T.C.
KİLİS 7 ARALIK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHİC SAYILAR VE ONLARIN ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

YUSUF ŞUBAŞ

YRD. DOÇ. DR. İRFAN DELİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2015
KİLİS

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEUTROSOPHİC SAYILAR VE ONLARIN ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

Yusuf ŞUBAŞ

Kilis 7 Aralık Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. İrfan DELİ

Yıl: 2015 Sayfa: 106

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık sayılar ve sezgisel bulanık sayıların genellemesi olan tek değerli neutrosophic sayı kavramını tanımladık. İkinci olarak tek değerli neutrosophic sayı kavramının birer özel hali olan tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarını bazı işlemleri ile birlikte sunduk ve istenilen bazı özelliklerini inceledik. Üçüncü olarak tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı için skor ve kesinlik fonksiyonları tanımladık ve bu sayılar üzerine bazı aritmetik ve geometrik operatörler inşa ettik. Ayrıca bu inşa edilen operatörlerin özel durumları ve istenilen özellikleri detaylı olarak incelendi. Dördüncü olarak tek değerli neutrosophic sayı kavramı için kesim küme kavramı verildi ve tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarına ayrı ayrı uygulandı. Daha sonra tek değerli neutrosophic sayılarda doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu için değer ve belirsizlik kavramları ileri sürüldü ve istenilen özellikleri incelendi. Son olarak tek değerli neutrosophic sayılar üzerine inşa edilen operatörleri ve ileri sürülen değer ve belirsizlik kavramlarını kullanarak çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metotları geliştirdik. Ayrıca tek değerli neutrosophic sayılar ile ifade edilen kriterlere bağlı alternatiflerin nasıl sıralanacağını göstermek için bazı nümerik örnekler verdik.

Anahtar Kelimeler: Neutrosophic küme, tek değerli neutrosophic küme, tek değerli neutrosophic sayı, yamuksal neutrosophic sayı, tek değerli üçgensel neutrosophic sayı, aritmetik ve geometrik operatör, çok kriterli karar verme.

ABSTRACT

MSc. Thesis

NEUTROSOPHIC NUMBERS AND THEIR APPLICATION TO MULTI-ATTRIBUTE DECISION MAKING PROBLEMS

Yusuf ŞUBAŞ

Kilis 7 Aralık University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assistant Prof. Dr. İrfan DELİ

Year: 2015 Page: 106

In this study, we firstly presented single valued neutrosophic numbers which is a generalization of fuzzy numbers and intuitionistic fuzzy numbers. We second introduced two special forms of single valued neutrosophic numbers is called single valued trapezoidal neutrosophic numbers and single valued triangular neutrosophic numbers and proposed some operations and properties on the single valued neutrosophic numbers. We third gave score function, accuracy function and some aritmetic and geometric operators on single valued neutrosophic number. Also, some desirable properties and special cases of these operators are discussed in detail. We fourth proposed the concepts of cut sets of single valued neutrosophic numbers and then applied to single valued trapezoidal neutrosophic numbers and single valued triangular neutrosophic numbers. Then, we proposed the values and ambiguities of the truth-membership function, indeterminacy-membership function and falsity-membership function for a single valued neutrosophic numbers and studied some desired properties. We finally developed some decision making methods by using the operators and concept of values and ambiguities with single valued neutrosophic numbers for multi-attribute decision making problems. Also we gave some numerical examples to demonstrate how to apply the proposed methods in which the ratings of alternatives on attributes are expressed with single valued neutrosophic numbers.

Keywords: Neutrosophic set, single valued neutrosophic set, single valued neutrosophic numbers, trapezoidal neutrosophic numbers, triangular neutrosophic numbers, aritmetic and geometric operators, multiple-criteria decision making.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, yanımda olup yol gösteren, bilgi, görüş ve önerilerini esirgemeyen, gösterdiği sabır ve anlayıştan dolayı çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. İrfan DELİ'ye teşekkür ederim.

Bu çalışmanın bütün aşamalarında desteğini esirgemeyen eşim Rahime ŞUBAŞ'a, kızım Fatma Yüsra ŞUBAŞ'a ve oğlum Ahmet Selim ŞUBAŞ'a teşekkür ederim.

Yusuf ŞUBAŞ
Kilis, Haziran 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

1. Simgeler

f_w^K	: Sezgisel bulanık kümesinin ağırlaştırılmış aritmetik operatörü
f_w^O	: Sezgisel bulanık kümesinin sıralı aritmetik operatörü
$f_{w,\omega}^H$	: Sezgisel bulanık kümesinin sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatörü
$s(\tilde{k})$	: Sezgisel bulanık sayılar için skor fonksiyonu
$H(\tilde{k})$	: Sezgisel bulanık sayılar için kesinlik fonksiyonu
$S_Y(\tilde{k})$	: Neutrosophic sayılar için skor fonksiyonu
$A_Y(\tilde{k})$	: Neutrosophic sayılar için kesinlik fonksiyonu
TDYN_{ao}	: TDYN ağırlaştırılmış aritmetik operatör
TDYN_{oao}	: TDYN ağırlaştırılmış sıralı aritmetik operatör
TDYN_{hao}	: TDYN ağırlaştırılmış hibrit ağırlıklı aritmetik operatör
TDÜN_{ao}	: TDÜN ağırlaştırılmış aritmetik operatör
TDÜN_{oao}	: TDÜN ağırlaştırılmış sıralı aritmetik operatör
TDÜN_{hao}	: TDÜN ağırlaştırılmış hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

2. Kısaltmalar

IFG	: Sezgisel bulanık kümesinin geometrik operatörü
IFWG	: Sezgisel bulanık kümesinin ağırlaştırılmış geometrik operatörü
IFOG	: Sezgisel bulanık kümesinin sıralı geometrik operatörü
IFHG	: Sezgisel bulanık kümesinin sıralı hibrit ağırlıklı geometrik operatörü
TDN-sayı	: Tek değerli neutrosophic sayı
TDÜN-sayı	: Tek değerli üçgensel neutrosophic sayı
TDYN-sayı	: Tek değerli yamuksal neutrosophic sayı
ÜSB-sayı	: Üçgensel sezgisel bulanık sayı
YSB-sayı	: Yamuksal sezgisel bulanık sayı

1. GİRİŞ

Günlük yaşantımızda belirsizlik içeren problemlerle başa çıkmak için ortaya atılan birçok teori zamanla önemini yitirerek yerini farklı farklı teorilere bırakmıştır. Bu teorilerin bazıları aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisidir. Bu teoriler arasında en güncel ve en geniş uygulama alanına sahip olan Zadeh [96] tarafından geliştirilen bulanık küme teorisidir. Bu bulanık küme teorisi bir X evrensel kümesinin elemanlarını [0,1] aralığına götüren bir üyelik fonksiyonu yardımı ile inşaa edilmiştir. Bu teoriye üyelik fonksiyonunun yanında X evrensel kümesinin elemanlarını [0,1] aralığına götüren bir üyelik olmama üyelik fonksiyonu ilave edilerek bulanık kümelerin daha geneli olarak 1986 da Atanassov [3] tarafından sezgisel bulanık küme teorisi inşa edildi. Sezgisel bulanık küme teorisinde üyelik fonksiyonu ve üyelik olmama fonksiyonunun X evrensel kümesinin her elemanı için aldığı değerler toplamı her zaman [0,1] aralığına kalmaktadır. Üyelik fonksiyonu ve üyelik olmama fonksiyonunun bu kısıtlaması belirsizlik içeren problemler için modelleme sıkıntısı oluşturmaktadır. Bu durumun üstesinden gelmek için 1998 de Smarandache [62], bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorisini içeren neutrosophic küme teorisi adı verilen yeni bir küme teorisi sundu. Daha sonra neutrosophic kümelerin özel hali olan tek değerli neutrosophic kümeler Wang ve ark. [72] tarafından 2010 da geliştirildi. Bu küme teorisi birbirinden bağımsız [0,1] aralığına tanımlı üç fonksiyon yardımıyla inşa edilmiştir. Yani; üyelik fonksiyonu yerine doğruluk fonksiyonu $T_A \in [0,1]$, üyelik olmama fonksiyonu yerine yanlışlık fonksiyonu $F_A \in [0,1]$ ve ilave olarak kararsızlık üyelik fonksiyonu $I_A \in [0,1]$ kullanılarak inşa edilmiştir. Buradaki doğruluk üyelik fonksiyonu ve yanlışlık üyelik fonksiyonunun [0,1] aralığında birbirinden bağımsız olması sezgisel bulanık kümeler kullanılarak yapılan modellemelerden daha esnek ve daha gerçekçi olmasını sağlamaktadır. Ayrıca bir konu hakkında bir birey her zaman tam olarak bilgi sahibi olmayabilir bu durumda kararsızlık üyelik fonksiyonu $I_A \in [0,1]$ devreye girmektedir ve birçok belirsizlik içeren olayın modellenmesi için oldukça geniş bir yer oluşturmaktadır. Örneğin bir karar vericiden x ile belirtilen bir durum hakkında bir fikir almak istediğimizde veya bu durumu matematiksel olarak modellemesini istediğimizde bu karar verici doğru olma durumunu 0.5 olarak ve yanlış olma durumunu 0.6 olarak belirleyebilir. Böyle durumlarda bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler eksik kalmaktadır. Ayrıca bu karar verici böyle bir durum hakkında 0.3 oranında bilgisi olduğunu ve 0.7 oranında bilgisinin olmadığını (kararsız olduğunu) düşünürse olay oldukça karışmaktadır. Böyle bir durumu ilgili karar verici ancak neutrosophic kümeler yardımıyla $\langle x, 05{,}0.7, 0{,}6\rangle$ şeklinde bir modelleme yapabilir.

Çok kriterli karar verme problemleri bir önemli karar bilimidir. Bu problemlerde karar verici veya vericiler çok kriter ile belirli alternatifler arasından bir seçim yapmaktadır. Güncel uygulamalarda karar vericiler bu problemlerin çözümünü belirsizlikten veya eksik bilgiden dolayı tam olarak belirleyemez. Bunun bir sonucu olarak bu problem türleri kesin sayılarla ifade edilemezler. Bunun için daha esnek ve belirsizliği ifade edecek olan; bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler, bulanık sayılar, sezgisel bulanık kümeler, sezgisel bulanık sayılar, neutrosophic kümeler ve neutrosophic sayılar gibi teorilere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler üzerine bulanık sayılar ve sezgisel bulanık sayılar inşa edilmiş ve birçok teorik ve uygulamalı çalışmalar çeşitli araştırmacılar tarafindan artan bir şekilde yapılmaktadır. Fakat neutrosophic kümeler üzerine böyle çalışmalar henüz yok denecek kadar az olduğundan bu tez çalışmasındada bu konuyu ayrıntılı bir şekilde ele alacağız. Bunu yapmak için, ilk olarak bulanık sayılar ve sezgisel bulanık sayıların genellemesi olan tek değerli neutrosophic sayı kavramını tanımlayacağız. İkinci olarak tek değerli neutrosophic sayı kavramının birer özel hali olan tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarını bazı işlemleri ile birlikte sunacağız ve istenilen bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Üçüncü olarak tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı için skor ve kesinlik fonksiyonları tanımlayacağız ve bu sayılar üzerine bazı aritmetik ve geometrik operatörler inşa edeceğiz. Ayrıca bu inşa edilen operatörlerin özel durumları ve istenilen özelliklerini detaylı olarak inceleyeceğiz. Dördüncü olarak tek değerli neutrosophic sayı kavramı için kesim kümeleri kavramı vereceğiz. Ayrıca bu kesim kümelerini tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarına ayrı ayrı uygulayacağız. Daha sonra tek değerli neutrosophic sayılarda doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu için değer ve belirsizlik kavramlarını ileri süreceğiz ve istenilen özelliklerini inceleyeceğiz. Son olarak tek değerli neutrosophic sayılar üzerine inşa edilen operatörleri ve ileri sürülen değer ve belirsizlik kavramlarını kullanarak çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metotları geliştireceğiz. Ayrıca tek değerli neutrosophic sayılar ile ifade edilen kriterlere bağlı alternatiflerin nasıl sıralanacağını göstermek için bazı nümerik örnekler vereceğiz.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bulanık kümeler özellikle de bulanık sayılar karar verme problemlerinde, hastalık teşhisinde, ekonomide, oyun teorisinde, yönetimde ve askeri alanlar başta olmak üzere farklı alanlara uygulandı. Son zamanlarda değişik yazarlar tarafından bulanık kümeler üzerine [18, 19, 23, 25, 26, 59, 60] sezgisel bulanık kümeler üzerine [4, 34, 50,67, 68, 74, 77, 102] ve neutrosophic kümeler üzerine [1, 2, 9, 22, 30, 31, 52, 53, 54, 58, 61, 63, 69, 84, 85, 86, 91, 101, 103] gibi çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca bu kümeler üzerine daha ayrıntılı olarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; neutrosophic benzerlik üzerine [12, 13, 30, 85, 86, 92] çok kriterli karar verme problemleri üzerine [88, 89] üzerine yapılan çalışmalardan bazılarıdır.

Sıralama operatörleri karar verme problemlerinde sezgisel bulanık kümelerde ve özellikle de neutrosophic kümelerde önemli bir alan olduğu için birçok yazar tarafından ayrıntılı bir şekilde çalışıldı. Örneğin; sezgisel bulanık kümeler üzerine [53, 64, 65, 78, 104], aritmetik ve geometrik operatörleri üzerine [32, 33, 56, 66, 41, 37, 42, 66], sezgisel bulanık sayılar üzerine [6, 16, 20, 24, 27, 28, 32, 33, 40, 41, 43, 49, 57, 70, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 87, 94, 98], neutrosophic kümeler üzerine, [9, 14, 44, 52] ve neutrosophic sayılar üzerine [8, 89] yapılan çalışmaların bazılarıdır. Özellikle de Xu ve Yager [66] sezgisel bulanık sayılar üzerine geliştirilen operatörlerin yer aldığı önemli makalelerin başında gelir.

Yue [95] sezgisel bulanık sayılar üzerine çok kriterli grup karar verme modeli geliştirdi. Ye [93] aralık değerli sezgisel bulanık sayıları kullanarak TOPSİS diye adlandırılan ideal çözüm ve benzerlik kullanılarak alternatifler arasında bir sıralama yapılabilen bir metot geliştirdi. Chen ve ark. [15] aralık değerli sezgisel bulanık kümelerde çok kriterli karar verme problemlerin üstesinden gelebilmek için bir metot geliştirdi. Ban [6] sezgisel bulanık sayılar için değer ve belirsizlik gibi bazı kavramları ayrıntılı bir şekilde araştırdı. Zhang ve Liu [99] ve Xu [65] verilen iki sezgisel bulanık değeri karşılaştırmak için skor ve kesinlik fonksiyonu tanımladıktan sonra bu değerleri kullanarak ağırlaştırılmış aritmetik ve geometrik operatör tanımladılar.

Li [41], Nehi [50], Wei [79], Das ve Guha[24], Jianqiang ve Zhong [36], yamuksal sezgisel bulanık sayıları işlemleri ile birlikte tanımladılar. Palanivelrajan ve Kaliraju [51] sezgisel bulanık sayıların cebirsel özelliklerini araştırdı ve yamuksal sezgisel bulanık sayılar üzerine grup tanımı verdi. Wu ve Cao [81] sezgisel bulanık sayılar üzerine değişik operatör inşa etti ve Yu [94]'da yamuksal sezgisel bulanık sayılar üzerine bir genelleştirilmiş operatör inşa etti ve bazı sıralama metotları geliştirdi. Gani ve ark. [29] bilinmeyen ağırlıklar ile her bir alternatifin yamuksal sezgisel bulanık sayılar ile ifade edildiği bir grup karar verme metodu inşa etti.

Li [39] ve Mahapatra ve Roy [47], Mahapatra ve Roy [48], Liang [43] üçgensel sezgisel bulanık sayıları tanımladı ve bu sayıları sıralamak için bir metot geliştirdi. Mahapatra ve Roy [48] sezgisel bulanık kümeler üzerine genişleme prensibi ile bazı işlemler verdi ve bu işlemleri güncel bir uygulama ile örneklendirdi. Wang ve ark. [70] üçgensel sezgisel bulanık sayıların mantıksal operatörlerini ve yeni aritmetik işlemlerini verdi. Farhadinia ve Ban [28] genelleştirilmiş sezgisel bulanık sayıların üzerine bir benzerlik ölçümü geliştirdi. Li [41], Liang [43] sezgisel bulanık sayılar özelliklede üçgensel sezgisel bulanık sayılar üzerine uygulamalarını ve istenilen bazı özelliklerini vermek şartıyla bazı operatörler inşa ettiler.

Esmailzadeh ve Esmailzadeh [27] sezgisel bulanık kümeler ve özelliklede üçgensel sezgisel bulanık sayılar arasındaki mesafeyi hesaplamak için kesim kümelerini kullanarak mesafe ölçümleri inşa etti. Das ve Guha [24] üçgensel sezgisel bulanık sayıları sıralamak için bu sayıların merkez noktalarını belirleyerek bir yeni metot oluşturdu ve var olan metotlar ile karşılaştırdı. Chen ve Li [16] tüm kriterlerin üçgensel sezgisel bulanık sayılarla ifade edildiği dinamik çok kriterli karar verme modeli oluşturdu. Wan [76] ve Wan ve ark. [77] üçgensel sezgisel bulanık sayılar üzerine kuvvet operatörü inşa ettiler ve çok kriterli karar verme problemlerine uyguladılar. Son zamanlarda bazı çok kriterli karar verme modeller [16, 57, 71, 81, 82, 87, 90] gibi yazarlar tarafından ayrıntılı bir şekilde çalışıldı. Sonuç olarak; üçgensel sezgisel bulanık sayılar ve üçgensel sezgisel bulanık sayılar ilave olarak pek çok yazar tarafından çalışıldı. Örneğin işlemler üzerine [70], operatörler üzerine [45, 76] ve uygulama üzerine [16, 36, 29, 99, 104] yapılan çalışmaların sadece birkaçıdır.

Liu ve ark. [44] ve Liu ve ark. [46] neutrosophic kümeler üzerine Hamacher işlemlerini kullanarak Hamacher operatörleri ile bilinen bazı operatörler sundu. Broumi ve Smarandache [9] neutrosophic dil değerlerini kullanarak hem aritmetik hem de geometrik operatörler inşa etti. Ye [92] vektör benzerlik ölçümünü kullanarak neutrosophic kümeler üzerine bir sıralama metodu geliştirdi. Peng ve ark. [52] neutrosophic kümelerin genel hali olan çok değerli neutrosophic kümeleri tanımladı ve Einstain operatörünü kullanarak karar verme problemlerinde bir uygulama verdi. Ye [90] basitleştirilmiş neutrosophic kümeleri ve ilgili işlem yasalarını ve bu işlem yasaları ile aritmetik ve geometrik operatörler sundu. Ayrıca aynı yazar ideal alternatif ile alternatifler arasında kosine benzerlik ölçümünü ileri sürerek bir metot geliştirdi.

Liu ve ark. [46] beklenen değer ve bulanık değişkenler gibi yeni kavramlar Choquet integralini kullanarak geliştirdi. Li [39] üçgensel sezgisel bulanık sayıları sıralamak için aritmetik işlemlerin yanında kesim kümelerini tanımlayarak bir metot geliştirdi. Daha sonra üyelik fonksiyonu için, üyelik olmama fonksiyonu için sezgisel bulanık sayıların belirsizlik değerini ve kesinlik değeri kavramlarını inşa etti ve yeni metotlar geliştirerek uygulamalar verdi. Ye [90] yamuksal bulanık sayılar için beklenen değeri sundu ve bu değeri kullanarak bir uygulama verdi. Kumar ve Kaur [38], Nehi [50] var olan sezgisel bulanık sayıların sıralamalarını karşılaştırarak yeni sıralama metotları buldular. Zhang [102] benzerlik ölçümünü kullanarak, Zeng ve ark. [97], De ve Das [21] kesim kümelerini kullanarak yeni metotlar verdi. Daha sonra onlar belirsizlik değerini ve kesinlik değeri kavramlarını üçgensel sezgisel sayılar için düzenleyerek yeni metotlar inşa ettiler.

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda bize yol gösteren bulanık küme, bulanık sayı, sezgisel bulanık küme, sezgisel bulanık sayı, neutrosophic küme ve neutrosophic sayılar ile ilgili bazı tanım ve işlemleri özellikleri ile verdik.

3.1. Bulanık Kümeler

Tanım 3.1 [96] E evrensel küme olsun. $\forall x \in E,\ 0 \leq \mu_K(x) \leq 1$ olmak üzere, $\mu_K(x): E \to [0,1]$ fonksiyonu ile bir bulanık küme

$$K = \{\langle \mu_K(x)/x \rangle : x \in E\}$$

kümesi ile verilir. Burada $\mu_K(x), x \in E$ nin üyelik derecesidir.

3.1.1 Bulanık sayılar

Tanım 3.2 [73] a, b, c, d birer reel sayı, $a < b < c < d$ ve $\mu_{\tilde{a}}: R \to [0, w_{\tilde{a}}]$ üyelik fonksiyonu olsun. Daha sonra, R üzerinde tanımlı bulanık küme olan bulanık sayı (B-sayı)

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_{\mu l}(x) & a \leq x < b \\ w_{\tilde{a}} & b \leq x < c \\ f_{\mu r}(x) & c \leq x < d \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile

$$\tilde{a} = (a, b, c, d; w_{\tilde{a}})$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\mu_{\tilde{a}}$

1. $\mu_{\tilde{a}}: R \to [0,1]$ sürekli bir fonksiyon,
2. Her $x \notin [a, d]$ için $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$,
3. $\mu_{\tilde{a}}$, $[a, b]$ aralığında artan,
4. Her $x \in [b, c]$ için $w_{\tilde{a}}$ sabittir yani $\mu_{\tilde{a}}(x) = w_{\tilde{a}}$,
5. $\mu_{\tilde{a}}$, $[c, d]$ aralığında azalandır.

şartları ile de ifade edilebilir. Burada $f_{\mu l}(x): [a, b] \to [0, w_{\tilde{a}}]$ sürekli ve artan, $f_{\mu r}(x): [c, d] \to [0, w_{\tilde{a}}]$ sürekli ve azalan bir fonksiyondur. Yamuksal bulanık sayılar genellikle $\tilde{a} = \langle (a, b, c, d; w_{\tilde{a}}) \rangle$ veya $\tilde{a} = \langle (a, b, c, d) \rangle$ ile gösterilir. Eğer burada $b = c$ ise, $\tilde{a} = \langle (a, b, d; w_{\tilde{a}}) \rangle$ ya üçgensel bulanık sayı denir.

3.2. Sezgisel bulanık kümeler

Tanım 3.3 [3] E evrensel küme olsun. $\forall x \in E,\ 0 \le \mu_K(x) + \nu_K(x) \le 1$ olmak üzere, $\mu_K(x): E \to [0,1]$ ve $\nu_K(x): E \to [0,1]$ fonksiyonları ile bir sezgisel bulanık küme

$$K = \{\langle x, \mu_K(x), \nu_K(x)\rangle : x \in E\}$$

kümesi ile verilir. Burada $\mu_K(x)$ ve $\nu_K(x)$ sırasıyla $x \in E$ nin üyelik ve üyelik olmama derecesidir.

Tanım 3.4 [41] $\mathrm{K} = \{\langle x, \mu_K(x), \nu_K(x)\rangle : x \in E\}$, $K_1 = \{\langle x, \mu_{K_1}(x), \nu_{K_1}(x)\rangle : x \in E\}$ ve $K_2 = \{\langle x, \mu_{K_2}(x), \nu_{K_2}(x)\rangle : x \in E\}$ E üzerinde sezgisel bulanık kümeler ve $\lambda > 0$ olsun. Daha sonra bu sezgisel bulanık kümeler üzerine işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır;

1. K_2 nin K_1 yı kapsaması $K_1 \subseteq K_2$ ile gösterilir ve
$$\forall x \in X \text{ için } K_1 \subseteq K_2 \text{ ise, } \mu_{K_1}(x) \le \mu_{K_2}(x) \text{ ve } \nu_{K_1}(x) \ge \nu_{K_2}(x)$$
şeklinde tanımlanır.

2. K_1 ile K_2 nin eşitliği $K_1 = K_2$ ile gösterilir ve
$$\forall x \in X \text{ için } K_1 = K_2 \text{ ise, } \mu_{K_1}(x) = \mu_{K_2}(x) \text{ ve } \nu_{K_1}(x) = \nu_{K_2}(x)$$
şeklinde tanımlanır.

3. K nın tümleyeni K^c ile gösterilir ve
$$K^c = \{\langle x, \nu_K(x), \mu_K(x)\rangle : x \in X\}$$
şeklinde tanımlanır.

4. K_1 ile K_2 nin kesişimi $K_1 \cap K_2$ ile gösterilir ve
$$K_1 \cap K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1}(x) \wedge \mu_{K_2}(x), \nu_{K_1}(x) \vee \nu_{K_2}(x)\rangle : x \in X\}$$
şeklinde tanımlanır.

5. K_1 ile K_2 nin birleşimi $K_1 \cup K_2$ ile gösterilir ve
$$K_1 \cup K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1}(x) \vee \mu_{K_2}(x), \nu_{K_1}(x) \wedge \nu_{K_2}(x)\rangle : x \in X\}$$
şeklinde tanımlanır.

6. K_1 ile K_2 nin toplaması $K_1 + K_2$ ile gösterilir ve
$$K_1 + K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1}(x) + \mu_{K_2}(x) - \mu_{K_1}(x)\mu_{K_2}(x), \nu_{K_1}(x)\nu_{K_2}(x)\rangle : x \in X\}$$
şeklinde tanımlanır.

7. K_1 ile K_2 nin çarpımı K_1K_2 ile gösterilir ve
$$K_1K_2 = \{\langle x, \mu_{K_1}(x)\mu_{K_2}(x), \nu_{K_1}(x) + \nu_{K_2}(x) - \nu_{K_1}(x)\nu_{K_2}(x)\rangle : x \in X\}$$
şeklinde tanımlanır.

8. K ile λ gibi bir skalerle çarpımı λK ile gösterilir ve
$$\lambda K = \left\{\langle x, 1-\left(1-\mu_K(x)\right)^{\lambda}, \left(\nu_K(x)\right)^{\lambda}\rangle : x \in X\right\}$$
şeklinde tanımlanır.

9. K nın λ kuvveti K^{λ} ile gösterilir ve
$$K^{\lambda} = \left\{\langle x, \left(\mu_K(x)\right)^{\lambda}, 1-\left(1-\nu_K(x)\right)^{\lambda}\rangle : x \in X\right\}$$
şeklinde tanımlanır.

Bundan sonra R üzerinde tanımlı tüm sezgisel bulanık sayıları F^n ile göstereceğiz.

3.1.2 Sezgisel bulanık sayılar

Tanım 3.5 [41] $i = 1,2,3$ için $a_i \leq b_i \leq c_i$ olacak şekilde $a_i, b_i, c_i \in [0,1]$ ve $\mu_{\tilde{K}}: R \to [0, w_{\tilde{K}}]$ üyelik fonksiyonu ve $\nu_{\tilde{K}}: R \to [u_{\tilde{K}}, 1]$ üyelik olmama olsun. Daha sonra, R üzerinde tanımlı sezgisel bulanık küme olan sezgisel bulanık sayı (SB-sayı)

$$\mu_{\tilde{K}}(x) = \begin{cases} f_{\mu l}(x) & a_1 \leq x < b_1 \\ w_{\tilde{k}} & b_1 \leq x < c_1 \\ f_{\mu r}(x) & c_1 \leq x < d_1 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{K}}(x) = \begin{cases} f_{\nu l}(x) & a_2 \leq x < b_2 \\ u_{\tilde{k}} & b_2 \leq x < c_2 \\ f_{\nu r}(x) & c_2 \leq x < d_2 \\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

üyelik fonksiyonları ile
$$\tilde{K} = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{k}}), (a_2, b_2, c_2, d_2; u_{\tilde{k}}) \rangle$$
şeklinde tanımlanır.

Üyelik olma ve olmama fonksiyonları $0 \leq w_{\tilde{K}} \leq 1$, $0 \leq u_{\tilde{K}} \leq 1$ ve $0 \leq w_{\tilde{K}} + u_{\tilde{K}} \leq 1$ olacak şekilde sırasıyla $w_{\tilde{K}}$ ve $u_{\tilde{K}}$ dır. $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, w_{\tilde{K}}$ ve $u_{\tilde{K}}$ parametrelerin bazı özel değerleri için verilen sezgisel bulanık sayılar, üçgensel sezgisel bulanık (ÜSB) sayı ve yamuksal sezgisel bulanık (YSB) sayı diye adlandırılan aşağıdaki forma indirgenir.

1) Eğer $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ ise, sezgisel bulanık sayısı $\tilde{K} = \langle (a, b, c, d); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ yamuksal sezgisel bulanık sayısına indirgenir.

2) Eğer $b = c$ yamuksal sezgisel bulanık sayısı $\tilde{K} = \langle (a, b, d); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ üçgensel sezgisel bulanık sayısına indirgenir.

Tanım 3.6 [41] $\tilde{K}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$, $\tilde{K}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}} \rangle$ yamuksal sezgisel bulanık sayılar ve $\gamma \neq 0$ olsun. Daha sonra bu iki yamuksal sezgisel bulanık sayılar arasındaki aritmetik işlemler

1. $\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 = \langle (a_1 + a_1, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle$

2. $\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2 = \langle (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle$

3. $\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 = \begin{cases} \langle (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (a_1 d_2, b_1 c_2, c_1 b_2, d_1 a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (d_1 d_2, c_1 c_2, b_1 b_2, a_1 a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 < 0 \end{cases}$

4. $\tilde{K}_1 / \tilde{K}_2 = \begin{cases} \langle (a_1 / d_2, b_1 / c_2, c_1 / b_2, d_1 / a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (d_1 / d_2, c_1 / c_2, b_1 / b_2, a_1 / a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (d_1 / a_2, c_1 / b_2, b_1 / c_2, a_1 / d_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 < 0 \end{cases}$

5. $\gamma \tilde{K}_1 = \begin{cases} \langle (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1, \gamma d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma > 0 \\ \langle (\gamma d_1, \gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma < 0 \end{cases}$

6. $\tilde{K}_1^{\gamma} = \begin{cases} \langle (a_1^{\gamma}, b_1^{\gamma}, c_1^{\gamma}, d_1^{\gamma}); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma > 0 \\ \langle (d_1^{\gamma}, c_1^{\gamma}, b_1^{\gamma}, a_1^{\gamma}); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma < 0 \end{cases}$

7. $\tilde{K}_1^{-1} = (1/d_1, 1/c_1, 1/b_1, 1/a_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$

şeklinde verilir.

Tanım 3.7 [41] $\tilde{K}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$, $\tilde{K}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}} \rangle$ üçgensel sezgisel bulanık sayılar ve $\gamma \neq 0$ olsun. Daha sonra bu iki üçgensel sezgisel bulanık sayılar arasındaki aritmetik işlemler

1. $\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 = \langle (a_1 + a_1, b_1 + b_2, c_1 + c_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle$

2. $\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2 = \langle (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle$

3. $\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 = \begin{cases} \langle (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (a_1 c_2, b_1 b_2, c_1 a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (c_1 c_2, b_1 b_2, a_1 a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 < 0 \end{cases}$

4. $\tilde{K}_1 / \tilde{K}_2 = \begin{cases} \langle (a_1/c_2, b_1/b_2, c_1/a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & c_1 > 0 \quad c_2 > 0 \\ \langle (c_1/c_2, b_1/b_2, a_1/a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & c_1 < 0 \quad c_2 > 0 \\ \langle (c_1/a_2, b_1/b_2, a_1/c_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle & c_1 < 0 \quad c_2 < 0 \end{cases}$

5. $\gamma \tilde{K}_1 = \begin{cases} \langle (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma > 0 \\ \langle (\gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma < 0 \end{cases}$

6. $\tilde{K}_1^{\gamma} = \begin{cases} \langle (a_1^{\gamma}, b_1^{\gamma}, c_1^{\gamma}); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma > 0 \\ \langle (c_1^{\gamma}, b_1^{\gamma}, a_1^{\gamma}); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle & \gamma < 0 \end{cases}$

7. $\tilde{K}_1^{-1} = (1/c_1, 1/b_1, 1/a_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$

3.1.3 Sezgisel bulanık sayılar için skor ve kesinlik fonksiyon

Tanım 3.8 [94] $\tilde{K} = \langle (a,b,c,d); \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$ YSB-sayı olsun. Daha sonra, $s(\tilde{K})$ ile gösterilen skor fonksiyonu ve $H(\tilde{k})$ ile gösterilen kesinlik fonksiyonu

$$s(\tilde{K}) = \frac{1}{8}[a+b+c+d] \times (1 + \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}}) \times (\mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}})$$
$$H(\tilde{K}) = \frac{1}{8}[a+b+c+d] \times (1 + \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}}) \times (\mu_{\tilde{a}} + \nu_{\tilde{a}})$$

ile tanımlanır.

Bu fonksiyonlar herhangi iki YSB-sayıyı karşılaştırmak için kullanılır.

Örnek 3.9 $\tilde{K} = \langle (1,4,5,6); 0.9, 0.5 \rangle$ YSB-sayı olsun. Daha sonra,

$$s(\tilde{K}) = \frac{1}{8}[1+4+5+6] \times (1+0.9-0.5) \times (0.9-0.5) = 1.12$$

ve

$$H(\tilde{K}) = \frac{1}{8}[1+4+5+6] \times (1+0.9-0.5) \times (0.9+0.5) = 3.92$$

dir.

Tanım 3.10 [94] $\tilde{K}_1$ ve $\tilde{K}_2$ iki YSB-sayı olsun. Daha sonra, bu sayıların karşılaştırılması

1) $s(\tilde{K}_1) < s(\tilde{K}_2)$ ise, $\tilde{K}_1 < \tilde{K}_2$ dir.
2) $s(\tilde{K}_1) > s(\tilde{K}_2)$ ise, $\tilde{K}_1 > \tilde{K}_2$ dir.
3) $s(\tilde{K}_1) = s(\tilde{K}_2)$ ise,
    a) $H(\tilde{K}_1) < H(\tilde{K}_2)$ ise, $\tilde{K}_1 < \tilde{K}_2$ dir.
    b) $H(\tilde{K}_1) > H(\tilde{K}_2)$ ise, $\tilde{K}_1 > \tilde{K}_2$ dir.

c) $H(\widetilde{K}_1) = H(\widetilde{K}_2)$ ise, $\widetilde{K}_1 = \widetilde{K}_2$ dir.

ile tanımlanır.

3.1.4 Sezgisel bulanık aritmetik operatörler

Tanım 3.11 [41] $(j = 1,2,\dots,n)$ için $K_j = \langle \mu_j, \nu_j \rangle$ sezgisel bulanık küme ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, f_w^K ile gösterilen sezgisel bulanık kümesinin ağırlaştırılmış aritmetik operatörü

$$f_w^K : F^n \to F \qquad f_w^A\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k a_k$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.12 [41] $(j = 1,2,\dots,n)$ için $K_j = \langle \mu_j, \nu_j \rangle$ sezgisel bulanık küme ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra;

$$f_w^K\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \langle 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mu_k)^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} {\nu_k}^{w_k} \rangle$$

‘dir.

Tanım 3.13 [41] $(j = 1,2,\dots,n)$ için $K_j = \langle \mu_j, \nu_j \rangle$ sezgisel bulanık küme ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra, f_w^O ile gösterilen sıralı aritmetik operatör

$$f_w^O : F^n \to F \qquad f_w^O\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k B_k$$

ile tanımlanır.

Burada $B_k = \langle \hat{\mu}_k, \hat{\nu}_k \rangle$ sezgisel bulanık kümesi skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $K_j (j = 1,2,\dots,n)$ sezgisel bulanık kümesinin k. en büyüğüdür.

Teorem 3.14 [41] $(j = 1,2,\dots,n)$ için $K_j = \langle \mu_j, \nu_j \rangle$ sezgisel bulanık küme ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra;

$$f_w^O\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \langle 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \hat{\mu}_k)^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} \hat{\nu}_k{}^{w_k} \rangle$$

'dir.

Burada $B_k = \langle \hat{\mu}_k, \hat{\nu}_k \rangle$ sezgisel bulanık kümesi skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $K_j (j = 1,2,\dots,n)$ sezgisel bulanık kümesinin k. en büyüğüdür.

Tanım 3.15 [41] $(j = 1,2,\dots,n)$ için $K_j = \langle \mu_j, \nu_j \rangle$ sezgisel bulanık küme ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T'} de\ w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra $f_{w,\omega}^H$ ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$f_{w,\omega}^H : F^n \to F, \qquad f_{w,\omega}^H\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k \breve{B}_k$$

ile tanımlanır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ olacak şekilde K_j'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\widehat{K}_j = n\omega_j K_j$ olmak üzere $\breve{B}_k$ sezgisel bulanık küme skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\widehat{K}_j (j = 1,2,\dots,n)$ sezgisel bulanık kümesinin k. en büyüğüdür.

Teorem 3.16 [41] $(j = 1,2,\dots,n)$ için $K_j = \langle \mu_j, \nu_j \rangle$ sezgisel bulanık küme ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T}$'$de$ $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra $f_{w,\omega}^{H}$ ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$f_{w,\omega}^{H}(K_1, K_2, \dots, K_n) = \langle 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \breve{\mu}_k)^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} \breve{\nu}_k{}^{w_k} \rangle$$

dır. Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ ve K_j'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\widehat{K}_j = n\omega_j K_j$ olmak üzere $\breve{B}_k$ sezgisel bulanık küme skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\widehat{K}_j(j = 1,2,\dots,n)$ sezgisel bulanık kümesinin k. en büyüğüdür.

3.1.5 Sezgisel bulanık geometrik operatörler

Tanım 3.17 [66] $(j = 1,2,\dots,n)$ için K_j sezgisel bulanık küme ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $IFWG$ ile gösterilen sezgisel bulanık kümesinin ağırlaştırılmış geometrik operatörü

$$IFWG: F^n \to F \qquad IFWG_w\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \alpha_1{}^{w_1} \otimes \alpha_2{}^{w_2} \otimes \dots \otimes \alpha_n{}^{w_n}$$

ile tanımlanır.

Eğer $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$ alınırsa sezgisel bulanık kümesinin ağırlaştırılmış geometrik operatör $IFWG$, sezgisel bulanık geometrik operatöre (IFG) indirgenir.

$$IFWG_w\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = (\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_n)^{\frac{1}{n}}$$

Teorem 3.18 [66] $(j = 1,2,\dots,n)$ için K_j sezgisel bulanık küme ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $IFWG$ ile gösterilen sezgisel bulanık kümesinin ağırlaştırılmış geometrik operatörü

$$IFWG_w\ (K_1,K_2,\dots,K_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}{}^{w_j},1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\nu_{\alpha_j}\right)^{w_j}\right)$$

dir.

Tanım 3.19 [66] $(j=1,2,\dots,n)$ için K_j sezgisel bulanık küme ailesi ve $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$, $w_j\in[0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $IFOG$ ile gösterilen sezgisel bulanık sıralı ağırlaştırılmış geometrik operatör

$$IFOG_w\colon F^n\to F \qquad IFOG_w\ (K_1,K_2,\dots,K_n)=\alpha_{\sigma(1)}{}^{w_1}\otimes\alpha_{\sigma(2)}{}^{w_2}\otimes\dots\otimes\alpha_{\sigma(n)}{}^{w_n}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.20 [66] $(j=1,2,\dots,n)$ için K_j sezgisel bulanık küme ailesi ve $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$, $w_j\in[0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $IFOG$ ile gösterilen sezgisel bulanık kümesinin sıralı ağırlaştırılmış geometrik operatör

$$IFOG_w\ (K_1,K_2,\dots,K_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_{\sigma(j)}{}^{w_j},1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\nu_{\sigma(j)}\right)^{w_j}\right)$$

dir.

Tanım 3.21 [66] $(j=1,2,\dots,n)$ için K_j sezgisel bulanık küme ve $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^{T'}de\ w_j\in[0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra $IFHG_w$ ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı geometrik operatör

$$IFHG_w\colon\colon F^n\to F \qquad IFHG_w\ (K_1,K_2,\dots,K_n)=\alpha_{\ddot{\sigma}(1)}{}^{w_1}\otimes\alpha_{\ddot{\sigma}(2)}{}^{w_2}\otimes\dots\otimes\alpha_{\ddot{\sigma}(n)}{}^{w_n}$$

ile tanımlanır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ olacak şekilde $\ddot{\alpha}_j = \alpha_j{}^{n\omega_j}$ dir.

Teorem 3.22 [66] $(j = 1,2,\dots,n)$ için K_j sezgisel bulanık küme ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T'}$de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra $IFHG_w$ ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$IFHG_w\ (K_1, K_2, \dots, K_n) = \left(\prod_{j=1}^{n} \mu_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \nu_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}\right)^{w_j} \right)$$

dır. Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ ve K_j'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\ddot{\alpha}_j = \alpha_j{}^{n\omega_j}$ dir.

3.3. Neutrosophic Kümeler

Tanım 3.23 [62] E evrensel bir küme olsun. $\forall x \in E,\ 0^- \le T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \le 3^+$ olmak üzere, $T_A : E \to]^-0,1^+[$, $I_A : E \to]^-0,1^+[$ ve $F_A : E \to]^-0,1^+[$ fonksiyonları ile E üzerinde bir A neutrosophic bulanık küme

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)\rangle : x \in E\}$$

ile tanımlanır. Burada $T_A(x), I_A(x)$ ve $F_A(x)$ sırasıyla $x \in E$ nin doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık derecesidir.

Tanım 3.24 [72] E evrensel bir küme olsun. $\forall x \in E,\ 0 \le T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \le 3$ olmak üzere, $T_A : E \to [0,1]$, $I_A : E \to [0,1]$ ve $F_A : E \to [0,1]$ fonksiyonları ile E üzerinde bir A tek değerli neutrosophic bulanık küme

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)\rangle : x \in E\}$$

kümesi ile tanımlanır. Burada $T_A(x), I_A(x)$ ve $F_A(x)$ sırasıyla $x \in E$ nin doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık derecesidir.

Tanım 3.25 [52,72] A ve B, TDN küme olmak üzere,

1. $Her\ x \in X$ için B nin A yı kapsaması $A \subseteq B$ ile gösterilir ve üyelik dereceleri
$$T_A(x) \leq T_B(x)$$
$$I_A(x) \leq I_B(x)$$
$$F_A(x) \geq F_B(x)$$
şeklinde tanımlanır.

2. $Her\ x \in X$ için A nın tümleyeni $c(A)$ ile gösterilir ve üyelik dereceleri
$$T_{c(A)}(x) = F_A(x)$$
$$I_{c(A)}(x) = 1 - I_A(x)$$
$$F_{c(A)}(x) = T_A(x)$$
şeklinde tanımlanır.

3. A ile B nin eşitliği $A \doteq B$ ile gösterilir ve
$$\forall x \in X \text{ için } A \doteq B \text{ ise, } A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A$$
şeklinde tanımlanır.

4. A ile B nin kesişimi $C = A \cap B$ ile gösterilir ve üyelik dereceleri
$$T_c(x) = min\{T_A(x), T_B(x)\}$$
$$I_c(x) = min\{I_A(x), I_B(x)\}$$
$$F_c(x) = max\{F_A(x), F_B(x)\}$$
şeklinde tanımlanır.

5. A ile B nin birleşimi $C = A \cup B$ ile gösterilir ve üyelik dereceleri
$$T_c(x) = max\{T_A(x), T_B(x)\}$$
$$I_c(x) = max\{I_A(x), I_B(x)\}$$
$$F_c(x) = min\{F_A(x), F_B(x)\}$$
şeklinde tanımlanır.

6. $x \in X$ için A ile B nin toplaması $C = A \dot{+} B$ ile gösterilir ve üyelik dereceleri
$$T_c(x) = T_A(x) + T_B(x) - T_A(x)T_B(x)$$
$$I_c(x) = I_A(x)I_B(x)$$
$$F_c(x) = F_A(x)F_B(x)$$
şeklinde tanımlanır.

7. $x \in X$ için A ile B nin çarpımı $C = A \dot{\times} B$ ile gösterilir ve üyelik dereceleri
$$T_c(x) = T_A(x)T_B(x)$$
$$I_c(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x)I_B(x)$$
$$F_c(x) = F_A(x) + F_B(x) - F_A(x)F_B(x)$$
şeklinde tanımlanır.

8. A ile λ gibi bir skalerle çarpımı λA ile gösterilir ve $\lambda > 0$ için
$$\lambda\tilde{A} = \langle 1-(1-T_A)^{\lambda}, (I_A)^{\lambda}, (F_A)^{\lambda}\rangle$$
şeklinde tanımlanır.

9. A nın λ kuvveti A^{λ} ile gösterilir ve $\lambda > 0$ için
$$\tilde{A}^{\lambda} = \langle (T_A)^{\lambda}, 1-(1-I_A)^{\lambda}, 1-(1-F_A)^{\lambda}\rangle$$
şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.26 [89] X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X$, $0 \le t^4{}_{\tilde{N}}(x) + i^4{}_{\tilde{N}}(x) + f^4{}_{\tilde{N}}(x) \le 3$ olmak üzere, $T_{\tilde{N}}(x) \subset [0,1]$, $I_{\tilde{N}}(x) \subset [0,1]$, $F_{\tilde{N}}(x) \subset [0,1]$ fonksiyonları ve $T_{\tilde{N}}(x) = \left(t^1{}_{\tilde{N}}(x), t^2{}_{\tilde{N}}(x), t^3{}_{\tilde{N}}(x), t^4{}_{\tilde{N}}(x)\right): X \to [0,1]$, $I_{\tilde{N}}(x) = (i^1{}_{\tilde{N}}(x), i^2{}_{\tilde{N}}(x), i^3{}_{\tilde{N}}(x), i^4{}_{\tilde{N}}(x)): X \to [0,1]$, $F_{\tilde{N}}(x) = \left(f^1{}_{\tilde{N}}(x), f^2{}_{\tilde{N}}(x), f^3{}_{\tilde{N}}(x), f^4{}_{\tilde{N}}(x)\right): X \to [0,1]$ ile X üzerinde bir A yamuksal neutrosophic bulanık sayı
$$\tilde{N} = \{\langle x, T_{\tilde{N}}(x), I_{\tilde{N}}(x), F_{\tilde{N}}(x)\rangle : x \in X\}$$
ile tanımlanır. Burada $T_{\tilde{N}}(x), I_{\tilde{N}}(x)$ ve $F_{\tilde{N}}(x)$ sırasıyla $x \in X$ nin doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık derecesidir.

Kolaylık için üç yamuksal bulanık sayıyı $T_{\tilde{N}}(x) = (a,b,c,d)$, $I_{\tilde{N}}(x) = (e,f,g,h)$ ve $F_{\tilde{N}}(x) = (l,m,n,p)$ ile gösterilir. Daha sonra yamuksal neutrosophic bulanık sayı $\tilde{n} = \langle (a,b,c,d),(e,f,g,h),(l,m,n,p)\rangle$ ile gösterilir. Eğer $b = c$, $f = g$ ve $m = n$ ise, yamuksal neutrosophic bulanık sayı, üçgensel neutrosophic bulanık sayıya dönüşür.

Tanım 3.27 [89] $\tilde{n}_1 = \langle (a_1,b_1,c_1,d_1),(e_1,f_1,g_1,h_1),(l_1,m_1,n_1,p_1)\rangle$ ve $\tilde{n}_2 = \langle (a_2,b_2,c_2,d_2),(e_2,f_2,g_2,h_2),(l_2,m_2,n_2,p_2)\rangle$ iki yamuksal sayı olmak üzere

1. $\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2 = \langle (a_1+a_2-a_1a_2, b_1+b_2-b_1b_2, c_1+c_2-c_1c_2, d_1+d_2-d_1d_2), (e_1e_2, f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2), (l_1l_2, m_1m_2, n_1n_2, p_1p_2)\rangle$
2. $\tilde{n}_1 \otimes \tilde{n}_2 = \langle (a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2), (e_1+e_2-e_1e_2, f_1+f_2-f_1f_2, g_1+g_2-g_1g_2, h_1+h_2-h_1h_2), (l_1+l_2-l_1l_2, m_1+m_2-m_1m_2, n_1+n_2-n_1n_2, p_1+p_2-p_1p_2)\rangle$
3. $\lambda\tilde{n}_1 = \left\langle \left(1-(1-a_1)^{\lambda}, 1-(1-b_1)^{\lambda}, 1-(1-c_1)^{\lambda}, 1-(1-d_1)^{\lambda}, \right. \left(e_1^{\lambda}, f_1^{\lambda}, g_1^{\lambda}, h_1^{\lambda}\right), \left(l_1^{\lambda}, m_1^{\lambda}, n_1^{\lambda}, p_1^{\lambda}\right)\right\rangle$ $\lambda > 0$

4. $\tilde{n}_1^\lambda = \langle (a_1^\lambda, b_1^\lambda, c_1^\lambda, d_1^\lambda), (1-(1-e_1)^\lambda, 1-(1-f_1)^\lambda, 1-(1-g_1)^\lambda, 1-(1-h_1)^\lambda), (1-(1-l_1)^\lambda, 1-(1-m_1)^\lambda, 1-(1-n_1)^\lambda, 1-(1-p_1)^\lambda) \rangle \ \lambda \geq 0$

'dir.

Tanım 3.28 [89] $\tilde{n}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j), (e_j, f_j, g_j, h_j), (l_j, m_j, n_j, p_j) \rangle (j = 1,2, \dots, n)$ yamuksal neutrosophic sayı ailesi ve $w_j (j = 1,2, \dots, n)$, $w_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ ve $\tilde{n}_j (j = 1,2, \dots, n)$ j. yamuksal neutrosophic sayı olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $(j = 1,2, \dots, n)$ için $TNNWAA$ ile gösterilen yamuksal neutrosophic sayı ağırlaştırılmış aritmetik operatör

$$TNNWAA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) = w_1 \tilde{n}_1 \oplus w_2 \tilde{n}_2 \oplus \dots \oplus w_n \tilde{n}_n = \bigoplus_{j=1}^{n} w_j \tilde{n}_j$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.29 [89] $\tilde{n}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j), (e_j, f_j, g_j, h_j), (l_j, m_j, n_j, p_j) \rangle$ $(j = 1,2, \dots, n)$ yamuksal neutrosophic sayı olsun. $w_j (j = 1,2, \dots, n)$, $w_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ ve $\tilde{n}_j (j = 1,2, \dots, n)$ j. yamuksal neutrosophic sayı olmak üzere $TNNWAA$ operatör

$$\begin{aligned} TNNWAA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) &= w_1 \tilde{n}_1 \oplus w_2 \tilde{n}_2 \oplus \dots \oplus w_n \tilde{n}_n = \bigoplus_{j=1}^{n} w_j \tilde{n}_j \\ &= \left\langle \left(1 - \prod_{j=1}^{n} (1-a_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1-b_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1-c_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1-d_j)^{w_j} \right), \right. \\ &\left(\prod_{j=1}^{n} e_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} f_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} g_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} h_j^{w_j} \right), \\ &\left. \left(\prod_{j=1}^{n} l_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} m_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} n_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} p_j^{w_j} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

dir.

Lemma 3.30 [89] $\tilde{n}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j), (e_j, f_j, g_j, h_j), (l_j, m_j, n_j, p_j) \rangle (j = 1,2, \dots, n)$ yamuksal neutrosophic sayı ailesi olsun.

1. Eğer $\tilde{n}_j = n \ (j = 1,2,\dots,n)$ ise, $TNNWAA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) = \tilde{n}$ elde edilir.
2. Eğer $\tilde{n}_j^- = \langle (min\{a_j\}, min\{b_j\}, min\{c_j\}, min\{d_j\}), (max\{e_j\}, max\{f_j\}, max\{g_j\}, max\{h_j\}),$ $(max\{l_j\}, max\{m_j\}, max\{n_j\}, max\{p_j\}) \rangle$
   ve $\tilde{n}_j^+ = \langle (max\{a_j\}, max\{b_j\}, max\{c_j\}, max\{d_j\}), (min\{e_j\}, min\{f_j\}, min\{g_j\}, min\{h_j\}),$ $(min\{l_j\}, min\{m_j\}, min\{n_j\}, min\{p_j\}) \rangle$
   ise, $\tilde{n}^- \leq TNNWAA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) \leq \tilde{n}^+$ elde edilir.
3. $\tilde{n}_j (j = 1,2,\dots,n)$ ve $\tilde{n}_j^* (j = 1,2,\dots,n)$ iki yamuksal neutrosophic sayı olsun. Eğer $j = 1,2,\dots,n$ için $\tilde{n}_j \leq \tilde{n}_j^*$ ise
$$TNNWAA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) \leq TNNWAA(\tilde{n}_1^*, \tilde{n}_2^*, \dots, \tilde{n}_n^*)$$

Tanım 3.31 [89] $\tilde{n}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j), (e_j, f_j, g_j, h_j), (l_j, m_j, n_j, p_j) \rangle (j = 1,2,\dots,n)$ yamuksal neutrosophic sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T'} de\ w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra, $(j = 1,2,\dots,n)$ için $TNNWGA$ ile gösterilen yamuksal neutrosophic sayı ağırlaştırılmış geometrik operatör

$$TNNWGA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) = w_1\tilde{n}_1 \otimes w_2\tilde{n}_2 \otimes \dots \otimes w_n\tilde{n}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} w_j\tilde{n}_j$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.32 [89] $\tilde{n}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j), (e_j, f_j, g_j, h_j), (l_j, m_j, n_j, p_j) \rangle (j = 1,2,\dots,n)$ yamuksal neutrosophic sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T'} de\ w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. $TNNWGA$ operatör

$$TNNWGA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) = w_1\tilde{n}_1 \otimes w_2\tilde{n}_2 \otimes \dots \otimes w_n\tilde{n}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} w_j\tilde{n}_j$$

$$= \left\langle \left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} d_j^{w_j} \right), \right.$$

$$\left(1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - e_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - f_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - g_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - h_j)^{w_j} \right)$$

$$\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-l_j)^{w_j}, 1-\prod_{j=1}^{n}(1-m_j)^{w_j}, 1-\prod_{j=1}^{n}(1-n_j)^{w_j}, 1-\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)^{w_j}\right)\Bigg\rangle$$

dir.

Lemma 3.33 [89] $\tilde{n}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j), (e_j, f_j, g_j, h_j), (l_j, m_j, n_j, p_j) \rangle (j = 1,2, \dots, n)$ yamuksal neutrosophic sayı ailesi olsun.

1. Eğer $\tilde{n}_j = n \ (j = 1,2, \dots, n)$ ise, $TNNWGA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) = \tilde{n}$ elde edilir.
2. Eğer $\tilde{n}_j^- = \langle (min\{a_j\}, min\{b_j\}, min\{c_j\}, min\{d_j\}), (max\{e_j\}, max\{f_j\}, max\{g_j\}, max\{h_j\}),$ $(max\{l_j\}, max\{m_j\}, max\{n_j\}, max\{p_j\}) \rangle$
   ve $\tilde{n}_j^+ = \langle (max\{a_j\}, max\{b_j\}, max\{c_j\}, max\{d_j\}), (min\{e_j\}, min\{f_j\}, min\{g_j\}, min\{h_j\}),$ $(min\{l_j\}, min\{m_j\}, min\{n_j\}, min\{p_j\}) \rangle$
   ise, $\tilde{n}^- \leq TNNWGA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) \leq \tilde{n}^+$ elde edilir.
3. $\tilde{n}_j (j = 1,2, \dots, n)$ ve $\tilde{n}_j^* (j = 1,2, \dots, n)$ iki yamuksal neutrosophic sayı olsun. Eğer $j = 1,2, \dots, n$ için $\tilde{n}_j \leq \tilde{n}_j^*$ ise
   $$TNNWGA(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n) \leq TNNWGA(\tilde{n}_1^*, \tilde{n}_2^*, \dots, \tilde{n}_n^*)$$

Tanım 3.34 [8] X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X,\ 0 \leq \sup T_{\tilde{N}_A}(x) + \sup I_{\tilde{N}_A}(x) + \sup F_{\tilde{N}_A}(x) \leq 3$ ve $T_{\tilde{N}_A}(x): X \to [0,1]$, $I_{\tilde{N}_A}(x): X \to [0,1]$, $F_{\tilde{N}_A}(x): X \to [0,1]$, fonksiyonlar olmak üzere, X üzerinde bir neutrosophic bulanık küme

$$\tilde{N}_A = \{\langle x, T_{\tilde{N}_A}(x), I_{\tilde{N}_A}(x), F_{\tilde{N}_A}(x) \rangle : x \in X\}$$

ile tanımlanır. Burada $T_{\tilde{N}_A}(x), I_{\tilde{N}_A}(x)$ ve $F_{\tilde{N}_A}(x)$ sırasıyla $x \in X$ nin doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık derecesidir. $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}$ birer reel sayı ve $a_{11} < a_{12} < a_{13} < a_{14}$, $b_{21} < b_{22} < b_{23} < b_{24}$, $c_{31} < c_{32} < c_{33} < c_{34}$ olmak üzere bulanık neutrosophic sayı

$$T_{\tilde{N}_A}(x) = \begin{cases} T^L_{\tilde{N}_A}(x) & a_{11} \leq x < a_{21} \\ 1 & a_{21} \leq x < a_{31} \\ T^U_{\tilde{N}_A}(x) & a_{31} \leq x < a_{41} \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$I_{\tilde{N}_A}(x)=\begin{cases} I^L_{\tilde{N}_A}(x) & b_{11}\le x<b_{21}\\ 0 & b_{21}\le x<b_{31}\\ I^U_{\tilde{N}_A}(x) & b_{31}\le x<b_{41}\\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$F_{\tilde{N}_A}(x)=\begin{cases} F^L_{\tilde{N}_A}(x) & c_{11}\le x<c_{21}\\ 0 & c_{21}\le x<c_{31}\\ F^U_{\tilde{N}_A}(x) & c_{31}\le x<c_{41}\\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $T^L_{\tilde{N}_A}(x), I^U_{\tilde{N}_A}(x), F^U_{\tilde{N}_A}(x)$ sürekli ve artan, $T^U_{\tilde{N}_A}(x), I^L_{\tilde{N}_A}(x), F^L_{\tilde{N}_A}(x)$ sürekli ve azalandır.

4. TEK DEĞERLİ NEUTROSOPHİC SAYILAR

Bu bölümde tek değerli neutrosophic sayı kavramını ve bu sayı kavramın özel halleri olan yamuksal tek değerli neutrosophic sayı kavramını ve üçgensel tek değerli neutrosophic sayı kavramını tanımlayacağız. Daha sonra bu sayı kavramları üzerine bazı işlemler tanımlayıp istenilen özelliklerini inceleyeceğiz. Smarandache [61,62] ve Wang ve ark. [72] tarafından tanımlanan sırasıyla neutrosophic kümeler ve tekdeğerli neutrosophickümeler kullanılarak yapılan bu bölüm sezgisel bulanık kümeler için Li [40,41,42] de yapılmıştır.

Tanım 4.1 $i=1,2,3$ için $a_i \le b_i \le c_i \le d_i$ olacak şekilde $a_i, b_i, c_i, d_i \in [0,1]$ ve $\mu_{\tilde{a}}: R \to [0, w_{\tilde{a}}]$ doğruluk fonksiyonu, $\nu_{\tilde{a}}: R \to [u_{\tilde{a}}, 1]$ kararsızlık fonksiyonu ve $\lambda_{\tilde{a}}: R \to [y_{\tilde{a}}, 1]$ yanlışlık fonksiyonu olsun. Daha sonra, R üzerinde tanımlı özel bir tek değerli neutrosophic küme olan tek değerli neutrosophic sayı (TDN-sayı)

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_{\mu l}(x) & a_1 \le x < b_1 \\ w_{\tilde{a}} & b_1 \le x < c_1 \\ f_{\mu r}(x) & c_1 \le x < d_1 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_{\nu l}(x) & a_2 \le x < b_2 \\ u_{\tilde{a}} & b_2 \le x < c_2 \\ f_{\nu r}(x) & c_2 \le x < d_2 \\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\lambda_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_{\lambda l}(x) & a_3 \le x < b_3 \\ y_{\tilde{a}} & b_3 \le x < c_3 \\ f_{\lambda r}(x) & c_3 \le x < d_3 \\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

üyelik fonksiyonları ile

$$\tilde{a} = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{a}}), (a_2, b_2, c_2, d_2; u_{\tilde{a}}), (a_3, b_3, c_3, d_3; y_{\tilde{a}}) \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $f_{\mu l}(a_1) = 0$, $f_{\mu l}(b_1) = w_{\tilde{a}}$, $f_{\nu r}(a_1) = u_{\tilde{a}}$, $f_{\nu r}(d_2) = 1$, $f_{\lambda r}(c_3) = y_{\tilde{a}}$ ve $f_{\lambda r}(d_3) = 1$ olacak şekilde $f_{\mu l}: [a_{1,} b_1] \to [0, w_{\tilde{a}}]$, $f_{\nu r}: [c_{2,} d_2] \to [u_{\tilde{a}}, 1]$, $f_{\lambda r}: [c_{3,} d_3] \to [y_{\tilde{a}}, 1]$ fonksiyonları sürekli ve azalmayandır. Benzer şekilde $f_{\mu r}(c_1) = w_{\tilde{a}}$, $f_{\mu r}(d_1) =$

0, $f_{\nu l}(a_2) = 1$, $f_{\nu l}(b_2) = u_{\tilde{a}}$, $f_{\lambda l}(a_3) = 1$ ve $f_{\lambda l}(b_3) = y_{\tilde{a}}$ olacak şekilde $f_{\mu r}: [c_{1,} d_1] \to [0, w_{\tilde{a}}]$, $f_{\nu r}: [a_{2,} b_2] \to [u_{\tilde{a}}, 1]$, $f_{\lambda l}: [a_{3,} b_3] \to [y_{\tilde{a}}, 1]$ fonksiyonları sürekli ve artmayan fonksiyondur. Ayrıca $w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}$ sayılarına sırasıyla maksimum doğruluk derecesi, minumum kararsızlık derecesi ve minimum yanlışlık derecesi denir.

4.1 TDN-sayı Çeşitleri

TDN-sayı kavramı i=1,2,3 için a_i, b_i, c_i ve d_i reel sayılarının bazı özel durumları için tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarına dönüşür.

4.1.1 Tek değerli yamuksal neutrosophic sayı

Tanım 4.2 $a_1 \leq b_1 \leq c_1 \leq d_1$ olacak şekilde $a_1, b_1, c_1, d_1 \in [0,1]$ ve $\mu_{\tilde{a}}: R \to [0, w_{\tilde{a}}]$ doğruluk fonksiyonu, $\nu_{\tilde{a}}: R \to [u_{\tilde{a}}, 1]$ kararsızlık fonksiyonu ve $\lambda_{\tilde{a}}: R \to [y_{\tilde{a}}, 1]$ yanlışlık fonksiyonu olsun. Daha sonra, R üzerinde tanımlı özel bir tek değerli neutrosophic sayı olan tek değerli yamuksal neutrosophic sayı (TDYN-sayı)

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} (x - a_1) w_{\tilde{a}} / (b_1 - a_1) & a_1 \leq x < b_1 \\ w_{\tilde{a}} & b_1 \leq x < c_1 \\ (d_1 - x) w_{\tilde{a}} / (d_1 - c_1) & c_1 \leq x \leq d_1 \\ 0 & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} b_1 - x + u_{\tilde{a}} (x - a_1) & a_1 \leq x < b_1 \\ u_{\tilde{a}} & b_1 \leq x < c_1 \\ x - c_1 + u_{\tilde{a}} (d_1 - x) & c_1 \leq x \leq d_1 \\ 1 & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

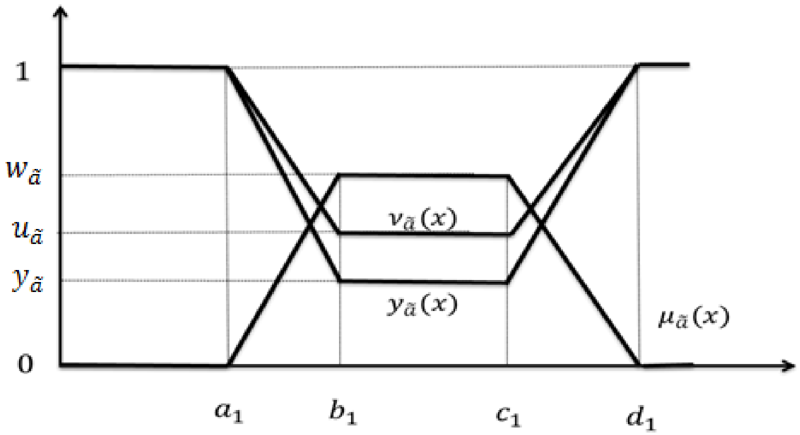
$$\lambda_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} b_1 - x + \lambda_{\tilde{a}} (x - a_1) & a_1 \leq x < b_1 \\ \lambda_{\tilde{a}} & b_1 \leq x < c_1 \\ x - c_1 + \lambda_{\tilde{a}} (d_1 - x) & c_1 \leq x \leq d_1 \\ 1 & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonları ile

$$\tilde{a} = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Bir TDYN-sayı Şekil 1 deki gibi grafik ile de verilebilir.

Eğer $a_1 > 0$ ise $\tilde{a} = \langle(a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$ TDYN-sayısına pozitif TDYN-sayı denir ve $\tilde{a} > 0$ ile gösterilir. Benzer şekilde $d_1 \leq 0$ ise $\tilde{a} = \langle(a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$ TDYN-sayısına negatif TDYN-sayı denir ve $\tilde{a} < 0$ ile gösterilir.



Şekil 1: Yamuksal Neutrosophic Küme

Bundan sonra R üzerinde tanımlı tüm TDYN-sayıları N_R ile göstereceğiz.

Örnek 4.3 Doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu sırasıyla

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0.8(x-1) & 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & 2 \leq x \leq 5 \\ 0.8(6-x) & 5 < x \leq 6 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1.4 - 0.4x & 1 \leq x < 2 \\ 0.6 & 2 \leq x \leq 5 \\ 0.4x - 1.4 & 5 < x \leq 6 \\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\lambda_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1.6 - 0.6x & 1 \leq x < 2 \\ 0.4 & 2 \leq x \leq 5 \\ 0.6x - 2.6 & 5 < x \leq 6 \\ 1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ile verilen $\tilde{a} = \langle(1,2,5,6); 0.8, 0.6, 0.4\rangle$ bir TDYN-sayıdır.

Tanım 4.4 $\tilde{a} = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$, $\tilde{b} = \langle (a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{b}} \rangle \in N_R$ ve $\gamma \neq 0$ olsun. Daha sonra bu iki TDYN-sayı arasındaki aritmetik işlemler

1. $\tilde{a}+\tilde{b} = \langle (a_1 + a_1, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle$

2. $\tilde{a}-\tilde{b} = \langle (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle$

3. $\tilde{a}\tilde{b} = \begin{cases} \langle (a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle & d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (a_1d_2, b_1c_2, c_1b_2, d_1a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (d_1d_2, c_1c_2, b_1b_2, a_1a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 < 0 \end{cases}$

4. $\tilde{a}/\tilde{b} = \begin{cases} \langle (a_1/d_2, b_1/c_2, c_1/b_2, d_1/a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle & d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (d_1/d_2, c_1/c_2, b_1/b_2, a_1/a_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 > 0 \\ \langle (d_1/a_2, c_1/b_2, b_1/c_2, a_1/d_2); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{b}} \rangle & d_1 < 0 \quad d_2 < 0 \end{cases}$

5. $\gamma\tilde{a} = \begin{cases} \langle (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1, \gamma d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle & \gamma > 0 \\ \langle (\gamma d_1, \gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle & \gamma < 0 \end{cases}$

6. $\tilde{a}^{\gamma} = \begin{cases} \langle (a_1^{\gamma}, b_1^{\gamma}, c_1^{\gamma}, d_1^{\gamma}); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle & \gamma > 0 \\ \langle (d_1^{\gamma}, c_1^{\gamma}, b_1^{\gamma}, a_1^{\gamma}); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle & \gamma < 0 \end{cases}$

7. $\tilde{a}^{-1} = (1/d_1, 1/c_1, 1/b_1, 1/a_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$

şeklinde verilir.

Örnek 4.5 $\tilde{a} = \langle (2,4,5,8); 0.2,0.3,0.5 \rangle$, $\tilde{b} = \langle (1,3,6,7); 0.4,0.5,0.6 \rangle \in N_R$ olsun. Daha sonra bu iki TDYN-sayı arasındaki aritmetik işlemler aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

1. $\tilde{a} + \tilde{b} = \langle (3,7,11,15); 0.2,0.5,0.6 \rangle$
2. $\tilde{a} - \tilde{b} = \langle (-5,-2,2,7); 0.2,0.5,0.6 \rangle$
3. $\tilde{a}\tilde{b} = \langle (2,12,30,56); 0.2,0.5,0.6 \rangle$
4. $\tilde{a}/\tilde{b} = \langle \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8\right); 0.2,0.5,0.6 \rangle$
5. $2\tilde{a} = \langle (4,8,10,16); 0.2,0.3,0.5 \rangle$
6. $3\tilde{b} = \langle (3,9,18,27); 0.4,0.5,0.6 \rangle$
7. $\tilde{a}^{-1} = \langle \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); 0.2,0.3,0.5 \rangle$

8. $\tilde{b}^{-1} = \langle\left(\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{3},1\right);0.4,0.5,0.6\rangle$

Yorum 4.6 $\tilde{a} = \langle(a_1,b_1,c_1,d_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$, $\tilde{b} = \langle(a_2,b_2,c_2,d_2);w_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}},y_{\tilde{b}}\rangle \in N_R$ olsun. Eğer, bu iki TDYN-sayıda $0 < w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}} < 1$, $0 < w_{\tilde{a}} + u_{\tilde{a}} + y_{\tilde{a}} < 1$, $y_{\tilde{a}} = 0$ ve $0 < w_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}},y_{\tilde{b}} < 1$, $0 < w_{\tilde{b}} + u_{\tilde{b}} + y_{\tilde{b}} < 1$, $y_{\tilde{b}} = 0$ ise $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ Tanım 3.17 de verilen yamuksal sezgisel bulanık sayıya dönüşür. Ayrıca Tanım 4.4 de verilen aritmetik işlemler Tanım 3.18 deki aritmetik işlemlere indirgenir.

Tanım 4.7 $\tilde{a} = \langle(a,b,c,d);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle \in N_R$ olsun. Daha sonra, $S_Y(\tilde{a})$ ile gösterilen skor fonksiyonu ve $A_Y(\tilde{a})$ ile gösterilen kesinlik fonksiyonu

$$S_Y(\tilde{a}) = \frac{1}{16}[a+b+c+d] \times (2 + \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}} - \gamma_{\tilde{a}})$$

$$A_Y(\tilde{a}) = \frac{1}{16}[a+b+c+d] \times (2 + \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}} + \gamma_{\tilde{a}})$$

ile tanımlanır.

Bu fonksiyonlar herhangi iki TDYN-sayıyı karşılaştırmak için kullanılır.

Örnek 4.8 $\tilde{a} = \langle(1,4,5,6);0.9,0.5,0.1\rangle \in N_R$ olsun. Daha sonra,

$$S_Y(\tilde{a}) = \frac{1}{16}[1+4+5+6] \times (2+0.9-0.5-0.1) = 2.30$$

ve

$$A_Y(\tilde{a}) = \frac{1}{16}[1+4+5+6] \times (2+0.9-0.5+0.1) = 2.50$$

dir.

Tanım 4.9 $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2 \in N_R$ olsun. Daha sonra, bu sayıların karşılaştırılması

1) $S_Y(\tilde{a}_1) < S_Y(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ dir.
2) $S_Y(\tilde{a}_1) > S_Y(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$ dir.
3) $S_Y(\tilde{a}_1) = S_Y(\tilde{a}_2)$ ise,
    a) $A_Y(\tilde{a}_1) < A_Y(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ dir.
    b) $A_Y(\tilde{a}_1) > A_Y(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$ dir.
    c) $A_Y(\tilde{a}_1) = A_Y(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ dir.

ile tanımlanır.

Örnek 4.10 $\tilde{a}_1 = \langle(1,4,5,6); 0.9,0.5,0.1\rangle$, $\tilde{a}_2 = \langle(2,4,6,8); 0.6,0.4,0.2\rangle \in N_R$ olsun. Daha sonra,

$$S_Y(\tilde{a}_1) = \frac{1}{16}[1+4+5+6] \times (2+0.9-0.5-0.1) = 2.30$$

$$S_Y(\tilde{a}_2) = \frac{1}{16}[2+4+6+8] \times (2+0.9-0.5-0.1) = 2.88$$

olduğundan $S_Y(\tilde{a}_1) < S_Y(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ dir.

4.1.1.1 TDYN-sayılar için aritmetik operatörler

Tanım 4.11 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle\, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDYN$_{ao}$ ile gösterilen TDYN ağırlaştırılmış aritmetik operatör

$$\text{TDYN}_{ao} : {N_R}^n \to N_R, \;\; \text{TDYN}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{a}_j$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.12 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle\, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi olsun. $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olmak üzere TDYN$_{ao}$ ile gösterilen operatör

$$\text{TDYN}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left\langle\left(\sum_{j=1}^{n} w_j a_j, \sum_{j=1}^{n} w_j b_j, \sum_{j=1}^{n} w_j c_j, \sum_{j=1}^{n} w_j d_j\right); \bigwedge_{j=1}^{n} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} y_{\tilde{a}_j}\right\rangle$$

'dir.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n = 2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle(a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1}\rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle(a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2}\rangle$ iki TDYN sayı olmak üzere;

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 = \left\langle\left(\sum_{j=1}^{2} w_j a_j, \sum_{j=1}^{2} w_j b_j, \sum_{j=1}^{2} w_j c_j, \sum_{j=1}^{2} w_j d_j\right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j}\right\rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_k\tilde{a}_k = \langle\left(\sum_{j=1}^{k} w_j a_j, \sum_{j=1}^{k} w_j b_j, \sum_{j=1}^{k} w_j c_j, \sum_{j=1}^{k} w_j d_j\right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j}\rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_{k+1}\tilde{a}_{k+1} = \langle\left(\sum_{j=1}^{k} w_j a_j, \sum_{j=1}^{k} w_j b_j, \sum_{j=1}^{k} w_j c_j, \sum_{j=1}^{k} w_j d_j\right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j}\rangle$$

$$+\langle(w_{k+1}a_{k+1}, w_{k+1}b_{k+1}, w_{k+1}c_{k+1}, w_{k+1}d_{k+1}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}}\rangle$$

$$= \langle\left(\sum_{j=1}^{k+1} w_j a_j, \sum_{j=1}^{k+1} w_j b_j, \sum_{j=1}^{k+1} w_j c_j, \sum_{j=1}^{k+1} w_j d_j\right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j}\rangle$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.13 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ $(j = 1,2,3)$ için

$$\tilde{a}_1 = \langle(0.214, 0.321, 0.545, 0.625); 0.5, 0.4, 0.9\rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle(0.241, 0.462, 0.656, 0.825); 0.8, 0.2, 0.4\rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle(0.311, 0.414, 0.531, 0.725); 0.6, 0.3, 0.7\rangle$$

ile verilsin. Ayrıca, $\tilde{a}_j(j = 1,2,3)$'nin ağırlık vektörü $w = (0.5, 0.3, 0.2)^T$ olsun. Daha sonra, TDYN_{ao} operatörü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{TDYN}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle(0.242, 0.382, 0.576, 0.705); 0.5, 0.4, 0.9\rangle$$

skor değeri 0.143'dir.

Tanım 4.14 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ $(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{oao} ile gösterilen sıralı aritmetik operatör

$$\text{TDYN}_{oao}: {N_R}^n \to N_R \qquad \text{TDYN}_{oao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k \tilde{b}_k$$

ile tanımlanır.

Burada $\tilde{b}_k = \langle(a_k, b_k, c_k, d_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k}\rangle$ ile verilen TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{a}_j(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

Teorem 4.15 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle\, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra;

$$\mathrm{TDYN}_{oao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left\langle \left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k, \sum_{k=1}^{n} w_k b_k, \sum_{k=1}^{n} w_k c_k, \sum_{k=1}^{n} w_k d_k \right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \right\rangle$$

'dir.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k, d_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle$ ile verilen TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

Tanım 4.16 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle\, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{hao} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$\mathrm{TDYN}_{hao}: {N_R}^n \to N_R, \qquad \mathrm{TDYN}_{hao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k \hat{b}_k$$

ile tanımlanır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j \tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\tilde{A}_j (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

Teorem 4.17 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle\, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{hao} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$\text{TDYN}_{hao}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) = \left\langle\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k, \sum_{k=1}^{n} w_k b_k, \sum_{k=1}^{n} w_k c_k, \sum_{k=1}^{n} w_k d_k\right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k}\right\rangle$$

dır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'de $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j \tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{A}_j(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

Örnek 4.18 Kabul edelim ki $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,3)$ için TDYN-sayı ve $w = (0.3,0.4,0.3)^T$, TDYN_{hao} operatörünün ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, üç uzmanın değerlendirme sonuçları

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.214,0.321,0.545,0.625); 0.5,0.4,0.9 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.241,0.462,0.656,0.825); 0.8,0.2,0.4 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.311,0.414,0.531,0.725); 0.6,0.3,0.7 \rangle$$

ise ve $j = 1,2,3$ $için$ $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü $\omega = (0.5,0.3,0.2)^T$ olsun. Verilen sonuçları TDYN_{hao} operatörü ile aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz;

$$\tilde{A}_1 = 3 \times 0.5 \times \tilde{a}_1 = \langle (0.321, 0.482, 0.818, 0.938); 0.5,0.4,0.9 \rangle$$
$$\tilde{A}_2 = 3 \times 0.3 \times \tilde{a}_2 = \langle (0.217, 0.416, 0.590, 0.743); 0.8,0.2,0.4 \rangle$$
$$\tilde{A}_3 = 3 \times 0.2 \times \tilde{a}_3 = \langle (0.187, 0.248, 0.319, 0.435); 0.6,0.3,0.7 \rangle$$

TDYN-sayıların skorları

$$S_Y(\tilde{A}_1) = \frac{1}{16}[0.321 + 0.482 + 0.818 + 0.938] \times (2 + 0.5 - 0.4 - 0.9) = 0.192$$
$$S_Y(\tilde{A}_2) = \frac{1}{16}[0.217 + 0.416 + 0.590 + 0.743] \times (2 + 0.8 - 0.2 - 0.4) = 0.270$$
$$S_Y(\tilde{A}_3) = \frac{1}{16}[0.187 + 0.248 + 0.319 + 0.435] \times (2 + 0.6 - 0.3 - 0.7) = 0.119$$

dir. Buradan $S(\tilde{A}_2) > S(\tilde{A}_1) > S(\tilde{A}_3)$ olduğu görülür. Skor fonksiyonlarına göre yeniden sıralanırsa

$$\hat{b}_1 = \tilde{A}_2 = \langle (0.217, 0.416, 0.590, 0.743); 0.8, 0.2, 0.4 \rangle$$
$$\hat{b}_2 = \tilde{A}_1 = \langle (0.321, 0.482, 0.818, 0.938); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle$$
$$\hat{b}_3 = \tilde{A}_3 = \langle (0.187, 0.248, 0.319, 0.435); 0.6, 0.3, 0.7 \rangle$$

Teorem 4.17 göre, hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathrm{TDYN}_{hao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) &= \langle (0.217 \times 0.3 + 0.321 \times 0.4 + 0.187 \times 0.3, \\ &\quad 0.416 \times 0.3 + 0.482 \times 0.4 + 0.248 \times 0.3, \\ &\quad 0.590 \times 0.3 + 0.818 \times 0.4 + 0.319 \times 0.3, \\ &\quad 0.743 \times 0.3 + 0.938 \times 0.4 + 0.435 \times 0.3); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle \\ &= \langle (0.249, 0.392, 0.600, 0.728); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle \end{aligned}$$

Tanım 4.19 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle \, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $\gamma_j \in [0,1]$ için $\mathrm{TDYN}^{G}{}_{ao}$ ile gösterilen güven seviyeli ağırlaştırılmış aritmetik operatör

$$\mathrm{TDYN}^{G}{}_{ao}: N_R{}^n \rightarrow N_R, \mathrm{TDYN}^{G}{}_{ao} \, (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = w_1 \tilde{a}_1{}^{\gamma_1} + w_2 \tilde{a}_2{}^{\gamma_2} + \dots + w_n \tilde{a}_n{}^{\gamma_n}$$

ile tanımlanır.

Burada $\gamma_j \in [0,1]$ $(j = 1,2, \dots, n)$, $\tilde{a}_j$' nin güven seviyesidir ve karar verici tarafından belirlenmektedir.

Teorem 4.20 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle \, (j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra $\gamma_j \in [0,1]$ için $\mathrm{TDYN}^{G}{}_{ao}$ ile gösterilen güven seviyeli ağırlaştırılmış aritmetik operatör

$$\mathrm{TDYN}^{G}{}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a_j{}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{n} w_j b_j{}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{n} w_j c_j{}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{n} w_j d_j{}^{\gamma_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{n} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

'dir.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n = 2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2} \rangle$ iki TDYN-sayı olmak üzere;

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 = \langle \left(\sum_{j=1}^{2} w_j a_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{2} w_j b_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{2} w_j c_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{2} w_j d_j^{\gamma_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_k\tilde{a}_k = \langle \left(\sum_{j=1}^{k} w_j a_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j b_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j c_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j d_j^{\gamma_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_{k+1}\tilde{a}_{k+1} = \langle \left(\sum_{j=1}^{k} w_j a_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j b_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j c_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j d_j^{\gamma_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

$$+ \langle (w_{k+1} a_{k+1}^{\gamma_{k+1}}, w_{k+1} b_{k+1}^{\gamma_{k+1}}, w_{k+1} c_{k+1}^{\gamma_{k+1}}, w_{k+1} d_{k+1}^{\gamma_{k+1}}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}} \rangle$$

$$= \langle \left(\sum_{j=1}^{k+1} w_j a_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k+1} w_j b_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k+1} w_j c_j^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k+1} w_j d_j^{\gamma_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.21 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,3,4)$ için

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.214, 0.321, 0.545, 0.781); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle$$

$$\tilde{a}_2 = \langle (0.241, 0.462, 0.656, 0.963); 0.8, 0.2, 0.4 \rangle$$

$$\tilde{a}_3 = \langle (0.311, 0.414, 0.531, 0.722); 0.6, 0.3, 0.7 \rangle$$

$$\tilde{a}_4 = \langle (0.268, 0.321, 0.581, 0.745); 0.7, 0.2, 0.5 \rangle$$

ile verilsin. Ayrıca, $\tilde{a}_j (j = 1,2,3,4)$'nin ağırlık vektörü $w = (0.4, 0.1, 0.2, 0.3)^T$ olsun. Daha sonra γ_j güven seviyesi farklı değerler aldığında TDYN$^G{}_{ao}$ operatörü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$ olduğunda

$$\text{TDYN}^G{}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \langle (0.2523, 0.3537, 0.5641, 0.7766); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle$$

skor değeri 0.1460

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.8$ olduğunda

$$\text{TDYN}^G{}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \langle (0.0171, 0.0472, 0.1818, 0.4792); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle$$

skor değeri 0.0543

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.5$ olduğunda

$$\text{TDYN}^{G}{}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle(0.0013{,}0.0069{,}0.0597{,}0.3071); 0.5{,}0.4{,}0.9\rangle$$

skor değeri 0.0281 dir.

Lemma 4.22 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ ve $\tilde{b}_j = \langle(e_j, f_j, g_j, h_j); w_{\tilde{b}_j}, u_{\tilde{b}_j}, y_{\tilde{b}_j}\rangle$ $(j = 1{,}2{,}3{,}4)$ TDYN-sayı ailesi ve $\tilde{a} = \langle(a, b, c, d); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$ de TDYN-sayı olsun. $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'da $w_j \geq 0$ $(j = 1,2, \dots, n)$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü

1. Eğer $\tilde{a}_j = a$ $(j = 1,2, \dots, n)$ ise, $\text{SVTNWAO}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$ elde edilir.

2. Eğer
$\tilde{a}_j^{\,-} = \langle(min\{a_j\}, min\{b_j\}, min\{c_j\}, min\{d_j\}); min\left\{w_{\tilde{a}_j}\right\}, min\left\{u_{\tilde{a}_j}\right\}, min\left\{y_{\tilde{a}_j}\right\}\rangle$ ve
$\tilde{a}_j^{\,+} = \langle(max\{a_j\}, max\{b_j\}, max\{c_j\}, max\{d_j\}); max\left\{w_{\tilde{a}_j}\right\}, max\left\{u_{\tilde{a}_j}\right\}, max\left\{y_{\tilde{a}_j}\right\}\rangle$
ise,
$\tilde{a}^{-} \leq \text{TDYN}^{G}{}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^{+}$ elde edilir.

3. Eğer $a_j \leq e_j, b_j \leq f_j, c_j \leq g_j, d_j \leq h_j, w_{\tilde{a}_j} \leq w_{\tilde{b}_j}, u_{\tilde{a}_j} \geq u_{\tilde{b}_j}, y_{\tilde{a}_j} \geq y_{\tilde{b}_j} (j = 1,2, \dots, n)$ ise,

$\text{TDYN}^{G}{}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \text{TDYN}^{G}{}_{ao}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ elde edilir.

4.1.1.2 TDYN geometrik operatörler

Tanım 4.23 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ $(j = 1,2, \dots, n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'da $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{go} ile gösterilen TDYN ağırlaştırılmış geometrik operatör

$$\text{TDYN}_{go} : N_R{}^{n} \rightarrow N_R, \qquad \text{TDYN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_j{}^{w_j}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.24 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{go} ile gösterilen TDYN ağırlaştırılmış geometrik operatörün değeri

$$\mathrm{TDYN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{n} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle$$

'dir.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n = 2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2} \rangle$ iki TDYN-sayı olmak üzere;

$$\mathrm{TDYN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^{2} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$\mathrm{TDYN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_k) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$\begin{aligned}\mathrm{TDYN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}) &= \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle \\ &\quad \times \langle (w_{k+1}a_{k+1}, w_{k+1}b_{k+1}, w_{k+1}c_{k+1}, w_{k+1}d_{k+1}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}} \rangle \\ &= \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k+1} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle\end{aligned}$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 4.25 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$'da $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{ogo} ile gösterilen sıralı geometrik operatör

$$\mathrm{TDYN}_{ogo} : N_R{}^n \to N_R, \qquad \mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) = \prod_{k=1}^{n} \tilde{b}_k{}^{w_k}$$

ile tanımlanır.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k, d_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle$ TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

$$\begin{aligned}
\mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) &= \prod_{k=1}^{n} \tilde{b}_k{}^{w_k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\langle (a_k, b_k, c_k, d_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle \right)^{w_k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \langle (a_k{}^{w_k}, b_k{}^{w_k}, c_k{}^{w_k}, d_k{}^{w_k}); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle \\
&= \langle \left(\prod_{k=1}^{n} a_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} b_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} c_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} d_k{}^{w_k} \right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \rangle
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.26 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle (j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra;

$$\mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) = \langle \left(\prod_{k=1}^{n} a_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} b_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} c_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} d_k{}^{w_k} \right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \rangle$$

'dir.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k, d_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle$ TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n = 2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2} \rangle$ iki TDYN-sayı olmak üzere;

$$\mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \langle \left(\prod_{j=1}^{2} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$\mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k) = \langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$\mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}) = \langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

$$\times \langle (a_{k+1}^{w_{k+1}}, b_{k+1}^{w_{k+1}}, c_{k+1}^{w_{k+1}}, d_{k+1}^{w_{k+1}}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}} \rangle$$

$$= \langle \left(\prod_{j=1}^{k+1} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} d_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 2.27 Bazı girişimlere değerlendirmek için 4 uzman vardır. Uzmanların değerlendirmeleri

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.123, 0.234, 0.325, 0.524); 0.4, 0.5, 0.7 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.234, 0.354, 0.451, 0.632); 0.3, 0.6, 0.6 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.125, 0.365, 0.465, 0.555); 0.2, 0.7, 0.5 \rangle$$
$$\tilde{a}_4 = \langle (0.215, 0.345, 0.435, 0.726); 0.1, 0.8, 0.4 \rangle$$

ile verilsin. Ayrıca, $\tilde{a}_j (j = 1,2,3)$'nin ağırlık vektörü $w = (0.15, 0.35, 0.35, 0.15)^T$ olsun. Daha sonra, Verilen sonuçları TDYN_{ogo} operatörü ile aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz;

Çözüm:

TDYN-sayıların skorları

$$S_Y(\tilde{a}_1) = \frac{1}{16}[0.123 + 0.234 + 0.325 + 0.524] \times (2 + 0.4 - 0.5 - 0.7) = 0.090$$

$$S_Y(\tilde{a}_2) = \frac{1}{16}[0.234 + 0.354 + 0.451 + 0.632] \times (2 + 0.3 - 0.6 - 0.6) = 0.114$$

$$S_Y(\tilde{a}_3) = \frac{1}{16}[0.125 + 0.365 + 0.465 + 0.555] \times (2 + 0.2 - 0.7 - 0.5) = 0.094$$

$$S_Y(\tilde{a}_4) = \frac{1}{16}[0.215 + 0.345 + 0.435 + 0.726] \times (2 + 0.1 - 0.8 - 0.4) = 0.096$$

dir. Buradan $S_Y(\tilde{a}_2) > S_Y(\tilde{a}_4) > S_Y(\tilde{a}_3) > S_Y(\tilde{a}_1)$ olduğu görülür. Yani $\tilde{a}_2 > \tilde{a}_4 > \tilde{a}_3 > \tilde{a}_1$ dir.

$$\hat{b}_1 = \tilde{a}_2 = \langle (0.234, 0.354, 0.451, 0.632); 0.3, 0.6, 0.6 \rangle$$
$$\hat{b}_2 = \tilde{a}_4 = \langle (0.215, 0.345, 0.435, 0.726); 0.1, 0.8, 0.4 \rangle$$
$$\hat{b}_3 = \tilde{a}_3 = \langle (0.125, 0.365, 0.465, 0.555); 0.2, 0.7, 0.5 \rangle$$
$$\hat{b}_4 = \tilde{a}_1 = \langle (0.123, 0.234, 0.325, 0.524); 0.4, 0.5, 0.7 \rangle$$

Teorem 4.26 göre, hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathrm{TDYN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4) &= \langle (0.234^{0.15} \times 0.215^{0.35} \times 0.125^{0.35} \times 0.123^{0.15}, \\ &\quad 0.354^{0.15} \times 0.345^{0.35} \times 0.365^{0.35} \times 0.234^{0.15}, \\ &\quad 0.451^{0.15} \times 0.435^{0.35} \times 0.465^{0.35} \times 0.325^{0.15}, \\ &\quad 0.632^{0.15} \times 0.726^{0.35} \times 0.555^{0.35} \times 0.524^{0.15}); 0.1, 0.8, 0.7 \rangle \\ &= \langle (0.166, 0.333, 0.429, 0.616); 0.1, 0.8, 0.7 \rangle \end{aligned}$$

Tanım 4.28 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T'}$ de $w_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDYN_{hgo} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı geometrik operatör

$$\mathrm{TDYN}_{hgo} : N_R{}^n \to N_R, \qquad \mathrm{TDYN}_{hgo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} \hat{b}_k{}^{w_k}$$

ile tanımlanır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j \tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{A}_j(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

Teorem 4.29 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T}$'de $w_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDYN$_{hgo}$ ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı geometrik operatör

$$\mathrm{TDYN}_{hgo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left\langle \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} b_k^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} c_k^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} d_k^{w_k} \right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \right\rangle$$

dır. Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j \tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDYN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{A}_j(j = 1,2,\dots,n)$ TDYN-sayının k. en büyüğüdür.

Örnek 4.30 Kabul edelim ki $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j, d_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $j = 1,2,3,4$ için TDYN-sayı ve $w = (0.4, 0.1, 0.1, 0.4)^T$, TDYN$_{hgo}$ operatörünün ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, üç uzmanın değerlendirme sonuçları

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.123, 0.234, 0.325, 0.524); 0.4, 0.5, 0.7 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.234, 0.354, 0.451, 0.632); 0.3, 0.6, 0.6 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.125, 0.365, 0.465, 0.555); 0.2, 0.7, 0.5 \rangle$$
$$\tilde{a}_4 = \langle (0.215, 0.345, 0.435, 0.726); 0.1, 0.8, 0.4 \rangle$$

ise ve $j = 1,2,3$ *için* $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü $\omega = (0.2, 0.3, 0.3, 0.2)^T$ olsun. Verilen sonuçları TDYN$_{hgo}$ operatörü ile aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz;

$$\tilde{A}_1 = 4 \times 0.2 \times \tilde{a}_1 = \langle (0.098, 0.187, 0.260, 0.419); 0.4, 0.5, 0.7 \rangle$$
$$\tilde{A}_2 = 4 \times 0.3 \times \tilde{a}_2 = \langle (0.281, 0.425, 0.541, 0.758); 0.3, 0.6, 0.6 \rangle$$
$$\tilde{A}_3 = 4 \times 0.3 \times \tilde{a}_3 = \langle (0.150, 0.438, 0.558, 0.666); 0.2, 0.7, 0.5 \rangle$$
$$\tilde{A}_4 = 4 \times 0.2 \times \tilde{a}_4 = \langle (0.172, 0.276, 0.348, 0.581); 0.1, 0.8, 0.4 \rangle$$

TDYN-sayıların skorları

$$S_Y(\tilde{A}_1) = \frac{1}{16}[0.098 + 0.187 + 0.260 + 0.419] \times (2 + 0.4 - 0.5 - 0.7) = 0.072$$

$$S_Y(\tilde{A}_2) = \frac{1}{16}[0.281 + 0.425 + 0.541 + 0.758] \times (2 + 0.3 - 0.6 - 0.6) = 0.138$$

$$S_Y(\tilde{A}_3) = \frac{1}{16}[0.150 + 0.438 + 0.558 + 0.666] \times (2 + 0.2 - 0.7 - 0.5) = 0.113$$

$$S_Y(\tilde{A}_4) = \frac{1}{16}[0.172 + 0.276 + 0.348 + 0.581] \times (2 + 0.1 - 0.8 - 0.4) = 0.077$$

dir. Buradan $S(\tilde{A}_2) > S(\tilde{A}_3) > S(\tilde{A}_4) > S(\tilde{A}_1)$ olduğu görülür. Skor fonksiyonlarına göre yeniden sıralanırsa

$$\hat{b}_1 = \tilde{A}_2 = \langle(0.281, 0.425, 0.541, 0.758); 0.3,0.6,0.6\rangle$$
$$\hat{b}_2 = \tilde{A}_3 = \langle(0.150, 0.438, 0.558, 0.666); 0.2,0.7,0.5\rangle$$
$$\hat{b}_3 = \tilde{A}_4 = \langle(0.172, 0.276, 0.348, 0.581); 0.1,0.8,0.4\rangle$$
$$\hat{b}_4 = \tilde{A}_1 = \langle(0.098, 0.187, 0.260, 0.419); 0.4,0.5,0.7\rangle$$

Teorem 4.29 göre, hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\mathrm{TDYN}_{hgo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) &= \langle(0.281^{0.4} \times 0.150^{0.1} \times 0.172^{0.1} \times 0.098^{0.4},\\ &\quad 0.425^{0.4} \times 0.438^{0.1} \times 0.276^{0.1} \times 0.187^{0.4},\\ &\quad 0.541^{0.4} \times 0.558^{0.1} \times 0.348^{0.1} \times 0.260^{0.4},\\ &\quad 0.758^{0.4} \times 0.666^{0.1} \times 0.581^{0.1} \times 0.419^{0.4}); 0.1,0.8, 0.7\rangle\\ &= \langle(0.165,0.294,0.387,0.575); 0.1,0.8,0.7\rangle\end{aligned}$$

4.1.2 Tek değerli üçgensel neutrosophic sayı

Tanım 4.31 $a_1 \le b_1 \le c_1$ olacak şekilde $a_1, b_1, c_1 \in [0,1]$ ve $\mu_{\tilde{a}}: R \to [0, w_{\tilde{a}}]$ doğruluk fonksiyonu, $\nu_{\tilde{a}}: R \to [u_{\tilde{a}}, 1]$ kararsızlık fonksiyonu ve $\lambda_{\tilde{a}}: R \to [y_{\tilde{a}}, 1]$ yanlışlık fonksiyonu olsun. Daha sonra, R üzerinde tanımlı özel bir tek değerli neutrosophic sayı olan tek değerli üçgensel neutrosophic sayı (TDÜN-sayı)

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} (x - a_1)w_{\tilde{a}} / (b_1 - a_1) & a_1 \le x < b_1 \\ w_{\tilde{a}} & x = b_1 \\ (c_1 - x)w_{\tilde{a}} / (c_1 - b_1) & b_1 < x \le c_1 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\left(b_1-x+u_{\tilde{a}}\left(x-a_1\right)\right)/\left(b_1-a_1\right) & a_1\le x<b_1\\ u_{\tilde{a}} & x=b_1\\ \left(x-b_1+u_{\tilde{a}}\left(c_1-x\right)\right)/\left(c_1-b_1\right) & b_1<x\le c_1\\ 1 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

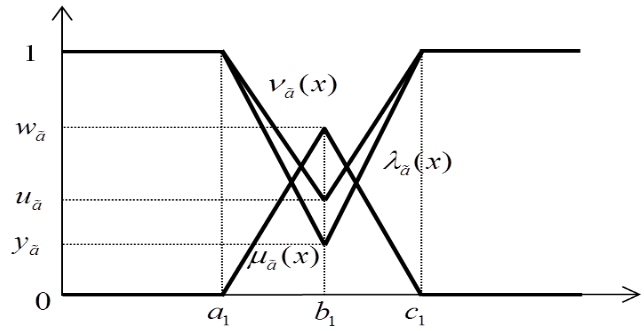
ve

$$\lambda_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\left(b_1-x+y_{\tilde{a}}\left(x-a_1\right)\right)/\left(b_1-a_1\right) & a_1\le x<b_1\\ y_{\tilde{a}} & x=b_1\\ \left(x-b_1+y_{\tilde{a}}\left(c_1-x\right)\right)/\left(c_1-b_1\right) & b_1<x\le c_1\\ 1 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

üyelik fonksiyonları ile

$$\tilde{a}=\langle(a_1,b_1,c_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$$

şeklinde tanımlanır. Bir TDÜN-sayı Şekil 2 deki gibi grafik ile de verilebilir.



Şekil 2: TDÜN-sayı

Eğer $a_1 \geq 0$ ise $\tilde{a}=\langle(a_1,b_1,c_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$ TDÜN-sayısına pozitif TDÜN-sayı denir ve $\tilde{a}>0$ ile gösterilir. Benzer şekilde $c_1 \leq 0$ ise $\tilde{a}=\langle(a_1,b_1,c_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$ TDÜN-sayısına negatif TDÜN-sayı denir ve $\tilde{a}<0$ ile gösterilir.

Bundan sonra R üzerinde tanımlı tüm TDÜN-sayıları $\overline{N}_R$ ile göstereceğiz.

Örnek 4.32 $\tilde{a}=\langle(2,4,8);0.8,0.2,0.5\rangle$ TDÜN-sayıdır. Bu sayının doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu sırasıyla

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}0.4(x-2) & 2\leq x<4\\ 0.8 & x=4\\ 0.2(8-x) & 4<x\leq 8\\ 0 & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}1.8-0.4x & 2\leq x<4\\ 0.2 & x=4\\ 0.2x-0.6 & 4<x\leq 8\\ 1 & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\lambda_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}1.5-0.25x & 2\leq x<4\\ 0.5 & x=4\\ 0.125x & 4<x\leq 8\\ 1 & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dır.

Tanım 4.33 $\tilde{a}=\langle(a_1,b_1,c_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$ ve $\tilde{b}=\langle(a_2,b_2,c_2);w_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}},y_{\tilde{b}}\rangle$ iki TDÜN-sayı ve $\gamma\neq 0$ olmak üzere;

1. $\tilde{a}+\tilde{b}=\langle(a_1+a_1,b_1+b_2,c_1+c_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle$

2. $\tilde{a}-\tilde{b}=\langle(a_1-c_2,b_1-b_2,c_1-a_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle$

3. $\tilde{a}\tilde{b}=\begin{cases}\langle(a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle & c_1>0 \quad c_2>0\\ \langle(a_1c_2,b_1b_2,c_1a_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle & c_1<0 \quad c_2>0\\ \langle(c_1c_2,b_1b_2,a_1a_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle & c_1<0 \quad c_2<0\end{cases}$

4. $\tilde{a}/\tilde{b}=\begin{cases}\langle(a_1/c_2,b_1/b_2,c_1/a_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle & c_1>0 \quad c_2>0\\ \langle(c_1/c_2,b_1/b_2,a_1/a_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle & c_1<0 \quad c_2>0\\ \langle(c_1/a_2,b_1/b_2,a_1/c_2);w_{\tilde{a}}\wedge w_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}},y_{\tilde{a}}\vee y_{\tilde{b}}\rangle & c_1<0 \quad c_2<0\end{cases}$

5. $\gamma\tilde{a}=\begin{cases}\langle(\gamma a_1,\gamma b_1,\gamma c_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle & \gamma>0\\ \langle(\gamma c_1,\gamma b_1,\gamma a_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle & \gamma<0\end{cases}$

6. $\tilde{a}^{\gamma}=\begin{cases}\langle(a_1^{\gamma},b_1^{\gamma},c_1^{\gamma});w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle & \gamma>0\\ \langle(c_1^{\gamma},b_1^{\gamma},a_1^{\gamma});w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle & \gamma<0\end{cases}$

7. $\tilde{a}^{-1}=(1/c_1,1/b_1,1/a_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$

Örnek 4.34 $\tilde{a} = \langle(2,4,5); 0.3,0.4,0.8\rangle$ ve $\tilde{b} = \langle(1,2,4); 0.7,0.8,0.9\rangle$ iki TDÜN-sayı olmak üzere;

1. $\tilde{a}+\tilde{b} = \langle(3,6,9); 0.3, 0.8, 0.9\rangle$
2. $\tilde{a}-\tilde{b} = \langle(-2,2,4); 0.3, 0.8, 0.9\rangle$
3. $\tilde{a}\tilde{b} = \langle(2,8,20); 0.3, 0.8, 0.9\rangle$
4. $\tilde{a}/\tilde{b} = \langle(\frac{1}{2}, 2, 5); 0.3, 0.8, 0.9\rangle$
5. $2\tilde{a} = \langle(4,8,10); 0.3, 0.4, 0.5\rangle$
6. $5\tilde{b} = \langle(5,10,20); 0.7, 0.8, 0.9\rangle$
7. $\tilde{a}^{-1} = \langle(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}); 0.3, 0.4, 0.5\rangle$
8. $\tilde{b}^{-1} = \langle(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1); 0.7, 0.8, 0.9\rangle$

Yorum 4.35 $\tilde{a} = \langle(a_1, b_1, c_1, d_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$, $\tilde{b} = \langle(a_2, b_2, c_2, d_2); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{b}}\rangle \in N_R$ olsun. Eğer, bu iki TDÜN-sayıda $0 < w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} < 1$, $y_{\tilde{a}} = 0$ ve $0 < w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{b}} < 1$, $y_{\tilde{b}} = 0$ ise $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ Tanım 3.17 de verilen üçgensel sezgisel bulanık sayıya dönüşür. Ayrıca Tanım 4.33 de verilen aritmetik işlemler Tanım 3.19 deki aritmetik işlemlere indirgenir.

Tanım 4.36 $\tilde{a} = \langle(a, b, c); \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}}, \gamma_{\tilde{a}}\rangle$ TDÜN-sayı olsun. Daha sonra, $S_{Ü}(\tilde{a})$ skor fonksiyonu ve $A_{Ü}(\tilde{a})$ kesinlik fonksiyonu

$$S_{Ü}(\tilde{a}) = \frac{1}{8}[a + b + c] \times (2 + \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}} - \gamma_{\tilde{a}})$$

$$A_{Ü}(\tilde{a}) = \frac{1}{8}[a + b + c] \times (2 + \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}} + \gamma_{\tilde{a}})$$

ile tanımlanır.

Bu fonksiyonlar herhangi iki TDÜN-sayıyı karşılaştırmak için kullanılır.

Örnek 4.37 $\tilde{a} = \langle(1,4,5); 0.9,0.5,0.1\rangle$ TDÜN-sayı olsun. Daha sonra,

$$S_{Ü}(\tilde{a}) = \frac{1}{8}[1 + 4 + 5] \times (2 + 0.9 - 0.5 - 0.1) = 2.875$$

ve

$$A_{\text{Ü}}(\tilde{a}) = \frac{1}{8}[1+4+5] \times (2+0.9-0.5+0.1) = 3.125$$

dir.

Tanım 4.38 $\tilde{a}_1$ ve $\tilde{a}_2$ iki TDÜN-sayı olsun. Daha sonra, bu sayıların karşılaştırılması

1) $S_{\text{Ü}}(\tilde{a}_1) < S_{\text{Ü}}(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ dir.
2) $S_{\text{Ü}}(\tilde{a}_1) > S_{\text{Ü}}(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$ dir.
3) $S_{\text{Ü}}(\tilde{a}_1) = S_{\text{Ü}}(\tilde{a}_2)$ ise,
   a) $A_{\text{Ü}}(\tilde{a}_1) < A_{\text{Ü}}(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ dir.
   b) $A_{\text{Ü}}(\tilde{a}_1) > A_{\text{Ü}}(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$ dir.
   c) $A_{\text{Ü}}(\tilde{a}_1) = A_{\text{Ü}}(\tilde{a}_2)$ ise, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ dir.

ile tanımlanır.

4.1.2.1 TDÜN-sayılar üzerine aritmetik operatörler

Tanım 4.39 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDÜN$_{ao}$ ile gösterilen TDÜN ağırlaştırılmış aritmetik operatör

$$\text{TDÜN}_{ao} : \bar{N}_R^{\ n} \to \bar{N}_R, \qquad \text{TDÜN}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{a}_j$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.40 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDÜN$_{ao}$ ile gösterilen operatör

$$\text{TDÜN}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left\langle \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a_j, \sum_{j=1}^{n} w_j b_j, \sum_{j=1}^{n} w_j c_j \right); \bigwedge_{j=1}^{n} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle$$

'dir.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n=2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2} \rangle$ iki TDÜN-sayı olmak üzere;

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 = \langle \left(\sum_{j=1}^{2} w_j a_j, \sum_{j=1}^{2} w_j b_j, \sum_{j=1}^{2} w_j c_j \right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n=k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_k\tilde{a}_k = \langle \left(\sum_{j=1}^{k} w_j a_j, \sum_{j=1}^{k} w_j b_j, \sum_{j=1}^{k} w_j c_j \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_{k+1}\tilde{a}_{k+1} = \langle \left(\sum_{j=1}^{k} w_j a_j, \sum_{j=1}^{k} w_j b_j, \sum_{j=1}^{k} w_j c_j \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

$$+ \langle (w_{k+1}a_{k+1}, w_{k+1}b_{k+1}, w_{k+1}c_{k+1}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}} \rangle$$

$$= \langle \left(\sum_{j=1}^{k+1} w_j a_j, \sum_{j=1}^{k+1} w_j b_j, \sum_{j=1}^{k+1} w_j c_j \right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan $n = k+1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.41 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,3)$ için

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.214, 0.321, 0.545); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.241, 0.462, 0.656); 0.8, 0.2, 0.4 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.311, 0.414, 0.531); 0.6, 0.3, 0.7 \rangle$$

ile verilsin. Ayrıca, $\tilde{a}_j(j = 1,2,3)$'nin ağırlık vektörü $w = (0.5, 0.3, 0.2)^T$ olsun. Daha sonra, TDÜN_{ao} operatörü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{TDÜN}_{ao} \ (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \langle (0.242, 0.382, 0.576); 0.5, 0.4, 0.9 \rangle$$

ve skor değeri 0.180'dir.

Lemma 4.42 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ ve $\tilde{b}_j = \langle (e_j, f_j, g_j); w_{\tilde{b}_j}, u_{\tilde{b}_j}, y_{\tilde{b}_j} \rangle$ $(j = 1,2,3)$ TDÜN-sayı ailesi ve $\tilde{a} = \langle (a, b, c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ de TDÜN-sayı olsun. $w =$

$(w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \geq 0$ $(j = 1,2, \dots, n)$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü ve $\gamma_j \in [0,1]$,

1) Eğer $\tilde{a}_j = a$ $(j = 1,2, \dots, n)$ ise, $\text{TDÜN}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$ elde edilir.
2) Eğer $\tilde{a}_j^- = \langle (min\{a_j\}, min\{b_j\}, min\{c_j\}); min\{w_{\tilde{a}_j}\}, min\{u_{\tilde{a}_j}\}, min\{y_{\tilde{a}_j}\} \rangle$ ve $\tilde{a}_j^+ = \langle (max\{a_j\}, max\{b_j\}, max\{c_j\}); max\{w_{\tilde{a}_j}\}, max\{u_{\tilde{a}_j}\}, max\{y_{\tilde{a}_j}\} \rangle$ ise, $\tilde{a}^- \leq N_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^+$ elde edilir.
3) Eğer $a_j \leq e_j, b_j \leq f_j, c_j \leq g_j, w_{\tilde{a}_j} \leq w_{\tilde{b}_j}, u_{\tilde{a}_j} \geq u_{\tilde{b}_j}, y_{\tilde{a}_j} \geq y_{\tilde{b}_j} (j = 1,2, \dots, n)$ ise,

$$\text{TDÜN}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \text{TDÜN}_{ao}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$$

elde edilir.

Tanım 4.43 $(j = 1,2, \dots, n)$ için $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra TDÜN_{oao} ile gösterilen sıralı aritmetik operatör

$$\text{TDÜN}_{oao} : \bar{N}_R^{\,n} \to \bar{N}_R, \quad N_{oao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k \tilde{b}_k$$

ile tanımlanır.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2, \dots, n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

Teorem 4.44 $(j = 1,2, \dots, n)$ için $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra;

$$\text{TDÜN}_{oao}\,(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n) = \left\langle\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k, \sum_{k=1}^{n} w_k b_k, \sum_{k=1}^{n} w_k c_k\right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k}\right\rangle$$

'dir.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k}\rangle$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2,\ldots,n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

Tanım 4.45 $(j = 1,2,\ldots,n)$ için $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ 'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDÜN_{hao} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$\text{TDÜN}_{hao} : \bar{N}_R^{\ n} \to \bar{N}_R, \qquad \text{TDÜN}_{hao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k \hat{b}_k$$

ile tanımlanır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j \tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ için $\tilde{A}_j (j = 1,2,\ldots,n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

Teorem 4.46 $(j = 1,2,\ldots,n)$ için $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDÜN_{hao} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı aritmetik operatör

$$\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left\langle\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k, \sum_{k=1}^{n} w_k b_k, \sum_{k=1}^{n} w_k c_k\right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k}\right\rangle$$

dır. Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j \tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{A}_j (j = 1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

Örnek 4.47 Kabul edelim ki $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,3)$ için TDÜN-sayı ve $w = (0.3,0.4,0.3)^T$, TDÜN_{hao} operatörünün ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, üç uzmanın değerlendirme sonuçları

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.214, 0.321, 0.545); 0.5,0.4,0.9 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.241, 0.462, 0.656); 0.8,0.2,0.4 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.311, 0.414, 0.531); 0.6,0.3,0.7 \rangle$$

ise ve $j = 1,2,3\ için\ \tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü $\omega = (0.5,0.3,0.2)^T$ olsun. Verilen sonuçları TDÜN_{hao} operatörü ile aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz;

$$\tilde{A}_1 = 3 \times 0.5 \times \tilde{a}_1 = \langle (0.321, 0.482, 0.818); 0.5,0.4,0.9 \rangle$$
$$\tilde{A}_2 = 3 \times 0.3 \times \tilde{a}_2 = \langle (0.217, 0.416, 0.590); 0.8,0.2,0.4 \rangle$$
$$\tilde{A}_3 = 3 \times 0.2 \times \tilde{a}_3 = \langle (0.187, 0.248, 0.319); 0.6,0.3,0.7 \rangle$$

TDÜN-sayıların skorları

$$S(\tilde{A}_1) = \frac{1}{8}[0.321 + 0.482 + 0.818] \times (2 + 0.5 - 0.4 - 0.9) = 0.243$$
$$S(\tilde{A}_2) = \frac{1}{8}[0.217 + 0.416 + 0.590] \times (2 + 0.8 - 0.2 - 0.4) = 0.336$$
$$S(\tilde{A}_3) = \frac{1}{8}[0.187 + 0.248 + 0.319] \times (2 + 0.6 - 0.3 - 0.7) = 0.151$$

dir. Buradan $S(\tilde{A}_2) > S(\tilde{A}_1) > S(\tilde{A}_3)$ olduğu görülür. Skor fonksiyonlarına göre yeniden sıralanırsa

$$\hat{b}_1 = \tilde{A}_2 = \langle (0.217, 0.416, 0.590); 0.8,0.2,0.4 \rangle$$
$$\hat{b}_2 = \tilde{A}_1 = \langle (0.321, 0.482, 0.818); 0.5,0.4,0.9 \rangle$$
$$\hat{b}_3 = \tilde{A}_3 = \langle (0.187, 0.248, 0.319); 0.6,0.3,0.7 \rangle$$

Teorem 4.46 göre, hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3) &= \langle(0.217\times 0.3+0.321\times 0.4+0.187\times 0.3,\\ &\quad 0.416\times 0.3+0.482\times 0.4+0.248\times 0.3,\\ &\quad 0.590\times 0.3+0.818\times 0.4+0.319\times 0.3);0.5,0.4,0.9\rangle\\ &= \langle(0.249,0.392,0.600);0.5,0.4,0.9\rangle\end{aligned}$$

Tanım 4.48 $\tilde{a}_j=\langle(a_j,b_j,c_j);w_{\tilde{a}_j},u_{\tilde{a}_j},y_{\tilde{a}_j}\rangle$ $(j=1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayı ailesi ve $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$, $w_j\in[0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, $\gamma_j\in[0,1]$ için $\text{TDÜN}^G{}_{ao}$ ile gösterilen güven seviyeli ağırlaştırılmış aritmetik operatör

$$\text{TDÜN}^G{}_{ao}:N_R{}^n\to N_R,\text{TDÜN}^G{}_{ao}\ (\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n)=w_1\tilde{a}_1{}^{\gamma_1}+w_2\tilde{a}_2{}^{\gamma_2}+\cdots+w_n\tilde{a}_n{}^{\gamma_n}$$

ile tanımlanır.

Burada $\gamma_j\in[0,1]$ $(j=1,2,\dots,n)$, $\tilde{a}_j{}'$ nin güven seviyesidir ve karar verici tarafından belirlenmektedir.

Teorem 4.49 $\tilde{a}_j=\langle(a_j,b_j,c_j);w_{\tilde{a}_j},u_{\tilde{a}_j},y_{\tilde{a}_j}\rangle$ $(j=1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayı ailesi ve $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$, $w_j\in[0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra $\gamma_j\in[0,1]$ için $\text{TDÜN}^G{}_{ao}$ ile gösterilen operatör

$$\text{TDÜN}^G{}_{ao}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n)=\left\langle\left(\sum_{j=1}^{n}w_ja_j{}^{\gamma},\sum_{j=1}^{n}w_jb_j{}^{\gamma},\sum_{j=1}^{n}w_jc_j{}^{\gamma}\right);\bigwedge_{j=1}^{n}w_{\tilde{a}_j},\bigvee_{j=1}^{n}u_{\tilde{a}_j},\bigvee_{j=1}^{n}y_{\tilde{a}_j}\right\rangle$$

'dir.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n=2$ için

$\tilde{a}_1=\langle(a_1,b_1,c_1);w_{\tilde{a}_1},u_{\tilde{a}_1},y_{\tilde{a}_1}\rangle$ ve $\tilde{a}_2=\langle(a_2,b_2,c_2);w_{\tilde{a}_2},u_{\tilde{a}_2},y_{\tilde{a}_2}\rangle$ iki TDÜN-sayı olmak üzere;

$$w_1\tilde{a}_1+w_2\tilde{a}_2=\left\langle\left(\sum_{j=1}^{2}w_ja_j{}^{\gamma_j},\sum_{j=1}^{2}w_jb_j{}^{\gamma_j},\sum_{j=1}^{2}w_jc_j{}^{\gamma_j}\right);\bigwedge_{j=1}^{2}w_{\tilde{a}_j},\bigvee_{j=1}^{2}u_{\tilde{a}_j},\bigvee_{j=1}^{2}y_{\tilde{a}_j}\right\rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_k\tilde{a}_k = \langle\left(\sum_{j=1}^{k} w_j {a_j}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j {b_j}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j {c_j}^{\gamma_j}\right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j}\rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 + \cdots + w_{k+1}\tilde{a}_{k+1} = \langle\left(\sum_{j=1}^{k} w_j {a_j}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j {b_j}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k} w_j {c_j}^{\gamma_j}\right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j}\rangle$$

$$+\langle(w_{k+1}{a_{k+1}}^{\gamma_{k+1}}, w_{k+1}{b_{k+1}}^{\gamma_{k+1}}, w_{k+1}{c_{k+1}}^{\gamma_{k+1}}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}}\rangle$$

$$= \langle\left(\sum_{j=1}^{k+1} w_j {a_j}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k+1} w_j {b_j}^{\gamma_j}, \sum_{j=1}^{k+1} w_j {c_j}^{\gamma_j}\right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j}\rangle$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.50 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ $(j = 1,2,3,4)$ için

$$\tilde{a}_1 = \langle(0.214, 0.321, 0.545); 0.5, 0.4, 0.9\rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle(0.241, 0.462, 0.656); 0.8, 0.2, 0.4\rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle(0.311, 0.414, 0.531); 0.6, 0.3, 0.7\rangle$$
$$\tilde{a}_4 = \langle(0.268, 0.321, 0.581); 0.7, 0.2, 0.5\rangle$$

ile verilsin. Ayrıca, $\tilde{a}_j(j = 1,2,3,4)$'nin ağırlık vektörü $w = (0.4, 0.1, 0.2, 0.3)^T$ olsun. Daha sonra γ_j güven seviyesi farklı değerler aldığında $\text{TDÜN}^G{}_{ao}$ operatörü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$ olduğunda

$$\text{TDÜN}^G{}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \langle(0.2523, 0.3537, 0.5641); 0.5, 0.4, 0.9\rangle$$

skor değeri

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.8$ olduğunda

$$\text{TDÜN}^G{}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \langle(0.0171, 0.0472, 0.1818); 0.5, 0.4, 0.9\rangle$$

skor değeri

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.5$ olduğunda

$$\text{TDÜN}^G{}_{ao}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \langle(0.0013, 0.0069, 0.0597); 0.5, 0.4, 0.9\rangle$$

skor değeri

Lemma 4.51 $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ ve $\tilde{b}_j = \langle(e_j, f_j, g_j); w_{\tilde{b}_j}, u_{\tilde{b}_j}, y_{\tilde{b}_j}\rangle$ $(j = 1,2,3,4)$ TDÜN-sayı ailesi ve $\tilde{a} = \langle(a, b, c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$ de TDÜN-sayı olsun.

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \geq 0$ $(j = 1,2,\dots,n)$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü ve $\gamma_j \in [0,1]$,

1. Eğer $\tilde{a}_j = a$ $(j = 1,2,\dots,n)$ ise, $\text{SVTNWAO}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$ elde edilir.

2. Eğer $\tilde{a}_j^{\,-} = \langle (min\{a_j\}, min\{b_j\}, min\{c_j\}); min\{w_{\tilde{a}_j}\}, min\{u_{\tilde{a}_j}\}, min\{y_{\tilde{a}_j}\} \rangle$ ve $\tilde{a}_j^{\,+} = \langle (max\{a_j\}, max\{b_j\}, max\{c_j\}); max\{w_{\tilde{a}_j}\}, max\{u_{\tilde{a}_j}\}, max\{y_{\tilde{a}_j}\} \rangle$ ise, $\tilde{a}^- \leq \text{TDÜN}^G{}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \tilde{a}^+$ elde edilir.

3. Eğer $a_j \leq e_j, b_j \leq f_j, c_j \leq g_j, w_{\tilde{a}_j} \leq w_{\tilde{b}_j}, u_{\tilde{a}_j} \geq u_{\tilde{b}_j}, y_{\tilde{a}_j} \geq y_{\tilde{b}_j} (j = 1,2,\dots,n)$ ise,

$\text{TDÜN}^G{}_{ao}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \text{TDÜN}^G{}_{ao}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ elde edilir.

4.1.2.2 TDÜN-geometrik operatörler

Tanım 4.52 $(j = 1,2,\dots,n)$ içim $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ TDÜN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra TDÜN_{go} ile gösterilen TDÜN-ağırlaştırılmış geometrik operatör

$$\text{TDÜN}_{go} : \bar{N}_R{}^n \to \bar{N}_R, \qquad \text{TDÜN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^{\,w_j}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.53 $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ $(j = 1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayı ailesi ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ olacak şekilde ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, TDÜN_{go} ile gösterilen TDÜN-ağırlaştırılmış geometrik operatörün değeri

$$\text{TDÜN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{\,w_j}, \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j}, \prod_{j=1}^{n} c_j^{\,w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{n} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{n} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle$$

şeklindedir.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n = 2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2} \rangle$ iki TDÜN-sayı olmak üzere;

$$\text{TDÜN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \langle \left(\prod_{j=1}^{2} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{2} c_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$\text{TDÜN}_{go}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$\begin{aligned} \text{TDÜN}_{go}\ (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}) &= \langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \rangle \\ &\quad \times \langle (w_{k+1} a_{k+1}, w_{k+1} b_{k+1}, w_{k+1} c_{k+1}); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}} \rangle \\ &= \langle \left(\prod_{j=1}^{k+1} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} c_j^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j} \rangle \end{aligned}$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 4.54 $(j = 1,2, \dots, n)$ için $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra, TDÜN_{ogo} ile gösterilen sıralı geometrik operatör

$$\text{TDÜN}_{ogo} : \bar{N}_R^{\ n} \to \bar{N}_R, \qquad \text{TDÜN}_{ogo}\ (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \prod_{k=1}^{n} \tilde{b}_k^{\ w_k}$$

ile tanımlanır.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2, \dots, n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

$$\begin{aligned}
\text{TDÜN}_{ogo}\ (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) &= \prod_{k=1}^{n} \tilde{b}_k^{\ w_k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\langle (a_k, b_k, c_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle\ \right)^{w_k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \langle (a_k^{\ w_k}, b_k^{\ w_k}, c_k^{\ w_k}); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle \\
&= \langle \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\ w_k}, \prod_{k=1}^{n} b_k^{\ w_k}, \prod_{k=1}^{n} c_k^{\ w_k} \right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \rangle
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.55 $(j = 1,2, \dots, n)$ için $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ olacak şekilde ağırlaştırılmış vektör olsun. Daha sonra;

$$\text{TDÜN}_{ogo}\ (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \langle \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\ w_k}, \prod_{k=1}^{n} b_k^{\ w_k}, \prod_{k=1}^{n} c_k^{\ w_k} \right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \rangle$$

'dir.

Burada $\tilde{b}_k = \langle (a_k, b_k, c_k); w_{\tilde{a}_k}, u_{\tilde{a}_k}, y_{\tilde{a}_k} \rangle$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\tilde{a}_j (j = 1,2, \dots, n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

İspat: Tümevarım metodu kullanarak ispatı yapabiliriz. Bunun için

i. $n = 2$ için

$\tilde{a}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1); w_{\tilde{a}_1}, u_{\tilde{a}_1}, y_{\tilde{a}_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2); w_{\tilde{a}_2}, u_{\tilde{a}_2}, y_{\tilde{a}_2} \rangle$ iki TDÜN-sayı olmak üzere;

$$\text{TDÜN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \langle \left(\prod_{j=1}^{2} a_j^{\ w_j}, \prod_{j=1}^{2} b_j^{\ w_j}, \prod_{j=1}^{2} c_j^{\ w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{2} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{2} y_{\tilde{a}_j} \rangle$$

olduğundan doğrudur.

ii. $n = k$ için doğruluğunu kabul edip, yani

$$\text{TDÜN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j{}^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j{}^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j{}^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde,

$$\begin{aligned}
\text{TDÜN}_{ogo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}) &= \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k} a_j{}^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} b_j{}^{w_j}, \prod_{j=1}^{k} c_j{}^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \left(a_{k+1}{}^{w_{k+1}}, b_{k+1}{}^{w_{k+1}}, c_{k+1}{}^{w_{k+1}} \right); w_{\tilde{a}_{k+1}}, u_{\tilde{a}_{k+1}}, y_{\tilde{a}_{k+1}} \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k+1} a_j{}^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} b_j{}^{w_j}, \prod_{j=1}^{k+1} c_j{}^{w_j} \right); \bigwedge_{j=1}^{k+1} w_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} u_{\tilde{a}_j}, \bigvee_{j=1}^{k+1} y_{\tilde{a}_j} \right\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan $n = k + 1$ için doğrudur. Sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.56 Bazı girişimlere değerlendirmek için 4 uzman vardır. Uzmanların değerlendirmeleri

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.123, 0.234, 0.325); 0.4, 0.5, 0.7 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.234, 0.354, 0.451); 0.3, 0.6, 0.6 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.125, 0.365, 0.465); 0.2, 0.7, 0.5 \rangle$$
$$\tilde{a}_4 = \langle (0.215, 0.345, 0.435); 0.1, 0.8, 0.4 \rangle$$

ile verilsin. Ayrıca, $\tilde{a}_j(j = 1,2,3)$'nin ağırlık vektörü $w = (0.15, 0.35, 0.35, 0.15)^T$ olsun. Daha sonra, Verilen sonuçları TDÜN_{ogo} operatörü ile aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz;

Çözüm:

TDÜN-sayıların skorları

$$S(\tilde{a}_1) = \frac{1}{8}[0.123 + 0.234 + 0.325] \times (2 + 0.4 - 0.5 - 0.7) = 0.102$$

$$S(\tilde{a}_2) = \frac{1}{8}[0.234 + 0.354 + 0.451] \times (2 + 0.3 - 0.6 - 0.6) = 0.143$$

$$S(\tilde{a}_3) = \frac{1}{8}[0.125 + 0.365 + 0.465] \times (2 + 0.2 - 0.7 - 0.5) = 0.119$$

$$S(\tilde{a}_4) = \frac{1}{8}[0.215 + 0.345 + 0.435] \times (2 + 0.1 - 0.8 - 0.4) = 0.112$$

dir. Buradan $S(\tilde{a}_2) > S(\tilde{a}_3) > S(\tilde{a}_4) > S(\tilde{a}_1)$ olduğu görülür. Yani $\tilde{a}_2 > \tilde{a}_3 > \tilde{a}_4 > \tilde{a}_1$ dir.

$$\hat{b}_1 = \tilde{a}_2 = \langle(0.234, 0.354, 0.451); 0.3,0.6,0.6\rangle$$
$$\hat{b}_2 = \tilde{a}_3 = \langle(0.125, 0.365, 0.465); 0.2,0.7,0.5\rangle$$
$$\hat{b}_3 = \tilde{a}_4 = \langle(0.215, 0.345, 0.435); 0.1,0.8,0.4\rangle$$
$$\hat{b}_4 = \tilde{a}_1 = \langle(0.123, 0.234, 0.325); 0.4,0.5,0.7\rangle$$

Teorem 4.55 göre, hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\text{TDÜN}_{ogo}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3,\tilde{a}_4) &= \langle(0.234^{0.15} \times 0.125^{0.35} \times 0.215^{0.35} \times 0.123^{0.15},\\ &\quad 0.354^{0.15} \times 0.365^{0.35} \times 0.345^{0.35} \times 0.234^{0.15},\\ &\quad 0.451^{0.15} \times 0.465^{0.35} \times 0.435^{0.35} \times 0.325^{0.15}); 0.1,0.8,0.7\rangle\\ &= \langle(0.166,0.333,0.429); 0.1,0.8,0.7\rangle\end{aligned}$$

Tanım 4.57 $(j = 1,2,\dots,n)$ için $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{T}$'de $w_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDÜN_{hgo} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı geometrik operatör

$$\text{TDÜN}_{hgo} : \bar{N}_R{}^n \to \bar{N}_R, \quad \text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} \hat{b}_k{}^{w_k}$$

ile tanımlanır.

Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'de $\omega_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j\tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{A}_j(j = 1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

Teorem 4.58 $(j = 1,2,\dots,n)$ için $\tilde{a}_j = \langle(a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j}\rangle$ TDÜN-sayı ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$'de $w_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ olacak şekilde operatörün ağırlaştırılmış vektörü olsun. Daha sonra TDÜN_{hgo} ile gösterilen sıralı hibrit ağırlıklı geometrik operatör

$$\text{TDÜN}_{hgo}\,(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) = \left\langle \left(\prod_{k=1}^{n} a_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} b_k{}^{w_k}, \prod_{k=1}^{n} c_k{}^{w_k}\right); \bigwedge_{k=1}^{n} w_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} u_{\tilde{a}_k}, \bigvee_{k=1}^{n} y_{\tilde{a}_k} \right\rangle$$

dır. Burada, n denge faktörü ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$'da $\omega_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n}\omega_k = 1$ olacak şekilde $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü olacak şekilde $\tilde{A}_j = n\omega_j\tilde{a}_j$ olmak üzere $\hat{b}_k$ TDÜN-sayısı skor ve kesinlik fonksiyonu kullanılarak elde edilen ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{A}_j(j = 1,2,\dots,n)$ TDÜN-sayının k. en büyüğüdür.

Örnek 4.59 Kabul edelim ki $\tilde{a}_j = \langle (a_j, b_j, c_j); w_{\tilde{a}_j}, u_{\tilde{a}_j}, y_{\tilde{a}_j} \rangle\, (j = 1,2,3)$ için TDÜN-sayı ve $w = (0.4, 0.1, 0.1, 0.4)^T$, TDÜN_{hgo} operatörünün ağırlık vektörü olsun. Daha sonra, üç uzmanın değerlendirme sonuçları

$$\tilde{a}_1 = \langle (0.123, 0.234, 0.325); 0.4,0.5,0.7 \rangle$$
$$\tilde{a}_2 = \langle (0.234, 0.354, 0.451); 0.3,0.6,0.6 \rangle$$
$$\tilde{a}_3 = \langle (0.125, 0.365, 0.465); 0.2,0.7,0.5 \rangle$$
$$\tilde{a}_4 = \langle (0.215, 0.345, 0.435); 0.1,0.8,0.4 \rangle$$

ise ve $j = 1,2,3\ için$ $\tilde{a}_j$'nin ağırlık vektörü $\omega = (0.2, 0.3, 0.3, 0.2)^T$ olsun. Verilen sonuçları TDÜN_{hao} operatörü ile aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz;

$$\tilde{A}_1 = 4 \times 0.2 \times \tilde{a}_1 = \langle (0.098, 0.187, 0.260); 0.4,0.5,0.7 \rangle$$
$$\tilde{A}_2 = 4 \times 0.3 \times \tilde{a}_2 = \langle (0.281, 0.425, 0.541); 0.3,0.6,0.6 \rangle$$
$$\tilde{A}_3 = 4 \times 0.3 \times \tilde{a}_3 = \langle (0.150, 0.438, 0.558); 0.2,0.7,0.5 \rangle$$
$$\tilde{A}_4 = 4 \times 0.2 \times \tilde{a}_4 = \langle (0.172, 0.276, 0.348); 0.1,0.8,0.4 \rangle$$

TDÜN-sayıların skorları

$$S(\tilde{A}_1) = \frac{1}{8}[0.098 + 0.187 + 0.260] \times (2 + 0.4 - 0.5 - 0.7) = 0.082$$
$$S(\tilde{A}_2) = \frac{1}{8}[0.281 + 0.425 + 0.541] \times (2 + 0.3 - 0.6 - 0.6) = 0.171$$
$$S(\tilde{A}_3) = \frac{1}{8}[0.150 + 0.438 + 0.558] \times (2 + 0.2 - 0.7 - 0.5) = 0.143$$
$$S(\tilde{A}_4) = \frac{1}{8}[0.172 + 0.276 + 0.348] \times (2 + 0.1 - 0.8 - 0.4) = 0.090$$

dir. Buradan $S(\tilde{A}_2) > S(\tilde{A}_3) > S(\tilde{A}_4) > S(\tilde{A}_1)$ olduğu görülür. Skor fonksiyonlarına göre yeniden sıralanırsa

$$\hat{b}_1 = \tilde{A}_2 = \langle (0.281, 0.425, 0.541); 0.3,0.6,0.6 \rangle$$
$$\hat{b}_2 = \tilde{A}_3 = \langle (0.150, 0.438, 0.558); 0.2,0.7,0.5 \rangle$$
$$\hat{b}_3 = \tilde{A}_4 = \langle (0.172, 0.276, 0.348); 0.1,0.8,0.4 \rangle$$
$$\hat{b}_4 = \tilde{A}_1 = \langle (0.098, 0.187, 0.260); 0.4,0.5,0.7 \rangle$$

Teorem 4.58 göre, hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) &= \langle (0.281^{0.4} \times 0.150^{0.1} \times 0.172^{0.1} \times 0.098^{0.4}, \\ &\quad 0.425^{0.4} \times 0.438^{0.1} \times 0.276^{0.1} \times 0.187^{0.4}, \\ &\quad 0.541^{0.4} \times 0.558^{0.1} \times 0.348^{0.1} \times 0.260^{0.4}); 0.1,0.8,0.7 \rangle \\ &= \langle (0.184,0.316,0.411); 0.1,0.8,0.7 \rangle \end{aligned}$$

4.2 Neutrosophic Sayıların Belirsizliği ve Değeri

Tanım 4.60 $\tilde{a} = \langle (a, b, c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı olsun. Daha sonra $0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{a}}$, $u_{\tilde{a}} \leq \beta \leq 1$, $y_{\tilde{a}} \leq \gamma \leq 1$ ve $0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ −kesim kümesi $\tilde{a}_{\langle \alpha,\beta,\gamma \rangle}$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}_{\langle \alpha,\beta,\gamma \rangle} = \{x : \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha, \nu_{\tilde{a}}(x) \leq \beta, \lambda_{\tilde{a}}(x) \leq \gamma, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.61 $\tilde{a} = \langle (a, b, c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı olsun. Daha sonra $0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{a}}$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının $\alpha -$ kesim kümesi $\tilde{a}_\alpha$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}_\alpha = \{x : \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\tilde{a}$ TDN-sayısının keyfi bir α −kesim kümesi $\tilde{a}_\alpha = [L_{\tilde{a}}, R_{\tilde{a}}]$ ile gösterilen kapalı bir aralıktır.

Tanım 4.62 $\tilde{a} = \langle (a, b, c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı ve $0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{a}}$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının α −kesim kümesi $\tilde{a}_\alpha$ olsun. Daha sonra $\tilde{a}_\alpha$ için $\tilde{a}$ TDN-sayısının destek kümesi $\tilde{a}_0 = supp_\mu(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$supp_\mu(\tilde{a}) = \{x : \mu_{\tilde{a}}(x) \geq 0, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.63 $\tilde{a} = \langle (a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı olsun. Daha sonra $u_{\tilde{a}} \leq \beta \leq 1$, olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının β −kesim kümesi $\tilde{a}^{\beta}$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}^{\beta} = \{x: \nu_{\tilde{a}}(x) \leq \beta, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\tilde{a}$ TDN-sayısının keyfi bir β −kesim kümesi $\tilde{a}^{\beta} = [L_{\tilde{a}}', R_{\tilde{a}}']$ ile gösterilen kapalı bir aralıktır.

Tanım 4.64 $\tilde{a} = \langle (a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı ve $u_{\tilde{a}} \leq \beta \leq 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının β −kesim kümesi $\tilde{a}^{\beta}$ olsun. Daha sonra $\tilde{a}^{\beta}$ için $\tilde{a}$ TDN-sayısının destek kümesi $\tilde{a}^{1} = supp^{\nu}(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$supp^{\nu}(\tilde{a}) = \{x: \nu_{\tilde{a}}(x) \leq 1, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.65 $\tilde{a} = \langle (a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı olsun. Daha sonra $y_{\tilde{a}} \leq \gamma \leq 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının γ −kesim kümesi ${}^{\gamma}a$ ile gösterilir ve

$${}^{\gamma}\tilde{a} = \{x: \lambda_{\tilde{a}}(x) \leq \gamma, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\tilde{a}$ TDN-sayısının keyfi bir γ −kesim kümesi ${}^{\gamma}a = [L_{\tilde{a}}'', R_{\tilde{a}}'']$ ile gösterilen kapalı bir aralıktır.

Tanım 4.66 $\tilde{a} = \langle (a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDN-sayı ve $y_{\tilde{a}} \leq \gamma \leq 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDN-sayısının γ −kesim kümesi ${}^{\gamma}a$ olsun. Daha sonra ${}^{\gamma}\tilde{a}$ için $\tilde{a}$ TDN-sayısının destek kümesi ${}^{1}\tilde{a} = {}^{\lambda}supp(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$${}^{\lambda}supp(\tilde{a}) = \{x: \lambda_{\tilde{a}}(x) \leq 1, x \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.67 $\tilde{a} = \langle (a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ TDÜN-sayı olsun. Daha sonra $0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{a}}$, $u_{\tilde{a}} \leq \beta \leq 1$, $y_{\tilde{a}} \leq \gamma \leq 1$ ve $0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3$ olmak üzere

$$\tilde{a}_{\langle \alpha,\beta,\gamma \rangle} = a_{\alpha} \cap a^{\beta} \cap {}^{\gamma}a$$

ifadesi geçerlidir.

İspat: Tanım 4.61, Tanım 4.63 ve Tanım 4.65 tanımları kullanılarak yapılabilir.

Tanım 4.68 $\tilde{a} = \langle(a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$ TDÜN-sayı olsun. Daha sonra $\tilde{a}$ 'nın keyfi $\alpha -$kesim kümesi, $\beta -$kesim kümesi ve $\gamma -$kesim kümesi sırasıyla $\tilde{a}_\alpha = [L_{\tilde{a}}, R_{\tilde{a}}]$, $\tilde{a}^\beta = [L_{\tilde{a}}', R_{\tilde{a}}']$ ve ${}^\gamma a = [L_{\tilde{a}}'', R_{\tilde{a}}'']$ ile gösterilmek üzere;

1. f monoton ve azalmayan bir fonksiyon $f(\alpha) \in [0,1]$, $f(0)=0$ ve $\alpha \in [0, w_{\tilde{a}}]$ olmak üzere, $\alpha -$kesim kümesi için $\tilde{a}$ TDN-sayısının değeri $V_\mu(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$V_\mu(\tilde{a}) = \int_0^{w_{\tilde{a}}} \left(L_{\tilde{a}}(\alpha) + R_{\tilde{a}}(\alpha)\right) f(\alpha) d\alpha$$

   şeklinde tanımlanır.

2. g monoton ve artmayan bir fonksiyon $g(\beta) \in [0,1]$, $g(1)=0$ ve $\beta \in [u_{\tilde{a}}, 1]$ olmak üzere, $\beta -$kesim kümesi için $\tilde{a}$ TDN-sayısının değeri $V_\nu(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$V_\nu(\tilde{a}) = \int_{u_{\tilde{a}}}^{1} \left(L'_{\tilde{a}}(\beta) + R'_{\tilde{a}}(\beta)\right) g(\beta) d\beta$$

   şeklinde tanımlanır.

3. h monoton ve artmayan bir fonksiyon $h(\gamma) \in [0,1]$, $h(1)=0$ ve $\gamma \in [y_{\tilde{a}}, 1]$ olmak üzere, $\gamma -$kesim kümesi için $\tilde{a}$ TDN-sayısının değeri $V_\lambda(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$V_\lambda(\tilde{a}) = \int_{y_{\tilde{a}}}^{1} \left(L''_{\tilde{a}}(\gamma) + R''_{\tilde{a}}(\gamma)\right) h(\gamma) d\gamma$$

   şeklinde tanımlanır.

Bundan sonra genelliği bozmadan f, g, h fonksiyonlarını sırasıyla $f(\alpha) = \alpha(\alpha \in [0, w_{\tilde{a}}])$, $g(\beta) = 1-\beta(\beta \in [u_{\tilde{a}}, 1])$ ve $h(\gamma) = 1-\gamma(\gamma \in [y_{\tilde{a}}, 1])$ olarak alacağız.

Tanım 4.69 $\tilde{a} = \langle(a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}}\rangle$ TDÜN-sayı olsun. Daha sonra $\tilde{a}$ nın keyfi $\alpha -$kesim kümesi, $\beta -$kesim kümesi ve $\gamma -$kesim kümesi sırasıyla $\tilde{a}_\alpha = [L_{\tilde{a}}, R_{\tilde{a}}]$, $\tilde{a}^\beta = [L_{\tilde{a}}', R_{\tilde{a}}']$ ve ${}^\gamma a = [L_{\tilde{a}}'', R_{\tilde{a}}'']$ ile gösterilmek üzere;

1. f monoton ve azalmayan bir fonksiyon $f(\alpha)\in[0,1]$, $f(0)=0$ ve $\alpha\in[0,w_{\tilde{a}}]$ olmak üzere, $\alpha-$kesim kümesi için $\tilde{a}$ TDN-sayısının belirsizliği $A_{\mu}(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$A_{\mu}(\tilde{a})=\int_{0}^{w_{\tilde{a}}}\left(R_{\tilde{a}}(\alpha)-L(\alpha)\right)f(\alpha)d\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

2. g monoton ve artmayan bir fonksiyon $g(\beta)\in[0,1]$, $g(1)=0$ ve $\beta\in[u_{\tilde{a}},1]$ olmak üzere, $\beta-$kesim kümesi için $\tilde{a}$ TDN-sayısının belirsizliği $V_{\nu}(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$A_{\nu}(\tilde{a})=\int_{u_{\tilde{a}}}^{1}\left(R'_{\tilde{a}}(\beta)-L'_{\tilde{a}}(\beta)\right)g(\beta)d\beta$$

şeklinde tanımlanır.

3. h monoton ve artmayan bir fonksiyon $h(\gamma)\in[0,1]$, $h(1)=0$ ve $\gamma\in[y_{\tilde{a}},1]$ olmak üzere, $\gamma-$kesim kümesi için $\tilde{a}$ TDN-sayısının belirsizliği $V_{\lambda}(\tilde{a})$ ile gösterilir ve

$$A_{\lambda}(\tilde{a})=\int_{y_{\tilde{a}}}^{1}\left(R''_{\tilde{a}}(\gamma)-L''_{\tilde{a}}(\gamma)\right)g(\gamma)d\gamma$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 4.70 $\tilde{a}=\langle(a,b,c,d);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$ bir TDYN-sayı olsun. Daha sonra

1. $0\leq\alpha\leq w_{\tilde{a}}$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDYN-sayısının $\alpha-$kesim kümesi $\tilde{a}_{\alpha}$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}_{\alpha}=\left[L_{\tilde{a}}(\alpha),R_{\tilde{a}}(\alpha)\right]=\left[\frac{(w_{\tilde{a}}-\alpha)a+\alpha b}{w_{\tilde{a}}},\frac{(w_{\tilde{a}}-\alpha)d+\alpha c}{w_{\tilde{a}}}\right]$$

şeklinde verilir.

Eğer $f(\alpha)=\alpha$ olarak alınırsa $\tilde{a}$ TDYN-sayısının değeri ve $\tilde{a}$ TDYN-sayısının belirsizliği sırasıyla

$$V_{\mu}(\tilde{a})\quad=\int_{0}^{w_{\tilde{a}}}\left[(a+d)+\frac{(b+c-a-d)\alpha}{w_{\tilde{a}}}\right]\alpha d\alpha$$

$$=\left[\frac{(a+d)\alpha^2}{2}+\frac{(b+c-a-d)\alpha^3}{3w_{\tilde{a}}}\right]_0^{w_{\tilde{a}}}$$

$$=\frac{(a+2b+2c+d)w_{\tilde{a}}^{\ 2}}{6}$$

ve

$$A_\mu(\tilde{a}) \quad =\int_0^{w_{\tilde{a}}}\left[(d-a)+\frac{(d-a+b-c)\alpha}{w_{\tilde{a}}}\right]\alpha d\alpha$$

$$=\left[\frac{(d-a)\alpha^2}{2}+\frac{(d-a+b-c)\alpha^3}{3w_{\tilde{a}}}\right]_0^{w_{\tilde{a}}}$$

$$=\frac{(d-a+2c-2b)w_{\tilde{a}}^{\ 2}}{6}$$

ile hesaplanır.

2. $u_{\tilde{a}} \leq \beta \leq 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDYN-sayısının β-kesim kümesi $\tilde{a}^\beta$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}^\beta=\left[L_{\tilde{a}}'(\beta),R_{\tilde{a}}'(\beta)\right]=\left[\frac{(1-\beta)b+(\beta-u_{\tilde{a}})a}{1-u_{\tilde{a}}},\frac{(1-\beta)c+(\beta-u_{\tilde{a}})d}{1-u_{\tilde{a}}}\right]$$

şeklinde verilir.

Eğer $g(\beta)=1-\beta$ olarak alınırsa $\tilde{a}$ TDYN-sayısının değeri ve $\tilde{a}$ TDYN-sayısının belirsizliği sırasıyla

$$V_\nu(\tilde{a}) \quad =\int_{u_{\tilde{a}}}^{1}\left[(a+d)+\frac{(b+c-a-d)(1-\beta)}{1-u_{\tilde{a}}}\right](1-\beta)d\beta$$

$$=\left[-\frac{(a+d)(1-\beta)^2}{2}-\frac{(b+c-a-d)(1-\beta)^3}{3(1-u_{\tilde{a}})}\right]_{u_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$=\frac{(a+2b+2c+d)(1-u_{\tilde{a}})^2}{6}$$

ve

$$A_\nu(\tilde{a}) \quad =\int_{u_{\tilde{a}}}^{1}\left[(d-a)+\frac{(d-a+b-c)(1-\beta)}{1-u_{\tilde{a}}}\right](1-\beta)d\beta$$

$$=\left[-\frac{(d-a)(1-\beta)^2}{2}-\frac{(d-a+b-c)(1-\beta)^3}{3(1-u_{\tilde{a}})}\right]_{u_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$=\frac{(d-a+2c-2b)(1-u_{\tilde{a}})^2}{6}$$

3. $y_{\tilde{a}} \leq \gamma \leq 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDYN-sayısının $\gamma -$ kesim kümesi ${}^{\gamma}\tilde{a}$ ile gösterilir ve

$${}^{\gamma}\tilde{a}=\left[L_{\tilde{a}}''(\gamma),R_{\tilde{a}}''(\gamma)\right]=\left[\frac{(1-\gamma)b+(\gamma-y_{\tilde{a}})a}{1-y_{\tilde{a}}},\frac{(1-\gamma)c+(\gamma-y_{\tilde{a}})d}{1-y_{\tilde{a}}}\right]$$

şeklinde verilir.

Eğer $h(\gamma)=1-\gamma$ olarak alınırsa $\tilde{a}$ TDYN-sayısının değeri ve $\tilde{a}$ TDYN-sayısının belirsizliği sırasıyla

$$V_{\lambda}(\tilde{a}) \quad =\int_{y_{\tilde{a}}}^{1}\left[(a+d)+\frac{(b+c-a-d)(1-\gamma)}{1-y_{\tilde{a}}}\right](1-\gamma)\,d\gamma$$

$$=\left[-\frac{(a+d)(1-\gamma)^2}{2}-\frac{(b+c-a-d)(1-\gamma)^3}{3(1-y_{\tilde{a}})}\right]_{y_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$=\frac{(a+2b+2c+d)(1-y_{\tilde{a}})^2}{6}$$

ve

$$A_{\lambda}(\tilde{a}) \quad =\int_{y_{\tilde{a}}}^{1}\left[(d-a)+\frac{(d-a+b-c)(1-\gamma)}{1-y_{\tilde{a}}}\right](1-\gamma)\,d\gamma$$

$$=\left[-\frac{(d-a)(1-\gamma)^2}{2}-\frac{(d-a+b-c)(1-\gamma)^3}{3(1-y_{\tilde{a}})}\right]_{y_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$=\frac{(d-a+2c-2b)(1-y_{\tilde{a}})^2}{6}$$

Sonuç 4.71 $\tilde{a}=\langle (a,b,c);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$ bir TDÜN-sayı olsun. Daha sonra

1. $0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{a}}$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının α-kesim kümesi $\tilde{a}_{\alpha}$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}_{\alpha}=\left[L_{\tilde{a}}(\alpha),R_{\tilde{a}}(\alpha)\right]=\left[\frac{(w_{\tilde{a}}-\alpha)a+\alpha b}{w_{\tilde{a}}},\frac{(w_{\tilde{a}}-\alpha)c+\alpha b}{w_{\tilde{a}}}\right]$$

şeklinde verilir.

Eğer $f(\alpha)=\alpha$ olarak alınırsa $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının değeri ve $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının belirsizliği sırasıyla

$$\begin{aligned}
V_\mu(\tilde{a}) &= \int_0^{w_{\tilde{a}}} \left[(a+c) + \frac{(2b-a-c)\alpha}{w_{\tilde{a}}} \right] \alpha d\alpha \\
&= \left[\frac{(a+c)\alpha^2}{2} + \frac{(2b-a-c)\alpha^3}{3w_{\tilde{a}}} \right]_0^{w_{\tilde{a}}} \\
&= \frac{(a+4b+c)w_{\tilde{a}}^2}{6}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_\mu(\tilde{a}) &= \int_0^{w_{\tilde{a}}} \left[(c-a) + \frac{(c-a)\alpha}{w_{\tilde{a}}} \right] \alpha d\alpha \\
&= \left[\frac{(c-a)\alpha^2}{2} + \frac{(c-a)\alpha^3}{3w_{\tilde{a}}} \right]_0^{w_{\tilde{a}}} \\
&= \frac{(c-a)w_{\tilde{a}}^2}{6}
\end{aligned}$$

2. $u_{\tilde{a}} \le \beta \le 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının $\beta-$kesim kümesi $\tilde{a}^\beta$ ile gösterilir ve

$$\tilde{a}^\beta = \left[L_{\tilde{a}}'(\beta), R_{\tilde{a}}'(\beta) \right] = \left[\frac{(1-\beta)b+(\beta-u_{\tilde{a}})a}{1-u_{\tilde{a}}}, \frac{(1-\beta)b+(\beta-u_{\tilde{a}})c}{1-u_{\tilde{a}}} \right]$$

şeklinde verilir.

Eğer $g(\beta)=1-\beta$ olarak alınırsa $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının değeri ve $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının belirsizliği sırasıyla

$$\begin{aligned}
V_\nu(\tilde{a}) &= \int_{u_{\tilde{a}}}^{1} \left[(a+c) + \frac{(2b-a-c)(1-\beta)}{1-u_{\tilde{a}}} \right] (1-\beta) d\beta \\
&= \left[-\frac{(a+c)(1-\beta)^2}{2} - \frac{(2b-a-c)(1-\beta)^3}{3(1-u_{\tilde{a}})} \right]_{u_{\tilde{a}}}^{1} \\
&= \frac{(a+4b+c)(1-u_{\tilde{a}})^2}{6}
\end{aligned}$$

ve

$$A_{\nu}(\tilde{a}) = \int_{u_{\tilde{a}}}^{1}\left[(c-a)+\frac{(c-a)(1-\beta)}{1-u_{\tilde{a}}}\right](1-\beta)\,d\beta$$

$$= \left[-\frac{(c-a)(1-\beta)^2}{2}-\frac{(c-a)(1-\beta)^3}{3(1-u_{\tilde{a}})}\right]_{u_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$= \frac{(c-a)(1-u_{\tilde{a}})^2}{6}$$

3. $y_{\tilde{a}} \le \gamma \le 1$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının $\gamma-$kesim kümesi ${}^{\gamma}\tilde{a}$ ile gösterilir ve

$${}^{\gamma}\tilde{a} = \left[L_{\tilde{a}}''(\gamma), R_{\tilde{a}}''(\gamma)\right] = \left[\frac{(1-\gamma)b+(\gamma-y_{\tilde{a}})a}{1-y_{\tilde{a}}}, \frac{(1-\gamma)b+(\gamma-y_{\tilde{a}})c}{1-y_{\tilde{a}}}\right]$$

şeklinde verilir.

Eğer $h(\gamma)=1-\gamma$ olarak alınırsa $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının değeri ve $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının belirsizliği sırasıyla

$$V_{\lambda}(\tilde{a}) = \int_{y_{\tilde{a}}}^{1}\left[(a+c)+\frac{(2b-a-c)(1-\gamma)}{1-y_{\tilde{a}}}\right](1-\gamma)\,d\gamma$$

$$= \left[-\frac{(a+c)(1-\gamma)^2}{2}-\frac{(2b-a-c)(1-\gamma)^3}{3(1-y_{\tilde{a}})}\right]_{y_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$= \frac{(a+4b+c)(1-y_{\tilde{a}})^2}{6}$$

ve

$$A_{\lambda}(\tilde{a}) = \int_{y_{\tilde{a}}}^{1}\left[(c-a)+\frac{(c-a)(1-\gamma)}{1-y_{\tilde{a}}}\right](1-\gamma)\,d\gamma$$

$$= \left[-\frac{(c-a)(1-\gamma)^2}{2}-\frac{(c-a)(1-\gamma)^3}{3(1-y_{\tilde{a}})}\right]_{y_{\tilde{a}}}^{1}$$

$$= \frac{(c-a)(1-y_{\tilde{a}})^2}{6}$$

Tanım 4.72 $\tilde{a}$, TDÜN-sayı olsun. $\theta \in [0,1]$ için;

1. $\tilde{a}$ TDN-sayının θ ağırlık değeri

$$V_\theta(\tilde{a}) = \theta V_\mu(\tilde{a}) + (1-\theta)V_\nu(\tilde{a}) + (1-\theta)V_\lambda(\tilde{a})$$

ile tanımlanır.

2. $\tilde{a}$ TDN-sayının θ ağırlık belirsizliği

$$A_\theta(\tilde{a}) = \theta A_\mu(\tilde{a}) + (1-\theta)A_\nu(\tilde{a}) + (1-\theta)A_\lambda(\tilde{a})$$

ile tanımlanır.

Sonuç 4.73 $\tilde{a} = \langle (a,b,c,d); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ bir TDYN-sayı olsun. Daha sonra $\theta \in [0,1]$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDYN-sayısının

1. $V_\theta(\tilde{a})$ ile gösterilen ağırlıklı değeri

$$V_\theta(\tilde{a}) = \frac{a+2b+2c+d}{6}\left[\theta w_{\tilde{a}}^2 + (1-\theta)(1-u_{\tilde{a}})^2 + (1-\theta)(1-y_{\tilde{a}})^2\right]$$

olarak verilir.

2. $A_\theta(\tilde{a})$ ile gösterilen ağırlıklı belirsizliği

$$A_\theta(\tilde{a}) = \frac{d-a+2c-2b}{6}\left[\theta w_{\tilde{a}}^2 + (1-\theta)(1-u_{\tilde{a}})^2 + (1-\theta)(1-y_{\tilde{a}})^2\right]$$

olarak verilir.

Sonuç 4.74 $\tilde{a} = \langle (a,b,c); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ bir TDÜN-sayı olsun. Daha sonra $\theta \in [0,1]$ olmak üzere $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının

1. $V_\theta(\tilde{a})$ ile gösterilen ağırlıklı değeri

$$V_\theta(\tilde{a}) = \frac{a+4b+c}{6}\left[\theta w_{\tilde{a}}^2 + (1-\theta)(1-u_{\tilde{a}})^2 + (1-\theta)(1-y_{\tilde{a}})^2\right]$$

olarak verilir.

2. $A_\theta(\tilde{a})$ ile gösterilen ağırlıklı belirsizliği

$$A_\theta(\tilde{a}) = \frac{c-a}{6}\left[\theta w_{\tilde{a}}^2 + (1-\theta)(1-u_{\tilde{a}})^2 + (1-\theta)(1-y_{\tilde{a}})^2\right]$$

olarak verilir.

Tanım 4.75 $\tilde{a} = \langle (a_1,b_1,c_1); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}}, y_{\tilde{a}} \rangle$ ve $\tilde{b} = \langle (a_2,b_2,c_2); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}}, y_{\tilde{b}} \rangle$ iki TDÜN-sayı ve $\theta \in [0,1]$ olsun. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ TDÜN-sayılarının sıralaması

1. $V_\theta(\tilde{a}) < V_\theta(\tilde{b})$ ise, $\tilde{a} < \tilde{b}$ dir.
2. $V_\theta(\tilde{a}) > V_\theta(\tilde{b})$ ise, $\tilde{a} > \tilde{b}$ dir.

3. $V_\theta(\tilde{a}) = V_\theta(\tilde{b})$ ise,

a) $A_\theta(\tilde{a}) < A_\theta(\tilde{b})$ ise, $\tilde{a} < \tilde{b}$ dir.

b) $A_\theta(\tilde{a}) > A_\theta(\tilde{b})$ ise, $\tilde{a} > \tilde{b}$ dir.

c) $A_\theta(\tilde{a}) = A_\theta(\tilde{b})$ ise, $\tilde{a} = \tilde{b}$ dir.

ile tanımlanır.

Örnek 4.76 $\tilde{a} = \langle(2,4,6); 0.8,0.7,0.6\rangle$ ve $\tilde{b} = \langle(2,6,8); 0.4,0.6,0.5\rangle$ iki TDÜN-sayı olsun. Daha sonra $\tilde{a}$ TDÜN-sayısının ağırlıklı değeri

$$\begin{aligned} V_\theta(\tilde{a}) = & \frac{2+4\times4+6}{6}\left[\theta(0.8)^2 + (1-\theta)(1-0.7)^2 + (1-\theta)(1-0.6)^2\right] \\ = & \ 4(0.25-0.39\theta) \\ = & \ 1-1.56\theta \end{aligned}$$

ve ağırlıklı belirsizliği

$$\begin{aligned} A_\theta(\tilde{a}) = & \frac{6-2}{6}\left[\theta(0.8)^2 + (1-\theta)(1-0.7)^2 + (1-\theta)(1-0.6)^2\right] \\ = & \ \frac{2}{3}(0.25-0.39\theta) \\ = & \ 0.166-0.26\theta \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde;

Daha sonra $\tilde{b}$ TDÜN- sayısının ağırlıklı değeri

$$\begin{aligned} V_\theta(\tilde{b}) = & \frac{2+4\times6+8}{6}\left[\theta(0.4)^2 + (1-\theta)(1-0.6)^2 + (1-\theta)(1-0.5)^2\right] \\ = & \ \frac{34}{6}(0.09-0.25\theta) \\ = & \ 0.51-1.41\theta \end{aligned}$$

ve ağırlıklı belirsizliği

$$\begin{aligned} A_\theta(\tilde{b}) = & \frac{8-2}{6}\left[\theta(0.4)^2 + (1-\theta)(1-0.6)^2 + (1-\theta)(1-0.5)^2\right] \\ = & \ 0.09-0.25\theta \end{aligned}$$

buradan

$$V_\theta(\tilde{a}) - V_\theta(\tilde{b}) = (1-1.56\theta)+(0.51-1.41\theta)$$

$$= \quad 0.49-0.14\theta$$

$0\leq\theta\leq1$ için $0.35\leq0.49-0.14\theta\leq0.49$ ise, $V_\theta(\tilde{a})>V_\theta(\tilde{b})$ dır. Buradan $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ TDÜN-sayı için $\tilde{a}\gtrsim\tilde{b}$ dir.

Teorem 4.77 Kabul edelim ki $w_{\tilde{a}}=w_{\tilde{b}}$, $u_{\tilde{a}}=u_{\tilde{b}}$ ve $y_{\tilde{a}}=y_{\tilde{b}}$ olacak şekilde $\tilde{a}=\langle(a_1,b_1,c_1);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}},y_{\tilde{a}}\rangle$ ve $\tilde{b}=\langle(a_2,b_2,c_2);w_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}},y_{\tilde{b}}\rangle$ iki TDÜN-sayı olsun. Daha sonra eğer $a_1>c_2$ ise $\tilde{a}\gtrsim\tilde{b}$'dir.

İspat: $w_{\tilde{a}}=w_{\tilde{b}}$, $u_{\tilde{a}}=u_{\tilde{b}}$ ve $y_{\tilde{a}}=y_{\tilde{b}}$ olsun.

i. Tanım 4.68'u kullanarak;

$$\begin{aligned} V_\mu(\tilde{a}) &= \int_0^{w_{\tilde{a}}}\big(L_{\tilde{a}}(\alpha)+R_{\tilde{a}}(\alpha)\big)f(\alpha)d\alpha \\ &\geq \int_0^{w_{\tilde{a}}} 2a_1 f(\alpha)d\alpha \\ &= 2a_1\int_0^{w_{\tilde{a}}} f(\alpha)d\alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V_\mu(\tilde{b}) &= \int_0^{w_{\tilde{b}}}\big(L_{\tilde{b}}(\alpha)+R_{\tilde{b}}(\alpha)\big)f(\alpha)d\alpha \\ &\leq \int_0^{w_{\tilde{b}}} 2c_2 f(\alpha)d\alpha \\ &= 2c_2\int_0^{w_{\tilde{b}}} f(\alpha)d\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra $w_{\tilde{a}}=w_{\tilde{b}}$ için $\int_0^{w_{\tilde{a}}} f(\alpha)d\alpha=\int_0^{w_{\tilde{b}}} f(\alpha)d\alpha$'dır. Burada $a_1>c_2$ için $V_\mu(\tilde{a})>V_\mu(\tilde{b})$ dir.

ii. Tanım 4.68 kullanarak;

$$V_\nu(\tilde{a}) = \int_{u_{\tilde{a}}}^{1} \left(L'_{\tilde{a}}(\beta) + R'_{\tilde{a}}(\beta)\right) g(\beta)\, d\beta$$

$$\geq \int_{u_{\tilde{a}}}^{1} 2a_1\, g(\beta)\, d\beta$$

$$= 2a_1 \int_{u_{\tilde{a}}}^{1} g(\beta)\, d\beta$$

ve

$$V_\mu(\tilde{b}) = \int_{u_{\tilde{b}}}^{1} \left(L'_{\tilde{b}}(\beta) + R'_{\tilde{b}}(\beta)\right) g(\beta)\, d\beta$$

$$\leq \int_{u_{\tilde{b}}}^{1} 2c_2\, g(\beta)\, d\beta$$

$$= 2c_2 \int_{u_{\tilde{b}}}^{1} g(\beta)\, d\beta$$

Elde edilir. Daha sonra $u_{\tilde{a}} = u_{\tilde{b}}$ için $\int_{u_{\tilde{a}}}^{1} g(\beta)\, d\beta = \int_{u_{\tilde{b}}}^{1} g(\beta)\, d\beta$ dır. Burada $a_1 > c_2$ için $V_\nu(\tilde{a}) > V_\nu(\tilde{b})$ dir.

iii. Benzer şekilde Tanım 4.68 kullanarak;

$$V_\lambda(\tilde{a}) = \int_{y_{\tilde{a}}}^{1} \left(L''_{\tilde{a}}(\gamma) + R''_{\tilde{a}}(\gamma)\right) h(\gamma)\, d\gamma$$

$$\geq \int_{y_{\tilde{a}}}^{1} 2a_1\, h(\gamma)\, d\gamma$$

$$= 2a_1 \int_{y_{\tilde{a}}}^{1} h(\gamma)\, d\gamma$$

ve

$$V_\lambda(\tilde{b}) = \int_{y_{\tilde{b}}}^{1} \left(L''_{\tilde{b}}(\gamma) + R''_{\tilde{b}}(\gamma)\right) h(\gamma)\, d\gamma$$

$$\leq \int_{y_{\tilde{b}}}^{1} 2c_2\, h(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \quad 2c_2 \int_{y_{\tilde{b}}}^{1} h(\gamma)\, d\gamma$$

elde edilir. Daha sonra $y_{\tilde{a}} = y_{\tilde{b}}$ için $\int_{y_{\tilde{a}}}^{1} h(\gamma)\, d\gamma = \int_{y_{\tilde{b}}}^{1} h(\gamma)\, d\gamma$ dır. Burada $a_1 > c_2$ için

$V_\lambda(\tilde{a}) > V_\lambda(\tilde{b})$ dir.

Tanım 4.72 e göre herhangi bir $\theta \in [0,1]$ için

$$\theta V_\mu(\tilde{a}) + (1-\theta)V_\nu(\tilde{a}) + (1-\theta)V_\lambda(\tilde{a}) > \theta V_\mu(\tilde{b}) + (1-\theta)V_\nu(\tilde{b}) + (1-\theta)V_\lambda(\tilde{b})$$

elde edilir.

Bu nedenle 4.75 e göre ispat tamamlanır.

Teorem 4.78 Kabul edelim ki $w_{\tilde{a}} = w_{\tilde{b}}$, $u_{\tilde{a}} = u_{\tilde{b}}$ ve $y_{\tilde{a}} = y_{\tilde{b}}$ olacak şekilde $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ herhangi üç TDN-sayı olsun. Eğer $\tilde{a} \tilde{>} \tilde{b}$ ise $\tilde{a} + \tilde{c} \tilde{>} \tilde{b} + \tilde{c}$ ’ dir.

İspat : $w_{\tilde{a}} = w_{\tilde{b}}$, $u_{\tilde{a}} = u_{\tilde{b}}$ ve $y_{\tilde{a}} = y_{\tilde{b}}$ olsun. $w_{\tilde{c}}$, $\tilde{c}$ TDN-sayısının doğruluk değeri olmak üzere Tanım 4.68-1 e göre

$$V_\mu(\tilde{a}+\tilde{c}) = \int_0^{w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{c}}} \left[L_{\tilde{a}}(\alpha) + R_{\tilde{a}}(\alpha) + L_{\tilde{c}}(\alpha) + R_{\tilde{c}}(\alpha) \right] f(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \int_0^{w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{c}}} L_{\tilde{a}}(\alpha) + R_{\tilde{a}}(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^{w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{c}}} L_{\tilde{c}}(\alpha) + R_{\tilde{c}}(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha$$

$$V_\mu(\tilde{b}+\tilde{c}) = \int_0^{w_{\tilde{b}} \wedge w_{\tilde{c}}} \left[L_{\tilde{b}}(\alpha) + R_{\tilde{b}}(\alpha) + L_{\tilde{c}}(\alpha) + R_{\tilde{c}}(\alpha) \right] f(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \int_0^{w_{\tilde{b}} \wedge w_{\tilde{c}}} L_{\tilde{b}}(\alpha) + R_{\tilde{b}}(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^{w_{\tilde{b}} \wedge w_{\tilde{c}}} L_{\tilde{c}}(\alpha) + R_{\tilde{c}}(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha$$

Yazılır. Daha sonra $\tilde{a} \tilde{>} \tilde{b}$ ve $w_{\tilde{a}} = w_{\tilde{b}}$ için

$$\int_0^{w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{c}}} \left[L_{\tilde{a}}(\alpha) + R_{\tilde{a}}(\alpha) \right] f(\alpha)\, d\alpha > \int_0^{w_{\tilde{b}} \wedge w_{\tilde{c}}} \left[L_{\tilde{b}}(\alpha) + R_{\tilde{b}}(\alpha) \right] f(\alpha)\, d\alpha ...*$$

Ve sonra $V_\mu(\tilde{a}+\tilde{c}) > V_\mu(\tilde{b}+\tilde{c})$ elde edilir. $u_{\tilde{c}}$, $\tilde{c}$ TDN-sayısının belirsizlik değeri olmak üzere Tanım 4.68-2 e göre

$$V_\nu(\tilde{a}+\tilde{c}) = \int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{a}}(\beta)+R'_{\tilde{a}}(\beta)+L'_{\tilde{c}}(\beta)+R'_{\tilde{c}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta$$

$$= \int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{a}}(\beta)+R'_{\tilde{a}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta + \int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{c}}(\beta)+R'_{\tilde{c}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta$$

ve

$$V_\nu(\tilde{b}+\tilde{c}) = \int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{b}}(\beta)+R'_{\tilde{b}}(\beta)+L'_{\tilde{c}}(\beta)+R'_{\tilde{c}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta$$

$$= \int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{b}}(\beta)+R'_{\tilde{b}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta + \int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{c}}(\beta)+R'_{\tilde{c}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta$$

$u_{\tilde{c}}$, $\tilde{c}$ tek değerli neutrosophic sayısının belirsizlik üyeliğidir. Daha sonra $\tilde{a} \tilde{>} \tilde{b}$ ve $u_{\tilde{a}} = u_{\tilde{b}}$ için

$$\int_{u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{a}}(\beta)+R'_{\tilde{a}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta > \int_{u_{\tilde{b}} \vee u_{\tilde{c}}}^{1} \left[L'_{\tilde{b}}(\beta)+R'_{\tilde{b}}(\beta)\right] g(\beta)\, d\beta ...**$$

Ve $V_\nu(\tilde{a}+\tilde{c}) > V_\nu(\tilde{b}+\tilde{c})$ olur.

Benzer şekilde $y_{\tilde{c}}$, $\tilde{c}$ TDN-sayısının yanlışlık değeri olmak üzere Tanım 4.68-3 e göre

$$V_\lambda(\tilde{a}+\tilde{c}) = \int_{y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{a}}(\gamma)+R''_{\tilde{a}}(\gamma)+L''_{\tilde{c}}(\gamma)+R''_{\tilde{c}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_{y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{a}}(\gamma)+R''_{\tilde{a}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma + \int_{y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{c}}(\gamma)+R''_{\tilde{c}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma$$

$$V_\lambda(\tilde{b}+\tilde{c}) = \int_{y_{\tilde{b}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{a}}(\gamma)+R''_{\tilde{a}}(\gamma)+L''_{\tilde{c}}(\gamma)+R''_{\tilde{c}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_{y_{\tilde{b}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{b}}(\gamma)+R''_{\tilde{b}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma + \int_{y_{\tilde{b}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{c}}(\gamma)+R''_{\tilde{c}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma$$

elde edilir. Daha sonra $\tilde{a} \tilde{>} \tilde{b}$ ve $y_{\tilde{a}} = y_{\tilde{b}}$ için

$$\int_{y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{a}}(\gamma)+R''_{\tilde{a}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma > \int_{y_{\tilde{a}} \vee y_{\tilde{c}}}^{1} \left[L''_{\tilde{a}}(\gamma)+R''_{\tilde{a}}(\gamma)\right] h(\gamma)\, d\gamma ...***$$

Ve $V_\lambda(\tilde{a}+\tilde{c}) > V_\lambda(\tilde{b}+\tilde{c})$ olur.

Tanım 4.72 e göre ve $(*),(**),(***)$ eşitsizliklerine göre herhangi bir $\theta \in [0,1]$ için

$$\theta V_{\mu}(\tilde{a}+\tilde{c})+(1-\theta)V_{\nu}(\tilde{a}+\tilde{c})+(1-\theta)V_{\lambda}(\tilde{a}+\tilde{c})>\theta V_{\mu}(\tilde{b}+\tilde{c})+(1-\theta)V_{\nu}(\tilde{b}+\tilde{c})+(1-\theta)V_{\lambda}(\tilde{b}+\tilde{c})$$

elde edilir. Yani $V_{\theta}(\tilde{a}+\tilde{c})>V_{\theta}(\tilde{b}+\tilde{c})$ dir. Buradan da Tanım 4.75 e göre $\tilde{a}+\tilde{c}>\tilde{b}+\tilde{c}$ elde edilir.

5. UYGULAMALAR

5.1. Güven seviyeli TDYN Aritmetik Operatörler İçin Uygulama

Bu bölümde SVTNWAO operatörünü kullanarak güven seviyeli TDYN çok kriterli karar verme metodu için uygulama verilmiştir. Bu uygulama Yu [94]' nun çalışmalarından alınmıştır.

Bu bölümde, TDYN-sayılar için verilen SVTNWAO operatörünün çok kriterli karar verme problemlerine örnek olarak verilen öğretim kalitesini değerlendirme probleminde bir uygulamasını vereceğiz.

Kabul edelim ki TDYN-sayılar ile ifade edilen çok kriterli karar verme problemini olarak öğretim kalitesini değerlendirme problemini ele alalım. Bu problemde karar verici kriterleri değerlendirir ve bu kriterleri TDYN-sayılar ile ifade ettiğini kabul edelim.

Şimdi, TDYN-sayılar için verilen SVTNWAO operatörünü kullanarak aşağıdaki algoritmayı inşa edelim.

Algoritması

1.Adım: Karar verici kriterleri değerlendirir ve bu kriterleri TDYN-sayılar ile ifade eder;

2.Adım: γ_j güven seviyesi farklı değerler aldığında SVTNWAO operatörünü kullanarak her bir alternatif için TDYN-sayı ile ifade edilen değerler bulur.

3.Adım: Bu değerleri skor ve kesinlik fonksiyonu kullanarak alternatifleri sıralar;

Örnek 5.1 A isimli bir özel okul matematik öğretmenine ihtiyaç duymuş ve bu ihtiyacı karşılamak için 5 öğretmen adayı vardır. Okul yönetimi üç açıdan değerlendirme yapacaktır.

Öğretmenin ders anlatımı (u_1), kabiliyet (u_2), öğretmen adayının sosyalliği (u_3). Bu öğretmenler çoklu etki oluşturacak iyi öğretmen tutumları, öğretim yetenekleri, mesleki bilgi ve sosyal çalışmaları vasıtasıyla değerlendirilecekler. Son faktör öğretmenlerin öğretim içeriğini öğretim rehberliği çerçevesinde olup olmadığının kontrol edilmesidir. Ağırlık vektörü varsayılan 3 kriter şunlardır (0.4,0.3,0.3) sonra,

1.Adım: Karar verici 5 öğretmeni değerlendirdi ve değerlendirme sonuçları Tablo 1'de gösterilmiştir.

	u_1	u_2	u_3
x_1	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.7);0.5,0.4,0.3\rangle$	$\langle(0.2,0.3,0.5,0.6);0.5,0.3,0.7\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.7,0.8);0.9,0.1,0.5\rangle$
x_2	$\langle(0.2,0.5,0.6,0.9);0.8,0.2,0.4\rangle$	$\langle(0.2,0.4,0.6,0.8);0.1,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.2,0.3,0.6,0.7);0.5,0.3,0.8\rangle$
x_3	$\langle(0.3,0.4,0.7,0.8);0.6,0.3,0.2\rangle$	$\langle(0.3,0.5,0.8,0.9);0.2,0.5,0.8\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6);0.8,0.2,0.6\rangle$
x_4	$\langle(0.3,0.5,0.7,0.8);0.5,0.4,0.3\rangle$	$\langle(0.2,0.3,0.7,0.8);0.9,0.8,0.7\rangle$	$\langle(0.4,0.6,0.7,0.8);0.5,0.4,0.2\rangle$
x_5	$\langle(0.4,0.6,0.7,0.8);0.3,0.5,0.6\rangle$	$\langle(0.1,0.3,0.5,0.7);0.9,0.7,0.5\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6,0.7);0.9,0.3,0.6\rangle$

2.Adım: $\gamma_j = 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1\ (j = 1,2,3,4)$ için SVTNWAO operatörünü kullanarak her bir alternatif için TDYN-sayı ile ifade edilen değerler Tablo 2'de gösterilmiştir.

	$\gamma_j = 0.1$	$\gamma_j = 0.2$
x_1	$\langle(0.848,0.886,0.943,0.964);0.5,0.4,0.7\rangle$	$\langle(0.721,0.786,0.889,0.930);0.5,0.4,0.7\rangle$
x_2	$\langle(0.851,0.913,0.950,0.979);0.1,0.3,0.8\rangle$	$\langle(0.725,0.834,0.903,0.958);0.1,0.3,0.8\rangle$
x_3	$\langle(0.887,0.919,0.959,0.973);0.2,0.5,0.8\rangle$	$\langle(0.786,0.844,0.921,0.947);0.2,0.5,0.8\rangle$
x_4	$\langle(0.884,0.924,0.970,0.983);0.5,0.8,0.7\rangle$	$\langle(0.782,0.855,0.941,0.965);0.5,0.8,0.7\rangle$
x_5	$\langle(0.877,0.926,0.951,0.970);0.3,0.7,0.6\rangle$	$\langle(0.772,0.858,0.904,0.941);0.3,0.7,0.6\rangle$
	$\gamma_j = 0.5$	$\gamma_j = 1$
x_1	$\langle(0.448,0.551,0.746,0.835);0.5,0.4,0.7\rangle$	$\langle(0.210,0.310,0.560,0.700);0.5,0.4,0.7\rangle$
x_2	$\langle(0.447,0.637,0.775,0.899);0.1,0.3,0.8\rangle$	$\langle(0.200,0.410,0.600,0.810);0.1,0.2,0.8\rangle$
x_3	$\langle(0.548,0.655,0.815,0.875);0.2,0.5,0.8\rangle$	$\langle(0.300,0.430,0.670,0.770);0.2,0.5,0.8\rangle$
x_4	$\langle(0.543,0.680,0.860,0.916);0.5,0.8,0.7\rangle$	$\langle(0.300,0.470,0.740,0.840);0.5,0.8,0.7\rangle$
x_5	$\langle(0.538,0.686,0.779,0.860);0.3,0.7,0.6\rangle$	$\langle(0.310,0.480,0.610,0.740);0.3,0.7,0.5\rangle$

3.Adım: Skor değerlerine karşılık gelen sıralı alternatifler Tablo 3' de gösterilmiştir.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	sıralama
$\gamma_j = 0.1$	0.319	0.231	0.210	0.235	0.233	$x_1 > x_4 > x_5 > x_2 > x_3$
$\gamma_j = 0.2$	0.291	0.214	0.197	0.221	0.217	$x_1 > x_4 > x_5 > x_2 > x_3$
$\gamma_j = 0.5$	0.226	0.172	0.163	0.187	0.179	$x_1 > x_4 > x_5 > x_2 > x_3$
$\gamma_j = 1$	0.156	0.126	0.122	0.147	0.134	$x_1 > x_4 > x_5 > x_2 > x_3$

5.2. Aritmetik Operatörler İçin TDÜN Çok Kriterli Karar Verme Metodu

Bu bölümde TDÜN_{hao} operatörünü kullanarak TDÜN çok kriterli karar verme metodu için uygulama verilmiştir. Bu uygulama Ye [86]'nin çalışmasından alınmıştır.

Tanım 5.2 $X = (x_1, x_2,, \dots, x_m)$ alternatiflerin bir kümesi, $U = (u_1, u_2,, \dots, u_n)$ kriterlerin kümesi olsun. Eğer $\tilde{a}_{ij} = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}); w_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}, y_{\tilde{a}_{ij}} \rangle$ TDÜN-sayı ise

$$[\tilde{A}_{ij}]_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1n} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & & \tilde{A}_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \tilde{A}_{m2} & \cdots & \tilde{A}_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

şeklinde verilen matrise karar verme matrisi denir.

Şimdi TDÜN-sayılar yardımı ile çok kriterli karar verme metodunu inşa edelim.

Algoritma:

1.Adım: Karar için $[\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ karar verme matrisini inşa et;

2.Adım: $\tilde{A}_{ij} = n\omega_i \tilde{a}_{ij} (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ TDÜN-sayılarının hesapla ve $[\tilde{A}_{ij}]_{m\times n}$ karar verme matrisini yaz;

3.Adım: $\tilde{A}_{ij}$ TDÜN-sayılarının skor değerlerini bul;

4.Adım: Sıralama metodunu kullanarak tüm $\tilde{A}_{ij} (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ TDÜN-sayılarını sırala ve $[b_i]_{1\times n} = \tilde{b}_{ik} (i = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4)$ şeklinde TDÜN-sayıları belirle; ($\tilde{b}_{ik} (i = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4)$ $\tilde{A}_{ij}$ nin en büyüğüdür)

5.Adım: $i = 1,2,3,4$ için $[b_i]_{1\times n}$ karar verme matrisini ver;

6.Adım: $i = 1,2, \dots, m$ için $\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, \dots, \tilde{b}_{in})$ operatörünün hesaplamasını yap;

7.Adım: x_i alternatiflerini sırala ve en iyi alternatifi belirle.

Örnek 5.3 [89] Kabul edelim ki bir şirket belli bir miktar sermayesini değerlendirmek için bir araştırma yapsın. Bunun için, $U = \{u_1 =$ risk, $u_2 =$ büyüme, $u_3 =$ çevresel etki, $u_4 =$ performans$\}$ kümesini dikkate alarak $X = \{x_1 =$ araba şirketi, $x_2 =$ yiyecek şirketi, $x_3 =$ bilgisayar şirketi, $x_4 =$ mobilya şirketi$\}$ kümesinin değerlendirmesini yapıp bir karar vermek için bir panel yapsın. Burada, kriterlerin ağırlık vektörü $\omega = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)^T$ ve operatörün ağırlık vektörü $w = (0.15, 0.15, 0.35, 0.35)^T$ ise u_j $(j = 1,2,3,4)$ kriterlerine göre x_i $(i = 1,2,3,4)$ alternatiflerini karşılaştırmak için;

1. Adım: Karar verici karar matrisini $\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{4\times4}$ aşağıdaki gibi inşa etti;

	u_1	u_2
x_1	$\langle(0.4,0.5,0.6);0.9,0.3,0.6\rangle$	$\langle(0.4,0.6,0.7);0.3,0.5,0.6\rangle$
x_2	$\langle(0.1,0.6,0.7);0.5,0.4,0.2\rangle$	$\langle(0.3,0.7,0.8);0.9,0.8,0.7\rangle$
x_3	$\langle(0.3,0.4,0.5);0.8,0.2,0.6\rangle$	$\langle(0.3,0.5,0.8);0.6,0.3,0.2\rangle$
x_4	$\langle(0.2,0.6,0.7);0.5,0.3,0.8\rangle$	$\langle(0.2,0.4,0.6);0.1,0.2,0.3\rangle$
	u_3	u_4
x_1	$\langle(0.1,0.2,0.7);0.9,0.1,0.5\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6);0.3,0.2,0.7\rangle$
x_2	$\langle(0.5,0.6,0.9);0.8,0.2,0.4\rangle$	$\langle(0.3,0.6,0.7);0.4,0.1,0.9\rangle$
x_3	$\langle(0.1,0.4,0.8);0.2,0.5,0.8\rangle$	$\langle(0.2,0.7,0.8);0.5,0.2,0.3\rangle$
x_4	$\langle(0.3,0.5,0.6);0.7,0.2,0.5\rangle$	$\langle(0.1,0.4,0.5);0.7,0.3,0.5\rangle$

2. Adım : $\tilde{A}_{ij} = n\omega_i\tilde{a}_{ij}(i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ hesaplanırsa

$$\tilde{A}_{11} = 4 \times 3 \times \langle(0.4,0.5,0.6);0.9,0.3,0.6\rangle = \langle(0.48,0.60,0.72);0.9,0.3,0.6\rangle$$

elde edilir. Benzer şekilde her $i = 1,2,3,4$ ve $j = 1,2,3,4$ için $\tilde{A}_{ij} = n\omega_i\tilde{a}_{ij}$ ifadesi

	u_1	u_2
x_1	$\langle(0.48,0.60,0.72);0.9,0.3,0.6\rangle$	$\langle(0.32,0.48,0.56);0.3,0.5,0.6\rangle$
x_2	$\langle(0.12,0.72,0.84);0.5,0.4,0.2\rangle$	$\langle(0.24,0.56,0.64);0.9,0.8,0.7\rangle$
x_3	$\langle(0.36,0.48,0.60);0.8,0.2,0.6\rangle$	$\langle(0.24,0.40,0.64);0.6,0.3,0.2\rangle$
x_4	$\langle(0.24,0.72,0.84);0.5,0.3,0.8\rangle$	$\langle(0.16,0.32,0.48);0.1,0.2,0.3\rangle$
	u_3	u_4
x_1	$\langle(0.08,0.16,0.56);0.9,0.1,0.5\rangle$	$\langle(0.48,0.60,0.72);0.3,0.2,0.7\rangle$
x_2	$\langle(0.40,0.48,0.72);0.8,0.2,0.4\rangle$	$\langle(0.36,0.72,0.84);0.4,0.1,0.9\rangle$
x_3	$\langle(0.08,0.32,0.64);0.2,0.5,0.8\rangle$	$\langle(0.24,0.84,0.96);0.5,0.2,0.3\rangle$
x_4	$\langle(0.24,0.40,0.48);0.7,0.2,0.5\rangle$	$\langle(0.12,0.48,0.60);0.7,0.3,0.5\rangle$

şeklinde yazılır;

3. Adım : TDÜN-sayı $\tilde{A}_{ij}$'lerin skorları

$S_{Ü}(\tilde{A}_{11}) = 0.450$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{12}) = 0.204$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{13}) = 0.230$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{14}) = 0.315$
$S_{Ü}(\tilde{A}_{21}) = 0.399$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{22}) = 0.252$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{23}) = 0.440$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{11}) = 0.336$
$S_{Ü}(\tilde{A}_{31}) = 0.360$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{32}) = 0.336$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{33}) = 0.117$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{34}) = 0.510$
$S_{Ü}(\tilde{A}_{41}) = 0.315$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{42}) = 0.192$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{43}) = 0.280$	$S_{Ü}(\tilde{A}_{44}) = 0.285$

olarak hesaplandı;

4. Adım : TDÜN-sayı $\tilde{A}_{ij}$'ler sıralanırsa

$$\tilde{A}_{11} > \tilde{A}_{14} > \tilde{A}_{13} > \tilde{A}_{12}$$
$$\tilde{A}_{23} > \tilde{A}_{21} > \tilde{A}_{24} > \tilde{A}_{22}$$
$$\tilde{A}_{34} > \tilde{A}_{31} > \tilde{A}_{32} > \tilde{A}_{33}$$
$$\tilde{A}_{41} > \tilde{A}_{44} > \tilde{A}_{43} > \tilde{A}_{42}$$

ve daha sonra

$$\begin{array}{llll} \tilde{b}_{11} = \tilde{A}_{11}, & \tilde{b}_{12} = \tilde{A}_{14}, & \tilde{b}_{13} = \tilde{A}_{13}, & \tilde{b}_{14} = \tilde{A}_{12} \\ \tilde{b}_{21} = \tilde{A}_{23}, & \tilde{b}_{22} = \tilde{A}_{21}, & \tilde{b}_{23} = \tilde{A}_{24}, & \tilde{b}_{24} = \tilde{A}_{22} \\ \tilde{b}_{31} = \tilde{A}_{34}, & \tilde{b}_{32} = \tilde{A}_{31}, & \tilde{b}_{33} = \tilde{A}_{32}, & \tilde{b}_{34} = \tilde{A}_{33} \\ \tilde{b}_{41} = \tilde{A}_{41}, & \tilde{b}_{42} = \tilde{A}_{44}, & \tilde{b}_{43} = \tilde{A}_{43}, & \tilde{b}_{44} = \tilde{A}_{42} \end{array}$$

yazılabilir.

5. Adım : $i = 1,2,3,4$ için $[b_i]_{1\times n}$ karar matrisi

$$b_1 = \langle(0.48,0.60,0.72);0.9,0.3,0.6\rangle,\langle(0.48,0.60,0.72);0.3,0.2,0.7\rangle,\langle(0.08,0.16,0.56);0.9,0.1,0.5\rangle,\langle(0.32,0.48,0.56);0.3,0.5,0.6\rangle$$

$$b_2 = \langle(0.40,0.48,0.72);0.8,0.2,0.4\rangle,\langle(0.12,0.72,0.84);0.5,0.4,0.2\rangle,\langle(0.36,0.72,0.84);0.4,0.1,0.9\rangle\langle(0.24,0.56,0.64);0.9,0.8,0.7\rangle$$

$$b_3 = \langle(0.24,0.84,0.96);0.5,0.2,0.3\rangle,\langle(0.36,0.48,0.60);0.8,0.2,0.6\rangle,\langle(0.24,0.40,0.64);0.6,0.3,0.2\rangle\langle(0.08,0.32,0.64);0.2,0.5,0.8\rangle$$

$$b_4 = \langle(0.24,0.72,0.84);0.5,0.3,0.8\rangle,\langle(0.12,0.48,0.60);0.7,0.3,0.5\rangle,\langle(0.24,0.40,0.48);0.7,0.2,0.5\rangle\langle(0.16,0.32,0.48);0.1,0.2,0.3\rangle$$

elde edilir;

6. Adım: $i = 1,2,3,4$ için $\text{TDÜN}_{hao}(b_i) = \text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, \tilde{b}_{i3}, \tilde{b}_{i4})$ ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \text{TDÜN}_{hao}(b_1) &= \text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_{11},\tilde{b}_{12},\tilde{b}_{13},\tilde{b}_{14}) \\ &= \langle(0.48\times 0.35 + 0.48\times 0.15 + 0.08\times 0.15 + 0.32\times 0.35, \\ &\quad\ 0.60\times 0.35 + 0.60\times 0.15 + 0.16\times 0.15 + 0.48\times 0.35, \\ &\quad\ 0.72\times 0.35 + 0.72\times 0.15 + 0.56\times 0.15 + 0.56\times 0.35); 0.3,0.5,0.7\rangle \\ &= \langle(0.364,0.492,0.640); 0.3,0.5,0.7\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TDÜN}_{hao}(b_2) &= \text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_{21},\tilde{b}_{22},\tilde{b}_{23},\tilde{b}_{24}) \\ &= \langle(0.40\times 0.35 + 0.12\times 0.15 + 0.36\times 0.15 + 0.24\times 0.35, \end{aligned}$$

$$0.48 \times 0.35 + 0.72 \times 0.15 + 0.72 \times 0.15 + 0.56 \times 0.35,$$
$$0.72 \times 0.35 + 0.84 \times 0.15 + 0.84 \times 0.15 + 0.64 \times 0.35); 0.4,0.8,0.9\rangle$$
$$= \langle(0.296,0.580,0.728); 0.4,0.8,0.9\rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{TDÜN}_{hao}(b_3) &= \text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_{31},\tilde{b}_{32},\tilde{b}_{33},\tilde{b}_{34}) \\
&= \langle(0.24 \times 0.35 + 0.36 \times 0.15 + 0.24 \times 0.15 + 0.08 \times 0.35, \\
&\quad 0.84 \times 0.35 + 0.48 \times 0.15 + 0.40 \times 0.15 + 0.32 \times 0.35, \\
&\quad 0.96 \times 0.35 + 0.60 \times 0.15 + 0.64 \times 0.15 + 0.64 \times 0.35); 0.2,0.5,0.8\rangle \\
&= \langle(0.202,0.538,0.476); 0.2,0.5,0.8\rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\text{TDÜN}_{hao}(b_4) &= \text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_{41},\tilde{b}_{42},\tilde{b}_{43},\tilde{b}_{44}) \\
&= \langle(0.24 \times 0.35 + 0.12 \times 0.15 + 0.24 \times 0.15 + 0.16 \times 0.35, \\
&\quad 0.72 \times 0.35 + 0.48 \times 0.15 + 0.40 \times 0.15 + 0.32 \times 0.35, \\
&\quad 0.84 \times 0.35 + 0.60 \times 0.15 + 0.48 \times 0.15 + 0.48 \times 0.35) ; 0.1,0.3,0.8\rangle \\
&= \langle(0.194,0.496,0.624); 0.1,0.3,0.8\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir;

7. Adım : $i = 1,2,3,4$ için $\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_i)$ skorları

$$S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_1)) = 0.206$$
$$S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_2)) = 0.140$$
$$S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_3)) = 0.167$$
$$S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_4)) = 0.164$$

olarak hesaplanır. Burada skor değerleri büyükten küçüğe

$$S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_1)) > S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_3)) > S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_4)) > S_{\text{Ü}}(\text{TDÜN}_{hao}(\tilde{b}_2))$$

şeklinde sıralanır.

Sonuç olarak x_j $(j = 1,2,3,4)$ alternatifleri için sıralama $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ olduğu için x_1'in en iyi alternatif olduğu anlaşılır.

5.3. Geometrik Operatörler İçin TDÜN Çok Kriterli Karar Verme Metodu

Bu bölümde TDÜN_{hgo} operatörünü kullanarak TDÜN çok kriterli karar verme metodu için uygulama verilmiştir. Bu uygulama [31, 41, 89, 90] çalışmalarından alınmıştır.

Tanım 5.4 $X = (x_1, x_2, , \dots, x_m)$ alternatif bir küme, $U = (u_1, u_2, , \dots, u_n)$ nitelik kümesi olsun. $\tilde{a}_{ij} = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}); w_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}, y_{\tilde{a}_{ij}} \rangle$ TDÜN-sayı olmak üzere

$$[\tilde{A}_{ij}]_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

şeklindeki matrise karar vericinin TDÜN-çok kriterli karar verme matrisi denir.
Şimdi TDÜN-çok kriterli karar verme metodunun algoritmasını yazalım.

Algoritma:

1.Adım: $[\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ karar verme matrisini inşa etmek;

2.Adım: $\tilde{A}_{ij} = \tilde{a}_{ij}{}^{n\times\omega_i} (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ TDÜN-sayılarını hesaplamak ve $[\tilde{A}_{ij}]_{m\times n}$ karar verme matrisini yazmak;

3.Adım: $\tilde{A}_{ij}$ TDÜN-sayılarının skorlarını bulmak;

4.Adım: TDÜN-sayılarını sıralama metodu kullanılarak tüm TDÜN-sayılarını $\tilde{A}_{ij}(i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ şeklinde sırala ve $[b_i]_{1\times n} = \tilde{b}_{ik}(i = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4)$ şeklinde TDÜN-sayılarını belirle; Burada $\tilde{b}_{ik}(i = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4)$ için $\tilde{A}_{ij}$ nin en büyük $k.$ elemanıdır.

4.Adım: $i = 1,2,3,4$ için $[b_i]_{1\times n}$ karar verme matrisini ver;

5.Adım: $i = 1,2, \dots, m$ için $\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, \dots, \tilde{b}_{in})$ hesapla;

6.Adım: TDÜN-sayılarını sıralama metodu kullanılarak bütün x_i alternatiflerini sırala ve en iyi alternatifi belirle.

Örnek 5.5 [89] Bir miktar parasını en iyi şekilde değerlendirmek isteyen bir yatırım şirketi vardır. $X =$ $\{x_1 =$ araba şirketi, $x_2 =$ yiyeyek şirketi, $x_3 =$ bilgisayar şirketi, $x_4 =$ mobilya şirketi$\}$ ile gösterilen dört alternatifli küme ile bir panel vardır. Yatırım şirketi $U = \{u_1 =$ risk, $u_2 =$ büyüme, $u_3 =$ çevresel etki, $u_4 =$ performans$\}$ kümesine ile gösterilen dört özelliğe göre bir karar almalıdır. Ardından, niteliklerin ağırlık vektörü $\omega = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)^{T}$ ve pozisyon ağırlık vektörü $w = (0.24, 0.26, 0.26, 0.24)^{T}$ dir. Uzman u_j $(j = 1,2,3,4)$ kriterlerine göre x_i $(i = 1,2,3,4)$ alternatiflerinden birini değerlendirmek için uyguluyor. Buna göre,

1. Adım: Karar verici karar matrisini $\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{4\times4}$ aşağıdaki gibi oluşturulur.

	u_1	u_2
x_1	$\langle(0.1,0.2,0.3); 0.1,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5); 0.3,0.4,0.5\rangle$
x_2	$\langle(0.3,0.6,0.9); 0.3,0.6,0.9\rangle$	$\langle(0.1,0.6,0.9); 0.1,0.6,0.9\rangle$
x_3	$\langle(0.2,0.3,0.4); 0.2,0.3,0.4\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7); 0.5,0.6,0.7\rangle$
x_4	$\langle(0.6,0.7,0.8); 0.6,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.2,0.3,0.8); 0.2,0.3,0.8\rangle$
	u_3	u_4
x_1	$\langle(0.6,0.7,0.8); 0.6,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.1,0.3,0.9); 0.1,0.3,0.9\rangle$
x_2	$\langle(0.4,0.5,0.6); 0.4,0.5,0.6\rangle$	$\langle(0.1,0.6,0.9); 0.1,0.6,0.9\rangle$
x_3	$\langle(0.7,0.8,0.9); 0.7,0.8,0.9\rangle$	$\langle(0.2,0.4,0.8); 0.2,0.4,0.8\rangle$
x_4	$\langle(0.2,0.7,0.8); 0.2,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.2,0.7,0.8); 0.2,0.7,0.8\rangle$

2. Adım : $\tilde{A}_{ij} = \tilde{a}_{ij}{}^{n\times\omega_i} (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \tilde{a}_{11}{}^{4\times0.1} \\ &= \langle(0.1^{0.4}, 0.2^{0.4}, 0.3^{0.4}); 0.1,0.2,0.3\rangle \\ &= \langle(0.398,0.525,0.618); 0.1,0.2,0.3\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde tüm $\tilde{A}_{ij} = \tilde{a}_{ij}{}^{n\times\omega_i} (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$ ler hesaplanırsa

	u_1	u_2
x_1	$\langle(0.398,0.525,0.618); 0.1,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.382,0.480,0.574); 0.3,0.4,0.5\rangle$
x_2	$\langle(0.618,0.815,0.959); 0.3,0.6,0.9\rangle$	$\langle(0.158,0.665,0.919); 0.1,0.6,0.9\rangle$
x_3	$\langle(0.525,0.618,0.693); 0.2,0.3,0.4\rangle$	$\langle(0.574,0.665,0.754); 0.5,0.6,0.7\rangle$
x_4	$\langle(0.815,0.867,0.915); 0.6,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.276,0.382,0.837); 0.2,0.3,0.8\rangle$
	u_3	u_4
x_1	$\langle(0.542,0.652,0.765); 0.6,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.025,0.146,0.845); 0.1,0.3,0.9\rangle$
x_2	$\langle(0.333,0.435,0.542); 0.4,0.5,0.6\rangle$	$\langle(0.025,0.442,0.845); 0.1,0.6,0.9\rangle$

x_3	$\langle(0.652,0.765,0.881);0.7,0.8,0.9\rangle$	$\langle(0.076,0.231,0.700);0.2,0.4,0.8\rangle$
x_4	$\langle(0.145,0.652,0.765);0.2,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.076,0.565,0.700);0.2,0.7,0.8\rangle$

3. Adım : TDÜN-sayıların tüm $\tilde{A}_{ij}$ skorları hesaplanırsa;

$$
\begin{array}{llll}
S(\tilde{A}_{11}) = 0.308 & S(\tilde{A}_{12}) = 0.251 & S(\tilde{A}_{13}) = 0.269 & S(\tilde{A}_{14}) = 0.114 \\
S(\tilde{A}_{21}) = 0.239 & S(\tilde{A}_{22}) = 0.131 & S(\tilde{A}_{23}) = 0.213 & S(\tilde{A}_{11}) = 0.098 \\
S(\tilde{A}_{31}) = 0.344 & S(\tilde{A}_{32}) = 0.299 & S(\tilde{A}_{33}) = 0.137 & S(\tilde{A}_{34}) = 0.126 \\
S(\tilde{A}_{41}) = 0.357 & S(\tilde{A}_{42}) = 0.205 & S(\tilde{A}_{43}) = 0.287 & S(\tilde{A}_{44}) = 0.117
\end{array}
$$

elde edilir.

4. Adım : Bütün TDÜN-sayıların tüm $\tilde{A}_{ij}$ ler skorları göre sıralanırsa

$$\tilde{A}_{11} > \tilde{A}_{13} > \tilde{A}_{12} > \tilde{A}_{14}$$
$$\tilde{A}_{21} > \tilde{A}_{23} > \tilde{A}_{22} > \tilde{A}_{24}$$
$$\tilde{A}_{31} > \tilde{A}_{32} > \tilde{A}_{33} > \tilde{A}_{34}$$
$$\tilde{A}_{41} > \tilde{A}_{43} > \tilde{A}_{42} > \tilde{A}_{44}$$

$[b_i]_{1\times n} = \tilde{b}_{ik}\left(i \in I_m, k \in I_n\right)$ şeklinde TDÜN-sayıları yeniden sıralanırsa

$$
\begin{array}{llll}
\tilde{b}_{11} = \tilde{A}_{11}, & \tilde{b}_{12} = \tilde{A}_{13}, & \tilde{b}_{13} = \tilde{A}_{12}, & \tilde{b}_{14} = \tilde{A}_{14} \\
\tilde{b}_{21} = \tilde{A}_{21}, & \tilde{b}_{22} = \tilde{A}_{23}, & \tilde{b}_{23} = \tilde{A}_{22}, & \tilde{b}_{24} = \tilde{A}_{24} \\
\tilde{b}_{31} = \tilde{A}_{31}, & \tilde{b}_{32} = \tilde{A}_{32}, & \tilde{b}_{33} = \tilde{A}_{33}, & \tilde{b}_{34} = \tilde{A}_{34} \\
\tilde{b}_{41} = \tilde{A}_{41}, & \tilde{b}_{42} = \tilde{A}_{43}, & \tilde{b}_{43} = \tilde{A}_{42}, & \tilde{b}_{44} = \tilde{A}_{44}
\end{array}
$$

5. Adım : $i = 1,2,3,4$ için $[b_i]_{1\times n}$ karar matrisi

$$b_1 = \langle(0.398,0.525,0.618);0.1,0.2,0.3\rangle,\langle(0.542,0.652,0.765);0.6,0.7,0.8\rangle,\langle(0.382,0.480,0.574);0.3,0.4,0.5\rangle,\langle(0.025,0.146,0.845);0.1,0.3,0.9\rangle$$

$$b_2 = \langle(0.618,0.815,0.959);0.3,0.6,0.9\rangle,\langle(0.333,0.435,0.542);0.4,0.5,0.6\rangle,\langle(0.158,0.665,0.919);0.1,0.6,0.9\rangle,\langle(0.025,0.442,0.845);0.1,0.6,0.9\rangle$$

$$b_3 = \langle(0.525,0.618,0.693);0.2,0.3,0.4\rangle,\langle(0.574,0.665,0.754);0.5,0.6,0.7\rangle,\langle(0.652,0.765,0.881);0.7,0.8,0.9\rangle,\langle(0.076,0.231,0.700);0.2,0.4,0.8\rangle$$

$$b_4 = \langle(0.815,0.867,0.915);0.6,0.7,0.8\rangle,\langle(0.145,0.652,0.765);0.2,0.7,0.8\rangle,\langle(0.276,0.382,0.837);0.2,0.3,0.8\rangle,\langle(0.076,0.565,0.700);0.2,0.7,0.8\rangle$$

şeklindedir.

6. Adım : $i = 1,2,3,4$ için $\text{TDÜN}_{hgo}(b_i) = \text{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, \tilde{b}_{i3}, \tilde{b}_{i4}\right)$ TDÜN-sayılar hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TDÜN}_{hgo}(b_1) \quad &= \mathrm{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{12}, \tilde{b}_{13}, \tilde{b}_{14}\right) \\
&= \langle (0.398^{0.24} \times 0.618^{0.26} \times 0.525^{0.26} \times 0.815^{0.24}, \\
&\qquad 0.525^{0.24} \times 0.815^{0.26} \times 0.618^{0.26} \times 0.867^{0.24}, \\
&\qquad 0.618^{0.24} \times 0.959^{0.26} \times 0.693^{0.26} \times 0.915^{0.24}); 0.1,0.7,0.9\rangle \\
&= \langle (0.570,0.693,0.784); 0.1,0.7,0.9\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TDÜN}_{hgo}(b_2) \quad &= \mathrm{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_{21}, \tilde{b}_{22}, \tilde{b}_{23}, \tilde{b}_{24}\right) \\
&= \langle (0.542^{0.24} \times 0.333^{0.26} \times 0.574^{0.26} \times 0.145^{0.24}, \\
&\qquad 0.652^{0.24} \times 0.435^{0.26} \times 0.665^{0.26} \times 0.652^{0.24}, \\
&\qquad 0.765^{0.24} \times 0.542^{0.26} \times 0.754^{0.26} \times 0.837^{0.24}); 0.2,0.7,0.8\rangle \\
&= \langle (0.312,0.538,0.762); 0.2,0.7,0.8\rangle\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TDÜN}_{hgo}(b_2) \quad &= \mathrm{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_{21}, \tilde{b}_{22}, \tilde{b}_{23}, \tilde{b}_{24}\right) \\
&= \langle (0.542^{0.24} \times 0.333^{0.26} \times 0.574^{0.26} \times 0.145^{0.24}, \\
&\qquad 0.652^{0.24} \times 0.435^{0.26} \times 0.665^{0.26} \times 0.652^{0.24}, \\
&\qquad 0.765^{0.24} \times 0.542^{0.26} \times 0.754^{0.26} \times 0.765^{0.24}); 0.2,0.7,0.8\rangle \\
&= \langle (0.312,0.538,0.762); 0.2,0.7,0.8\rangle\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TDÜN}_{hgo}(b_3) \quad &= \mathrm{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_{31}, \tilde{b}_{32}, \tilde{b}_{33}, \tilde{b}_{34}\right) \\
&= \langle (0.382^{0.24} \times 0.158^{0.26} \times 0.652^{0.26} \times 0.276^{0.24}, \\
&\qquad 0.480^{0.24} \times 0.665^{0.26} \times 0.765^{0.26} \times 0.382^{0.24}, \\
&\qquad 0.574^{0.24} \times 0.919^{0.26} \times 0.881^{0.26} \times 0.837^{0.24}); 0.1,0.8,0.9\rangle \\
&= \langle (0.365,0.612,0.726); 0.1,0.8,0.9\rangle\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TDÜN}_{hgo}(b_4) \quad &= \mathrm{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_{41}, \tilde{b}_{42}, \tilde{b}_{43}, \tilde{b}_{44}\right) \\
&= \langle (0.025^{0.24} \times 0.025^{0.26} \times 0.076^{0.26} \times 0.076^{0.24}, \\
&\qquad 0.146^{0.24} \times 0.442^{0.26} \times 0.231^{0.26} \times 0.565^{0.24}, \\
&\qquad 0.845^{0.24} \times 0.845^{0.26} \times 0.700^{0.26} \times 0.700^{0.24}); 0.1,0.7,0.9\rangle \\
&= \langle (0.044,0.303,0.769); 0.1,0.7,0.9\rangle\rangle
\end{aligned}
$$

7. Adım : $i = 1,2,3,4$ için $\mathrm{TDÜN}_{hgo}\left(\tilde{b}_i\right)$ skorları hesaplanırsa

$$S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_1)\right) = 0.128$$
$$S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_2)\right) = 0.121$$
$$S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_3)\right) = 0.106$$
$$S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_4)\right) = 0.070$$

elde edilir. Skor fonksiyonları büyükten küçüğe doğru sıralanırsa

$$S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_1)\right) > S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_2)\right) > S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_3)\right) > S_{\text{Ü}}\left(\text{TDÜN}_{hgo}(\tilde{b}_4)\right)$$

bulunur. x_j $(j = 1,2,3,4)$ alternatifleri sıralanırsa

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$$

En iyi alternatif x_1 dir.

5.4. TDÜN Sayıların Belirsizliği ve Değeri İçin Uygulama

Bu bölümde, TDÜN sayıların belirsizliği ve değeri için uygulama verilmiştir. Bu uygulama Li [41]'nin çalışmalarından alınmıştır.

Tanım 5.6 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alternatifler kümesi, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ nitelikler kümesi ve $i = 1,2, \ldots n;\ j = 1,2, \ldots, m$ için $[\tilde{A}_{ij}] = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}); w_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}, y_{\tilde{a}_{ij}} \rangle$ TDÜN sayıları göstermek üzere aşağıdaki matrise karar vericinin TDÜN çok kriterli karar verme matrisi denir.

$$[\tilde{A}_{ij}]_{m\times n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} & \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1n} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & & \tilde{A}_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \tilde{A}_{m2} & \cdots & \tilde{A}_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Şimdi TDÜN çok kriterli karar verme metodunun algoritmasını verelim.

Algoritma:

1. Adım: Karar için $A = [\tilde{A}_{ij}]_{m\times n}$ karar verme matrisi inşa edilecek

2. Adım: A nın $R = [\tilde{r}_{ij}]_{m\times n}$ normal karar verme matrisi hesaplanacak

$$\tilde{r}_{ij} = \left\langle \left(\frac{a_{ij}}{\bar{a}^+}, \frac{b_{ij}}{\bar{a}^+}, \frac{c_{ij}}{\bar{a}^+} \right); w_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}, y_{\tilde{a}_{ij}} \right\rangle \quad (i = 1,2, \ldots n;\ j = 1,2, \ldots, m)$$

Burada $\bar{a}^+$ matrisin en büyük elemanıdır.

3. Adım: R nin $U = (\tilde{u}_{ij})_{m\times n}$ hesaplanacak. Burada $\tilde{u}_{ij} = \omega_i \tilde{r}_{ij}$ $(i = 1,2, \ldots n;\ j = 1,2, \ldots, m)$ dir.

4. Adım: $\tilde{S}_j$ hesaplanacak

$$\tilde{S}_j = \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_{ij} \quad (j = 1,2, \ldots n)$$

5. Adım: $\tilde{S}_j$ nin artmayan

6. Adım: $\tilde{S}_j (j \in 1,2, \ldots, n)$ nin x_j göre alternatifleri sırala ve en iyi alternatifi seçilecek

Örnek 5.7 Bir yazılım şirketinin bir sistem analizcisini işe almak istediğini var sayalım. Ön elemeden sonra üç aday ($X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$) değerlendirmeye hak kazanmıştır. Karar verme komitesi üç adayı beş kritere ($U=\{u_1=$ duygusallık, $u_2=$ sözlü iletişim, $u_3=$ kişilik, $u_4=$ deneyim, $u_5=$kendine güven$\}$) göre değerlendirecektir. Kriterlerin ağırlık vektörü $\omega=(0.15, 0.25, 0.20, 0.25, 0.15)^T$ dir. Karar verme komitesi u_j $(j=1,2,3,4,5)$ kriterlerine göre x_i $(i=1,2,3)$ alternatiflerinden birini değerlendirmek için uyguluyor. Buna göre,

1. Adım: $A=\left[\tilde{A}_{ij}\right]_{m\times n}$ karar için karar verme matrisi aşağıdaki gibidir.

	x_1	x_2	x_3
u_1	$\langle(4.6,5.5,8.6); 0.4,0.7,0.2\rangle$	$\langle(6.2,7.6,8.2); 0.4,0.1,0.3\rangle$	$\langle(5.5,6.2,7.3); 0.8,0.1,0.2\rangle$
u_2	$\langle(5.8,6.9,8.5); 0.6,0.2,0.3\rangle$	$\langle(7.1,7.7,8.3); 0.5,0.2,0.4\rangle$	$\langle(4.7,6.9,8.5); 0.7,0.2,0.6\rangle$
u_3	$\langle(5.3,6.7,9.9); 0.3,0.5,0.2\rangle$	$\langle(6.2,8.9,9.1); 0.6,0.3,0.5\rangle$	$\langle(7.1,8.5,8.9); 0.5,0.2,0.7\rangle$
u_4	$\langle(4.4,5.9,7.2); 0.7,0.2,0.3\rangle$	$\langle(6.3,7.5,8.9); 0.7,0.4,0.6\rangle$	$\langle(6.6,8.8,10); 0.6,0.2,0.2\rangle$
u_5	$\langle(6.5,6.9,8.5); 0.6,0.8,0.1\rangle$	$\langle(7.5,7.9,8.5); 0.8,0.5,0.4\rangle$	$\langle(5.3,7.3,8.7); 0.7,0.2,0.8\rangle$

2. Adım: A nın $R=\left[\tilde{r}_{ij}\right]_{m\times n}$ normal karar verme matrisi hesaplanırsa

	x_1	x_2	x_3
u_1	$\langle(0.46,0.55,0.86); 0.4,0.7,0.2\rangle$	$\langle(0.62,0.76,0.82); 0.4,0.1,0.3\rangle$	$\langle(0.55,0.62,0.73); 0.8,0.1,0.2\rangle$
u_2	$\langle(0.58,0.69,0.85); 0.6,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.71,0.77,0.83); 0.5,0.2,0.4\rangle$	$\langle(0.47,0.69,0.85); 0.7,0.2,0.6\rangle$
u_3	$\langle(0.53,0.67,0.99); 0.3,0.5,0.2\rangle$	$\langle(0.62,0.89,0.91); 0.6,0.3,0.5\rangle$	$\langle(0.71,0.85,0.89); 0.5,0.2,0.7\rangle$
u_4	$\langle(0.44,0.59,0.72); 0.7,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.63,0.75,0.89); 0.7,0.4,0.6\rangle$	$\langle(0.66,0.88,1.00); 0.6,0.2,0.2\rangle$
u_5	$\langle(0.65,0.69,0.85); 0.6,0.8,0.1\rangle$	$\langle(0.67,0.88,0.96); 0.8,0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.53,0.73,0.87); 0.7,0.2,0.8\rangle$

3. Adım: $\tilde{u}_{ij}=\omega_i\tilde{r}_{ij}$ $(i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots,m)$ göre, R nin $U=\left(\tilde{u}_{ij}\right)_{m\times n}$ hesaplanırsa

	x_1	x_2	x_3
u_1	$\langle(0.069,0.083,0.129); 0.4,0.7,0.2\rangle$	$\langle(0.093,0.114,0.123); 0.4,0.1,0.3\rangle$	$\langle(0.083,0.093,0.110); 0.8,0.1,0.2\rangle$
u_2	$\langle(0.145,0.173,0.213); 0.6,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.178,0.193,0.208); 0.5,0.2,0.4\rangle$	$\langle(0.118,0.173,0.213); 0.7,0.2,0.6\rangle$
u_3	$\langle(0.106,0.134,0.198); 0.3,0.5,0.2\rangle$	$\langle(0.124,0.178,0.182); 0.6,0.3,0.5\rangle$	$\langle(0.142,0.170,0.178); 0.5,0.2,0.7\rangle$
u_4	$\langle(0.110,0.148,0.180); 0.7,0.2,0.3\rangle$	$\langle(0.158,0.188,0.223); 0.7,0.4,0.6\rangle$	$\langle(0.165,0.220,0.250); 0.6,0.2,0.2\rangle$
u_5	$\langle(0.098,0.104,0.128); 0.6,0.8,0.1\rangle$	$\langle(0.101,0.132,0.144); 0.8,0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.080,0.110,0.131); 0.7,0.2,0.8\rangle$

4. Adım: $\tilde{S}_j$ ler hesaplanırsa

$$\tilde{S}_1 = \langle(0.528,0.640,0.847); 0.3,0.8,0.3\rangle$$
$$\tilde{S}_2 = \langle(0.653,0.804,0.879); 0.4,0.5,0.6\rangle$$
$$\tilde{S}_3 = \langle(0.587,0.765,0.881); 0.5,0.2,0.8\rangle$$

5.Adım: $\tilde{S}_j$ nin artmayan değerleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$V_\mu(\tilde{S}_1) = 0.656 \times 0.3^2 = 0.059$$
$$V_\nu(\tilde{S}_1) = 0.656 \times (1-0.8)^2 = 0.026$$
$$V_\lambda(\tilde{S}_1) = 0.656 \times (1-0.3)^2 = 0.321$$

$$V_\mu(\tilde{S}_2) = 0.656 \times 0.3^2 = 0.127$$
$$V_\nu(\tilde{S}_2) = 0.656 \times (1-0.8)^2 = 0.198$$
$$V_\lambda(\tilde{S}_2) = 0.656 \times (1-0.3)^2 = 0.127$$

$$V_\mu(\tilde{S}_3) = 0.755 \times 0.3^2 = 0.189$$
$$V_\nu(\tilde{S}_3) = 0.755 \times (1-0.8)^2 = 0.483$$
$$V_\lambda(\tilde{S}_3) = 0.755 \times (1-0.3)^2 = 0.030$$

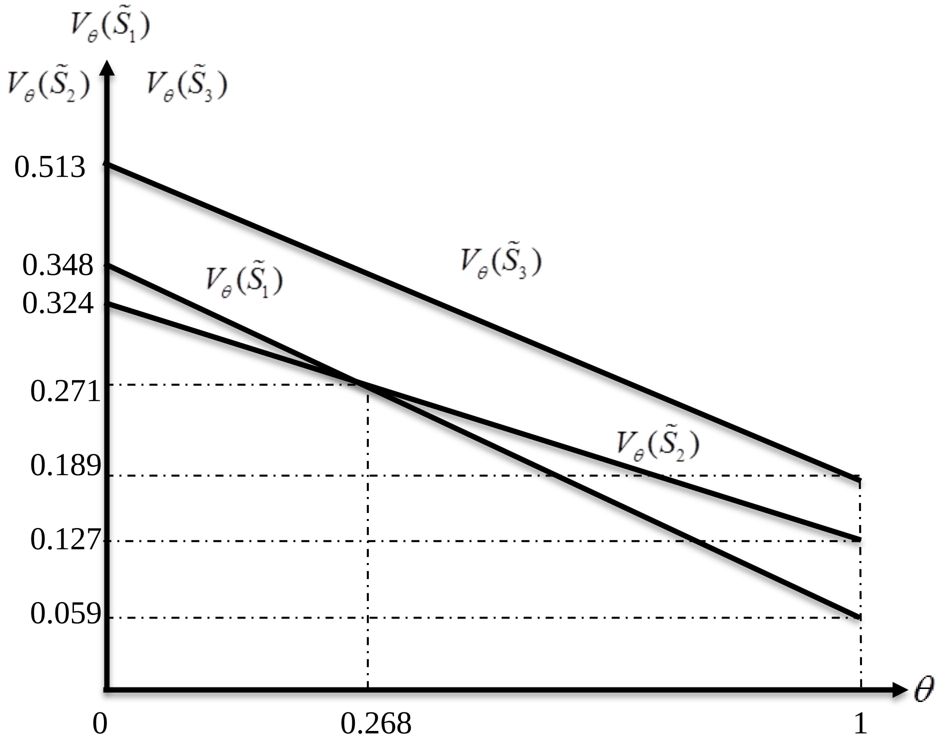
$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3$ TDÜN sayıların ağırlaştırılmış değerleri

$$V_\theta(\tilde{S}_1) = 0.059\theta + 0.026(1-\theta) + 0.321(1-\theta)$$
$$V_\theta(\tilde{S}_2) = 0.127\theta + 0.198(1-\theta) + 0.127(1-\theta)$$
$$V_\theta(\tilde{S}_3) = 0.189\theta + 0.483(1-\theta) + 0.030(1-\theta)$$

şekilde gösterilmiştir.Şekilde kolaylıkla görülüyor ki $\tilde{S}_1$ ve $\tilde{S}_2$ TDÜN sayıların kesişim noktası $\theta = 0.268$ dir.
$\tilde{S}_1$ ve $\tilde{S}_2$ nin ağırlaştırılmış belirsizliği hesaplanırsa

$$A_{0.268}(\tilde{S}_1) = \frac{0.847-0.528}{6}[0.268 \times 0.3^2 + (1-0.268)(1-0.8)^2 + (1-0.268)(1-0.3)^2]$$
$$= 0.022$$

$$A_{0.268}(\tilde{S}_2) = \frac{0.878-0.587}{6}[0.268 \times 0.5^2 + (1-0.268)(1-0.2)^2 + (1-0.268)(1-0.8)^2]$$
$$= 0.001$$



$\tilde{S}_1$ ve $\tilde{S}_2$ bu sonuçlara göre sıralanırsa $\tilde{S}_1 \gtrsim \tilde{S}_2$ dir.

Şekilde görüldüğü gibi $\theta \epsilon [0, 0.268)$ için

$$V_\theta(\tilde{S}_3) > V_\theta(\tilde{S}_1) > V_\theta(\tilde{S}_2)$$

6. Adım: $\tilde{S}_j(j \in 1,2,\dots,n)$ nin x_j göre alternatifleri sırala

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2$$

dir. En iyi alternatif x_3 dür. Benzer şekilde $\theta \epsilon (0.268, 1]$ için

$$V_\theta(\tilde{S}_3) > V_\theta(\tilde{S}_2) > V_\theta(\tilde{S}_1)$$

x_j göre alternatifler sıralanırsa

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2$$

olur. Bu durumda da en iyi alternatif x_3 dür.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada yapılacak olan tanım ve metotları inşa etmek için başta bulanık kümeler, bulanık sayılar, sezgisel bulanık kümeler, sezgisel bulanık sayılar ve neutrosophic kümeler başlıca temel tanım ve işlemleri verildi. Daha sonra bulanık sayılar ve sezgisel bulanık sayıların genellemesi olan tek değerli neutrosophic sayı kavramını tanımlandı. Verilen tek değerli neutrosophic sayı kavramının birer özel hali olan tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarını bazı işlemleri ile birlikte sunuldu ve istenilen bazı özelliklerini incelendi. Tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı için skor ve kesinlik fonksiyonları tanımlandı ve bu sayılar üzerine bazı aritmetik ve geometrik operatörler inşa edildi. Ayrıca bu inşa edilen operatörlerin bazı özel durumları ve istenilen özellikleri detaylı olarak incelendi. Ayrıca tek değerli neutrosophic sayı kavramı için kesim küme kavramı verildi ve tek değerli yamuksal neutrosophic sayı ve tek değerli üçgensel neutrosophic sayı kavramlarına ayrı ayrı uygulandı. Daha sonra tek değerli neutrosophic sayılarda doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu için değer ve belirsizlik kavramları ileri sürüldü ve istenilen özellikleri incelendi. Son olarak tek değerli neutrosophic sayılar üzerine inşa edilen operatörleri ve ileri sürülen değer ve belirsizlik kavramlarını kullanarak çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metotları geliştirildi. Ayrıca tek değerli neutrosophic sayılar ile ifade edilen kriterlere bağlı alternatiflerin nasıl sıralanacağını göstermek için bazı nümerik örnekler verildi.

Neutrosophic sayılar ilerleyen zamanlarda birçok belirsizlik içeren olayları modellemek ve çözmek için çok daha fazla alana uygulanabilir. Mesela yapıları gereği belirsiz ifadeler içeren bilgisayar bilimi, karar verme problemleri, işletme ve iktisat problemlerine, ekonomi problemlerine ve daha geniş alanlarda uygulamaları üzerine çalışmalar yapılabilir. Bunun için neutrosophic sayılar ve işlemleri değişik uygulamalar ve teknikler kullanılarak genişletilebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Ansaria, A.Q., Biswasb R. and Aggarwalc, S., 2013. Neutrosophic classifer: An extension of fuzzy classifer. Applied Soft Computing 13, 563-573.

[2] Ashbacher, C., 2002. Introduction to Neutrosophic Logic. ISBN: 1-931233-60-8. American Research Press Rehoboth, USA.

[3] Atanassov, K., 1996. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 20, 87-96.

[4] Atanassov, K., Gargov, G., 1989. Interval valued Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets Syst. 31, 343-349.

[5] Atanassov, K., 1999. Intuitionistic Fuzzy Sets, Pysica-Verlag A Springer-Verlag Company, New York.

[6] Ban, A., 2008. Trapezoidal approximations of Intuitionistic fuzzy numbers expressed by value, ambiguity, width and weighted expected value. Twelfth Int. Conf. on IFSs, Sofia, NIFS Vol. 14(1), 38-47.

[7] Bandyopadhyay, S., Nayak, P. K., Pal, M., 2013. Solution Of Matrix Game In Intuitionistic Fuzzy Environment. International Journal Of Computational Engineering Research 3(1), 153-171.

[8] Biswas, P., Pramanik, S., Giri B.C., 2014. Cosine Similarity Measure Based Multi-attribute Decision-making with Trapezoidal Fuzzy Neutrosophic Numbers. Neutrosophic Sets and Systems 8, 46-56.

[9] Broumi, S., Smarandache F., 2014. Single valued neutrosophic trapezoid linguistic aggregation operators based multi-attribute decision making. Bulletin of Pure and Applied Sciences Mathematics and Statistics, 33(2) DOI: 10.5958/2320-3226.2014.00006.X.

[10] Broumi, S., Deli, I., Smarandache, F., 2014. Relations on Interval Valued Neutrosophic Soft Sets. Journal of New Results in Science 5, 1-20.

[11] Broumi, S., Deli, I., Smarandache, F., 2014. Interval valued neutrosophic parameterized soft set theory and its decision making. Journal of New Results in Science 7, 58-71.

[12] Broumi, S., Deli, I., 2014. Correlation measure for neutrosophic Refined sets and its application ın medical Diagnosis. Palestine journal of mathematics, 5(1), xx-xx.

[13] Broumi, S., Deli, I., Smarandache, F., 2014. Distance and Similarity Measures of Interval Neutrosophic Soft Sets, Critical Review. Center for Mathematics of Uncertainty, Creighton University, USA 8, 14-31.

[14] Broumi, S., Ye, J., Smarandache, F., 2015. An Extended TOPSIS Method for Multiple Attribute Decision Making based on Interval Neutrosophic Uncertain Linguistic Variables. Neutrosophic Sets and Systems 8, 23--32.

[15] Chen, T.Y., Wang, H.P., Lu, Y.Y., 2011. A multicriteria group decision-making approach based on interval-valued Intuitionistic fuzzy sets: a comparative perspective. Exp. Syst. Appl. 38 (6), 7647-7658.

[16] Chen, Y., Li, B., 2011. Dynamic multi-attribute decision making model based on triangular Intuitionistic fuzzy numbers. Scientia Iranica B 18 (2), 268-274.

[17] Chen, T., 2012. Multiple criteria group decision-making with generalized interval-valued fuzzy numbers based on signed distances and incomplete weights. Appl. Math. Model. 36 (7), 3029-3052.

[18] Çağman, N., Deli, I., 2012. Means of FP-Soft Sets and its Applications. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41(5), 615-625.

[19] Çağman, N., Deli, I., 2012. Product of FP-Soft Sets and its Applications. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 41(3), 365-374.

[20] De, P. K., Das D., 2012. Ranking of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA) 184-188.

[21] De, P. K., Das, D., 2014. A Study on Ranking of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications 6, 437-444.

[22] Deli, I., Broumi, S., Neutrosophic Soft Matrices and NSM-decision Making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, DOI:10.3233/IFS-141505.

[23] Deli, I., Çağman, N., 2015. Intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making. Applied Soft Computing 28, 109-113.

[24] Das, S., Guha, D., 2013. Ranking of Intuitionistic Fuzzy Number by Centroid Point. Journal of Industrial and Intelligent Information 1(2), 107-110.

[25] Dubois, D., Prade, F. H., 1978. Operations on fuzzy numbers. Internatial Journal of Systems Sciences 9 (6), 613-626.

[26] Dubois, D., Prade, F. H., 1980. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. ISBN: 0122227506, 9780122227509. Akademic Press.

[27] Esmailzadeh, M., Esmailzadeh, M., 2013. New distance between triangular Intuitionistic fuzzy numbers. Advances in Computational Mathematics and its Applications 2(3), 310-314.

[28] Farhadinia, B., Ban, A. I., 2013. Developing new similarity measures of generalized Intuitionistic fuzzy numbers and generalized interval-valued fuzzy numbers from similarity measures of generalized fuzzy numbers. Mathematical and Computer Modelling 57, 812-825.

[29] Gani, A. N., Sritharan, N., Kumar, C. A., 2011. Weighted Average Rating (WAR) Method for Solving Group Decision Making Problem Using an Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Hybrid Aggregation (ITFHA) Operator. International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology Int. J. Pure Appl. Sci. Technol., 6(1), 54-61.

[30] Guo, Y., Şengür, A., Ye, J., 2014. A Novel Image Thresholding Algorithm Based on Neutrosophic Similarity Score, Measurement. DOİ: http: //dx.doi.org/10.1016 /j.measurement.2014.08.039.

[31] Hanafy, I. M., Salama, A.A., Mahfouz, K.M., 2013. Correlation Coefficients of Neutrosophic Sets by Centroid Method. International Journal of Probability and Statistics 2(1), 9-12.

[32] He, Y., Chen, H., Zhou, L., Han, B., Zhao, Q., Liu, J., 2014. Generalized intuitionistic fuzzy geometric interaction operators and their application to decision making. Expert Systems with Applications 41, 2484-2495.

[33] He, Y., Chen, H., Zhou, L., Liu, J., Tao, Z., 2014. Intuitionistic fuzzy geometric interaction averaging operators and their application to multi-criteria decision making. Information Sciences 259, 142-159.

[34] Herrera, F., Viedma, E. H., 2000. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information, Fuzzy Sets and Systems 115, 67-82.

[35] Huang, H. L., 2013. Some properties on the cut sets of intuitionistic fuzzy sets. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics Volume 5(3), 475-481.

[36] Jianqiang, W., Zhong, Z., 2009. Aggregation operators on Intuitionistic trapezoidal fuzzy number and its application to multi-criteria decision making problems. Journal of Systems Engineering and Electronics, 20(2) 321-326.

[37] Krohling, R., Pacheco, A., Siviero, A., 2013. IF-TODIM: An intuitionistic fuzzy TODIM to multi-criteria decision making, Knowledge-Based Systems 53, 142–146.

[38] Kumar, A., Kaur, M., 2013. A Ranking Approach for Intuitionistic Fuzzy Numbers and its Application. Journal of Applied Research and Technology, 11 381-396.

[39] Li, D. F. 2010. A ratio ranking method of triangular Intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems. Computers and Mathematics with Applications 60, 1557-1570.

[40] Li, D. F., Nan, J. X., Zhang, M. J., 2010. A ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and application to decision making. Int. J. Comput. Intell. Syst. 3(5), 522–530.

[41] Li, D. F., 2014. Decision and Game Theory in Management With Intuitionistic Fuzzy Sets. ISBN: 978-3-642-40711-6. Studies in Fuzziness and Soft Computing Volume 308, Springer.

[42] Li, D. F. 2011. The GOWA operator based approach to multiattribute decision making using intuitionistic fuzzy sets. Mathematical and Computer Modelling 53, li-11–1196.

[43] Liu, P., Chu, Y., Li, Y., Chen, Y., 2014. Some Generalized Neutrosophic Number Hamacher Aggregation Operators and Their Application to Group Decision Making. International Journal of Fuzzy Systems 16(2), 242-255.

[44] Liang, C., Zhao, S., Zhang, J., 2014. Aggregaton Operators on Triangular Intuitionstic Fuzzy Numbers and its Applcaton to Multi-Criteria Decision Making Problems. Foundations of Computing and Decision Sciences 39(3), 189–208.

[45] Liu, P., 2013. Some generalized dependent aggregation operators with intuitionistic linguistic numbers and their application to group decision making. Journal of Computer and System Sciences 79, 131-143.

[46] Liu, B., Member, S., IEEE, and Liu, Y. K., 2002. Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10(4), 445-450.

[47] Mahapatra, G. S., Roy, T. K., 2009. Reliability Evaluation using Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers Arithmetic Operations, World Academy of Science, Engineering and Technology 3, 422-429.

[48] Mahapatra, G.S., Roy, T.K., 2013. Intuitionistic Fuzzy Number and Its Arithmetic Operation with Application on System Failure. Journal of Uncertain Systems 7(2) 92-107.

[49] Nan, J. X., Zhang, M. J., Li, D. F., 2014. Intuitionistic Fuzzy Programming Models for Matrix Games with Payoffs of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. International Journal of Fuzzy Systems 16(4) 444-456.

[50] Nehi, H. M. 2010. A New Ranking Method for Intuitionistic Fuzzy Numbers. International Journal of Fuzzy Systems 12(1), 80-86.

[51] Palanivelrajan M., Kaliraju, K., 2012. A Study on Intuitionistic Fuzzy Number Group. International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems 2(3) 269-277.

[52] Peng, J.J., Wang, J.Q., Zhang, H.Y., Chen, X.H., 2014. An outranking approach for multi-criteria decision-making problemswith simplified neutrosophic sets. Applied Soft Computing 25 336-346.

[53] Peng, J.J., Wang, J.Q., Wu, X.H., Wang, J., Chen, X.H., 2014. Multi-valued Neutrosophic Sets and Power Aggregation Operators with Their Applications in Multi-criteria Group Decision-making Problems. International Journal of Computational Intelligence Systems 8(2), 345-363.

[54] Peng J.J., Wang, J.Q., Wang, J., Zhang, H.Y., Chen, X.H., 2015. Simplified neutrosophic sets and their applications in multi-criteria group decision-making problems. International Journal of Systems Science. DOI:10.1080/00207721.2014.994050

[55] Peng J.J., Wang, J.Q., Wu, X.H., Zhang, H.Y., Chen, X.H., 2014. The Fuzzy Cross-entropy for Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets and its Application in Multi-criteria Decision-making. International Journal of Systems Science. DOI: 10.1080/00207721.2014.993744.

[56] Rajkumar, A., Devadoss, A.V., 2014. A Study on Miracles through the Holy Bible using New Triangular Neutrosophic Cognitive Maps(TrNCMs). International Journal of Computer Application 4(4), 152-160.

[57] Roseline, S. S., Amirtharaj, E. C., Henry 2013. A New Method for Ranking of Intuitionistic Fuzzy Numbers, Indian Journal of Applied Research, 3(6), 1-2.

[58] Salama, A. A., Alblowi, S. A., 2012. Neutrosophic Set and Neutrosophic Topological Spaces. IOSR Journal of Mathematics, 3(4) 31-35.

[59] Shenify M., Mazarbhuiya, F., 2015. The Expected Value of a Fuzzy Number. International Journal of Intelligence Science 5, 1-5.

[60] Shirin, S., Saha, G., 2011. Graphical Representations of membership functons of maximum and minimum of two fuzzy numbers using computer program. J. Bangladesh Math. Soc. 31, 105-115.

[61] Smarandache, F. 2002. Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics University of New Mexico, Gallup, NM 87301, USA.

[62] Smarandache, F. 1998. A Unifying Field in Logics. Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set and Logic. Rehoboth: American Research Press.

[63] Smarandache, F. 2005. Neutrosophic set, a generalisation of the Intuitionistic fuzzy sets. Int. J. Pure Appl. Math. 24, 287-297.

[64] Xu, Y., Wang, H., 2012. The induced generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets and their application in group decision making. Applied Soft Computing 12, 1168-1179.

[65] Xu, Z. S., 2007. Intuitionistic fuzzy aggregation operators. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 15 (6), 1179-1187.

[66] Xu, Z., Yager, R. R., 2006. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. International Journal of General Systems 35(4) 417–433.

[67] Xu, Z., Cai, X., 2015. Group Decision Making with Incomplete Interval-Valued Intuitionistic Preference Relations. Group Decision and Negotiation 24(2), 193-215.

[68] Xu, J., Shen, F., 2014. A new outranking choice method for group decision making under Atanassov's interval-valued intuitionistic fuzzy environment, Knowledge-Based Systems 70, 177–188.

[69] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y.Q., Sunderraman, R., 2005. Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing, Hexis, Neutrosophic book series, No: 5 Phoenix, AZ.

[70] Wang, J., Nie, R., Zhang, H., Chen, X., 2013. New operators on triangular Intuitionistic fuzzy numbers and their applications in system fault analysis. Information Sciences 251, 79-95.

[71] Wang, J., Nie, R., Zhang, H., Chen, X., 2013. Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on evidential reasoning. Applied Soft Computing 13, 1823-1831.

[72] Wang, H., Smarandache, F. Y., Zhang, Q., Sunderraman, R., 2010. Single valued neutrosophic sets. Multispace and Multistructure 4, 410-413.

[73] Wang, Y. M., Yang, J. B., Xu, D. L., Chin K. S., 2006. On the centroids of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems 157, 919 – 926

[74] Wan, S., Dong, J., 2014. Multi-Attribute Group Decision Making with Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers and Application to Stock Selection. Informatica 25(4), 663-697.

[75] Wan, S., Dong, J., 2015. Power Geometric Operators of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers and Application to Multi-attribute Group Decision Making. Applied Soft Computing Journal http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2014.12.031.

[76] Wan, S. P., 2013. Power average operators of trapezoidal Intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making, Applied Mathematical Modelling 37, 4112-4126.

[77] Wei, G., 2010. Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making. Applied Soft Computing 10, 423–431.

[78] Wan, S. P., Wanga, Q. Y., Dong, J. Y., 2013. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular Intuitionistic fuzzy numbers, Knowledge-Based Systems 52, 65-77.

[79] Wei, G., 2010. Some Arithmetic Aggregation Operators with Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Numbers and Their Application to Group Decision Making. Journal of Computers 5(3), 345-351.

[80] Wu, J., 2015. A SD-LITFOWA Operator And Topsis Based Approach For Magdm Problems With Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Numbers. Technological And Economic Development Of Economy 21(1), 28–47.

[81] Wu, J., Cao, Q., 2013. Same families of geometric aggregation operators with Intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers. Applied Mathematical Modelling 37, 318-327.

[82] Wu, J., Liu, Y., 2013. An approach for multiple attribute group decision making problems with interval-valued Intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers. Computers and Industrial Engineering 66, 311-324.

[83] Ye, F., 2010. An extended TOPSIS method with interval-valued Intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection. Expert Systems with Applications, Expert Systems with Applications 37, 7050-7055.

[84] Ye, J., 2014. Single Valued Neutrosophic Cross-Entropy for Multicriteria Decision Making Problems, Applied Mathematical Modelling 38, 1170-1175.

[85] Ye, J., 2014. Improved cosine similarity measures of simplfied neutrosophic sets for medical diagnoses. Artificial Intelligence in Medicine, http://dx.doi.org/10.1016/j.artmed.2014.12.007

[86] Ye, J., 2014. Vector Similarity Measures of Simplfied Neutrosophic Sets and Their Application in Multicriteria Decision Making. International Journal of Fuzzy Systems 16(2), 204-211.

[87] Ye, J., 2012. The Dice similarity measure between generalized trapezoidal fuzzy numbers based on the expected interval and its multicriteria group decision-making method. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 29(6) 375-382.

[88] Ye, J., 2014. A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 26, 2459-2466.

[89] Ye, J., Trapezoidal neutrosophic set and its application to multiple attribute decision-making, Neural Comput. and Appl., DOI:10.1007/s00521-014-1787-6

[90] Ye, J., 2011. Expected value method for Intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems. Expert Systems with Applications 38, 11730-11734.

[91] Ye, J., 2014. Single-Valued Neutrosophic Minimum Spanning Tree and Its Clustering Method, Journal of Intelligent Systems 23(3), 311–324.

[92] Ye, J., 2014. Similarity measures between interval neutrosophic sets and their applications in multicriteria decision-making, Journal of Intelligent Fuzzy Systems 26 165–172.

[93] Ye, F., 2010. An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection. Expert Systems with Applications 37, 7050–7055.

[94] Yu, D. 2013. Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Information Aggregation Methods and Their Applications to Teaching Quality Evaluation. Journal of Information Computational Science 10(6), 1861-1869.

[95] Yue, Z., 2014. Aggregating crisp values into Intuitionistic fuzzy number for group decision making, Applied Mathematical Modelling 38, 2969-2982.

[96] Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. Information and Control 8, 338-353.

[97] Zeng, X. T., Li D. F., Yu, G. F., 2014. A Value and Ambiguity-Based Ranking Method of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers and Application to Decision Making. Hindawi Publishing Corporation The Scientific World Journal 1-8.

[98] Zeng, S., 2013. Some Intuitionistic Fuzzy Weighted Distance Measures and Their Application to Group Decision Making. Group Decision and Negotiation. 22(2), 281-298.

[99] Zhang, X., Liu, P., 2010. Method For Aggregating Triangular Fuzzy Intutionistic Fuzzy Information and Its Application to Decision Making. Technological and economic development of economy Baltic Journal on Sustainability, 16(2) 280-290.

[100] Zhang, X., Jin, F., Liu, P., 2013. A grey relational projection method for multiattribute decision making based on Intuitionistic trapezoidal fuzzy number. Applied Mathematical Modelling 37, 3467-3477.

[101] Zhang, H. Y., Wang, J.Q., Chen, X.H., 2014. Interval Neutrosophic Sets and Their Application in Multicriteria Decision Making Problems, Hindawi Publishing Corporation the Scientific World Journal 1-15.

[102] Zhang, L., Li, T., Xu, X. 2014. Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Multiple Criteria Group Decision Making Method Based on Binary Relation, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering 1-8.

[103] Zhang, X., Xu, Z., 2015. Soft computing based on maximizing consensus and fuzzy TOPSIS approach to interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making, Applied Soft Computing 26, 42–56.

[104] Zhou, L., Wei, G., 2013. Some intuitionistic fuzzy Einstein hybrid aggregation operators and their application to multiple attribute decision making. Knowledge-Based Systems 37, 472-479.

ÖZGEÇMİŞ

Genel Bilgiler

Adı Soyadı :Yusuf ŞUBAŞ

Doğum Yeri : Alaca

Doğum Tarihi : 01.03.1982

İletişim : ysubas@kilis.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Çorum Cumhuriyet Lisesi, 1999

Lisans : Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2004

T.Yüksek Lisans: Fırat Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Öğret. 2012

Yüksek Lisans : Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD 2015

Akademik Deneyim

Öğretim Görevlisi Kilis 7 Aralık Üniversitesi MYO, 2009

Yayın Bilgileri:

A. SCI, SSCI, SCI–Expanded ve AHCI kapsamındaki dergilerde yayınlanmış makaleler

B. SCI, SSCI, SCI–Expanded ve AHCI kapsamı dışındaki yurtdışı hakemli dergilerde yayınlanmış makaleler

1. Tunç M., **Şubaş Y.,** Karabayır İ., *On some Hadamard type inequalities for MT-convex functions,* Int. J. Open Problems Comput. Math. , Vol. 6, No. 2, June 2013, 102-113.

Bilimsel Etkinlikler

A. Uluslararası bildiriler:

B. Ulusal Bildiriler:

1. M. Tunç, **Y.Şubaş**, İ.Karabayır, "*On Some Hadamard Type Inequalities For MT-Convex Functions*" XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu Niğde Üniversitesi, 2012

2. İ. Deli, **Y.Şubaş**, "*Neutrosophic Sayılar ve Cebirsel İşlemleri*" 9. Ankara Matematik Günleri, Atılım Üniversitesi, 2014

3. İ. Deli, **Y.Şubaş**, "*Ağırlaştırılmış Üçgensel Neutrosophic Aritmetik Operatörler ve Onların Çok Kriterli Karar Verme Problemlerine Uygulamaları*" 10. Ankara Matematik Günleri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 2015