

**T.C.  
KİLİS 7 ARALIK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA  
YÖNLÜBERTRANDEĞRİSİ**

**ŞİRİN LUTFU**

**DOÇ.DR. MUSTAFA DEDE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KASIM 2016  
KİLİS**

## TEZ ONAYI

Doç.Dr. Mustafa DEDE danışmalığında, Şirin LUTFU tarafından hazırlanan “**3-Boyutlu Öklid Uzayında Yönlü Bertrand Eğrileri**” adlı tez çalışması 08/11/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

<b>Jüri Üyeleri</b>	<b>Unvanı, Adı Soyadı (Kurumu)</b>	<b>İmza</b>
<b>Başkan</b>	<b>Doç.Dr. Memet KULE</b>	
<b>Üye</b>	<b>Doç. Dr. Mustafa DEDE</b>	
<b>Üye</b>	<b>Yrd. Doç. Dr. İlkay GÜVEN</b>	

Bu tezin kabulü,Fen bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../201.. tarih ve ...../..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Tez No: .....

Unvan Ad SOYAD  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİSİ

Şirin LUTFU

Kilis 7 Aralık Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman:Doç. Dr. Mustafa DEDE

Yıl: 2016 Sayfa: 53

Bu çalışmada, ilk olarak Öklid uzayı ve Frenet çatısı kavramlarını tanımladık. İkinci olarak bir uzay eğrisi boyunca birden çok çatı tanımlanabileceğini gösterdik, bu yeni tanımladığımız çatıya da q-çatı adını verdik. Üçüncü olarak q-çatı ile Frenet çatısı arasındaki bağlantıları elde ettik. Q-çatının eğriliklerini eğrilik ve torsion kullanarak ifade ettik. Dördüncü olarak iyi bilinen Bertrand eğrilerini q-çatı ile tanımladık. Burada en önemli sonuç olarak tüm eğrilerin yönlü Bertrand eğrisi tanımlanabileceğini elde ettik. Ayrıca Bertrand ve yönlü Bertrand eğrilerini şekiller çizdirerek karşılaştırdık.

**Anahtar Kelimeler:** Frenet frame, Öklid uzayı, Bertrand eğrileri, uzay eğrisi, eğrilikler

## **ABSTRACT**

MSc. Thesis

### **DIRECTIONAL BERTRAND CURVES IN 3-DIMENSIONAL EUCLID SPACE**

Şirin LUTFU

Kilis 7 Aralık University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Mustafa DEDE

Year: 2016 Page: 53

In this work, first of all we gave detailed information about Euclid space and Frenet frame. Secondly, we showed that we can define more than one frame along a space curve, we called this new frame as q-frame. Then we obtained the relationship between q-frame and Frenet frame. We calculated the new curvatures of the space curve in term of Frenet curvatures. Finally we introduced the well-known concept bertrand curves generated by q-frame. The main result of this study is that every space curve can admit infinite Bertrand mate. Moreover we compared the directional Bertrand mated with Bertrand mates by plotting the figures.

**Keywords:** Frenet frame, Euclid space, Bertrand curves, space curve, curvatures

## TEŐEKKÖR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi matematik bölümünde yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında ve hazırlanışında yakın ilgi destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç.Dr.Mustafa DEDE' ye içten teşekkürlerimi arz ederim

Şirin LUTFU

Kilis, Kasım 2016

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	2
2.1. Vektörler.....	2
2.1.1 Vektörlerin toplamı.....	3
2.1.2 Bir vektörün bir skaler ile çarpımı.....	3
2.1.3 Doğrusal bağımlılık ve doğrusal bağımsızlık.....	4
2.1.4 Baz vektörler ve bileşenleri.....	5
2.1.5 Vektörlerin skaler çarpımı.....	7
2.2. Öklid uzayı.....	9
3. ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE FRENET FORMÜLLERİ.....	16
3.1 Öklid uzayında eğriler ve Frenet formülleri.....	16
4. UZAY EĞRİSİ BOYUNCA Q-ÇATI.....	21
4.1. Uzay eğrisi boyunca yönlü q-çatı.....	21
4.2. Frenet çatısı ile q-çatı arasındaki ilişki.....	36
5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA YÖNLÜ BERTRAND EĞRİLERİ.....	41
6. SONUÇLAR.....	50
7. KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ.....	53

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	Anlamı
$E^3$	:Üç boyutlu Öklid uzayı
A	:Afin uzayı
$R^3$	:3 boyutlu standart reel vektör
d	:Uzaklık fonksiyonu
$T_p(A)$	:Afin uzayında p noktasındaki bir tanjant vektör
t	:Teğet birimi
n	:Normal birim
b	:Binormal birim
$n_q$	:Quasi-normal birim
$b_q$	:Quasi-binormal birim
$\tau$	:burulma
$\kappa$	:Eğrilik

## 1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerine birçok çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle eğrilerin karşılıklı noktalarında Frenet çatları arasında bağıntılar kurularak, birçok yeni teoriler elde edilmektedir. Bir uzay eğrisi üzerinde Frenet çatısından başka çatılar ile ilgili olarak ilk çalışma [12] tarafından yapılmıştır. Bu çatılardan bir tanesinde rotation minimizing frame (RMF) olarak adlandırılır [13] ve [23]. Uzay eğrisi üzerindeki RMF lerin hesaplanması ile ilgili Wang and [15], [20], [24], [19], [16] çalışmışlardır. [17] çalışmalarında RMF lerin hesaplanmasındaki sıkıntılar ve bunların düzeltilmesi üzerinde durmuşlardır. Bunlar dışında eğri üzerinde başka çatılarla ilgili [22] çalışmıştır. q-çatının tanımlanmasında kullanılan quasi-normal vektör [16] tarafından ilk defa literatürde kullanılmıştır. [32] yılında bu quasi-normal vektörü kullanarak q-çatıyı elde etmiştir.

Bertrand eğrisi ilk olarak 1850 yılında Bertrand Russel tarafından tanımlanmıştır. O zamandan günümüze kadar aktif bir çalışma alanıdır. Bertrand eğriler ile ilgili [27], Bertrand eğrilerin Minkowski uzayında hesaplanması ile ilgili [28], Bertrand eğrilerin uzay formları ile ilgili [25] gibi çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışma, teorik ve uygulama olmak üzere iki aşamada gerçekleştirilecektir. Birinci aşama, q-çatı yardımıyla Bertrand eğrileri tanımlanacak ve bir eğrinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. İkinci aşamada ise, Bertrand ve yönlü Bertrand eğrileri maple programı kullanılarak çizdirilecektir. Bulunan sonuçlar analiz edilecek ve yönlü Bertrand eğrilerinin avantajları sıralanacaktır.



## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda bize yol gösteren konumuzla ilgili bazı tanım ve özellikleri ayrıntılı olarak verdik.

### 2.1.Vektörler

Vektör (yöne) bir şiddet ve yön açıklayan doğru parçasına denir. Fizikte karşımıza çıkan hız ivme, kuvvet vb. büyüklükler birer vektördür. Üç boyutlu Öklid uzayında  $E^3$  bir vektörden söz edildiğinde  $a_1, a_2, a_3$  reel sayılar olmak üzere  $a = (a_1, a_2, a_3)$  şeklinde sıralanmış üçlü sayı kümesi anlaşılır [3].  $E^3$  te bir nokta bu üçlü sayı kümesinden biri ile gösterilir.  $E^3$  vektör uzayında bir vektöre ilişkin bazı tanımlar aşağıda verilmektedir.

(i)

$$-a = (-a_1, -a_2, -a_3) \quad (2.1.1)$$

negatif vektör.

(ii)

$$0 = (0, 0, 0)$$

sıfır vektör.

(iii)

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$a$  vektörünün normu (uzunluğu).

Buna göre  $a$  için aşağıdaki özellikler geçerlidir

1)

$$\|a\| \geq 0$$

2)

$$\|a\| = 0$$

o halde  $a$  sıfır vektörüdür.

3)

$$\|a\| = 1$$

o halde  $a$  birim vektörüdür.

### 2.1.1. Vektörlerin toplamı:

$a = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $b = (b_1, b_2, b_3)$  vektörleri verilsin bu iki vektörün toplamı, elemanların karşılıklı toplamına eşittir

$$a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

Vektör toplam aşağıdaki özellikleri sağlar :

1) Değişme özelliği.

$$a+b = b+a$$

2) Birleşme özelliği.

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

3) Etkisiz eleman

$$0+a = a$$

4) Ters eleman

$$a+(-a) = 0$$

### 2.1.2. Bir vektörün bir skaler ile çarpımı:

$k$  reel bir sayı ve  $a$  bir vektör olmak üzere ikisinin çarpım

$$ka = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad (2.1.2)$$

biçiminde tanımlanır.

a) Birleşme özelliği

$$k_1(k_2a) = k_1k_2a$$

b) Yayılma özelliği

$$k(a+b) = ka+kb$$

c)

$$1(a) = a$$

eşitliklerini sağladığından pozitif bir sayıyla çarpım vektörün yönünü değiştirmez, sadece şiddetini skaler sayının büyüklüğü oranında değiştirir. Negatif bir sayıyla çarpımı, vektörün yönünü tersine çevirir [3].

Bir vektör uzunluğunun tersi ile çarpılırsa kendi doğrultusunda birim vektör elde edilir.

Yani  $a$  yönündeki birim hızlı  $e$  vektörü

$$e = \frac{a}{\|a\|} \quad (2.1.3)$$

şeklindedir.

### 2.1.3. Doğrusal bağımlılık ve doğrusal bağımsızlık:

$k_1, k_2, \dots, k_n$  skaler büyüklüklerden en az biri sıfırdan farklı olmak koşuluyla,

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = 0 \quad (2.1.4)$$

eşitliğini sağlayan  $u_1, u_2, \dots, u_n$  vektör ailesi doğrusal(lineer) bağımlıdır denir [3].

Aksi durumda yada bir başka deyişle (2.1.4) eşitliği sadece

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

olması durumunda vektörler doğrusal bağımsızdır.

Herhangi bir vektör doğrusal bağımsız vektörlerin doğrusal kombinasyonu biçiminde gösterilebilir.

$$U = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 \quad (2.1.5)$$

#### 2.1.4. Baz vektörler ve bileşenleri:

Üç boyutlu Öklid uzayında  $e_1 = (1,0,0)$ ,  $e_2 = (0,1,0)$  ve  $e_3 = (0,0,1)$  doğrusal bağımsız vektörlerine baz vektörler denir [3]. Uzayda herhangi bir vektör baz vektörlerin doğrusal fonksiyonu olarak ifade edilebilirler

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \quad (2.1.6)$$

**Teorem 2.1.1.**  $E^3$  de doğrusal bağımsız herhangi üç vektör bir baz sistemi oluşturur.

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$$c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

doğrusal bağımlı olup olmadığını anlamak için baz vektör bileşenlerin determinatına bakmak yeterli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

eğer

$$\Delta = 0$$

ise  $a, b, c$  doğrusal bağımlıdır.

**Örnek 2.1.1:**

$a = (2, 1, 0), b = (1, -1, 2), c = (5, 8, 1)$  vektörlerinin  $E^3$  de bir baz sistemi oluşturup oluşturmadığını belirleyiniz.

O halde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

olduğundan  $a, b, c$  vektörleri doğrusal bağımsızdır,  $E^3$  de bir baz sistemi oluştururlar.

**2.1.5. Vektörlerin skaler çarpımı :**

İki vektör  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$  nin skaler (iç) çarpım reel bir sayıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.1.7)$$

İki vektör arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere skaler çarpımın bir başka gösterim biçimi

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \theta$$

burada  $\theta = \arccos \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$  eşitliği ile gösterilir [3].

$$a = b \rightarrow \theta = 0$$

olur ve

$$\langle a, b \rangle = \|a\|^2$$

dır.

**Skaler çarpımın özellikleri :**

1) Simetri özelliği :

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

2)  $k$  skaler olmak üzere

$$\langle ka, b \rangle = k \langle a, b \rangle$$

3) Yayılma özelliği :

$$\langle a, b+c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$$

4)

$$\langle a, a \rangle \geq 0$$

iç çarpım pozitif tanımlıdır.

Bu özelliklerden hareketle  $a$  ve  $b$  vektörleri Cauchy-Schwarz eşitsizliğini

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$$

sağlar, eşitlik durumu sadece vektörlerin doğrusal bağımlı olmasıyla geçerlilik kazanır.

### 2.1.6. Ortonormal bazlar :

$e_1, e_2, e_3$  karşılıklı olarak ortogonal baz vektörleridir çünkü

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

ve

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

eşitliğini sağlarlar. Söz konusu birim vektörler ortonormal baz olarak adlandırılan baz sistemi oluştururlar.

### 2.1.7. Vektörel çarpım:

$E^3$  de  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  ve  $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$  iki vektör olsun.

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

veya

$$a \times b = \det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \det \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3$$

şeklinde vektörel çarpım tanımlanır  $a \times b$  ile gösterilir.

Sonuç sıfır vektöründen farklıysa  $a \times b \neq 0$ ,  $a$  ve  $b$  doğrusal bağımsız aksi durumda doğrusal bağımlıdır.

Doğrusal bağımsız vektörlerin vektörel çarpımına ilişkin bazı özellikler:

1) Ters yansıma özelliği

$$a \times b = -(b \times a)$$

2) Yayılma özelliği

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

3)  $k$  skaler ise

$$(ka) \times b = k(a \times b)$$

4)

$$a \times b \perp a, b$$

5)

$$a \times a = 0$$

**Teorem 2.1.2:** Vektörel çarpım sonucu ortaya çıkan yeni vektörün şiddeti  $\|a \times b\|$  paralelkenarın alanını verir.

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$$

burada  $\theta = \angle (a, b)$  dır.

### 2.1.8. Skaler üçlü çarpım:

$\langle a, b \times c \rangle$  karışık yada üçlü skaler çarpım olarak adlandırılır :

$$\langle a, b \times c \rangle = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

bir başka gösterimde  $[a, b, c] = \langle a, b \times c \rangle = \langle a \times b, c \rangle$  şeklindedir.

Eğer vektörlerden ikisi yer değiştirirse çarpım işaret değiştirir.

$$\langle a, b \times c \rangle = -\langle c, b \times a \rangle$$

$a, b, c$  vektörleri doğrusal bağımlı ise

$$[a, b, c] = 0$$

**Teorem 2.1.3:**  $a, b$  ve  $c$  vektörleri bir paralel yüzlü oluştururlar ise bunların skaler üçlü çarpım paralel yüzünün hacmini verir yani

$$V = \langle a, b \times c \rangle = \|b \times c\| \cdot \|a\| \cos \theta$$

dır.

### 2.2. Öklid Uzayı :

Tezimin bu bölümde, sıkça kullanılan kavramlara yer verilmiştir.

**Tanım 2.2.1:** Boş olmayan bir  $A$  cümlesi ve bir  $K$  cismi üstünde bir vektör uzay  $V$  olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir Afın uzaydenir:



(1)  $\forall P, Q, R \in A$  için

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(2)  $\forall P \in A$  ve  $\forall \alpha \in V$  için

$$f(P, Q) = \alpha$$

olacak biçimde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır [1].

**Tanım 2.2.2:**  $\mathbb{R}^3$  3-boyutlu standart reel vektör uzay ile birleştirilmiş  $\mathbb{R}^3$  Afin uzayını ele alalım.  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3)$  iki vektör olsun. Bu  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanırsa böylece  $\mathbb{R}^3$  Afin uzay 3-boyutlu Öklid uzay olur ve  $E^3$  ile gösterilir. Bununla beraber reel Afin uzaylar ile Öklid uzaylar farklıdırlar. Çünkü, bir  $V$  reel vektör uzay ile birleşen  $A$  afin uzaydaki metrik özellikler  $V$  de seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar; bu nedenle Öklid uzaydaki özelliklerle diğer Afin uzaylardakiler farklı olurlar [1].

**Tanım 2.2.3:**  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$  olmak üzere

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x, y \in E^3$  noktalar arasındaki uzaklık denir [1].

**Tanım 2.2.4:**

$$\begin{aligned} d : E^3 \times E^3 &\rightarrow R \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| \end{aligned}$$

Biçiminden tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^3$  de Öklid metriği denir [1].

**Tanım 2.2.5:**  $\forall x, y, z \in E^3$  için  $\widehat{xyz}$  açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{yx}\| \|\overrightarrow{yz}\|}$$

den hesaplanan  $\theta$  reel sayıdır [1].

**Sonuç 2.2.1:**  $E^3$  de  $E_0 = (0, 0, 0), E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0)$  ve  $E_3 = (0, 0, 1)$  noktalar bir dik çatı oluştururlar.  $\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$  olduğundan,  $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$  sistemi  $R^3$  vektör uzay için bir ortonormal bazdır [1].

**Tanım 2.2.7:**  $E^3$  deki  $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$  çatısına standart Öklid çatısı denir [1].

**Tanım 2.2.8:**  $V$  vektör uzayı ile birleşen bir Afin uzay  $A$  olsun.  $p \in A, \vec{v} \in V$  için  $(p, \vec{v})$  sıralı ikilisine  $A$  Afin uzayının  $p$  noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

$$\begin{aligned} \oplus : T_A(p) \times T_A(p) &\rightarrow T_A(p) \\ ((p, \vec{v}) \times (p, \vec{u})) &\rightarrow (p, \vec{v}) \oplus (p, \vec{u}) = (p, \vec{v} + \vec{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X : R \times T_A(p) &\rightarrow T_A(p) \\ (\lambda, (p, \vec{v})) &\rightarrow \lambda X(p, \vec{v}) = (p, \lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım burada  $\mathbb{R}$  ile  $A$  nın birleştiği  $V$  vektör uzayının cismi gösterilmiştir.

$$\{T_A(p), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, X\}$$

bir vektör uzay olduğu gösterilebilir. Bu biçimde elde edilen vektör uzayına,  $A$  Afın uzayının  $p \in A$  noktasındaki tanjant uzay denir ve kısaca  $T_A(p)$  gösterilir [1].

**Tanım 2.2.9:** Bir  $\mathfrak{S}$  cismi üzerinde 3- boyutlu iki vektör uzay  $V$  ve  $W$  olsun.

Bir

$$A : V \rightarrow W$$

dönüşümünde

i)  $\forall \alpha, \beta \in V$

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$$

ii)  $\forall c \in \mathfrak{S}$

$$A(c\alpha) = cA(\alpha)$$

aksiyomları sağlıyor ise lineer dönüşüm denir [2].

**Tanım 2.2.10:** Bir  $\mathfrak{S}$  cismi üzerinde 3-boyutlu iki vektör uzay  $V$  ve  $W$  olsun.

Bir

$$f : V \rightarrow W$$

fonksiyonu için

i)  $f$  sürekli

ii)  $f^{-1}$  mevcut

iii)  $f^{-1}$  sürekli

ise bu fonksiyona  $V$  den  $W$  homeomorfizm denir ve bu durumda  $V$  ile  $W$  uzaylarına da Homeomorf uzaylar adı verilir [2].

**Tanım 2.2.11:**  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regüler parametrelili eğri olsun.

$$\begin{aligned}
r(a) &= r(b) \\
r'(a) &= r'(b) \\
r''(a) &= r''(b)
\end{aligned}$$

İse  $r$  ye kapalı fonksiyon denir [3].

**Tanım 2.2.12:**  $f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$a \rightarrow f(a)$$

$$a+h \rightarrow f(a+h)$$

fonksiyonu verilsin.eğer bir  $a \in E^3$  noktası için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad h \in E^3$$

Olacak şekilde bir  $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bulunabiliyorsa  $f$  ye,  $a \in E^3$  te türevlenebilir denir ve yukardaki bağıntıyı sağlayan  $\lambda$  ya da  $f$  nin türevi denir [1].

**Tanım 2.2.13.**  $\text{Grad} = \nabla : C(E^3, \mathbb{R}) \rightarrow X(E^3)$

$$f \rightarrow \nabla f$$

dönüşümü  $E^3$  te  $\{x_1, x_2, x_3\}$  koordinat sistemi olmak üzere

$$\text{grad}(f) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanıyorsa bu foksiyona  $E^3$  de Gradient fonksiyon denir [1].

**Tanım 2.2.14.** Bir vektör uzayının  $r$  sayıda vektörlerinden ibaret bir vektör sisteminin bütün vektörlerinin normlandırılmış ve ikişer ikişer ortogonal olmaları halinde Ortonormal denir [2] .

**Tanım 2.2.15.**  $A : V \rightarrow W$  dönüşümünde  $W$  nn  $A(\alpha)$  elemanna  $\alpha \in V$  nin  $A$  ile elde edilen resmi denir  $W$  nin

$$A(S) = \{A(\alpha) : \alpha \in S\}$$

alt cümlesine  $V$  nin  $S$  alt cümlesinin resmi denir . $V$  nin

$$A^{-1}(0) = \{\alpha \in V : A(\alpha) = 0\}$$

alt cümlesine  $A$  nın sıfır uzay veya çekirdeği adı verilir.

**Tanım 2.2.16.**  $E^3$  de bir  $c$  çemberinin kendi düzleminde bir doğru etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeye Tor yüzeyi denir [2].

**Tanım 2.2.17.**

$$S^3 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = r^2 \right\} \subset E^4$$

cümlesine 3- boyutlu küre adı verilir [1].

**Tanım 2.2.18.**  $X$  bir cümle olsun.  $X$  in alt cümlelerinin bir koleksiyonu  $\mathfrak{T}$  olsun .  
 $\mathfrak{T}$  koleksiyonu aşağıdaki önerimleri doğrularsa  $X$  üzerinde bir topoloji adını alır

- i)  $X, \varphi \in \mathfrak{T}$
- ii)  $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{T} \rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{T}$
- iii)  $A_i \in \mathfrak{T} \quad i \in I \cup A_i \in \mathfrak{T}$

[4].

**Tanım 2.2.19.** Bir  $X$  cümlesi ve üzerindeki bir  $\mathfrak{T}$  topolojisinden oluşan  $(X, \mathfrak{T})$  ikilisine topolojik uzay denir [4].

### 3. ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE FRENET FORMÜLLERİ

Klasik Frenet çatısı diferansiyel geometride önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin küresel eğriler, Bertrand eğriler, basit ve klasik konular Frenet çatısı kullanarak araştırılmıştır. Bu bölümde bir uzay eğri üzerinde en çok bilinen ve kullanılan Frenet çatısı ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

#### 3.1. Öklid uzayında eğriler ve Frenet formülleri :

**Tanım 3.1.1.** Reel eksenin  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  açık aralığı ile Homeomorf olan  $E^3$  Öklid uzayının alt kümesine,  $E^3$  uzayında eğri yayı denir.

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E^n, I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))\end{aligned}$$

ifadesinde  $\alpha(I) \subset E^n$  bir eğri denir.  $I \subseteq \mathbb{R}$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  eğrisinin parametresi denir [1].

**Tanım 3.1.2.**  $M$  eğrisi  $(i, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer  $\forall s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise  $M$  eğrisi  $(i, \alpha)$  ya göre birim hızlı eğridir denir.

Bu durumda eğrinin  $s \in I$  parametresine yay parametresi adı verilir [1].

**Tanım 3.1.3.**  $M \subset E^n$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda  $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$  sistemi lineer bağımsız ve  $\forall \alpha^{(k)}, k \geq r$  olmak üzere  $\psi$  den elde edilen

$\{V_1, \dots, V_r\}$  .  $M$  eğrisinin  $r$ -ayaklı alan ve  $m \in M$  için  $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$  ye ise  $m \in M$  noktasındaki  $r$ -ayaklısı denir [1].

**Tanım 3.1.4.**

$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  eğrisi için  $\|\alpha'\| = 1$  birim hızlı ise eğri yay parametresi denir. Burada  $T = V_1$  teğet birim,  $N = V_2$  normal birim,  $B = V_3$  binormal ve  $\{T, N, B\}$  renet 3-ayaklısı denir.

$$T = \frac{E_1}{\|E_1\|}$$

dır. Ama  $E_1 = \alpha'(t)$  olduğundan

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \alpha'(t)$$

olur. Genel anlamda

$$N(s) = \frac{E_2}{\|E_2\|}$$

Ayrıca

$$E_2 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1$$

yani  $\alpha'' \perp \alpha'$  olduğundan



$$E_2 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', \alpha' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \alpha' = \alpha''$$

dır. O halde

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''\|} = \frac{T'(s)}{\|T(s)\|}$$

Binormal vektörde

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

olur. Buradanda

$$B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olur [1].

**Tanım 3.1.6.**  $M \subset E^n$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin  $s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s)$  noktalarındaki Frenet r-ayaklısı  $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$  olsun. Buna göre

$$k_i : i \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $M$  eğrisinin  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonu ve  $s \in I$  için  $k_i(s)$  reel sayısına da  $\alpha(s)$  noktasında  $M$  nin  $i$ -yinci eğriliği denir [1].

**Teorem 3.1.1.**  $M \subset E^n$  eğrisi  $(i, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  yay parametresi olmak üzere  $i$ -yinci eğriliği  $k_i(s)$  ve Frenet r-ayaklısı  $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$

$$\begin{aligned}
V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s) \\
V_i(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) \quad 1 \leq i \leq r \\
V_r'(s) &= -k_{r-1}(s) \cdot V_{r-1}(s)
\end{aligned}$$

Olur [1].

**Tanım 3.1.7.**

$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$   $s$  yay parametresi ile verilen bir eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı  $\{T, N, B\}$  olsun

$$\begin{aligned}
T'(s) &= k_1(s)N(s) \\
N'(s) &= -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s) \\
B'(s) &= -k_2(s)N(s)
\end{aligned}$$

formüllerine Frenet formülleri denir. Burada  $k_1 = \kappa$  ve  $k_2 = \tau$ .

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

eşitliği mevcuttur [1].

O halde

$$\begin{aligned}
T' &= \kappa N \\
N' &= -\kappa T + \tau B \\
B' &= -\tau N
\end{aligned}$$

Şeklinde yazılabilir.

**Tanım 3.1.8.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun.  $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$  değerine  $\alpha(s)$  eğrisinin  $s$  noktasındaki eğriliği denir [3].

**Tanım 3.1.9.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun.  $\alpha''(s) \neq 0$  olmak üzere  $B'(s) = \tau(s)N(s)$  eşitliği ile tanımlı  $\tau(s)$  sayısına  $\alpha$  eğrisinin  $s$  -noktasındaki burulması denir.  $k_2 = \tau(s)$  burulması eğrinin düzlemden ne kadar saptığını ölçer [1].

**Tanım 3.1.10.**  $n=3$  özel halinde  $T(s), N(s), B(s)$  Frenet 3-ayaklısını ele alalım.

$S_p \{T(s), N(s)\}$  vektör uzayı ile bileşen  $\alpha(s)$  noktasındaki Afin altuzayı oskülatör düzlem,

$S_p \{N(s), B(s)\}$  vektör uzay ile bileşen  $\alpha(s)$  noktasındaki Afin altuzayı normal düzlem,

$S_p \{T(s), B(s)\}$  vektör uzay ile birleşen  $\alpha(s)$  noktasındaki Afin altuzayı rektifiyen düzlem adı verilir [1].

**Tanım 3.1.11.**  $M \subset E^n$  eğrisinin  $m \in M$  noktasında  $M$  ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\alpha = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_1(s_0)}V_2(s_0) + \lambda V_3(s_0)$$

doğrusuna  $M$  eğrisinin  $m \in M$  noktasındaki eğrilik eksenini denir.

Eğrilik eksenini üzerindeki

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_1(s_0)}V_2(s_0)$$

noktasına  $M$  nin  $m = \alpha(s_0)$  daki eğrilik merkezi denir [1].

**Tanım 3.1.12.**  $M \subset E^n$  eğrisiyle  $m \in M$  noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye  $M$  nin  $m \in M$  noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi denir [1].

#### 4. UZAY EĞRİSİ BOYUNCA Q-ÇATI

Son zamanlarda DEDE ve arkadaşları bir uzay eğrisi boyunca q-çatıyı tanıttı. q-çatı Frenet çatısına göre iki önemli avantaj sunmaktadır.

- İkinci türevi tanımsız eğride tanımlanabilir.
- Teğet etrafında gereksiz bükülmeyi önler.

Bu bölümde bir uzay eğrisi boyunca q-çatı tanımlanacaktır. Ayrıca q-eğrilikler elde edilecektir.

##### 4.1 Uzay eğrisi boyunca q-çatı

**Tanım 4.1.1.** Bir uzay eğrisi boyunca q-çatı

$$t = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, n_q = \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, b_q = t \wedge n_q \quad (4.1.1)$$

Şeklinde tanımlanır. Burada  $k$  projeksiyon vektörüdür ve  $t$  eğrinin teğeti,  $n_q$  eğrinin quasi-normali ve  $b_q$  ise eğrinin quasi-binormali olarak adlandırılır [29].

**Teorem 4.1.1.** Bir uzay eğrisi boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemini

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikler ise şu şekilde

$$k_1 = \frac{\langle t', n_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_2 = \frac{\langle t', b_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_3 = \frac{\langle n'_q, b_q \rangle}{\|\alpha'\|} \quad (4.1.2)$$

ifade edilebilir [29-30].

**İspat:**  $k_1, k_2$  ve  $k_3$  eğriliklerini bulmak için q-çatının vektörlerinin türevlerini hesaplayalım, o halde ilk olarak teğet vektörün türevini hesaplayalım.  $t, n_q$  ve  $b_q$  yardımıyla

$$t' = at + bn_q + cb_q \quad (4.1.3)$$

Şeklinde yazılabilir, burada  $a, b, c \in R$  Şimdi  $a, b, c$  değerlerini hesaplayalım.  $a, b, c$  hesaplamak için ilk önce (4.1.3) denkleminin her iki tarafını  $t$  ile çarpalım

$$\langle t', t \rangle = a \langle t, t \rangle + b \langle n_q, t \rangle + c \langle b_q, t \rangle$$

Elde edilir.

burada  $\langle t, t \rangle = 1$ ,  $\langle n_q, t \rangle = 0$  ve  $\langle b_q, t \rangle = 0$  olduğu için

$$\langle t', t \rangle = a$$

dır. Ayrıca  $\langle t, t \rangle = 1$  ifadesinin her iki tarafının türevini alalım

$$(\langle t, t \rangle)' = 0 \rightarrow \langle t', t \rangle + \langle t, t' \rangle = 0 \rightarrow 2 \langle t, t' \rangle = 0$$

yani

$$\langle t, t' \rangle = 0$$

yukarıdaki ifadedden

$$a = 0$$

aynı şekilde (4.1.3) denkleminin her iki tarafını  $n_q$  ile çarpalım

$$\langle t', n_q \rangle = a \langle t, n_q \rangle + b \langle n_q, n_q \rangle + c \langle b_q, n_q \rangle$$

dr. Burada  $\langle n_q, n_q \rangle = 1$ ,  $\langle t, n_q \rangle = 0$  ve  $\langle b_q, n_q \rangle = 0$  olduğu için

$$\langle t', n_q \rangle = b$$

dır. (4.1.2) ve (4.1.3) denkleminde dolayı

$$\|\alpha'\| k_1 = b$$

Aynı şekilde (4.1.3) denkleminin her iki tarafını  $b_q$  ile çarpalım

$$\langle t', b_q \rangle = a \langle t, b_q \rangle + b \langle n_q, b_q \rangle + c \langle b_q, b_q \rangle$$

dır. Burada  $\langle b_q, b_q \rangle = 1$ ,  $\langle n_q, b_q \rangle = 0$ ,  $\langle t, b_q \rangle = 0$  olduğundan

$$\langle t', b_q \rangle = c$$

Elde edilir. (4.1.3) denkleminde

$$\|\alpha'\| k_2 = c$$

bulunur.

Bulduğumuz  $a, b, c$  değerlerini (4.1.3) yerleştirelim

$$t' = \|\alpha'\| (0t + k_1 n_q + k_2 b_q)$$

Şimdi de quasi-normal vektörün türevini hesaplayalım

$$n'_q = at + bn_q + cb_q \quad (4.1.4)$$

$a, b, c$  değerlerini hesaplamak için (4.1.4) denklemini ilk önce  $t$  ile çarpalım

$$\langle n'_q, t \rangle = a \langle t, t \rangle + b \langle n_q, t \rangle + c \langle b_q, t \rangle$$

Burada  $\langle t, t \rangle = 1$ ,  $\langle n_q, t \rangle = 0$  ve  $\langle b_q, t \rangle = 0$  olduğu için

$$\langle n'_q, t \rangle = a$$

dır. Ayrıca  $\langle n_q, t \rangle = 0$  ifadenin her iki tarafının türevini alalım

$$\left( \langle n_q, t \rangle \right)' = 0 \rightarrow \langle n'_q, t \rangle + \langle n_q, t' \rangle = 0 \rightarrow \langle n'_q, t \rangle = -\langle n_q, t' \rangle$$

(4.1.2) denklemini kullanarak

$$-\langle n'_q, t \rangle = a$$

dır. Aynı şekilde (4.1.4) denkleminin her iki tarafını  $n_q$  ile çarpalım

$$\langle n'_q, n_q \rangle = a \langle t, n_q \rangle + b \langle n_q, n_q \rangle + c \langle b_q, n_q \rangle$$

olur, ama  $\langle n_q, n_q \rangle = 1$ ,  $\langle t, n_q \rangle = 0$  ve  $\langle b_q, n_q \rangle = 0$  olduğu için

$$\langle n'_q, n_q \rangle = b$$

dır. Ayrıca  $\langle n_q, n_q \rangle = 1$  ifadesinin her iki tarafın türevini alalım

$$\langle n_q, n_q \rangle' = 0 \rightarrow \langle n'_q, n_q \rangle + \langle n_q, n'_q \rangle = 0 \rightarrow 2\langle n'_q, n_q \rangle = 0$$

yani

$$\langle n'_q, n_q \rangle = 0$$

olur. Yukardaki ifadeden dolayı

$$b = 0$$

elde edilir ve aynı şekilde (4.1.4) denklemini  $b_q$  ile çarpalım

$$\langle n'_q, b_q \rangle = a \langle t, b_q \rangle + b \langle n_q, b_q \rangle + c \langle b_q, b_q \rangle$$

ama  $\langle b_q, b_q \rangle = 1$  ,  $\langle t, b_q \rangle = 0$  ve  $\langle n_q, b_q \rangle = 0$  olduğu için

$$\langle n'_q, b_q \rangle = c$$

(4.1.2) denklemini yardımıyla

$$\|\alpha'\| k_3 = c$$

şeklinde tanımlayalım. O halde  $a, b, c$  değerlerini (4.1.4) denkleminde yerleştirelim

$$n'_q = \|\alpha'\| (-k_1 t + 0n_q + k_3 b_q)$$

bulunur.



Şimdi  $b_q$  quasi-binormal vektörün türevini hesaplayalım

$$b'_q = at + bn_q + cb_q \quad (4.1.5)$$

$a, b, c$  hesaplamak için (4.1.5) denklemini ilk önce  $t$  ile çarpalım

$$\langle b'_q, t \rangle = a \langle t, t \rangle + b \langle n_q, t \rangle + c \langle b_q, t \rangle$$

ama  $\langle t, t \rangle = 1$  ,  $\langle n_q, t \rangle = 0$  ve  $\langle b_q, t \rangle = 0$  olduğu için

$$\langle b'_q, t \rangle = a$$

dır.  $\langle b_q, t \rangle = 0$  ifadesinin her iki tarafın türevini alalım

$$\langle b_q, t \rangle' = 0 \rightarrow \langle b'_q, t \rangle + \langle b_q, t' \rangle = 0 \rightarrow \langle b_q, t' \rangle = -\langle b'_q, t \rangle$$

Ayrıca (4.1.2) denklemden

$$-\| \alpha' \|_{k_2} = a$$

dır. Benzer şekilde (4.1.5) denklemini  $n_q$  ile çarpalım

$$\langle b'_q, n_q \rangle = a \langle t, n_q \rangle + b \langle n_q, n_q \rangle + c \langle b_q, n_q \rangle$$

ama  $\langle t, n_q \rangle = 0$  ,  $\langle n_q, n_q \rangle = 1$  ve  $\langle b_q, n_q \rangle = 0$

$$\langle b'_q, n_q \rangle = b$$

dır.  $\langle b_q, n_q \rangle = 0$  ifadesinin her iki tarafnn türevini alalım

$$\langle b_q, n_q \rangle' = 0 \rightarrow \langle b_q', n_q \rangle + \langle b_q, n_q' \rangle = 0 \rightarrow \langle b_q', n_q \rangle = -\langle b_q, n_q' \rangle$$

(4.1.2) denklemi kullanılarak

$$-\|\alpha'\|k_3 = b$$

bulunur. Aynı şekilde (4.1.5) denklemini  $b_q$  ile çarpalım

$$\langle b_q', b_q \rangle = a \langle t, b_q \rangle + b \langle n_q, b_q \rangle + c \langle b_q, b_q \rangle$$

ama  $\langle t, b_q \rangle = 0$  ,  $\langle n_q, b_q \rangle = 0$  ve  $\langle b_q, b_q \rangle = 1$  olduğu için

$$\langle b_q', b_q \rangle = c$$

dır. Ayrıca  $\langle b_q, b_q \rangle = 1$  ifadesinin her iki tarafın türevini alalm

$$(\langle b_q, b_q \rangle)' = 0 \rightarrow \langle b_q, b_q' \rangle + \langle b_q', b_q \rangle = 0 \rightarrow 2\langle b_q', b_q \rangle = 0$$

yani

$$c = 0$$

elde edilir. Bulduğumuz  $a, b, c$  değerlerini (4.1.5) denklemde yerleştirelim

$$b_q' = \|\alpha'\|(-k_2 t + -k_3 n_q + 0b_q)$$

Olur.

Bulduğumuz formülleri matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

dır.

**Teorem 4.1.2.** Öklid uzayında  $\alpha(t)$  düzgün bir eğri olsun. q-eğrilikler  $\alpha(t)$  eğrisinin türevleri cinsinden

$$k_1 = \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha' \wedge k\| \|\alpha'\|^2}$$

$$k_2 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|}$$

ve

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

bu şekilde verilmektedir.

**İspat :**

İlk olarak  $k_1$  eğriliğini hesaplayalım, (4.1.1) denklemi yardımıyla

$$\alpha' = \|\alpha'\| t$$

dır. Yukardaki ifadenin her iki tarafının türevini alalım

$$\alpha'' = \|\alpha'\|' t + \|\alpha'\| t' \quad (4.1.7)$$

dır. Ayrıca (4.1.6) yardımıyla

$$t' = \|\alpha'\| k_1 n_q + \|\alpha'\| k_2 b_q$$

dır. O halde (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$\alpha'' = \|\alpha'\|' t + \|\alpha'\| (\|\alpha'\| k_1 n_q + \|\alpha'\| k_2 b_q)$$

elde edilir, yani

$$\alpha'' = \|\alpha'\|' t + \|\alpha'\|^2 k_1 n_q + \|\alpha'\|^2 k_2 b_q$$

dır. Her iki taraf  $n_q$  ile skaler olarak çarparsak

$$\langle \alpha'', n_q \rangle = \|\alpha'\|^2 k_1$$

bulunur. (4.1.1) denklemini yardımıyla

$$\left\langle \alpha'', \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} \right\rangle = \|\alpha'\|^2 k_1$$

yukardaki denkleminde  $t$  yerine yazılırsa

$$\frac{\langle \alpha'', \alpha' \wedge k \rangle}{\|\alpha' \wedge k\|} = \|\alpha'\|^2 k_1$$

elde edilir. O halde

$$k_1 = \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha' \wedge k\| \|\alpha'\|^2}$$

dır.

Şimdi  $k_2$  eğriliğini bulalım, (4.1.2) ve (4.1.1) denklemleri yardımıyla

$$k_2 = \frac{\langle t', t \wedge n_q \rangle}{\|\alpha'\|}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1.1) denklemindeki  $t$  teğet vektörünün türevi alınır ve yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha'' \|\alpha'\| - \|\alpha'\|' \alpha'}{\|\alpha'\|^2}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} \right\rangle$$

kolaylıkla elde edilir. Karma çarpmanın özelliğini kullanarak

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha''}{\|\alpha'\|}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle - \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\|\alpha'\|' \alpha'}{\|\alpha'\|^2}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle$$

elde edilir.

$$\left\langle \frac{\|\alpha'\|' \alpha'}{\|\alpha'\|^2}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle = 0$$

olduğundan dolayı

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|} \langle \alpha'', \alpha' \wedge \alpha' \wedge k \rangle$$

dır. Vektörel çarpımın özellikleri kullanılarak

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|} \langle \alpha'', \langle \alpha', k \rangle \alpha' - \|\alpha'\|^2 k \rangle$$

bulunur, yani

$$k_2 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|}$$

elde edilir. Şimdi  $k_3$  eğriliğini bulalım, (4.1.2) ve (4.1.1) denklemlerinden

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \langle n_q, (t \wedge n_q)' \rangle$$

dır. Parantez içerisindeki vektörel çarpımın türevini alalım

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \langle n_q, t' \wedge n_q + t \wedge n_q' \rangle$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle n_q, t' \wedge n_q \rangle = 0$$

Olur çünkü  $n_q \perp (t' \wedge n_q)$ . O halde

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} [0 + \langle n_q, t \wedge n_q' \rangle]$$

(4.1.1) yardımıyla

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, t \wedge \left( \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} \right)' \right\rangle$$

ayrıca (4.1.1) kullanılarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \left( \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right)' \right\rangle$$

Bulunur.

Şimdi parantez içerisindeki kesrin türevini alalım, o halde

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|} \left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge \left( \frac{(\alpha' \wedge k)' \|\alpha' \wedge k\| - (\alpha' \wedge k) \|\alpha' \wedge k\|'}{\|\alpha' \wedge k\|^2} \right) \right\rangle$$

Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|} \left[ \left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge \frac{(\alpha' \wedge k)'}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle - \left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge \frac{(\alpha' \wedge k) \|\alpha' \wedge k\|}{\|\alpha' \wedge k\|^2} \right\rangle \right]$$

bulunur. Ama  $\alpha' \perp (\alpha' \wedge k)$  olduğundan

$$\left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge \frac{(\alpha' \wedge k) \|\alpha' \wedge k\|}{\|\alpha' \wedge k\|^2} \right\rangle = 0$$

elde edilir.

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \left[ \langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k)' \rangle - 0 \right]$$

bulunur. Parantez içindeki ifadenin türevini alalım

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \left[ \langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha'' \wedge k + \alpha' \wedge k') \rangle \right]$$

dır. Ayrıca  $k = \text{sabit}$  olduğundan  $\alpha' \wedge k' = 0$  yerine yazılırsa

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \left[ \langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha'' \wedge k) \rangle \right]$$

elde edilir. Yine Lagrange özdeşliği kullanarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \langle \alpha' \wedge k, \langle k, \alpha' \rangle \alpha'' - \langle \alpha'', \alpha' \rangle k \rangle$$

bulunur. Burada  $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$  kullanılarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \langle \alpha' \wedge k, 0 - \langle k, \alpha' \rangle \alpha'' \rangle$$

dır. Bundan dolayı

$$k_3 = \frac{\langle k, \alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \langle \alpha' \wedge k, \alpha'' \rangle$$

dır. Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

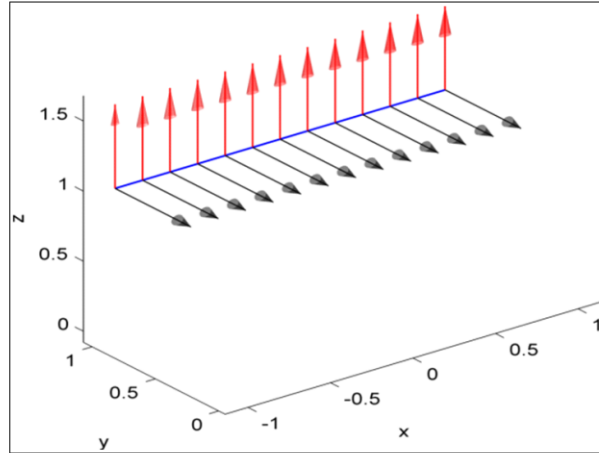
elde edilir.

**Sonuç 4.1.1.** Q-çatının  $k_1, k_2, k_3$  q-eğrilikleri projeksiyon vektörü  $k$  ya bağlı olduğu kolayca görülür [29-30].

**Örnek 4.1.1.**  $\alpha(t) = (t, 1, 1)$  doğrusunu düşünelim. O halde projeksiyon vektörü  $k_y = (0, 1, 0)$  olan  $y$  -ekseni yönlü q-çatı

$$\begin{aligned} t &= (1, 0, 0) \\ n_q &= (0, 1, 0) \\ b_q &= (0, -1, 0) \end{aligned}$$

dır.



Şekil 4.1

Şekil 4.1  $y$ – eksteni boyunca yönlü q-çatının quasi-normal (kırmızı) ve quasi-binormal (siyah) vektörleri gösterilmiştir.



**Örnek 4.1.2.**  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^3)$  bir uzay eğrisini düşünelim. Projeksiyon vektörü  $k_z = (0, 0, 1)$  olan q-çatıyı bulalım.

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 3t^2)$$

olduğundan

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+9t^4}$$

O halde

$$t = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} (-\sin t, \cos t, 3t^2)$$

olur.

$$t \wedge k_z = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin t & \cos t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

yardımla

$$n_q = (\cos t, \sin t, 0)$$

bulunur. Buradan da  $b_q = t \wedge n_q$  yardımla

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} (-3t^2 \sin t, +3t^2 \cos t, -1)$$

elde edilir.

Şimdide q-eğrilikleri bulalım

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^3)$$

birinci dereceden türevi

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 3t^2)$$

ikinci dereceden türevi

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 6t)$$

olduğundan

$$\det[\alpha'', \alpha', k] = \begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t & 6t \\ -\sin t & \cos t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

dır. O halde

$$k_1 = \frac{-1}{1+9t^4}$$

bulunur. Kolaylıkla

$$\langle \alpha', k \rangle = 3t^2, \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 18t^3, \langle k, \alpha'' \rangle = 6t$$

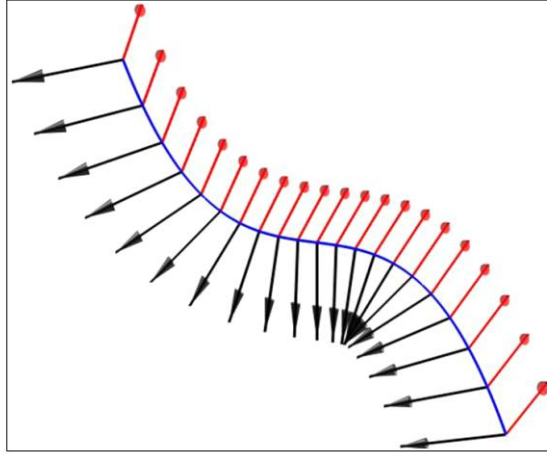
elde edilir. O halde

$$k_2 = -\frac{6t}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde bulunur. Son olarakta

$$k_3 = -\frac{3t^2}{1+9t^4}$$

dır.



Şekil 4.2

Şekil 4.2 z-ekseni boyunca yönlü q-çatının quasi-normal (kırmızı) ve quasi-binormal (siyah) vektörleri gösterilmiştir.

#### 4.2. Frenet çatısı ile q-çatı arasındaki ilişki

Frenet çatısı

$$t = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, b = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, n = b \wedge t$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca eğrinin eğriliği  $\kappa$  ve eğrinin burulması  $\tau$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

dır.

Frenet formülleri bu şekilde verilmektedir

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

**Teorem 4.2.1:**  $\alpha(s)$  yay parametresi ile verilen bir uzay eğrisi olsun,  $\|\alpha'\| = 1$ . Eğrinin

$n$  ve  $n_q$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere q-eğrilikler ve Frenet eğrilikler

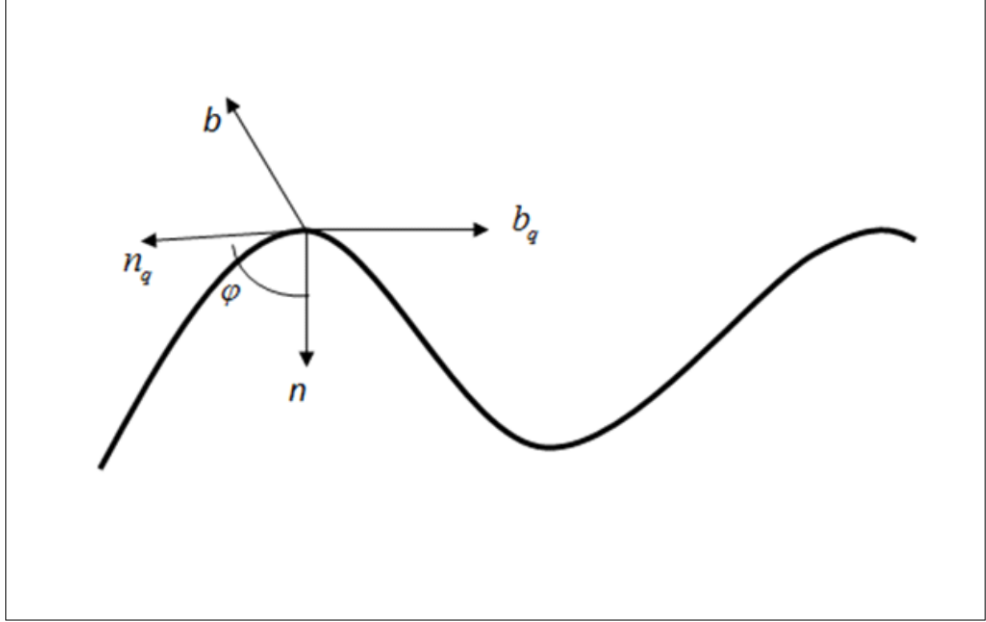
arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}k_1 &= \kappa \cos \theta \\k_2 &= -\kappa \sin \theta \\k_3 &= d\theta + \tau\end{aligned}$$

ve

$$\cos \theta = \frac{\det(\alpha'', \alpha', \kappa)}{\|\alpha' \wedge \kappa\| \|\alpha''\|}$$

şeklindedir [30].



Şekil 4.3

**İspat :**  $n$  ve  $n_q$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olduğundan dolayı

$$n_q = \cos \theta n + \sin \theta b \quad (4.2.1)$$

şeklinde kolaylıkla yazılabilir. Her iki tarafı vektörel olarak  $t$  ile çarparsak

$$t \wedge n_q = b_q = \cos \theta b - \sin \theta n \quad (4.2.2)$$

Olur.

bulduklarımızı matris formunda da ifade edebiliriz

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

olur.

Şimdi ilk önce  $k_1$  eğriliğini bulalım, (4.2.1) denkleminin türevini alırsak

$$n'_q = -\sin \theta d\theta.n + \cos \theta.n' + \cos \theta d\theta.b + \sin \theta.b'$$

olur. Frenet formüllerini yukarıdaki ifadede yerine yazarsak

$$n'_q = -\sin \theta d\theta.n + \cos \theta(-\kappa t + \tau b) + \cos \theta d\theta.b + \sin \theta(-\tau n)$$

elde edilir. O halde

$$n'_q = -t(\kappa \cos \theta) - n(\sin \theta(d\theta + \tau)) + b(\cos \theta(d\theta + \tau)) \quad (4.2.3)$$

dır. Yukardaki denklemin her iki tarafını  $t$  ile skaler olarak çarparsak

$$\langle t, n'_q \rangle = -\langle t, t \rangle (\kappa \cos \theta) - \langle t, n \rangle (\sin \theta(d\theta + \tau)) + \langle t, b \rangle (\cos \theta(d\theta + \tau))$$

bulunur. Ayrıca  $\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = 0$  ve (4.1.2) yardımıyla

$$k_1 = \kappa \cos \theta$$

elde edilir. (4.2.1) denkleminin iki tarafının türevini alırsak

$$b'_q = -\cos \theta d\theta.n - \sin \theta.n' - \sin \theta d\theta.b + \cos \theta.b'$$

olur. Frenet formüllerini yerine yazarsak

$$b'_q = -\cos \theta d\theta.n - \sin \theta(-\kappa t + \tau b) - \sin \theta d\theta.b + \cos \theta.(-\tau n)$$

bulunur. Böylece son hali

$$b'_q = t(\kappa \sin \theta) - n(\cos \theta(d\theta + \tau)) - b(\sin \theta(d\theta + \tau))$$

elde edilir. Yukardaki denklemin her iki tarafını  $t$  vektörü ile skaler olarak çarparsak

$$\langle t, b'_q \rangle = \langle t, t \rangle (\kappa \sin \theta) - \langle t, n \rangle (\cos \theta(d\theta + \tau)) - \langle t, b \rangle (\sin \theta(d\theta + \tau))$$

dır. Ayrıca  $\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = 0$  ve (4.1.2) denklemi kullanılarak

$$k_2 = -\kappa \sin \theta$$

bulunur. Ek olarak

$$k_1^2 + k_2^2 = \kappa^2$$

kolaylıkla elde ederiz.

Şimdi (4.2.2) ve (4.2.3) denklemleri yardımıyla

$$\langle n'_q, b_q \rangle = \sin^2 \theta(d\theta + \tau) + \cos^2 \theta(d\theta + \tau)$$

dır. O halde

$$\langle n'_q, b_q \rangle = (d\theta + \tau)$$

bulunur. (4.1.2) kullanılarak

$$k_3 = d\theta + \tau$$

elde ederiz.

Son olarak  $\cos \theta$  değerini hesaplayalım

$$\langle n, n_q \rangle = \|n\| \cdot \|n_q\| \cos \theta$$

olduğundan dolayı ve eğrinin yay parametresi olduğu için

$$n = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

ve gerekli işlemler yapılarak

$$\cos \theta = \frac{\det(\alpha'', \alpha', \kappa)}{\|\alpha' \wedge \kappa\| \|\alpha''\|}$$

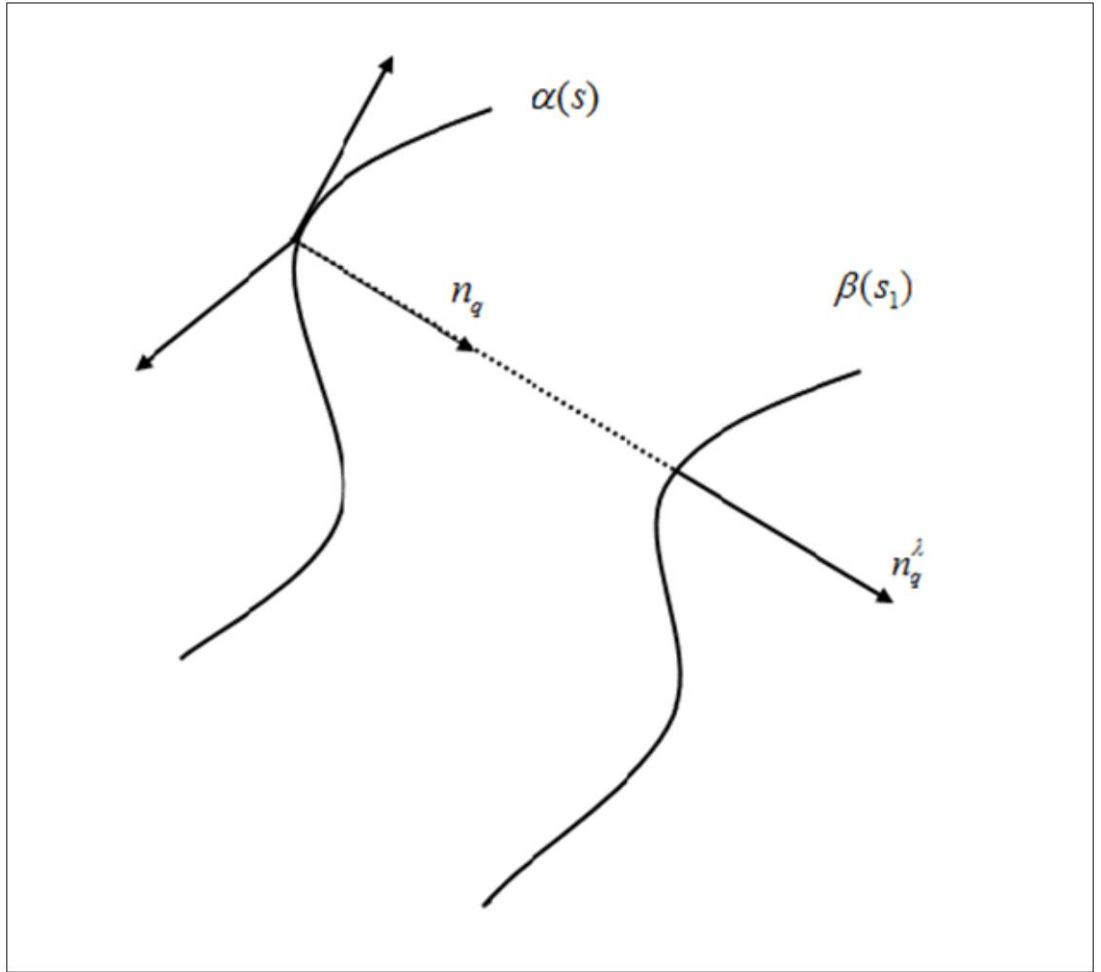
bulunur.

## 5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA YÖNLÜ BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Bertrand eğrileri tanımlanacaktır. Ayrıca yönlü Bertrand eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilecektir.

### 5.1. Yönlü Bertrand Eğrileri :

**Tanım 5.1.1:**  $\alpha, \beta \subset E^3$  iki uzay eğrisi olsun.  $\alpha$  eğrisinin q-çatısı  $\{t, n_q, b_q\}$  ve  $\beta$  eğrisinin q-çatısı  $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$  olmak üzere. Eğer  $n_q$  ve  $n_q^\lambda$  quasi-normal vektörleri lineer bağımlı ise  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerine yönlü Bertrand eğri çifti denir [32].



Şekil 5.1



**Teorem 5.1.1:**  $\alpha(s)$  birim hızlı bir uzay eğrisi ve  $\beta(s)$  ile yönlü Bertrand eğri çifti olsun. O halde

(a) Yönlü Bertrand eğrileri olan  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrileri arasındaki mesafe sabittir [32].

(b)  $k_3 = 0$  ise yönlü Bertrand eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı sabittir [32].

**İspat:**

(a)  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  Bertrand eğri çiftlerinin q-çatıları sırasıyla  $\{t, n_q, b_q\}$  ve

$\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$  olsun.

O halde

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda n_q \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazılabilir.  $\beta$  nin yay parametresi  $s_1$  olmak üzere  $s$  parametresine göre türev alırsak ve (4.1.6) yardımıyla

$$\mathbf{t}^\lambda \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t}(1 - \lambda k_1) + \lambda' \mathbf{n}_q + \lambda k_3 \mathbf{b}_q$$

olur. Her iki taraf  $\mathbf{n}_q$  ile skaler olarak çarparsak

$$\lambda' = 0$$

elde edilir. Buradan da  $\lambda = \text{sabit}$  olduğu açıktır. O halde bu iki eğri arasındaki uzaklık da

$$\|\beta(s_1) - \alpha(s)\| = \lambda$$

sabit olur.

(b)  $\lambda' = 0$  için denkleminin her iki tarafının normunu alırsak

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm \sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

bulunur. O halde

$$\mathbf{t}^\lambda \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t}(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 \mathbf{b}_q$$

yardımıyla

$$\mathbf{t}^\lambda = \pm \frac{\mathbf{t}(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

olduğu kolayca görülür.

Ayrıca  $t$  ve  $t^\lambda$  arasındaki açı  $\phi$  olduğundan

$$\cos \phi = \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\lambda \rangle$$

dır. O halde

$$\cos \phi = \pm \frac{1 - \lambda k_1}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

bulunur. Bu denklemde  $k_3 = 0$  olduğunda  $\cos \phi = \pm 1$  olduğu aşikardır. Yani

$$\phi = 0$$

dır. O halde vektörlerin arasındaki açı sabittir.

**Teorem 5.1.2:**  $\alpha(s)$  birim hızlı bir uzay eğrisi ve  $\beta(s)$  ile yönlü Bertrand eğri çifti olsun. Bu iki eğrinin q-çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} t^\lambda \\ n_q^\lambda \\ b_q^\lambda \end{bmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \begin{bmatrix} 1-\lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} & 0 \\ -\lambda k_3 & 0 & 1-\lambda k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

şeklinde verilir [32].

**İspat:**

$t^\lambda$  vektörünü  $k$  ile vektörel olarak çarparak

$$t^\lambda \wedge k = \pm \frac{(t \wedge k)(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 (b_q \wedge k)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

dır. Ayrıca (4.1.1) denkleminde dolayı

$$t \wedge k = \|t \wedge k\| n_q$$

elde edilir.

Vektörel çarpımın özelliği ve projeksiyon vektörü  $k = (0, 0, 1)$  kullanarak

$$\|t \wedge k\| = \sqrt{t^2 k^2 - \langle t, k \rangle^2} = \sqrt{1 - \langle t, k \rangle^2} = \sqrt{1 - \mu^2}$$

elde edilir. Burada  $\mu$ ,  $\alpha(s)$  eğrisinin teğet vektörünün üçüncü bileşenidir.

Benzer bir şekilde basit bir hesaplama ile

$$b_q \wedge k = t \wedge n_q \wedge k = (t \cdot k) n_q - (k \cdot n_q) t = \mu n_q$$

bulunur. Buradan da

$$t^\lambda \wedge k = \pm \frac{(\sqrt{1-\mu^2}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu) n_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

dır. O halde

$$n_q^\lambda = \frac{t^\lambda \wedge k}{\|t^\lambda \wedge k\|} = \pm n_q$$

elde edilir.

Böylece bu çalışmanın en önemli sonuçlarından biri elde edilir.

Yönlü-Bertrand eğri çiftlerinde her zaman quasi-normal vektörleri doğrusal bağımlıdır.

Son olarakta  $b_q^\lambda$  quasi-binormal vektörünü hesaplayalım.

$$b_q^\lambda = t^\lambda \wedge n_q^\lambda$$

Olduğundan dolayı denklemleri yerine yazarsak

$$b_q^\lambda = \left( \pm \frac{t(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 b_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \right) \wedge n_q$$

elde edilir. Buradanda vektörel çarpımın özelliğini kullanarak

$$b_q^\lambda = \pm \frac{(1-\lambda k_1)b_q + \lambda k_3((t.n_q).n_q - n_q^2.t)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

dır. Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$b_q^\lambda = \pm \frac{-\lambda k_3 t + (1-\lambda k_1)b_q}{\sqrt{(1-k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

elde ederiz.

**Teorem 5.1.3:**  $\alpha(s)$  yay uzunluğu parametresi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. Ayrıca

$\alpha(s)$  ,  $\beta(s)$  yönlü Bertrand eğrisi olsun. O halde q- eğriliklerin arasındaki ilişki

$$k_1^\lambda = \pm \frac{(1-\lambda k_1)k_1 - \lambda k_3^2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

$$k_2^\lambda = \pm \frac{\lambda k_3'(1-\lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3 + ((1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2)k_2}{((1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$k_3^\lambda = \pm \frac{k_3}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

dır. Burada  $\beta(s)$  eğrisinin q- eğrilikleri  $k_1^\lambda, k_2^\lambda, k_3^\lambda$  dir.

**İspat:** İlk olarak  $k_1^\lambda$  eğriliğini hesaplayalım

$$k_1^\lambda = -\langle t^\lambda, n_q^{\lambda'} \rangle = \langle t^{\lambda'}, n_q^\lambda \rangle$$

dır.  $t^{\lambda'}$  vektörünün türevi

$$t^{\lambda'} = \pm \frac{-\lambda k_3 k_2 t + (k_1(1-\lambda k_1) - \lambda k_3^2) n_q + k_2(1-\lambda k_1) b_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \quad (5.1.3)$$

elde edilir. O halde (5.1.3) ve (4.2.1) denklemleri kullanılarak

$$k_1^\lambda = \pm \frac{(1-\lambda k_1)k_1 - \lambda k_3^2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

dır. Şimdi  $k_2^\lambda$  eğriliğini hesaplayalım

$$k_2^\lambda = -\langle t^\lambda, b_q^{\lambda'} \rangle = \langle t^{\lambda'}, b_q^\lambda \rangle$$

Olduğundan benzer yöntemler ile

$$k_2^\lambda = \pm \frac{\lambda k_3' (1 - \lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3 + ((1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2) k_2}{((1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bulunur. Şimdi  $k_3^\lambda$  eğriliğini hesaplayalım

$$k_3^\lambda = \langle n_q^{\lambda'}, b_q \rangle$$

olduğundan

$$k_3^\lambda = \pm \frac{k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

elde edilir.

**Örnek 5.1.1:** Bir uzay eğrisi (doğru)

$$\alpha(s) = (t, t, t)$$

ve projeksiyon vektörü  $k = (0, 0, 1)$  şeklinde tanımlansın. İlk olarak q-çatıyı hesaplayalım

$$t = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$n_q = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

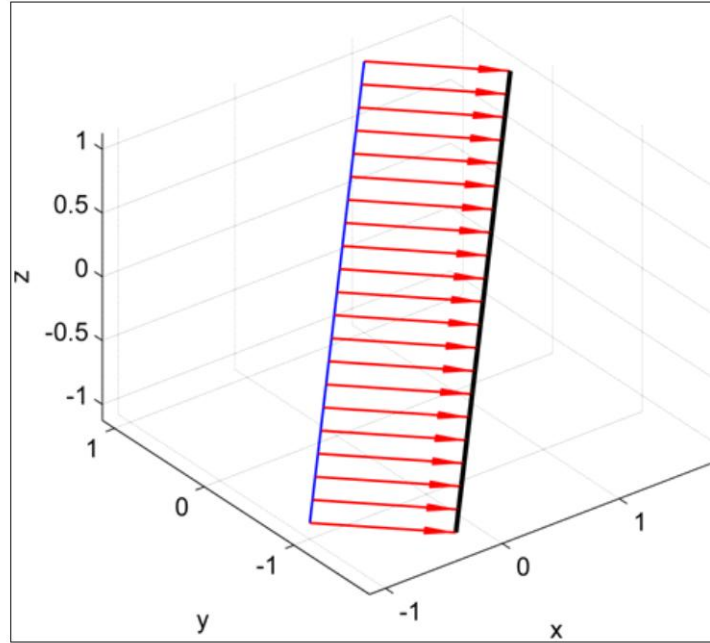
ve

$$b_q = \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

kolaylıkla elde edilir. O halde

$\lambda = 1$  için  $\alpha(t)$  eğrisinin bertrand eğrisi şekilde hesaplanır

$$\beta(t) = \left( t + \frac{\sqrt{2}}{2}, t - \frac{\sqrt{2}}{2}, t \right)$$



Şekil 5.2

**Örnek 5.1.2:** Bir uzay eğrisi

$$\alpha(t) = \left( 2t, t^2, \frac{t^3}{3} \right)$$

ve projeksiyon vektörü  $k = (0,0,1)$  olsun. ilk olarak q-çatıyı hesaplayalım

$$t = \left( \frac{2}{t^2+2}, \frac{2t}{t^2+2}, \frac{t^2}{t^2+2} \right)$$

$$n_q = \left( \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, 0 \right)$$

ve

$$b_q = \left( \frac{t^2}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}, \frac{t^3}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}, \frac{-2\sqrt{t^2+1}}{(t^2+2)} \right)$$

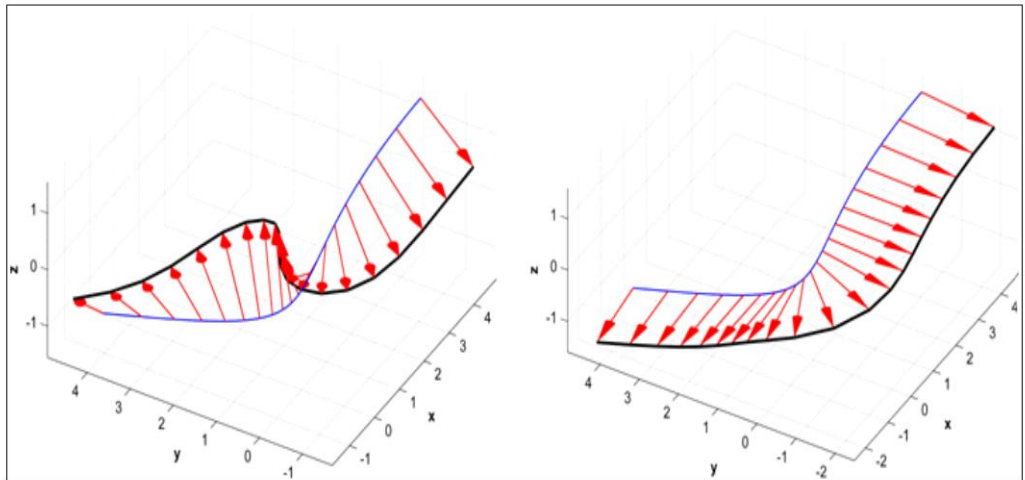
kolaylıkla elde edilir.

O halde  $\lambda = 3$  için  $\alpha(t)$  eğrisinin bertrand eğrisi

$$\beta(t) = \left( 2t + \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}}, t^2 - \frac{3}{\sqrt{t^2+1}}, t \right)$$

şeklinde hesaplanır.

Frenet çatısı kullanılarak elde edilen Bertrand eğrisi(sağ) ve q-çatısı kullanılarak elde edilen yönlü Bertrand eğrisi(sol) Şekil 5.3 te gösterilmiştir.



Şekil 5.3



## 6. SONUÇLAR

İlk önce bu çalışmada bir uzay eğrisi boyunca q-çatının Frenet çatısına göre avantajlarını sunmaktadır. Bunlar kısaca 1) İkinci türevi tanımsız eğride tanımlanabilir. 2) Teğet etrafında gereksiz bükülmeyi önler.

Aynı zamanda, teorik ve uygulama olmak üzere iki aşamadan gerçekleşmiştir. Birinci aşama, q-çatı yardımıyla Bertrand eğrileri tanımlanmış ve bir eğrinin yönlü Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. İkinci aşamada ise, Bertrand ve yönlü Bertrand eğrileri maple programı kullanılarak çizdirilmiştir. Bulunan sonuçlar analiz edilmiş ve yönlü Bertrand eğrilerinin avantajları sıralanmıştır.

Q-çatı uzay eğrisi yardımıyla tanımlanan başka konulardada kolaylıkla kullanılabilir. Örnek vermek gerekirse fokal eğriler de q-çatı yardımıyla kolaylıkla tanımlanabilir.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu, H.,1998. Diferansiyel Geometri , Ankara Üniversitesi.
- [2] Hacısalihoğlu, H.,1982. Lineer Cebir , Fırat Üniversitesi.
- [3] Üstün, A., , Monfedeo, P., Differential Geometry of Curves an Surfaces , Prentice-Hall,n., 1976. Englewood Cliffs , New Jersey
- [4] Bektas, M., 1998. Lorentz Uzayının integral Geometrisi, Doktora Tezi.
- [5] Balgetir, H.,Bektas, M., And Ergut, M., 2004. Bertrand Curves for nonnull curves n3-Dimensional Lorentzian Space, Hadronic Journal 27, 229-236.
- [6] Semin, F.,1983. Diferansiyel Geometri I, İstanbul Üni. Fen Fak.
- [7] Lai, H.,1967. Weakened Bertrand Curves, Tôhoku Math. Journ, Vol.19, No:2, .
- [8] Müller H. R. 1963, Kinematik Dersleri , Ankara Üniversitesi Fen Fak. Yayınlar .
- [9] O'Neill, B.,1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity , NewYork ,Academic Press.
- [10] Blaschke, W., 1949.Diferansiyel Geometri Dersleri, İst. Üni. Yay.
- [11] Gallot, S., Hulin, D., 1987. Lafontaine, J., Riemannian Geometry , Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [12] Bishop, R.,1975. There is more than one way to frame a curve, Amer.Math. Monthly 82, 246--251.
- [13] Yılmaz, M., Turgut 2010. A new version of Bishop frame and an application to spherical images, J. Math. Anal. Appl. 371, 764--776.
- [14] Bloomenthal, 1990. Calculation of reference frames along a space curve, Graphics gems, Academic Press Professional, Inc., San Diego,CA.
- [15] Wang, W., and Joe, B., 1997. Robust computation of the rotation minimizing frame for sweep surface modelling. Comput. Aided Des., 29, 379 391.
- [16] Guggenheimer, H.,1989. Computing frames along a trajectory. Comput.Aided Geom. Des. 6, 77--78.
- [17] Wang,W., Juttler, B., and Liu, Y., 2008. Computation of rotation minimizing frame. ACM Trans. Graph. 27(1), article no. 2.
- [18] Do Carmo, M.,1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- [19] Maurer, C., and Jüttler, B.,1999. Rational approximation of rotation minimizing frames using Pythagorean-hodograph cubics, *Journal for Geometry and Graphics*, 3(2), 141-159
- [20] Klok, F.,1986. Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory. *Comput. Aided Geom. Des.* 3, 217--229.
- [21] Gray, A.,1998. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton.
- [22] Said, A. Md. Vector-projection approach to curve framing for extruded surfaces -- ICCSA 2013. *Lecture Notes in Computer Science Volume 7971*,2013, pp 596-607.
- [23] Farouki, R., T.2008. *Pythagorean-hodograph curves: Algebra and Geometry Inseparable*, Springer, Berlin.
- [24] Ravani,R., and Ravani, B., 2004.Rational Frenet-Serret curves and rotation minimizing frames in spatial motion design, *IEEE international conference on Intelligent engineering systems*; 186-192, INES .
- [25] Choi, J., Kang, T., Kim, Y., 2012. Bertrand curves in 3- dimensional space forms. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 1040-1046.
- [26] Coquillart, S., 1987. Computing offsets of B-spline curves, *Computer-Aided Design*, 19(6), 305-309.
- [27] Matsuda,H.,& Yorozu, S., 2003. Notes on bertrand curves. *Yokohama Mathematical Journal*, 50, 41-58.
- [28] Oztekin, H.,& Bektaş, M., 2010. Representation Formulae for Bertrand Curves in the Minkowski 3-space. *Scientia Magna*, 6, 89-96.
- [29] Dede, M., Ekici, C., and Görgülü, A., 2015. Directional q-frame Along a Space Curve, *IJARCSSE*, 5, 775-780.
- [30] Dede, M., Ekici, C., and Tozak, H., 2015. Directional Tubular Surfaces, *International Journal of Algebra*, 9, 527-535.
- [31] Kazaz, H., Uğurlu, H., Onder, M., Oral, S., 2014. Bertrand Partner D-Curves in Minkowski 3-space, *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, 2, 68-82.
- [32] Dede, M.,And Ekici, C., 2016. Directional Bertrand mates, *Kuwait journal of mathematics*, (submitted for publication).

## ÖZGEÇMİŞ

### **Genel Bilgiler**

Adı Soyadı :Şirin LUFU

Doğum Yeri : Halep

Doğum Tarihi : 24.06.197

İletişim : lutfosirin@yahoo.com

### **Eğitim Durumu**

Lise : halep fen lisesi, 1998

Lisans :suriye Halep üniversitsi fen fakültesi matematik bölümü 2003

Yüksek Lisans : Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik  
ABD 2016

### **Akademik Deneyim**

Farklı liselerde öğretim görevlisi olarak çalıştım