıdır. $logf = loge^{x^2} = x^2$ fonksiyonu konveks olduğundan $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu logaritmik konvekstir. O halde Lemma 4.1.2 yardımıyla $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu q −logaritmik konveks fonksiyon olur.

Aynı fonksiyonun q −logaritmik konveks fonksiyon olduğunu yukarıdaki Lemma 4.1.2 kullanılmadan, yalnızca (4.1) eşitsizliği kullanılarak gösterilmeye çalışılırsa;

$$f(q^2x) = e^{q^4x^2} \geq \frac{\left(e^{(qx)^2}\right)^{q+1}}{\left(e^{x^2}\right)^q} = \frac{f^{q+1}(qx)}{f^q(x)}$$

bulunduğu görülür.

Teorem 4.1.2: $f: I \to (0, \infty)$ q −logaritmik konveks fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{R}$ ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere x ve $q^i x \in [a, b]$, $i = 1,2, \ldots, n+2$ olsun. Bu durumda,

$$f(qx)f^q(q^{n+1}x) \leq f^q(x)f(q^{n+2}x)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. f fonksiyonu q −logaritmik konveks fonksiyon olduğundan (4.2) eşitsizliği yardımıyla aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

k = 0 için, $\quad f^{q+1}(qx)f^{-q}(x) \leq f(q^2x)$

k = 1 için, $\quad f^{q+1}(q^2x)f^{-q}(qx) \leq f(q^3x)$

…

k = n için, $\quad f^{q+1}(q^{n+1}x)f^{-q}(q^n x) \leq f(q^{n+2}x)$

Bu fonksiyon pozitif değerler aldığından eşitsizliklerin sol kısımlarının çarpımı sağ kısımların çarpımından küçük olur.

$$f(qx)f(q^2x)f(q^3x) \ldots f(q^n x)f^{-q}(x)f^{q+1}(q^{n+1}x)$$
$$\leq f(q^2x)f(q^3x) \ldots f(q^n x)f(q^{n+1}x)f(q^{n+2}x)$$

Bu eşitsizlikten de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$f(qx)f^q(q^{n+1}x) \leq f^q(x)f(q^{n+2}x)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.1.1. $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in (0, \infty)$ olsun. Böylece

$$(e^{qx}+1)\left(e^{q^{n+1}x}+1\right)^q \leq (e^x+1)^q\left(e^{q^{n+2}x}+1\right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Eğer Teorem 4.1.2 de q −logaritmik konveks fonksiyon olarak, $x \in (0,\infty)$ için $f(x) = e^x + 1$ fonksiyonu seçilirse

$$f(qx)f^q(q^{n+1}x) = (e^{qx}+1)\left(e^{q^{n+1}x}+1\right)^q$$

ve

$$f^q(x)f(q^{n+2}x) = (e^x+1)^q\left(e^{q^{n+2}x}+1\right)$$

ifadeleri elde edilir.$n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in (0,\infty)$ ve $0 < q < 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(e^{qx}+1)\left(e^{q^{n+1}x}+1\right)^q \leq (e^x+1)^q\left(e^{q^{n+2}x}+1\right)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 4.1.3: $f: I \to (0,\infty)$, $[a,b]_q$ üzerinde q −logaritmik konveks ve azalmayan bir fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{D_q\left(f^q(x)\right)}{D_q\left(f(x)\right)} \leq \frac{qf^q(x)f(q^2x)}{f^2(qx)}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Sonuç 3.1.1 den

$$qf^{q-1}(x)D_qf(x) \leq D_q\left(f^q(x)\right) \leq qf^{q-1}(qx)D_qf(x)$$

eşitsizliği, $f: I \to (0,\infty)$, $[a,b]_q$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon için yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı ele alınırsa

$$\frac{D_q\left(f^q(x)\right)}{qD_qf(x)} \leq f^{q-1}(qx)$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{f^2(qx)}{f^q(x)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{f^2(qx)D_q\left(f^q(x)\right)}{qf^q(x)D_qf(x)} \leq f^{q+1}(qx)f^{-q}(x)$$

eşitsizliği ortaya çıkar. f fonksiyonu q −logaritmik konveks fonksiyon olduğundan

$$\frac{f^2(qx)D_q\left(f^q(x)\right)}{qf^q(x)D_qf(x)} \leq f^{q+1}(qx)f^{-q}(x) \leq f(q^2x)$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{D_q\big(f^q(x)\big)}{D_q\big(f(x)\big)} \leq \frac{qf^q(x)f(q^2x)}{f^2(qx)}$$

eşitsizliği bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.1.2. $x \in (0,\infty)$ olsun. Böylece

$$\frac{(qx)^{q^2x} - x^{qx}}{(qx)^{qx} - x^x} \leq \frac{qx^{qx}(q^2x)^{q^2x}}{(qx)^{2qx}}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Eğer Teorem 4.1.3 te q −logaritmik konveks fonksiyon olarak, $x \in (0,\infty)$ için $f(x) = x^x$ fonksiyonu seçilirse

$$\frac{D_q\big(f^q(x)\big)}{D_q\big(f(x)\big)} = \frac{(qx)^{q^2x} - x^{qx}}{(qx)^{qx} - x^x}$$

ve

$$\frac{qf^q(x)f(q^2x)}{f^2(qx)} = \frac{qx^{qx}(q^2x)^{q^2x}}{(qx)^{2qx}}$$

ifadeleri elde edilir. $x \in (0,\infty)$ ve $0 < q < 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{(qx)^{q^2x} - x^{qx}}{(qx)^{qx} - x^x} \leq \frac{qx^{qx}(q^2x)^{q^2x}}{(qx)^{2qx}}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 4.1.4: $f: I \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ logaritmik konveks fonksiyon olsun. O halde

$$f(q^2x + (1-q)x) \leq \frac{f(q^2x)f(x)}{f(qx)}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. f fonksiyonu logaritmik konveks fonksiyon olduğundan, Lemma 4.1.2 yardımıyla bu fonksiyonun aynı zamanda q −logaritmik konveks fonksiyon olduğu söylenebilir. O halde

$$f^{q+1}(qx)f^{-q}(x) \leq f(q^2x)$$

eşitsizliği vardır. f fonksiyonunun pozitif değerler alan bir fonksiyon olduğu bilindiğinden yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $f(qx)f^{-1}(x)$ ile bölünürse eşitsizlik

$$f^q(qx)f^{1-q}(x) \leq \frac{f(q^2x)f(x)}{f(qx)}$$

formuna dönüşür. Ayrıca f fonksiyonu logaritmik konveks olduğundan

$$f(q^2x + (1-q)x) \leq f^q(qx)f^{1-q}(x)$$

yazılır ve buradan da yukarıdaki iki eşitsizlik

$$f(q^2x + (1-q)x) \leq \frac{f(q^2x)f(x)}{f(qx)}$$

şeklinde tek bir eşitsizlik olarak yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1.2. $x \in (0, \infty)$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $q-$logaritmik konveks fonksiyondur. Buradan

$$f(q^2x + (1-q)x) = \frac{1}{q^2x + (1-q)x} = \frac{1}{x[q(q-1)+1]}$$

yazılır. $0 < q < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{x[q(q-1)+1]} \leq \frac{1}{qx}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{f(q^2x)f(x)}{f(qx)} = \frac{\frac{1}{q^2x}\frac{1}{x}}{\frac{1}{qx}} = \frac{1}{qx}$$

olduğundan, sonuç olarak

$$f(q^2x + (1-q)x) = \frac{1}{x[q(q-1)+1]} \leq \frac{1}{qx} = \frac{f(q^2x)f(x)}{f(qx)}$$

yazılır.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Eşitsizlikler tüm bilim dallarında sıklıkla kullanılan, bazen estetik olduğu için tercih edilen, uygulama alanı oldukça geniş bir teoridir. Bilim sürekli genişleyen ve kendini yenileyen bir olgudur. Bu tez çalışmasında 20. yy başlarında ortaya çıkan ancak 21. yy da fizik ve matematiğin birçok alt dalında aktif olarak kullanılan konvekslik ve kuantum hesaplamaları üzerine durulmuştur. Çalışmada farklı tipten konveks fonksiyon çeşitleri ve $q-$kalkülüs olarak ifade edilen hesaplamalardan ve onun elemanlarından kısaca bahsedilmiştir. Yapılan bu tariflerin peşine $q-$logaritmik konveks fonksiyon tanımı verilmiş, $q-$logaritmik konveks fonksiyonlar yolu ile bazı lemma ve eşitsizlikler inşa edilmiştir.

Yapılan çalışma doğrultusunda elde edilen yeni tanım ve eşitsizlikler hem konveks fonksiyonlar teorisi hem de $q-$kalkülüs için yeni bir metod oluşturacağı kanaatindeyiz. İlgilenen ya da yukarıda bahsettiğimiz teoriler üzerine çalışan bilim adamlarının bulunan bu veriler doğrultusunda bir çok çalışma yapması mümkündür.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.

Alomari, M., 2011. Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For $s-$Convex, Quasi-Convex And $r-$Convex Mappings And Applications. Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology, Universiti Kebangsaan, Malsysia, Bangi.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bakula, M.K., Özdemir, M.E. and Pečarić, J., 2008. Hadamard type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics., 9(4), Article 96, 12pp.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.

Brahim K, Bettaibi N. and Sellami M., 2008. On Some Feng Qi Type q-integral inequalities, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 9, Issue 2, Article 43, 7 pp.

Brahim K, 2008. On some $q-$integral inequalities, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 9, Issue 4, Article 106, 6 pp.

Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer

Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.

Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., 1988. Means and Their Inequalities.

Carter, M. and van Brunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. Springer-Verlag, 228, New York.

Dragomir, S.S. & Rassias, T. M., 2002. Ostrowski type inequalities and applications in

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Tpye Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html(15.03.2012).

Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.

Fitouhi A., Brahim K., 2008. Some inequalities for the $q-$beta and the $q-$gamma functions via some $q-$integral inequalities, Applied Mathematics and Computation 204, 385–394.

Gauchman H., 2004. Integral inequalities in $q-$calculus, Computers and Mathematics with Applications 47, 281-300

Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on $s-$convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.
Kac, V and Cheung, P., 2002. Quantum Calculus, 112 pp, Springer-Verlag New York, Inc.
Miao Y. and Qi F., 2008. Several $q-$integral Inequalities, Journal of Mathematical Inequalities, Volume 3, Number 1, 115–121
Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.
Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 400, Berlin.
Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.
Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
numerical integration. Boston: Kluwer Academic, 404 pp, Melbourne-Athens.
Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9, 157-162.
Ostrowski, A., 1938. Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. Comment. Math. Hel, 10, 226-227.
Pachpatte, B.G., 2004a. A note on integral inequalities involving two log-convex functions. Mathematical Inequalities & Applications, 7(4), 511-515.
Pachpatte, B.G., 2005b. Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
Pearce, C.E.M. and Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.
Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with applications to special means and quadrature formulæ. Applied Mathematics Letters, 13, 51-55.
Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc., 469 pp, Boston.
Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300pp, New York.
Sarıkaya, M.Z. and Aktan, N., 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications. Mathematical and Computer Modelling, 54, 2175-2182.
Sulaiman W.T., 2011. A study on new $\mathrm{q}-$Integral Inequalities, Applied Mathematics, 2, 465-469
Sulaiman W.T., 2011. New Types of $\mathrm{q}-$Integral Inequalities, Advances in Pure Mathematics, 1, 77-80
Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity. Proceedings of The Colloquium On Approximation and Optimization, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329-338.

Tunç, M., 2010. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Varošanec, S., 2007. On h −convexity. J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İbrahim KARABAYIR

Doğum Yeri: Gaziosmanpaşa

Doğum Tarihi: 26.07.1987

E posta: ikarabayir@kilis.edu.tr, ikarabayir34@gmail.edu.tr

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu: Atatürk Üniversitesi, 2004-2008, Erzurum

Lisans: Fen Fakültesi, Matematik

Yayın ve/veya Bildiriler:

1.Tunç, M. Şubaş, Y., Karabayır, İ., On some Hadamard type inequalities for MT-convex functions, Int. J. Open Problems Comput. Math. , Vol. 6, No. 2, June 2013, 102-113.

2. Tunç, M., Şubaş, Y., Karabayır, İ., On Some Hadamard Type Inequalities For MT-Convex Functions, XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu, 5-8 Eylül 2012, Niğde Üniversitesi, Türkiye.

3. Tunç, M., Karabayır, İ., s-Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hadamard Tipli Eşitsizlikler Üzerine Yeni Yaklaşımlar, 8. Ankara Matematik Günleri, 13-14 June 2013, Çankaya University, Turkey.