T.C.

KİLİS 7 ARALIK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

s - GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ebru YÜKSEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2014

KİLİS

T.C.

KİLİS 7 ARALIK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

s - GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ebru YÜKSEL

1.Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ

2.Danışman: Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2014

KİLİS

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

s - GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ebru YÜKSEL

Kilis 7 Aralık Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

1.Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ
2.Danışman: Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN
Yıl: 2014 Sayfa:63

Sunulan bu tezde $s-$ geometrik konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler incelenerek Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizliklere yer verilmiştir. Tezin birinci bölümünde eşitsizliğin, konveksliğin tarihine ve literatürde yer alan çalışmalara yer verilmiş, ikinci bölümde konvekslik ile ilgili tanım, teorem ve kavramlardan bahsedilmiş, üçüncü bölümde literatürde bulunan $s-$geometrik konvekslikle ilgili teorem ve lemmalara değinilmiş, dördüncü bölümde ise bu teorem ve lemmalar yardımıyla $s-$geometrik konveks fonksiyonlarla ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı $s-$geometrik konveks fonksiyonları detaylı olarak incelemek ve bu fonksiyonlarla ilgili yeni eşitsizlikler bulup, yeni üst sınırlar elde etmektir.

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, $s-$konveks fonksiyon, geometrik konveks fonksiyon, $s-$ geometrik konveks fonksiyon.

ABSTRACT

MSc. Thesis

HERMİTE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR
***s* - GEOMETRIC CONVEX FUNCTIONS**

Ebru YÜKSEL

Kilis 7 Aralık University
The Institute for Graduate Studies in Sciences and Engineering
Department of Mathematics

Supervisor 1: Assist. Prof. Dr. Mevlüt TUNÇ
Supervisor 2: Assist. Prof. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Year: 2014 Page: 63

In this presented thesis, Hermite-Hadamard typed new inequalities are included by investigating inequalities for $s-$ geometric convex functions. In the first chapter of the thesis, the history of inequalities, convexity and the existing studies in the literature have been given, in the second chapter definitions, theories and concepts related to convex functions are mentioned, in the third chapter the theories and lemmas on $s-$ geometric convexity are have been given, then, these theories and lemmas have been used to obtain new inequalities for $s-$geometric convex functions.

The aim of this thesis to make a detailed investigation of $s-$geometric convex functions and to obtain new upper bounds with new inequalities for this type inequalities.

Key Words: Inequalities, Hermite-Hadamard Inequalities, $s-$convex functions, geometric convex functions, $s-$geometric convex functions

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma, Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamda ve tezin hazırlanması sürecinde hiçbir yardımını, desteğini ve ilgisini esirgemeyen kıymetli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mevlüt TUNÇ'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ebru YÜKSEL
Haziran 2014

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$C(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$ ’de Bir Aralık
I^o	I ’nın İçi
$J(I)$	Jensen-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m(b)$	$m-$ Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	$(a,m)-$ Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda $s-$ Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L_r(x,y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalaması
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$SV(h,I)$	$h-$konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h,I)$	$h-$konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$W(I)$	Wright Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\beta(x,y)$	Euler-Beta Fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Euler-Gamma Fonksiyonu

1.GİRİŞ

Matematiğin hemen hemen bütün dallarının yanı sıra diğer bilim dallarında da önemli rol oynayan eşitsizlik teorisinin temelleri K. F. Gauss (1777-1855), A. L. Cauchy (1789-1857), ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi ünlü matematikçiler tarafından atılmıştır. Eşitsizlik konusu 19. ve 20. yüzyıllarda H. Poincare, A. M. Lyapunav, O. Hölder ve J. Hadamard başta olmak üzere birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Eşitsizlik teorisi ile ilgili detaylı bilgiler içeren ilk eser Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934'te hazırlanan "Inequalities" adlı çalışmadır. Bu konuda yapılan diğer bir çalışma ise, 1934-1960 yılları arası yapılan araştırmalar neticesinde elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını kapsayan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu kitap E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961 yılında yazılmıştır. Eşitsizliklerle ilgili diğer detaylı çalışmalar; D. S. Mitrinović'in "Analytic Inequalities"(1970), "Classical and New Inequalities in Analysis" (1993), Agarwal ve Pang'ın "Analytic Inequalities" (1995), Pachpatte'nin "Mathematical Inequalities" (2005) gibi kitapların yanı sıra son yıllarda Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından bu konuda pek çok kitap ve makale yazılmıştır.

Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan Konvekslik kavramının tanımı Archimedes'in düzgün çokgenleri çevreleyerek ve kazıyarak ünlü π (pi) değerini hesaplamasına kadar uzanır (M.Ö. ca. 250). Konveks fonksiyon kavramı ile ilgili de birçok çalışma yapılmış ve çok sayıda integral eşitsizliği elde edilmiştir. Bunların içinde en önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), bu eşitsizliği 1881 de, Journal Mathesis dergisine göndermiştir. Bundan yaklaşık yirmi yıl sonra J.L.W.V. Jensen tarafından "Jensen Eşitsizliği" adlı çalışma yapılmıştır (1905).

Bu çalışmalar neticesinde bilim dünyasında önemi daha da artan konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri konusu birçok araştırmacı tarafından ele alınmış ve çok sayıda integral eşitsizliği ortaya çıkmıştır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunda Beckenbach ve Bellman 1961'de, Mitrinović 1970'te, Roberts ve Varberg 1973'de, J.Pečarić 1987 ve 1992'de, S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce 2000'de Niculescu ve

Persson 2006’da gibi pek çok kişi çalışma yapmışlardır. Bunların içinde sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak ise J.Pečarić tarafından 1987’de yazılan “Convex Funtions: Inequalities” adlı kitaptır. Yaptığımız tez çalışmasının da temelini oluşturan Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı ise S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce’nin 2000 yılında kaleme aldığı “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” adlı kitapta yayınlanmıştır.

Bu konu hakkında yazılan kitapların dışında literatürde doktora ve yüksek lisans çalışmalarına da rastlanmaktadır.

“Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” adlı doktora tezinde Tunç (2010); konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiş ve daha sonra elde ettiği bu eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar vermiştir.

“Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski And Simpson Type For Convex, Quasi Convex And Convex Mappings And Applications” adlı doktora tezinde Alomari (2011); konveks, quasi konveks ve konveks fonksiyon sınıflarını kullanarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitisizlikler elde etmiştir. Ardından bu eşitsizlikler için bazı uygulamalar vermiştir.

“Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” adlı yüksek lisans tezinde Yıldız (2011); quasi konveks fonksiyonlar için geniş bir literatür taraması yapıp, quasi konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Sonrasında da elde ettiği bu eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı olarak uygulamalar vermiştir.

“Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler” adlı doktora tezinde Akdemir(2012); farklı tip konveks fonksiyon sınıflarını dikdörtgensel bölge üzerinde inceleyerek, koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikleri elde etmiştir. Daha sonra $m-$ konveks, $(\alpha,m)-$ konveks, $quasi-$konveks, $s-$konveks, $P-$

konveks ve $h-$konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri, bazı genelleştirmeler ve çarpımlara ilişkin sonuçlar vermiştir.

Yakın tarihte Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunda çalışmalar yapan diğer bilim adamları ise ; M. E. Özdemir, U.S. Kırmacı, M. Z. Sarıkaya, H. Kavurmacı, P. Cerone, Ravi Agarval, G. Anastassiou, N.S. Barnett, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, Darus, Baugoffa gibi araştırmacılardır.

Bu tezde $s-$geometrik fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde, konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlarla birlikte pozitif reel sayıların özel ortalamalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde de ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ispatı ve literatürde bulunan bazı teoremlere, lemmalara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde $s-$geometrik konveks fonksiyonlar için yeni teoremler ve genelleştirmeler yazılmıştır. $s-$geometrik konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni integral eşitsizliklerin ispatında üçüncü ve dördüncü bölümde yer alan lemmalar, Hölder, Power Mean ve Cauchy integral eşitsizlikleri kullanılmıştır. Ayrıca bu yeni integral eşitsizlikleri için bazı özel uygulamalar verilmiştir. Çalışmanın son kısmında da elde edilen sonuçlar yazılmıştır.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1.Genel Kavramlar

Bu bölümde, bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1.(Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L\times L \to L$ ve $.: K\times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye K cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzayı denir.

A) $L,+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.

$G1$. Her $x, y \in L$ için $x+y \in L$ dir,

$G2$. Her $x, y, z \in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir,

$G3$. Her $x \in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in L$ vardır,

$G4$. Her $x \in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır,

$G5$. Her $x, y \in L$ için $x+y=y+x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$L1$. $a.x \in L$ dir,

$L2$. $a.(x+y)=a.x+a.y$ dir,

$L3$. $(a+b).x=a.x+b.x$ dir,

$L4$. $(ab).x=a.(b.x)$ dir,

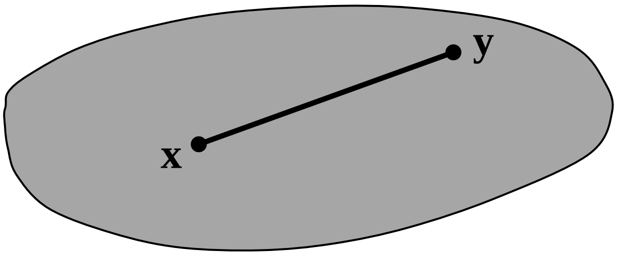
$L5$. $1.x=x$ dir (1, K nın birim elemanıdır). (2.1.1)

$K=\mathbb{R}$ ise L ye reel vektör uzayı denir (Anton 1994).

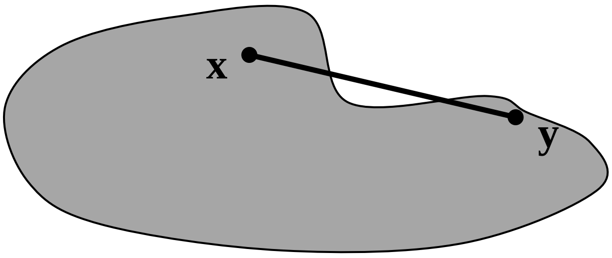
Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B=\{z \in L : z=\alpha x+(1-\alpha)y,\ 0\le \alpha \le 1\} \subseteq A \tag{2.1.2}$$

ise A kümesine konveks küme denir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.3. (J −Konveks Fonksiyon): I ,$\mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.3}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-$ konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Kesin J − Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.4}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin $J-$ konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

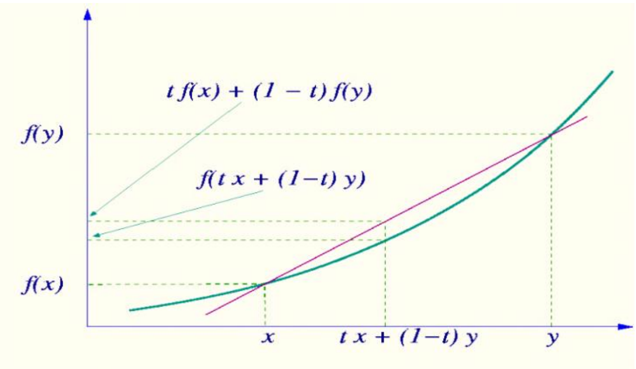
Tanım 2.1.5. (Konveks Fonksiyon): I ,$\mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ için,

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\le\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \tag{2.1.5}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizlik $x\neq y$ ve $\alpha\in(0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić et al. 1992).

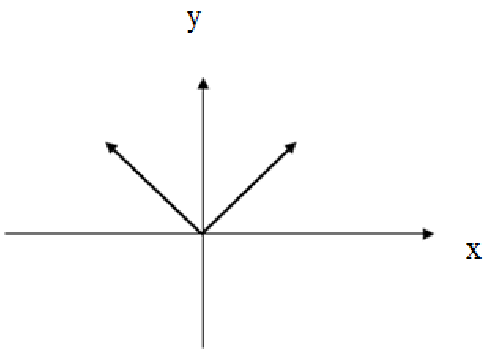
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon $J-$ konveks fonksiyondur.

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $\left(a,f(a)\right)$ ve $\left(b,f(b)\right)$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f’nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bakınız Şekil 2.3.



Şekil 2.3. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Örneğin, $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon $\left(f\left(x\right)=\left|x\right| \right)$

Eğer f fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında tanımlı, $\left[a,b\right]$aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x\in\left(a,b\right)$ için

$$f(x)-f(x_0)\leq(\geq)\,f(x_0)(x-x_0) \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği yazılır. Yani $\left(a,b\right)$ aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon bu eşitsizliği sağlar.

Tanım 2.1.6. (Süreklilik): $f:S\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in S$ ve $\varepsilon>0$ verilmiş olsun. $x\in S$ ve $\left|x-x_0\right|<\delta$ için $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f , x_0 'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Düzgün Süreklilik): $f:S\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon>0$ sayısı verilmiş olsun. $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ şartını sağlayan her $x_1,x_2\in S$ için $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f , S 'de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.8. (Lipschitz Şartı): $f:S\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq M\left|x-y\right| \tag{2.1.7}$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı varsa f, S 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2. f, S ’de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S’ de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.9. (Mutlak Süreklilik): $I, \mathbb{R}$ ’nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter and Brunt 2000).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 2.1.1. $[a,b] \subseteq I^{\circ}$ olsun. Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak, f $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° ’de süreklidir (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.2. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a,b) aralığında süreklidir ve

b. f , $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.10. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1 , x_2 de I ’da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.3. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere, f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

(Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3. f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.4. Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f_+^{'}(x)$ ve $f_-^{'}(x)$ var ve bu fonksiyon I° 'de artandır (kesin artandır) (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonu (a,b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f ' nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.6. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.11. (m- Konveks Fonksiyon): $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $b > 0$ ve her $x, y \in [0,b], m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(tx+m(1-t)y\right)\leq tf\left(x\right)+m(1-t)\,f\left(y\right) \tag{2.1.8}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m-$ konveks fonksiyon denir (Toader 1988).
$-f$ fonksiyonu $m-$ konveks ise bu takdirde f fonksiyonu $m-$ konkavdır. Ayrıca $f(0)\leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $m-$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m=1$ alınırsa $[0,b]$ üzerinde $m-$ konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.1.12. ($(\alpha$ - $m)$ - Konveks Fonksiyon) : $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $b>0$ ve her $x,y\in[0,b]$, $(\alpha,m)\in[0,1]\times[0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+m(1-t)y\right)\leq t^{\alpha} f\left(x\right)+m\left(1-t^{\alpha}\right) f\left(y\right) \tag{2.1.9}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $(\alpha,m)-$ konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).
$f(0)\leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $(a,m)-$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^{\alpha}(b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. (Birinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\leq 1$ olsun. $\alpha^s+\beta^s=1$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_+$ ve her $\alpha,\beta\geq 0$ için

$$f\left(\alpha u+\beta v\right)\leq \alpha^s f\left(u\right)+\beta^s f\left(v\right) \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda $s-$ konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.14. (İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\leq 1$ olsun. $\alpha,\beta\geq 0,\ \alpha+\beta=1$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_+$ için

$$f\left(\alpha u+\beta v\right)\leq \alpha^s f\left(u\right)+\beta^s f\left(v\right) \tag{2.1.11}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$ konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda $s-$ konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki $s-$ konvekslik tanımı $s=1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Tanım 2.1.15. (h −Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I, t \in (0,1)$ için

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \leq h(t) f(x) + h(1-t) f(y) \tag{2.1.12}$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$konveks fonksiyon veya $SX(h,I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Bu eşitsizliğin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$konkav fonksiyon veya $SV(h,I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha)=\alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$ ise $SX(h,I)=Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha)=1$ ise $SX(h,I) \supseteq P(I)$'dır; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha)=\alpha^s$ ise $SX(h,I) \supseteq K_s^2$'dir.

Tanım 2.1.16. (Birinci Anlamda $(h\text{-}s)_1$ −konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \neq 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0,\infty) = I, s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tanımlı negatif olmayan f fonksiyonu

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \leq h^s(t) f(x) + \left(1-h^s(t)\right) f(y) \tag{2.1.13}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(h-s)_1-$ birinci anlamda konveks fonksiyon veya $SX\left((h-s)_1, I\right)$ sınıfına aittir denir (Özdemir *et al*. 2011).

Tanım 2.1.17. (İkinci Anlamda $(h\text{-}s)_2$ −konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \neq 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall u, v \in [0,\infty) = I, s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olacak şekilde $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tanımlı negatif olmayan f fonksiyonu

$$f\left(tu+(1-t)v\right)\le h^{s}(t)\,f(u)+h^{s}(1-t)\,f(v) \tag{2.1.14}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(h-s)_2-$ birinci anlamda konveks fonksiyon veya $SX\left((h-s)_2, I\right)$ sınıfına aittir denir (Özdemir *et al.* 2011).

Tanım 2.1.18. (Starshaped Fonksiyon): $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx)\le tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.19. (Log$-$Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ 'de bir aralık $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le f(x)^{t}\,f(y)^{(1-t)} \tag{2.1.15}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log$-$ konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al*. 1992).

Tanım 2.1.20. (*m*-Log$-$Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\to(0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in[0,b], m\in(0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+m(1-t)y\right)\le f(x)^{t}\,f(y)^{m(1-t)} \tag{2.1.16}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m-$ Log$-$ konveks fonksiyon denir (Xı, *et al.* 2010).

Tanım 2.1.21. ($(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{m})-Log-$Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\to(0,\infty)$ bir fonksiyon olsun.

Her $x,y\in[0,b]$, $(\alpha,m)\in(0,1]\times(0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+m(1-t)y\right)\le f(x)^{t^{\alpha}}\,f(y)^{m\left(1-t^{\alpha}\right)} \tag{2.1.17}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $(\alpha,m)-$Log-konveks fonksiyon denir (Xı, *et al.* 2010)

Tanım 2.1.22. (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$için

$$f\left(x^t y^{1-t}\right) \le f\left(x\right)^t \; f\left(y\right)^{(1-t)} \qquad (2.1.18)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.23. (s −geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I,\; s \in (0,1]$ve $t \in [0,1]$için

$$f\left(x^t y^{1-t}\right) \le f\left(x\right)^{t^s} \; f\left(y\right)^{(1-t)^s} \qquad (2.1.19)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $s-$geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang, *et al.* 2012).

Tanım 2.1.24. (m −geometrik Konveks Fonksiyon): $f\left(x\right), [0,\, b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0, b],\; t \in [0,1],\; m \in (0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{m(1-t)}\right) \le f\left(x\right)^t \; f\left(y\right)^{m(1-t)} \qquad (2.1.20)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m-$ geometrik konveks fonksiyon denir.(Xı, *et al.* 2012)

Tanım 2.1.25. ((α, m) −geometrik Konveks Fonksiyon): $f\left(x\right),\; [0, b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0, b],\; t \in [0,1],\; m \in (0,1] \times (0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{m(1-t)}\right) \le f\left(x\right)^{t^\alpha} \; f\left(y\right)^{m\left(1-t^\alpha\right)} \qquad (2.1.21)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $(\alpha, m)-$ geometrik konveks fonksiyon denir (Xı, *et al.* 2012).

Tanım 2.1.26. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \le max\left\{ f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}$$

ise f 'ye $quasi-$ konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda) y\right)< max\left\{ f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}$$

ise f 'ye strictly $quasi-$ konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda) y\right)\geq max\left\{ f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}$$

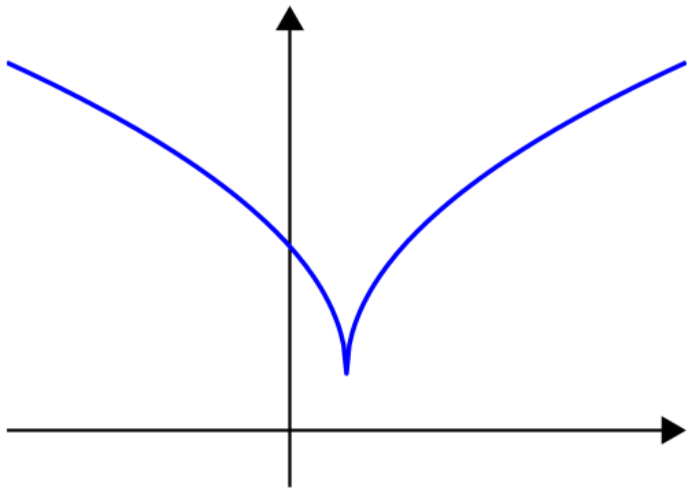
ise f 'ye $quasi-$ konkav fonksiyon ve

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda) y\right)> max\left\{ f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}$$

ise f 'ye strictly $quasi-$ konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

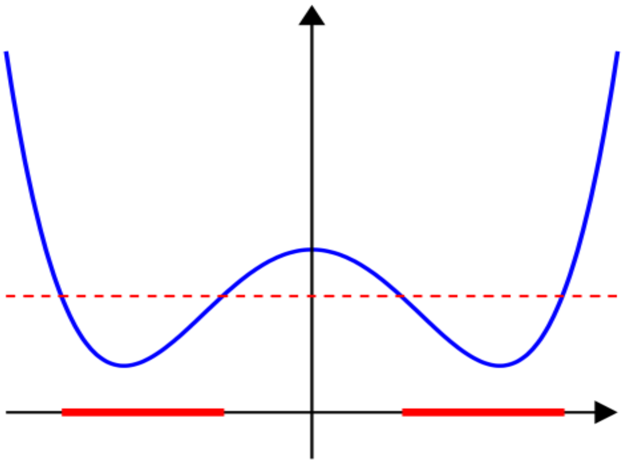
Tanım 2.1.27. f hem $quasi-$ konveks hem de $quasi-$ konkav ise f 'ye $quasi-$ monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Not: Herhangi bir konveks fonksiyon $quasi-$ konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir.



Şekil 2.5. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kırmızı ile gösterilen aralıklarda fonksiyon $quasi-$ konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon $quasi-$konveks değildir.



Şekil 2.6. Aralıkta $quasi-$konveks fonksiyon

Tanım 2.1.28. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ tanımlı ve $y>x,\delta>0$ şartları altında her bir $y+\delta, x\in I$ için

$$f(x+\delta)-f(x)\leq f(y+\delta)-f(y) \tag{2.1.22}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I\subseteq\mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.29. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $y>x,\ \delta>0$ şartları altında $\forall x,\ y,\ y+\delta\in I$ ve $\forall t\in[0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left((1-t)x+ty\right)\right]\leq max\left\{f(x),f(y)\right\}$$

veya

$$\frac{1}{2}\left[f(y)+f(x+\delta)\right]\leq max\left\{f(x),f(y+\delta)\right\} \tag{2.1.23}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I\subseteq\mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.30. ($J-$Quasi-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq max\left\{f(x),f(y)\right\} \tag{2.1.24}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J-quasi-$ konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Teorem 2.1.7. (Hölder Eşitsizliği): $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ve $b=(b_1,\ldots,b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$ lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olmak üzere

(a) $p>1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.1.25}$$

(b) $p<0$ veya $q<0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1.26}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.8. (İntegraller için Hölder eşitsizliği): $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1.27}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović et al. 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-Mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.4. (Power Mean eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1.28}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Reel ve kompleks sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.9. (Üçgen eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x+y| \leq |x|+|y|,$$

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1+\ldots+x_n| \leq |x_1|+\ldots+|x_n| \tag{2.1.29}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović et al. 1993).

Teorem 2.1.10. (Üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu): f , $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b) \tag{2.1.30}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović et al. 1993).

Tanım 2.1.31. (Beta Fonksiyonu):

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad x,y>0 \tag{2.1.31}$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tip Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Kannappan 2009).

Tanım 2.1.32. (Gamma Fonksiyonu):

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx, \qquad n>0 \tag{2.1.32}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Gamma fonksiyonudur.

2.2. İki Pozitif Reel Sayı İçin Bazı Ortalamalar

Bu bölümde a,b gibi pozitif iki reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen et al. 1988; Bullen 2003);

(1) Aritmetik ortalama:

$$A=A(a,b)=\frac{a+b}{2}, \tag{2.2.1}$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G=G(a,b)=\sqrt{ab}, \tag{2.2.2}$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H=H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}, \tag{2.2.3}$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$L=L(a,b)=\begin{cases} a, & a=b \\ \dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}, & a\neq b \end{cases} \tag{2.2.4}$$

(5) Identric ortalama:

$$I=I(a,b)=\begin{cases} a, & a=b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a\neq b \end{cases} \tag{2.2.5}$$

(6) $p-$ logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & a \neq b \end{cases} \tag{2.2.6}$$

(7) Kuadratik ortalama:

$$K = K(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \tag{2.2.7}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p 'nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde yer almaktadır:

$$H \le G \le L \le I \le A.$$

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{r}{r+1} \cdot \dfrac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & r \neq 0, -1, x \neq y \\ \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y}, & r = 0, x \neq y \\ xy \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y}, & r = -1, x \neq y \\ x & x = y \end{cases} \tag{2.2.8}$$

biçiminde tanımlanır.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Teorem 3.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al*. 1992).

İspat: Teorem 2.1.2'den dolayı f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani $x=(1-t)a+tb$, $0\le t\le 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx&=\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,dt\\&\le f(a)\int_0^1(1-t)\,dt+f(b)\int_0^1 t\,dt\\&=\frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

olur ve bu (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafın ispatını verelim.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right] \tag{3.2}$$

biçiminde yazıp (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimde $x=a+t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimde $x=b-t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx = -\frac{b-a}{2}\int_{1}^{0} f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{0}^{1} f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılabilir. (3.2)'de bu sonuçlar kullanılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq \int_{0}^{1} f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Azpeitia 1994).

Tanım 3.1. (Simpson Eşitsizliği): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty}=\sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right|<\infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\left|f(x)\right|dx\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty}(b-a)^{4} \quad (3.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson Eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir *et al.*2000a).

Teorem 3.2. $f:I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ I^{o} üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $0<a<b<\infty$ için $f'\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|^{q}$ $q\geq 1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q} G_{1}\left(s,q;g_{1}(\alpha),g_{2}(\alpha)\right) \quad (3.4)$$

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q} G_{1}\left(s,q;g_{2}(\alpha),g_{1}(\alpha)\right) \quad (3.5)$$

dır. Burada;

$$g_1(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \alpha=1,\\ \dfrac{\alpha\ln\alpha-\alpha+1}{[\ln\alpha]^2}, & \alpha\neq 1,\end{cases}\qquad g_1(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \alpha=1,\\ \dfrac{\alpha-\ln\alpha-1}{[\ln\alpha]^2}, & \alpha\neq 1,\end{cases} \tag{3.6}$$

$$\alpha=\left|\frac{f'(b)}{f'(a)}\right|^{sq/2} \tag{3.7}$$

ve

$G_1(s,q;g_1(\alpha),g_2(\alpha))$

$$=\begin{cases}|f'(a)|^s[g_1(\alpha)]^{1/q} & + \quad |f'(a)f(b)|^{s/2}[g_2(\alpha)]^{1/q}, \qquad |f'(a)|\leq 1,\\ |f'(a)|[g_1(\alpha)]^{1/q} & + \quad |f'(a)|^{1-s/2}|f'(b)|^{s/2}[g_2(\alpha)]^{1/q}, \quad |f'(b)|\leq 1\leq|f'(a)|,\\ |f'(a)||f'(b)|^{1-s}[g_1(\alpha)]^{1/q} & + \quad |f'(a)f'(b)|^{1-s/2}[g_2(\alpha)]^{1/q}, \qquad 1\leq|f'(b)|\end{cases}$$

(Zhang, *et al.* 2014)

Teorem 3.3. $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $0<a<b<\infty$ için $f'\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ $q>1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece;

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-1/q} G_2(s,q;g_3(\alpha)) \tag{3.8}$$

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-1/q} G_2(s,q;g_3(\alpha)) \tag{3.9}$$

dır. Burada α (3.7) ile aynıdır.

$$g_3(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha=1,\\ \dfrac{\alpha-1}{\ln\alpha}, & \alpha\neq 1,\end{cases}$$

ve

$$G_2\left(s,q;g_3(\alpha)\right)=\begin{cases}\left[\left|f'(a)\right|^3+\left|f'(a)f'(b)\right|^{s/2}\right]\left[g_3(\alpha)\right]^{1/q}, & \left|f'(a)\right|\le 1,\\ \left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(a)\right|^{1-s/2}\left|f'(b)\right|^{s/2}\right]\left[g_3(\alpha)\right]^{1/q}, & \left|f'(b)\right|\le 1\le\left|f'(a)\right|,\\ \left(\left|f'(a)\right|\left|f'(b)\right|^{1-s}+\left|f'(a)f'(b)\right|^{1-s/2}\right)\left[g_3(\alpha)\right]^{1/q} & 1\le\left|f'(b)\right|\end{cases}$$

(Zhang, *et al.* 2014).

Lemma 3.1. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I, a<b$ olsun. Eğer $f'\in L([a,b])$ ve $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ ise böylece

$$\frac{\lambda f(a)+\mu(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$=\frac{b-a}{4}\int\left[(1-\lambda-t)f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+(\mu-t)f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right]dt \tag{3.10}$$

eşitliği vardır (Xi and Qi 2012).

Lemma 3.2. $x>0$ ve $0\le y\le 1$, için

$$\int_0^1|y-t|^x\,dt=\frac{y^{x+1}+(1-y)^{x+1}}{x+1},$$
$$\int_0^1 t|y-t|^x\,dt=\frac{y^{x+2}+(x+1+y)(1-y)^{x+1}}{(x+1)(x+2)} \tag{3.11}$$

eşitlikleri vardır (Xi and Qi 2012).

Lemma 3.3. Eğer $0<\varphi\le 1\le\mu,\ 0<\alpha,\beta\le 1,$ ise

$$\varphi^{\alpha^\beta}\le\varphi^{\alpha\beta}\ ve\ \mu^{\alpha^\beta}\le\mu^{\beta a+1-\beta} \tag{3.12}$$

eşitsizlikleri vardır (Bai *et al.* 2013).

Lemma 3.4. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I^o üzerinde iki defa diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I, a<b$ ve $f''[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir olsun. Böylece

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \tag{3.13}$$

eşitliği vardır (Alomari *et al*. 2010; Dragomir and Pearce 2000).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. *s*-geometrik Konveks Fonksiyonlar İçin Genel Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a < b$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ $0 \le \lambda, \mu \le 1,$ ve $s \in (0,1]$ için $s-$ geometrik ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left| \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \tag{4.1.1}$$

$$\le \frac{b-a}{4} \times \begin{cases} \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_\lambda(s;\chi) + \left|f'(b)\right|^{s} E_\mu(s;\chi), \\ \qquad\qquad \left|f'(a)\right| \le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}} \left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_\lambda(s;\chi) + \left|f'(a)\right|^{1-s} \left|f'(b)\right|^{s} E_\mu(s;\chi), \\ \qquad\qquad \left|f'(b) \le 1 \le |f'|(a)\right|; \\ \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} M_\lambda(s;\chi) + \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} E_\mu(s;\chi), \\ \qquad\qquad 1 \le \left|f'(b)\right|; \end{cases}$$

dır. Burada

$$M_\lambda(s;\chi) = \frac{\left(-1+\lambda+\lambda\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right) In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) - 1 + 2\left[\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^{1-\lambda} - \chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)}{\left[In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^2}$$

$$E_\mu(s;\chi) = \frac{\left(-\mu-\mu\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)+\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right) In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) - 1 + 2\left[\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^{\mu} - \chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)}{\left[In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^2}$$

ve $\chi(u,v) = \left|f'(a)\right|^{u} \left|f'(b)\right|^{-v}, u, v > 0$ dır.

İspat. Lemma 3.1 ve $|f'(x)|$ $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t|\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt+\int_0^1|\mu-t|\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1|\mu-t|\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t|\left|f'\left(a^{\frac{1+t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|dt+\int_0^1|\mu-t|\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t||f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}dt\int_0^1|\mu-t||f'(a)|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}dt\right]$$

$|f'(a)|\leq 1$ iken ve (3.12) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.2}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t||f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}dt+\int_0^1|\mu-t||f'(a)|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t||f'(a)|^{\frac{s+st}{2}}|f'(b)|^{\frac{s-st}{2}}dt+\int_0^1|\mu-t||f'(a)|^{\frac{st}{2}}|f'(b)|^{\frac{2s-st}{2}}dt\right]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left[|f'(a)f'(b)|^{\frac{s}{2}}\int_0^1 |1-\lambda-t||f'(a)/f'(b)|^{\frac{st}{2}}dt+|f'(b)|^s\int_0^1|\mu-t||f'(a)/f'(b)|^{\frac{st}{2}}dt\right]$$

Bu iki integral hesaplanarak, (4.1.2) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$\int_0^1 |1-\lambda-t||f'(a)/f'(b)|^{\frac{st}{2}}dt$$

$$=\frac{\left(\left(-1+\lambda+\lambda\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right)In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)-1+2\left[\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^{1-\lambda}-\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right)}{\left[In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^2}$$

$$=M_\lambda(s;\chi)$$

$$\int_0^1 |\mu - t| \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{at}{2}} dt$$

$$= \frac{\left(\left(-\mu - \mu\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) + \chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) \right) In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) - 1 + 2\left[\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^{\mu} - \chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) \right)}{\left[In\chi\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)\right]^2}$$

$$= E_\mu(s;\chi)$$

$$\left| \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{s}{2}} M_\lambda(s;\ \chi) + \left| f'(b) \right|^{s} E_\mu(s;\ \chi) \right]$$

sonucu elde edilir.

$|f'(b)| \leq 1 \leq |f'(a)|,$ iken ve (3.12) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$\left| \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) \right|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt + \int_0^1 |\mu-t| \left| f'(a) \right|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} dt \right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) \right|^{\frac{s+st}{2}+1} \left| f'(b) \right|^{\frac{s-st}{2}} dt + \int_0^1 |\mu-t| \left| f'(a) \right|^{\frac{st}{2}+1-s} \left| f'(b) \right|^{\frac{2s-st}{2}} dt \right]$$

$$= \frac{b-a}{4}\left[\left| f'(a) \right|^{1-\frac{s}{2}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{2}} M_\lambda(s;\ \chi) + \left| f'(a) \right|^{1-s} \left| f'(b) \right|^{s} E_\mu(s;\ \chi) \right]$$

sonucu elde edilir.

$1 \leq |f'(b)|,$ iken ve (3.12) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$\left| \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) \right|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right.$$

$$+\int_0^1 |\mu-t|\left|f'(a)\right|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}\left|f'(b)\right|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}dt\Bigg]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\Bigg[\int_0^1 |1-\lambda-t|\left|f'(a)\right|^{\frac{s+st}{2}+1-s}\left|f'(b)\right|^{\frac{s-st}{2}+1-s}dt$$

$$+\int_0^1 |\mu-t|\left|f'(a)\right|^{\frac{st}{2}+1-s}\left|f'(b)\right|^{\frac{2s-st}{2}+1}dt\Bigg]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left[\left|f'(a)f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}}M_\lambda(s;\chi)+\left|f'(a)f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}}E_\mu(s;\chi)\right]$$

sonucu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.1.1 için $\lambda=\mu$ alınırsa, sıradaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1. $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b\in I,\ a<b$ için $f'\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ $0\leq\lambda\leq1,$ ve $s\in(0,1]$ için $[a,b]$ aralığı üzerinde $s-$ geometrik konveks ve monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{\lambda[f(a)+f(b)]}{2}+(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.3}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\times\begin{cases}\left|f'(a)f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}M(\lambda,s;\chi)+\left|f'(b)\right|^{s}E(\lambda,s;\chi), & \\ \qquad\qquad \left|f'(a)\right|\leq1; & \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}M(\lambda,s;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)^{s}\right|E(\lambda,s;\chi), & \\ \qquad\qquad \left|f'(b)\leq1\leq\left|f'\right|(a)\right|; & \\ \left|f'(a)f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}}M(\lambda,s;\chi)+\left|f'(a)f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}}E(\lambda,s;\chi), & \\ \qquad\qquad 1\leq\left|f'(b)\right|; & \end{cases}$$

elde edilir. Burada $\chi(u,v), M_\lambda(s;\ \chi),\ E_\lambda(s;\ \chi)$ Teorem 4.1.1'de tanımlanmıştır.

Eğer sırasıyla Teorem 4.1.1 için $\lambda=\mu=1/2,\ 2/3,\ 1/3$ değerleri alınırsa, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.2. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b \in I$ $a<b$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ $s \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığı üzerinde $s-$ geometrik konveks ve monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int f(x)dx\right| \tag{4.1.4}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\times\begin{cases} |f'(a)f'(b)|^{\frac{s}{2}} M_{1/2}(s;\ \chi)+|f'(b)|^{s} E_{1/2}(s;\ \chi), \\ \qquad |f'(a)|\leq 1; \\ |f'(a)|^{1-\frac{s}{2}}|f'(b)|^{\frac{s}{2}} M_{1/2}(s;\ \chi)+|f'(a)|^{1-s}|f'(b)|^{s} E_{1/2}(s;\ \chi), \\ \qquad |f'(b)\leq 1\leq |f'|(a)|; \\ |f'(a)f'(b)|^{1-\frac{s}{2}} M_{1/2}(s;\ \chi)+|f'(a)f'(b)|^{1-\frac{s}{2}} E_{1/2}(s;\ \chi), \\ \qquad 1\leq |f'(b)|; \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{3}\left[f(a)+f(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.5}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\times\begin{cases} |f'(a)f'(b)|^{\frac{s}{2}} M_{2/3}(s;\chi)+|f'(b)|^{s} E_{2/3}(s;\chi), \\ \qquad |f'(a)|\leq 1; \\ |f'(a)|^{1-\frac{s}{2}}|f'(b)|^{\frac{s}{2}} M_{2/3}(s;\chi)+|f'(a)|^{1-s}|f'(b)|^{s} E_{2/3}(s;\chi), \\ \qquad |f'(b)\leq 1\leq |f'|(a)|; \\ |f'(a)f'(b)|^{1-\frac{s}{2}} M_{2/3}(s;\chi)+|f'(a)f'(b)|^{1-\frac{s}{2}} E_{2/3}(s;\chi), \\ \qquad 1\leq |f'(b)|; \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int f(x)dx\right| \tag{4.1.6}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\times\begin{cases} \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{1/3}(s;\chi)+\left|f'(b)\right|^{s} E_{1/3}(s;\chi), \\ \qquad\qquad \left|f'(a)\right|\leq 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{1/3}(s;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|^{s} E_{1/3}(s;\chi), \\ \qquad\qquad \left|f'(b)\leq 1\leq \left|f'\right|(a)\right|; \\ \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} M_{1/3}(s;\chi)+\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} E_{1/3}(s;\chi), \\ \qquad\qquad 1\leq \left|f'(b)\right|; \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $\chi(u,v), M_{\lambda}(s;\ \chi),\ E_{\lambda}(s;\ \chi)$ Teorem 4.1.1'de tanımlanmıştır.

Teorem 4.1.2. $f: I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ I^{o} üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b\in I,\ a<b,\ \ 0\leq\lambda,\mu\leq 1$ ve f' $[a,\ b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^{q}$ $q\geq 1$ve $s\in(0,1]$ için $s-$geometrik konveks ve$[a,\ b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\times \tag{4.1.7}$$

$$\begin{cases} \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}\left(\frac{(1-\lambda)^2+\lambda^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} M_{\lambda}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s}\left(\frac{\mu^2+(1-\mu)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} E_{\mu}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad\qquad \left|f'(a)\right|\leq 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'b\right|^{\frac{s}{2}}\left(\frac{(1-\lambda)^2+\lambda^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} M_{\lambda}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|^{s}\left(\frac{\mu^2+(1-\mu)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} E_{\mu}^{1/q}(s,q;\chi) \\ \qquad\qquad \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|; \\ \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left(\frac{(1-\lambda)^2+\lambda^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} M_{\lambda}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-3}\left|f'(b)\right|\left(\frac{\mu^2+(1-\mu)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} E_{\mu}^{1/q}(s,q;\chi) \\ \qquad\qquad 1\leq\left|f'(b)\right|; \end{cases}$$

Burada

$$M_{\lambda}(s,q;\chi)=\frac{\left(-1+\lambda+\lambda\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right)In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)-1+2\left[\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^{1-\lambda}-\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}{\left[In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^{2}}$$

$$E_{\mu}(s,q;\chi)=\frac{\left(-\mu-\mu\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)+\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right)In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)-1+2\left[\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^{\mu}-\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}{\left[ln\ \chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^{2}}$$

ve $\chi(u,v)=\left|f'(a)\right|^{u}\left|f'(b)\right|^{-v}, u,v>0$ dır.

İspat. Lemma 3.1 ve $\left|f'(x)\right|^{q}$ s-geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı ve Power Mean eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\left(\int_0^1|1-\lambda-t|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|1-\lambda-t|\left(\left|f'\left(a^{\frac{1+t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1|\mu-t|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|\mu-t|\left(\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\left(\frac{(1-\lambda)^{2}+\lambda^{2}}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|1-\lambda-t|\left|f'(a)\right|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^{s}}\left|f'(b)\right|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^{s}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu^{2}+(1-\mu)^{2}}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|\mu-t|\left|f'(a)\right|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^{s}}\left|f'(b)\right|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^{s}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$\left|f'(a)\right|\leq 1$ iken (3.12)'den,

$$\int_0^1|1-\lambda-t|\left|f'(a)\right|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^{s}}\left|f'(b)\right|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^{s}}dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) \right|^{sq\left(\frac{1+t}{2}\right)} \left| f'(b) \right|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)} dt$$

$$= \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{sq}{2}} \int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{sq}{2}} \frac{\left(-1+\lambda+\lambda\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right) ln\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right) - 1 + 2\left[\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^{1-\lambda} - \chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}{\left[ln\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{aq}{2}} M_\lambda(s,q;\chi)$$

ve

$$\int_0^1 |\mu-t| \left| f'(a) \right|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} dt$$

$$\leq \int_0^1 |\mu-t| \left| f'(a) \right|^{sq\left(\frac{t}{2}\right)} \left| f'(b) \right|^{sq\left(\frac{2-t}{2}\right)} dt$$

$$= \left| f'(a) f'(b) \right|^{sq} \int_0^1 |\mu-t| \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left| f'(a) f'(b) \right|^{sq} \frac{\left(-\mu - y\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right) + \chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right) In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right) - 1 + 2\left[\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^{\mu} - \chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}{\left[In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \left| f'(a) f'(b) \right|^{sq} E_\mu(s,q;\chi).$$

sonucu elde edilir.

$\left| f'(b) \right| \leq 1 \leq \left| f'(a) \right|$ iken (3.12)'den,

$$\int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) \right|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)} \left| f'(b) \right|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)} dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) \right|^{q\left[s\left(\frac{1+t}{2}\right)+1-s\right]} \left| f'(b) \right|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)} dt$$

$$= \left| f'(a) \right|^{q\left(1-\frac{s}{2}\right)} \left| f'(b) \right|^{\frac{sq}{2}} \int_0^1 |1-\lambda-t| \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left| f'(a) \right|^{q\left(1-\frac{s}{2}\right)} \left| f'(b) \right|^{\frac{sq}{2}} M_\lambda(s,q;\chi)$$

ve

$$\int_0^1 |\mu - t| \, |f'(a)|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s} \, |f'(b)|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} \, dt$$

$$\leq \int_0^1 |\mu - t| \, |f'(a)|^{q\left[s\left(\frac{t}{2}\right)+1-s\right]} \, |f'(b)|^{sq\left(\frac{2-t}{2}\right)} \, dt$$

$$= |f'(a)|^{q(1-s)} \, |f'(b)|^{sq} \int_0^1 |\mu - t| \, |f'(a)/f'(b)|^{\frac{sqt}{2}} \, dt$$

$$= |f'(a)|^{q(1-s)} \, |f'(b)|^{sq} \, E_{\mu}(s,q;\chi)$$

sonucu elde edilir.

$1 \leq |f'(b)|$ iken, (3.12)'den,

$$\int_0^1 |1-\lambda - t| \, |f'(a)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} \, |f'(b)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} \, dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-\lambda - t| \, |f'(a)|^{q\left[s\left(\frac{1+t}{2}\right)+1-s\right]} \, |f'(b)|^{q\left[s\left(\frac{1-t}{2}\right)+1-s\right]} \, dt$$

$$= |f'(a)\, f'(b)|^{q\left(1-\frac{s}{2}\right)} \int_0^1 |1-\lambda - t| \, |f'(a)/f'(b)|^{\frac{sqt}{2}} \, dt$$

$$= |f'(a)\, f'(b)|^{q\left(1-\frac{s}{2}\right)} \, M_{\lambda}(s,q;\chi)$$

ve

$$\int_0^1 |\mu - t| \, |f'(a)|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s} \, |f'(b)|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} \, dt$$

$$\leq \int_0^1 |\mu - t| \, |f'(a)|^{q\left[\frac{st}{2}+1-s\right]} \, |f'(b)|^{q\left[s\left(\frac{2-t}{2}\right)+1-s\right]} \, dt$$

$$= |f'(a)|^{q(1-s)} \, |f'(b)|^{q} \int_0^1 |\mu - t| \, |f'(a)/f'(b)|^{\frac{sqt}{2}} \, dt$$

$$= |f'(a)|^{q(1-s)} \, |f'(b)|^{q} \, E_{\mu}(s,q;\chi)$$

sonucu elde edilerek Teorem 4.1.2’nin ispatı tamamlanmış olur.

Eğer Teorem 4.1.2 için $\lambda=\mu$ alınırsa, sıradaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3. $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ I^o üzerinde integrallenebilir ve $a,b\in I,\ a<b,\ f'\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$, $q\geq 1$ ve $s\in(0,1]$, $0\leq\lambda\leq 1$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.8}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{(1-\lambda)^2+\lambda^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\begin{cases} |f'(a)f'(b)|^{\frac{s}{2}}M_\lambda^{1/q}(s,q;\chi)+|f'(a)f'(b)|^{s}E_\lambda^{1/q}(s,q;\chi), \\ \hfill |f'(a)|\leq 1; \\ |f'(a)|^{1-\frac{s}{2}}|f'(b)|^{\frac{s}{2}}M_\lambda^{1/q}(s,q;\chi)+|f'(a)|^{1-s}|f'(b)|^{s}E_\lambda^{1/q}(s,q;\chi), \\ \hfill |f'(b)|\leq 1\leq|f'(a)|; \\ |f'(a)f'(b)|^{1-\frac{s}{2}}M_\lambda^{1/q}(s,q;\chi)+|f'(a)|^{1-s}|f'(b)|E_\lambda^{1/q}(s,q;\chi), \\ \hfill 1\leq|f'(b)|, \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\chi(u,v)$, $M_\lambda(s,q;x)$, $E_\mu(s,q;\chi)$ Teorem 4.1.2'de tanımlanmıştır.

Eğer sırasıyla Teorem 4.1.2 için $\lambda=\mu=1/2,\ 2/3,\ 1/3$ değerleri alınırsa, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.4. $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ I^o üzerinde integrallenebilir ve $a,b\in I,\ a<b,\ f'\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$, $q\geq 1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.9}$$

$$\le \frac{4^{1/q}(b-a)}{16}\times\begin{cases} \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{1/2}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s} E_{1/2}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad \left|f'(a)\right|\le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{1/2}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)^{s}\right| E_{1/2}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad \left|f'(b)\le 1\le \left|f'\right|(a)\right|; \\ \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} M_{1/2}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right| E_{1/2}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad 1\le \left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{3}\left[f(a)+f(b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.10}$$

$$\le \frac{5(b-a)}{72}\left(\frac{18}{5}\right)^{1/q}\times\begin{cases} \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{2/3}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s} E_{2/3}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad \left|f'(a)\right|\le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{2/3}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|^{s} E_{2/3}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad \left|f'(b)\le 1\le \left|f'\right|(a)\right|; \\ \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} M_{2/3}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right| E_{2/3}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad 1\le \left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.11}$$

$$\le \frac{5(b-a)}{72}\left(\frac{18}{5}\right)^{1/q}\times\begin{cases} \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{1/3}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s} E_{1/3}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad \left|f'(a)\right|\le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} M_{1/3}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)^{s}\right| E_{1/3}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad \left|f'(b)\le 1\le \left|f'\right|(a)\right|; \\ \left|f'(a)\,f'(b)\right|^{1-\frac{s}{2}} M_{1/3}^{1/q}(s,q;\chi)+\left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right| E_{1/3}^{1/q}(s,q;\chi), \\ \qquad 1\le \left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

sonuçlarına ulaşılır. Burada $\chi(u,v)$, $M_{\lambda}(s,q;x)$, $E_{\mu}(s,q;\chi)$ Teorem 4.1.2’de tanımlanmıştır.

Teorem 4.1.3. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a<b$ $0 \le \lambda, \mu \le 1$ ve $f'[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ $p,q \ge 1,$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $s \in (0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.12}$$

$$\le \frac{(b-a)}{4} T^{1/q}(u) \begin{cases} \left|f'(a) f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} F_\lambda^{1/p} + \left|f'(b)\right|^s F_\mu^{1/p} & \left|f'(a)\right| \le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}} \left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}} F_\lambda^{1/p} + \left|f'(a)\right|^{1-s} \left|f'(b)\right|^s F_\mu^{1/p} & \left|f'(b)\right| \le 1 \le \left|f'(a)\right|; \\ \left|f'(a) f'(b)\right|^{1-s/2} F_\lambda^{1/p} + \left|f'(a)\right|^{1-s} \left|f'(b)\right| F_\mu^{1/p} & 1 \le \left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

sonuçları elde edilir. Burada $T(u), F_\lambda, F_\mu$ aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$T(u) = \begin{cases} \frac{u-1}{In\, u}, & u \ne 1, \\ 1, & u = 1, \end{cases} \qquad u = \left|f'(a)/ f'(b)\right|^{\frac{sq}{2}}$$

$$F_\lambda = \frac{\lambda^{p+1}+(1-\lambda)^{p+1}}{p+1}, \quad F_\mu = \frac{\mu^{p+1}+(1-\mu)^{p+1}}{p+1}$$

İspat. Lemma 3.1 ve $|f'(x)|^q$ $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı ve Hölder eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \frac{b-a}{4}\left[\left(\int_0^1 |1-\lambda-t|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(a^{\frac{1+t}{2}} b^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 |\mu-t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\Bigg[\left(\int_0^1 |1-\lambda-t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(|f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 |\mu-t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(|f'(a)|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$0\leq\lambda,\mu\leq 1$ için Lemma 3.2 kullanılarak aşağıdaki integral eşitlikleri bulunur.

$$\int_0^1 |(1-\lambda-t)|^p\,dt=\frac{\lambda^{p+1}+(1-\lambda)^{p+1}}{p+1}=F_\lambda$$

$$\int_0^1 |(\mu-t)|^p\,dt=\frac{\mu^{p+1}+(1-\mu)^{p+1}}{p+1}=F_\mu$$

Buna bağlı olarak integral sonuçları (4.1.13)'de yerlerine yazılır.

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.13}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\Bigg[\left(\frac{\lambda^{p+1}+(1-\lambda)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(a)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{\mu^{p+1}+(1-\mu)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(a)|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$|f'(a)|\leq 1$, iken (3.12)'den

$$\int_0^1 |f'(a)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}dt \;\leq\; \int_0^1 |f'(a)|^{sq\left(\frac{1+t}{2}\right)}|f'(b)|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)}dt$$

$$= \left|f'(a)\, f'(b)\right|^{\frac{st}{2}} \int_0^1 \left|f'(a)/ f'(b)\right|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left|f'(a)\, f'(b)\right|^{\frac{sq}{2}} \frac{\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)-1}{In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)},$$

ve

$$\int_0^1 \left|f'(a)\right|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s} \left|f'(b)\right|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} dt \;\le\; \int_0^1 \left|f'(a)\right|^{\frac{sqt}{2}} \left|f'(b)\right|^{sq-\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left|f'(b)\right|^{sq} \int_0^1 \left|f'(a)/ f'(b)\right|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left|f'(b)\right|^{sq} \frac{\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)-1}{In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}.$$

sonucuna ulaşılır.

$\left|f'(b)\right| \le 1 \le \left|f'(a)\right|$ iken (3.12)'den

$$\int_0^1 \left|f'(a)\right|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} \left|f'(b)\right|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \;\le\; \int_0^1 \left|f'(a)\right|^{q\left[s((1+t)/2)+1-s\right]} \left|f'(b)\right|^{sq(1-t)/2} dt$$

$$= \left|f'(a)^{(1-s/2)q} \left|f'(b)\right|^{sq/2}\right| \int_0^1 \left|f'(a)/ f'(b)\right|^{sqt/2} dt$$

$$= \left|f'(a)\right|^{(1-s/2)q} \left|f'(b)\right|^{sq/2} \frac{\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)-1}{In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}.$$

ve

$$\int_0^1 \left|f'(a)\right|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s} \left|f'(b)\right|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} dt \;\le\; \int_0^1 \left|f'(a)\right|^{q\left[st/2+1-s\right]} \left|f'(b)\right|^{sq-sqt/2} dt$$

$$= \left|f'(a)\right|^{q(1-s)} \left|f'(b)\right|^{sq} \int_0^1 \left|f'(a)/ f'(b)\right|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= \left|f'(a)\right|^{q(1-s)} \left|f'(b)\right|^{sq} \frac{\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)-1}{In\chi\left(\frac{sq}{2},\frac{sq}{2}\right)}.$$

$1 \leq |f'(b)|$ iken (3.12) nedeniyle

$$\int_0^1 |f'(a)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(b)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \leq \int_0^1 |f'(a)|^{q[s((1+t)/2)+1-s]} |f'(b)|^{q[s(1-t)/2+1-s]} dt$$

$$= |f'(a) f'(b)|^{(1-s/2)q} \int_0^1 |f'(a)/ f'(b)|^{sqt/2} dt$$

$$= |f'(a) f'(b)|^{(1-s/2)q} \frac{\chi\left(\frac{sq}{2}, \frac{sq}{2}\right)-1}{In\chi\left(\frac{sq}{2}, \frac{sq}{2}\right)}.$$

ve

$$\int_0^1 |f'(a)|^{q\left(\frac{t}{2}\right)^s} |f'(b)|^{q\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} dt \leq \int_0^1 |f'(a)|^{q[st/2+1-s]} |f'(b)|^{q[1-st/2]} dt$$

$$= |f'(a)|^{q(1-s)} |f'(b)|^q \int_0^1 |f'(a)/ f'(b)|^{\frac{sqt}{2}} dt$$

$$= |f'(a)|^{q(1-s)} |f'(b)|^q \frac{\chi\left(\frac{sq}{2}, \frac{sq}{2}\right)-1}{In\chi\left(\frac{sq}{2}, \frac{sq}{2}\right)}$$

sonucuna ulaşılarak Teorem 4.1.3'ün ispatı tamamlanmış olur.

Eğer Teorem 4.1.3 için $\lambda = \mu$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ $p,q \geq 1$, ve $s \in (0,1]$, $0 \leq \lambda \leq 1$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left| \frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \tag{4.1.14}$$

$$\leq \frac{(b-a)}{4} F_\lambda^{1/p} T^{1/q}(u) \times$$

$$\begin{cases} \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{s}{2}} + \left| f'(b) \right| & \left| f'(a) \right| \le 1; \\ \left| f'(a) \right|^{1-\frac{s}{2}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{2}} + \left| f'(a) \right|^{1-s} \left| f'(b) \right|^{s} & \left| f'(b) \right| \le 1 \le \left| f'(a) \right|; \\ \left| f'(a) \right| + \left| f'(b) \right|^{1-s/2} + \left| f'(a) \right|^{1-s} \left| f'(b) \right| & 1 \le \left| f'(b) \right|, \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $u,\ T(u),\ F_\lambda$ eşitlikleri Teorem 4.1.3'te tanımlanmıştır.

Eğer sırasıyla Teorem 4.1.3 için $\lambda = \mu = 1/2,\ 2/3,\ 1/3$ değerleri alınırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.6. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b \in I,\ a < b$ ve $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $\left| f'(x) \right|$ $p,q \ge 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $s \in (0,1],\ 0 \le \lambda \le 1$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left| \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \tag{4.1.15}$$

$$\le \frac{(b-a)}{8(p+1)} T^{1/q}(u) \times$$

$$\begin{cases} \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{s}{2}} + \left| f'(b) \right|, & \left| f'(a) \right| \le 1; \\ \left| f'(a) \right|^{1-\frac{s}{2}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{2}} + \left| f'(a) \right|^{1-s} \left| f'(b) \right|^{s}, & \left| f'(b) \right| \le 1 \le \left| f'(a) \right|; \\ \left| f'(a) f'(b) \right|^{1-s/2} + \left| f'(a) \right|^{1-s} \left| f'(b) \right|, & 1 \le \left| f'(b) \right|, \end{cases}$$

$$\left| \frac{1}{3}\left[f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \tag{4.1.16}$$

$$\le \frac{(b-a)}{4} \left(\frac{2^{p+1}+1}{3^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} T^{1/q}(u) \times$$

$$\begin{cases} \left|f'(a)f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}+ & \left|f'(b)\right|, & \left|f'(a)\right|\le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}+ & \left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|^{s}, & \left|f'(b)\right|\le 1\le\left|f'(a)\right|; \\ \left|f'(a)f'(b)\right|^{1-s/2}+ & \left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|, & 1\le\left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.17}$$

$$\le \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{2^{p+1}+1}{3^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} T^{1/q}(u)\times$$

$$\begin{cases} \left|f'(a)f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}+ & \left|f'(b)\right|, & \left|f'(a)\right|\le 1; \\ \left|f'(a)\right|^{1-\frac{s}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2}}+ & \left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|^{s}, & \left|f'(b)\right|\le 1\le\left|f'(a)\right|; \\ \left|f'(a)f'(b)\right|^{1-s/2}+ & \left|f'(a)\right|^{1-s}\left|f'(b)\right|, & 1\le\left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

sonuçları elde edilir. Burada $u,\ T(u),\ F_\lambda$ eşitlikleri Teorem 4.1.3'te tanımlanmıştır.

Teorem 4.1.4. $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a<b$ $0\le\lambda,\mu\le 1$ ve $f'[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|,\ \omega,\beta>0,\ \omega+\beta=1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.18}$$

$$\le \frac{(b-a)}{4}\times$$

$$
\begin{cases}
F(\omega,\lambda)+F(\omega,\mu)+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad\qquad \left|f'(a)\right|\le 1 \\
F(\omega,\lambda)+F(\omega,\mu)+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad\qquad \left|f'(b)\right|\le 1\le\left|f'(a)\right|; \\
F(\omega,\lambda)+F(\omega,\mu)+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad\qquad 1\le\left|f'(b)\right|;
\end{cases}
$$

sonucu elde edilir. Burada $T(v;s,\beta)$, $F(\omega,\lambda)$, $F(\omega,\mu)$ aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$
T(v;s,\beta)=\begin{cases}\dfrac{v-1}{In\ v}, & v\neq 1, \\ 1, & v=1,\end{cases} \qquad v=\left|f'(a)/f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}
$$

$$
F(\omega,\lambda)=\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\lambda^{\frac{1}{\omega}+1}+(1-\lambda)^{\frac{1}{\omega}+1}\right),\ F(\omega,\mu)=\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\mu^{\frac{1}{\omega}+1}+(1-\mu)^{\frac{1}{\omega}+1}\right).
$$

İspat. Lemma 3.1 ve $\left|f'(x)\right|$ $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı ve Cauchy eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$
\left|\frac{\lambda f(a)+\mu(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|
$$

$$
\le\frac{b-a}{4}\left[\omega\int_0^1\left|1-\lambda-t\right|^{\frac{1}{\omega}}dt+\beta\int_0^1\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{1}{\beta}}dt\right.
$$

$$
\left.\omega\int_0^1\left|\mu-t\right|^{\frac{1}{\omega}}\ dt+\beta\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^{\frac{1}{\beta}}dt\right]
$$

$$
\le\frac{b-a}{4}\left[\omega\int_0^1\left|1-\lambda-t\right|^{\frac{1}{\omega}}dt+\beta\int_0^1\left|f'\left(a^{\frac{1+t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^{\frac{1}{\beta}}dt\right.
$$

$$\omega\int_0^1|\mu-t|^{\frac{1}{\omega}}dt+\beta\int_0^1\left|f'\left(a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{2-t}{2}}\right)\right|^{\frac{1}{\beta}}dt\Bigg]$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\Bigg[\omega\int_0^1|1-\lambda-t|^{\frac{1}{\omega}}dt+\beta\int_0^1\left(|f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt$$

$$+\omega\int_0^1|\mu-t|^{\frac{1}{\omega}}dt+\beta\int_0^1\left(|f'(a)|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt\Bigg].$$

Diğer yandan Lemma 3.2 kullanılarak aşağıdaki integral eşitlikleri bulunur.

$$\omega\int_0^1|1-\lambda-t|^{\frac{1}{\omega}}\,dt=\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\lambda^{\frac{1}{\omega}+1}+(1-\lambda)^{\frac{1}{\omega}+1}\right)=F(\omega,\lambda)$$

$$\omega\int_0^1|\mu-t|^{\frac{1}{\omega}}\,dt=\frac{\omega^2}{\omega+1}\left(\mu^{\frac{1}{\omega}+1}+(1-\mu)^{\frac{1}{\omega}+1}\right)=F(\omega,\mu)$$

Buna bağlı olarak integral sonuçları yerlerine yazılır.

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\Bigg[F(\omega,\mu)+\beta\int_0^1\left(|f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt$$

$$+F(\omega,\mu)+\beta\int_0^2\left(|f'(a)|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt\Bigg].$$

$|f'(a)|\leq 1$ iken, (3.12)'den

$$\beta\int_0^1\left(|f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}|f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt\quad\leq\quad\beta\int_0^1|f'(a)|^{\frac{s+st}{2\beta}}|f'(b)|^{\frac{s-st}{2\beta}}dt$$

$$= \beta \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{s}{2\beta}} \int_0^1 \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(a) f'(b) \right|^{\frac{s}{2\beta}} T(v; s, \beta),$$

ve

$$\beta \int_0^1 \left(\left| f'(a) \right|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} \right)^{\frac{1}{\beta}} dt \leq \beta \int_0^1 \left| f'(a) \right|^{\frac{st}{2\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{2s-st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{\beta}} \int_0^1 \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{\beta}} T(v; s, \beta).$$

sonucuna ulaşılır.

$\left| f'(b) \right| \leq 1 \leq \left| f'(a) \right|$ iken, (3.12)'den

$$\beta \int_0^1 \left(\left| f'(a) \right|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} \right)^{\frac{1}{\beta}} dt \leq \beta \int_0^1 \left| f'(a) \right|^{\frac{st+2-s}{2\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s-st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(a) \right|^{\frac{2-s}{2\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{2\beta}} \int_0^1 \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(a) \right|^{\frac{2-s}{2\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{2\beta}} T(v; s, \beta),$$

ve

$$\beta \int_0^1 \left(\left| f'(a) \right|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s} \left| f'(b) \right|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s} \right)^{\frac{1}{\beta}} dt \leq \beta \int_0^1 \left| f'(a) \right|^{\frac{st+2-2s}{2\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{2s-st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(a) \right|^{\frac{1-s}{\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{\beta}} \int_0^1 \left| f'(a) / f'(b) \right|^{\frac{st}{2\beta}} dt$$

$$= \beta \left| f'(a) \right|^{\frac{1-s}{\beta}} \left| f'(b) \right|^{\frac{s}{\beta}} T(v; s, \beta).$$

sonucuna ulaşılır.

$1 \leq \left| f'(b) \right|$ iken, (3.12) kullanılarak

$$\beta\int_0^1\left(\left|f'(a)\right|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s}\left|f'(b)\right|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt \leq \beta\int_0^1\left|f'(a)\right|^{\frac{st+2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s-st}{2\beta}}dt$$

$$= \beta\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\int_0^1\left|f'(a)/f'(b)\right|^{\frac{st}{2\beta}}dt$$

$$= \beta\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}T(v;s,\beta),$$

ve

$$\beta\int_0^1\left(\left|f'(a)\right|^{\left(\frac{t}{2}\right)^s}\left|f'(b)\right|^{\left(\frac{2-t}{2}\right)^s}\right)^{\frac{1}{\beta}}dt \leq \beta\int_0^1\left|f'(a)\right|^{\frac{st+2-2s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-st}{2\beta}}dt$$

$$= \beta\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{\beta}}\int_0^1\left|f'(a)/f'(b)\right|^{\frac{st}{2\beta}}dt$$

$$= \beta\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{\beta}}T(v;s,\beta).$$

sonucu elde edilir ve Teorem 4.1.4'ün ispatı tamamlanır.

Eğer Teorem 4.1.4 için $\lambda=\mu$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.7. $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a<b$ $0\leq\lambda\leq 1$ ve $f'[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^q$, $\omega, \beta>0$, $\omega+\beta=1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\frac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.19}$$

$$
\leq \frac{b-a}{4}\begin{cases}
2F(\omega,\lambda)+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad \left|f'(a)\right|\leq 1; \\
2F(\omega,\lambda)+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|; \\
2F(\omega,\lambda)+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{\beta}}\right], \\
\qquad 1\leq\left|f'(b)\right|,
\end{cases}
$$

sonuca ulaşılır. Burada $T(v;s,\beta)$, $F(\omega,\lambda)$ eşitlikleri Teorem 4.1.4'te tanımlanmıştır.

Eğer sırasıyla Teorem 4.1.4 için $\lambda=\mu=1/2,\ 2/3,\ 1/3$ değerleri alınırsa, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

.**Sonuç 4.8.** $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a<b$ $0\leq\lambda,$ $\mu\leq 1$ ve $f'[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|,^q$ $\omega,\beta>0,$ $\omega+\beta=1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$
\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.20}
$$

$$
\leq \frac{b-a}{4}\begin{cases}
\frac{\omega^2}{2^{1/\omega-1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad \left|f'(a)\right|\leq 1; \\
\frac{\omega^2}{2^{1/\omega-1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], \\
\qquad \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|; \\
\frac{\omega^2}{2^{1/\omega-1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{\beta}}\right], \\
\qquad 1\leq\left|f'(b)\right|,
\end{cases}
$$

$$\left|\frac{1}{3}\left[f(a)+f(b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.21}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\begin{cases} \dfrac{2\omega^2\left(2^{\frac{1}{\omega}+1}+1\right)}{3^{1/\omega+1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], & \left|f'(a)\right|\leq 1; \\ \dfrac{2\omega^2\left(2^{\frac{1}{\omega}+1}+1\right)}{3^{1/\omega+1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], & \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|; \\ \dfrac{2\omega^2\left(2^{\frac{1}{\omega}+1}+1\right)}{3^{1/\omega+1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-a}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{\beta}}\right], & 1\leq\left|f'(b)\right|; \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{4.1.22}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\begin{cases} \dfrac{2\omega^2\left(2^{\frac{1}{\omega}+1}+1\right)}{3^{1/\omega+1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], & \left|f'(a)\right|\leq 1; \\ \dfrac{2\omega^2\left(2^{\frac{1}{\omega}+1}+1\right)}{3^{1/\omega+1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{s}{\beta}}\right], & \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|; \\ \dfrac{2\omega^2\left(2^{\frac{1}{\omega}+1}+1\right)}{3^{1/\omega+1}(\omega+1)}+\beta T(v;s,\beta)\left[\left|f'(a)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{2-s}{2\beta}}+\left|f'(a)\right|^{\frac{1-s}{\beta}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{\beta}}\right], & 1\leq\left|f'(b)\right|; \end{cases}$$

sonuçları elde edilir. Burada T (v;s,β) eşitlikleri Teorem 4.1.4'te tanımlanmıştır.

Eğer sırasıyla Teorem 4.1.4 için $\lambda=\mu=1/2,\ 2/3,\ 1/3$ ve $\omega,\ \beta=\dfrac{1}{2}$ değerleri alınırsa, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.9. $f: I\subset \mathbb{R}_{+}\to \mathbb{R}_{+}$ I^{o} üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b\in I$ $a<b$ ve $f'[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^{q}$, $s\in(0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.23}$$

$$\leq\frac{b-a}{8}\begin{cases}\frac{1}{6}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s}+\left|f'(b)\right|^{2s}\right], & \left|f'(a)\right|\leq 1;\\ \frac{1}{6}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\right|^{2-s}\left|f'(b)\right|^{s}+\left|f'(a)\right|^{2-2s}\left|f'(b)\right|^{2s}\right], & \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|;\\ \frac{1}{6}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{2-s}+\left|f'(a)\right|^{2-2s}\left|f'(b)\right|^{2}\right], & 1\leq\left|f'(b)\right|,\end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{3}\left[f(a)+f(b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.24}$$

$$\leq\frac{b-a}{8}\begin{cases}\frac{2}{9}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s}+\left|f'(b)\right|^{2s}\right], & \left|f'(a)\right|\leq 1;\\ \frac{2}{9}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\right|^{2-s}\left|f'(b)\right|^{s}+\left|f'(a)\right|^{2-2s}\left|f'(b)\right|^{2s}\right], & \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|;\\ \frac{2}{9}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{2-s}+\left|f'(a)\right|^{2-2s}\left|f'(b)\right|^{2}\right], & 1\leq\left|f'(b)\right|,\end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.25}$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\begin{cases} \frac{2}{9}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{s}+\left|f'(b)\right|^{2s}\right], & \left|f'(a)\right|\leq 1; \\ \frac{2}{9}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\right|^{2-s}\left|f'(b)\right|^{s}+\left|f'(a)\right|^{2-2s}\left|f'(b)\right|^{2s}\right], & \left|f'(b)\right|\leq 1\leq\left|f'(a)\right|; \\ \frac{2}{9}+T\left(v;s,\frac{1}{2}\right)\left[\left|f'(a)\,f'(b)\right|^{2-s}+\left|f'(a)\right|^{2-2s}\left|f'(b)\right|^{2}\right], & 1\leq\left|f'(b)\right|, \end{cases}$$

sonuçlarına ulaşılır. $T(v;s,\beta)$ Teorem 4.1.4 ile aynıdır.

Teorem 4.1.5. $f:I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ I^{o} üzerinde iki defa diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b\in I$, $a<b$ ve f'' $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $|f''|$ $s\in(0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right|\leq\frac{(b-a)^{2}}{12}\left|f''(b)\right|^{s}\left[\frac{\alpha(s,s)+1}{\left[\ln\left(\alpha(s,s)\right)\right]^{2}}+\frac{2-2\alpha(s,s)}{\left[\ln\left(a(s,s)\right)\right]^{3}}\right] \tag{4.1.26}$$

dır.

$$a(u,v)=\left|f''(a)\right|^{u}\left|f''(b)\right|^{-v},\ \ u,v\geq 0 \tag{4.1.27}$$

İspat. Lemma 3.4 ve $|f''|$ $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right| &\leq\int_{0}^{1}t(1-t)\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt \\ &\leq\int_{0}^{1}t(1-t)\left|f''\left(a^{t}b^{(1-t)}\right)\right|dt \\ &\leq\frac{(b-a)^{2}}{2}\int_{0}^{1}t(1-t)\left(\left|f''(a)\right|^{t^{o}}\left|f''(b)\right|^{(1-t)^{o}}\right)dt\end{aligned}$$

Eğer $0<\mu\leq 1,\ 0<\alpha,\ s\leq 1$ *ise*

$$\mu^{\alpha^s} \leq \mu^{\alpha s} \tag{4.1.28}$$

dır.

$\left|f''(a)\right|\leq 1$ iken, (4.1.28)'den

$$\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left(\left|f''(a)\right|^{t^s}\left|f''(b)\right|^{(1-t)^s}\right)dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left(\left|f''(a)\right|^{st}\left|f''(b)\right|^{s(1-t)}\right)dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{12}\left|f''(b)\right|^s\left[\frac{\left(\frac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s+1}{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^2}+\frac{2\left(1-\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)}{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^3}\right]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}\left|f''(b)\right|^s\left[\frac{\alpha(s,\ s)+1}{\left[\ln\left(\alpha(s,\ s)\right)\right]^2}+\frac{2-2\alpha\ (s,\ s)}{\left[\ln\left(\alpha(s,\ s)\right)\right]^3}\right]$$

sonucuna ulaşılır. İspat tamamlanmış olur.

Önerme 4.1. $0\ <a<b,\ 0\ <s\leq 1$ olmak üzere;

$$\left|A\left(a^s,\ b^s\right)-L_s\left(a,\ b\right)^s\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{12}s\left|(s-1)b^{s-2}\right|^s\left[\frac{\left|\frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}}\right|^s+1}{\left[\ln\left|\frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}}\right|^s\right]^2}+\frac{2\left(1-\left|\frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}}\right|^s\right)}{\left[\ln\left|\frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}}\right|^s\right]^3}\right]$$

dır.

İspat. Teorem 4.1.5'de $x\in(0,1]$ için $f(x)=\dfrac{x^s}{s},\ s-$ geometrik konveks fonksiyonu seçilmesiyle elde edilir.

Teorem 4.1.6. $f: I\subset\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I° üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,\ b\in I,\ a<b$ için $f''\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f''|^q$ $p,q>1$ ve $s\in(0,\ 1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.29}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{\frac{1}{p}}|f''(b)|^s\left(\Psi(sq,\ sq)\right)^{\frac{1}{q}}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\Psi(\alpha)$ ve $\alpha(u,v)$ eşitlikleri aşağıda verilmiştir;

$$\Psi(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha=1\\ \dfrac{\alpha-1}{\ln\alpha} & \alpha\neq 1\end{cases}$$

$$\alpha(u,\ v)=|f''(a)|^u\,|f''(b)|^{-v},\ u,\ v\geq 0$$

İspat. Lemma 3.4 ve $|f''|^q$ $s-$ geometrik konveks ve $[a,\ b]$aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı ve Hölder eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.30}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 |t(1-t)|\,|f''(ta+(1-t)b)|\ dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 |t(1-t)|\,|f''(a^t b^{1-t})|\ dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\,|f''(\alpha)|^{t^s}\,|f''(b)|^{(1-t)^s}\ dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1 [t(1-t)]^P\ dt\right)^{\frac{1}{P}}\left(\int_0^1\left[|f''(a)|^{t^o}\,|f''(b)|^{(1-t)^o}\right]^q\ dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$|f''(a)|\leq 1$ iken, (4.1.28)'den

$$\int_0^1 |f''(a)|^{qt^s} |f''(b)|^{q(1-t)^s} dt \le \int_0^1 |f''(a)|^{sqt} |f''(b)|^{sq(1-t)} dt \tag{4.1.31}$$

$$= |f''(b)|^{sq} \int_0^1 \left(|f''(a)| |f''(b)|^{-1} \right)^{sqt} dt$$

$$= |f''(b)|^{sq} \Psi(sq,\ sq),$$

(4.1.30)-(4.1.31), (4.1.32) elde edilir.

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \tag{4.1.32}$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{2} \left(\int_0^1 [t(1-t)]^P dt \right)^{\frac{1}{P}} \left(\int_0^1 \left[|f''(a)|^{t^s} |f''(b)|^{(1-t)^s} \right]^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{2^{-1-2p} \sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} \right)^{\frac{1}{P}} \left(|f''(b)|^{sq} \Psi(sq,\ sq) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{P}} \left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|f''(b)|^{sq} \Psi(sq,\ sq) \right)^{\frac{1}{q}},$$

Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

β(x, y) ve Γ(x) integralleri hesaplamada kullanılacaktır.

$$\int_0^1 [t(1-t)]^P dt = \int_0^1 t^P (1-t)^P dt = \beta(p+1,\ p+1)$$

Beta fonksiyonun yöntemlerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.
$\beta(x,\ x) = 2^{1-2x} \beta\left(\frac{1}{2},\ x\right)$ *ve* $\beta(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,

$$\beta(p+1, p+1) = 2^{1-2(p+1)} \beta\left(\frac{1}{2}, p+1\right) = 2^{-1-2p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)},$$

Burada $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, eşitliği vardır ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.10. $f: I \subset (0,\infty) \to (0,\infty)$ I^{o} üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b \in I,\ a<b$ için $f'' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f''|^{q}$ $p,q>1$ ve $s\in(0,1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise

i) $p = q = 2$ iken

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{30}}\left|f'(b)\right|^{s}\left(\Psi(2s,\ 2s)\right)^{\frac{1}{2}}$$

sonucuna ulaşılır ve burada $\Gamma(3)=2,\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$ eşitlikleri vardır.

ii) (4.1.29) eşitsizliğinde $s=1$ geometrik konveks için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''(b)\right|\left(\Psi(q,\ q)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Önerme 4.2. $0<a<b,\ \ 0<s\le 1$ ve $q\ge 1$ olmak üzere;

$$\left|A\left(a^{s},\ b^{s}\right)-L_s(a,\ b)^{s}\right|$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)s\left(\left((s-1)b^{s-2}\right)^{sq}\Psi(sq,\ sq)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada, $\alpha=\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|=\left|\frac{(s-1)a^{s-2}}{(s-1)b^{s-2}}\right|=\left(\frac{a}{b}\right)^{s-2}$ olup; eğer $a=b$ ise $\alpha=1$ ve $\Psi(\alpha)=1$ ve

eğer $a\ne b$ ise $a\ne 1$ ve $\Psi(\alpha)=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{(s-2)s}{\eta}}}{\frac{(s-2)s}{\eta}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$.

İspat. Teorem 4.1.6'da $x\in(0,1]$ için $f(x)=\dfrac{x^{s}}{s}$, $s-$geometrik konveks fonksiyonu seçilmesiyle elde edilir.

Teorem 4.1.7. $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ I^o üzerinde iki defa diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a,b \in I$, $a<b$ için $f'' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f''|^q$ $q \geq 1$ ve $s \in (0,1]$ için $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.33}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}|f''(b)|^s\left[\frac{\alpha(sq,\ sq)+1}{\left[\ln(\alpha(sq,sq))\right]^2}+\frac{2-2\alpha(sq,\ sq)}{\left[\ln(\alpha(sq,\ sq))\right]^3}\right]^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada $\alpha(u,\ v)$, (4.1.27) ile aynıdır.

İspat. Lemma 3.4 ve $|f''|^q$ $s-$geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı ve Power Mean eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1 t(1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t(1-t)\left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1 t(1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1 t(1-t)\left(|f''(a)|^{t^s}|f''(b)|^{(1-t)^s}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t(1-t)|f''(a)|^{qt^s}|f''(b)|^{q(1-t)^s}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$|f''(a) \leq 1|$ iken, (4.1.28)'den

$$\int_0^1 t(1-t)|f''(a)|^{qt^s}|f''(b)|^{q(1-t)^s}dt$$

$$\leq \int_0^1 t(1-t)|f''(a)|^{sqt}|f''(b)|^{sq(1-t)}dt$$

$$\leq \left| f''(b) \right|^{sq} \int_0^1 t(1-t) \left| f''(a) \right|^{sqt} \left| f''(b) \right|^{-sqt} dt$$

$$= \left| f''(b) \right|^{sq} \int_0^1 t(1-t) \left| \frac{f''(a)}{f''(b)} \right|^{sqt} dt$$

$$= \left| f''(b) \right|^{sq} \left[\frac{\left| \frac{f''(a)}{f''(b)} \right|^{sq} + 1}{\left(\ln \left| \frac{f''(a)}{f''(b)} \right|^{sq} \right)^2} + \frac{2\left(1 - \left| \frac{f''(a)}{f''(b)} \right|^{sq} \right)}{\left(\ln \left| \frac{f''(a)}{f''(b)} \right|^{sq} \right)^3} \right]$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.3. $0 < a < b,\ 0 < s \leq 1,$ ve $q \geq 1$ olmak üzere;

$$\left| A\left(a^s,\ b^s\right) - L_s\left(a,\ b\right)^s \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} s \left| (s-1) b^{s-2} \right|^s \left[\frac{\left| \frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}} \right|^{sq} + 1}{\left[\ln \left| \frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}} \right|^{sq} \right]^2} + \frac{2\left(1 - \left| \frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}} \right|^{sq} \right)}{\left[\ln \left| \frac{a^{(s-2)}}{b^{(s-2)}} \right|^{sq} \right]^3} \right]$$

dır.

İspat. Teorem 4.1.7'de $x \in (0,1]$ için $f(x) = \dfrac{x^s}{s},\ \ s-$geometrik konveks fonksiyonu seçilmesiyle elde edilir

Teorem 4.1.8. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ I üzerinde iki defa diferensiyellenebilen bir dönüşüm, $a, b \in I,\ \ a < b$ için $f'' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f''|^q$ $\mu, \eta > 0,\ \ \mu + \eta = 1$ ve $s \in (0, 1]$ için $s-$ geometrik konveks ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan ise böylece

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\left(\mu\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}{4^{\frac{1}{\mu}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\mu}\right)}+\eta\left|f''(b)\right|^{\frac{s}{\eta}}\Psi\left(\frac{s}{\eta},\frac{s}{\eta}\right)\right)$$

(4.1.34)

elde edilir ve $\alpha(u,\ v)$, (4.1.27) ile aynıdır.

$$\Psi(\alpha)=\begin{cases}1 & \alpha=1\\ \frac{\eta(\alpha-1)}{s\ \ln\ \alpha} & \alpha\neq 1\end{cases}$$

İspat. Lemma 3.4 ve $\left|f''\right|^q$ $s-$ geometrik konveks, $t\in[0,1]$ ve $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalan olduğundan dolayı aşağıdaki sonuçlara varılır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt \qquad (4.1.35)$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(a)\right|^{t^s}\left|f''(b)\right|^{(1-t)^s}dt$$

(4.1.35) eşitsizliğinin sağ tarafına $mn\leq\mu m^{\frac{1}{\mu}}+\eta m^{\frac{1}{n}}$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left[\mu\int_0^1\left(t(1-t)\right)^{\frac{1}{\mu}}\ dt+\eta\int_0^1\left(\left|f''(a)\right|^{t^s}\left|f''(b)^{(1-t)^s}\right|\right)^{\frac{1}{\eta}}dt\right]$$

sonucu elde edilir.

$\left|f''(a)\right|\leq 1$, iken, (4.1.28)'den,

$$\int_0^1 \left|f''(a)\right|^{\frac{t^s}{\eta}} \left|f''(b)\right|^{\frac{(1-t)^s}{\eta}} dt \leq \int_0^1 \left|f''(a)\right|^{\frac{st}{\eta}} \left|f''(b)\right|^{\frac{s(1-t)}{\eta}} dt$$

$$= \left|f''(b)\right|^{\frac{s}{\eta}} \int_0^1 \left(\left|f''(a)\right| \left|f''(b)\right|^{-1} \right)^{\frac{st}{\eta}} dt$$

$$= \left|f''(b)\right|^{\frac{s}{\eta}} \Psi\left(\frac{s}{\eta}, \frac{s}{\eta} \right),$$

ve sonra

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\mu \int_0^1 \left(t(1-t) \right)^{\frac{1}{\mu}} dt + \eta \int_0^1 \left(\left|f''(a)\right|^{t^s} \left|f''(b)\right|^{(1-t)^s} \right)^{\frac{1}{\eta}} dt \right]$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\mu \frac{2^{-1-\frac{2}{\mu}} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\mu}\right)} + \eta \left|f''(b)\right|^{\frac{s}{\eta}} \Psi\left(\frac{s}{\eta}, \frac{s}{n} \right) \right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \left(\mu \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}{4^{\frac{1}{\mu}} \Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\mu}\right)} + \eta \left|f''(b)\right|^{\frac{s}{\eta}} \Psi\left(\frac{s}{\eta}, \frac{s}{\eta} \right) \right).$$

elde edilir. Beta ve Gamma Fonksiyonlarını integral hesaplamada kullanılır.

$$\int_0^1 \left[t(1-t) \right]^{\frac{1}{\mu}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{\mu}} (1-t)^{\frac{1}{\mu}} dt = \beta\left(\frac{1}{\mu}+1, \frac{1}{\mu}+1 \right)$$

Beta fonksiyonunun $\beta(x,\ x) = 2^{1-2x} \beta\left(\frac{1}{2},\ x\right)$ ve $\beta(x,\ y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, yöntemleri kullanılarak

$$\beta\left(\frac{1}{\mu}+1, \frac{1}{\mu}+1 \right) = 2^{1-2\left(\frac{1}{\mu}+1\right)} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu}+1 \right) = 2^{-1-\frac{2}{\mu}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\mu}\right)},$$

eşitliği hesaplanır. Burada $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, olup ispat tamamlanır.

Önerme 4.4. $0 < a < b,\ 0 < s \leq 1$ ve $q \geq 1$ olmak üzere;

$$\left|A\left(a^{s},\ b^{s}\right) - L_{s}\left(a,\ b\right)^{s}\right|$$

$$\leq \frac{s\left(b-a\right)^{2}}{4}\left(\mu\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}{4^{\frac{1}{\mu}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\mu}\right)} + \eta\left(\left(1-s\right)b^{s-2}\right)^{\frac{s}{\eta}}\Psi\left(\frac{s}{\eta},\frac{s}{\eta}\right)\right)$$

Burada, $\alpha = \left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right| = \left|\frac{(s-1)a^{s-2}}{(s-1)b^{s-2}}\right| = \left(\frac{a}{b}\right)^{s-2}$ olup; eğer $a = b$ ise $\alpha = 1$ ve $\Psi(\alpha) = 1$ ve

eğer $a \neq b$ ise $a \neq 1$ ve $\Psi(\alpha) = \dfrac{\eta\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{s-2} - 1\right)}{(s-2)s\ \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$.

İspat. Teorem 4.1.8'de $x \in (0,1]$ için $f(x) = \dfrac{x^{s}}{s},\ s-$ geometrik konveks fonksiyonu seçilmesiyle elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Zhang, *et al.'*in 2012 yılında tanımlamış oldukları *s*-geometrik konveks fonksiyon kavramından faydalanılarak bu fonksiyon türleri için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler yazılmıştır. Daha sonra bazı lemmalar kullanılarak Hermite-Hadamard ve Simpson tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar yoluyla pozitif sayılar için özel ortalamalara ait yeni önermeler verilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, ikinci bölümde verilen tanımlar ve dördüncü bölümde verilen lemmalardan faydalanarak Hermite-Hadamard tipli ve Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Ayrıca bu çalışmada *s*-geometrik konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan Hermite-Hadamard tipli ve Simpson tipli birçok yeni eşitsizlik genelleştirilerek yazılabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc.,934 pp, Toronto, Ontario.

Akdemir, A. O., 2012. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Alomari, M., 2011. Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For $s-$ Convex, Quasi-Convex And $r-$ Convex Mappings And Applications. Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology, Universiti Kebangsaan, Malsysia, Bangi.

Alomari, M., 2011. Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For Convex, Quasi-Convex And Convex Mappings And Applications. Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology, Universiti Kebangsaan, Malsysia, Bangi.

Alomari, M., Darus, M., 2010. U.S. Kırmacı, Renements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means, Comp. and Math. with Appl., Vol.59, 225-232.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. S., 2009. New inequalities of Simpsons type for s-convex functions with applications, RGMIA Res. Rep. Coll. 12 (4) Article 9. Online http://ajmaa.org/RGMIA/v12n4.php.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. S., 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex, Tamkang J. Math., Vol.41 No.4, 353-359.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bai, R.-F., Qi, F., Xi, B.-Y., 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for the $m-$ and $(\alpha,\mathrm{m})-$ logarithmically convex functions, Filomat, 27, 1-7.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.

Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., 1988. Means and Their Inequalities.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Tpye Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html(15.03.2012).

Dragomir, S.S., Agarwal R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl Math Lett, Vol. 11 No:5, 91.95.

Dragomir, S.S., Agarwal R.P., Cerone, P.,2000. On Simpson.s inequality and applications, J. of Ineq. and Appl., 5 , 533-579.

Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.

Hadamard, J., 1893. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d.une function considerée par Riemann, J. Math Pures Appl., 58, 171.215..

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

Hudzik H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math., Vol. 48, 100.111. Some Inequalıtıes For $s-$ Geometrıcally Convex Functıon 19.

Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on $s-$convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.

Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.

Mitrinovi´c, D.S., Peµcari´c J., Fink, A. M., 1993. Classical and new inequalities in analysis, KluwerAcademic, Dordrecht.

Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 400, Berlin. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and

Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc. numerical integration. Boston: Kluwer Academic, 404 pp, Melbourne-Athens.

Pachpatte, B.G., 2004a. A note on integral inequalities involving two log-convex functions. Mathematical Inequalities & Applications, 7(4), 511-515.

Pachpatte, B.G., 2005b. Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.

Peμcari´c, J. E., Proschan F., Tong. Y. L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press Inc.

Pearce, C.E.M. and Pečarić, J. and imić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.

Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with applications to special means and quadrature formulæ. Applied Mathematics Letters, 13, 51-55.

Sarikaya, M.Z. , Set, E., Özdemir, M.E., 2010. On new inequalities of Simpson.s type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll. 13 (2) Article2.

Sarikaya, M.Z. , Set, E., Özdemir, M.E., 2010. On new inequalities of Simpson.s type for s-convex functions, Computers and Mathematics with Applications, 60 2191.2199.

Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity. Proceedings of The Colloquium On Approximation and Optimization, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329-338.

Tunç, M., 2010. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Tunç, M., 2012. On some new inequalities for convex fonctions, Turk. J. Math. 36, 245-251.

Xi, B.-Y., and Qi, F., 2012. Some Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions with Applications to Means, Journal of Function Spaces and Appl., Volume, Article ID 980438, 14 p., doi:10.1155/2012/980438.

Xi, B.-Y., Bai, R.-F., Qi, F. , 2011. Hermite-Hadamard type inequalities for the $m-$ and $(\alpha,\mathrm{m})-$geometrically convex functions. Aequationes Math., doi: 10.1007/s00010-011-0114-x.

Yıldız, Ç., 2011. Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Zhang, T.-Y., Ji, A.-P., Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions. Abstract and Applied Analysis. doi:10.1155/2012/560586.

Zhang, T.-Y., Tunç, M., Ji, A.-P., Xi, B.-Y., Corrections to the paper .On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-geometrically convex function., Abstract and Applied Analysis, in press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ebru YÜKSEL

Doğum Yeri: Akçadağ

Doğum Tarihi: 16.04.1984

E posta: yüksel.ebru90@hotmail.com

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu: Yıldız Teknik Üniversitesi, 2004-2010, İstanbul

Lisans: Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik