KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM DÜZEYİ İÇİN TASARLANAN FRAKTAL GEOMETRİ ÖĞRETİM PROGRAMININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Fatih KARAKUŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce Doktora Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Danışmanı
Prof. Dr. Adnan BAKİ

TRABZON
Nisan, 2011

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 29/04/2011

Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Adnan BAKİ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Yusuf YAYLI**	....
Üye	**: Doç. Dr. Bülent GÜVEN**	....
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Selahattin ARSLAN**	....
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Derya ÇELİK**	....

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr Haluk Özmen

Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı ve bu tezi KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Fatih KARAKUŞ
23/05/2011

ÖNSÖZ

Son yıllarda matematik eğitiminde sıklıkla karşımıza çıkan konulardan biri de fraktal geometridir. Fraktal geometri konularının öğretimine farklı sınıf seviyelerinde yer verilmeye başlanmasına karşın bu konuların öğretimine yönelik toplu bir fraktal geometri öğretim programı henüz geliştirilmemiştir. Bu çalışma kapsamında ortaöğretim düzeyine yönelik tasarlanan bir fraktal geometri öğretim programının öğrenilebilirlik ve öğretilebilirlik boyutlarından bir değerlendirilmesi yapılmıştır. Bu yolla yakın zamanda mevcut matematik öğretim programlarına entegresine başlanan fraktal geometri konuları için bir alt yapının tasarlanması ve örnek bir öğretim programının uygulanmasının ortaya konulması amaçlanmıştır.

Doktora dönemimde öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, gerek tez konumun belirlenmesinde gerekse de çalışmamın yürütülmesinde desteğini eksik etmeyen, yol gösteren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Adnan BAKİ' ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince görüş ve önerilerinden yararlandığım, yapıcı eleştirileriyle bana yol gösteren sayın hocalarım Doç. Dr. Bülent GÜVEN ve Yrd. Doç. Dr. Selahattin ARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli meslektaşlarım Arş. Gör. Temel KÖSA, Arş. Gör. Mesut BÜTÜN ve tüm mesai arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Hazırlanan fraktal geometri öğretim programının uygulanması aşamasında gönüllü olarak uygulamalara katılan tüm öğretmen adaylarına teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu uzun ve zorlu süreçte her türlü destekleriyle her zaman yanımda olan anneme, babama, ablama, çalışmamın her aşamasında yanımda olan ve bana destek veren sevgili eşim Gülçin KARAKUŞ ile kızlarım Şevval Nisa ve Selin'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Fatih KARAKUŞ

Trabzon 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Geometri eğitiminin genel amacı, öğrencinin kendi fiziksel dünyasını, çevresini, evreni açıklamada ve problem çözme sürecinde geometriyi kullanabilmesi şeklinde ifade edilebilir. Okullarda öğretilen geleneksel geometri idealize edilmiş soyutlamalardan oluşurken, tabiattaki nesnelerin şekilleri çok daha karmaşıktır. Bir ağacın, bulutun, çiçeğin, eğrelti otunun, brokolinin, hep düzensiz, girinti ve çıkıntılardan oluşan karmaşık bir yapısı bulunmaktadır. Geometri eğitiminin genel amacı göz önüne alındığında mevcut matematik programlarında okutulan Euclid geometrisi öğrencinin çevresini anlamasına, yaşadığı çevre ile ilişki kurmasına ve doğanın geometrik şeklinin oluşturulmasına yeterince yardım edememektedir. Bu nedenle fraktal geometrinin mevcut matematik öğretim programlarına entegre edilmesi geometri eğitiminin genel amaçlarının gerçekleşmesine katkı sağlayacaktır. Bu gerçeklerden hareketle, Fraktal geometri konularının öğretimine farklı sınıf seviyelerinde yer verilmeye başlanmıştır. Bununla birlikte, bu konuların öğretimine yönelik toplu bir fraktal geometri öğretim programı henüz geliştirilmemiştir. Bu çalışma kapsamında ortaöğretim düzeyine yönelik bir fraktal geometri öğretim programı tasarlanarak öğrenilebilirlik ve öğretilebilirlik boyutlarından bir değerlendirilmesi yapılmıştır. Bu amaç kapsamında ortaöğretim düzeyine yönelik bir fraktal geometri öğretim programı geliştirilmiş ve 6 hafta boyunca 39 birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adayına uygulanmıştır. Bu konunun öğretimine henüz ortaöğretim düzeyinde başlanılmadığından çalışma ortaöğretim düzeyine en yakın olarak birinci sınıf öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. Veriler dersin öğretmeni ve öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlardan, klinik mülakatlardan ve fraktal geometri sınavı yoluyla toplanmıştır.

Elde edilen nitel veriler hazırlanan fraktal geometri programının belirlenen hedeflerinin büyük çoğunluğunun öğretmen adayları tarafından kazanıldığını göstermektedir. Ancak fraktal boyut ve kaos konularının öğretiminde programın beklenen başarıyı sağlayamadığı tespit edilmiştir. Çalışma elde edilen sonuçlar kapsamında araştırmacılara ve eğitimcilere yapılan önerilerle tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fraktal Geometri, Öğretim Programı Değerlendirme, Ortaöğretim Matematik Öğretim Programı

SUMMARY

An Evaluation of Fractal Geometry Curriculum Designed for Secondary School Mathematics

The general objectives of geometry education can be summarized as; students should use geometry within the process of problem solving, understanding and explaining the physical world around them. Traditional geometry taught in schools consists of idealized abstractions, but the shapes of objects in nature are much more complex. A tree, cloud, mountain, flower, fern, broccoli, fire and lightning always have irregular and complex structure. Therefore, current school geometry curriculum based on Euclidean geometry is not adequately sufficient to meet the above objectives. For this reason, we need to integrate fractal geometry into current mathematics and geometry curriculums. Although teaching of fractals is started at different grade levels, a comprehensive fractal geometry curriculum was not developed yet. In this study, a fractal geometry curriculum designed for secondary school mathematics was evaluated according to the dimensions of teaching and learning of fractals. For this purpose, a fractal geometry curriculum was developed and used 39 pre-service mathematics teachers during the six weeks. Data gathered through semi-structured interviews, clinical interviews and fractal geometry written exam.

After implementations, the purposes of fractal geometry curriculum were achieved by the vast majority of the pre-service teachers. But, the program that not provided the desired success in the teaching of fractal dimension and chaos game. According to the results, some recommendations were made for researchers and educators.

Key Words: Fractal Geometry, Evaluation Curriculum, Secondary School Mathematics Curriculum

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Geometri, yaşadığımız evren ile ilişki kurmak, onu anlamak ve tanımlamak amacıyla oluşturulan ve belki de matematiğin en çok sezgisel, somut ve gerçekle ilişkili olan alanıdır. Okullarımızda iki bin yılı aşkın bir süredir Euclid geometrisini kullanmaktayız. Euclid geometrisinin şekilleri; nokta, doğru, düzlem, daire, küre, üçgen, koni, silindir, vb. oluşmaktadır. Gerçekte bu şekillerin büyük bir çoğunluğu doğada bulunmayan soyut geometrik şekillerdir. Okullarda öğretilen geleneksel geometri idealize edilmiş soyutlamalardan oluşurken, tabiattaki nesnelerin şekilleri çok daha karmaşıktır. Bir ağacın, bulutun, dağın, çiçeğin, eğrelti otunun, brokolinin, ateşin, yıldırımın hep düzensiz, girinti ve çıkıntılardan oluşan karmaşık bir yapısı bulunmaktadır. Mandelbrot doğada Euclid geometrisine rastlamanın hemen hemen imkânsız olduğunu “Ne bulutlar birer küre, dağlar koni ve ağaç kabuğu pürüzsüz değildir, ne de şimşekler bir doğru boyunca ilerlemezler (Mandelbrot, 1983, s.1)” sözüyle ifade etmektedir. Geometri eğitiminin genel amacı öğrencinin kendi fiziksel dünyasını, çevresini, evreni açıklamada ve problem çözme sürecinde geometriyi kullanabilmesi şeklinde ifade edilebilir (Baki, 2001). Geometri eğitiminin genel amacı göz önüne alındığında mevcut matematik programlarında okutulan Euclid geometrisi öğrencinin çevresini anlamasına, yaşadığı çevre ile ilişki kurmasına ve doğanın geometrik şeklinin oluşturulmasına yeterince yardım edememektedir (Baki, 2001).

Bilim adamları ve matematikçiler için evreni geometriyi kullanarak modellemek her zaman önemli bir çalışma konusu olmuştur (Tikoo, 1998). Einstein Euclid geometrisinin evrenin modelini oluşturmada ve evreni tanımlamada tek başına yeterli olmadığını genel görecelik kuramı ile ilgili çalışmasında Riemann geometrisini kullanarak göstermektedir. Böylece evrenin modelini oluşturma tutkusu yeni geometrilerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu geometrilerden biri de fraktal geometridir (Tikoo, 1998).

Fraktal kelimesi “düzensiz, kırıklı, karmaşık” anlamlarına gelen Latince “fractus” kelimesinden gelmektedir (Mandelbrot, 1983). Fraktal geometri uzayıp giden bir dağ sırasının girinti ve çıkıntılarını, ağaçların farklı şekilde dallanmalarını, bulutların ve kar tanelerinin şekillerini veya bir kıyı şeridinin kıvrımlarını inceler, aynı zamanda bu şekillerin matematiksel yapılarının özelliklerini ortaya koyar (Baki, 2001). Özellikle 19.

yy.'da Euclid ve Newton'un şekillerine uygun olmayan matematiksel yapıların keşfi matematikte köklü değişikliklerin olmasına neden olmuştur. Matematikteki bu değişim 1870'li yıllarda diferansiyellenmeyen ancak sürekli eğriler ile boyut arasındaki ilişkiler üzerine yapılan çalışmalar sonucu Weierstrass fonksiyonunun bulunmasıyla başlamakta ve 1920 yılında Cantor kümesi, Peano eğrisi, Koch eğrisi ve Sierpinski üçgeninin keşfine kadar sürmektedir. 1870-1920 arasında yaşanan bu gelişmeler matematik dünyasındaki birçok kalıplaşmış yapıyı derinden sarsmıştır. Örneğin Poincarre (1890):

> "Geçmişte yeni bir fonksiyon keşfettiğimizde, bu fonksiyon uygulanabilir bir amaç içindi. Ancak bugün atalarımızın yanlışlarını kanıtlamak amacıyla keşifler yapmaktayız ve atalarımızın bulduklarını terk etmekteyiz." (Bowers, 1991).

şeklinde matematikteki bu değişimi vurgulamaktadır. Alışılagelmişin dışında özelliklere sahip olan fraktal yapılar matematikte bilinen birçok kavramın yeniden ele alınmasını zorunlu kılmaktaydı. Ayrıca bu yeni yapıların görselleştirilmesinin çok zor oluşu onların altında yatan matematiğin keşfedilmesini zorlaştırmaktaydı. Bu nedenle bu dönemde bulunan fraktal yapılara birer "canavar" ya da "patolojik vaka" denilmiştir (Peitgen vd., 2004).

Yaklaşık elli yıllık bir aradan sonra 1970'li yıllarda Benoit Mandelbrot bilgisayar teknolojisini kullanarak bu sıra dışı yapıları yeniden ele almış ve fraktal geometrinin ortaya çıkmasına ve popülerlik kazanmasına yol açmıştır. Fraktallar farklı oranlarda kendilerini tekrar eden sonsuz örüntülerdir. Oldukça karmaşık yapıya sahip olmalarına karşın fraktalları oluşturmak kolaydır. Basit tekrarlama süreçlerinin sürekli yinelenmesi sonucunda oluşurlar. Fraktallara doğada (eğrelti otları, ağaçlar, akciğerler, vb) , geometride (Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi, vb.) ve cebirde (Mandelbrot kümesi, Julia kümeleri vb.) rastlanmaktadır.

Fraktal geometri gibi farklı geometrilerin ortaya çıkması Euclid geometrisinin tek ve mutlak doğru olduğu görüşünün değişmesine neden olmuştur (Güven, 2006). Euclid geometrisine yönelik bu değişim matematik eğitimini de yakından etkilemiştir. Bu bağlamda 1989 yılında Amerika'da matematik eğitimi için ilk kapsamlı standartlar belirlenmiş ve bu standartlarda öğrencilerin evreni daha iyi tanıyabilmeleri ve ilişkilendirebilmeleri için Euclid dışı geometrilerle çalışmaları önerilmiştir. 1990'dan itibaren de fraktal geometri konularının mevcut matematik ve geometri öğretim programlarına entegrasyonu çalışmalarının başladığı söylenebilir. NCTM 1991-1993 yılları arasında yayımladığı ek raporlarda da geleneksel matematik konuları yanında her seviyeden öğrencinin matematiğe olan ilgi ve ihtiyaçlarını artıracak, matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmesini sağlayacak, matematik ile doğa arasında ilişki kuracak ve bu ilişkide teknolojiyi kullanmaya imkân verecek yeni matematik konuları üzerinde durulmuş ve fraktal geometrinin matematik müfredatlarında yer alması önerilmiştir. Bu öneri doğrultusunda fraktal geometriyi de içerecek bir geometri öğretim programının tasarlanmasının gerektiği açıktır. Çünkü içinde yaşadığımız dünya Euclid geometrisiyle açıklanamayacak kadar karmaşık ve engebelerle doludur. Öğrencilerin, yaşadıkları dünya ile ilgili bilgilere sahip olmaları sadece Euclid geometrisinin sınırlı yapısıyla mümkün değildir. Bu nedenle Euclid-dışı geometrilerin müfredatlara entegresi gerekmektedir. Ancak hazırlanacak bir müfredatta fraktalların nasıl yer alacağı, hangi fraktal konularına yer verileceği ile ne tür materyal ve öğretim yaklaşımlarının bu entegrasyon sürecinde etkili olacağı sorularının cevaplanması önemlidir. Bu bağlamda mevcut matematik ve geometri öğretim programları temelinde örnek bir fraktal geometri öğretim programının tasarlanması ve değerlendirilmesi gerekmektedir.

1.2. Araştırmanın Gerekçesi

Son yıllarda bilim adamları ve matematikçiler fraktal geometriyi resim, astronomi, biyoloji, iş dünyası, kimya, fizik, bilgisayar, sinema sektörü, ekonomi, mekanik, mühendislik, jeoloji ve genetik gibi birçok farklı alanda kullanmaya başlamışlardır. Örneğin tıpta bir tümörün iyi huylu ya da kötü huylu olduğunun belirlenmesinde ya da jeolojide bir depremin nerede ne zaman olacağının tahmin edilmesinde fraktal boyutlar kullanılmaktadır. Yani fraktal boyut sayesinde doğal nesnelerin sahip olduğu yapısal düzensizlik tanımlanabilmekte ve analiz edilebilmektedir. Oysa Euclid geometrisinin kullandığı boyut ise bu düzensizlikleri tanımlamada yetersiz kalmaktadır (Bowers, 1991). Benzer şekilde Eiffel kulesinin inşasında fraktal eğrilerden yararlandığı belirtilmektedir. Eiffel kulesinin muhteşemliği inşaat teknolojisindeki sonsuz yüzeye sıfır hacim mantığıdır ki bu da Sierpinski fraktalının düşüncesini yansıtmaktadır (Mandelbrot, 1983). Bunun yanında biyolojide bakterilerin büyümesi ve DNA'nın yapısı fraktal özellik göstermektedir (Shearer, 1996). Ayrıca dolaşım sistemimiz ve akciğerlerimiz fraktal bir yapı göstermektedir. Kan damarlarının dallanıp budaklanarak daha küçük parçalara ayrılması küçük hacimlerde büyük uzunluklar ve alanların elde edilmesini sağlamaktadır ki bu daha çok oksijen anlamına gelir (Bremer, 1997). Vücut organlarının bu yapısı Sierpinski üçgeni ve Koch eğrisi fraktallarının sahip olduğu sonsuz çevre ve sınırlı alan özellikleriyle paralellik göstermektedir. Fraktal antenler literatürde birkaç yıllık bir geçmişe sahip olmasına karşın çoklu bant özellikleri nedeniyle birçok iletişim siteminde uygulama alanı bulmuşlardır (Felber, 2000). Bunun yanında internetteki trafiğin öz-benzerlik özelliği gösterdiği yapılan çalışmalarda belirtilmektedir (Smith, 2008). Ayrıca sinema sektöründe, CD-ROM'lar kullanılarak resimlerin depolanması gibi verilerin sıkıştırılıp düzenlenmesinde ve dekor ve sahne masraflarını azaltmada fraktal geometriden yararlanılmaktadır. Örneğin Star Trek II - The Wrath of Khan, ve Return of the Jedi filmlerinin animasyonlarının birçoğu fraktallar kullanılarak oluşturulmuştur.

Fraktalların birçok farklı disiplinde yoğun olarak kullanılmaya başlanması onların okul matematiği içerisinde öğrenilmesi ve öğretilmesini de zorunlu hale getirmektedir. Ancak, fraktalların sadece farklı disiplinlerde kullanılmaları onların okul matematiğine girmesi için tek geçerli neden değildir. Bu nedenle fraktalların niçin matematik müfredatlarında yer alması gerektiği sorusunun yanıtlanması önemlidir.

Fraktal geometri kavramlarının hem ilköğretim hem de ortaöğretim seviyesinde mevcut matematik öğretim programlarına eklenmesi çalışmaları 1990'lı yıllarda başlamıştır. Ancak bu çalışmalar belirlenen bir öğretim programının tümüne doğrudan bir entegrasyon yerine öğretmenlerin sınıf içi çalışmalarında yer verecekleri küçük etkinlikler olarak gerçekleşmiştir (Thomas, 1989; Goldenberg, 1991; Coes III, 1993; Vacc, 1999; Naylor, 1999; Lornell ve Westerberg, 1999; Barton, 2003; Khedre, 2004; Devaney, 2004; Raiteri, 2005; Perham ve Perham, 2005; Fraboni ve Moller, 2008). Bunun yanında Robert L. Devaney öncülüğünde 1990-2000 yılları arasında Boston üniversitesi ile Boston bölgesindeki birkaç okulda 7-12 matematik öğretim programlarına dinamik sistemler ve fraktal geometri konularının dâhil edilmesi için matematik öğretmenlerinin eğitildiği bir proje yürütülmüştür. Bu projenin sonunda fraktalları tanıtan ve öğretmenlerin derslerinde fraktal kavramlarına yer vermelerini sağlayacak materyalleri içeren öğretim amaçlı bir web sitesi oluşturulmuştur. 2008 yılından itibaren ise MathScience Innovation Center grubu fraktal geometrinin 5-12 matematik ve fen öğretim programlarına entegrasyonu çalışmalarını başlatmıştır. Amaçları Devaney'in projesinde olduğu gibi matematik öğretmenlerini fraktal geometri konusunda bilgilendirmek ve eğitmektir. Bu proje kapsamında New Jersey ve Virginia 2009 matematik öğretim programlarına (5-12) fraktal geometri kavramları entegre edilmiştir. Tüm yapılan bu çalışmaların sonucu olarak ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarına fraktalların katılmasının nedenleri aşağıdaki gibi özetlenebilir: Fraktal geometri;

- Öğrencilerin ilköğretim seviyesinde sayı dizileri, simetri, oran-orantı, ölçme ve kesirler, ortaöğretim seviyesinde ise logaritma, bileşke fonksiyon, Pascal üçgeni, aritmetik ve geometrik diziler ile karmaşık sayılar gibi birçok geleneksel matematik konusunu yeni bir yaklaşımla incelemelerine yardımcı olur (Lornell ve Westerberg, 1999; Fraboni ve Moller, 2008). Örneğin öğrenciler Koch kartanesinin alanı ve çevresini hesaplarken benzerlik, sayı örüntüleri, geometrik seriler ve limit konularını birlikte kullanmaktadırlar. Bunun yanında hava durumu tahminleri, borsa, fay kırıkları, vb. birçok olay fraktallar sayesinde açıklanabilmektedir.
- Matematiğin öğrenciler tarafından analitik olmayan yollarla keşfedilmesine yardımcı olur. Öğrenciler klasik fraktalların ardı ardına tekrarlamaları sonucu oluşan şekillerini çizerek ve modeller inşa ederek rutin alıştırmalar olan kâğıt kalem çalışmalarından farklı olarak fraktalların özelliklerini keşfedeler (Lornell ve Westerberg, 1999). Örneğin, bu yolla fraktalların büyüme ve tekrarlama formüllerini çıkarırlar, Koch kartanesinin nasıl sonsuz bir çevrede sınırlı bir alana sahip olduğunu, fraktalların sonsuz yapıya sahip olduğunu ve asla tam olarak şekillerinin çizilemez olduğunu görürler.
- Matematik derslerinde bilgisayarın kullanılmasını zorunlu hale getirir. Fraktal geometrideki yapılar Cabri ve Geometer Skechtpad gibi dinamik geometri yazılımları, Logo ve Fractint gibi yazılımlarla kolayca oluşturulabilir ve özellikleri incelenebilir.
- Öğrencilerin doğada karşılaştıkları bir kıyı şeridinin, fay kırıklarının, kartanesinin ya da bir bulutun şeklini matematiksel olarak tanımlamalarını sağlayacak yeni bir dil öğrenmelerine yardımcı olur. Bu dilin oluşturan temel kavramlar ise tekrarlama, öz-benzerlik, boyut, döngü ve dallanmadır.
- Öğrencilerin matematik alanındaki güncel araştırma ve gelişmeleri görme fırsatı elde etmelerini sağlar.
- Öğrencilerin matematiğin estetik boyutunu ve büyüleyici güzelliğini görmelerine yardımcı olur (Langille, 1996). Bu da onları duyuşsal olarak olumlu etkiler. Böylece birçok öğrenci bu şekillerden etkilenebilir ve bu etkilenme estetik duygularının gelişmesini sağlayabilir. Yapılan birçok çalışma fraktalların

öğrencileri duyuşsal yönden olumlu yönde etkilediğini belirtmektedir (Vacc, 1999; Lornell ve Westerberg, 1999; Khedre, 2004; Raiteri, 2005; Fraboni ve Moller, 2008).

- Matematik öğretim programlarının hareketlenmesine ve öğrenciler tarafından matematiğin canlı, yaşayan ve değişen bir yapısı olduğunun fark edilmesine yardımcı olur (Goldenberg, 1991; Langille, 1996). Bunun nedeni fraktal geometrideki kavramların görsel ve sezgisel; şekillerin estetik bir çekiciliğe sahip ve uygulama yapmaya imkân veren ve içerdiği matematiğin kullanışlı ve yapılabilir olmasıdır (Devaney, 1990).
- Öğrencilerin geometri öğretiminin genel amacı olan kendi fiziksel dünyalarını, çevrelerini, evreni açıklamalarına ve problem çözme sürecinde geometriyi kullanabilmelerine Euclid geometrisinden çok daha fazla fırsat sağlar (Lornell ve Westerberg,1999; Baki, 2001; Raiteri, 2005). Ayrıca öğrenciler günlük hayatta karşılaştıkları nesnelerle matematiği ilişkilendirme fırsatı elde ederler.

Yukarıda özetle sıralanan fraktal geometri konusunun mevcut matematik öğretim programlarına katılma nedenleri göz önüne alındığında “bu konuya daha önce matematik öğretim programlarında bir alt öğrenme alanı olarak niçin yer verilmedi?” sorusunun cevaplanması gerekmektedir. Bunun nedenlerinden birisi fraktalların matematiğin çok yeni bir alanı olmasıdır. 1870-1920 arasında bugün klasik fraktallar olarak isimlendirdiğimiz Cantor kümesi, Peano eğrisi, Koch kartanesi ve Sierpinski üçgeni yapılarına rastlamaktayız. Ancak bu yapılar sahip oldukları aykırı özellikleri nedeniyle o dönem matematik dünyası tarafından dikkate alınmamışlar ve birer “patolojik vaka” olarak nitelendirilmişlerdir. 1975 yılında Mandelbrot bu yapıları yeniden ele alarak fraktal geometriye hayat vermiştir. Ancak Mandelbrot’un o dönemki matematikçilerden farklı olarak sahip olduğu şey “bilgisayar” programlarıdır. Mandelbrot bilgisayar teknolojisini kullanarak bu yapıları görselleştirmiş ve özelliklerinin daha net olarak incelenmesine imkân sağlamıştır. 1990’dan itibaren de matematik eğitimcilerinin dikkatini çekerek matematik eğitiminde kullanılmaya başlanmıştır. Ülkemizde matematik programlarında 1990 ve 1998 yıllarında değişiklikler yapılmıştır. 1992 yılında uygulamaya konulan ortaöğretim matematik programında fraktalların olmamasının nedeni, bu konunun matematik eğitiminde yeni yeni çalışılmaya başlanması olarak düşünülebilir. 1998 yılında yapılan değişim ise daha çok ilköğretim matematik öğretim programını etkilemiştir ve 5+3 olarak nitelendirilen 8 yıllık ilköğretim eğitimine geçilmiştir

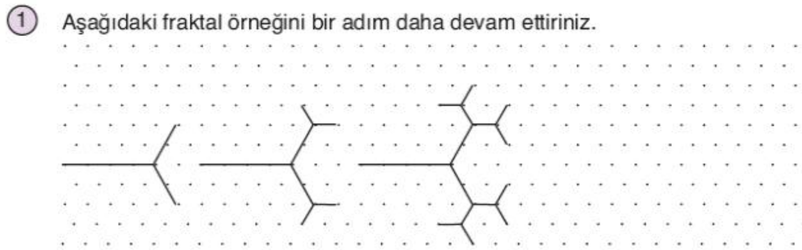
Fraktal yapıları oluşturmak ve özelliklerini incelemek için bilgisayar programlarının kullanılması zorunludur. 2003 yılından itibaren MEB Bilgisayar Destekli Eğitim Kampanyası doğrultusunda okullarımıza Bilişim Teknolojileri kurulması amaçlanmış ve 2007 sonuna kadar yaklaşık 29.000 okula internet erişimi sağlanmıştır. 1990 yıllındaki matematik öğretim programı incelendiğinde hem okullarımızda bilgisayar laboratuarları bulunmamakta hem de öğretim programı derslerde bilgisayar kullanımını desteklememektedir. Bu durum fraktal geometrinin matematik öğretim programlarında yer almamasının bir diğer nedenidir.

Ülkemizde 2005 yılında matematik öğretim programlarında yapılan değişiklikler kapsamında fraktal geometri kavramları ilk olarak ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programına eklenmiştir. Daha sonra ise 2010 yılında yayınlanan ve 2010-2011 eğitim öğretim yılından itibaren uygulanmasına başlanacak olan yeni 9-10. sınıf geometri öğretim programında yer almıştır. 8. sınıf matematik öğretim programında fraktal geometri kavramı örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanı içerisinde yer almaktadır. Programda bu konunun öğretim programına eklenmesinin gerekçesi *"matematiğin "örüntülerin bilimi" olduğu görüşünün yanı sıra, kavramların ve nesnelerin kendi içkin (immanent) doğalarıyla değil, onları içeren yapılarıyla (örüntülerle) ilgilendiği yaklaşımı göz önünde tutulmuştur. Bu yüzden örüntü alt öğrenme alanı, ayrıntılı olarak ele alınmış ve özel birer örüntü olan fraktallara yer verilmiştir. Bu yaklaşımda söz gelimi; 13'ün bir asal sayı olmasının, sayının kendi içsel özelliğinden değil, doğal sayılar içindeki yeri nedeniyle belirlendiği ileri sürülür. Bunun gibi "bir doğrunun eğimi", seçilen yatay eksene/doğruya göre değiştiğinden bu doğrunun yaradılıştan gelen bir içsel özelliği değildir."* şeklinde ifade edilmektedir (MEB, 2007, 43). Dikkat edilirse fraktalların öğretim programına katılma gerekçesi fraktallar konusunu kapsayacak şekilde ele alınmamıştır. Bu durum matematik öğretim programlarına fraktallar gibi yeni bir konunun niçin konulduğu sorusunun cevabının eksik bırakıldığını göstermektedir.

8. sınıf matematik öğretim programında fraktalların öğretimine yönelik *"Doğru, çokgen ve çember modellerinden örüntüler inşa eder, çizer ve bu örüntülerden fraktal olanları belirler."*şeklinde bir kazanıma yer verilmiştir (MEB, 2007). Kazanım matematiksel alt yapı göz önüne alınmadan Euclid geometrisinin şekillerini kullanarak sadece verilen örüntülerin fraktal olup olmadığına öğrencinin karar vermesine yönelik hazırlanmıştır. Ders kitapları incelendiğinde fraktalın tanımı *" bir şeklin orantılı olarak küçültülmüş ya da büyütülmüşleri ile inşa edilen örüntüler"* şeklinde ifade edilmektedir.

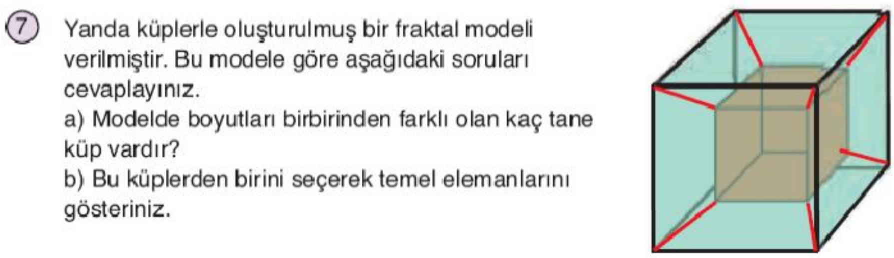
Tanım örtük bir şekilde fraktalların önemli özelliklerinden biri olan öz-benzerliği (self-similarity) vurgulamaktadır. Buna karşın fraktalların bir diğer özelliği olan ve örüntünün oluşmasını sağlayan tekrarlama (iteration) özelliğine değinilmemektedir. Bu durum öğrencinin verilen şeklin fraktal olup olmadığına karar vermesini güçleştirecektir. Bunun yanında öğretmen kılavuzları da incelendiğinde fraktalların temel özellikleri öz-benzerlik ve tekrarlama kuralına yönelik açıklamaların bu kitaplarda bulunmadığı belirlenmiştir. Ders kitabında ve çalışma kitabında yer verilen etkinlikler fraktalın ne olduğunu ve sahip olduğu örüntüleri keşfetmekten ziyade daha çok verilen geometrik bir örüntüyü ifade etme ya da çizme şeklindedir. Bunun yanında ders kitaplarında öğrencinin fraktal ve fraktal olmayan yapıyı karşılaştıran bir etkinlik ya da örnekle karşılaşmaması verilen bir örüntünün fraktal olup olmadığının belirlenmesini güçleştirmektedir. Ayrıca 8. sınıf matematik ders kitaplarında klasik fraktallardan Koch kartanesi, Cantor kümesi ve Sierpinski üçgeni gibi ünlü fraktallara yer verilmediği ve öğrencilerin bu yapıları kendilerinin oluşturmalarına yönelik etkinliklerin bulunmadığı görülmektedir.

Fraktalların sahip oldukları matematiksel alt yapıya öğretim programında hiç değinilmemesi, onun niçin örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanı içerisine konulduğu sorusunu akla getirmektedir. Çünkü örüntüler öğrencilerin matematiğin düzenli yapısını algılamaları ve matematiksel genellemeler yapabilmeleri için önemli birer araçtır (Olkun ve Uçar, 2007). NCTM (2000) çalışma grubu, küçük yaşlarda çocukların sayı ve şekil örüntüleriyle çalışmalarının ileriki yaşlarda gerekli olan cebirsel düşünmeleri için bir temel teşkil edeceğini vurgulamaktadır. Bunun yanında matematik eğitimcileri örüntüler, fonksiyonlar ve cebir arasındaki ilişkinin K-12 matematik öğretim programı boyunca entegre edilmesinin önemini belirtmektedirler (Smith, 2003). 8. sınıf öğretim programında fraktalların matematiksel yapısına yönelik aşağıdaki gibi etkinlikler yaptırılarak hem öğrencilerin mevcut matematik bilgilerini farklı yollar kullanarak yeniden keşfetmeleri hem de yeni durumlarla karşılaşarak matematiksel bilgilerinin doğruluğunu sınama fırsatı elde etmeleri sağlanabilir. Örneğin, Sierpinski üçgeni oluşturulurken oluşan her bir yeni üçgenin çevresi ve alanının değişimi öğrencilere buldurulabilir ve sıfır alana, sonsuz çevreye sahip bir şekille çalıştıklarını görmeleri sağlanabilir. Böylece öğrenci bir eşkenar üçgenin alanı ve çevresi ile cebirsel genellemeler bularak bu konudaki bilgilerini fraktallar üzerinde yeniden sınayabilir. Bunun yanında bu sıra dışı durum karşısında matematiksel bilgilerini yeniden gözden geçirme imkânı bulabilir. Eğer programı hazırlayanlar öğrencilerin bu tür etkinlikleri yapmada yeterli seviyeye ulaşmadıklarını düşünüyorlarsa en azından her bir tekrarlama adımında kaç tane üçgenin oluştuğu ve elde edilen tekrarlama kuralına göre 20. adımda kaç yeni üçgenin oluşacağının tahmin edilmesine yönelik etkinliklere yer verilebilirdi. Böylece hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin fraktalları sadece Euclid geometrisinin elemanları kullanılarak oluşturulan ve matematik alt yapısı bulunmayan şekiller topluluğu olarak görmeleri engellenebilir. Bunun yanında ders kitabı ve çalışma kitaplarında yer alan bazı fraktal yapılar yanlış şekilde oluşturulmaktadırlar. Örneğin MEB (2008) İlköğretim 8. sınıf ders kitabı 16. sayfada yer alan 1. uygulamada (Şekil 1.1)



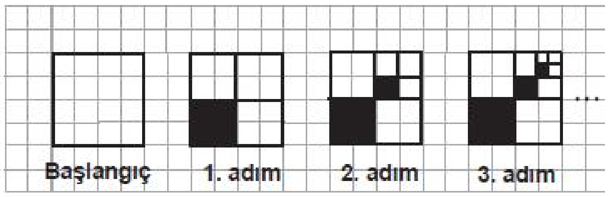
Şekil 1.1. Fraktal ağacın oluşum adımlarına yönelik ders kitabındaki soru

oluşan fraktal ağaçta 2. ve 3. tekrarlamada oluşan dal uzunlukları yanlış şekilde gösterilmektedir. Dikkat edilirse dal uzunlukları bir önceki adıma göre hep yarısı oranında küçülmektedir. Oysa verilen şekilde 2. ve 3. adımda dal uzunlukları değişmemektedir. Yine 8. sınıf matematik dersi öğrenci çalışma kitabı 10. sayfada yer alan fraktal modeli fraktalların temel özelliklerinden öz-benzerlik ve tekrarlamayı yansıtmamaktadır (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Fraktala yönelik 8. sınıf öğrenci çalışma kitabındaki soru

Buna karşın 2009 yılında yapılan 8. sınıf SBS sınavında aşağıda sorulan soru öğrencilerin hem fraktalların öz-benzerlik ve tekrarlama kurallarını kullanarak oluşan örüntüyü bulmalarına hem de örüntü içerisindeki matematiksel ilişkileri keşfetmelerine yöneliktir (Şekil 1.3).



Yukarıdaki şekilde oluşturulan fraktal modelinin 1. adımındaki boyalı bölgenin alanı 1 cm^2 dir. 10. adımda oluşan <u>en küçük</u> alana sahip karesel bölgenin bir kenarının uzunluğu kaç santimetredir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{9^2}$ C) $\frac{1}{2^9}$ D) $\frac{1}{2^{10}}$

Şekil 1.3. 8. sınıf SBS sınav sorusu

Bu durum hazırlanan ders kitapları ve öğretim programı ile SBS sınavının içeriğinin birbirine tam olarak uyuşmadığını da göstermektedir.

Fraktallara doğanın geometrisi denilmektedir (Mandelbrot, 1983; Naylor, 1999; Vacc, 1999; Naylor, 2005). Ancak matematik öğretim programımızda hem belirlenen kazanım kapsamında hem de ders kitabı ve çalışma kitabının içeriğinde doğal fraktal örneklerine yer verilmemiştir. Oysa eğrelti otları, nehir yatakları, ağaçlar vb. gibi Euclid geometrisinin elemanlarıyla kolayca tanımlanamayan birçok doğal nesne fraktal geometri ile kolayca tanımlanabilmektedir (Şekil 1.4).

Şekil 1.4. Doğal fraktal örnekleri

Yeni matematik öğretim programı öğrencinin yaşadığı çevresi ve günlük hayatı matematikle ilişkilendirmesini vurgulamaktadır. 8. sınıf matematik ders kitabında sadece görev alt başlığıyla “ *doğada yer alan fraktal örneklerini bulup sınıfta sergileyiniz”* ifadesi yer almaktadır. Fraktallar bu ilişkilendirmeyi yapabilecek önemli konulardan biri olmasına karşın öğretim programında buna yer verilmemesi önemli bir eksikliktir.

Örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanına eklenen fraktallar konusu bu haliyle hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin zihinlerinde bir soru işareti olarak kalacaktır. Bu nedenle fraktal ne demektir? Niçin öğretim programına eklendi? Sadece örüntülerin öğretim programına eklenmesi yeterli olmaz mıydı? Fraktallarla ne tür matematik işlemler yapılabilir? Fraktallar nasıl öğretilebilir? sorularının yanıtlanması önem taşımaktadır. Aynı zamanda 8. sınıf matematik öğretim programında belirlenen bu eksiklikler fraktal geometri konularının programa tam olarak entegre edilemediğini de göstermektedir. Bu bağlamda bu durum entegrasyon sürecine katkı sağlayacak ve fraktalların öğrenimi ve öğretimi sürecini yansıtacak alternatif bir öğretim programına ihtiyacın olduğunu işaret etmektedir.

2010 yılında yayınlanan ve 2010-2011 eğitim öğretim yılından itibaren uygulanmasına başlanan yeni 9-10. sınıf geometri öğretim programında fraktal geometri konularına yer verilmiştir. Ders kitaplarının henüz hazırlanamamış olması ne tür etkinliklere yer verileceği hakkında bir bilgiye ulaşmamızı engellemektedir. Ancak 9-10 geometri öğretim programı incelendiğinde 9. sınıfta fraktal kavramına II. Ünite “Çokgenler ve Düzlemde Kaplamalar” içerisinde “*üçgende benzerlik teoremlerini açıklar ve uygulamalar yapar”* kazanımı kapsamında yer verildiği görülmektedir(MEB, 2010). Programda hazırlanan örnek etkinlik incelendiğinde Sierpinski üçgeninin oluşturulmaya çalışıldığı, içerisinde oluşan örüntülere göre çevresi ve alanıyla ilgili işlemlere yer verildiği görülmektedir. 10. sınıf geometri öğretim programında ise VI. Ünite “Dönüşümler Geometrisi” içerisinde “*doğru parçaları ile fraktal oluşturur, açıklar ve belirli adımdaki* *fraktalın uzunluğunu hesaplar.”* ve *“üçgen ve üçgensel bölgelerle fraktal oluşturur, açıklar ve belirli adımdaki fraktalın görüntüsünün alanını hesaplar.”* şeklinde iki kazanım kapsamında fraktallara yer verilmiştir (MEB, 2010). Öğretim programındaki örnek etkinlikler incelendiğinde sadece dönüşümlerle fraktal yapıların oluşturulmaya çalışıldığı görülmüştür. Ayrıca bu yapılar oluşturulurken bilgisayar programlarının kullanılmasına yer verilmediği de dikkat çekmektedir. Bu haliyle hazırlanan etkinlikler öğrencilerin fraktal yapıları kendilerinin oluşturmalarından çok sadece oluşum adımlarını izleyecekleri resimleri içermektedir. 11. ve 12. sınıf geometri öğretim programı henüz hazırlanmadığı için bu programlarda da fraktal geometri kavramlarına yer verilip verilmeyeceği henüz bilinmemektedir. Literatürde fraktal geometri kavramlarının mevcut öğretim programlarına entegrasyonu çalışmaları incelendiğinde sadece geometri kapsamında değil, tüm matematik öğretim programı kapsamında entegrasyonun yapılmaya çalışıldığı görülmektedir. Bu durum ülkemizde bu konunun entegrasyonunun tam olarak yapılamadığını göstermektedir. Çünkü fraktal geometri cebir öğrenme alanıyla oldukça ilişkilidir. Karmaşık sayılarda Mandelbrot ve Julia kümelerinin oluşturulması ve özelliklerinin incelenmesi ve logaritma fonksiyonu yardımıyla fraktal boyutun hesaplanması gibi birçok konu içerisine fraktal kavramları rahatlıkla entegre edilebilir. Fraktallar konusunun hem matematik hem de matematik eğitiminde yeni bir konu olması matematik eğitimcilerinin bu konuya mevcut müfredatlarda yer vermelerinde tereddüt yaşamalarına neden olmaktadır. Çünkü fraktal konularının öğreniminde ve öğretiminde ne tür durumlarla karşılaşabileceklerine yönelik bilgilere tam olarak sahip değildirler. Bu durum fraktal konularının öğretimine yönelik bir alternatif öğretim programının geliştirilmesini zorunlu kılmaktadır.

Fraktalların matematik öğretim programına katılmasının gerekçeleri ve ülkemizde fraktalların matematik öğretim programlarına eklenmelerinde belirlenen eksiklikler doğrultusunda hazırlanacak olan bir öğretim programı ortaöğretim geometri programına entegresi başlanan fraktal geometri konuları için de bir yol haritası niteliği taşıyacaktır. Bu tür bir programın eğitim fakültelerinin matematik öğretmenliği bölümlerinde uygulanması ve değerlendirilmesi hem öğretmen adaylarının konu hakkında bilgilendirilmeleri hem de hazırlanan programın öğretmen adayları üzerindeki etkilerinin belirlenmesi açısından önemlidir. Çünkü fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarına entegre edilmesi çalışmaları 1990’lı yıllardan itibaren başlamasına karşın öğrenciler tarafından bu konuların anlaşılır olup olmadığı, öğrencilerin bu konuları nasıl öğrendikleri, ne tür anlamalar geliştirdikleri ve bu geometriye yönelik düşünceleri üzerinde literatürde çok az çalışmaya rastlanmaktadır (Bowers, 1992; Langille, 1996; Komorek vd., 2001; Hughes, 2003). Ayrıca buradan elde edilecek sonuçlar ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarındaki eksikliklerin giderilmesi içinde önemli ipuçları verecektir.

1.3. Araştırmanın Problemi

Yaşadığımız çevreye bakıldığında doğadaki varlıkların, olayların ve nesnelerin şekillerinin de hiç de mükemmel olmadıklarının; aksine karmaşık, düzensiz ve girintili çıkıntılı bir yapıya sahip oldukları görülür. Bu girintili, çıkıntılı ve düzensiz şekiller Euclid geometrisinde konu edilmemektedir. Bu durum öğrencilerin matematik ile doğayı ilişkilendirmelerinde ve çevrelerini anlamalarında problemlere neden olmaktadır (Bremer, 1997). Bunun yanında matematikçilerin amaçlarından biri de matematiği kullanarak evrenin bir modelini oluşturmaktır (Yıldırım, 2004). Evren hakkındaki bilgi ve tecrübelerin çok fazla artması Euclid geometrisinin tek başına bu amacı gerçekleştirmesinde yetersiz kalmasına neden olmaktadır. Günümüzde matematik alanındaki yeni yaklaşımlardan biri olan fraktal geometri öğrenciye fiziksel dünyasını tanımasında, onu anlamlaştırmasında, düzensiz ve karmaşık olarak görünen doğadaki varlıkların şekillerini oluşturmasında Euclid geometrisinden daha fazla fırsat sunmaktadır (Baki, 2001). Bunun yanında fraktal geometri öğrencilerin birçok geleneksel matematik konusunun birbirleriyle olan ilişkilerini görmelerinde ve bu konuları yeni bir yaklaşımla incelemelerinde etkilidir (Lornell ve Westerberg, 1999; Fraboni ve Moller, 2008). Ayrıca fraktal geometri matematik öğretim programlarının hareketlenmesine ve öğrenciler tarafından matematiğin canlı, yaşayan ve değişen bir yapısı olduğunun fark edilmesine yardımcı olur (Goldenberg, 1991; Langille, 1996). Bunun nedeni fraktal geometrideki kavramların görsel ve sezgisel; şekillerin estetik bir çekiciliğe sahip ve uygulama yapmaya imkân veren ve içerdiği matematiğin kullanışlı ve yapılabilir olmasıdır (Devaney, 1990). Bu ve benzeri özellikleri nedeniyle fraktal geometri konularının mevcut ilk ve ortaöğretim matematik ve geometri öğretim programlarına entegrasyonu çalışmaları 1990’lı yıllardan itibaren başlamıştır. Yapılan ilk çalışmaların bir fraktal özelliğini keşfetmeye ya da bir fraktalı tanımaya yönelik etkinlikler geliştirme şeklinde olduğu görülmektedir. Örneğin Kern ve Mauk (1990) fraktal yapıların Logo ile oluşturulabileceğini göstermekte ve bu konuda örnek etkinliklere yer vermektedir. Benzer şekilde Lornell ve Westerberg (1999) ise ortaöğretim geometri derslerine fraktalları entegre ettiklerini ve bu entegrasyonda tekrarlama, karmaşıklık ve öz-benzerlik özellikleri kapsamında etkinlikler geliştirdiklerini belirtmektedir. Bunun yanında fraktal konusunun entegrasyonu sürecinde yapılan diğer çalışmaların ise örnek üniteler geliştirmek şeklinde olduğu belirlenmiştir. Örneğin, Bowers (1991) öz-benzerlik ve fraktal boyut konularına göre hazırladığı bir üniteye göre bu konuların öğrenilebilirliği ve öğretilebilirliğini incelemiştir. Benzer şekilde Langille (1996) ise öz-benzerlik, tekrarlama ve fraktal boyut konularına yönelik bir ünite geliştirmiş ve geliştirdiği ünitenin geçerliliğini irdelemiştir. Tüm bu çalışmalar sonucunda son yıllarda mevcut matematik öğretim programlarında da fraktal konularına rastlanmaya başlanmıştır. Örneğin ülkemizde 2005 yılından itibaren öncellikle ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programında ve 2010-2011 eğitim öğretim yılından itibaren ise 9. ve 10. sınıf matematik öğretim programlarında fraktallar konusuna yer verilmektedir. New Jersey matematik öğretim programlarında (5-12) ise 2009 yılından itibaren fraktal geometri konularına rastlanmaktadır. Bu durum kendisini ders kitaplarında da göstermektedir. Birçok matematik ve geometri ders kitabında fraktal etkinliklerine rastlanmaktadır. Örneğin Kanada'da okutulan Serra (2008) "Discovering geometry" isimli ders kitabında bazı fraktal etkinliklerine rastlandığı ve bu etkinliklerin fraktallardaki örüntüleri keşfetmeye yönelik olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde Murdock vd. (2004) "Discovering Advance Algebra" isimli ders kitabında da öz-benzerlik ve tekrarlama ile Mandelbrot kümelerinin öğretimine yönelik etkinlik örneklerine ve açıklamalara yer verildiği tespit edilmiştir. Ülkemizde ise MEB (2008) ders kitabında öz-benzerlik kavramı çerçevesinde fraktalların oluşturulmasına yönelik etkinliklere yer verilmektedir. Ancak fraktalların matematik ve geometri öğretim programlarına entegrasyonu amacıyla yapılan bu çalışmaların daha çok fraktal konusunun öğretimine yönelik etkinlikler geliştirme ya da birkaç fraktal konusunun öğretimine yönelik ünite tasarımları oluşturma şeklinde olduğu söylenebilir. Bu bağlamda hem yurt dışında hem de yurt içinde ilköğretim ve ortaöğretim düzeyinde matematik ve geometri öğretim programları içerisinde toplu bir fraktal geometri konusunun öğretimine yönelik henüz bir çalışmanın yapılmadığı görülmektedir.

Öğretim programlarına entegre edilen bir konunun öğretiminin başarılı olması için konunun öğretimine yönelik yapılan çalışmaların değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda matematik öğretim programlarında yeni yeni yer almaya başlayan fraktalların öğretimine yönelik yapılan çalışmaların değerlendirilmesi bu konunun ileriki dönemlerde daha etkili olarak öğretiminin yapılmasına katkı sağlayacaktır. Ancak fraktallar konusunun matematiğin yeni bir alanı olması ve matematik ve geometri öğretim programlarında yeni

yeni yer almaya başlaması nedeniyle hem yurtdışında hem de ülkemizde fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanan öğretim programlarının değerlendirilmesine yönelik çalışmalara neredeyse hiç rastlanmamaktadır. Literatürde sadece Bowers (1992), Langille (1996), Komorek vd. (2001) ve Hughes'in (2003) çalışmaları fraktal geometri konularının öğrenilebilirliği ve öğretimine yönelik ipuçları sunmaktadır. Bu bağlamda fraktallar konusunun nasıl öğrenildiği ve ne tür ortamlarda, ne tür materyal ve yöntemlerin bu öğrenmelerin oluşmasını sağladığı sorularının fraktalların matematik ve geometri öğretim programlarına entegrasyonu sürecinin başarılı olması için cevaplanması gereklidir. Bu soruların cevaplanmasında fraktalların öğretimine yönelik hazırlanan toplu bir fraktal geometri öğretim programının yeterliliği belirlenmesi önemlidir.

Bu bağlamda araştırmanın temel problemini; " Ortaöğretim düzeyi için tasarlanan fraktal geometri öğretim programı fraktalların öğretimi için yeterli midir? soru cümlesi oluşturmaktadır. Bu problem doğrultusunda aşağıdaki sorulara cevap aranacaktır:

1. Hazırlanan fraktal geometri öğretim programı fraktallar konusunun öğrenilmesinde ne kadar yeterlidir?

   a) Fraktal geometri öğretim programının kazanımlarını edinmede öğrenciler ne kadar başarılı olmuştur?
   b) Fraktal geometri programının uygulama sürecinde hazırlanan materyaller, kullanılan yöntem ve teknikler öğrencilerin öğrenme sürecini nasıl etkilemiştir?

2. Öğretmen ve öğrencilerin fraktal geometri öğretim programının uygulanması sürecinde yaşadıkları deneyimleri nelerdir?

1.4. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın temel amacı, ortaöğretim düzeyi için bir fraktal geometri öğretim programını tasarlamak ve bu programın yeterliliğini değerlendirmektir. Bu bağlamda araştırmada ortaöğretim düzeyine yönelik bir fraktal geometri programı hazırlanmış ve bu programın fraktal konularının öğrenilebilirliği ve öğretilebilirliğine yönelik bir değerlendirilmesi yapılmıştır. Hazırlanan fraktal geometri programının öğrenilebilirlik boyutundan değerlendirilmesinde programın belirlenen kazanımlarından hangilerinin kazanılırken hangilerinin kazanılmadığı ve bunun nedenleri ile programın uygulama sürecinde öğrencilerin yaşadığı deneyimler belirlenmiştir. Hazırlanan programın öğretilebilirlik boyutunda ise fraktalların öğretiminde kullanılan materyal ve metotlardan hangilerinin başarılı olduğu ve dersin öğretmeninin öğretim sürecinde yaşadığı deneyimleri detaylı bir şekilde irdelenmiştir.

Literatürde fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarında yer almaya başladığı görülmesine karşın bu konuların öğrenciler üzerindeki etkileri, hangi konuların nasıl öğrenilebildiği ve ne tür ortamların öğretimde etkili olduğuna yönelik çalışmalara neredeyse hiç rastlanmamaktadır. Yapılan birkaç çalışmanın ise ya kısa süreli ya da konu temelli olduğu görülmektedir. Bu bağlamda bütün bir fraktal geometri programının öğrenilebilirliği ve öğretilebilirliğinin gerçek sınıf ortamında derinlemesine incelenmesi gerekmektedir. Böylece ülkemizde de entegrasyon çalışmalarına başlanan fraktal geometri konularının öğretimine yönelik bir katkı sağlanmaya çalışılmıştır.

1.5. Araştırmanın Önemi

Yaşadığımız dünyayı anlayabilmek ve onu mevcut matematik bilgilerimizle ilişkilendirmek için sadece Euclid geometrisinin yeterli olmadığı yapılan çalışmalarda ortaya konulmaktadır (Jürgens vd, 1990; Baki, 2001; Naylor, 1999; Vacc, 1999, Mandelbrot, 1983). Einstein Euclid geometrisinin evrenin modelini oluşturmada ve evreni tanımlamada tek başına yeterli olmadığını genel görecelik kuramı ile ilgili çalışmasında Riemann geometrisini kullanarak göstermektedir. Bunun yanında çevremize baktığımızda gördüğümüz nesnelerin hiç de Euclid geometrisindeki gibi mükemmel bir düzgünlüğe sahip olmadıklarını görürüz. Doğadaki nesnelerin şekilleri daha çok karmaşık, girintili çıkıntılı ve bir düzensizliğe sahiptir. Bu nedenlerle okullarımızda Euclid geometrisi dışındaki geometrilere yer vererek, Euclid geometrisinin bu geometrilerden sadece biri olduğu fikrinin öğrenciler tarafından fark edilmesi gerekmektedir. Bunun başarılabilmesi için okullarımızda öğrencilerin Euclid geometrisi dışındaki geometrilerle basit anlamda karşılaştırılmaları ve bu geometrilerin temel özelliklerini öğrenmeleri önemlidir. Ülkemizde öğretim programlarında yapılan değişiklikler kapsamında 2005 yılında 8. sınıf matematik öğretim programında ve 2010 yılında ise 9. ve 10. sınıf geometri öğretim programlarında fraktal geometri konularına yer verilmiştir. Ancak ders kitaplarında ve öğretim programlarında belirlenen eksiklikler bu konuların öğretim programlarına tam olarak entegrasyonunun sağlanamadığını göstermektedir. Bu bağlamda bu entegrasyonun sürecinin başarılı olmasına katkı sağlayacak ve fraktal geometri konularının öğrenilmesi ve öğretilmesi sürecinde karşılaşılacak durumları yansıtacak yeni müfredatlar tasarlanmalı ve uygulanmalıdır.

Ülkemizde hazırlanan ders kitaplarında fraktalların öğretiminde hem içerik hem de bilimsel bilgi bağlamında eksikliklerin olduğu söylenebilir. Bu durum fraktalların öğrenilebilirliği için önemli bir engeli ortaya çıkarmaktadır. Çalışma sonucunda geliştirilecek olan fraktal geometri öğretim programında yer alan etkinlik ve çalışma yapraklarıyla bu eksikliklerin giderilmesine ışık tutacağı düşünülmektedir.

Fraktal geometri konularının öğretimine yönelik yapılan çalışmaların (Thomas, 1989; Bannon, 1990; Barton, 1990; Cibes, 1990; Kern ve Mauk, 1990; Camp, 1991; Coes, 1993; Simmt ve Davis, 1998; Naylor, 1999; Bolte, 2002; Ford, 2004; Devaney, 2004; Adams ve Aslan-Tutak, 2006; Fraboni, 2008) daha çok fraktalların şekillerini oluşturma ve özelliklerini inceleme şeklinde etkinlik geliştirme tarzında olduğu belirlenmiştir. Ayrıca fraktalların öğretimine yönelik temel özellikleri kapsamında hazırlanan bir öğretim programına ise henüz rastlanmamaktadır. Bunun yanında öğrencilerin fraktalları nasıl öğrendikleri, bu geometriye karşı tepkilerinin ne olduğu ve ne tür ortamların bu öğrenmelerin oluşmasına katkı sağladığı yönünde çalışmalara ise rastlamak neredeyse imkânsızdır (Langille, 1996). Bu bağlamda yapılacak çalışma ile ortaya konulacak olan sonuçlar matematik eğitimi için yeni olacaktır. Ayrıca bu çalışma sonunda elde edilecek sonuçlar hem öğrencilerin fraktal geometri kavramlarına yönelik ne tür anlamalar geliştirdiklerinin belirlenmesinde hem de bu anlamaları geliştirmede ne tür öğrenme süreçlerinden geçtiklerinin tespitinde önem taşımaktadır.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Fraktal geometri öğretim programı ortaöğretim matematik ve geometri öğretim programları kapsamında hazırlanmış olduğundan 12. sınıf seviyesiyle sınırlandırılmıştır. Böylece bu programa katılan öğrencilerin temel matematik bilgilerinin yanında benzerlik, seriler, limit, fonksiyonlar ve logaritma gibi konularda da ön bilgilerinin olması gerekmektedir. Bunun yanında fraktal geometri öğretim programı temel fraktal özellikleri tekrarlama, öz-benzerlik ve fraktal boyut konularıyla Mandelbrot ve Julia kümeleriyle kaos oyunu konularıyla sınırlı tutulmuştur. Kaos teori ve tekrarlamalı fonksiyonlar sistemi gibi konulara ise kapsamı genişletip çalışmanın odağından uzaklaşılabileceği için yer verilmemiştir.

Ortaöğretim matematik geometri öğretim programlarımızda fraktal geometri konuları henüz mevcut olmaması nedeniyle hazırlanan fraktal geometri öğretim programının liselerde uygulaması mümkün olmadığından çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1. sınıfta okuyan öğretmen adaylarıyla sınırlandırılmıştır.

1.7. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmanın varsayımları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

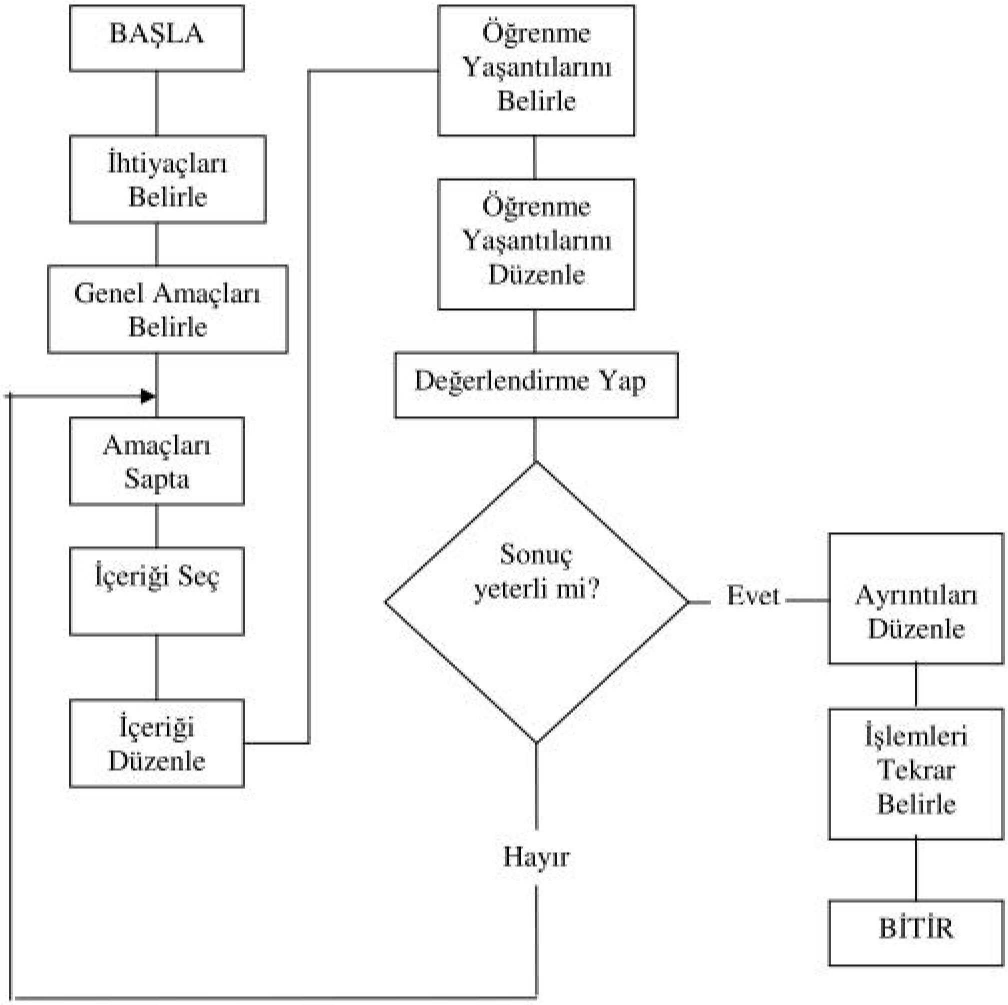
1. Yazılı sınav ve mülakat yapılan öğrencilerin gerçek düşüncelerini yansıttıkları,
2. Öğretmenin düşüncelerinde objektif olduğu.

1.8. Öğretim Programlarının Geliştirilmesi ve Değerlendirilmesi

Dünyada bilginin önemi hızla artmakta, buna bağlı olarak “bilgi” kavramı ve “bilim” anlayışı da değişmekte, teknoloji ilerlemekte, demokrasi ve yönetim kavramları farklılaşmakta, tüm bu değişimlere ayak uydurabilmek için toplumların bireylerinden beklediği beceriler de değişmektedir (MEB, 2007). Bu değişimler öğretim programlarının içerik ve sunumunu da etkilemektedir. Bu bağlamda bu değişme ve gelişmelere paralel olarak öğretim programlarının değiştirilmesi gerekir. Bu gelişmeleri sistemli bir biçimde çocuklara ve gençlere aktarmak, onların bu gelişmelere uyumlarını sağlamak, onları becerikli bir vatandaş olarak yetiştirmek, var olan uygarlığa biraz daha katkıda bulunmak, ancak programların geliştirilmesi ile mümkündür (Karatepe vd. 2004: 328).

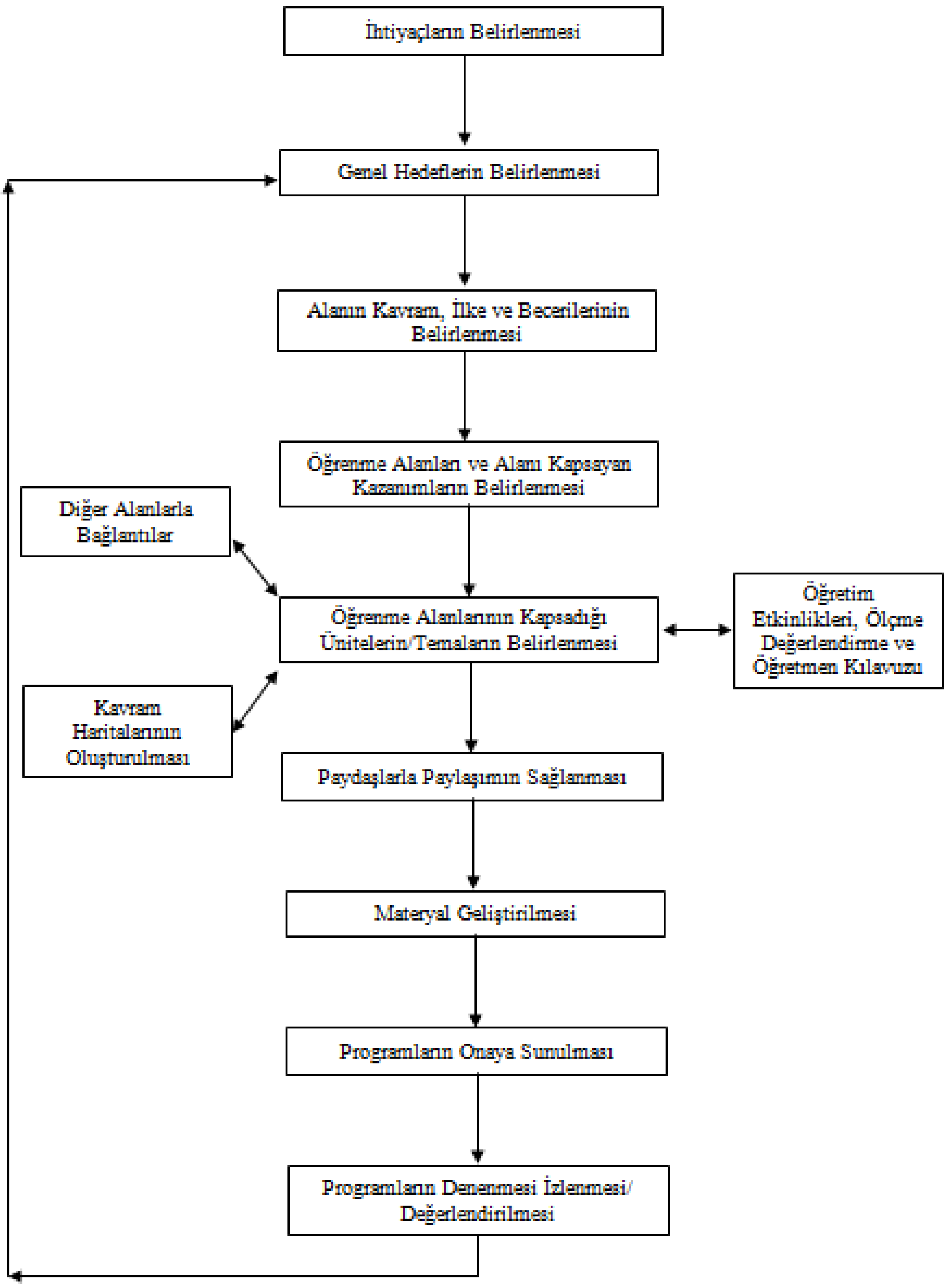
Öğretim programı, bir dersin özel amaçlarına ulaşmak için yararlanılabilecek öğrenme etkinliklerini planlayan, düzenleyen; bu etkinliklerle ilgili materyal ve kaynakları içeren yazılı kaynak olarak tanımlanmaktadır (Baki, 2008). Kısaca eğitim sürecinin ayrıntılı şekilde planlanması, öğretim programını oluşturur. Bir öğretim programının amaçlar, içerik, öğretim süreci ile ölçme ve değerlendirme olmak üzere dört temel öğesi bulunmaktadır (Demirel, 2004; Baki, 2008). İyi bir öğretim programı hazırlanması bu öğelerin etkin bir şekilde tamamlanmasını gerektirir. Bu nedenle program geliştirmede istenilen sonuçlara ulaşmak için programın amaç, içerik, öğretme-öğrenme süreçleri ve değerlendirme alanlarında analizlerin yapılması gerekmektedir (Uçan 1989: 59). Erden (1993: 3) program geliştirme sürecini, öğretim programının tasarlanması, uygulanması, değerlendirilmesi ve değerlendirme sonucu elde edilen veriler doğrultusunda yeniden düzenlemesi olarak belirtmektedir. Bir programın belli özelliklere sahip olacak şekilde planlanması, niteliklerinin belirlenmesi, seçilmesi ve düzenlenmesi farklı program geliştirme modellerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Program tasarımlarını geliştirme çalışmalarında konu merkezli, öğrenen merkezli ve sorun merkezli program tasarımları olmak üzere üç temel yaklaşım göz önüne alınmaktadır (Demirel, 2004). Konu alanını merkeze alan yaklaşıma göre eğitim programı, her bir konu alanının kendine özgü yapısı ile ele alınmasıyla düzenlenir. Öğrenen merkezli tasarımlarda öğrenci sürece girdikten sonra ilgi ve ihtiyaçlarına göre öğrenme etkinlikleri belirlenmektedir. Sorun merkezli program tasarımı ise konu alanı ve öğrenci merkezli tasarımın yetersizliklerini ortadan kaldırmak amacıyla ortaya çıkmıştır. Sorun merkezli tasarımlarda konular arasında bağ kurulması ve yaparak yaşayarak öğrenmenin sağlanması esas alınır.

Program tasarısının oluşturulması, farklı program geliştirme modellerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Program geliştirme modeli, program geliştirme sürecinde nelerin, nerede, nasıl ve ne zaman yapılacağını gösteren plan olarak tanımlanabilir. Eğitimde en çok kullanılan program geliştirme modellerinden birinin “Rasyonel Planlama Modeli” olduğu söylenebilir. Bu model Taba-Tyler yaklaşımıyla da uyum göstermektedir (Demirel, 2004). Taba-Tyler modelinin ilk aşamasını ihtiyaçlar oluşturmaktadır. Daha sonra amaçlar belirlenmekte, içerik seçimi ile içerik düzenlemesi yapılmakta, öğrenme yaşantıları belirlenip düzenlenmekte ve yapılan değerlendirme sonucuna göre düzeltmeler gerçekleştirilmektedir. Taba-Tyler program geliştirme modelinin gelişim aşamaları Şekil 1.5’te gösterilmiştir (Demirel, 2004).



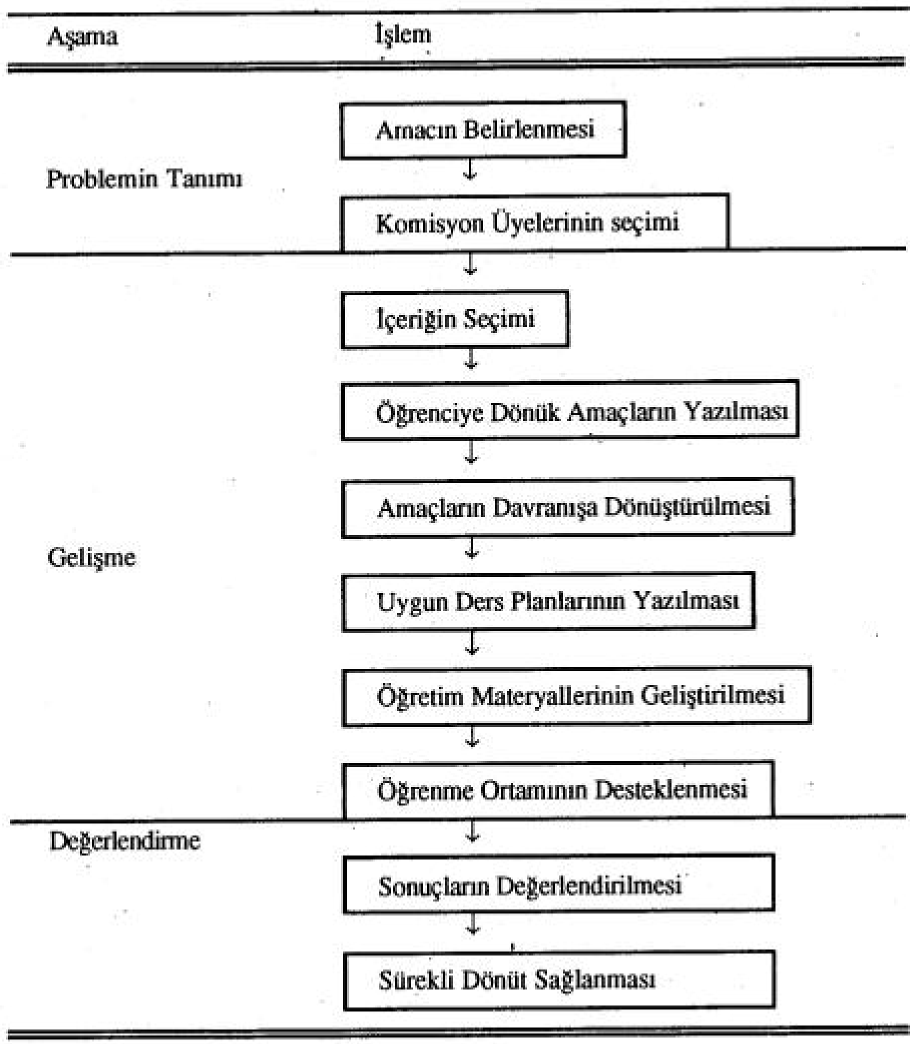
Şekil 1.5. Taba-Tyler'ın program geliştirme modeli

Ülkemizde yapılan program geliştirme yaklaşımlarında da Taba-Tyler modelinin etkilerinin olduğu görülmektedir. Bu bağlamda 2004 yılında MEB yeni bir program geliştirme modeli hazırlanmıştır. Hazırlanan bu modelde ihtiyaçlar belirlendikten sonra alanın kavram ilke ve becerileri, kazanımları ve öğretim stratejileri belirlenmekte ve tüm bunlar ünite planlarının hazırlanmasında göz önüne alınmaktadır. Daha sonra öğretim materyalleri belirlenmekte ve hazırlanan taslak program uygulanarak elde edilen sonuçlara göre yeniden düzenlenmektedir. MEB program geliştirme modelinin aşamaları Şekil 1.6'da verilmiştir (Demirel, 2004).



Şekil 1.6. MEB yeni program geliştirme modeli

Yukarıda açıklanan program geliştirme modellerinin yanında farklı program geliştirme modelleri de ortaya çıkmıştır. Bu modellerden bir diğeri ise Wulf ve Schave (1984) tarafından geliştirilen sistem yaklaşımı modelidir. Sistem yaklaşımına göre oluşturulan program geliştirme modeli üç aşamadan oluşmaktadır. Modelin ilk aşamasında problemin tanımlanması ve ihtiyaç belirlenmesi yapılmaktadır. Modelin ikinci aşamasında öncelikle programın içeriği belirlenmekte ve daha sonra öğrenciye dönük amaçlar saptanmaktadır. Amaçlar davranış cinsinden ifade edilmekte ve daha sonra bu davranışları kazandırıcı öğretim materyalleri ve uygun öğrenme ortamları tasarlanmaktadır. Modelin son aşamasında ise değerlendirme ve dönüt sistemi üzerinde durulmaktadır. Sistem yaklaşımı modelinin aşamaları Şekil 1.7'de gösterilmiştir (Demirel, 2004).



Şekil 1.7. Sistem yaklaşımına göre program geliştirme modeli

Bir programın yeterli hale gelmesi için öncelikle bu programın etkiliğinin incelenmesini gerekir (Varış 1988). Öğretim programlarının iyi tasarlanması ve uygulanması ne kadar önemli ise, programın uygun yöntemlerle değerlendirilip, değerlendirme sonuçlarının program tasarımına yansıtılması da bir o kadar önemlidir.

Programın etkililiğinin sorgulanması ve değerlendirilmesi, programın geliştirilmesi için başlangıç noktasıdır (Özdaş vd. 2005: 241). Öğretim programlarının biri tasarlanan diğeri gerçekleşen olmak üzere iki önemli boyutu vardır (Büyükkaragöz, 1995). Tasarlanan programla uygulanan program arasında uyumsuzlukların ve çelişkilerin olmamasına dikkat edilmelidir. Bu nedenle öğretim programının uygulamada ortaya çıkabilecek olumsuzluklara yer vermeyecek şekilde düzenlenmesi gerekmektedir. Bunun için uygulama sürecinde ve sonunda yapılan değerlendirme faaliyetleri ile tasarlanan öğretim programının eksikleri belirlenir, giderilir ve yeni baştan düzenlenir. Böylece her değerlendirme sonunda yeniden düzenlenmesi tasarlanan programla uygulanan program arasındaki farkın azalmasını sağlar.

Program geliştirme çalışmalarında geliştirilen programın yeterliliğine karar vermek için öncelikle programın değerlendirilmesi gerekmektedir. Program değerlendirme, bir öğretim programının uygunluğuna ve nasıl geliştirileceğine sistematik olarak karar verme süreci olarak tanımlanmaktadır (Sanders ve Sullins, 2006). Program değerlendirme, programa dayalı eğitim kaynaklarını kabul etme, değiştirme ya da ortadan kaldırma kararının verilebileceği bilgileri içermektedir (Demirel, 2004). Değerlendirme sonuçları programın devam edeceği, gözden geçirileceği ya da yeni bir aşamaya geçilmesi konusunda bilgiler vermektedir. Bir eğitim programının başarılı olabilmesi için tüm öğrencilerin programda amaçlanan hedeflere ulaşmış olması gerekir, ancak bu her zaman gerçekleşmeyebilir. Bu nedenle, programın uygulanması sonucunda, yetersiz kalan ya da işlemeyen öğelerin olup olmadığı; varsa aksaklıkların programın hangi öğelerinden kaynaklandığını belirlemek ve gerekli düzeltmeleri yapmak amacıyla programın değerlendirilmesi gerekmektedir (Demirel, 2004). Literatürde biçimlendirici (formative) ve düzey belirleyici (summative) olmak üzere yaygın olarak iki tür program değerlendirmeden bahsedilmektedir (Scriven, 1967; Fitzpatrick, Sanders ve Worthen, 2004; Sanders ve Sullins, 2006). Biçimlendirici değerlendirme programın uygulanma sürecini değerlendirirken, düzey belirleyici değerlendirme program sonunda öğrencilerin kazanılmış davranış, özellik ve becerilerini ölçmeye yöneliktir (Fitzpatrick, Sanders ve Worthen, 2004; Sanders ve Sullins, 2006; Jason, 2008). Bu nedenle biçimlendirici değerlendirme öğretim programına yönelik sürekli dönüt sağlayarak iyileştirici önlemlerin alınmasını sağlarken, düzey belirleyici değerlendirme öğretim programının öğrencilere istenen davranışları kazandırma açısından programın yeterli olup olmadığı hakkında bir yargıya varılmasını sağlamaktadır.

1.9. Fraktal geometri nedir? Nasıl doğmuştur?

Klasik matematik düzgün geometrik yapıları olan Euclid geometrisi tarafından temsil edilmekte ve Newton'un dinamikleriyle gelişmektedir (Bremer, 1997). Euclid geometrisinin geleneksel şekilleri iki bin yıldan fazladır bilinmektedir. Euclid geometrisinin iki bin yıllık geçmişinde süreksizlik, gürültü patlamaları, Cantor tozları gibi fenomenlerin yeri olmamıştır (Gleick, 2005). Klasik geometrideki şekiller belli bir büyüklüğe ve orana sahip, basit cebirsel formüllerle ifade edilebilen insan ürünü nesnelerdir (Barnsley, 1988; Mandelbrot, 1983). Euclid geometrisinde bir denklemin çözümü için denklemi sağlayan sayıların kümesi aranır ve bulunan çözüm bir çember, parabol, elips ya da üçgen gibi bir şekille biçimlenir. Bu nesneler gerçeğin güçlü bir şekilde soyutlaştırılmasından meydana gelmiş ve Platon felsefesine ilham kaynağı olmuştur (Gleick, 2005). Özellikle 19. yy.'da Euclid ve Newton'un şekillerine uygun olmayan matematiksel yapıların keşfi matematikte köklü değişikliklerin olmasına neden olmuştur. Matematikteki bu değişim 1870'li yıllarda diferansiyellenmeyen ancak sürekli eğriler ile boyut arasındaki ilişkiler üzerine yapılan çalışmalar sonucu Weierstrass fonksiyonunun bulunmasıyla başlamakta ve 1920 yılında Cantor kümesi, Peano eğrisi, Koch eğrisi ve Sierpinski üçgeninin keşfine kadar sürmektedir. Weierstrass ve Riemann sınırlı noktaların bir sonlu sayısı hariç sürekli fonksiyonların her zaman sıfırdan farklı sonlu bir türevi olduğunu göstermişlerdir (Bowers, 1991). Buna karşın Riemann elde ettiği bu sonucun karşıt örneğini 1861'de elde etmiştir. Karşılaştığı karşıt örnek $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Sin\pi p^2 x}{\pi p^2}$ fonksiyonudur. Ancak bu fonksiyonla ilgili yapmış olduğu çalışmalar günümüze ulaşmamıştır. 1872'de Weierstrass $\sum b^n Cos(a^n \pi x)$ toplamının x'in herhangi bir değeri için (sonlu ya da sonsuz) bir türeve sahip olmadığını göstererek diferansiyellenemeyen sürekli eğrilerle ilgili bir karşıt örnekle karşılaşmıştır (burada a pozitif bir tek sayı, $0 < b < 1$ ve $ab > 1 + 3\pi/2$ dir). Bolzano ve von Koch'un çalışmaları Riemann ve Weierstrass'ın çalışmalarının geometrik olarak yorumlanması şeklinde kabul edilebilir. Bolzano ilk olarak türevi olmayan sürekli bir eğri geliştirmiştir. Geliştirdiği eğrinin oluşum süreci bir çokgensel doğrunun inşasını içermekteydi; çokgensel doğrular her bir adımda yeni çokgensel doğrular tarafından oluşturulmakta böylece sürekli gelişen bir çokgensel doğru elde edilmekteydi. Benzer şekilde Von Koch'da Weirstrass'ın çalışmalarını daha da görselleştirmiştir. Koch eğrisi eğimi olmayan fakat sürekli bir eğrinin, yani köşe noktalarından oluşan bir eğrinin olabileceğini gösteren sıra dışı bir yapıdır. 1883 yılında Cantor hiçbir yerde yoğun olmayan mükemmel kümeler üzerine yaptığı çalışmaları sonucunda bugün Cantor kümesi olarak bildiğimiz ve matematiğin pek çok alanında özellikle dinamik sistemler ve Julia kümeleri için bir modelin doğmasını sağlamıştır. Böylece ilk fraktal yapılar Riemann ve Weierstrass'ın analitik çalışmaları, Bolzano ve von Koch'un geometri çalışmaları ile Cantor, Julia ve Fatou'nun teorilerinin sonucunda gelişmiştir. Oluşan fraktal yapılar Euclid geometrisindeki şekiller gibi belli bir büyüklüğe ya da orana sahip değildirler, doğal nesnelerin özelliklerine benzemektedirler ve çoğunlukla bir tekrarlama kuralına sahip algoritmalar tarafından oluşturulmaktadırlar (Jurgens vd., 1990; Gleick, 2005; Peitgen vd., 2004). 1870-1920 arasında yaşanan bu gelişmeler matematik dünyasındaki birçok kalıplaşmış yapıyı derinden sarsmıştır. Alışılagelmişin dışında özelliklere sahip olan fraktal yapılar matematikte bilinen birçok kavramın yeniden ele alınmasını zorunlu kılmaktaydı. Ayrıca bu yeni yapıların görselleştirilmesinin çok zor oluşu onların altında yatan matematiğin keşfedilmesini zorlaştırmaktaydı. Bu nedenle bu dönemde bulunan fraktal yapılara birer “canavar” ya da “patolojik vaka” denilmiştir (Peitgen vd., 2004).

Yaklaşık elli yıllık bir aradan sonra 1970'li yıllarda Benoit Mandelbrot bilgisayar teknolojisini kullanarak bu sıra dışı yapıları yeniden ele almış ve fraktal geometrinin ortaya çıkmasına ve popülerlik kazanmasına yol açmıştır. Fraktallar üzerine literatürde uzlaşılan genel bir tanım bulunmamaktadır (Debnath, 2006). Mandelbrot (1983) ilk olarak fraktalları “Hausdorff-Besicovitch boyutu topolojik boyutunu geçen kümelere fraktal denir” şeklinde tanımlamıştır. Bu tanım birçok fraktal yapıyı dışarıda bırakmasına karşın birçok araştırmacıyı matematiksel olarak fraktalların ne olduğunu keşfetmeye yöneltmiştir. Barnsley (1988) fraktalları “büzülme dönüşümlerinin sabit noktasına bir deterministik fraktal denir” şeklinde tanımlamaktadır. Barnsley'in tanımı göz önüne alındığında tüm fraktallar için değil de sadece deterministik (kurallı) fraktallar için bir tanım yaptığı görülmektedir. Falconer (2003) ise bir yapıya fraktal dememiz için aşağıdaki şartları göz önüne almamız gerektiğini ifade etmektedir:

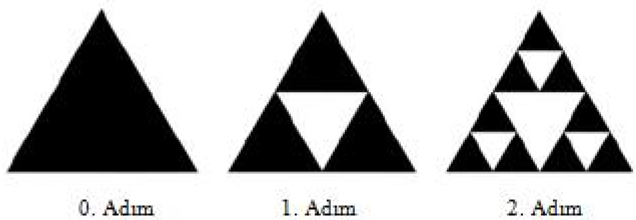
- Fraktal şekil mükemmel bir yapıya sahiptir,
- Geleneksel Euclid geometri diliyle tanımlanamayacak kadar düzensizdir,
- Fraktal şekil öz-benzerliğe sahiptir. Bu öz-benzerlik çok kesin olabileceği gibi yaklaşıkta olabilir,
- Genellikle bir fraktalın boyutu kesirlidir,

• Fraktal şekil basit bir tekrarlama kuralıyla elde edilebilir.

Falconer'in bu açıklamaları da sadece Euclid geometrisinin şekilleri kullanılarak oluşturulan fraktalları içermektedir. Bu tanımların dışında "Fraktallar karmaşık, düzensiz ve doğadaki nesnelerin şekillerinin taklididirler" (Devaney, 1990; Jurgens vd., 1990); "Fraktallar boyutu kesirli olarak ifade edilen kümelerdir" (Gleick, 2005); "Fraktallar klasik Euclid geometrisinin elemanları ile kolayca tanımlanamayan oldukça düzensiz, kırıklı ve parçalı uzamsal örüntülerdir" (Vacc, 1999) şeklindeki tanımlara literatürde yer verilmiştir. Dikkat edilirse yapılan tanımlar ya fraktalların bir özelliğine odaklanmakta ya da belli özelliklerinin bir birleşimini vermektedir. Bu durumda "Fraktal nedir?" sorusuna verilecek en iyi yanıt bir fraktalın gösterdiği temel özellikleri belirlemektir.

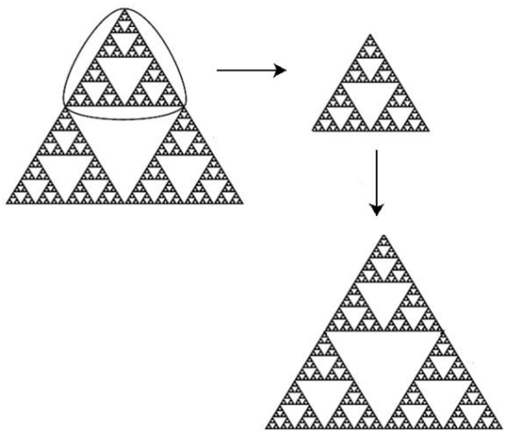
Fraktalların genel olarak "tekrarlama", "öz-benzerlik" ve "boyut" olmak üzere üç temel özelliği bulunmaktadır (Peitgen vd., 1991; Choate, 1999; Peitgen vd., 2004).

Tekrarlama, bir adımdaki sonucun diğer adımın başlangıcı olduğu devamlı bir yineleme süreci (Peitgen vd., 1992, Kelley, 1999) olarak tanımlanmaktadır. Tekrarlama sürecinde elde edilen her sonuç bir sonraki tekrarlama işlemi için yeni bir başlangıç olmaktadır. Örneğin fonksiyonların kendileriyle bileşkeleri bu tür bir tekrarlama döngüsünü göstermektedir (Peitgen vd., 2004). Fraktal nesneler Euclid nesnelerinden farklı olarak cebirsel formüller yerine tekrarlama kuralları sonucu oluşurlar. Sierpinski üçgeni bir eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktalarının birleştirilerek oluşan 4 küçük üçgenden ortadakinin çıkarılması sonucu oluşur. Bu tekrarlama kuralına göre aşağıda Sierpinski üçgeni fraktalının ilk 3 adımı Şekil 1.8.'de görülmektedir.



Şekil 1.8. Sierpinski üçgeninin oluşumunun ilk üç adımı

Öz-benzerlik, şeklin bir parçasının şeklin bütününe benzemesi olarak tanımlanmaktadır (Kelley, 1999). Öz-benzer bir nesnenin N tane kendi kopyasından oluştuğunu ve her bir kopyanın r oranı tarafından ölçeklendiğini kabul edelim. Farz edelim ki E boyutlu Euclid uzayında $x = (x_1, \dots, x_E)$ konumundaki noktaların kümesi S olsun. $0 < r < 1$ oranı için bir benzerlik dönüşümü altında S kümesi $rx = (rx_1, \dots, rx_E)$ noktaları ile rS'ye dönüşür. S kümesi her biri rS'ye eş N tane $S_1, \dots S_N$ ayrık kümelerinin birleşimi olduğunda S kümesine öz-benzer küme denir (Falconer, 2003). Bu tür bir küme örneği olarak Cantor kümesini verebiliriz. Cantor kümesi birim aralıkta aralığı üç eş parçaya bölüp her defasında ortadaki parçayı çıkarma şeklindeki bir dizi silme işlemleri tarafından oluşturulur. Örneğin, $S = [0,1]$ aralığında $S \cap [0,1/3]$ ve $S \cap [2/3,1]$ aralıkları 1/3 küçülme oranı ile S aralığına benzerdirler. Ayrıca doğadaki birçok yapıda da öz-benzerliğe rastlamaktayız. Örneğin brokolinin bir parçası brokolinin tamamına çok fazla benzemektedir. Ayrıca, bu benzerliği eğrelti otunda ve çeşitli ağaç dallarında, kıyı şeridinde ve dağların zirvelerinde görmekteyiz. Ancak doğada bulunan kendine benzer fraktal örnekleri sonlu ve sınırlıdır. Matematikte bizim tanımladığımız ve doğanın bir yansıması olan fraktal örnekleri ise sonsuz ve sınırsızdır. Yani, bu fraktalların herhangi bir parçası her adımda şeklin tümüne benzemektedir. Matematiksel fraktal örneklerinden Koch eğrisi ve Sierpinski üçgeni öz- benzerliği en iyi şekilde yansıtan fraktallardır. Şekil 1.9'da Sierpinski üçgeninin öz-benzerliği gösterilmektedir.



Şekil 1.9. Sierpinski üçgeninin öz-benzer parçaları

Peitgen vd., (1991), Peitgen vd., (2004) ve Üstün (1999) genel olarak üç tür öz-benzerlikten söz edilebileceğini:

- Eğer şeklin sadece bir noktası etrafında öz-benzerlik kurulabiliyorsa buna *noktasal öz-benzerlik,*

- Eğer şeklin her parçası değil de, her dallanması öz-benzer bir şekil oluşturuyorsa buna *yaklaşık öz-benzerlik,*
- Eğer şeklin her parçası hatta her noktası ana şeklin benzeri ise buna *tam öz-benzerlik* denir.

şeklinde ifade etmektedir. Bu öz-benzerlik türleri Şekil 1.10'da gösterilmiştir.

Şekil 1.10. Öz-benzerlik türleri

Fraktalların belki de en sıra dışı ve ilginç özellikleri onların boyutlarıdır. Boyut sürekli kullandığımız ve belki de ne olduğu hakkında çok fazla düşünmediğimiz bir kavramdır. Matematikte, bir kümenin geleneksel olarak doğal sayılarla ifade edilir (Debnath, 2006). Bu boyut tanımına göre nokta 0-boyutlu, doğru 1-boyutlu, düzlem 2-boyutlu, küp 3-boyutlu ve genel olarak Euclid uzayı R^n n-boyutlu olarak kabul edilir. Sezgisel olarak, uzayın boyutu uzaydaki farklı noktaları tanımlamak için gerekli reel parametrelerin sayısına eşittir (Wrigth, 1996). Euclid Elementler 3. ve 11. kitaplarında

- Noktanın hiçbir parçası yoktur,
- Doğru bir uzunluğa sahiptir,
- Yüzey sadece bir uzunluk ve genişliğe sahiptir ve
- Katı bir cismin uzunluk, genişlik ve derinliği bulunmaktadır,

tanımlarını yaparak geometrik nesneleri boyutlarına göre sınıflandırmaktadır (Bowers, 1991). Benzer şekilde Plato'nun Republic, Book VII kitabında: *"düzlem yüzeylerden … 2 boyuttan sonra sıra 3. boyuta gelir … küpün ve her şeyin boyutu bir derinliğe sahiptir"* (Mandelbrot, 1983) şeklinde boyut kavramının altını çizmektedir. Euclid tarzı ölçümlerin -uzunluk, derinlik, kalınlık- doğadaki düzensiz şekillerin özünü yakalamakta yetersiz kalması üzerine, Mandelbrot fraktal boyut kavramına yönelmiştir. Bizler 3 boyutlu bir dünyada yaşıyoruz, bunun anlamı bir noktanın adresini belirlemek için uzayda üç sayıya ihtiyaç duymamız demektir. Üç boyut birbirlerine dik olarak birleşen yönler olarak düşünülür (Gleick, 2005). Euclid'in bir ya da iki boyutlu nesneler tasarlamasını zorunlu kılan soyutlama süreci günlük hayatta kullandığımız eşyalarda da karşımıza çıkmaktadır. Yemek pişirmede kullanılan alüminyum kâğıtlar, esas itibariyle iki boyutlu şekillerdir. Gerçekte, tabii ki her şeyin üç boyutlu olduğu gibi alüminyum kâğıtların da üç boyutu vardır, ancak kalınlıkları o kadar azdır ki ihmal edilebilirler (Gleick, 2005). Aynı şekilde bir iplik gerçekte tek boyutlu ve bir parçacığın da gerçekte boyutunun olmadığı söylenebilir. Buna göre bir iplik yumağının boyutu nedir? Mandelbrot bu soruya şöyle cevap veriyor: "Bu sizin bakış açınıza bağlı. Uzaktan bakarsanız yumak, bir nokta kadar görüneceğine göre sıfır boyutludur. Yakına gelirse yumak bir küre gibi görüneceğinden üç boyutlu ve daha yakından bakılırsa iplik görüneceğinden nesne gerçekte tek boyutlu hale gelir." (Gleick, 2005). Uzaktan bakıldığında yumak bir nokta olarak görüleceği için onu uzayda tanımlamak için bir sayıya gerek yoktur, çünkü her şey bir tek o noktadan ibarettir. Yakından bakıldığında üç sayıya gerek vardır. Daha da yakından bakıldığında ip ister uzatılmış ister yumak şeklinde sarılmış olsun, ipliğin bütün uzunluğu boyunca herhangi bir pozisyon yeterlidir. Mikroskobik ölçeğe indiğimizde iplik üç boyutlu sütunlara dönmekte, sütunlar tek boyutlu elyafa dönüşmekte ve bu malzeme de sıfır boyutlu noktalar halinde çözülmektedir (Gleick, 2005). Böylece bir nesnenin gerçek boyutu dünya üzerindeki üç boyutundan farklı olabilmektedir. Burada asıl sorun bir nesneye uzaktan bakıldığında ve biraz yaklaştığında ne olduğundan çok bu ikisi arasında ne olmaktadır? Bu geçişteki boyutun tanımlanması çalışmaları yepyeni bir görüşün doğmasına neden olmuştur. Bunun yanında 19. yy da Cantor'un R^1 ile R^2 arasında birebir eşleme yapılabileceği yönündeki kanıtı ve Peano'nun R^1 den R^2 üzerine sürekli bir dönüşümün kurulabileceğini göstermesi boyut hakkındaki düşünceyi derinden etkilemiştir (Wrigth, 1996). Çünkü Peano'nun sürekli dönüşümü göz önüne alınırsa, Peano eğrisinin başlangıç şekli bir doğru parçasıdır ve bu doğru parçası bir tekrarlama kuralıyla sonsuz defa tekrarlandığında sonuçta oluşan şekil bir kare olmaktadır. Böylece başlangıçtaki boyutu 1 iken sonuçta oluşan boyutu 2 olmaktadır.

Mandelbrot 0, 1, 2, 3,.. şeklinde tamsayılı boyutlar dışında kesirli boyutlarında var olabileceğini dile getirmiştir. Kesirli boyut başka türlü açıkça tanımlanamayan nitelikleri ölçmenin bir yoludur; bunlar, bir nesnedeki pütürlülük veya kırıklık ya da düzensizlik derecesi gibi niteliklerdir (Gleick, 2005). Fraktal boyut matematiksel olarak: "R^n de sınırlı bir S kümesi alalım ve S'yi örten yarıçapı r olan açık kürelerin minimum sayısı $N(r)$ olsun. Bu durumda öz-benzer fraktalların temel özellikleriyle ilişkili olarak

$$N(r)r^D = 1$$

olarak yazılır. Buradan bir nesnenin fraktal boyutu

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

şeklinde tanımlanır" (Debnath, 2006). Fraktal boyut sayesinde doğal nesnelerin sahip olduğu yapısal düzensizlik tanımlanabilmekte ve analiz edilebilmektedir. Oysa Euclid geometrisinin kullandığı topolojik boyut ise bu düzensizlikleri tanımlamada güçlükler yaşamaktadır (Bowers, 1991). Düzensizliğin derecesi, bir bakıma, bir nesnenin uzayda bir yer kaplamadaki etkinliğidir. Tek boyutlu bir Euclid doğrusu uzayda hiç yer kaplamaz. Fakat eğrisinin çevresi, sonlu bir alanı dolduran sonsuz uzunluğu ile bir yer işgal eder (Gleick, 2005). Fraktal boyut ve topolojik boyut arasındaki önemli bir fark da fraktal boyut homeomorfizm altında sabit değildir. Yani topolojik boyutta bir küre küpe dönüştüğünde yine boyutu üçtür, oysa fraktal boyutta- Peano eğrisindeki gibi- boyut değişmektedir. Bu çalışmada fraktalların ilginç ve belki de en ayırt edici özelliklerinden biri olan boyut kavramının açıklanmasında *öz-benzerlik boyutu*, *uzunluk boyutu* ve *kutu sayma boyutu* tanımlarından yararlanılmıştır. Bu üç tanım Mandelbrot'un fraktal boyut tanımının özel şekilleridir ve Hausdorff tarafından elde edilmişlerdir (Peitgen vd., 2004).

Öz-benzerlik boyutu Euclid geometrisinin nesneleri kullanılarak kolayca tanımlanabilir. Bir doğru parçası P tane öz-benzer parçaya ayrılır ve bu öz-benzer parçaların her birinin oranı $k = \frac{1}{P}$ olmak üzere $Pk^1 = 1$ şeklinde yazılabilir (Mandelbrot, 1983; Peitgen vd., 2004). Bu eşitlik bir kare için $Pk^2 = 1$, bir küp için $Pk^3 = 1$ ve herhangi bir öz-benzer nesne için d verilen öz-benzer nesnenin boyutu olmak üzere $Pk^d = 1$ şeklinde yazılabilir (Peitgen vd., 2004). Bu eşitliği öz-benzer bir fraktal olan Koch eğrisine uyguladığımızda bu fraktalın boyutunun yaklaşık olarak 1,262 olduğu elde edilir. Dikkat edilirse Euclid geometrisinde nesnelerin boyutları, 1,2 ve 3 gibi tamsayılarla ifade edilirken fraktalların boyutları kesirli sayılarla ifade edilmektedir.

Uzunluk boyutu ve kutu sayma metodu ise daha çok yaklaşık öz-benzer olarak tanımlanan fraktalların boyutlarının hesaplanmasında kullanılmaktadır (Peitgen vd., 2004). Uzunluk boyutunun hesaplanmasında verilen fraktalın uzunluğu belli oranlarda küçülen ölçeklerle ölçülmekte ve elde edilen sonuçlar kullanılarak ölçüm sayısının logaritması ile ölçüm oranlarının logaritmalarına göre çizilen grafiğin eğimi o fraktalın boyutunu vermektedir. Benzer şekilde kutu sayma metodunda ise fraktal yapı belli oranlarda küçülen kutularla kaplanmakta ve kutuların içerisinde kalan fraktal parçalarının sayısı hesaplanmaktadır. Yine bu metotta kutu sayılarının logaritmaları ile kutuların oranlarının logaritmaları kullanılarak bir grafik çizilmekte ve grafiğin eğimine göre fraktalın boyutu belirlenmektedir.

Fraktalların bu özelliklerini ve Euclid geometrisinden ayrılan yönlerini dikkate aldığımızda fraktal geometri ve Euclid geometrisi için Tablo 1.1'deki gibi bir ayırım yapılabilir.

Tablo 1.1. Fraktal geometri ve Euclid geometrisinin farklılıkları

EUCLİD GEOMETRİSİ	FRAKTAL GEOMETRİ
Belli bir büyüklükleri ve oranları vardır	Belli bir büyüklük ve oranları yoktur
Cebirsel formüllerle tanımlanırlar	Tekrarlama kuralları sonucu oluşurlar
Sonlu yapıları vardır	Doğada bulunanlar haricindekiler sonsuz yapıya sahiptirler
Şekilleri düzgündür	Euclid şekilleri kullanılarak oluşturulanlar genellikle düzgün ve kurallı bir yapıya sahip olmasına karşın doğada bulunanlar sıklıkla düzensiz ve karmaşık bir yapıya sahiptirler
Tam sayılı boyutları vardır	Boyutları genelde kesirlidir
Öz-benzerlik özellikleri yoktur	Öz-benzerdirler, farklı öz-benzerlik türleri gösterebilirler

Benzer şekilde fraktallar gösterdikleri özelliklere göre Tablo 1.2'de gösterildiği gibi üçe ayrılırlar.

Tablo 1.2. Fraktal türleri

FRAKTALLAR		
Euclid Fraktalları	Doğal Fraktallar	Matematiksel Fraktallar
Euclid şekilleri kullanılarak elde edilen fraktallardır.	Doğada bulunurlar	Bilgisayar programları yardımıyla cebirsel dönüşümler kullanılarak elde edilirler
Sonsuz yapıya sahiptirler	Sonlu yapıya sahiptirler	Sonsuz yapıya sahiptirler
Şekilleri doğal fraktallara göre daha düzgündür.	Oldukça karmaşık ve düzensiz şekilleri vardır.	Oldukça karmaşık şekilleri vardır
Dönme, çevirme ve öteleme gibi süreçleri içeren kurallı tekrarlamalar sonucu oluşurlar.	Oluşumlarında kurallı bir tekrarlama kuralı yoktur, rastgele oluşurlar, ancak belli adımlar için bir kural elde edilebilir.	Cebirsel tekrarlama kuralları sonucu oluşurlar.

Tablo1.2’nin devamı

Genelde tamamen öz-benzerdirler.	Tamamen öz-benzer değildirler. Sonlu adımlar için öz-benzerlik sağlanır.	Genelde tamamen öz-benzerdirler.
• Koch eğrisi • Sierpinski üçgeni • Fraktal ağaç • Fraktal ejder • Menger süngeri • Peano eğrisi • …	• Ağaçlar • Nehir yatakları • Kıyı şeridi • Brokoli • Akciğerler • Kan dolaşım sistemi • …	• Mandelbrot kümesi • Julia kümeleri

1.10. Konuyla İlgili Yapılan Çalışmalar

Bu başlık altında yurt dışında ve yurt içinde fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarına entegrasyonu, öğrenilebilirliği ve öğretilebilirliğine yönelik yapılan araştırmaların sonuçları ele alınmıştır. 1990’lı yıllardan günümüze kadar fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarına entegrasyonu amaçlayan çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların daha çok teorik, tek bir fraktal konusunun öğretimine ve fraktal konularının öğretimine yönelik program geliştirme olmak üzere üç ana başlık altında toplandığı belirlenmiştir. Bu bağlamda birinci alt başlıkta fraktal geometri konularının öğretimine yönelik yapılan teorik çalışmaların sonuçlarına ve önerilerine yer verilmektedir. İkinci alt başlıkta tek bir fraktal geometri konusunun sınıf içerisindeki öğretimine yönelik yapılan çalışmalardan yansımalar ve elde edilen sonuçlar ele alınmıştır. Üçüncü alt başlıkta ise fraktal geometri konularının öğretimine yönelik öğretim programlarının geliştirilmesiyle ilgili çalışmalarından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Bu başlık altındaki çalışmalar gerçek sınıf ortamındaki uygulamalardan ve bir sınıf ortamında uygulanmamış, teorik olarak hazırlanmış fraktal geometri konularının öğretimine yönelik geliştirilen programlardan elde edilen sonuçlar şeklinde sunulmuştur.

1.10.1. Fraktal Geometri Konularının Öğretimiyle İlgili Teorik Çalışmalar

Goldenberg (1991) çalışmasında 7-12. sınıflarda matematik eğitiminde fraktal geometrinin matematik öğretim programlarına katılması gerektiğini ifade etmektedir. Fraktal geometrinin görsel ve deneysel bir stilinin olması, matematiksel araştırmalara yeni ufuklar açması ve fen ve diğer birçok disiplinde kullanım alanının olması gibi birçok nedenlerden dolayı matematik öğretim programlarında yer alması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu amaçla çalışmasının başında fraktalların matematik öğretim programlarına katılmasında aşağıdaki soruları yöneltmektedir:

- Matematikteki yeni ortaya çıkan bu konular okul müfredatlarına nasıl entegre edilebilir?
- 7-12. sınıf seviyesi için matematiğin bu yeni alanının hangi konuları uygun olur?
- Matematiksel düşüncenin görsel ve deneysel yaklaşımının güçlü bir modeli olan fraktal geometri en iyi nasıl kullanılır?
- Fraktal geometrinin içeriği ve görsel, deneysel yaklaşımı öğrencilerin ilgilerini, matematiksel düşüncelerini ve matematiksel algılarını nasıl genişletir ve derinleştirir?
- Bilgisayar destekli hazırlanmış bir öğrenme ortamında fraktal geometri konularıyla çalışmak öğrencilerin bir matematikçinin matematik yaparken izlediği yollardan daha fazla deneyim yaşamalarına yardımcı olabilir mi? ve bu durum öğrencilerin diğer matematik ve fen alanlarındaki öğrenmelerini artırır mı?

Goldenberg’in (1991) bu soruları aynı zamanda bir fraktal geometri öğretim programı hazırlanırken göz önünde bulundurulması gereken durumları da ortaya koymaktadır.

Goldenberg (1991) çalışmasında toplumda matematiğin matematikçilerin yaptığı deneyimler olarak algılandığını ifade etmektedir. Bu nedenle matematiğin ölü, eski çağlardan beri değişmeyen bir yapı ve tekniğe sahip, araştırmalar için toleransı olmayan, bir sorunun yalnız ve yalnız bir doğru çözümünün olduğu ve bu çözümünde biri tarafından bilindiği bir alan olarak algılandığını belirtmektedir. Bunun yanında hem matematik hem de fen öğretiminin geleneksel müfredat anlayışı tarafından kuşatıldığını ve bu nedenle her bir dersin birbirinden ayrık olarak gösterildiğini ifade etmektedir. Öğrencilerin görsel, deneysel matematik çalışmalarını yapacakları, tıpkı bir matematikçinin yaptığı gibi problem oluşturmak, gözlemlemek ve çözüm yolları bulmalarını sağlayan stratejileri izleyecekleri ortamların hazırlanması gerektiğini ifade etmektedir. Bu tür stratejilerin uygulanmasında fraktal geometrinin etkili olacağını belirtmektedir. Bu nedenle Goldenberg (1991) fraktal geometri konularının öğrencilerin matematiğe yönelik düşüncelerinde temel değişiklikler oluşturacağını ifade etmektedir. Bu değişikliklerin 1) öğrencilerin matematiğin ölü, değişmez gerçek ve tekniklerden oluştuğu düşüncelerini değiştirmede, 2) matematik müfredatlarının değişime olan dirençlerini kırmada ve 3) öğrencilerin matematiğe olan ilgilerini artırmada ve bu ilgiyi sürdürmede etkili olabileceğini belirtmektedir

Çalışmasında fraktal geometrinin 7. sınıftan itibaren matematik müfredatlarında yer almasının gerektiğini belirtmektedir. Bunun nedeni olarak da öğrencilerin fraktal geometri konularını öğrenmeleri için ölçü teorisi, trigonometri, kalkülüs ve fonksiyon kavramları hakkında ön bilgilerinin olması gerektiğini ifade etmektedir. Bunun yanında Goldenberg (1991) limit, seriler, uzunluk, alan, boyut, uzay ve olasılık gibi birçok konunun fraktal geometriyle yakın ilişkilerinin olduğunu belirtmektedir. Bir nesnenin kesirli bir boyuta sahip olduğu fikri birçok kişi için çok sıra dışı bir durumdur. Bunun yanında bir nesnenin alanının sıfıra giderken çevresinin sonsuza gitmesi de hiç alışık olmayan bir durumdur. Goldenberg (1991) bu tür paradoks durumların öğrencilerde çelişkiler oluşturacağına ve onların matematiksel bilgilerini yeniden ele almalarına neden olacağını ifade etmektedir. Böylece öğrencilerin matematiğin katı, değişmez ve cansız olduğu şeklindeki görüşleri onun canlı ve sürekli gelişen bir disiplin olduğu şeklinde değişebileceğini ifade etmektedir.

Fraktallar ve kaosun matematik üzerindeki en büyük etkisinin matematiksel deneyim uygulamalarını yeniden ortaya çıkarması olduğunu belirtmektedir. Deneysel matematik literatürde Plato'dan bu yana gerçek matematik olarak kabul edilmemektedir. Ancak fraktallar ve kaos teorinin ortaya çıkması, matematiksel deneyimin önemini ortaya koymuştur. Bu nedenle Goldenberg'de (1991) bilgisayar destekli olarak hazırlanan ortamlarda fraktal geometriyle çalışan 7-12 yaş grubu öğrencilerinin bir matematikçi gibi deneysel matematikle tanışabileceklerini ifade etmektedir.

Goldenberg (1991) hayali tasarladığı ortamlarda öğrencilerin fraktal geometri konularıyla çalıştığı ve üst düzey sonuçlar elde ettiği senaryo örneklerine yer vermektedir. Belki tasarladığı senaryoların gerçek sınıf ortamında uygulamalarında bu tür üst düzey matematiksel sonuçlar elde edilemeyecektir, ancak bu senaryolar fraktal geometri içerisindeki zengin matematiğin göz önüne serilmesini sağlamaktadır. Bunun yanında öğrencilerin fraktalları keşfederken bilgisayar destekli etkinlik uygulamalarına da yer vermiştir. Özellikle Logo programı sayesinde öğrencilerin açı ve uzunlukları değiştirerek farklı fraktal yapılar oluşturmaları ve farklı durumlarda bu yapılar içerisindeki değişimleri belirlemeleri amaçlanmıştır.

Naylor'da (1999) Goldenberg (1991) gibi fraktalların öğretimine yönelik çalışma yaprakları ve bu çalışma yapraklarının sınıf içerisinde nasıl kullanılacağına yönelik açıklamalarda bulunmuştur. Ancak Naylor'un (1999) çalışmasında yer verdiği etkinlikler Goldenberg'in (1991) çalışmasında yer verdiği etkinlikler kadar zor ve üst düzey matematik bilgisi gerektirmemektedir. Naylor, (1999) hazırladığı çalışma yapraklarıyla fraktal yapıları kullanarak hem fraktal ağaç, Koch kartanesi ve Sierpinski halısı gibi ünlü birkaç fraktalı tanıtmayı hem de tekrarlama sürecini, üslü sayıları, genellemeye ulaşmayı, algoritmalar oluşturma ve yazmayı ve karmaşık şekillerin alanı ile çevrelerini hesaplamayı öğrencilere öğretmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla 6 etkinlik geliştirmiştir. Ancak bu etkinliklerin sınıfta uygulanıp uygulanmadığı ve hangi sınıf seviyesine göre hazırlandığı yönünde bir bilgi bulunmamaktadır. Çalışma daha çok öğretmenlerin sınıfta bu etkinlikleri nasıl yapacaklarını ve ne tür soruları sormanın faydalı olacağı yönündedir. Etkinliklerin her biri yaklaşık bir ders saatinde tamamlanacak nitelikte hazırlanmıştır. Bunun yanında öğrencilere ödevler verilerek ders ortamında edindikleri kavramları derinleştirme fırsatları sağlanmaya çalışılmıştır.

İlk etkinlik fraktal kelimesinin anlamının ne olduğuyla başlamakta ve bir fraktal ağacın oluşturulmasıyla devam etmektedir. Fraktal ağaçta dallar üzerine yaklaşıldığında oluşan yapılar üzerine tartışılması önerilmekte ve böylece öğrencilerin öz-benzerlik ve fraktalların ölçek değişmezliğine (yapı her oranda aynı şekilde görünür) sahip olduklarını keşfetmeleri beklenmektedir. Bunun yanında çalışma yaprağında öğrencilerin oluşan dal sayısı ve her bir dalın uzunluğu ile toplam dal uzunluğuna yönelik örüntüler bulmasını ve bunları genellemesini içeren sorulara yer verilmiştir.

İkinci etkinlik ise Koch kartanesinin oluşumu ve oluşan parçaların kenar uzunlukları, sayısı ve n. adım için toplam çevrenin bulunmasına yönelik hazırlanmıştır. Kağıt kalem kullanarak verilen tekrarlama adımları sonucunda öğrencilerin Koch kartanesini oluşturmaları sağlanmaktadır. Bunun yanında çevrenin sonsuza giderken alanın sonlu olmasının sınıf içersinde tartışılması vurgulanmaktadır.

Üçüncü etkinlik Cantor kümesinin oluşturulması ve oluşan parça sayıları ile her bir parçanın uzunluğunun hesaplanmasına yöneliktir. Bu etkinlikte de Koch kartanesi etkinliğinde olduğu gibi n tekrarlama sayısının sonsuza gittiğinde toplam uzunluğun nasıl değiştiği ve asla silinmeyen noktaların olup olmadığını tartışılması vurgulanmaktadır.

Dördüncü etkinlik Sierpinski üçgeninin oluşturulması ve oluşan boşluk sayısı, toplam alan ve toplam çevrenin nasıl değiştiğine yönelik genellemelerin bulunmasını içeren soruları içermektedir. Öğrencilerin alanın sıfıra giderken çevrenin sonsuza gittiğini görmeleri ve bunun nedenlerinin tartışılması önerilmektedir.

Beşinci etkinlik Sierpinski halısının oluşumu ve yeni oluşan karelerin kenar uzunlukları ve toplam alan üzerine örüntü ve genellemelerin elde edilmesine yöneliktir. Yine burada da diğer dört etkinlikte olduğu gibi alanın sıfıra gitmesine karşın çevrenin sonsuz olması ve çıkarılmayan noktaların olup olmadığının sorgulanması önerilmektedir.

Son etkinlikte ise öğrencilerin kendi fraktal şekillerini kendilerinin oluşturmalarına yöneliktir. Renkli kalemler ve kartonlar kullanarak oluşturulan şekillerin öğrencileri daha çok etkileyeceğini ifade etmektedir. Öğrencilerin kendi fraktal yapılarını oluşturmalarını aşama aşama göstermek için bir yol haritası önermiştir. Bu haritanın öğrencilerin doğru fraktal yapılar oluşturmalarını sağlayacağını düşünmektedir.

Naylor (1999) çalışmasında tekrarlama, öz-benzerlik ve çevre-alan kavramlarının öğretimini gerçekleştirmek üzere etkinliklere yer vermektedir. Bunun yanında sorulan düşündürücü sorular hem öğrencilerin bu konulara yönelik ilgilerini çekmekte hem de mevcut matematik bilgilerini sınama imkânı elde etmektedirler. Örneğin Sierpinski halısı fraktalında bu fraktalın çevresi ve alanına yönelik “Sierpinski halısı içerisinde asla çıkarılmayan kaç nokta vardır?” sorusu sorulmaktadır. Başlangıçta öğrenciler üçgenin üç uç noktasının çıkarılmadığını düşünmektedirler, ancak daha sonra her bir adımda çıkarılan her bir üçgenin de üç tane uç noktasının daima kaldığını görmektedirler. Bu durumda sonsuz tane nokta asla çıkarılmamaktadır sonucu elde edilmektedir. Sorulan ilginç bir soruda öğrencilerin boyut kavramı konusundaki bilgilerini sınamaktadır. “Eğer sonsuz tane nokta içerde kalıyorsa nasıl oluyor da Sierpinski halısının alanı sıfır olmaktadır?” Noktanın boyutu olmadığından uzunluktan söz edemeyiz. Bu durumda sonsuz tane noktanın olması onun alanına bir etki yapmamaktadır. Ayrıca çalışmasında öğrencilerine kurallarını kendilerinin belirleyeceği fraktalları oluşturmaları yönünde teşvik ederek fraktalların kendi iç güzelliklerini ve büyüleyiciliklerini keşfetmelerini sağlamaya çalışmıştır. Böylece matematik yaparken öğrencilerin duyusal yönden de gelişmelerine katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Buna karşın Naylor (1999) çalışmasında fraktal yapıları kağıt kalem kullanarak oluşturmakta ve bilgisayar destekli etkinliklere yer vermemektedir. Sonuçta Naylor’un (1999) bu etkinlikleri tekrarlama, öz-benzerlik ve fraktalların çevresi, alanı ve hacminin öğretimine yönelik hazırlanan bir öğretim programı için bir yol göstergesi niteliğindedir.

Naylor (2005) bir başka çalışmasında ise ilköğretim 3–8. sınıf öğrencilerine yönelik fraktal konularının öğretimi için etkinlikler geliştirmiştir. Çalışmada Naylor, 3–8. sınıflar için temel fraktalları tanıtmayı ve manipulative olarak hazırladığı etkinliklerle onların farklı fraktal örnekleri oluşturmalarını amaçlamaktadır. Araştırmacı çalışmasında ilköğretim öğrencilerinin basit tekrarlama kuralları ile çeşitli fraktal örüntüler elde edebileceğini ve bu tür örüntüleri elde etmenin öğrencilere kesirler ve benzerlik konularını yeniden keşfetme fırsatı verdiğini belirtmektedir. Bu amaçla 3. sınıf öğrencileri için fraktal ağaç etkinliğini hazırlamıştır. Öğrencilere “ ağacı elde etmeye devam edersek sonuçta nasıl bir şekille karşılaşırız? Her bir adımda oluşan dalların uzunlukları nasıl değişmektedir?” şeklinde sorularla öğrencilerin bu keşiflerine yardımcı olmaya çalışmaktadır. 4–8 sınıflar için ise fraktal üçgenler (Sierpinski üçgeni ve Koch kartanesi) ve Fraktal resim adı altında iki etkinlik hazırlamıştır. Özellikle fraktal resim etkinliğinin öğrencilerin fraktal yapıları kendi yaratıcılıklarını kullanarak oluşturmalarına fırsat vereceği ifade edilmektedir. Ayrıca bu etkinlikle öğrencilerin mevcut matematik bilgileri ile elde ettikleri sonuçları ilişkilendirme fırsatı yakalayacakları da belirtilmektedir.

Fraboli ve Moller (2008) fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarında yer almasının gerektiğini belirttiği çalışmasında fraktal geometri hakkında kısa bilgiler vermekte ve bu geometrinin Euclid geometrisinden farklarını örnekler vererek göstermektedir. Bunun yanında tekrarlama sürecini açıklamakta ve Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanı üzerine bir etkinliği tanıtmaktadırlar. Etkinlikte Sierpinski üçgeninin alanı ve çevresini kağıt kalem üzerinde oluşturulan modelleri kullanarak adım adım hesaplamaktadırlar. Bu bağlamda bir tablo yardımıyla oluşan kenar sayısı, üçgen sayısı ve her bir üçgenin alanına yönelik örüntüler elde edilmiştir. Fraboli ve Moller (2008) fraktal geometri etkinlikleriyle çalışan öğrencilerin ilköğretim seviyesinde sayı dizileri, simetri, oran-orantı, ölçme ve kesirler konularını, daha yüksek sınıf seviyelerinde ise logaritma, fonksiyonların bileşkesi, Paskal üçgeni ve karmaşık sayılar gibi birçok geleneksel matematik konusunu keşfedebileceklerini belirtmektedir.

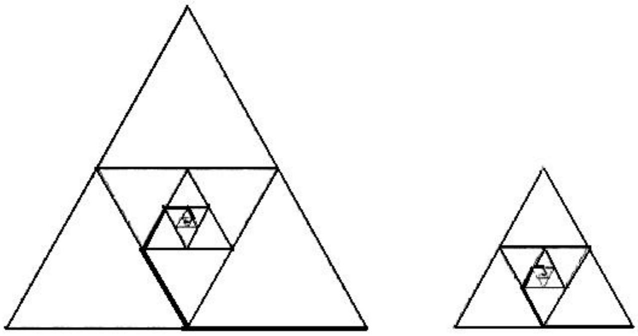
Fraktal geometri yapısı gereği bilgisayar programlarının kullanılmasını zorunlu hale getiren bir geometridir. Her ne kadar manipulatif olarak fraktal yapılar oluşturulsa da bu yapıların gerçeğe yakın hallerinin resmedilmesinde bilgisayar programları daha etkilidir. Thomas’da (1989) öğrencilerin fraktal geometriyi keşfetmelerinde bir metod olarak Logo programını önermektedir. O, geleneksel geometri bilgimizden nesnelerin boyutlarını 1, 2 ve 3 boyutlu olarak sınıflandırdığımızı belirtmektedir. Bu tür nesnelerin pürüzsüz, düzgün ve mükemmel bir yapıya sahip olduğunu ve eğer 1, 2 ve 3 boyutlu nesnelerle gerçek nesneleri tanımlayacaksak bu kadar düz ve pürüzsüz nesneleri çevremizde bulmanın çok zor olacağını ifade etmektedir. Bu durumda neye ihtiyacımız var? sorusuna cevap olarak kesirli boyuta ve düzensizliğe sahip girinti çıkıntıları tanımlayabilen fraktal geometriyi vermektedir. Çalışmasında fraktalların iki önemli özelliği olan boyut ve öz-benzerlik kavramlarını kısaca ifade etmekte ve bu iki kavramı Logo programında Koch kartanesini oluşturulmasıyla göstermektedir. Logo'da yazdığı programda her bir adımda oluşan şeklin karmaşıklığını ve öz-benzerliğini adım adım açıklamaktadır. Ayrıca fraktal geometrinin teknolojiyi kullanarak matematiğin bu yeni alanının keşfetmede öğrencilere fırsatlar sunduğunu belirtmektedir.

Benzer şekilde Kern ve Mauk (1990) fraktal geometride Logo programının etkin şekilde kullanılabileceğini dile getirmektedirler. Çalışmalarında fraktal geometrinin doğayı gerçekçi bir şekilde modellemenin yollarından biri olduğunu belirtmektedirler. Ayrıca Logo programının basitliği ve kullanım kolaylığı nedeniyle fraktal geometri alanında yeni keşifler yapmaya imkan sağladığını ifade etmektedirler. Bunun yanında Logo dili sayesinde fraktal yapıların oluşumunu sağlayan tekrarlama döngülerinin kolaylıkla oluşturulabileceği belirtilmektedir. Ayrıca fraktal yapıların oluşturulmasında Logo programının kullanılmasının turtle geometrisinin, Euclid geometrisinin ve fraktal geometrinin kavramlarının birlikte kullanılmasını sağladığı ifade edilmektedir. Çalışmalarında Logo ile Koch Kartanesinin nasıl oluşturulacağını örnek olarak vermektedirler. Bunun yanında ekler kısmında farklı kartaneleri için Logo programları verilmektedir. Ayrıca Kern ve Mauk fraktalların mevcut matematik programlarına girmesi gerektiğini *"Fraktallar ilginç ve heyecan vericidir. Geometri, logaritma, diziler ve seriler gibi bir çok farklı konularda çalışmaya imkan verirler. Logo'da kaplumbağa grafikleri öğrencilerin deneme ve çıkarsama yapmalarını sağlar. Böylece öğrenciler gerçeğe çok yakın fraktal şekiller üretebilirler."* sözleri ile dile getirmektedirler.

Bunun yanında Coes III (1993) benzerlik konusunun öğretiminde fraktal geometrinin öğrencilere farklı fırsatlar sunduğunu belirtmektedir. Çalışmada fraktalların temel özelliklerinin bilgisayar programları kullanılmadan kare fayanslar ve iç içe geçmeli küpler gibi basit sınıf materyalleri kullanarak öğrencilerce keşfedilebileceği vurgulanmaktadır. Böylece öğrencilerin sınıf içi somut materyalleri kullanarak fraktal yapılar oluşturabileceği ve öz-benzerliğin ne anlama geldiğine yönelik bir algı edinebilecekleri çalışmada ifade edilmektedir. Çalışmada fraktalların sonsuz bir tekrarlama sürecinden oluşması ve hazırlanan somut modellerin öz-benzerlik gibi fraktalların tüm özelliklerini yansıtmaması nedeniyle manipulatif olarak oluşturulan fraktal modellerin gerçek anlamda fraktal yapılar olmayacakları belirtilmektedir. Buna karşın somut materyal kullanmanın fraktal modellerin nasıl oluştuğu hakkında sınıf tartışmaları yapmaya daha uygun olduğu ifade edilmektedir. Coes III (1993) çalışmasında öz-benzerlik kavramını farklı iki ve üç boyutlu modeller kullanarak açıklamaktadır. Bunun yanında öz-benzer fraktalların fraktal boyutunun da nasıl hesaplandığına çalışmada yer verilmektedir. Buna karşın çalışmanın herhangi bir öğrenci grubuna uygulanmadığı ve kuramsal bir çalışma olduğu görülmektedir.

Adams ve Aslan-Tutak'da (2006) Coes III (1993) gibi manipulatif olarak Sierpinski üçgenini oluşturarak içerisindeki örüntüleri keşfetmeye yönelik çalışma yaprakları ve öğretmen kılavuzları geliştirmiştir. Çalışma yapraklarının herhangi bir öğrenci grubuna uygulanıp uygulanmadığını yönelik bir ifade bulunmamaktadır. Bunun yanında çalışma yapraklarının içeriği incelendiğinde 5-7. sınıf seviyesindeki öğrenci grubuna yönelik hazırlandığı söylenebilir. İlk çalışma yaprağı Sierpinski üçgeninin çizme-boyama etkinlikleri sonucu oluşturulmasına yöneliktir. Bu çalışma yaprağında öğrencilerin Sierpinski üçgenindeki öz-benzerliği de öğrencilerin keşfetmesi beklenmektedir. Bunun yanında Sierpinski üçgeninde geride kalan üçgen sayısına yönelik bir örüntü bulup kuralını yazmaları da beklenmektedir. Diğer çalışma yaprağında ise Sierpinski üçgeninin alanına yönelik öğrencilerin bir örüntü bulup bunu genellemeleri istenmektedir.

Sandefur (1996) calculus dersinde geometrik serilerin öğretiminde fraktalların öz-benzerlik özelliğini kullanarak manipulatif modeller üzerinde onların uzunluklarını, alanlarını ve boyutlarını hesaplamıştır. Buradaki amacı öğrencilerin geometrik serilerin ortaya çıktığı durumları görmelerini sağlamaktır. Bu sayede Sandefur (1996) geometrik serileri tanımlamadan ve bu serilerin toplamını veren formülü vermeden önce öğrencilerinin manipulatif olarak fraktal örnekleriyle uğraşarak geometrik serilerin özelliklerini kendilerinin keşfetmesini amaçlamıştır. Bu bağlamda öncelikle çeşitli sayı örüntüleri arasındaki öz-benzerliği göstermiştir daha sonra farklı spirallerin uzunlukları ve alanlarını, farklı şekillerde tanımlanmış Koch kartanelerinin çevrelerini ve alanlarını küçük cebirsel ifadelerle hesaplamıştır. Bu cebirsel ifadeler ilerde öğrencilerin geometrik seriler ile ilgili yapacakları çalışmalar için bir temel teşkil etmektedir. Örneğin Sandefur (1996) spiralin uzunluğu ile ilgili öğrencilerine şu şekilde bir soru yöneltmektedir: "Şekil 1(a)'daki dıştaki büyük üçgen kenar uzunluğu 1 br olan bir eşkenar üçgendir. Eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları birbiri ile bağlantılıdır ve bu bağlantılılık durumu merkezde oluşan her üçgen için devam etmektedir. Bu şekilde devam edildiğinde eş kenar üçgenin herhangi bir kenarının yarısından işaretlenmeye başlanırsa bir spiral şekli elde edilir. Bu spiralin uzunluğu nedir?"(Şekil.1.11)



Şekil 1.11. Sandefur'un spiralin uzunluğuna yönelik sorusu

Şekil 1(a) daki orijinal eş kenar üçgende dıştaki kısmı silip içteki üçgeni de döndürdüğümüzde şekil 1(b) elde edilir. Not edelim ki bu ikinci şekil orijinal şekle benzerdir, ancak sadece kenar uzunlukları farklıdır, 0.5 br dir. Böylece ikinci şeklin çevresinin birinci şeklin çevresine oranı p=1/2 dir. S ve s sırasıyla şekil 1(a) ve 1(b) deki spirallerin çevrelerini göstersin. Şekil 1(a) ve 1(b) benzer olduklarından 1(b) deki spiralin uzunluğu 1(a) daki spiralin uzunluğunun yarısına eşittir. Yani s=0.5S dir. Ancak 1(b) deki spiral 1(a) daki spiralin ilk kısmının silinmesi olduğundan S=0.5+s dir. Bu eşitliklerden S=0.5S+0.5 ise S=1 bulunur. Böylece 1(a) da oluşan spiralin uzunluğu orijinal eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğuna eşit olduğu görülür.

Spiralin uzunluğunu bulmadaki bu geometrik yaklaşım cebirsel yaklaşımla ilişkilendirildiğinde spiralin uzunluğunu sonsuz $S=0.5+0.5^2+0.5^3+\ldots$ şeklinde bir geometrik seri ile verebiliriz. Yani,

$$S=0.5+0.5^2+0.5^3+\ldots=0.5+0.5(0.5+0.5^2+\ldots)=0.5+0.5S.$$

Örnekten de görüldüğü gibi Sandefur geometrik serileri doğrudan kullanmadan geometrik serileri oluşturmakta ve onlarla ilgili işlemler yapmaktadır. Çalışmada Sandefur öğrencilerinin yaşadıkları deneyimlere ya da görüşlerine yer vermemekte ve spirallerin çevreleri ve alanlarını öz-benzerlik kavramını kullanarak hesaplamaktadır.

Gluchoff (2006) çalışmasında fraktallarla büzülme dönüşümü teoremi (contraction mapping theorem) arasında bir ilişki olduğunu göstermeye çalışmıştır. Gluchoff (2006) fraktal geometrinin yaklaşık 25 yıldan beridir ilköğretimden lise seviyesine kadar matematik derslerinde çalışıldığını ifade etmektedir. Yapılan çalışmaların çoğunluğunun bilgisayar destekli olduğunu ve bu nedenle de öğrencilerin oluşan şekillerin nasıl oluştuğunu tam olarak anlamadıklarını belirtmektedir. Araştırmacı çalışmasının sadece bir fotokopi makinası kullanılarak alışılagelmişin dışındaki bir yöntemle fraktalları oluşturmak olduğunu ifade etmektedir. Çalışmasında Peitgen vd. (1992) tanımladığı MRCM yöntemini kullanarak farklı oranlarda sürekli bir şeklin resminin çekildiğinde sonunda bir limit değerine ulaşacağını belirtmektedir. Bu limit değerinin ise büzülme dönüşümü teoremi (contraction mapping theorem) olarak tanımlanan teoremin de bir sonucu olduğunu ifade etmektedir. Böylece Gluchoff (2006) çalışmasında büzülme dönüşümü teoremi ile fraktallar arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Çalışmasının başında MRCM tekniğini kullanarak Sierpinski üçgenini ve ağaç dalına benzer bir fraktal yapıyı oluşturmasını açıklamaktadır. Ancak bu oluşturma sürecinin çok uzun sürmesi nedeniyle yapılacak projenin 1 haftaya yayılmasının faydalı olacağını ifade etmektedir. Çalışmanın son kısmında ise oluşan şekillerin belli bir adımdan sonra limit değerine ulaştığını matematiksel olarak göstermekte ve teoremle fraktal yapı arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Yapılan bu çalışma fraktalların farklı bir yolla oluşturulmasının ortaya konulması ve matematikteki temel bir teoremle ilişkilendirilmesi açısından önemlidir.

Camp (1991) çalışmasında öğrencilerin fraktal geometri kavramlarına giriş yapmasının yollarından birinin eğri oluşturma süreci olduğunu ifade etmektedir. Bu bağlamda cebir dersinde manipulatif olarak 2 boyutta Koch eğrisini ele alarak Koch eğrisinin çevresi ile alanındaki ve 3 boyutta yüzey alanı ile hacmindeki değişimi incelemiştir. Elde ettiği ilk sonuçta Koch kartanesinin çevresi sonsuz olarak büyürken alanı sınırlı kaldığını belirtmektedir. Camp'ın bu sonucu yeni olmamasına karşın Koch kartanesi modelini iki boyuttan üç boyuta taşıyarak öğrencilerinin iki boyutta elde ettikleri sonuçlarla üç boyutta elde ettikleri sonuçları karşılaştırmasını beklemektedir. Bunun yanında öğrencilerin Koch eğrisiyle ilişkili şekiller için oluşturdukları iddiaları inceleyerek farklı sonuçlara ulaştıklarını ve bu sonuçların öğrencileri heyecanlandırdığını ifade etmektedir. Örneğin, Koch kartanesi 3. boyuta taşındığında hacminin birim küpün hacmine eşit olduğunun öğrenciler tarafından görülmesinin onları etkilediği belirtilmektedir. Araştırmacı çalışmasında öğrencilerin Koch eğrisiyle çalışırken yaşadıkları deneyimler ya da görüşlerine çok fazla yer vermemekte, buna karşın Koch eğrisinin çevresi, alanı ile üç boyutlu Koch dörtyüzlüsünün yüzey alanı ve hacmini ayrıntılı olarak hesaplamaktadır. Camp çalışmasının sonunda yaşadığı deneyimleri de göz önüne alarak bu konuya derslerinde yer vermek isteyen öğretmenlere aşağıdaki tavsiyeleri yapmaktadır:

- Yapılan etkinlikler çevre, alan, yüzey alanı, hacim ve benzerlik konularında temel matematik bilgisine sahip öğrencilerle rahatlıkla kullanılabilir.
- Etkinliklerde elde edilen sonuçların öğrencilerce rahat takip edilebilmesi için tablolaştırılması faydalı olur.
- İki boyutlu kartanesi manipulatif olarak elde edilebileceği gibi Logo gibi bilgisayar programları yardımıyla da kolayca elde edilebilir.
- 3 boyutlu model öğrencilere slaytlar kullanılarak gösterilebilir. Ancak elde edilen şeklin özelliklerini keşfetmenin en iyi yolu öğrencilere kes yapıştır işlemleri ile modeller hazırlama fırsatı vermektir.

Bunun yanında bazı araştırmalarda ise hem manipulatif hem de bilgisayar programlarının birlikte kullanıldığı görülmektedir. Örneğin Bannon (1991) çalışmasında hem manipulatif hem de Basic programlama dilini kullanmıştır. Çalışmada fraktalların temel özelliklerinden biri olan öz-benzerlik kavramı tartışılmaktadır. Bannon öz-benzerlik için fraktal ejderi kullanmaktadır, ancak ejderin öz-benzerliği için ejderin herhangi bir parçasının ejderin tümüne benzerdir tanımını matematiksel olarak yeterli bulmamaktadır. Bunun nedeni olarak ejderin her bir kopyasının ne kadar küçük olarak belirtilmediğini ifade etmektedir. Matematiksel olarak öz-benzerlik kavramına giriş yapmanın yolunun dönüşüm (transformation) kavramı olduğunu belirtmektedir. Dönüşüm (transformation) kavramını fonksiyonların düzlemdeki noktalarını düzlemdeki diğer noktalara eşlemesi olarak tanımlamaktadır. Geometrik şeklin tüm noktaları bir dönüşüm ile eşlendiğinde, geometrik şeklin genellikle değiştiğini ifade eden Bannon çalışmasında üç tür dönüşüme yer vermektedir. Bunlardan ilki bir şeklin büyüklüğünü değiştirmesi olarak tanımlanan genişlemelerdir (dilations). Eğer genişleme 1 den daha büyük bir oranda olursa nesnenin büyüklüğü artar. Eğer genişleme 0 ile 1 arasında bir oranda olursa nesnenin büyüklüğü azalır. Çalışmada ikinci olarak ifade edilen genişlemeler kullanılmaktadır. Diğer bir dönüşüm ise noktaların sabit bir yönde sabit bir uzaklığa hareket etmesi olarak tanımlanan çevirmelerdir (translation). Son olarak ise noktaların bir döndürme merkezi etrafında döndürülmesi olarak tanımlanan döndürme (rotations) dönüşümleridir. Çalışmada benzerlik bir geometrik şekil bir genişleme, çevirme ya da döndürme ile diğer bir geometrik şekle dönüştürülüyor ise bu durumda bu iki geometrik şekil benzerdir şeklinde tanımlanmaktadır. Bannon çalışmasında bir (x,y) noktasının (x', y') noktasına dönüşümünü

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

şeklindeki lineer denklemler ile tanımlamaktadır. Bu dönüşüm denklemini de kullanarak Bannon çalışmasında öz-benzerliği "eğer bir nesne öz-benzer ise bu durumda genişleme, çevirme ve döndürme gibi dönüşümler vardır" şeklinde tanımlamaktadır. Bu tanımı kullanarak öncelikle fraktal ejderin öz-benzerliği çalışmada gösterilmiştir. Bunun yanında kaos oyunu dönüşümler kullanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Ayrıca Koch eğrisi ve Sierpinski üçgenlerinin de öz-benzerliği dönüşümler kullanılarak gösterilmiştir. Bannon'un bu çalışması öz-benzerlik kavramının matematiksel olarak tanımlanmasını göstermektedir.

Devaney (1997) çalışmasında soyut matematiğe ait olan dinamik sistemler teorisine dayanan bazı basit kavramların calculus dersine kolayca dahil edilebileceğini göstermeye çalışmaktadır. Devaney (1997) kendi calculus dersinde bu entegrasyonu gerçekleştirmiş ve neler yaptığına çalışmada yer vermiştir. Ancak bu açıklamaları sınıf ortamında yansımalar şeklinde değil, sadece konuları tanıtıcı niteliktedir. Bu nedenle bu konuların öğrenilmesinde ve öğretilmesinde karşılaşılan durumlara çalışmada yer verilmemiştir. Devaney (1997) dinamik sistemler teorisindeki bu konuların calculus dersine entegre edilmesinin gerekçelerini "öğrencilerin bu kavramları öğrenerek sayısal algoritmaların bilgisayar uygulamalarının sınırlılıklarını görebildikleri, güncel matematik araştırmalarıyla karşılaşma fırsatı elde ettikleri ve calculus ve bilgisayar deneyimlerinden gelen teorik yapı için bir çalışma ortamı elde ettikleri" şekilde ifade etmektedir. Çalışmada tekrarlama, grafik analizi, çekici, itici ve periyodik noktalar ile kaos konularına yönelik açıklamalara yer verilmiştir. Bunun yanında calculus derslerinde yer alan ancak yeterince önem verilmeyen Newton metodu tanımlanmıştır. Bu metodun calculus dersleri için ileri seviyede olduğu vurgulanmasına karşın bilgisayar ortamlarında bu metoda göre oluşan şekillerin öğrencilerin ilgisini çektiği belirtilmiştir.

Benzer şekilde Choate ve Picciotto (1997) çalışmalarında öğrencileri dinamik sistemler ve tekrarlamalı lineer fonksiyonlar ile tanıştırmak için çalışma yaprakları ve öğretmen kılavuzu hazırlamıştır. Sayısal tekrarlamaları kullanarak oluşturulan dizileri çalışmak ortaöğretim matematik programlarında genelde fonksiyonlar ve özelde ise lineer ve üslü sayılar gibi birçok kavrama ulaşmanın yeni yollarını sağlamaktadır. Çalışmada hazırlanan etkinlikler bilgisayar destekli olmasına karşın, öğrencilerin fonksiyonlar hakkında grafiksel, sayısal ve cebirsel bilgilere sahip olmaları gerektiği belirtilmektedir. Ayrıca öğrencilerin grafikleri yorumlamayı, örüntü tabloları oluşturmayı ve hem açıklamaları basitleştiren hem de onlardan yeni bir anlam çıkaracak cebirsel ifadeler kullanmaları gerektiği ifade edilmektedir. Çalışmada verilen bu etkinliklerin öğrencilerin kaos ve fraktal geometri ile ilgili ön bilgiler kazanmalarına neden olacağı vurgulanmaktadır. Çalışmada 5 çalışma yaprağı geliştirilmiştir. Hazırlanan etkinlikler 9-12 sınıf seviyelerindeki öğrencilere yöneliktir ve etkinliklerin sınıf içi uygulamalarında ANS şeklinde bir program kullanılmıştır. Bu program sayesinde öğrenciler hem hesaplamalar yapabilmekte hem de grafik çizebilmektedirler.

Çalışmada ilk iki etkinlik doğum günü problemi adı altında verilmiştir. Bu etkinliklerin amacı sayısal tekrarlamaları öğrencilere göstermek ve bu tekrarlamaları kullanarak matematiksel modeller oluşturmaktır. Aynı zamanda bu etkinliğin yörünge, mahkum nokta ile kaçak nokta kavramlarını oluşturulmasında etkili olduğu ifade edilmektedir. Öğrenciler ilk etkinlikte noktaların sabit bir değere yaklaştığını, ancak ikinci etkinlikte ise noktaların birbirlerinden uzaklaştıklarını görmelerinin beklendiği belirtilmektedir. Bu etkinliklerin Mandelbrot ve Julia kümelerindeki kaçak ve mahkum nokta kavramları için temel teşkil edebileceği söylenebilir.

Çalışmada üçüncü etkinlik grip ilacı dozu problemi adı altında verilmiştir. Bu etkinlik de öğrencilerin yörünge ve kaçak mahkum nokta kavramlarını oluşturmaya yönelik hazırlanmıştır. Etkinlikte farklı durumlarda verilen ilaç dozlarının vücuttaki kalma miktarlarına yönelik öğrencilerin formüller oluşturmaları ve oluşturdukları formüllere göre kalan ilaç miktarını belirlemeleri istenmektedir. Hazırlanan etkinlik sayısal tekrarlama kurallarının günlük yaşamdaki kullanımını göstermesi açısından önemlidir.

Son iki etkinlik ise faiz hesapları problemi adı altında verilmiştir. Bu etkinlik de öğrencilerin yörünge ve kaçak-mahkum nokta kavramlarını oluşturmaya yönelik hazırlanmıştır. Ancak bu etkinlikte öğrenciler diğer etkinliklerden farklı olarak negatif sayılarla da işlemler yapmakta ve sayının negatif olmasının zarar anlamına geldiğini görmeleri beklenmektedir. Bunun yanında lineer tekrarlama kurallarını kullanarak oluşturulan denklemlere göre noktaların kaçak mahkum ya da sabit olduğuna karar vermelerini sağlayacak matematiksel bir kuralın öğrenciler tarafından oluşturmaları da beklenmektedir.

Bu bağlamda hazırlanan etkinliklerin kaçak, mahkum, sabit nokta ve yörünge kavramlarının oluşmasında ve cebirsel tekrarlama kurallarının günlük hayattaki kullanımlarının gösterilmesi açısından önemli olduğu ifade edilebilir. Çalışmada "Faiz hesapları" problemleri kullanılmıştır. Bu etkinlikler öğrencilerin sayısal olarak tekrarlama mantığını edinmelerine yardımcı olmaktadır. Ayrıca öğrenciler tablolar oluşturma, grafik çizme ve çizilen grafiği yorumlama şeklinde aktiviteleri de yapma imkanı elde etmektedirler. Araştırmacının hazırladıkları bu etkinlikler Excel programı yardımıyla kolayca yapılabilmektedir. Bu nedenle fraktallar ve kaos konularını sınıf ortamına taşımada bu ve buna benzer etkinliklerin kullanılması faydalı olacaktır.

Devaney (1998) fraktalların matematik öğretim programlarına katılmalarının gerekçelerine yer verdiği çalışmasında Sierpinski üçgeni ve kaos oyunuyla kaos oyununu sınıfta nasıl oynanacağına yönelik açıklamalarda bulunmaktadır. Bunun yanında tekrarlama, öz-benzerlik ve fraktal boyut kavramlarını da açıklamaktadır. Fraktal geometrinin güncel bir konu olmasının, biyoloji, iş dünyası, coğrafya, sanat ve müzik gibi birçok farklı alanda kullanılmasının ve bilgisayar destekli oluşturulan Mandelbrot kümesi, Julia kümeleri ve Koch eğrisi gibi fraktalların öğrencilerin ilgisini çekmesinin onların matematik öğretim programlarına girmesini zorunlu hale getirdiğini belirtmektedir. Buna karşın yapılan birçok çalışmada fraktalların sadece güzel şekiller olarak sunulduğu ve matematik alt yapılarına yeterince yer verilmediği belirtilmektedir. Bu durumun fraktalların öğrenciler tarafından bir matematiksel mantığı olmayan bilgisayarların oluşturduğu şekiller olarak algılanmasına neden olduğu ifade edilmektedir. Bu çalışmada öğrencilere daha çok fraktalların bu yönünün gösterilmesinin amaçlandığı belirtilmektedir. Tanıtılan sınıf içi uygulamaların daha çok ortaöğretim öğrencilerine yönelik olduğu vurgulanmaktadır. Çalışmada ilk olarak kaos oyununun sınıf içerisinde kağıt kalemle nasıl oynanacağı açıklanmaktadır. Birçok öğrencinin bu oyunu ilk kez oynadıklarında oyun sonunda ya düzensiz noktalar yığını ya da tam bir üçgenin oluşacağını tahmin ettikleri belirtilmektedir. Ancak oyun sonunda Sierpinski üçgeni oluşunca öğrencilerin çok şaşırdıkları ve bunun nedenini sorguladıkları ifade edilmektedir. Çalışmada herhangi bir öğrenci grubunun kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğuna yönelik bir tartışmasına yer verilmemiştir. Kaos oyununun öğrencilere geometrik algılarını geliştirmelerinde ve lineer dönüşümlerin geometrisini anlamalarında önemli fırsatlar sunduğunu ifade etmektedir. Devaney, kaos oyununun kuralı ya da oynanan nokta sayısı değiştirildiğinde farklı yapıların oluştuğunu ifade etmekte ve bu durumların sınıf ortamında tartışılmasını önermektedir Bunun yanında kaos oyununda döndürmeleri kullanmanın öğrencilerin geometrik sezgilerinin gelişmesine katkı sağlayacağını ifade etmektedir.

Kaos oyunundan sonra kurallı olarak Sierpinski üçgeninin nasıl oluştuğu açıklanmakta ve oluşan üçgen sayısı ve kenar uzunluklarındaki değişimlere yönelik örüntüler sunulmaktadır. Bunun yanında Sierpinski üçgeninin öz-benzerliği parça-bütün karşılaştırması yapılarak ve büyüme oranı ile öz-bezer parça sayısına göre tanımlanmıştır.

Yapılan bu tanım kullanılarak fraktal boyutun nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir. Devaney'de (1998) çalışmasında özel örnekler üzerinden bir genelmeye ulaşarak boyut tanımını vermiş, ancak öğrencilerin kesirli boyutları algılamakta zorlandıklarını ifade etmiştir. Bunun nedenlerinden birini öğrencilerin sahip oldukları boyut tanımlarının yetersizliğine bağlıyor. Öğrencilerin boyutu en, boy ve yükseklik olarak tanımladığını ve düzlemin niçin 2 boyutlu olduğu sorulduğunda 2 boyutu olmasından yani eni ve boyundan dolayı iki boyutlu olduğunu ifade ettiklerini belirtmektedir. Bu durumun öğrencilerin boyut konusunda matematiksel bir tanımlarının olmadığını gösterdiğini ifade etmektedir. Diğer bir nedeni ise düzlemde ya da uzayda tanımlanan bir eğrinin boyutunun tek boyutlu olduğu belirtilmesine karşın öğrencilerin bu eğrinin boyutunu 2 ya da 3 olarak algılamalarına bağlıyor. Bu nedenle doğrunun ve düzlemin 1 ve 2 boyutlu olmasının nedenini onların öz-benzer olmalarına dayandırmaktadır. Bu açıklaması aslında verdiği formülün özel örnekler kullanılarak oluşturulmadığını herhangi bir tamamen öz-benzer nesne için oluşturulduğunu göstermektedir.

Devaney (1998) fraktal boyutu şeklin karmaşıklığını ölçtüğünü ifade etmektedir. Kabaca boyutun verilen bir kümede kaç tane noktanın bulunduğuna karar verme olduğunu belirtmektedir. Ancak sayılamaz sayıda nokta olduğundan bu sayıları saymak imkansızdır. Bu nedenle fraktal boyutu "kümenin ne kadar geniş olduğu kavramını ifade eden sayısal bir gösterimdir" şeklinde tanımlamaktadır.

Özetle, yukarıda fraktal geometri konularının öğretimine yönelik yukarıdaki çalışmalar incelendiğinde farklı sınıf seviyeleri için bu konunun öğretiminin yapılabileceği görülmektedir. Goldenberg (1991), Choate ve Picciotta (1997) ve Fraboni ve Moller (2008) 7-12. sınıf seviyesi için fraktalların öğretiminin gerçekleşeceğini savunurken Naylor (1999) ve Naylor (2005) ise 3-12. sınıf seviyelerinde bu tür bir öğretimin gerçekleşebileceğini belirtmektedir. Bunun yanında yapılan çalışmalarda fraktal geometri konularının ilköğretim seviyesinde sayı dizileri, simetri, oran-orantı, kesirler, ölçme ve benzerlik konularıyla (Coes III, 1993; Naylor, 2005; Adams ve Aslan-Tutak, 2006; Fraboni ve Moller, 2008) ve daha yüksek sınıflarda ise logaritma, fonksiyonlar, dönüşüm geometrisi, karmaşık sayılar, olasılık, limit ve seriler gibi bir çok geleneksel matematik konusuyla yakından ilişkisi olduğu (Thomas, 1989; Kern ve Mauk, 1990; Camp, 1991; Goldenberg, 1991; Sandefur, 1996; Devaney, 1997; Devaney, 1998; Naylor, 1999; Gluchoff, 2006; Fraboni ve Moller, 2008) belirtilmektedir. Bu durum aynı zamanda fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanan bir programının mevcut matematik öğretim programlarıyla ilişkili olduğu konuları göstermekte ve aynı zamanda entegrasyonun hangi konular üzerinde yapılabileceği yönünde bir ışık tutmaktadır.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde fraktalların öğretiminde hem manipulatif etkinliklerin (Camp, 1991; Coes III, 1993; Naylor, 1999; Naylor, 2005; Adams ve Aslan Tutak, 2006) hem de bilgisayar destekli etkinliklerin (Thomas, 1989; Kern ve Mauk, 1990; Goldenberg, 1991; Devaney, 1998; Choate ve Picciotta, 1998) etkili olacağı ifade edilebilir. Bu bağlamda fraktalların öğretimine yönelik hazırlanan bir öğretim programında hem manipulatif hem de bilgisayar destekli etkinliklere yer verilmesi bu konuların öğrenilmesinde etkili olabileceği söylenebilir. Çünkü manipulatif etkinliklerle fraktal yapıları oluşturan öğrenciler adım adım kağıt üzerinde yapıların oluşumunu görebilmekte ve bilgisayar destekli etkinliklerde ise şekillerin daha doğru ve gerçekçi hallerini elde edebilmekte, fraktalların sonsuz olduğu sezgisini edinebilmekte ve farklı değişkenler altında oluşan şekilleri gözlemleme fırsatı elde edebilmektedirler.

Yapılan çalışmalar fraktal geometrinin mevcut matematik öğretim programlarını hareketlendireceği ve öğrencilerin matematiğin ölü, değişmez gerçek ve tekniklerden oluştuğu düşüncelerini değiştirebileceği belirtilmektedir. Bunun yanında öğrencilerin matematiğe olan ilgilerini artırmada ve bu ilgiyi sürdürmede etkili olabileceği de belirtilmektedir (Goldenberg, 1991; Devaney, 1998). Bu bağlamda fraktal geometri konularının öğrencileri matematiğe yönelik duyuşsal yönden olumlu etkileyeceği ifade edilebilir.

1.10.2. Tek Bir Fraktal Geometri Konusunun Öğretimiyle İlgili Çalışmalar

Barton (1990) çalışmasında öğrencilerine hem manipulatif olarak hem de bilgisayar programlarını kullanarak Kaos oyunu oynatmıştır. Ancak Barton (1990) çalışmasında kaos oyununa yönelik hazırladığı bu etkinliklerin hangi sınıf seviyesine uygun olduğu yönünde bir açıklama yapmamaktadır. Çalışmanın başında Barton'un (1990) öğrencileri kağıt kalem kullanarak kaos oyununu oynamakta ve oyun sonunda oluşacak şekli tahmin etmeye çalışmaktadırlar. Daha sonra Barton (1990) öğrencilerine oluşturdukları şeklin ne olduğu konusundaki tahminlerini doğrulatmak amacıyla Basic programını kullanarak algoritmalar tanımlatmıştır. Barton (1990) bazı öğrencilerin oyun sonucu oluşan noktaların rastgele saçılacağını düşündüklerini gözlemlediğini ifade etmekte, ancak ilerleyen süreçler sonunda oluşan şeklin Sierpinski üçgenine benzediğini gördüklerinde çok şaşırdıklarını belirtmektedir.

Barton (1990) kaos oyunu için oldukça farklı bir algoritma geliştirmiştir. Bu algoritmada bir noktanın dönmeler ve çevirmeler boyunca dönüşümünü gösteren bir matris denklemi kullanmıştır. Barton bir noktayı (vektörü) dönüştürmek için kullanılan matris denklemini

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RCos(A) & -SSin(A) \\ RSin(A) & SCos(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix}.$$

olarak tanımlamaktadır. Bu eşitlikte R, yatay ölçek değişkeni, S dikey ölçek değişkeni, A saatin tersi yönünde dönme açısını, H yatay çevirimi, K dikey çevirimi, X_n ve Y_n başlangıç şeklinin koordinatlarını ve X_{n+1} ve Y_{n+1} dönüşüm altındaki şeklin koordinatlarını göstermektedir. R,S,A,H ve K parametreleri için farklı değerler tanımlayarak bu matris dönüşümünün kaos oyununda kullanılan her bir dönüşümü tanımlamada kullanılabileceğini belirtmektedir. Barton (1990) bu denklemi kullanarak bir kaos oyunu programı geliştirmiştir. Denklem aynı zamanda farklı şekillerin oluşmasına imkan verecek değişikliklerin yapılmasına da izin vermektedir. Böylece programdaki R,S,A,H ve K parametrelerinin değiştirilmesiyle öğrenciler rutin bir kaos oyunundan farklı bir kaos oyunu oynama fırsatı elde etmekteler. Bu durum öğrencilerin döndürme ve çevirme işlemlerinin değişmeli olup olmadığını keşfetmelerine yardım etmektedir. Bu yolla Barton (1990) dönüşüm geometrisi, koordinat sistemi, matrisler gibi birçok ileri matematik kavramı ile oldukça basit bir etkinliği birleştirmiştir. Bunun yanında Barton (1990) manipulatif olarak kaos oyununu oynatarak öğrencilerin noktaların hareketlerini daha iyi anlamlarını sağlamaya çalışmakta ve bilgisayar destekli etkinliklerle de öğrencilerin oyun sonunda oluşan şekilleri belirlemelerine ve farklı değişkenler için oluşan şekilleri tanımlamalarına yardımcı olmaya çalışmaktadır.

Benzer şekilde Cibes'de (1990) çalışmasında bilgisayar teknolojisinin yardımıyla dinamik sistemlerin daha rahat anlaşılabildiğini ve bu nedenle de lise öğrencileri tarafından bu konunun incelenebileceğini ifade etmektedir. Bu amaçla bilgisayar ortamında kaos oyununu oynayarak Sierpinski üçgeninin oluşumunu gerçekleştirmiştir. Çalışmasında kendisinin ya da öğrencilerinin yaşadıkları deneyimlere yer vermemektedir. Çalışmasını ilginç yapan şey Sierpinski üçgenini hem kurallı hem de rastgele olarak ifade edilen bir yolla oluşturmasıdır. SRPNSKI.B1 ve SRPNSKI.B2 gibi iki program kullanmaktadır. SRPNSKI.B1 programında bildiğimiz kaos oyunundaki gibi üç nokta seçilip dördüncü noktaya göre oyun oynanırken SRPNSKI.B2 programında Cibes(1990), Barton'dan (1990) esinlenmiştir. Bu oyunda sabit 3 nokta yerine 3 sabit nokta dönüşümü vardır ve yeni bir nokta oluşturulduğunda bir dönüşüm rastgele seçilmektedir. Süreç rastgele tekrarlama ile noktalar oluşturmaktadır ve bu tahmin edilemeyen tekrarlama süreci sonunda Sierpinski üçgeni oluşmaktadır. Bu çalışmada yapılan etkinlikler bilgisayar deneyimleri ve şaşırtıcı grafik gösterileri için iyi bir fırsat sunmaktadır. Basit ile karmaşık arasındaki ve kurallı ile rastgele arasındaki etkileşim zihinsel bir çekinmeye neden olmaktadır. Cibes bu alanı sınıflarında uygulamayı düşünen matematik öğretmenlerinin kendileri ve öğrencileri için beklentilerinin ötesinde yenilik ve heyecan bulacaklarını ifade etmektedir. Ayrıca, çalışmada kaos oyunu etkinlikleri ile öğretmenlerin öğrencilerine NCTM 1989'daki 9-12 sınıf için standartlarından biri olan "matematiksel ilişkilendirme" için bir fırsat verebileceği belirtilmektedir.

Devaney (2004) çalışmasında birçok öğretmenin kaos oyunu ve fraktal geometri kavramlarını cebir ve geometri müfredatlarına dahil etmeye başladıklarını ifade etmektedir. Bunun yanında kaos oyunu yaklaşımının öğretmenlere öğrencilerinin afine dönüşümlerin geometrisini anlamalarında yardımcı olacağını belirtmektedir. Devaney çalışmasında ilköğretim ikinci kademe, ortaöğretim ile bir yaz okulundaki öğrencilere yönelik kaos oyunu etkinlikleri tasarlanmış ve uygulamıştır. Çalışmasının başında klasik olarak kaos oyununun nasıl oynandığını açıklamış ve öğrencilerin oyun sonunda Sierpinski üçgeninin oluştuğunu gördüklerinde "Köşe noktalarının sayısını değiştirirsek ne tür bir şekil oluşur?" ve "Noktanın hareketi kuralını değiştirirsek ne tür bir şekil oluşur?" sorularını kendisine yönelttiklerini ifade etmiştir. Devaney (2004) bu soruların öğrencilerin dönüşüm geometrisi kavramıyla ilişki kurmaya başladıklarını gösterdiğini ifade etmektedir. Öğrencilerin bu sorularının aynı zamanda kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu merak ettiklerini de göstermektedir. Devaney çalışmasında öğrencilerin ya da kendisinin yaşadığı deneyimlere yer vermemektedir. Buna karşın öğrencilerin soruları paralelinde farklı noktalara ve farklı tekrarlama kurallarına göre oyunu oynatmaktadır. Oyunlar bir web sitesinde verilen java programı sayesinde oynanmaktadır. Oyunlar sonucunda farklı fraktal şekiller oluşmasına karşın fraktal olmayan şekillerin de oluştuğunu ifade etmektedir. Bu açıklama her kaos oyunu sonucu bir fraktal şeklin oluşamayacağını da göstermektedir. Bunun yanında Devaney (2004) kaos oyununun başlangıçta kağıt kalem üzerinde oynatılmasının oyunun temel fikrinin öğrenciler tarafından daha anlamlı olarak anlaşılabileceğini ifade etmektedir. Ayrıca kaos oyununun öğrencilerin dönüşüm (büzülme, dönme, çevirme ve yansıma) kavramını geometrik olarak daha anlamlı olarak öğrenmelerine yardımcı olduğunu ifade etmektedir.

Iovinelli (2000) ise çalışmasında öğrencilerine kaos teoriyi anlamaları için nüfus artışı üzerine bir etkinlik tasarlamıştır. Farklı konular üzerine de etkinlikler tasarlanabileceğini belirtmekte, ancak konu seçiminde öğrencilerin seviyelerinin göz önünde bulundurulmasının gerekli olduğunu vurgulamaktadır. Örneğin hava tahmini üzerine tasarlanan bir modelin oldukça karmaşık olacağından dolayı çok uygun olmadığını ifade etmektedir. Tasarladığı nüfus artışı modelinde yaşanılan çevrenin maksimum nüfusu taşıması, yeterli yiyecek, ölüm vb. unsurlardan etkilendiğini ifade etmektedir. Yani nüfus artışını dış etmelerden bağımsız lineer bir denklemle modellemek gerçeği çok fazla yansıtmayacaktır. Bu nedenle modelini y=ax(1-x) fonksiyonuyla tanımlamaktadır. Burada Iovinelli y, ile gelecekteki nüfusu, a, ile doğurganlık oranını, x ile şu anki nüfusu ve 1 ile de maksimum nüfusu belirtmektedir. Öncelikle öğrencelerinden doğurganlık oranını a=2,5 olarak almalarını ve nüfus dağılımında nasıl bir değişim olduğunu gözlemlemelerini istemiştir. Böylece öğrencilerinden TI-82 programını kullanarak bir sonraki nesildeki nüfusun ne olacağını tahmin etmelerini beklemektedir. Farklı a, değişkenleri için bu işlem yinelendiğinde modeldeki nüfus değişiminin belli bir süre sonra bir düzene girdiğini öğrencilerin gözlemlediğini ifade etmektedir. Bu aşamaya kadar öğrencilerin modeli anladıkları, ancak kaotik bir olayla karşılaşmadıklarını belirtmektedir. Bunun için öğrencilerden a=3,9 seçilmelerini istemiştir. Bu değeri seçen öğrencilerin modelde oluşan değerlerin belli bir düzende değil de rastgele davrandıklarını gözlemlediklerini belirtmiştir. Böylece öğrencilerinin kaotik bir olayla karşılaştıklarını ifade etmektedir. Yani doğurganlık oranı 3,9 olarak alındığında gelecekteki nüfusun nasıl olacağına karar verilemeyeceğini gözlemlediklerini belirtmektedir. Iovinelli (2000) çalışmasında matematiksel olarak kaos teoriyi tanımlamamasına karşın öğrencilerinin matematiğin bu yeni alanında küçük değişikliklerin nasıl farklı sonuçların oluşmasına neden olduğunu gördüklerini ifade etmektedir. Bu bağlamda bu çalışma kaos teorinin öğretimi için hazırlanacak çalışma yaprakları ve soruların belirlenmesinde bir yol gösterici niteliğindedir.

Frantz ve Lazarnick (1991) çalışmalarında bir grup ortaöğretim öğrencisine Mandelbrot kümesinin öğretimini gerçekleştirmişlerdir. Çalışmaları 6 gün boyunca sürmüş ve bu süre zarfında izledikleri yolu ve kullandıkları materyallerini çalışmalarında tanıtmışlardır. Bu amaçla hem geleneksel matematik müfredatlarını hem de NCTM'in

(1991) standartlarını temel alarak 6 kazanım belirlemişlerdir. Hazırladıkları materyaller ile öğrencilerinin

- Karmaşık sayı işlemlerinde ve grafiklerinde yeterli olmalarını,
- Tekrarlama sürecini anlamalarını ve kullanmalarını,
- Mandelbrot kümesinin nasıl oluştuğunu anlamalarını,
- Karmaşık hesaplamalar için hesap makinası kullanma yeteneğini ve deneyimini kazanmalarını,
- Bilgisayarlarla işlem yapabilme yeteneğini kazanmalarını ve
- Matematikte güzel ve güncel konularla ilgilenmelerini,

gibi kazanımların gerçekleştirilmesini amaçlamışlardır. Öğrenciler 3 gün boyunca karmaşık sayılarda işlemler, onların grafikleri ve bir noktanın orijine olan uzaklığının hesaplanmasıyla uğraştıktan sonra 4. gün fraktallar ve tekrarlama hesaplamaları konularına giriş yapmışlardır. Çalışmada ilk olarak öğrencilerden verilen bir noktanın Mandelbrot kümesi içerisinde olup olmadığını belirlemeleri istenmiştir. Bu amaçla hesap makinelerini kullanarak öğrencilerin $z_{n+1} = z_n^2 + a + bi$ tekrarlama kuralına göre 0 başlangıç noktasının yörüngelerinin incelemeleri sağlanmıştır. Araştırmacılar bu etkinliğin öğrencilerin Mandelbrot kümesinin tekrarlama süreçleri sonucu oluştuğunu anlamalarına yardımcı olacağını ifade etmektedirler.

Çalışmanın son 3 gününde ise iki bilgisayar programı kullanılmıştır. Bu programlardan birinin çalışmaya katılan öğrencilerden birinin oluşturduğu diğerinin ise ticari bir yazılım olduğu belirtilmektedir. Öğrenciler öncelikle noktaların Mandelbrot kümesi içerisinde olup olmadığını belirlemekte, daha sonra ise ticari yazılımı kullanarak Mandelbrot kümesini incelemektedirler. Araştırmacılar öğrencilerin kullanılan yazılıma ya da izlenen yola yönelik düşüncelerine çok fazla yer vermemektedirler. Sadece bilgisayar programlarının öğrencileri heyecanlandırdığı ve karmaşık sayıları programları kullanarak aramanın eğlenceli olduğu belirtilmektedir. Bu açıdan bakıldığında bu etkinliklerin öğrencileri duyuşsal yönden olumlu etkilediği ifade edilebilir. Bunun yanında araştırmacıların belirledikleri kazanımlar ve izledikleri yollarda Mandelbrot kümelerinin öğretimi için önemli ipuçları sunmaktadır.

Benzer şekilde Ford (2004) çalışmasında öğrencilerinden TI-83 grafik hesaplama programını kullanarak Mandelbrot kümesini oluşturmalarını istemektedir. Burada araştırmacının asıl amacı Mandelbrot kümesinin oluşumundaki matematiksel yapıların öğrenciler tarafından keşfedilmesini ve bu keşif sürecinde teknolojinin öğrencilerce etkin olarak kullanılmasını sağlamaktır. Ford çalışmasında öğrencilerin Mandelbrot kümesini bilgisayar programlarını kullanarak oluştururken karmaşık sayıların çeşitli özelliklerini kullanacağını ve bir tekrarlama kuralı belirleyeceğini belirtmektedir. Bu durumun öğrencilerin bu tür problemleri çözmede teknolojiyi nasıl kullanacaklarını görmelerinde ve problemin altında yatan matematiksel nedenleri keşfetmelerinde etkili olacağını ifade etmektedir. Çalışmada TI-83 programı kullanılarak öğrenci çalışma yaprakları ve öğretmen kılavuzu hazırlamıştır. Hazırlanan çalışma yaprakları ortaöğretim öğrencilerine yöneliktir ve öğrencilerin karmaşık fonksiyonlarla işlemler yapabildiği belirtilmektedir. Çalışma yaprakları grup çalışması şekilde hazırlanmıştır. Araştırmacı çalışmayı 3 gün boyunca sürdürmüştür. İlk gün öğrencilere Mandelbrot kümesi tanıtılmış ve onun nasıl oluştuğu açıklanmıştır. İkinci gün öğrencilerin kullanacakları programın tanıtımı yapılmış ve programı kullanarak basit aktiviteler yapmaları sağlanmıştır. Üçüncü gün ise asıl çalışma gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler verilen programı ve çalışma yapraklarını kullanarak Mandelbrot kümesini elde etmişlerdir. Çalışmada öğrenciler farklı tekrarlama aralıkları için renkler belirleyerek program sonunda oluşan Mandelbrot kümesini de renkli hale getirmişlerdir. Bu etkinlik bu haliyle Mandelbrot kümesinin oluşumunun öğrenciler tarafından anlaşılmasına da yardımcı olabilir. Bunun yanında çalışma yaprakları sayesinde Mandelbrot kümesinin oluşumundaki saklı matematiksel yapıları da görme fırsatı elde etmektedirler.

Simmt ve Davis (1998) çalışmalarında somut fraktal yapılar oluşturarak bu yapılar içerisindeki matematiksel örüntüleri öğrencilerinin incelemelerini amaçlamaktadırlar. Bu amaç doğrultusunda fraktal kartların nasıl oluşturulduğu hakkında bilgiler vermekte ve bu etkinliğin öğrencileri duyuşsal yönden olumlu etkilediğini belirtmektedirler. Bunun yanında bu çalışmada öğrencilerin oluşturdukları model altında yatan matematiği görmeleri amaçlanmıştır. Çalışma ilköğretim (5-8), lise (9-12) ve öğretmen adaylarına yönelik hazırlanmıştır. Farklı seviyedeki öğrenciler verilen basit tekrarlama kurallarını kullanarak kesme ve katlamalarla 3 boyutlu fraktal kart modelleri oluşturmaktadırlar. Ancak temel amaç bu şekilleri oluşturmak değil şekil içerisindeki matematiği ortaya çıkarmaktır. Araştırmacılar NCTM (1989) standartlarında geometri ve soyut matematik alanlarındaki konular arasında ilişkiler kurulmasına dikkat çekildiğini belirtmektedirler. Bu bağlamda hazırladıkları etkinliğin ölçme, sayı dizileri, diziler, seriler ve limit gibi konularla tekrarlama, öz-benzerlik ve kesirli boyut kavramlarını içerdiği belirtilmektedir. Bunun yanında bu etkinliğin öğrenciye görelilik ilkesine göre hazırlandığı ve farklı ön bilgilere sahip öğrencilerin kendi ilgi ve yetenekleriyle matematiksel bilgileri doğrultusunda problem ve sorular oluşturabilecekleri ifade edilmektedir.

Çalışmanın ilk kısmında fraktal kartların nasıl oluştuğu açıklanmaktadır. Daha sonra ise farklı seviyedeki öğrencilerin oluşturdukları modeller üzerindeki matematiğe yönelik tartışmaların yapıldığı belirtilmektedir. Düşük sınıf seviyesindeki öğrenciler için tartışmaların daha çok modelde oluşan hücre sayısı ve toplam kesme sayısı ile bunların belli bir adımdaki genellemelerini içerecek şekilde olması vurgulanmaktadır. Bunun yanında sınıf seviyesi arttıkça oluşan modelin yüzey alanı ve belli bir adım için bu yüzey alanını veren formülün bulunması şeklinde tartışmaların devam etmesi tavsiye edilmektedir. Daha yüksek sınıf seviyelerinde ise öğrencilerin limit kavramını kullanarak bu ifadeleri hesaplayabileceği vurgulanmaktadır. Bu bağlamda bu etkinlik farklı sınıf seviyelerinde fraktal kavramlarının öğretilebileceğini göstermektedir.

Benzer şekilde Kelley (1999) de temel fraktal özellikleri olan öz-benzerlik ve tekrarlama süreçlerini öğrencilerin el becerilerini kullanarak görmelerini sağlamak amacıyla çalıştığı okul olan Anoka High School'da öğrencilerinden oluşturduğu bir grup ile NCTM'in 75. yıllık toplantısı için Minneapolis toplantı merkezine üç boyutlu bir Sierpinski piramidi yapmıştır. Öğrenciler Sierpinski piramidini yaparken somut materyaller kullanmakta ve böylece bu fraktalın nasıl oluştuğunu (tekrarlama döngüsünü) daha iyi anlamaktadırlar. Bunun yanında oluşturdukları somut yapıda öz-benzerlik kavramını daha ayrıntılı olarak inceleme fırsatı elde etmektedirler. Bu bağlamda somut materyallerin fraktalların oluşum süreçlerini görmede ve öz-benzerlik kavramını oluşturmada etkili olduğu söylenebilir. Bunun yanında Kelley (1999) bu etkinliğin öğrencilerinin oldukça ilgisini çektiğini belirtmektedir. Sierpinski piramidini oluştururken Kelley (1999) öğrencilerinin düzgün dörtyüzlü kalıplarını kullandığını ve kullanılan kalıp sayısına göre oluşacak piramidin yüksekliğini hesaplamaya çalıştıklarını belirtmektedir. Bu bağlamda bu çalışma öğrencilerin klasik geometri bilgilerini kullanarak karmaşık fraktal geometri şekillerini kolayca oluşturabileceği düşüncesini desteklemektedir.

Bolte (2002) ortaöğretim öğrencilerinin bir üçgenin alanı ve çevresini hesaplayabildiklerini ifade etmektedir. Çalışmasında öğrencilerinin üçgenin alanı ve çevresini hesaplamadaki bilgilerini kullanarak Koch kartanesinin alanı ve çevresini hesaplamaya yönelik bir proje tasarlamıştır. Proje hayali bir şirketin kartanesinin oluşum adımlarına göre ürettiği tabakların çevresi ve alanını hesaplamaya yöneliktir. Öğrenciler her bir adımda oluşan çevre ve alana göre hangi adımda en karlı tabağın üretileceğini bulmaya çalışmaktadırlar. Bu bağlamda öğrenciler tablo ve grafikleri kullanarak her bir adımda oluşan tabakların maliyet ve kar durumlarını hesaplamışlardır. Bolte (2002) öğrencilerinin hazırladığı projeleri değerlendirmek için çalışmasında bir rubriğe de yer vermektedir. Rubriğinde öğrencilerinin projelerini problem çözme, matematiksel doğruluk, kavramlar arası ilişki, düzen ve yazım kuralları başlıkları altında mükemmel, güzel, iyi, orta, zayıf ve kabul edilemez şeklinde derecelendirerek değerlendirmiştir. Çalışmada öğrencilerin projeyi yaparken yaşadıkları güçlüklere ve yansımalara yer verilmemiştir. Ancak ekler kısmında bir öğrencinin projesinin örneği sunulmuştur. Bu etkinlik kartanesinin alanı ve çevresini hesaplamayı, bir seri yardımıyla kar ve zarar durumlarını ve uzun vadeli olarak karın en uygun olduğu durumu belirlemeyi içermektedir. Bu durum bu etkinliğin fraktallar, seriler ve kar-zarar durumları gibi matematiğin farklı alanlarının birlikte kullanıldığını göstermektedir.

Thomas ve diğer. (2002) çalışmalarında bilgisayar teknolojisini kullanarak Koch kartanesinin çevresi ve alanı üzerine örüntüler bulmayı amaçlamaktadır. Çalışma 3 gün bir lise 2. sınıf öğrencisi ile bir ilköğretim 5. sınıf öğrencisiyle birlikte sürdürülmüş ve etkinliklerin yapılmasında öğretim amaçlı bir web sitesi, Geometer’s Skecthpad ve Excel kullanılmıştır. Lise 2. Sınıf öğrenci verilen etkinlikler bağlamında 5. Sınıf öğrencisine Koch kartanesinin alanı ve hacminin öğretimini bir öğretmen gibi yapmakta, bunu yaparken kendisi de konuyu öğrenmektedir.

İlk gün öğrencilere öz-benzerlik kavramına yönelik bilgiler verilmiştir. Öz-benzerlik kavramının öğretiminde eğrelti otu ve brokoli gibi doğal nesneler kullanılmış, daha sonra ise edindikleri bu bilgilerle matematiksel fraktallar için öz-benzerlik aranmıştır. Yapılan tartışmada öğrencilerin doğal nesnelerin sonlu adımlar için parçalarının tam olarak birbirlerine benzememelerinden dolayı bu nesnelerin gerçekte fraktal olmadıklarını ifade ettikleri belirlenmiştir. Öğrenciler bilgisayar programlarını kullanarak Koch kartanesini adım adım oluşturmaya çalışmışlar ve karşılaşılan bir diğer önemli problem ise bilgisayar programlarının da sonuçta belli bir adıma kadar fraktalı oluşturmasıdır. Bu durumun ise öğrencilerin yapının tekrar etmediğini görsel olarak görmelerine karşın sezgisel olarak devam ettiğini anlamada zorlanmalarına neden olduğunu belirtmektedirler. Bunun yanında programları kullanarak her bir adımda oluşan parça sayısı ile parçaların uzunluklarının nasıl değiştiğine yönelik örüntüler buldukları ifade edilmektedir.

İkinci gün çalışma sadece lise 2. sınıf öğrencisiyle devam etmiştir. Öğrencinin Excel programını ve çalışma yaprağını kullanarak Koch kartanesinin çevresinin sonsuza gittiğini belirlediği ifade edilmektedir. Bunun yanında çevreyi hesaplamak için yaptığı işlemler sonucunda fraktalların sonsuz yapıda olduklarını ve bu nedenle şekillerinin asla çizilemeyeceğini anladığı da belirtilmektedir.

Üçüncü gün hem lise 2. sınıf hem de ilköğretim 5. sınıf öğrencisinin çalışmaya katıldığı ve Koch kartanesinin alanının sınırlı olduğunu buldukları ifade edilmiştir. Ancak bu sonuca ulaşmada bilgisayar programlarının yetersiz kaldığı belirtilmektedir. Çünkü alan yavaş yavaş olsa da artmaktadır, ancak öğrencilerin sezgisel olarak bir müddet sonra çok küçük alanların ekleneceği ifade edildiğinden alanının belli bir süre sonra sınırlı kalacağını ifade ettikleri belirlenmiştir.

Yapılan bu çalışma doğal fraktalların sahip oldukları özelliklerin fraktalların özelliklerini tam olarak yansıtmadıklarını ve bu nedenle öğrencilerin anlamalarında yanılgıların olmasına neden olduğu görülmektedir. Bunun yanında limit ve geometrik seri kavramlarını tam olarak bilmeyen öğrencilerin fraktalların çevresini ve alanını hesaplamada sorunla karşılaştıkları ve bu sorunun nedeninin ise kullandıkları bilgisayar programlarının fraktalların sonsuz şekillerini göstermedeki yetersizliği olduğu ifade edilmektedir.

Perham ve Perham (2005) çalışmalarında fraktal şekillerin oluşturulmasının bir yolu olan ve Logo programlama diline benzeyen bir dil kullanan L-sistemleri ya da diğer adıyla Lindermayer sistemleri kullanarak düzlemde tanımlı olan Koch kartanesi, Sierpinski üçgeni ve Harter-Heighway ejderini oluşturmaya yönelik etkinlikler tasarlamışlardır. L-sistemlerin Logo geometrisine benzer şekilde öğrencilerin birçok fraktalı oluşturmasına imkân sağladıkları belirtilmektedir. Hazırladıkları etkinlikler lise öğrencilerine yöneliktir, ancak hem kendi deneyimlerinden hem de öğrencilerin yaşadıkları süreçlerden çok fazla söz edilmemektedir. L-sistemlerin programlama dilinde F, belli bir uzunlukta ileri git; -, belli bir açıyla sağa dön; +, belli bir açıyla sola dönü temsil etmektedir. Bu bağlamda Perham ve Perham Koch kartanesi oluşturacak aksiyomu F+F—F+F olarak tanımlamışlardır. Öğrencilerin her bir tekrarlama adımından sonra oluşan yapıları incelemeleri sağlatılmış ve onlara Koch kartanesinin çevresi ve alanının nasıl değiştiği sorulmuştur. Öğrencilerin çevrenin sonsuza giderken alanın sınırlı kalmasını anlayamadıkları belirlenmiştir. Özellikle öğrencilerin alanın sınırlı olduğunu anlamakta çok zorlandıklarını ifade etmektedirler. Sierpinski üçgeninin oluşturulmasında da Koch kartanesinin oluşturulmasında izlenen yol takip edilmiştir. Yine burada da Sierpinski üçgeninin alanı ve çevresi üzerine sorular sorulmuş, ancak öğrencilerin yanıtlarına yer verilmemiştir. Son olarak Heighway ejderi öncelikle kağıt kalem üzerinde oluşturulmuş, daha sonra ise L-sistemler kullanılarak bilgisayar üzerinde oluşturulmuştur. Araştırmacıları belli bir aşamaya kadar ejder olarak tanımlanan şekli bir ejdere benzetemedikleri ifade edilmektedir. Çok fazla tekrarlamadan sonra ancak oluşan şeklin bir ejder olduğu görülmektedir.

Bu çalışma fraktalların L-sistemler teorisi kullanılarak nasıl oluşturulabildiğini göstermektedir. Özellikle L-sistemler Logo geometrisindeki gibi öğrencilerin algoritmalar geliştirmelerine yardımcı olmaktadır. Öğrenciler geliştirdikleri algoritmalarda oluşan fraktal yapıların tekrarlama kurallarını, dönme açılarını ve uzunluk değişimlerini çok rahatlıkla görebilmektedirler ve bunları değiştirebilmektedirler.

Özetle, yukarıda gerçek sınıf ortamında tek bir fraktal konusunun öğretimine yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde sıklıkla kaos teori üzerine odaklanıldığı görülmektedir (Barton, 1990; Cibes, 1990; Iovinelli, 2000; Devaney, 2004). Bunun yanında Mandelbrot kümeleri, alan-çevre-hacim ve somut modellerle fraktal yapıları oluşturma konularının da öğretiminin yapıldığı belirlenmiştir (Frantz ve Lazarnick, 1991; Simmt ve Davis, 1998; Kelley, 1999; Thomas ve diğer, 2002; Bolte, 2002; Ford, 2004). Kaos teorisine odaklanılmasının bir nedeni kaos oyunu sonucu farklı fraktal yapıların ortaya çıkmasıdır. Yani kaos oyunu fraktalları oluşturmanın bir diğer yoludur. Yapılan çalışmalarda kaos oyununda hem manipulatif hem de bilgisayar destekli etkinliklere yer verildiği belirlenmiştir. Manipulatif etkinlikler daha çok oyunun mantığının öğrenciler tarafından anlaşılmasına yönelik hazırlanmıştır. Bilgisayar destekli etkinlikler de ise daha çok dönüşüm geometrisine yer verildiği tespit edilmiştir. Dönüşümler sayesinde farklı değişkenleri kullanarak öğrenciler farklı fraktal yapıları oluşturabilmekte ve bunları inceleyebilmektedirler. Bunun yanında Mandelbrot kümelerinin öğretiminde ise daha çok kaçak ve mahkum noktalara odaklanıldığı görülmektedir. TI-83 gibi programlar sayesinde hem tekrarlamalar sonucu öğrencilerin oluşan yörüngeleri incelemeleri sağlanmakta hem de öğrencilerin bu kümeleri kendilerinin oluşturmalarına imkan tanınmaktadır. Ayrıca fraktal konularının öğretiminde bilgisayar destekli etkinliklerin yanında somut materyallere de yer verildiği tespit edilmiştir. Bu materyalleri kullanmak fraktal yapıların oluşum adımlarını öğrencilerin daha iyi görmelerini sağlamakta ve onları duyuşsal olarak olumlu etkileyerek derse olan motivasyonlarını artırmaktadır.

1.10.3. Fraktal Geometri Konularının Öğretimine Yönelik Öğretim Programlarının Geliştirilmesiyle İlgili Çalışmalar

Bu başlık altındaki çalışmalar gerçek sınıf ortamındaki uygulamalardan ve bir sınıf ortamında uygulanmamış, teorik olarak hazırlanmış fraktal geometri konularının öğretimine yönelik geliştirilen programlardan elde edilen sonuçlar şeklinde sunulmuştur.

1.10.3.1. Fraktal Geometri Konularının Öğretimine Yönelik Hazırlanan Öğretim Programlarının Gerçek Sınıf Ortamında Uygulanmasıyla İlgili Çalışmalar

Bowers (1991) çalışmasında fraktal geometri konularıyla çalışan öğrencilerin bu konuları öğrenirken karşılaştıkları güçlükleri, gereksinim duydukları matematiksel alt yapıları, fraktal konularına yönelik anlamlarını ve fraktal konularının öğretim ortamlarını belirlemeyi amaçlamıştır. Bu amaçların gerçeklenebilirliğini değerlendirmek için fraktalların tarihsel gelişimini göz önüne alarak 3, 12. sınıf öğrencisinin 3 ders boyunca yaptıkları 4 etkinlik sürecinde yaşadıkları deneyimleri betimlemiştir. Veriler bir anket ve anket doğrultusunda gerçekleştirilen klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Anket öğrencilerdeki mevcut olan boyut ve benzerlik kavramlarını belirlemeye yönelik hazırlanmıştır. Klinik mülakatlarda sadece öğrenmenin gerçekleşip gerçekleşmediği belirlenmeye çalışılmamış, bunun yanında öğrencilerin kesirli boyut kavramına yönelik anlamaları ve karşılaştıkları güçlükleri tespit edilmiştir. 3 ders boyunca yapılan 4 etkinliğin ilkinde öğrenciler verilen bir nesnenin görsel olarak özelliklerini belirlemeye çalışmışlardır. Bu etkinlik aynı zamanda öz-benzerlik ve boyut konuları için de bir giriş niteliğindedir. İkinci etkinlikte öz-benzer olan, kesirli boyuta sahip fraktal şekiller üzerinde çalışılmıştır. Üçüncü etkinlikte öz-benzerliğin matematiksel tanımı verilerek boyutun bu yeni tanımda kullanılması sağlanmıştır. Son etkinlikte ise bir tekrarlama süreci sonunda fraktal yapılar oluşturulmuştur. Bowers (1991) hazırlanan etkinliklerin Van Hiele'in düşünme düzeyleri göz önüne alınarak oluşturulduğunu ve bu nedenle ilk iki etkinliğin birinci düzeye ve son iki etkinliğin ise ikinci düzeye yönelik hazırlandığını belirtmektedir. Bowers (1991) öğrencilerinin fraktal kavramını öğrenirken karşılaştığı güçlükleri üç başlık altında toplamıştır. Bunlardan ilki kesirli boyut kavramının anlaşılmasında yaşanan güçlüklerdir. İkincisi matematiksel tanımı (çevirme, döndürme, ölçekleme) kullanarak bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına karar vermede yaşanan güçlükler. Bowers (1991) öğrencilerinin verilen bir fraktalda büyüme oranını belirlemede öğrencilerinin sorunla karşılaştıklarını belirtmektedir. Bu durumun bir nedenini çalışmanın statik olan kağıt kalem üzerinde yapılmasına bağlamaktadır. Bilgisayar programlarının dinamik yapıları nedeniyle ve büyüme küçültmelere imkan vermesinden dolayı bu sorunun giderilebileceğini ifade etmektedir. Son güçlük ise fraktalın oluşum aşamasının (tanımının) açık olmamasıdır. Bowers (1991) bu güçlüklerin birçoğunun fraktal konularının doğalarından gelen epistemolojik güçlüklerden kaynaklandığını ifade etmektedir. Bu bağlamda çalışmasında fraktal kavramlarına yönelik epistemolojik güçlüklere ve bu güçlükleri gidermek için çözüm önerilerine yer vermiştir. Bowers'ın (1991) belirttiği ilk epistemolojik güçlük tek bir evrensel boyut kavramının olmasıdır. Bowers (1991) bu güçlüğün kökeninin Euclid geometrisine dayandığını ifade etmektedir. Boyut hakkındaki sezgilerimizin Euclid'in Elemenler kitabında geometrik nesneleri sınıflama şekillerine dayandığını belirtmektedir. Bu tür bir güçlüğü gidermek için sezgisel olmayan bir boyut tanımının öğrencilere kazandırılması gerektiğini belirtmektedir. Bowers (1991) öğrencilerin sezgisel tanımlarını değiştirmede doğru, kare, küp için yapılan $N=(1/r)^D$ öz-benzerlik boyutu tanımının etkili olduğunu ve çalışmasındaki bazı öğrencilerde böyle bir değişim olduğunu ifade etmektedir. İkinci bir epistemolojik güçlük ise boyutun bir nesnenin kendine özgü bir özellik olarak düşünülmesi nedeniyle fraktal boyutların anlaşılmasının güçlüğüdür. Öğrencilerin geometrik nesneleri 1, boyutlu, 2 boyutlu ve 3 boyutlu olmak üzere 3 kategoriye ayırdığını ifade etmektedir. Bu boyutların ise uzunluk, genişlik ve derinliği temsil ettiğini belirtmektedir. Bu nedenle öğrencilerin bu özelliklerin her birini bir boyut olarak düşündüklerini ifade etmektedir. Bu güçlüğün giderilmesine yönelik boyutun farklı disiplinlerde kullanılan ve bu disiplinlerde bulunan görüş ve ilişkilere göre tanımlanan soyut bir kavram olduğu düşüncesinin kazandırılmasını önermektedir. Boyutun sadece tam sayılarla gösterilmesinin ise bir diğer epistemolojik güçlük olduğunu belirtmektedir. Bunun yanında Bowers (1991) bireylerden bir nesnenin şekline göre nesnenin boyutunun ne olduğunu tanımlamaları istendiğinde genellikle bir çelişki içerisinde olduklarını ifade etmektedir. Dış görünüşü karmaşık olarak verilen bir şeklin boyutuna karar vermenin oldukça güç olduğunu belirtmektedir. Bu güçlüğün Euclid geometrisinde boyutların topolojik değişmezliğinden ve Euclidci sezgilerimizden kaynaklandığını ifade etmektedir. Son epistemolojik güçlüğün ise fraktalların sonsuz yapıya sahip olmalarından kaynaklandığını belirtmektedir. Ancak Bowers (1991) fraktalların sonsuzluk kavramının öğretilmesinde öğrencilerde bir sezgi oluşturmada etkili olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca fraktalların limitle olan ilişkisine vurgu yaparak fraktalların özel tekrarlama süreçlerinin limitleri olarak düşünüldüklerinde limit kavramı için yeni bir anlayışın oluşacağını belirtmektedir. Bowers (1991) öğretim ortamında öğrencilerinin bilgisayar okur-yazarlıklarının düşük olması nedeniyle fraktalların bilgisayarlarda oluşturulmasında ve özelliklerinin incelenmesinde güçlük yaşadıklarını dile getirmiştir.

Langille (1996) çalışmasında fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarına girmelerinin istenmesine karşın, bu geometrinin öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiği ve bu geometriye karşı tepkilerinin ne olduğu yönünde çok az çalışmanın bulunduğunu belirtmektedir. Bunun yanında fraktal geometriye yönelik öğrencilerin reaksiyonlarını belirlemeye yönelik çalışmaların neredeyse bulunmadığını, fraktal konularının öğretimine yönelik birçok çalışma olmasına karşın öğrencilerin bu çalışmalara yönelik düşünceleri ve anlamalarını belirlemeye yönelik çalışmalara rastlanmadığını ve bir fraktal geometri ünitesinin bütün olarak uygulandığı çalışmalara çok az rastlandığını ifade etmektedir. Bu bağlamda Langille (1996), Goldenberg'in (1991) çalışmasında yer verdiği sorulardan etkilenerek çalışmasında aşağıda verilen sorulara yanıt aramaya çalıştığını belirtmektedir:

- Bu yeni matematik konusunun müfredatlara girmesi için en umut verici konu ve yaklaşımlar neler olmalıdır?
- Fraktal geometrinin hangi konuları 7-12 öğrencileri için uygundur?
- Öğrenciler konuları öğrenirken nerelerde zorlanıyorlar?
- Hangi konunun öğrenilmesi en problemli?
- Öğrencileri bu tür karmaşık bir konuya maruz bırakmak uygun mu?

Araştırma nitel bir çalışma olup 12. sınıfta bulunan 14 öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Veriler 11 öğrenciyle yapılan mülakatlardan, öğrenci ödevlerinden, öğrenci notlarından ve yazılı sınavlardan elde edilmiştir. Araştırmacı, araştırmacı öğretmen rolünü üstlenerek çalışmayı kendisi gerçekleştirmiştir. Çalışma toplam 6 hafta sürmüştür. Bu 6 haftalık çalışma için bir araştırmacı tarafından bir ünite hazırlanmıştır. Ünitede tekrarlama, öz-benzerlik, kaos, fraktal boyut ve Mandelbrot kümesinin öğretimine yönelik etkinlik ve çalışma yapraklarına yer verilmiştir. Ancak çalışma içerisinden Mandelbrot kümesinin öğretimine yönelik nelerin yapıldığı, öğrencilerin bu konuya yönelik düşünceleri ve öğrenilebilirliğini içeren bir veriye rastlanmamıştır. Bunun yanında öz-benzerlik

konusunda sadece tamamen öz-benzer fraktallar üzerinde çalışma gerçekleştirilmiş ve öz-benzerlik türlerine girilmemiştir. Ayrıca doğal fraktal yapılar bilgisayar ortamında oluşturulmuş, ancak gerçek nesneler üzerinde fraktal kavramı tartışılmamıştır. Fraktalların çevresi, alanı ve hacimlerinin hesaplanması üzerine bir çalışma yapılmamıştır. Araştırmacı geliştirdiği ünite için 5 bilişsel ve 2 duyuşsal olmak üzere toplam 7 kazanım belirlemiştir.
Bilişsel kazanımları:

- Fraktalların özelliklerini belirler.
- Basit fraktal yapıları çizer
- Öz-benzerliğin farkına varır ve tanımlar
- Öz-benzerlik boyutunu elde eder ve onu farklı birçok fraktal yapıya uygular
- Doğal ve matematiksel fraktalların özelliklerini karşılaştırır.

Duyuşsal kazanımları

- Matematiği farklı bir perspektiften görme fırsatı elde ederler
- Bu görüşü farklı nesnelerin birleşiminde kullanarak fraktal geometrinin doğanın geometrisi olduğu düşüncesini edinirler

Langille (1996) çalışmasında öğrencilerinin kaos oyunu sonucu niçin fraktal yapıların oluştuğunu anlamakta çok zorlandıklarını belirtmektedir. Bunun bir nedeni öğretmenin oyunu kâğıt kalemle oynatması olabilir. Çünkü öğrenciler belli aralıklarla 20 gün boyunca 200 tekrarlamaya göre oyun sonunda oluşan şekli çizmeye çalışmışlardır. Bunun yanında öğrencilerinin hemen hemen tamamının basit tekrarlama kurallarını kullanarak fraktal yapıları çizebildiklerini belirtmektedir.

Langille (1996) çalışmaya başlamadan önce bazı öğrencilerinde Euclid geometrisine göre var olan boyut tanımlarında yanlış anlamaların bulunduğunu ifade etmiştir. Örneğin bazı öğrencilerinin doğruyu 2 boyutlu düşündüklerini belirtmiştir. Bu nedenle öğrencilerin farklı bir boyutla karşılaşmaları onlarda var olan boyut kavramının daha da sarsılmasına neden olduğunu ifade etmektedir. Araştırmacı öğrencilerinin öz-benzerlik boyutunu tam olarak anlayamadıklarını da belirtmektedir. Öğrencilerin buldukları formülü kullanarak oluşumları basit olan fraktalların boyutlarını hesapladıklarını, ancak tam olarak buldukları değerin ne olduğunu bilmediklerini ifade etmektedir. Bu nedenle öğrencilerinin öz-benzerlik boyutunu daha çok işlemsel olarak öğrendiklerini belirtmektedir. Bu nedenle Langille (1996) fraktal boyut kavramının öğretimi yapılmadan önce öğrencilerin boyut konusunda bilgilendirilmesi amacıyla bir ders yapılmasının gerekli olduğunu ifade etmektedir. Yani öğrencilere Euclid bağlamında boyut denilince neyin kastedildiği açıklanmalı ve onların ön bilgileri sorgulanmalıdır. Bu aşamadan sonra öğrencilerin daha karmaşık olan öz-benzerlik boyutunu öğrenmeye hazır olabileceklerini belirtmektedir. Langille (1996) çalışmasında öğrencilerinin büyük çoğunluğunun fraktal boyutu şeklin karmaşıklığının derecesi olarak tanımlayamadıklarını, ancak verilen iki kıyı şeridinden boyutu büyük olanın daha karmaşık bir yapıya sahip olduklarını ifade ettiklerini belirtmektedir. Bu durumun nedenini ise boyut hesaplama tanımları üzerine yeterince tartışılmamasına bağlamaktadır. Bunun yanında öğrencilerinin fraktal boyutu verilen şekillerin dış görünüşünü tanımlamada zorlandıklarını ve nesneleri tanımlarken dış görünüşlerinin girintili ve çıkıntılı olduklarına odaklanmadıklarını daha çok Euclid mantığına göre en, boy ve yüksekliğe yöneldiklerini belirtmektedir.

Langille (1996) bilgisayar programları kullanılarak ağaçların, eğrelti otlarının vb. gibi doğal nesnelerin oluşturulmasının öğrencilerde fraktal geometrinin doğanın geometrisi şeklinde bir algının oluşmasına neden olduğunu ifade etmektedir. Bunun yanında bilgisayar programlarının özellikle öz-benzerlik kavramının anlaşılmasında etkili olduğunu belirtmektedir. Bilgisayar programlarında öğrencilerin zoom özelliğini kullanarak öz-benzerlik hakkında kendilerine has tanımlar oluşturduğunu ifade etmektedir. Ancak burada öğrencilerin öz-benzerliğe yönelik kendilerine has bir tanım geliştirmelerinin onların bu kavramı anladıklarını tam olarak göstermemektedir. Bu durum sadece öz-benzerlik kavramına yönelik sezgisel bir anlayış edindiklerini göstermektedir. Çünkü farklı öz-benzerlik türlerine yönelik fraktal yapılar verildiğinde yine öğrencilerin verilen nesnelerin öz-benzerliğine doğru karar verip veremeyeceği bilinmemektedir. Bunun yanında öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranlarına yönelik de bir çalışma yapılmamıştır. Araştırmacının bu açıklamaları öğrencilerin sadece verilen nesnelerin öz-benzer olup olmadığına karar verebileceklerini göstermektedir.

Langille (1996) alışık olmadığı bir konunun öğretimine yönelik ilk defa bu tür bir deneyim yaşamasının öğretim sürecine olumsuz etkilerinin de olabileceğini ifade etmektedir. Bunun yanında öğrencilerin fraktal geometriye yönelik bir ders kitabının olmaması nedeniyle çok fazla not tutmaya çalıştıklarını ve bu nedenle derse olan konsantrasyonlarının düştüğünü belirtmektedir. Langille (1996) çalışmasında yapılandırmacı felsefeyi temel alarak öğretim sürecini gerçekleştirmeye çalıştığını ifade etmektedir. Ancak kutu sayma metodu ve öz-benzerlik boyutu konularının öğrenciler tarafından anlaşılmasının güç olması nedeniyle bu derslerde daha çok geleneksel yaklaşımı benimsediğini ve doğrudan tanım ve açıklamalarda bulunduğunu ifade etmektedir. Bu durumun öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları ve onlara farklı gelen kavramları anlamalarına yardımcı olduğunu belirtmektedir.

Langille (1996) çalışmasında bir fraktal tanımı vermediği ve öğrencilerinin kendilerinin birer fraktal tanımı oluşturmalarını beklediğini ifade etmektedir. Fraktal kavramına yönelik bir tanımın verilmemesinden dolayı bazı öğrencilerin fraktalların özelliklerini tam olarak belirleyemediklerini ifade etmektedir. Çalışmada öğrencilerin fraktal olan ya da olmayan nesnelerin özelliklerini belirlemeye yönelik etkinlik ve çalışmalara yer verilmediği görülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin bir nesneye fraktal denildiğinde ne tür özellikleri dikkate aldığı ortaya konulmamıştır.

Langille (1996) çalışmasında fraktal geometrinin öğrencilerin sahip olduğu ön bilgilerden dolayı 10. sınıftan itibaren matematik öğretim programlarına girmesi gerektiğini ve sadece 10. sınıfta değil 11. ve 12. sınıflarda da bu konunun öğretimine devam edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Eğer sadece 12. sınıf seviyesinde öğretim programlarına bu konu eklenecekse bu durumda konunun öğretimi için uzun bir zaman dönemine yer verilmesi gerektiğini önermektedir.

McKee (1996) 22, 9. sınıf (14-15 yaş) öğrencisiyle ardışık olarak 6 gün boyunca gerçekleştirdiği çalışmasında fraktal geometri etkinlikleriyle çalışan öğrencilerin matematiğe yönelik algılarını ve ne tür matematiksel ilişkiler kurduklarını belirlemeye çalışmıştır. Bu amaçla 6 günlük bir ünite geliştirmiştir. Geliştirdiği ünitede fraktalların temel olarak iki özelliği olan öz-benzerlik ve tekrarlama kavramları üzerine odaklanılmıştır. İlk 3 gün öğrencilerin tekrarlama kavramını kullanarak farklı fraktal yapılar oluşturmaları sağlanmıştır. Kaos oyunu, Sierpinski üçgeni, Cantor kümesi ve fraktal ağaç etkinlikleri sayesinde öğrencilerin başlangıç şekli ve üretici kavramlarını öğrenmeleri amaçlanmıştır. 4. günde bilgisayar programları yardımıyla öğrencilerin fraktal yapıları oluşturmaları ve öz-benzerliği tanımlamaları sağlanmıştır. 5. ve 6. günlerde ise öğrencilerin doğal fraktal yapıları incelemeleri, kesme ve katlamaları kullanarak fraktal modeller oluşturma etkinlikleri yaptırılmıştır.

McKee (1996) öğrencilerin daha önce yaşadıkları çevreye çok fazla dikkat etmediklerini ve yaşadıkları çevreyle matematik arasında bir ilişkinin olmadığını düşündüklerini belirtmektedir. Oysa fraktal geometrinin öğrencilerin yaşadıkları çevreyle ilişki kurmalarına yardımcı olduğunu ifade etmektedir. Özellikle doğal fraktal yapıların ve onların öz-benzerliğinin bu ilişkinin kurulmasında etkili olduğunu belirtmektedir. Bunun yanında fraktal geometrinin öğrencilere eğlenceli geldiğini ve matematiğin soğuk ve zor bir ders olduğu yönündeki algılarında bir değişime neden olduğunu belirtmektedir. Ayrıca fraktal geometri dersinde öğrencilerin geleneksel ders ortamlarından farklı olarak daha aktif olduklarını ve bunun nedeninin de fraktalların kendi içsel yapılarından kaynaklandığını belirtmektedir. McKee (1996) fraktal şekilleri oluşturmada somut modeller kullanmanın, çizme-katlama etkinlikleri yapmanın fraktal konularının öğrenilebilirliğini artırdığını ve öğrencilerin derse olan ilgilerini olumlu yönde etkilediğini ifade etmektedir. Öğrencilerinin fraktalları birbirine benzer şekillerin sürekli tekrarlanarak oluşan şekiller olarak tanımladıklarını ifade etmekte ve bu tanımlamanın öğrencilerin fraktallar ile benzerlik ve sonsuzluk kavramları arasında ilişki kurduklarını gösterdiğini belirtmektedir. Bunun yanında kaos oyununun öğrencilerin sonsuzluk kavramına yönelik algılarının gelişmesine ve Sierpinski üçgeni gibi etkinliklerin ise öğrencilerin sayılarla örüntüler arasında ilişkiler kurmasına yardımcı olduğunu ifade etmektedir. McKee (1996) çalışmasında öğrencilerin yukarıda ifade edilen ilişkileri kurabildiklerini belirtmesine karşın bu ilişkileri nasıl kurdukları ve bu ilişkileri kurarken nerelerde zorlandıklarını çok fazla yansıtmamaktadır. Ayrıca çalışmada öğrencilerin yaptıkları etkinliklerde yaşadıkları güçlüklere ve ilişkileri kurarken kurdukları ilişkilerin farkında olup olmadıklarına yönelik bulgulara da rastlanmamıştır.

Bremer (1997) çalışmasında kaos ve fraktalların öğretimine yönelik bir ünite geliştirmiştir. Bu ünite kullanılarak 14 ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenine kaos ve fraktallar konusuna yönelik bir öğretim yapılmış ve bu öğretim sonunda öğretmenlerin bilgi ve tutumlarında bir değişimin olup olmadığı belirlenmiştir. Böylece hem hazırlanan ünitenin başarısı hem de fraktal geometri konularının öğrenilebilirliği ile matematiğe yönelik tutumlarına etkisi tespit edilmiştir. Çalışmaya katılan öğretmenler öğretim seviyesi 6-7 olanlar bir grup, öğretim seviyesi 8-9 olanlar ikinci grup ve öğretim seviyesi 10-üstü olanlar ise üçüncü grup olmak üzere 3 gruba ayrılmıştır.

Bremer'in (1997) kaos ve fraktallara yönelik hazırladığı ünite ve dersin işleniş sırası aşağıda sunulmuştur:

- Fonksiyonların tekrarlanması
- Mandelbrot ve Julia kümeleri
- Bir fonksiyonun grafiksel tekrarlanması ve yörünge diyagramı
- Şekillerin tekrarlanması ve bir fraktal tanımı
- Fraktalların öz-benzerliği
- Fraktalların kesirsel boyutları

- Rastgele fraktallar ve doğal fraktallar
- Kaos ve fraktallar

Her bir konuya yönelik etkinlikler tasarlanmış ve çalışma her bir ders 3 saat sürmek üzere 6 haftalık bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışmada veriler fraktallar ve kaos ünitesine yönelik hazırlanan bir yazılı testten ve bir tutum ölçeğinden elde edilmiştir. Gruplara göre öğretmenlerin aldıkları bu testlerden elde ettikleri puanlar arasında anlamlı bir farkın olup olmadığı incelenmiştir. Buna göre kaos ve fraktallar konusunun öğrenilebilirliğini belirlemek için yapılan sınava göre grupların ön-test sonuçları arasında anlamlı bir farklılık bulunmadığı belirlenmiştir. Bu durum tüm grupların fraktallar ve kaos konusunda aynı bilgi seviyesinde çalışmaya katıldıklarını göstermektedir. Grupların son-test sonuçları incelendiğinde ise 8-9 grubunun diğer gruplara göre başarı ortalaması biraz yüksek çıksa da anlamlı bir farkın olmadığı tespit edilmiştir. Bremer (1997) öğretmenlerin son testte aldıkları puanlar incelendiğinde 38 soruda genel olarak 27.74 ortalama ile başarı gösterdiklerini ifade etmektedir. Bu durumun öğretmenlerin bu kavramları öğrenebildiğini gösterdiğini belirtmektedir. Benzer şekilde öğretmenlerin fraktal ve kaos konularına yönelik tutumları incelendiğinde ön-test sonuçları arasında anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir. Bu sonuç öğretmenlerin derse benzer bir tutumla başladıklarını göstermektedir. Öğretmenlerin son-test sonuçları incelendiğinde ise 6-7 grubunun diğer gruplara göre tutum ortalamalarının biraz daha yüksek çıktığı belirtilmesine karşın anlamlı bir farklılık bulunmadığı belirtilmiştir. Tutumlar ön-test ve son-teste göre karşılaştırıldığında ise öğretmenlerin tutumlarının arttığı belirlenmiştir. Bu durum fraktal konularının öğretmenlerin tutumlarını olumlu yönde etkilediğini göstermektedir. Bremer (1997) cinsiyete göre bir farklılık olup olmadığını da incelediğinde erkek öğretmenler ile bayan öğretmenler arasında fraktal kavramlarının öğrenilebilirliği arasında anlamlı bir fark olmadığı ve her iki grubunda hemen hemen aynı düzeyde bu kavramları öğrenebildikleri ifade etmektedir. Benzer şekilde erkek öğretmenler ile bayan öğretmenlerin fraktal kavramlarına yönelik tutumlarında bir farklılık olmadığı belirtilmiştir. Bremer (1997) elde ettiği bu sonuçlara göre hazırladığı ünitenin öğretmenlerin kaos ve fraktallar konusunu öğrenmede ve bu konulara karşı olumlu tutum geliştirmelerinde etkili olduğunu ifade etmiştir. Bunun yanında benzer bir çalışmanın 6-12 sınıflar arasındaki öğrencilere uygulanarak fraktal ve kaos konularının öğrenilebilirliğinin incelenebileceği önerilmiştir. Bremer (1997) çalışmasında öğretmenlerdeki değişimi daha çok ön test son test sonuçlarını karşılaştırarak belirlemeye çalışmasına karşın öğretmenlerin ders ortamında karşılaştıkları durumlara, güçlüklere ve anlamalara yer vermemiştir. Bunun yanında öğretmenlerin hazırlanan üniteye yönelik düşüncelerine çalışmada değinilmemiştir.

Lornell ve Westerberg (1999) çalışmalarında birkaç yıldan beridir, lise geometri derslerine fraktalları entegre ettiklerini ifade etmekte ve genel hatlarıyla bu entegrasyonu nasıl yaptığını açıklamaktadır. Bu amaçla kendi sınıflarında birkaç yıldan beridir uyguladıkları bir fraktal geometri ünitesinden kısaca bahsetmektedirler. Ayrıca fraktal geometrinin mevcut ortaöğretim matematik programlarının içerisinde olması gerektiğinin nedenleri hakkında açıklamalarda bulunmaktadırlar. Sınıf içi uygulamalarında öğrencilerin hazırladıkları etkinliklerden hoşlandıklarını ve derse ilgi gösterdiklerini belirtmelerine karşın, öğrencilerin süreç içerisinde yaşadıkları deneyimleri, ne tür anlamalar geliştirdikleri, neleri öğrenirken zorlandıkları, neleri daha kolay öğrenebildikleri ve öğretim ortamına yönelik bir açıklamada bulunmadıkları belirlenmiştir.

Fraktalların öğretimini yaparken aşağıdaki şekilde bir yol izledikleri belirlenmiştir:

- Ünitenin ilk konusunda öğrencilere fraktal ve fraktal olmayan nesneleri sınıflandırmaları yönünde bir etkinlik yaptırılmıştır. Bu etkinlik aynı zamanda fraktalların “karmaşık, kırıklı ve düzensiz olma” özelliğini de açıklamaktadır.
- Fraktal geometri şekillerinin nasıl büyüdüğü açıklanmaya çalışılmıştır. Hazırlanan etkinlikler “tekrarlama” kuralının öğrencilerce anlaşılmasına ve bir fraktalı oluşturan “başlangıç şekli (seed) ve üretici (generator)” kavramlarının öğrencilerce tanımlanmasına yöneliktir. Bu amaçla Cantor kümesinin keşfi ile ilgili bir kağıt kalem etkinliği yaptırılmıştır.
- Fraktalların temel özelliklerinden öz-benzerlik Koch kartanesi kullanılarak manipulatif etkinliklerle keşfedilmiştir.
- Son adımda ise öğrencilerin Koch kartanesinin çevresi ve alanı ile ilgili çalışmalar yapmaları sağlanmıştır. Öğrenciler çevresi sonsuz şekilde büyüyen bir şeklin alanının nasıl sınırlı kaldığı sonucu ile bir şaşkınlık yaşadıkları görülmüştür.
- Ünitenin sonunda öğrencilerin yaptıkları manipulatif etkinlikler sonucu elde ettikleri sonuçları bilgisayar programı TI-82 ile kontrol etmeleri sağlanmıştır.

İzlenen bu yol fraktal geometri konularının öğretim programı hazırlanırken “Nasıl ve nerden başlanmalıdır?” sorusu için bir cevap niteliğinde olabilir.

Bunun yanında Lornell ve Westerberg (1999) fraktalların matematik öğretim programlarına entegre edilmesinin nedenlerini aşağıdaki şekilde açıklamaktadırlar:

- Fraktal geometri lise müfredatı için uygun bir geometridir. Öğrenciler bir çok geleneksel matematik konusunu yeni bir yaklaşımla keşfetme imkanı elde ederler.
- Hem matematiğin kendi içinde hem de matematik ve doğa arasında ilişki kurulmasını sağlar.
- Matematiğin analitik olmayan yollarla keşfedilmesine yardımcı olur.

Lornell ve Westerberg (1999) öğrencilerin Koch kartanesinin alanının sınırlı, ancak çevresinin sonsuz olmasından çok etkilendiklerini ve bazen de çelişki yaşadıklarını ifade etmektedir. Bu beklenmedik sıra dışı durumun öğrencilerin matematiği analitik olmayan yollarla öğrenmelerine yardımcı olacağını ifade etmektedir. Fraktal geometri etkinliklerin ve özellikle kağıt kalem kullanılarak yapılan çalışmaların normalde derse katılmayan öğrencileri de motive ettiğini ifade etmektedir. Fraktalların biyoloji, mühendislikler, ekonomi ve sanatta kullanım alanlarının olmasının öğrencilerin ilgisini çektiğini belirtmektedir. Lornell ve Westerberg (1999) hazırladıkları ünitenin lise öğrencilerine yönelik olduğunu belirtmelerine karşın fraktal boyut konusuna değinmedikleri de tespit edilmiştir.

Vacc (1999) çalışmasında fraktal geometri konularının K-12 müfredatlarına girme çalışmalarının başladığını, ancak bu kavramın ilköğretim sınıflarına (K-2 ve yukarısı) da entegre edilebileceğini ifade etmektedir. Bu amaçla ilköğretim matematik öğretim programlarına yönelik öğrencilerde fraktal kavramı ve öz-benzerlik kavramlarını oluşturma amacıyla etkinlikler hazırlamıştır. Hazırladığı etkinlikleri kuzey Carolina'daki bir okuldaki ilköğretim öğrencilerine uygulamıştır. Etkinlikler öğrencilerin yakın çevrelerinden örneğin ağaçlar, bitkiler, yedikleri yiyecekler vb. seçilmiştir. Burada Vacc'ın (1999) amacı öğrencilerde fraktal kavramına yönelik bir sezgi ya da ön bilgi oluşturmaya çalışmaktır. Vacc (1999) hazırladığı etkinliklerin öğrencilerin fraktal geometrideki düşünce ve anlamalarını keşfetmek için bir başlangıç niteliği şeklinde olduğunu ifade etmektedir. Vacc (1999) etkinlikleri aşağıdaki sırada uygulamıştır:

- Fraktal örüntüleri tanımlamak. Öğrenci veya gruplara basit doğal fraktal şekilleri verilerek (bir parça lahana ya da mısır patlağı) onlardan bu nesnelerin şekillerini tanımlamaları istenmiştir. Burada amaç doğal nesnelerin şekillerini mevcut geometri bilgileri ile açıklamanın oldukça zor olduğu sezgisini öğrencilere kavratmak ve doğal nesnelerin karmaşık, girintili çıkıntılı olduğu yönünde bir algı oluşturmaya çalışmaktır.

- Fraktal terimine giriş ve fraktal nesneleri tanımlamak. Bu etkinlikte bir önceki derste oluşturulan ön bilgi kullanılarak oldukça karmaşık ve düzensiz şekillere sahip nesnelerin fraktal olarak tanımlanmaları istenmiştir. Bu amaçla bir ağacın şekli üzerine sınıf içi tartışmalar yaptırılmaktadır.
- Öğrencilerde fraktal kavramını oluşturduktan sonra öğrencilerinden çevrelerindeki fraktal nesneleri ve fraktal olmayan nesneleri sınıflandırmaları istenmiştir. Bu etkinlikle birlikte öğrenciler bir nesneyi fraktal olarak tanımladığı zaman kendi cevaplarını kontrol etme imkânı bulmaları amaçlanmıştır.
- Fraktalları ölçmek. Öğrencilere bir kıyı şeridinin fotoğrafı verilerek farklı oranlarda ölçeklenmiş bir ölçekle bu kıyı şeridini ölçmeleri istenmektedir. Böylece öğrencilerin doğal fraktal örüntülerinin görünüşte birbirine benzediğini, ancak farklı oranlarda ölçüldüklerinde farklı uzunlukları olduklarını görmeleri amaçlanmıştır.
- Öz-benzerlik kavramına giriş. Öğrencilerde fraktalların temel özelliği olan öz-benzerlik kavramına yönelik bir algı oluşturmak için hem matematiksel olarak oluşturulmuş yapıların şekillerini öğrencilerine göstermiş ve parçaları ile bütünü karşılaştırmalarını istemiş hem de öğrencilerine ağaç dallı parçacıkları vererek incelemelerini istemiştir. Bu etkinlikle birlikte öğrencilerin öz-benzerlik kavramına yönelik bir anlama oluşturmalarının sağlanması amaçlanmıştır.

Böylece Vacc (1999) K-12 matematik öğretim programının farklı seviyeleri içinde fraktal geometri konularının öğretilebileceğini göstermiştir. Çalışmasında bu etkinliklerin farklı okullarda uygulanarak genellenebileceğini ifade etmektedir. Vacc çalışmasında ilköğretim seviyesinde fraktalların öğretilebileceğini göstermesine karşın öğrencilerin bu konulara yönelik anlamaları ve zorlandıkları konulara yer vermemiştir. Ancak yaptığı çalışmaların öğrencilerde bir fraktal algısı oluşturduğunu ifade etmektedir. Bunun yanında Vacc fraktal geometri konularının öğretimine erken yaşlarda başlamanın bu kavramların öğrenilebilirliğini artıracağını ifade etmektedir. Çünkü çalışmasında da yer verdiği gibi fraktal nesneleri tanımlamada sınıf seviyesi arttıkça başarının da düştüğünü göstermiştir. Bunun en büyük nedeninin Euclid geometrisinin fraktalların şekillerini tanımlamada öğrencileri sınırlandırması olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca, öğretmenlerin fraktal geometri kavramlarının öğretimi konusundaki bilgilerinin çalışılmasının gerekli olduğunu ifade etmektedir. Çünkü temel bazı fraktalların ve onların özelliklerinin anlaşılmasının bir yolunun da öğretmenin bu konu hakkındaki bilgi seviyesi olduğu belirtmektedir. Buna karşın ilköğretim öğretmenlerinin öğretmen eğitimi programlarında bu konunun öğretimine yönelik dersleri almadıklarını ifade etmektedir. Bu nedenle matematiğin bu yeni alanının öğretiminin sınırlı kalacağı ve tam olarak başarılamayacağını belirtmektedir.

Schultz (2001) kaos ve fraktal konularının ortaöğretim öğrencilerine öğretimine yönelik 6 haftalık ve her biri 24 dakika süren bir kurs hazırlamıştır. Hazırladığı kursun öğrencileri üzerinde olan etkilerini çalışmasında çok fazla yansıtmamıştır. Yoğun olarak kurs programının içeriği ve hazırladığı etkinlikler üzerinde durmuştur. Kursun içeriği aşağıda sunulmuştur:

- Logistic fonksiyonunun tekrarlanması ve grafiksel olarak noktaların yörüngelerinin incelenmesi. Bu etkinlikte öğrencilerin kaotik bir olayda başlangıç değerlerindeki küçük değişikliklerin farklı durumların ortaya çıkmasına neden olduğunu görmeleri amaçlanmıştır. Bu amaçla etkinlikte logistic fonksiyondaki noktaların yörüngesi TI-83 grafik hesap makineleri kullanılarak incelenmiştir.
- Kaos oyunu. Bu etkinlikte kaos oyunu sonucunda öğrencilerin rastgele bir süreç sonunda düzenli yapıların oluşabileceğini görmeleri ve bu yapıların niçin oluştuğunu sorgulamaları amaçlanmıştır. Oyunun kağıt-kalem kullanılarak oynanmasının güçlüğünden dolayı bir web sitesinin kullanıldığı ifade edilmiştir.
- Pascal ve Sierpisnki üçgeni arasındaki ilişki. Bu etkinlikte bir öğretim amaçlı web sitesi ve Excel programı yardımıyla öğrencilerin 2'nin kalan sınıflarını kullanarak Pascal üçgeni içerisinde Sierpinski üçgeninin oluştuğunu görmeleri amaçlanmıştır.
- Pisagor ağacı. Pisagor ağacının kağıt kalem kullanılarak çizme etkinlikleriyle oluşturulmasının zorluğu nedeniyle bu etkinlikte Geometer's Sketchpad programı kullanılmıştır. Etkinlikte Geometer's Sketchpad programı sayesinde kare ve üçgenler kullanılarak Pisagor ağacının oluşturulması ve ağacın oluşumunda kullanılan kare sayısı, üçgen sayısı ve bunların kenar uzunluklarındaki değişime yönelik örüntülerin bulunması amaçlanmıştır.
- Mandelbrot kümesi. Öğretim amaçlı bir web sitesi sayesinde Mandelbrot kümesini öğrencilerin incelemeleri ve bu kümenin sınır noktaları üzerindeki özelliklerini belirlemeleri amaçlanmıştır.
- Julia kümeleri. Bu etkinlikte $f(z)=z^2+1$ fonksiyonu için oluşan Julia kümesinin şeklinin ve özeliklerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Komorek ve diğer (2001) bir proje kapsamında fen öğretiminde fraktal geometri ve kaos teorinin öğretilmeye değer olup olmadığını ve 15-17 yaş arasındaki öğrencilerden tarafından bu konuların anlaşılabilir olup olmadığını araştırmıştır. Komorek ve diğer (2001) fraktal geometri ve kaos teori konularının öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiği ve nasıl anlaşıldığına yönelik çalışmaların hemen hemen hiç bulunmadığını ifade etmektedir. Araştırmalarında fraktalların iki temel özelliğine yönelik yaptıkları uygulamalardan örnekler sunmuşlardır. İlk çalışmada öz-benzerlik kavramı ve çok karmaşık görünen yapıların basit tekrarlama kuralları sonucu oluşturulabildikleri üzerine ve diğer çalışmada ise fraktalları kullanarak bir olayı açıklama üzerine çalışmaların yapıldığını belirtmektedirler. Böylece öğrencilerin dallanma olayını iki farklı uygulamada eş zamanlı olarak nasıl anladıklarını ve bu uygulamaların bilimsel olarak açıklamada nasıl rehberlik edebileceğini araştırdıklarını ifade etmektedirler. Araştırmacılar hazırladıkları etkinliklerden ve ne tür mülakatlar yaptıklarından, öğrencilerin mülakatlarda ne tür cevaplar verdiklerinden çok fazla bahsetmemekte, genel olarak ortaya çıkan durumları özetlemektedirler. Bu bağlamda çalışma verilen yaş grubu için fraktallar konusunun anlaşılabilirliği için ipuçları vermesine karşın derinlemesine bilgiler sunmamaktadır.

Çalışma 18 öğrenciyle gerçekleştirilmiş ve öğrenciler her grupta iki öğrenci olmak üzere 9 gruba ayrılmışlardır. Veriler mülakatlar yoluyla "öğretim deneyimi" metodu kullanarak elde edilmiştir.

İlk çalışmada öğrencilere başlangıçta 14 resim vererek bunları incelemeleri ve kendilerince sınıflandırmaları istenmektedir. Daha sonra öğrencilere öz-benzerlik konusunda bir öğretim yapılarak öz-benzerlik kavramı bir karnabahar kullanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Bunun yanında Koch eğrisinin ilk 3 adımı verilip 4. adımını çizmeleri istenmiştir. Böylece öğrencilerin hem öz-benzerlik kavramından ne anladıkları hem de basit tekrarlamalar sonucu karmaşık şekillerin oluştuğunu görmeleri amaçlanmıştır. Öz-benzerlik kavramının öğretiminden sonra öğrencilerden başta sınıflandırdıkları şekilleri yeniden sınıflandırmaları istenmiş ve akciğerler ile (zinc-dendrite) çinko dallanmasının bir fraktal olup olmadığını açıklamaları beklenmiştir. Elde edilen bulgular sadece bir grubun başlangıçta öz-benzerlik kavramına yakın olarak (dallanma kavramını temel almışlar) şekilleri sınıflandırdığını göstermektedir. Buna karşın mülakat yapılan öğrencilerin yarısında sezgisel de olsa öz-benzerlik kavramının olduğu belirlenmiştir. Koch eğrisinin çizimi öğrencilere biraz zor gelmesine karşın bu etkinlikle öğrencilerin basit kurallar uygulayarak çok karmaşık şekiller elde edilebileceği fikrini edindiklerini ifade etmektedir.

Bunun yanında öğrencilerin büyük çoğunluğunun Koch eğrisinin 4. adımını çizmede çok zorlandıklarını ifade etmektedir. Bu sonucun aslında öğrencilerin sezgisel olarak öz-benzerliğe karar verebildiklerini, ancak matematiksel olarak öz-benzerliğe karar vermede büyüme oranı ve parça sayılarını belirlemede zorlandıklarını gösterdiği söylenebilir. Çalışma sonunda Komorek ve diğer. (2001) 15-16 yaş grubundaki öğrencilerin öz-benzerlik kavramını anlayabildiklerini ve bu kavramı matematiksel ve doğal nesnelerde kullanabildiklerini ifade etmektedirler.

İkinci çalışmada ise öğrencilerden elektrolizle çinko dallanmaları oluşturmaları istenmektedir. Oluşan dallanma yapısının fraktallardaki Brownian motion (çatallanma) kavramı kullanılarak açıklanmaktadır. Yani araştırmacılar fiziksel bir olayın fraktallar kullanılarak açıklamasını yapmaktadırlar. Ancak yaptıkları bu çalışma aynen Kaos oyununda olduğu gibi rastgele ve kurallı bir sürecin etkileşimi şeklinde gerçekleşmektedir. Olayın rastgele olması öğrencilerin deney sonucunda beklemedikleri bir şekille karşılaşmalarına neden olmaktadır. Olayı rastgele olması ve rastgele olay sonucunda mükemmel şekillerin ortaya çıkmasını öğrencilerin anlayamadığı belirtilmektedir. Benzer şekilde kaos oyununda da öğrenciler beklemedikleri şekilde Sierpinski üçgeniyle karşılaşmaktadırlar ve oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeni oluştuğunu tam olarak anlayamamaktadırlar. Ancak araştırmacılar bu deney sonucunda bazı öğrencilerde fraktal yapıların rastgele ve kurallı durumların etkileşimiyle açıklanabildiği yönünde bir anlayışın oluşmaya başladığını ifade etmektedirler.

Hughes (2003) fraktal ve kaos konularının öğretimine yönelik “Chaos and Fractals” isimli bir dönemlik bir ders düzenlemiştir. Ders üniversite 1. sınıf öğrencilerine yönelik hazırlanmıştır. Bu çalışmada dersinde kullandığı çalışma yapraklarından, bilgisayar programlarından ve öğrenci ödevlerinden örnekler vermektedir. 14 hafta süren çalışmasında ilk 7 hafta kaos son 7 hafta ise fraktal kavramlarının öğretimi gerçekleştirilmiştir. İlk 7 haftada kaos’un ne olduğu tartışılmış ve kaotik olaylar olarak sarkaçlar, nüfus artışı ve gök cisimleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bunun yanında bifurcation (dallanma) diyagramlarına yer verilmiştir. Son 7 haftada ise öz-benzerlik, fraktal boyut ve doğal fraktalların öğretimi yapılmış ve tekrarlama sistemlerini (IFS) kullanarak, kurallı ve rastgele tekrarlamalar sonucu fraktal yapılar oluşturulmuştur. Hughes (2003) çalışmasında öncelikle fraktal yapıları öğrencilerin kağıt kalem kullanarak oluşturmalarını sağlamıştır. Bunun nedenini öğrencilerin farklı oranlarda geometrik tekrarlamalara yönelik bir anlama kazandırmaya çalışmak olarak ifade etmektedir. Bunun yanında GSP ve diğer bazı bilgisayar programlarını kullanarak öğrencilerin fraktal yapıları oluşturmaları da sağlanmıştır. Bilgisayar programlarını kullanarak öğrencilerin elle oluşturmaya çalıştıkları yapıların daha gerçekçi ve doğru hallerini görmeleri amaçlanmıştır. Hughes (2003) kursun sonunda öğrencilerin fraktal geometriye yönelik düşüncelerini aşağıdaki şekilde ifade etmektedir:

- Öğrencilerinin fraktalların niçin matematik müfredatlarında yer almadıklarını merak ettikleri belirtmektedir. Çünkü bu konuların onların oldukça ilgilerini çektiğini ve kullanılan matematiğinde onlara çok yabancı gelmediğini ifade etmektedir.
- Öğrencilerinin 3 boyutlu parçalardan oluşan bir fraktalın boyutunun 3'den büyük olup olmayacağını merak ettiklerini ve fraktal geometride 3'den büyük boyutların olup olamayacağını tartıştıklarını belirtmektedir.
- Öğrencilerinin fraktal boyutları anlamada güçlük çektiklerini belirtmektedir. 2 boyutlu bir kağıdı katlayıp sonra açtığımızda boyutunun nasıl 2,6 olduğunu ve neden 3 boyutlu olmadığını anlayamadıklarını ifade etmektedir. Bunun yanında bazı öğrencilerinin ise fraktal boyutun ne anlama geldiğini bilmediğini ve 1,26 boyutlu bir nesnenin görünüşünü tanımlayamadığını belirtmiştir.
- Öğrencilerinin kutu sayma metoduyla ya da kıyı şeridinin uzunluğunu ölçerek elde ettikleri boyut değerlerinin gerçek bir değer yerine tahmini bir değer olduğunu düşündüklerini belirtmektedir. Bu durumun ise fraktal boyuta olan inandırıcılığı azalttığı söylenebilir. Çünkü Hughes (2003) öğrencilerin bu nesnelerin gerçek boyut değerlerinin ne olduğunu ve nasıl ölçülebileceğini merak ettiklerini ifade etmektedir.
- Bilgisayar etkinliklerinin derse olan ilgiyi artırdığını belirtmektedir.

Özetle, fraktal geometri konularının öğretiminin gerçek sınıf ortamında uygulandığı çalışmalarda ya sadece tekrarlama ve öz-benzerlik konularıyla (McKee, 1996; Lornell ve Westerberg, 1999; Vacc, 1999) öz-benzerlik ve boyut konularına (Bowers, 1991) odaklanıldığı ya da tekrarlama, öz-benzerlik, boyut ve kaos konularına (Langille, 1996; Bremer, 1997; Shultz, 2001; Komorek vd, 2001; Hughes, 2003) yer verildiği görülmektedir. Bunun yanında hazırlanan programların sıklıkla 12. sınıf seviyesine yönelik hazırlandığı ve sadece birkaç çalışmada diğer sınıf seviyelerinden söz edildiği belirlenmiştir. Yapılan çalışmalardan tekrarlama ve öz-benzerlik konularının odak konular olduğu ve bunun yanında sınıf seviyesine göre kaos, fraktal boyut ve Mandelbrot kümesinin öğretimine de yer verildiği görülmektedir. Ayrıca bazı çalışmaların uygulama sürelerinin oldukça kısa (Bowers, 1991; McKee, 1996) ve örneklem sayılarının ise çok az olduğu tespit edilmiştir. Yapılan çalışmalarda hem bilgisayar destekli hem de kağıt kalem ve model kullanımını gerektiren manipulatif etkinliklere yer verildiği görülmektedir. Öğrencilerin sıklıkla fraktal geometri konularıyla çalışmaktan hoşlandıkları ve derse karşı olumlu bir tutuma sahip oldukları tespit edilmiştir. Buna karşın öğrencilerin en çok fraktal boyut ile kaos oyunu sonucu oluşan yapıları anlamakta zorlandıkları görülmektedir.

1.10.3.2. Fraktal Geometri Konularının Öğretimine Yönelik Teorik Öğretim Programı Geliştirme Çalışmaları

Satchithananthan (1996) çalışmasında kolej öğrencileri (18 ve üstü) için fraktal geometri konularının öğretimine yönelik haftada 2 ders saatini içeren 5 haftalık bir ders planı geliştirmeyi amaçlamıştır. Hazırladığı ders Calculus I dersini almış öğrencilere yöneliktir, ancak dersin gerçek sınıf ortamında bir uygulaması yapılmamıştır. Satchithananthan'ın (1996) dersinin içeriği aşağıda sunulmuştur:

- Öz-benzerlik kavramı ve fraktalların tarihi ile ilgili açıklamalar ve Koch eğrisi, Sierpinski üçgeni ve Mandebrot kümesinin tanıtılması
- Koch eğrisi ve Sierpinski üçgenlerinin manipulatif olarak oluşturulması ve çevreleri ile alanları arasındaki ilişkinin irdelenmesi
- Fonksiyon kavramı ve fonksiyonlarda işlemler ile ilgili açıklamalar
- Tekrarlama konusunun açıklanması ve bilgisayar destekli etkinlikler
- Yörünge, kaçak ve mahkum noktaların tanımlanması
- Fraktal boyutun tanımlanması
- Karmaşık sayılarla ilgili açıklamalar,
- Karmaşık sayıların düzlemde gösterilmesi
- Mandelbrot kümesinin tanıtılması ve noktaların içerde ya da dışarıda olduğuna karar verilmesi
- Mandelbrot kümesinin bilgisayar programlarıyla oluşturulması

şeklindedir. Dersin içeriği incelendiğinde Satchithananthan'ın (1996) dersin giriş kısmında fraktallara yönelik tanıtıcı bilgilere ve ünlü birkaç fraktal örneğine yer verdiği görülmektedir. Daha sonra ise bu fraktal yapıları oluşturmaya yönelik tekrarlama konusuna değindiği görülmektedir. Dersin son bölümlerinde ise fraktal boyutlara ve Mandelbrot kümesine yer verdiği belirlenmiştir. Bunun yanında Satchithananthan (1996) çalışmasında her bir fraktal konusu için birer ders planı geliştirmiştir. Böylece hazırladığı ünitenin sınıf ortamında nasıl uygulanabileceğini göstermeye çalışmıştır.

Bedford (1998) ise pre-calculus dersini almış, ancak calculus dersini almamış lise öğrencileri (14-18 yaş) için kaos teori ve fraktal geometrinin öğretilmesine yönelik bir ders geliştirmiştir. Araştırmacı hazırladığı 8 ünitelik bu dersin ayrı bir ders olarak görülmemesini, dersin içeriğinin mevcut matematik öğretim programlarına dağıtılabileceğini ifade etmektedir. Bedford (1998) çalışmasının giriş kısmında kaos teori ve fraktal geometri hakkında kısa açıklamalarda bulunarak niçin bu iki konuya yönelik bir ders düzenlemeye karar verdiğini belirtmektedir. Hazırladığı dersin içeriği aşağıda sunulmuştur:

- Dinamik sistemler ve tekrarlama kavramı hakkında açıklamalar
- Fraktal geometrinin temel kavramlarının öğretimi. Klasik fraktal yapıların oluşturulması ve öz-benzerlik, fraktal boyut ve sonsuzluk kavramları üzerine tartışmalar,
- Yörüngelerin incelenmesi. Cebirsel olarak yörüngelerin grafiklerinin çizdirilerek grafikler üzerinde yörüngelerin davranışlarının incelenmesi
- Logistic fonksiyon kavramının öğretimi
- Karmaşık sayılar hakkında hatırlatmalar
- Julia kümeleri
- Kaos'un matematiği. Cebirsel tekrarlama kuralları ile Logistic fonksiyonun birlikte kullanılması.
- Kaos'u anlama. Kaos teori nedir, nerelerde kullanılmaktadır ve temel özellikleri nelerdir?

Bunun yanında Bedford (1998) fraktal ve kaos teorinin öğrenilmesi ve öğretilmesine yardımcı olacak kitapların, videoların, bilgisayar yazılımlarının ve internet siteleri gibi birçok kaynağın ismine yer vermektedir. Fraktal geometri ve kaos teorinin kendi içsel özelliklerinden dolayı öğrencilerin ilgisini çektiğini ve derse olan motivasyonlarını artırdığını ifade etmektedir. Ayrıca öğrencilerin cebir, trigonometri vb. birçok geleneksel matematik konusunu hava tahmini, borsa, nüfus artışı gibi yaşadığı çevredeki birçok olayla ilişkilendirme fırsatı elde ettiğini belirtmektedir.

Norko (1998) fraktal geometrinin ortaöğretim matematik öğretim programlarına entegre edilebileceğini belirttiği çalışmasında bir öğretim programı geliştirmiş, ancak bu programı uygulamamıştır. Araştırmasının amacını;

- Orta öğretim programlarında fraktallar konusu nasıl sunulmalıdır?
- Mevcut matematik öğretim programlarına fraktallar konusu nasıl entegre edilebilir?

soruları kapsamında fraktalların ve özelliklerinin anlaşılmasını sağlayacak 7-12. sınıf seviyesi için ders planları hazırlamak olarak belirtmektedir. Çalışmada matematik eğitimindeki dergilerde fraktal kavramlarının mevcut matematik programlarına entegre edilebileceğinin belirtildiği, ancak kullanılan ders kitaplarına bu konunun çok fazla yansımadığı ifade edilmektedir. Hazırladığı etkinlikler genel matematik, cebir öncesi, cebir, geometri, ileri cebir ve ileri matematik seviyelerine göre tasarlanmıştır. Bunun yanında hazırladığı ders planlarının mevcut matematik müfredatlarındaki konularla olan ilişkilerini de göstererek bu etkinliklerin matematik müfredatlarında hangi konulara entegre edilebileceğini ifade etmektedir. Hazırladığı etkinlikler daha çok çizme ve boyama şeklindeki manipulatif etkinliklerdir. Fraktal geometri öğretimine yönelik hazırladığı ünitede tekrarlama, öz-benzerlik, Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni, Koch Kartanesini tanıtıcı etkinlikler ile Julia ve Mandelbrot kümesi konularına yer vermiştir.

Üstün (1999) ortaöğretim matematik programına fraktal geometri konusunun entegre edilmesi amacıyla bir ünite geliştirmiş, ancak bu ünite gerçek sınıf ortamında kullanılmamıştır. Geliştirdiği ünitede toplam 12 kazanım belirlemiştir. Ünitede fraktal geometrinin öğretimi için döngü, tekrarlama, öz-benzerlik, fraktal boyut, Mandelbrot ve Julia kümeleri konularına yer verilmiştir. Hazırladığı ünite daha çok geleneksel öğretim yaklaşımını yansıtmasına karşın öğrencilerin fraktal yapıları oluşturmalarını sağlayan manipulatif ve bilgisayar destekli etkinliklere de yer verilmiştir. Üstün (1999) hazırladığı fraktal geometri ünitesinin geometri öğretiminin genel amaçlarına göre değerlendirilmesini akademik uzmanlardan oluşan bir komisyonun görüşleri doğrultusunda yapmıştır. Üniteyi inceleyen uzmanlar hazırlanan ünitenin lise son sınıf öğrencilerinin düzeyine uygun olduğunu ve içeriğin matematiksel olarak doğru olduğunu ifade ettikleri belirlenmiştir. Bunun yanında içeriğin daha da geliştirilebileceği ifade edilmiştir. Ayrıca bu materyali kullanacak öğrencinin hem konuya çok alışık olmamasından hem de bazı kavramların anlaşılmasının güçlüğünden bahsedilerek dışarıdan yardım alınması gerektiği vurgulanmıştır.

Özetle, fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanan, ancak herhangi bir uygulaması yapılmayan çalışmaların daha çok 7-12. sınıf seviyelerine yönelik hazırlandığı ve tekrarlama, öz-benzerlik, fraktal boyut, Mandelbrot kümeleri ve kaos konularına odaklanıldığı görülmektedir. Bu bağlamda bu çalışmalar fraktalların öğretimine yönelik hazırlanacak öğretim programları için bir yol haritası niteliğindedir. Ancak uygulamalarının yapılmamış olması programların nasıl çalıştığını göstermemesi yönünde bir eksikliktir. Bunun yanında hazırlanan programlar fraktalların matematiğin diğer disiplinlerle ve matematiğin diğer konularıyla olan ilişkilerini göstermesi bakımından önemlidir.

1990'lı yıllardan günümüze kadar fraktal geometri konularının matematik öğretim programlarına entegrasyonunu amaçlayan çalışmalar incelendiğinde genel olarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Literatürde fraktal geometri konularının mevcut matematik ve geometri öğretim programlarına entegrasyonu amacıyla yapılan çalışmalar farklı sınıf seviyeleri için bu konuların öğretiminin yapılabileceğini göstermektedir. Ancak yapılan çalışmaların sıklıkla 7-12. sınıf seviyesine yönelik olduğu görülmektedir. Bu bağlamda tasarlanacak olan fraktal geometri öğretim programının 7-12. sınıf seviyesine yönelik hazırlanması uygun olacaktır. Bunun yanında literatürde yapılan çalışmalar özellikle 7-12. sınıf seviyesinde fraktal konularının öğretiminde sıklıkla tekrarlamalar, öz-benzerlik, boyut, Mandelbrot ve Julia kümeleriyle kaos konularına odaklanıldığını göstermektedir. Bu bağlamda tasarlanacak olan fraktal geometri öğretim programının içeriğinde bu konulara yer verilmesi daha uygun olacaktır.

Literatürden fraktalların öğretimine yönelik tasarlanan etkinliklerin hem manipulatif hem de bilgisayar destekli olduğu görülmektedir. Bu bağlamda tasarlanan fraktal geometri öğretim programında hem manipulatif hem de bilgisayar destekli etkinliklere yer verilmesi uygun olacaktır.

Fraktal geometri konularının öğretimine ve mevcut müfredatlara entegrasyonuna yönelik yapılan çalışmaların sıklıkla nitel olduğu görülmektedir. Öğrencilerin ve öğretmenlerin bu konuları nasıl öğrendiklerini, ne tür hatalara ve anlamalara sahip olduklarını belirlemek için gözlem ve mülakatlar kullanılmıştır. Bu bağlamda tasarlanacak olan fraktal geometri öğretim programının değerlendirilmesinde nitel bir yaklaşımın benimsenmesinin uygun olacağı söylenebilir. Bu kapsamda öğrencilerin tasarlanacak programın kazanımlarını edinmedeki başarılarını belirlemede açık uçlu sorulardan oluşacak yazılı sınavların ve program sonunda ne tür öğrenmeler gerçekleştirdiklerinin, ne tür anlamalara sahip olduklarının belirlenmesinde ise klinik mülakatların kullanılması uygun olacaktır. Ayrıca literatürde öğrencilerin fraktal geometri konularına yönelik yaşantılarından yansımalar günlükler, proje ve performans ödevleriyle ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda tasarlanacak fraktal geometri öğretim programının uygulama sürecindeki yansımalarının belirlenmesinde öğrenci günlükleri, proje ve performans ödevlerine yer verilmesi uygun olacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmanın amacı, ortaöğretim düzeyi için bir fraktal geometri öğretim programı tasarlamak ve fraktal konularının öğrenilebilirliği ve öğretilebilirliğindeki yeterliliğini irdelemektedir. Bu bağlamda üniversite birinci sınıfta öğrenim gören matematik öğretmeni adaylarının hazırlanan fraktal geometri öğretim programında belirlenen kazanımları ne kadar kazandıkları, konuları öğrenirken başarılı oldukları durumlar ve karşılaştıkları sorunlar ile öğretim sürecinde kullanılan materyallerin ve metotların etkileri incelenmiştir. Bu bölümde araştırmanın tasarlanması, yöntemi, örneklemi, veri toplama araçlarının geliştirilmesi, verilerin toplanması ve analizi sürecinde yapılan işlemler hakkında bilgi verilmiştir.

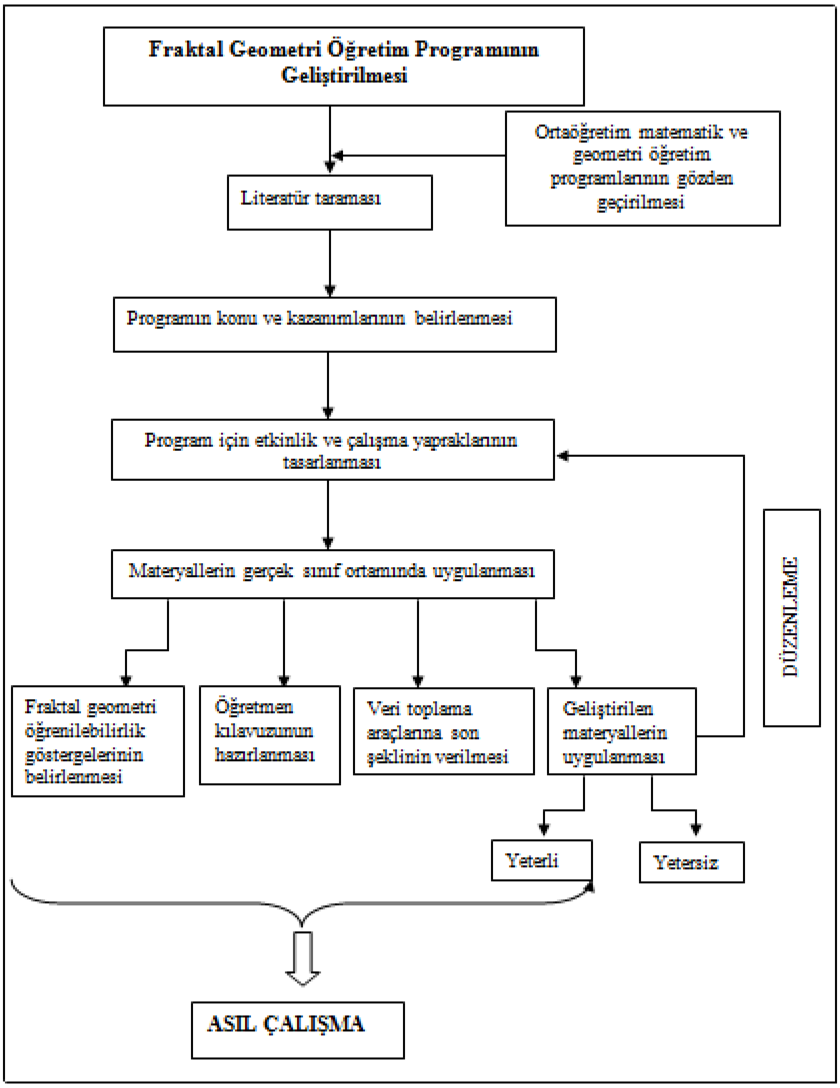
2.1. Araştırmanın Tasarlanması

Fraktal geometri son yıllarda matematik öğretim programlarında yer almaya başladığından öğrencilerin bu konu hakkında herhangi bir ön bilgileri bulunmamaktadır. Bu nedenle fraktal geometri konularının öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiğini ve bu öğrenmelerin gerçekleşmesindeki öğretimi ortaya koyabilmek için, her şeyden önce öğrencilerin fraktal geometriyi tanımaları ve bu konuda deneyim kazanmaları gerekmektedir. Okullarımızda okutulan geometri dersleri Euclid geometri üzerine inşa edilmiştir. Fraktal geometri yapısı gereği diğer Euclid-dışı geometrilerden farklı olarak Euclid geometrisini dışlamamakta, onun elemanlarını etkili şekilde kullanmaktadır. Veri kaynağı olarak kullanılan öğretmen adaylarının öğrenimleri süresince almış oldukları geometri ve matematik dersleri bu yeni geometrinin öğrenilmesi için gerekli, ancak yeterli değildir. Bu nedenle öğrencilerin fraktal geometri için düşünceler geliştirmelerini sağlamak için bir öğretim programı tasarlanmıştır. Programın tasarlanmasında aşağıdaki adımlar izlenmiştir.

- Çalışmanın ilk aşamasında her hafta 3 ders saati olmak üzere 6 hafta sürecek olan bir fraktal geometri öğretim programı için izlenecek olan konu sırası ve kazanımlar geliştirilmiştir (EK 1). Konu sırası tasarlanırken fraktal geometriyle ilgili geliştirilmiş öğretim programları, konuyla ilgili yazılmış yerli ve yabancı kitaplardan ve ortaöğretim matematik ve geometri öğretim programlarından faydalanılmıştır (Bowers, 1991; Peitgen vd., 1991; Peitgen vd., 1992; MEB, 1992; McKee, 1996; Langille, 1996; Bremer, 1997; Norko, 1998; Lornell ve Westerberg, 1999; Vacc, 1999; Üstün, 1999; Choate vd., 1999; Devaney, 2000; Frame ve Mandelbrot, 2002; Peitgen vd., 2004; Hacısalihoğlu ve Yaz, 2005; MEB, 2008).

- Çalışmanın ikinci aşamasında geliştirilen öğretim programının etkin olarak uygulanabilmesi için öğrencilerin fraktal yapıları oluşturmalarını sağlayan etkinlikler ve her bir etkinlikte bu yapılardaki matematiksel örüntü ve ilişkileri bulup ortaya çıkarmalarında onlara yardımcı olacak çalışma yaprakları hazırlanmıştır (EK 2). Bunun yanında hazırlanan programının nasıl uygulanabileceğini gösteren bir öğretmen kılavuzu geliştirilmiştir (EK 3). Ayrıca asıl çalışmada öğretmene yardımcı olacak ve fraktal geometri konularının öğretiminde kullanabileceği her bir konuya yönelik Powerpoint sunuları hazırlanmıştır (EK 4).
- Fraktal konularının öğrenilebilirliğinin tespit edilmesi için hazırlanan her bir kazanıma yönelik öğrencilerin göstermesi beklenen davranışlar belirlenerek öğrenilebilirlik göstergeleri tespit edilmiştir (EK 5). Pilot çalışmada bu göstergeler yeniden düzenlenerek son şekli verilmiştir.

Asıl çalışmaya kadar izlenen yöntemin şematik açıklaması aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1. Asıl çalışmaya kadar olan yöntemin şematik açıklaması

Hazırlanan fraktal geometri öğretim programının uygulama süreci boyunca ve uygulama sonunda değerlendirilmesini yapmak için her hafta rastgele seçilen 5 öğrenci ile her bir fraktal geometri dersinden sonra derse yönelik düşüncelerini ve öğrenmelerini belirleyici yarı-yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır (EK 6). Bunun yanında 9 sorudan oluşan bir yazılı sınav hazırlanmıştır (EK 7). Yazılı sınavın oluşturulmasında dersin kazanımları temel alınarak literatürde yapılan çalışmalarla (Bowers, 1991; Langille, 1996) konuyla ilgili ders kitaplarından (Peitgen vd., 1991; Peitgen vd., 1992; Choate vd., 1999; Devaney, 2000) yararlanılmıştır. 6 haftalık çalışma sonunda yazılı sınav öğrencilere uygulanmış ve sınav sonuçlarına göre belirlenen 9 öğrenci ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Klinik mülakatlar öğrencilerin yazılı sınav sorularına verdikleri yanıtlar üzerinde gerçekleşmiştir. Böylece öğrencilerin bu konuları nasıl anladıkları ve karşılaştıkları güçlükler ortaya konulmuştur. Geliştirilen fraktal geometri öğretim programı bir öğretim elemanı tarafından 6 hafta boyunca haftada 3 ders saati olmak üzere toplam 18 ders saati üniversite birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına uygulanmıştır.

Şematik açıklaması verilen yöntemin bileşenlerinin açıklamaları aşağıdaki gibidir.

2.1.1. Fraktal Geometri İçin Öğretim Programının Geliştirilmesi

Burada öğretim programı geliştirmekten kasıt programda hangi konuların işleneceğini, programın kazanımlarını ve programın ilkelerini belirlemektir. Fraktal geometri matematik ve geometri öğretim programları için oldukça yeni bir konudur. Ülkemizde bu konunun öğretimine 2008 yılından itibaren 8. sınıf matematik öğretim programında başlanılmasına karşın bu konunun öğretimine yönelik hazırlanmış bir öğretim programı bulunmamaktadır. Fraktal geometriye yönelik öğretim programı geliştirilirken literatürde de sıklıkla kullanılan Taba-Tyler modeli, MEB'in program geliştirme modeli ve Wulf ve Schave'in (1984) Sistem yaklaşımı modeli temel alınmıştır. Bu bağlamda öncelikle hangi konuların bulunması gerektiği araştırılmış ve literatür taranarak ortak bir konu sırası oluşturulmuştur. Literatürde yapılan çalışmalar fraktal konularının öğretiminde sıklıkla tekrarlama, öz-benzerlik, fraktal boyut ve fraktalların çevresi ve alanı şeklinde bir konu sırasının takip edildiğini göstermektedir (Bowers, 1991; Peitgen vd., 1991; Peitgen vd., 1992; McKee, 1996; Langille, 1996; Bremer, 1997; Norko, 1998; Lornell ve Westerberg, 1999; Vacc, 1999; Üstün, 1999; Choate vd., 1999; Devaney, 2000; Frame ve Mandelbrot, 2002; Peitgen vd., 2004; Hacısalihoğlu ve Yaz, 2005). Örneğin Bowers (1991) çalışmasında öncelikle öğrencilerinin verilen şekillerin görünüşlerini tanımlayarak ve onları düzgün ya da karmaşık olarak sınıflandırarak fraktallara yönelik bir algı oluşturmalarını sağlamakta, daha sonra ise öz-benzerlik ve boyut konularının öğretimini gerçekleştirmektedir. Langille (1996) ise fraktalların öğretimine yönelik geliştirdiği ünitede sırasıyla tekrarlama, öz-benzerlik, kaos oyunu, fraktal boyut ve Mandelbrot kümesi konularına yer vermektedir. Benzer şekilde McKee'de (1996) geliştirdiği ünitede ilk olarak tekrarlama konusu üzerinde durmuş ve öğrencilerinin tekrarlamaları kullanarak fraktalları oluşturmalarını sağlamıştır. Daha sonra ise öz-benzerlik konusunun öğretimini gerçekleştirmiştir. Langille'nin (1996) geliştirdiği üniteye benzer şekilde Bremer'de (1997) öncelikle tekrarlama konusunun öğretimini gerçekleştirmiştir. Bu konunun öğretiminde

Langille'den farklı olarak cebirsel tekrarlamalar, grafiksel tekrarlamalar ve geometrik tekrarlamalara yer vermiştir. Bu nedenle geliştirdiği ünitede fraktalların öğretimi süreci sırasıyla fonksiyonların tekrarlanması, Mandelbrot ve Julia kümeleri, geometrik tekrarlamalar, öz-benzerlik, fraktal boyut, doğal fraktallar ve kaos şeklindedir. Lornell ve Westerberg (1999) ise Bowers (1991) gibi öncelikle öğrencilerinin çevrelerindeki nesnelerin şekillerini dikkate alarak bu nesnelerden Euclid elemanlarınca tanımlanamayanları belirlemelerini istemekte ve bunları fraktallarla ilişkilendirerek fraktal geometri için bir algı oluşturmakta, daha sonra ise sırasıyla tekrarlama, öz-benzerlik ve fraktalların çevresi ve alanı konularının öğretimine yer vermektedirler. Ayrıca Peitgen vd. (1991) fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırladıkları ders kitabında sırasıyla tekrarlama, öz-benzerlik, kaos oyunu ve fraktal boyut konularına yer verdikleri belirlenmiştir. Benzer şekilde Choate vd. (1999) fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırladıkları ders kitabında sırasıyla geometrik tekrarlamalar, öz-benzerlik, rastgele tekrarlamalar ve kaos oyunu, fraktal boyut, doğal fraktallar ve fraktalların çevresi ve alanı konularının öğretimine yönelik açıklama ve etkinliklere yer verdikleri tespit edilmiştir. Bu bağlamda yukarıda belirtilen çalışmalar doğrultusunda bu çalışmada hazırlanan fraktal geometri öğretim programının konu sırası aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

- Fraktal kavramına giriş (1 kazanım)
- Geometrik tekrarlamalar (3 kazanım)
- Fraktalların çevresi, alanı ve hacmi (2 kazanım)
- Cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot- Julia kümeleri (6 kazanım)
- Öz-benzerlik (3 kazanım)
- Fraktal boyut (4 kazanım)
- Kaos (2 kazanım)

Daha sonra yukarıda belirlenen konular kazanımlara dönüştürülerek öğretimde kullanılabilir hale getirilmiştir (EK1). Oluşturulan kazanımlar bilişsel öğrenmeleri vurgulamasına karşın hazırlanan fraktal geometri öğretim programının duyuşsal öğrenmelere de etkisinin olacağı düşünülmektedir. Langille'nin (1996) çalışmasında belirlediği duyuşsal kazanımlar paralelinde bu programın öğrenciler tarafından kazanılması beklenen duyuşsal kazanımları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

- Matematiği farklı bir perspektiften görme fırsatı elde eder,
- Fraktal geometrinin doğanın geometrisi olduğu düşüncesini oluşturur,

- Matematiğin estetik ve çekici güzelliğinin farkına varır,

Belirli bir plan, emek ve ilkeler doğrultusunda yapılan eğitimle amaçlara daha kolay yoldan ulaşılacağı açıktır (MEB, 2007). Bunun için matematik öğretiminin bazı ilkeler doğrultusunda yapılması gerekmektedir. Bu bağlamda fraktal geometri için hazırlanan bu programda belirlenen konu sırası ve kazanımlara göre öğrencilerin bu kazanımlara ulaşmaları sırasındaki deneyimlerine rehberlik edecek ilkeler belirlenmiştir. Fraktal geometri öğretim programı için belirlenen ilkeler aşağıda sunulmuştur:

- Öğrencilere düşüncelerini ortaya koyabilecekleri kendilerini ifade edebilecekleri bir ortamın oluşturulması,
- Bilişsel öğrenmelerin yanında duyuşsal öğrenmelere de vurgu yapılması,
- Yeni bilgilerin eski bilgiler üzerine inşa edilmesine özen gösterilmesi,
- Matematiğin günlük hayattaki yeri ve önemine vurgu yapılması ve doğayla olan ilişkisinin fark edilmesinin sağlanması,
- Rastgele olayların (hava durumu, depremler, vb) ve düzensiz, karmaşık (kıyı şeritleri, ağaçlar, vb.) gibi birçok nesnenin içerisinde bir düzenin olabileceğinin farkına vardırılması,
- Araştırma çalışmalarına yer verilmesi,
- Keşfetme sürecinde (gözlem yapma, örüntüler bulma, şekil, tablo ve model kullanma, genellemelere ulaşma) sezgiden ve tahminden yararlanma yollarının geliştirilmesi,
- Görsel gösterimlerden yola çıkarak matematiksel soyutlamalara ulaşılması.

2.1.2. Fraktal Geometri Öğretim Programında Yer Alan Çalışma Yapraklarının Tasarlanması ve Öğretmen Kılavuzunun Hazırlanması

Çalışma yaprakları, bir konunun uygulanması aşamasında öğrencilerin yapacağı etkinliklere yol gösterici açıklamaları içerir. Euclid geometrisine alışık olan öğrencilerin doğal nesnelerdeki matematiksel yapıları incelemeleri, geometrik örüntüleri bulup bunları cebirsel olarak ifade etmeleri ve kesirli boyut ile Mandelbrot ve Julia kümelerini keşfetmeleri çok kolay değildir. Bu anlamda çalışma yaprakları bu güçlüğün aşılmasında öğrencilere yardımcı niteliğindedir. Bu çalışmada çalışma yaprakları hazırlama ilkeleri Baki, (2008) göz önüne alınarak geliştirilmiştir:

- Bilgi doğrudan aktarılmaz, bizzat birey tarafından kurulur. Öyle ise çalışma yaprakları doğrudan hazır bilgileri öğrenciye aktaran materyal niteliğinde olmamalıdır.
- Öğrenmenin ön koşullarından birisi de meraktır. Çalışma yaprağında yer alacak etkinlikler merak uyandıracak nitelikte olmalıdır. Bu nedenle öğrenilmesi istenen özellikler, ilişkiler, kavramlar, olgular ilgi çekici bir yaklaşımla ve sistemli, planlı bir şekilde etkinliklerin içinde gizlenmelidir.
- Öğrenilmesi istenen özellikler, ilişkiler, kavramlar, olgular araştırmaya ve keşfetmeye yönelik açık uçlu sorular yardımıyla etkinlikler içerisine gizlenmelidir.
- Etkinliklerin senaryoları bireysel veya grup çalışmaları göz önüne alınarak hazırlanmalıdır.
- Etkinlikler öğrenciye aşağıdaki bilişsel süreçleri sağlamalıdır:
  - ✓ Matematiksel ifadeler kullanma ve model kurma
  - ✓ Mantıksal çıkarımda bulunma
  - ✓ Matematiksel sembolleri kullanma ve soyutlama
- Çalışma yaprağının uygulanması sırasında öğrenciye minimum yardım sağlanması gerekir. Bu nedenle, çalışma yapraklarında açık ve anlaşılır yönergeler kullanılmalıdır, öğrenci sık sık öğretmenin yardımına gereksinim duymamalıdır. Öğretmen uygulama sırasında doğru ya da yanlış hüküm verici tavır içinde olma yerine cevabın, çözümün en sonunda öğrenciler tarafından bulunmasını sağlamalıdır.
- Etkinliklerdeki olgular, çözümler, varsayımlar, genelleştirmeler öğrenciler tarafından önce grup tartışması sonra da sınıf tartışması ortamında sorgulanmaya uygun olmalıdır.

Fraktal geometri öğretim programında yer alan konuların öğretimine yönelik geliştirilen çalışma yaprakları (EK 2) ve bu çalışma yapraklarının kullanım amaçları aşağıda açıklanmıştır:

- Fraktal kavramına giriş**.** Bu konunun öğretiminde amaç öğrencilerde farklı bir geometri olarak fraktal geometrinin olduğu algısını oluşturmaktır. Bu amaçla çalışma yaprağı-1 hazırlanmıştır. Bu çalışma yaprağında öğrencilerden çevrelerinde bulunan kapı, sıra, sınıf tahtası, ağaç, eğrelti otu, bulut vb. gibi nesneleri dış görünüşlerine göre sınıflandırmaları istenmektedir. Bu sınıflandırmaya göre şekilleri düzgün olan nesnelerin Euclid geometrisince konu edinilirken diğer nesnelerin bu geometri tarafından ele alınmadığının farkına varmaları beklenmektedir. Böylece şekilleri karmaşık ve girintili ve çıkıntılı olan ve Euclid geometrisince ele alınmayan bu nesneleri konu edinen yeni bir geometri olarak fraktal geometrinin olduğu algısını öğrencilerin kazanmaları amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda bir PowerPoint sunusu da hazırlanmıştır.

- Geometrik tekrarlamalar. Bu konunun öğretiminde amaç öğrencilerin geometrik tekrarlamaları kullanarak fraktal şekiller oluşturmalarını ve bu şekillerdeki örüntüleri keşfetmelerini sağlamaktır. Bu amaç doğrultusunda çalışma yaprağı-2, çalışma yaprağı-3 ve çalışma yaprağı-4 hazırlanmıştır. Çalışma yaprağı-2'de öğrencilerden doğru parçalarını kullanarak fraktal ağaçlar çizmeleri istenmektedir. Çizdikleri bu ağaçlara göre başlangıç şekli, üretici ve yörünge kavramlarını tanımlamaları beklenmektedir. Bu çalışma yaprağının aynı zamanda çalışma yaprağı-1'de edindikleri algılarını pekiştirmelerini sağlayacağı düşünülmektedir. Çalışma yaprağı-3'de öğrencilerden parça ekleme ve çıkarmaları kullanarak Cantor kümesini oluşturmaları istenmektedir. Bu etkinliğin amacı öğrencilerin geometrik tekrarlamaları kullanarak fraktalları oluşturmalarının bir yolunun parça ekleme ve çıkarmalar olduğunu görmeleridir. Bu çalışma yaprağında aynı zamanda Cantor kümesinin oluşumunda geride kalan parça sayısı ve toplam uzunluğu hesaplamaya yönelik sorulara da yer verilmiştir. Böylece öğrencilerin Cantor kümesinin sıfır uzunluklu sonsuz noktadan oluşan bir küme olduğunu görmeleri amaçlanmaktadır. Çalışma yaprağı-4'de ise öğrencilerden geometrik tekrarlamalarla fraktalları oluşturmanın bir diğer yolunun dönme ve çevirmeleri kullanarak fraktal şekilleri oluşturmak olduğunu görmeleri amaçlanmaktadır. Bu amaçla doğrultusunda fraktal ejder etkinliğine yer verilmiştir. Yine bu çalışma yaprağında da çalışma yaprağı-3'de olduğu gibi fraktal ejderin toplam uzunluğuna ve her bir tekrarlamada oluşan köşe sayısını belirlemeye yönelik sorulara yer verilmiştir. Böylece öğrencilerin fraktal şekillerdeki örüntüleri keşfetmeleri sağlanmaya çalışılmaktadır. Bunun yanında yukarıdaki çalışma yapraklarına yönelik öğretmenin ders süresince kullanacağı bir PowerPoint sunusu da hazırlanmıştır.

- Fraktalların çevresi, alanı ve hacmi**.** Bu konunun öğretiminde amaç fraktalların çevresi, alanı ve hacmini geometrik serileri kullanarak hesaplamak ve fraktalların çevre-alan-hacim arasındaki ilişkisi ile Euclid şekillerinin çevre-alan-hacim arasındaki ilişkiyi karşılaştırmaktır. Bu amaçla çalışma yaprağı-5 ve çalışma yaprağı-6 hazırlanmıştır. Çalışma yaprağı-5'te öğrencilerden Sierpinski üçgenini oluşturmaları ve çevresinin sınırsız şekilde büyürken alanının sıfıra gittiğini bulmaları beklenmektedir. Ayrıca elde edilen sonuçların Euclid şekillerinin çevre-alan arasındaki ilişkiden farklılığını göstermek için sınıf içi tartışmada da kullanılacak sorulara yer verilmiştir. Benzer şekilde çalışma yaprağı-6'da da öğrencilerden somut Sierpinski çokyüzlüsü modellerini kullanarak bu çokyüzlünün yüzey alanı ve hacmini hesaplamaları ve yüzey alanının değişmezken hacminin sıfıra gittiğini göstermeleri beklenmektedir. Çalışma yaprağı-5 de olduğu gibi bu çalışma yaprağında da fraktalların alan-hacimleri arasındaki ilişkinin Euclid şekillerinin alan-hacimleri arasındaki ilişkiden farklılığını göstermek için sorulara yer verilmiştir.
- Cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri. Bu konunun öğretiminde amaç cebirsel tekrarlamaları kullanarak Mandelbrot ve Julia kümelerini oluşturmak ve özelliklerini belirlemektir. Bu amaçla çalışma yaprağı-7, çalışma yaprağı-8 ve çalışma yaprağı-9 hazırlanmıştır. Bunun yanında Excel ve fraqtive programları da kullanılmıştır. Çalışma yaprağı-7'de öğrencilerden reel ya da karmaşık sayılarda verilen cebirsel tekrarlamalara göre başlangıç noktası, üretici ve yörünge kavramlarını tanımlamaları ve başlangıç noktasının yörüngesinin sabit bir değere mi, sonsuz bir değere mi, yoksa belli değerler arasında mı olduğunu belirlemeleri beklenmektedir. Bu etkinlikte öğrenciler hesap makinesi ya da Excel programını yörüngelerin hareketlerini incelemede kullanmaktadırlar. Bunun yanında bu çalışma yaprağına paralel olarak bir PowerPoint sunusu da hazırlanmıştır. PowerPoint sunusunun amacı öğrencilere çalışma yaprağında başlangıç noktasının yörüngesinin sabit, sonsuz ya da periyodik davranışına göre mahkûm, kaçak ya da periyodik olarak isimlendirildiğini açıklamaktır. Çalışma yaprağı-8'de öğrencilerden mahkûm ya da periyodik davranış gösteren başlangıç noktalarının Julia kümesinin içerisinde olduğu ve kaçak başlangıç noktalarının ise Julia kümelerinin dışında olduğunu belirlemeleri beklenmektedir. Bu amaçla bu çalışma yaprağında Excel ve fraqtive programları kullanılmıştır. Excel

programıyla öğrenciler yaklaşık 40 tekrarlama sonucunda verilen başlangıç noktalarının yörüngelerin hareketini incelemekte ve başlangıç noktasının türünü belirlemekte; fraqtive programıyla ise bu başlangıç noktasının Julia kümesinde nerede bulunduğunu görmektedirler. Bu çalışma yaprağı aynı zamanda Julia kümesinin şeklinin oluşumunda neyin etkili olduğunu da öğrencilerin görmesini sağlamaktadır. Çalışma yaprağında yer alan son etkinlik ise Julia kümelerinin öz-benzer parça sayısı ile Julia kümesini oluşturan başlangıç noktalarının yörüngelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi keşfetmeye yöneliktir. Bu etkinlikte öğrencilerden Excel programı ile yörüngelerin periyotlarını belirlerken, fraqtive programıyla da Julia kümesini oluşturmaları ve öz-benzer parçalarına karar vermeleri beklenmektedir. Böylece yörüngelerin periyotları ile öz-benzer parça sayılarının aynı olduğu sonucuna ulaşmaları amaçlanmaktadır. Çalışma yaprağı-9'da ise öğrencilerden Mandelbrot kümesinin hangi noktalardan ve nasıl oluştuğunu belirlemeleri beklenmektedir. Bu çalışma yaprağında da Excel ve fraqtive programları kullanılmıştır. Çalışma yaprağında kullanılan fraqtive programının aynı zamanda Mandelbrot kümesi ile Julia kümeleri arasındaki ilişkiyi öğrencilerin görmelerini kolaylaştırdığı düşünülmektedir. Bunun yanında bu çalışma yaprağına paralel olarak bir PowerPoint sunusu da hazırlanmıştır. PowerPoint sunusunun amacı Mandelbrot kümesinin mahkum ya da periyodik noktalardan oluştuğunu göstermektir.

- Öz-benzerlik. Bu konunun öğretiminde amaç öğrencilerin öz-benzerlik kavramını tanımlamalarını ve öz-benzerlik türlerini belirlemelerini sağlamaktır. Bu bağlamda çalışma yaprağı-10, çalışma yaprağı-11 ve çalışma yaprağı-12 hazırlanmıştır. Çalışma yaprağı-10'da öğrencilerden öz-benzerlik kavramına yönelik bir algı geliştirmeleri beklenmektedir. Bu amaçla öğrencilerden Euclid şekillerinden çember ile eğrelti otu, fraktal ağaç ve Koch eğrisinin parça-bütün arasındaki ilişkiyi incelemeleri istenmiştir. Böylece fraktalların herhangi parçalarının bütünlerine benzediği, ancak Euclid şekillerinde bu tür bir özelliğin olmak zorunda olmadığı sonucunu elde etmeleri beklenmektedir. Çalışma yaprağı-11'de amaç öğrencilerin her bir tekrarlama adımında Sierpinski üçgeninin öz-benzer parçaları ile bunların büyüme oranlarını arasındaki ilişkiyi belirlemelerini sağlamaktır. Böylece öğrencilerin öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranı kavramlarını öğrenmeleri amaçlanmaktadır. Çalışma yaprağı-12' de ise öğrencilerden verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini belirlemeleri istenmektedir. Bu amaçla matematiksel fraktallar ve doğal fraktal örneklerine yer verilmiş ve bu şekillerin öz-benzerliklerinin nasıl ve şeklin nerelerinde sağlandığına dikkat çekilmiştir. Bu konunun öğretimine yönelik çalışma yapraklarıyla paralel şekilde bir PowerPoint sunusu da hazırlanmıştır. PowerPoint sunusu çalışma yaprakları tamamlandıktan sonra sınıf içi tartışmalarda kullanılabilir.

- Fraktal boyut. Bu konunun öğretiminde amaç farklı bir boyut tanımını öğrencilere tanıtmak ve bu boyut tanımına göre fraktalların boyutlarını hesaplattırmaktır. Bu amaç doğrultusunda çalışma yaprağı-13, çalışma yaprağı-14, çalışma yaprağı-15 ve çalışma yaprağı-16 hazırlanmıştır. Çalışma yaprağı-13'de öğrencilerin 1-2-3 boyut dışında kesirli boyutlarında olabileceği yönünde bir algı geliştirmeleri amaçlanmaktadır. Çalışma yaprağında düz bir alüminyum folyo kullanılmakta ve bu folyonun düz, tamamen kırıştırılıp bir top haline getirildiğinde ve tekrar açılıp yüzeyinin girintili çıkıntılı olduğu durumlardaki boyutunun ne olabileceği üzerine sorulara yer verilmiştir. Çalışma yaprağı-14'de öğrencilerden Euclid şekillerini kullanarak tamamen öz-benzer fraktallar için bir boyut tanımı oluşturmaları ve oluşturdukları bu boyut tanımını kullanarak farklı fraktal şekillerin boyutlarını hesaplamaları istenmektedir. Böylece öğrencilerin kesirli boyutlarla karşılaşmaları sağlanmıştır. Çalışma yaprağı-15'de ise kıyı şeridi gibi yaklaşık öz-benzerliğe sahip fraktalların boyutlarını hesaplamada öz-benzerlik boyutundan farklı olarak uzunluk ölçme metodunu tanımaları ve bunu kullanmaları amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda Türkiye'nin kıyı şeridlerinin boyutlarını hesaplamaları ve boyut ile şeklin girintili çıkıntılı yapısı arasında doğru bir ilişkinin olduğunu görmeleri beklenmektedir. Çalışma yaprağı-16'da ise uzunluğunu ölçmenin mümkün olmadığı yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada kutu sayma metodunu tanımaları ve kullanmaları amaçlanmıştır. Bu amaçla öğrencilerin bir ağacı resminin fraktal boyutunu hesaplamaları beklenmektedir. Tüm çalışma yapraklarında öğrencilerin doğru hesaplamalar yapabilmeleri için hesap makinesi ve milimetrik kağıt kullanmaları gerekmektedir. Bunun yanında tüm çalışma yaprakları paralelinde bir PowerPoint sunusu hazırlanmıştır. PowerPoint sunusunda öğrencilerin Sierpinski üçgeni ve Cantor kümesi gibi bildikleri fraktal şekillerin boyutlarını yukarıda ifade edilen boyut hesaplama tanımlarını kullanarak nasıl hesaplayacakları açıklanmaktadır.

- Kaos. Bu konunun öğretiminde amaç öğrencilerin rastgele olarak nitelendirilen olaylar sonucunda da fraktal şekillerin oluşabileceğini görmelerini ve bunun nedenlerini irdelemelerini sağlamaktır. Bu amaçla çalışma yaprağı-17 ve çalışma yaprağı-18 hazırlanmıştır. Çalışma yaprağı-17'de öğrencilerden öncelikle kağıt üzerinde kaos oyununu oynamaları ve oyundaki noktaların nasıl hareket ettiğinin farkına varmaları beklenmektedir. Daha sonra öğretim amaçlı bir web sitesi yardımıyla yaklaşık 1000. tekrarlamadan sonra Sierpinski üçgeninin oluştuğunu görmeleri amaçlanmaktadır. Çalışma yaprağında yer verilen sorular öğrencilerin niçin oyun sonunda Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlamalarını sağlamak amacıyla hazırlanmıştır. Bunun yanında öğrencilerden farklı sayıda nokta ya da farklı tekrarlama kurallarını için oyun oynandığında, her zaman bir fraktal şeklin oluşmayacağının da farkına varmaları beklenmektedir. Çalışma yaprağına paralel olarak ve sınıf içi tartışmalarda kullanmak amacıyla bir PowerPoint sunusu da hazırlanmıştır. Çalışma yaprağı-18 ise öğrencilerin ekolojik bir sistemde meydana gelen küçük değişikliklerin ne tür sonuçlara yol açtığının ve bu değişikliklerden hangilerinin kaotik olay olduğunun farkına varmaları amaçlanmaktadır. Bu çalışma yaprağının uygulanmasında Excel programı ya da bir hesap makinesinin kullanılması gerekmektedir.

Fraktalların öğretimi için hazırlanan öğretim programının uygulama süresi, geliştirilen çalışma yapraklarının kullanım şekilleri ve programın hangi kazanımlarıyla ilişkili oldukları Tablo 2.1'de özetlenmiştir.

Tablo 2.1. Fraktal geometri öğretim programının ders programı

Hafta	**Süre** (dakika)	**Kazanımlar**	**Çalışma yaprakları**	**Kull. araç-gereç**
1. HAFTA (3 ders)	20	Çevresinde bulunan nesnelerin şekillerini tanımlar ve bu nesneleri dış görünüşlerinin karmaşıklığına göre sınıflandırır.	Çalışma yaprağı-1	Slayt, eğrelti otu, brokoli gibi doğal nesneler
	30	Başlangıç şekli, üretici ve yörünge terimlerini örneklerle açıklar.	Çalışma yaprağı-2	Slayt, kağıt-kalem
	40	Tekrarlanan ekleme ve çıkartmaları kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.	Çalışma yaprağı-3	Slayt, kağıt-kalem, cetvel

Tablo 2.1.'in devamı

Hafta	Süre (dakika)	Kazanımlar	Çalışma yaprakları	Kull. araç-gereç
	40	Tekrarlanan dönme ve çevirmeleri kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.	Çalışma yaprağı-4	Slayt, kağıt kalem, açı ölçer, cetvel.
2. HAFTA (3ders)	45	Fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplar.	Çalışma yaprağı-5	Kağıt-kalem
	45	Fraktalların çevre-alan ve hacim arasındaki ilişki ile Euclid geometrisindeki şekillerin çevre-alan-hacim arasındaki ilişkileri karşılaştırır, benzerlik ve farklılıkları belirler.	Çalışma yaprağı-6	Somut dörtyüzlü kalıpları, Sierpinski çokyüzlüsü modeli
	40	Cebirsel tekrarlama kuralları kullanarak farklı başlangıç noktaları için yörüngeler bulur, bu yörüngelere göre başlangıç noktasının türünü belirler	Çalışma yaprağı-7	Hesap makinesi, Excel
3. HAFTA (3 ders)	45+20	Karmaşık düzlemde Julia kümesini tanımlar	Çalışma yaprağı-8	Slayt, Hesap makinesi, Excel, fraqtive
		Verilen başlangıç noktalarından hangilerinin Julia kümesi içerisinde hangilerinin dışarıda olduğuna karar verir		
		Farklı c-parametreleri için oluşan Julia kümelerinin öz-benzer parça sayısı ile bu Julia kümelerini oluşturan noktaların yörüngelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi keşfeder		
	45+ 20	Karmaşık düzlemde Mandelbrot kümesini tanımlar ve özelliklerini belirler	Çalışma yaprağı-9	Slayt, Hesap makinesi, Excel, fraqtive
		Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkileri belirler		
4. HAFTA (3ders)	20	Çevresinde bulunan nesneleri parça-bütün benzerliğine göre sınıflandırır, bunlardan fraktal olanları belirler ve Euclid şekilleriyle farklılıklarını açıklar.	Çalışma yaprağı-10	Slayt, eğrelti otu, brokoli gibi doğal nesneler
	40	Öz-benzerliği tanımlar ve öz-benzer şekillerin büyüme oranları ile öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkiyi belirler	Çalışma yaprağı-11	Slayt, kağıt-kalem
	40	Öz-benzerlik türlerini tanımlar ve verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini belirler	Çalışma yaprağı-12	Slayt, eğrelti otu, brokoli gibi doğal nesneler
	30	Çevresindeki nesneleri Euclid geometrisi anlamında boyutlarına göre sınıflandırır ve bu nesnelerden dış görünüşleri düzgün olanların boyutları ile dış görünüşleri girintili, çıkıntılı olanların boyutlarını karşılaştırır.	Çalışma yaprağı-13	Alüminyum folyo
5. HAFTA (3ders)	50	Tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını tanımlar ve bu fraktalların boyutlarını hesaplar	Çalışma yaprağı-14	Slayt, kağıt-kalem
	50	Kıyı şeridi gibi yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada uzunluk ölçme yöntemini kullanır	Çalışma yaprağı-15	Slayt, pergel, milimetrik kağıt, hesap makinesi
	50	Yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada kutu sayma metodunu kullanır	Çalışma yaprağı-16	Slayt, mili - metrik kağıt, hesap makinesi

Tablo 2.1’in devamı

6. HAFTA (3 ders)	45+45	Rastgele olarak ifade edilen bir süreç sonunda düzgün ve kurallı örüntülerin oluşabileceğini keşfeder.	Çalışma yaprağı-17	Öğretim amaçlı web siteleri, kağıt-kalem
	45	Kaos teorinin kullanıldığını disiplinleri ifade eder ve bu teoriyi kullanarak uygulamalar yapar.	Çalışma yaprağı-18	Excel, hesap makinesi

Geliştirilen çalışma yaprakları pilot çalışma süreci içerisinde kullanılarak yeniden düzenlenmiş ve elde edilen sonuçlar dâhilinde bir öğretmen kılavuzu hazırlanmıştır (EK 3). Öğretmen kılavuzu kitabı; ilgili öğretim programlarında yer alan hedef ve açıklamalar doğrultusunda dersin öğrenilmesini kolaylaştıracak ve öğrencilerin yeteneklerinin gelişmesine yardımcı olacak çeşitli örnek, alıştırma, okuma kaynakları ve diğer etkinlikleri kapsayan öğretmenlerin yararlanması için hazırlanan eserler olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2004). Kılavuz kitaplar, öğretmenin yaptıracağı etkinlikler, bunların sırasını, nasıl yapılacağını göstererek daha kısa zamanda öğrenciye rehberlik edilmesini kolaylaştırır. Bunun yanında öğretmenlerin sınıf içinde ve ders öncesinde, hazırlık ve planlama çalışmalarının doğru ve verimli olması için kılavuz kitaplar gereklidir. Fraktal geometri konusunda herhangi bir ön bilgisi olamayan dersin öğretmenin fraktallar konusunda bilgilendirilmesinde, sınıfta kullanacağı etkinlikleri planlamasında ve kullanacağı yöntem ve teknikleri belirlemesinde öğretmen kılavuzu oldukça hayati bir önem taşımaktadır. Pilot çalışmada araştırmacı yaşadığı deneyimleri doğrultusunda hazırlandığı etkinlik ve çalışma yapraklarının sınıf içerisinde etkili kullanılmasına yönelik bir öğretmen kılavuzu geliştirmiştir.

2.1.3. Fraktal Geometri Öğretim Programında Kullanılan Bilgisayar Programları ve Öğretim Amaçlı Web Siteleri

Fraktal geometri şekilleri 1870-1920 arasında ortaya çıkmalarına karşın 1970 yılına kadar matematikçilerin çok fazla ilgisini çekmemiştir ve birer “patolojik vaka” ya da matematikteki “canavarlar” olarak adlandırılmışlardır. Buna karşın 1970 yılında Mandelbrot bilgisayar teknolojisini kullanarak yaklaşık elli yıldır uykudaki bu geometrinin yeniden doğmasını ve popüler olmasını sağlamıştır. Mandelbrot’un en büyük avantajı o dönemde yeni yeni gelişmeye başlayan bilgisayar teknolojisine sahip olmasıdır. Literatürde yapılan çalışmalar fraktal geometri şekillerinin öğrenilmesinde ve öğretilmesinde bilgisayar programlarının kullanılmasının zorunlu olduğunu ifade etmektedirler. Bir Julia kümesinin ya da Mandelbrot kümesinin kağıt kalem kullanılarak oluşturulması neredeyse imkansızdır. Ayrıca bu şekillerin görünüşlerini zihinde canlandırmak ta bir o kadar zordur. Bu bağlamda tasarlanan fraktal geometri öğretim programında da fraktalların öğretimi ve öğrenilmesini sağlayacak farklı programların kullanılması bir zorunluluktur.

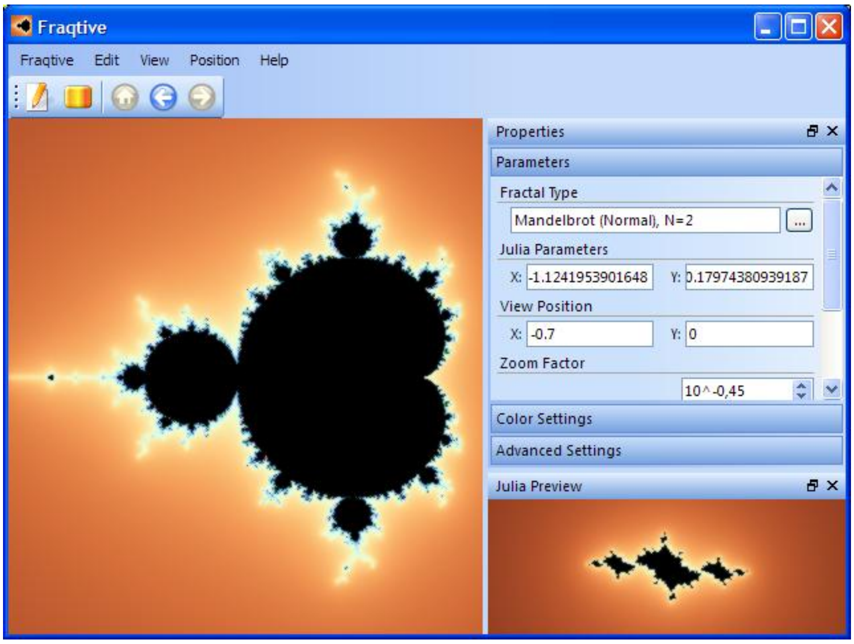
Buna göre tasarlanan fraktal geometri programında yer alan bilgisayar programlarının sahip oldukları özellikler ve tercih edilme nedenleri aşağıda açıklanmıştır.

2.1.3.1. Fraqtive

Fraqtive programı Mandelbrot ailesi fraktalların oluşturulmasına yönelik hazırlanmış ücretsiz bir yazılımdır. Yüksek kalitede Mandelbrot ve Julia kümelerinin oluşmasını sağlamakta ve bu şekilleri 3-boyutlu hale çevirebilmektedir. Ayrıca aynı ekran üzerinde Mandelbrot ve Julia kümelerini eş zamanlı olarak oluşturmaya imkân vermektedir. Fraqtive programı ekranı bir koordinat düzlemi olarak algıladığından Mandelbrot ve Julia kümelerinin şekillerinin oluşumunu sağlayan $z_n^2 + c$ tekrarlama kuralındaki c sabitini ekrandaki bu koordinat düzleminde bir nokta olarak algılamakta, mouse'un ekran üzerindeki hareketlerine göre anlık c, sabitleri belirlemekte ve bu c, sabitlerine göre anlık Julia kümelerini çizebilmektedir. Bunun yanında el yardımıyla da c sabitlerinin girilmesine izin vermektedir. Ayrıca Mandelbrot ve Julia kümelerinin ekrandaki konumlarını değiştirmeye, onları ötelemeye, çevirmeye ya da döndürmeye imkan vermektedir. Sahip olduğu önemli özelliklerden biri de programın zoom özelliğidir. Bu özellik sayesinde Mandelbrot ve Julia kümelerine istenildiği kadar yaklaşılıp uzaklaşılabilmekte ve böylece bu kümelerin içerisindeki ilginç şekiller, öz-benzer parçalar incelenebilmektedir. Ayrıca program oluşturulan Julia kümeleri kaydedilip saklayabilme özelliğine de sahiptir.

Bu programın seçilmesinin nedeni öğrencilerin bir programlama dili kullanmadan basit kullanım yönergeleriyle Mandelbrot ve Julia kümelerini oluşturmalarını sağlamaktır. Programın farklı c, sabitleri için anlık Julia kümelerini oluşturması, öğrencilerin Julia kümelerinin şekillerinin c, sabitine bağlı olduğunu görmelerine yardımcı olacağı düşünülmektedir. Bunun yanında programın zoom özelliği öğrencilerin bu şekilleri daha derinlemesine incelemelerine imkan verecektir. Ayrıca aynı ekran üzerinde Mandelbrot ve

Julia kümelerini eş zamanlı olarak oluşturması Mandelbrot kümesi içerisinden seçilen c, sabitlerine göre oluşan Julia kümelerini öğrencilerin görmelerine izin vermektedir. Bu durum öğrencilerin Mandelbrot ve Julia kümeleri arasında ilişki kurmasına yardımcı olacaktır. Aşağıda Şekil 2.2.'de fraqtive programının ekran görüntüsüne yer verilmiştir.

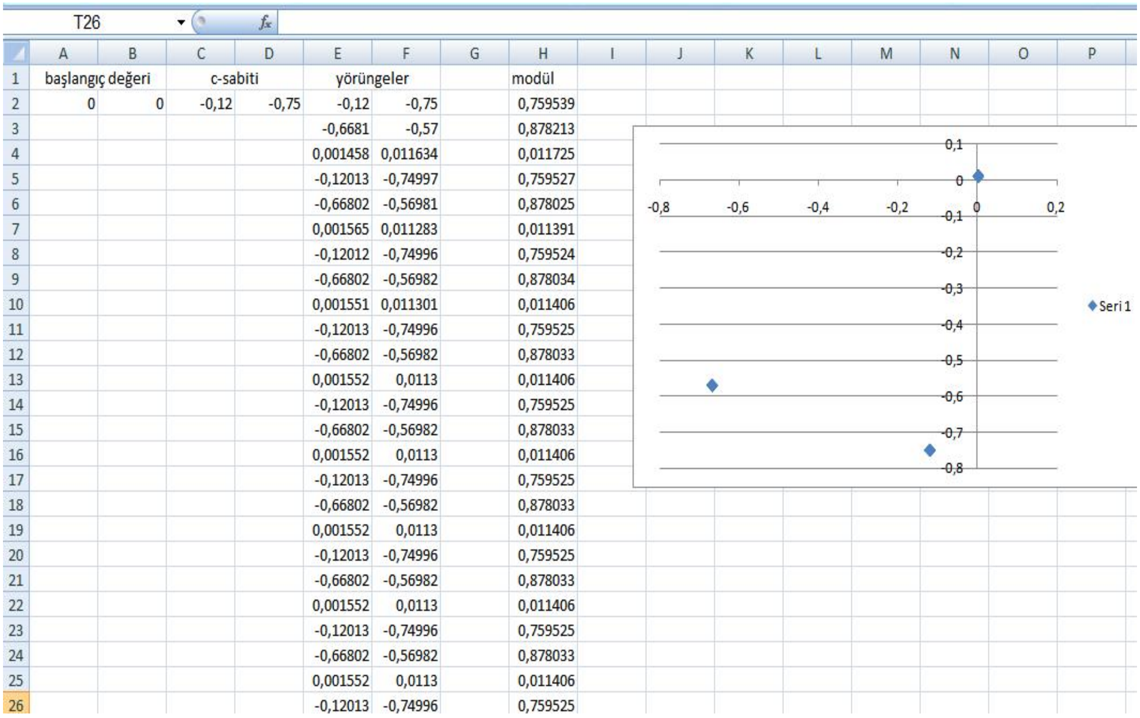


Şekil 2.2. Fraqtive programının ekran görüntüsü

2.1.3.2. Excel

Excel, Windows işletim sistemi içinde bulunan en kullanışlı hazır paket programlardan biridir. Seri bir şekilde hesap yapabilmeye imkân tanıyan, verilerin hesaplanması ve cebire dayalı öğretim için çok kullanışlı bir yazılımdır. Gelişmiş bir hesap makinesi olan Excel, hesap yapmada, grafik çizmede, program hazırlamada ve istatistikte olduğu gibi daha pek çok alanda kullanılabilme özelliğine sahiptir. Bu çalışmada Excel programı Mandelbrot ve Julia kümelerinin oluşumunda başlangıç noktalarının türlerini belirlemede onların yörüngelerinin hareketlerinin incelenmesinde kullanılmıştır. Bunun yanında uzunluk ölçme ve kutu sayma metotlarıyla fraktal boyutları hesaplarken log-log grafiklerinin çizilmesinde kaos konusunda kaotik olayların hesaplanmasında, dallanma (bifurcation) grafiğinin çizilmesinde Excel programı kullanılmıştır. Şekil 2.3'de

Mandelbrot kümesinin oluşumunda başlangıç noktalarının yörüngelerinin incelenmesine yönelik hazırlanan Excel sayfası görülmektedir.

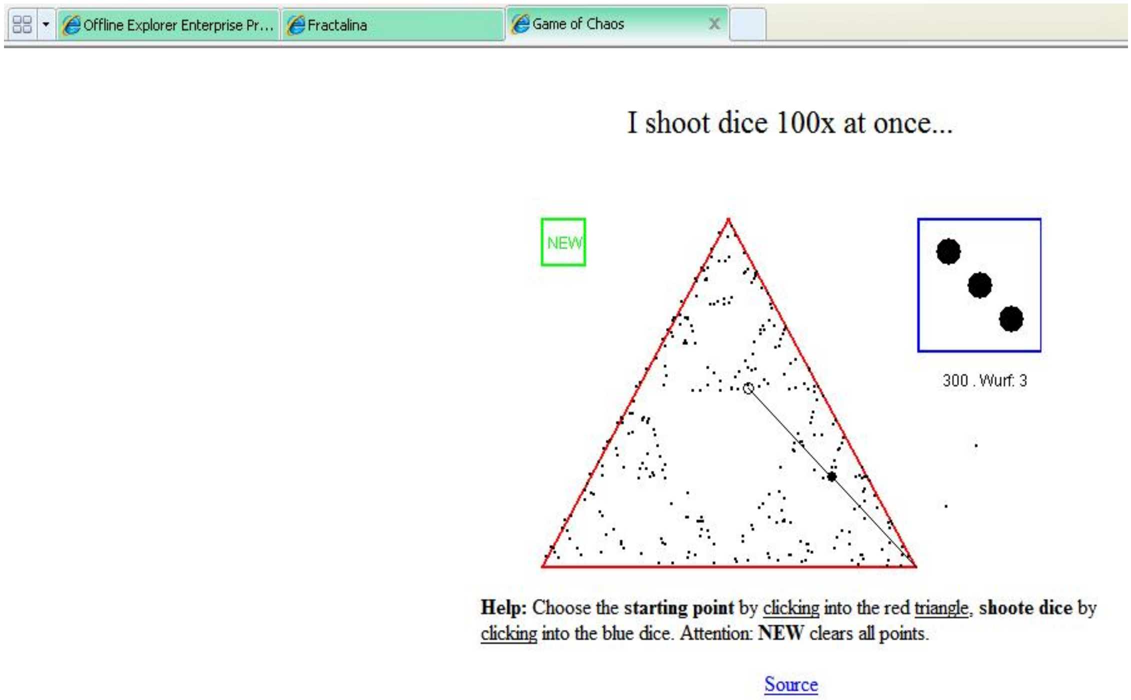


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	başlangıç değeri		c-sabiti		yörüngeler			modül
2	0	0	-0,12	-0,75	-0,12	-0,75		0,759539
3					-0,6681	-0,57		0,878213
4					0,001458	0,011634		0,011725
5					-0,12013	-0,74997		0,759527
6					-0,66802	-0,56981		0,878025
7					0,001565	0,011283		0,011391
8					-0,12012	-0,74996		0,759524
9					-0,66802	-0,56982		0,878034
10					0,001551	0,011301		0,011406
11					-0,12013	-0,74996		0,759525
12					-0,66802	-0,56982		0,878033
13					0,001552	0,0113		0,011406
14					-0,12013	-0,74996		0,759525
15					-0,66802	-0,56982		0,878033
16					0,001552	0,0113		0,011406
17					-0,12013	-0,74996		0,759525
18					-0,66802	-0,56982		0,878033
19					0,001552	0,0113		0,011406
20					-0,12013	-0,74996		0,759525
21					-0,66802	-0,56982		0,878033
22					0,001552	0,0113		0,011406
23					-0,12013	-0,74996		0,759525
24					-0,66802	-0,56982		0,878033
25					0,001552	0,0113		0,011406
26					-0,12013	-0,74996		0,759525

Şekil 2.3. Excel'de Mandelbrot kümesinin başlangıç noktasının yörüngesinin incelenmesi

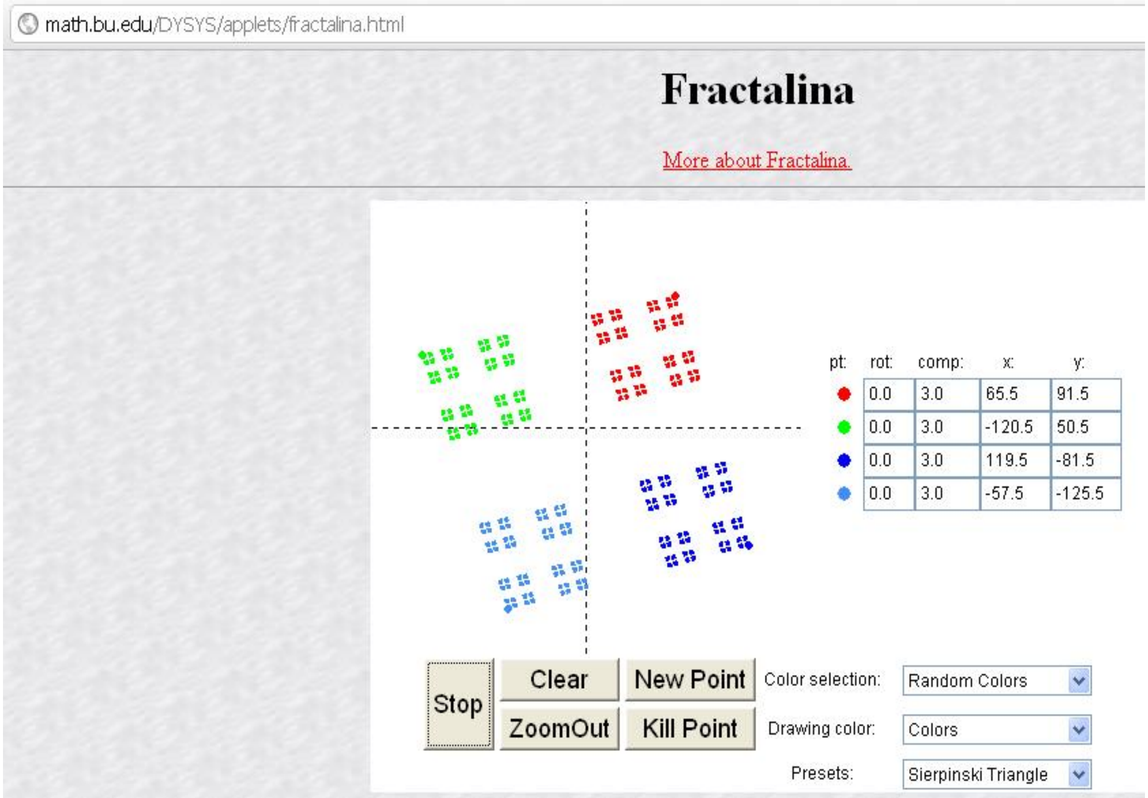
2.1.3.3. Öğretim Amaçlı Web Siteleri

İnternet, bilgiyi güncelleştirme özelliği olması ve dünya çapındaki kaynaklara erişimi sağlaması sebebiyle her düzeydeki öğretmen ve öğrenciler tarafından kullanılmaktadır. İnternete erişimin artmasıyla birlikte, web siteleri popüler eğitimsel kaynaklar haline gelmiştir. Web sayfaları içerisinde metin ve grafikleri barındırması, ses ve görüntü aktarımına izin vermesi ve Java ve ActiveX gibi teknolojileri kullanması gibi üstünlüklere sahiptir. Web sayfalarının bu özellikleri klasik sınıf ortamını değiştirmekte ve sınırsız bir öğrenme ortamı sunmaktadır. Bu durum öğretim amaçlı web sayfalarının oluşturulmasına da zemin hazırlamaktadır. Öğretim amaçlı hazırlanan web sayfaları; klasik sınıf içi eğitimin daha sistemli ve organize bir şekilde internet destekli olarak yürütülmesini sağlamaktadır (Karaman, 2007). Bunun yanında yapılan çalışmalar web sayfalarının kullanımının fazla bilgisayar becerisi gerektirmemesi, güncellenebilir ve öğrenci ve öğretmenlerce kolay ulaşılabilir olması gibi üstünlükleri nedeniyle diğer internet hizmetleri içerisinde daha fazla ön plana çıktığı göstermektedir (Bertrand ve Stephen, 1995). Öğretim amaçlı hazırlanan web sitelerinin bu üstün özellikleri nedeniyle fraktal geometri öğretim programında kaos konusunun öğretiminde iki web sitesi kullanılmıştır. İlk kullanılan web sitesinin adresi http://www.geoastro.de/ChaosSpiel/ChaosEnglish.html dir. Bu web sitesi kaos oyununda noktaların hareketlerini adım adım göstermesinden dolayı tercih edilmiştir. Bu sayede öğrencilerin kaos oyununun mantığını daha iyi kavrayacakları ve oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlayacakları düşünülmüştür. Bu web sitesinin ekran görüntüsü Şekil 2.4'de verilmiştir.



Şekil 2.4. http://www.geoastro.de/ChaosSpiel/ChaosEnglish.html sitesinin ekran görüntüsü

Kaos konusunun öğretiminde kullanılan diğer web sitesinin adresi ise http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html dir. Bu web sitesi Robert Devaney tarafından dinamik sistemler ve teknoloji projesi sonucunda kaos ve fraktalları keşfetmeye yönelik hazırlanmıştır. Web sitesinde Fractalina isimli java applet farklı sayıda nokta ve farklı tekrarlama kuralları oluşturarak kaos oyununu oynamaya izin vermekte, aynı zamanda oluşan şekilleri döndürmeye ve çevirmeye de imkan sağlamaktadır. Bu bağlamda bu web sitesinin öğrencilerin kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlamalarına yardımcı olacağı düşünülmüştür. Bunun yanında sitede farklı sayıda nokta ya da farklı tekrarlama kurallarına göre kaos oyunu oynanabildiğinden bu tür durumların öğrencilerin kaos oyununu daha anlamlı öğrenmelerine yol açacağı düşünülmüştür. Bu web sitesinin ekran görüntüsü Şekil 2.5'de verilmiştir.



Şekil 2.5. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html sitesinin ekran görüntüsü

2.1.4. Pilot Çalışma

Pilot çalışma problem durumlarının seçimi, araştırmacıya deneyim kazandırması, hazırlanan programın işlerliğinin test edilmesi, veri toplama araçlarının denenmesi ve elde edilen verilerin yorumlanmasında nasıl bir yol izleneceği konusunda belirleyici olmuştur. Pilot çalışma 54 ilköğretim 4. sınıf matematik öğretmeni adayıyla gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada öğretmen adayları haftada 1 saat olmak üzere toplam 12 hafta boyunca fraktal geometri kavramlarıyla çalışmışlardır. Pilot çalışmada asıl çalışmadan farklı olarak fraktalların çevre ve alanlarının fraktal boyuttan sonra ve Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretiminin ise son hafta yapılmıştır. Ancak bu durum zaman probleminin ortaya çıkmasına ve özellikle son konuların öğretimi için yeterli sürenin kalmamasına neden olmuştur. Bu nedenle bu iki konunun asıl çalışmada diğer konular içerisine entegre edilmesine karar verilmiştir.

Pilot çalışmada her bir fraktal konusunun öğretiminden sonra rastgele seçilen 2 ve toplamda 10 öğretmen adayıyla yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bunun yanında 54 öğretmen adayına açık uçlu sorulardan oluşan bir sınav uygulanmış ve 3 öğrenci ile klinik mülakatlar yürütülmüştür. Yarı-yapılandırılmış mülakatlarda öğretmen adaylarının öğrendikleri fraktal konusuna yönelik anlamalarına, anlamakta zorlandıkları konulara ve hazırlanan ortama yönelik düşüncelerine odaklanılmıştır. Bunun yanında bu öğretmen adaylarının derse yönelik düşüncelerini belirlemek için görüş formları uygulanmıştır. Böylece hazırlanan fraktal geometri programının öğretmen adaylarının duyuşsal öğrenmelerine etkileri de belirlenmeye çalışılmıştır. Elde edilen bulgular yarı-yapılandırılmış mülakat sorularının yeniden düzenlenmesinde kullanılmıştır. Klinik mülakatlarda ise daha çok öğrencilerin konuları nasıl öğrendiklerine odaklanılmıştır. Araştırmacı klinik mülakatlarda notlar almış ve gözlemlerde bulunmuştur. Alınan bu notlar ve yapılan gözlemler asıl çalışmada kullanılacak soruların oluşturulmasında etkili olmuştur.

Pilot çalışmada dersi araştırmacı yürüttüğü için yapılandırılmamış gözlem notları ve öğretmen günlüğü yardımıyla fraktal konularının öğretiminde etkili olacak ortam betimlenmeye çalışılmıştır. Böylece öğrencilerin hazırlanan programa yönelik tepkileri, ne tür yöntem ve tekniklerin etkili olduğu ve materyallerin çalışıp çalışmadığı belirlenmeye çalışılmıştır. Yapılan bu işlemler asıl çalışmada kullanılacak olan öğretmen kılavuzunun hazırlanmasında yararlı olmuştur. Pilot çalışma sonucunda öğretmen adaylarının en çok fraktal boyutları ve Mandelbrot ve Julia kümelerini anlamakta ve bunları görselleştirmekte güçlükle karşılaştıkları belirlenmiştir. Literatürde de belirtildiği gibi fraktalları anlamada boyut kavramının oldukça önemli olduğu gözlenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerini kullanarak verilen nesnelerin bir fraktal olup olmadığını belirlemelerine karşın, boyut konusunda çelişkide kalmaktadırlar. Bunun nedenlerinden birisi ilk defa kesirli boyutlarla tanışmaları ve kesirli boyuta sahip bir nesnenin nasıl olabileceğini hayal edememeleri olabilir. Mülakatlarda "boyut deyince ne anlıyorsunuz?", "Öz-benzer bir fraktalın boyutu nasıl hesaplanır?", "Bulduğunuz bu değer bu fraktalın hangi özelliğini göstermektedir?" şeklindeki sorular öğrencilerin boyut ve fraktal boyut hakkındaki bilgilerini belirlemeye yönelik sorulmuştur. Öğrencilerin genelde bu sorulara verdikleri yanıtlar onların Euclid geometrisindeki boyut tanımlarını yansıttığını göstermektedir. Öğrenciler boyutu genellikle “en, boy ve yükseklik” olarak tanımlamaktadırlar. Asıl çalışmada bu sorular üzerinde daha fazla durularak öğrencilerdeki boyut kavramının fraktal geometri dersi süresince bir değişime uğrayıp uğramadığının belirlenmesine karar verilmiştir. Bu durum aynı zamanda öğretmen adaylarının boyut kavramını nasıl öğrenebildiklerine yönelik ipuçları verecektir.

Mandelbrot ve Julia kümelerinin oluşturulmasında ise öğretmen adaylarının verilen başlangıç noktalarının mı yoksa bu başlangıç noktalarının yörüngelerinin mi bu kümeleri oluşturduğuna karar vermede problem yaşadıkları gözlemlendi. Bu sorunun çözümü için farklı bilgisayar programlarının eş zamanlı olarak kullanılmasının yararlı olacağı düşünülmüştür. Bu amaçla önce Excel’de öğretmen adaylarının verilen başlangıç noktalarının yörüngelerinin hareketini incelemelerine ve daha sonra fraqtive ve çeşitli öğretim amaçlı web sayfaları kullanılarak başlangıç noktalarının yerinin belirlenmesine karar verilmiştir. Böylece öğretmen adayları hem yörüngelerin hareketini inceleyecek hem de bilgisayar programlarını kullanarak ne tür başlangıç noktalarının Mandelbrot ve Julia kümeleri oluşturduklarına karar vereceklerdir. Buna karşın öğretmen adaylarının verilen başlangıç noktalarının kaçak, mahkum ya da periyodik olup olmadığını belirlemede zorlanmadıkları belirlenmiştir.

Doğal fraktal örneklerinin öğretiminde hazırlanan slaytların ve video filmlerin fraktal konusunu öğretmen adaylarının daha iyi anlamalarına yardımcı olduğu belirlenmiştir. Pilot çalışmada öğretmen adaylarına Mandelbrot ve Julia kümeleriyle ilgili birkaç video izletilmiş ve olumlu tepkilerin alındığı gözlemlenmiştir. Fraktalların öğretimine yönelik Türkçe video programları bulunmamaktadır, ancak literatürde bu konu hakkında “Professor Devaney Explains the Fractal Geometry of the Mandelbrot Set” ve “Nova-Hunting the Hidden Dimension” isimli öğretim amaçlı videoların bulunduğu belirlenmiştir. Türkçe videoların olmaması bu videoların etkisini azaltmaktadır, ancak dersi zenginleştirme adına asıl çalışmada öğretmenin de görüşü alınarak bu videoların kullanılması düşünülmüştür.

Pilot çalışmanın bir aşaması da hazırlanan programın işlerliğinin tespit edilmesi üzerinedir. Genel olarak hazırlanan programdaki çalışma yapraklarının öğretmen adayları tarafından kullanılmasında bir problemle karşılaşılmamıştır. Ancak çelişkili durumlar ve anlaşılmama ihtimali olan kısımları düzeltilmiş, bazı soruların yerleri değiştirilmiş, ihtiyaç duyulan yerlere açıklamalar konulmuştur. Örneğin, öz-benzerlik konusunda **“**parçalanma oranı” olarak yazılan ifadenin öğrenciler tarafından anlaşılamadığı tespit edilmiştir. Bu nedenle bu kavram “büyüme oranı” olarak yeniden düzenlenmiş ve uygulanmıştır. Bunun yanında her bir konu için hazırlanan slaytların konuların öğretiminde etkili olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca manipulatif olarak hazırlanan fraktal geometri çalışma yapraklarına alternatif olarak dinamik geometri yazılımı Cabri ile logo programları kullanılarak çalışma yaprakları geliştirilmiştir. Pilot çalışmaya katılan öğretmen adaylarının Cabri ve Logo programlarına yönelik ön bilgilerinin bulunması nedeniyle bilgisayar destekli olarak hazırlanan çalışma yapraklarının bir kısmı pilot çalışma süresince kullanılmıştır. Asıl çalışmada örneklem olarak belirlenecek öğretmen adaylarının Logo ve Cabri ile ilgili ön bilgilerine bağlı olarak dersi zenginleştirme bağlamında bu etkinliklerin kullanılması düşünülmüştür. Eğer asıl çalışmadaki öğretmen adaylarının Cabri ve Logo programlarına yönelik ön bilgilerinin bulunmadığı tespit edilirse, dersin öğretmeninin de görüşleri doğrultusunda fraktal geometri programının uygulama süresi göz önüne alınarak Cabri ve Logo programlarını öğrencilere tanıtıcı 1-2 saatlik bir ders verilmesine ve bu dersten sonra bazı etkinliklerin uygulanmasına karar verilmiştir.

Pilot çalışma süresince yazılı sınavdan elde edilen veriler ile yürütülen mülakatlar ve yapılandırılmamış gözlemler belirlenen fraktal geometri öğrenilebilirlik göstergelerinin işlerliğinin test edilmesinde etkili olmuştur.

2.1.4.1. Fraktal Geometri Konularının Öğrenilebilirlik Göstergelerinin Hazırlanması

Öğrenmelerin belirlenmesinde daha doğrusu belirlenen kazanımların öğrenciler tarafından kazanılıp kazanılmadığına karar vermede öğrencilerin kazanımları davranışa dönüştürmeleri gereklidir. Çünkü öğrenmenin bir davranış değişikliğiyle sonuçlanması beklenir. Bu değişikliklerde davranışların gözlemlenebilir olması önemlidir. Fraktal geometri programı için belirlenen kazanımlara yönelik öğrencilerden göstermeleri beklenen davranışların belirlenmesi hem hazırlanan programın değerlendirilmesi hem de öğrencilerin bu konuları öğrenip öğrenemediklerine karar vermede önemlidir. Bu nedenle hazırlanan fraktal geometri programındaki her bir kazanıma yönelik öğrencilerin göstermesi beklenen davranışlar belirlenerek fraktal geometri konularının öğrenilebilirlik göstergeleri oluşturulmuştur (EK 5). Bu göstergelerden aynı zamanda hazırlanan açık uçlu sınavın değerlendirilmesinde de yararlanılmıştır. Pilot çalışmada bu göstergeler yeniden düzenlenerek son şekli verilmiştir.

2.2. Araştırmanın Yöntemi

Yapılan araştırma doğası gereği nitel bir çalışmadır. Bunun en önemli sebeplerinden biri öğrencilerin düşünceleriyle ilgili olmasıdır. Öğrencilerin düşüncelerinin derinliklerine ulaşmak ancak nitel bir çalışma yöntemiyle mümkün olacaktır. Bir diğer sebepte araştırmanın sadece sonuca değil aynı zamanda sürece de odaklanmış olmasıdır. Çalışmanın asıl odağı hazırlanan fraktal geometri öğretim programının öğrenilebilirlik ve öğretilebilirlik boyutlarından yeterliliğini belirlemektir. Bu kapsamda öğrencilerin hazırlanan programın belirlenen hedeflerini ne kadar kazandıklarını, programın uygulanma sürecinde yaşadıkları deneyimlerini, karşılaştıkları güçlükleri ve öğretimde kullanılan materyal ve yöntemlerin ortaya çıkan öğrenmeler üzerine etkilerini belirleyerek hazırlanan fraktal geometri programının yeterliliği hakkında bilgi sahibi olabiliriz.

Fraktal geometri kavramlarının öğrenilmesi ve öğretilmesine odaklanılan bu araştırmanın yöntemi nitel araştırma desenlerinden özel durum çalışmasıdır. Özel durum çalışması yöntemi kullanılmasının sebebi özel durum çalışmalarının araştırmacıya çok özel bir konunun veya durumun üzerinde yoğunlaşarak incelenen özel durumları en ince ayrıntılarıyla tanımlama ve değişkenler arasındaki sebep-sonuç ilişkilerini açıklayabilme fırsatı vermesidir (Ekiz, 2003; Cohen ve diğer., 2005; Çepni, 2005).

2.3. Örneklem

Bu çalışmanın örneklemini Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programına kayıtlı 39 birinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmanın üniversite birinci sınıf öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilmesinin iki önemli sebebi vardır:

1. Literatürde, öğrencilerin fraktal geometri konularını öğrenmeleri için yeterli ön bilgilere sahip olmaları gerektiği vurgulanmaktadır (Goldenberg, 1991; Bowers, 1991; Norko, 1998; Fraboni ve Moller, 2008). Hazırlanan fraktal geometri ders programına katılacak olan öğrencilerin geometrik dizi ve seriler, limit,

yakınsaklık, karmaşık sayılar ve fonksiyonların grafikleri konularında yeterli ön bilgilerinin olması gereklidir. Bu nedenle çalışmada öğretmen adaylarının kullanılmasının bu kriteri yakalamada uygun olduğu düşünülmüştür.

2. Lise matematik ve geometri öğretim programlarında fraktal geometri konularının öğretimine henüz rastlanmamaktadır. Bu durum ise hazırlanan bu programın bir lisede uygulanmasına engel teşkil etmektedir. Bunun yanında üniversite 1. sınıfa yeni başlamış olan öğrencilerin bilişsel seviyeleri lise 12. sınıf öğrencilerin bilişsel seviyelerine yakındır. Bu nedenle çalışmada bilişsel seviyeleri lise 12. sınıf öğrencilerin seviyelerine yakın olan üniversite 1. sınıf öğrencileri seçilmiştir.

Bu varsayımlar altında Fatih Eğitim Fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfındaki 39 öğrenci ve araştırmacıdan farklı olarak bir ders öğretmeniyle 6 hafta boyunca haftada 3 ders saati olmak üzere toplam 18 ders saati süresince fraktal geometri dersleri yürütülmüştür. Fraktal geometri konularının üniversite düzeyinde öğretiminin henüz başlamamış olması nedeniyle hem çalışmaya katılan öğrencilerin hem de dersi yürüten öğretim elemanının fraktal geometri konuları hakkında ön bilgileri bulunmamaktadır.

39 öğretmen adayı arasından her ders sonunda rastgele seçilen 5 öğrenciyle yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakata katılacak öğrencilerin seçilmesinde gönüllük esas alınmıştır. Klinik mülakatlar için seçilen 9 öğrenci ise yapılan yazılı sınava göre dersin öğretmeninin de görüşleri doğrultusunda başarı durumları göz önüne alınarak iyi, orta ve zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Başarı durumunun dikkate alındığı seçme aşamasında, öğrencilerin aldıkları notlar 3 gruba ayrılmıştır. İyi düzeydeki öğrenciler 80-100 arasındaki notlardan, orta düzeydeki öğrenciler 55-80 arası notlardan ve zayıf olan öğrenciler ise 30-55 arası notlardan seçilmiştir.

2.4. Verilerin Toplanması

Bu çalışmada veriler ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programına kayıtlı 39 birinci sınıf öğrencisi arasından her ders sonunda rastgele seçilen 5 öğrenciyle yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlar, 9 öğrenciyle yapılan klinik mülakatlar, açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınav ve dersin öğretmeniyle yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlardan toplanmıştır.

2.4.1. Yarı-yapılandırılmış mülakatlar

Mülakat metodu, insanların neyi ve neden düşündüklerini, duygu, tutum ve hislerinin neler olduğunu, davranışlarını yönlendiren faktörleri ortaya çıkarmayı sağlayan bir veri toplama aracıdır (Ekiz, 2003). Mülakat metodu farklı amaçlara ulaşabilmek için değişik formlarda kullanılmaktadır. Bu formlardan biri de yarı-yapılandırılmış mülakat metodudur. Yarı-yapılandırılmış mülakat metodunda, araştırmacı görüşme sorularını önceden hazırlar, fakat bireyler ve koşullara bağlı olarak araştırılan kişilere kısmi esneklik sağlayarak oluşturulan soruların yeniden düzenlenmesine, tartışılmasına izin verir (Ekiz, 2003; Çepni, 2005). Bu süreçte araştırmacının asıl görevi tartışmada sorulan soruların dışına çıkıldığında mülakata katılan bireyleri gerektiğinde yönlendirip, tartışma konusu üzerinde odaklanmalarını sağlamaktır. Hazırlanan soruların belirli bir öncelik sırasına konması zorunlu değildir. Yarı-yapılandırılmış mülakatta, araştırma problemi ile ilgili tüm boyutların ve soruların kapsanmasını güvence altına almak için geliştirilmiş bir yöntemdir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu metot araştırmacı ya da görüşmeciye zaman yönünden bir esneklik sağlar. Bunun yanında farklı bireylerden daha sistematik ve karşılaştırılabilir bilgiler elde edilmeye yardımcı olur.

Bu araştırmada yarı-yapılandırılmış mülakatlar (EK 6) hem öğrencilerle hem de dersin öğretmeniyle gerçekleştirilmiştir. 6 hafta boyunca her ders sonunda rastgele belirlenen 5 öğrenciyle yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatların amacı aşağıda açıklanmıştır.

- Hazırlanan çalışma yaprakları ve materyallerin öğrenciler tarafından ne kadar ve nasıl kullanıldığını belirlemek,
- Fraktal geometri programının uygulama sürecinde öğrencilerin yaşadıkları deneyimleri ortaya çıkarmak. Bu bağlamda öğrencilerin başarılı oldukları durumları ve karşılaştıkları güçlükleri belirlemek,
- Hazırlanan materyallerin ve kullanılan öğretim yöntem ve tekniklerinin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerini ortaya çıkartmak.

Bu bağlamda mülakatlarda öğrencilere çalışma yaprakları ve materyalleri ne kadar ve nasıl kullandıklarını belirlemek için “Mandelbrot ve Julia kümeleri konusunda hangi etkinlikleri yapabildiniz? Hangi etkinlikleri yaparken zorlandınız? Niçin?” şeklindeki sorulara, programın uygulama sürecindeki deneyimlerini belirlemek için “Mandelbrot kümesine yönelik etkinlikte neler yaptınız? Ne yapmak size zor geldi? Neleri tam olarak anladınız?” şeklindeki sorulara ve hazırlanan materyallerin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerini belirlemek için “$z_n^2 + 1$ tekrarlama kuralına göre 1 başlangıç noktasının türünü bulabilir misiniz? Başlangıç noktasının türünü belirlerken neye dikkat ediyorsunuz?” şeklindeki sorulara yer verilmiştir.

Dersin öğretmeniyle her ders sonunda yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatların amacı ise;

- Hazırlanan materyallerin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerini,
- Hazırlanan materyallerin sınıf içi kullanılabilirliğini ve
- Öğretmenin programın uygulama sürecinde yaşadığı deneyimlerini

belirlemektir. Bu bağlamda mülakatlarda dersin öğretmenine hazırlanan materyallerin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerini belirlemek için “fraktalların öğretiminde kullandığınız materyaller öğrencilerde ne tür öğrenmelere neden olmaktadır? Neler gözlemlediniz?” şeklindeki sorulara, materyallerin kullanılabilirliğini belirlemek için “hazırlanan çalışma yapraklarında ne tür eksiklikler gözlemlediniz? Kullanılan programlar kullanışlı ve yeterli mi?” şeklindeki sorulara ve programın uygulama sürecinde yaşadığı deneyimleri belirlemek için “Tekrarlama konusunu öğretiminde neler yaptınız? Neleri yapmakta zorlandınız? Neleri kolay yaptınız?” sorularına yer verilmiştir.

Hem öğrencilerle hem de dersin öğretmeniyle yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlarda daha çok hazırlanan fraktal geometri öğretim programının uygulama sürecinin resmedilmesine odaklanılmıştır.

2.4.2. Klinik mülakat

Klinik mülakat, öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek ve özellikli bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeler olarak tanımlanmaktadır (Zazkis ve Hazzan, 1999). Bu metodun esas amacı; bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini belirlemek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Hunting, 1997; Goldin, 1998; Zazkis ve Hazzan, 1999). Clement (2000) klinik mülakat ile bireylerin fikir ve anlamalarındaki zihinsel süreçler hakkında veriler toplanabileceğini iddia etmektedir. Bu mülakat türünü diğerlerinden ayıran en önemli özelliği, klinik olması, yarı-yapılandırılmış olması ve odağında konu alanı olmasıdır (Zazkis ve Hazzan, 1999).

Bu çalışmada fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanmış bir öğretim programının öğrenilebilirlik ve öğretilebilirlik yönünden yeterliliğinin belirlenmesine odaklanılmıştır. Bu nedenle klinik mülakat metodunun yukarıda belirtilen özellikleri göz önüne alındığında bu çalışmada, öğrencilerin programın belirlenen kazanımlarından ne kadarını kazandıklarının, bu kazanımlarda ne tür öğrenmeler gerçekleştirdiklerinin ve bu öğrenmelerde neleri, nasıl ve niçin yaptıklarının farkında olup olmadıklarının belirlenmesinde klinik mülakat metodunun kullanılmasının uygun olduğu düşünülmüştür. Bu bağlamda klinik mülakat metoduyla öğrencilerin fraktal geometri öğretim programının sonunda edindikleri kazanımlarının resmedilmesine odaklanılmıştır. Bunun için belirlenen 9 öğrenci ile açık uçlu sorulardan oluşan fraktal sınavı üzerinde klinik mülakatlar yürütülmüştür. Mülakatlarda öğrencilerden fraktal sınavında her bir soruda ne tür cevaplar verdiklerini, niçin bu cevapları verdiklerini ve bu cevaplara nasıl ulaştıklarını açıklamaları istenmiştir. Bu amaçla öğrencilere "bu fraktalın çevresini hesaplarken neler yaptın? Niçin örüntüyü bu şekilde yazdın? Neden bir seri bulmaya çalışıyorsun? Nasıl düşündün?" şeklinde sorular yöneltilmiştir.

Klinik mülakatlar için seçilen 9 öğrenci yapılan yazılı sınava göre dersin öğretmeninin de görüşleri doğrultusunda farklı başarı seviyelerini temsil edecek şekilde iyi, orta ve zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Başarı durumunun dikkate alındığı seçme aşamasında, iyi düzeydeki öğrenciler 80-100 arasındaki notlardan, orta düzeydeki öğrenciler 55-80 arası notlardan ve zayıf olan öğrenciler ise 30-55 arası notlardan seçilmiştir. Ayrıca öğrencilerin gönüllü olmaları da esas alınmıştır. Yazılı sınavda verdikleri cevaplar üzerinde mülakatlar yürütülmüş, mülakatlar süresince öğrencilere kullanacakları kağıt ve kalemler verilmiş ve verdikleri cevap ve açıklamalar ses kayıt cihazına kaydedilmiştir. Mülakatlar bireysel yapılmış olup her bir mülakat yaklaşık olarak 40 dakika sürmüştür.

2.4.3. Açık uçlu sorulardan oluşan fraktal geometri sınavı

Verilerin toplanması aşamasında fraktal geometri programının kazanımları doğrultusunda açık uçlu 9 sorudan oluşan bir sınav uygulanmıştır (EK 7). Bu sınavın sorularının içeriği ve hangi kazanımlarla ilişkili olduğu aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

1. Soru: Sınavda sorulan ilk soru öğrencilerin 6 hafta sonunda oluşturdukları fraktal kavramı tanımlarını, verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına nasıl karar verdiklerini ve temel fraktal özellikleri hakkındaki bilgileri ve oluşturdukları anlamaları belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Böylece hazırlanan fraktal geometri öğretim programının öğrencilerde fraktal kavramına yönelik ne tür anlamalar oluşturduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerden bu soruda verilen şekillerden fraktal olanları belirlemeleri ve bu nesnelerin niçin fraktal olduğu ya da olmadığını açıklamaları beklenmektedir. Bunun yanında bu soru aynı zamanda öğrencilerin tekrarlama ve öz-benzerlik kavramlarına yönelik oluşturdukları bilgilerinin de belirlemesini sağlamaktadır. Bu bağlamda hazırlanan fraktal geometri programının tekrarlama ve öz-benzerlik konularıyla ilgili kazanımlarından hangilerinin başarılı olduğu öğrencilerin bu soruya verdikleri yanıtlardan belirlenebilir.

2. Soru: Bu soru ekleme/çıkartma ve dönme/çevirmeleri kullanarak öğrencilerin verilen tekrarlama kurallarına göre fraktal yapıları oluşturma, bu yapıları oluştururken nelere dikkat ettiklerini belirleme ve bu yapılar içerisindeki örüntüleri bulma ve bunları genelleyip genelleyemediklerini tespit etmeye yönelik hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru hazırlanan fraktal geometri öğretim programının geometrik tekrarlamalar konusunda 1. 2. ve 3. kazanımlarıyla ilişkilidir.

3. Soru: Bu soru öğrencilerin verilen bir fraktalın çevresi ve alanını nasıl hesapladığını, ne tür örüntüler bulduğunu, bu örüntülere yönelik ne tür kurallar elde ettiğini, çevrenin sonsuza ve alanın ise sıfıra gitmesini geometrik seriler ve limit kavramlarını kullanarak belirleyip belirleyemediklerini tespit etmek amacıyla hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru fraktal geometri öğretim programının fraktalların çevresi, alanı ve hacmi konusunda 1. ve 2. kazanımlarıyla ilişkilidir.

4. Soru: Bu soru yörünge, kaçak, mahkum ve periyodik nokta kavramları hakkında öğrencilerin oluşturdukları anlamaları, bu kavramlar ile Julia kümeleri arasında ne tür ilişkiler kurduklarını ve Julia kümesi denilince ne anladıklarını belirlemek için hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru fraktal geometri öğretim programının cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri konusunda 1. 2. ve 3. kazanımlarıyla ilişkilidir.

5. Soru: Bu soru öğrencilerin Mandelbrot kümesi ile Julia kümeleri arasındaki ilişkiyi belirleyip belirleyemediklerini, Julia kümesinin öz-benzer parça sayısı ile periyodunun aynı olduğuna karar verip verip veremediklerini ve Julia kümesinin öz-benzer parçalarını nasıl belirlediklerini tespit etmek amacıyla hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru

fraktal geometri öğretim programının cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri konusunda 4. 5.ve 6. kazanımlarla ilişkilidir.

6. Soru: Bu soru öğrencilerin öz-benzerlik kavramına yönelik anlamalarını ve öz-benzerlik türlerine nasıl karar verdiklerini belirlemeye yönelik hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru fraktal geometri öğretim programının öz-benzerlik konusunda 2. ve 3. kazanıma yönelik hazırlanmıştır.

7. Soru: Bu soru öğrencilerin verilen tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını nasıl hesapladıklarını, öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranlarını nasıl belirlediklerini ve her bir tekrarlama adımında boyutun değişmediğinin farkında olup olmadığını tespit etmek amacıyla hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru fraktal geometri öğretim programının öz-benzerlik konusunda 2. kazanımı ve fraktal boyut konusunda da 2. kazanımıyla ilişkilidir.

8. Soru: Bu soru öğrencilerin yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada kutu sayma metodunu nasıl kullandıklarını, kutuların küçülme oranları ile oluşan kutu sayısı arasında ne tür ilişkiler kurduklarını, log-log grafiklerini nasıl ve niçin çizdiklerinin farkında olup olmadıklarını belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Bu soru fraktal geometri öğretim programının fraktal boyut konusunda 4. kazanımıyla ilişkilidir.

9. Soru: Bu soru öğrencilerin kaos oyununa yönelik anlamalarını, oyun içindeki noktaların nasıl hareket ettiğinin farkında olup olmadıklarını ve farklı kurallara göre oluşan şekilleri tanımlayabilmelerini belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Bu bağlamda bu soru fraktal geometri öğretim programının kaos konusunun 1. 2. ve 3. kazanımlarıyla ilişkilidir.

2.5. Verilerin Analizi

Bu başlık altında araştırmada elde edilen verilerin nasıl analiz edildiği sunulmuştur. Bu çalışma fraktal geometriye yönelik geliştirilen bir öğretim programının yeterliliğinin belirlenmesi amacıyla yapılmaktadır. Program geliştirme çalışmalarında geliştirilen programın yeterliliğine karar vermek için öncelikle programın değerlendirilmesi gerekmektedir. Literatürde biçimlendirici (formative) ve düzey belirleyici (summative) olmak üzere iki tür program değerlendirmeden bahsedilmektedir (Scriven, 1967; Fitzpatrick, Sanders ve Worthen, 2004; Sanders ve Sullins, 2006). Biçimlendirici değerlendirme programın uygulanma sürecini değerlendirirken, düzey belirleyici değerlendirme program sonunda öğrencilerin kazanılmış davranış, özellik ve becerilerini ölçmeye yöneliktir (Fitzpatrick, Sanders ve Worthen, 2004; Sanders ve Sullins, 2006;

Jason, 2008). Bu nedenle biçimlendirici değerlendirme öğretim programına yönelik sürekli dönüt sağlayarak iyileştirici önlemlerin alınmasını sağlarken, düzey belirleyici değerlendirme öğretim programının öğrencilere istenen davranışları kazandırma açısından programın yeterli olup olmadığı hakkında bir yargıya varılmasını sağlamaktadır. Bu bağlamda bu araştırma fraktal geometriye yönelik geliştirilen bir öğretim programının yeterliliğinin değerlendirilmesi olduğundan programın uygulanma süreciyle program sonundaki öğrenci ürünlerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Bu amaç doğrultusunda programın uygulanma sürecinin değerlendirilmesinde öğretmen ve öğrencilerle yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler kullanılmıştır. İlk aşamada yarı-yapılandırılmış mülakatlar yazıya dökülmüştür. Cohen ve diğer. (2007), mülakatların analizi sırasında bireyin mülakat süresince söylediklerinin tümünün aynen alınmamasını ve mülakatların sosyal yönlerinin de göz önünde bulundurulmasının gerektiğini belirtmektedir. Bu bağlamda mülakatların transkriptleri yapılırken sözel olmayan iletişimlere yer verilmesinin etkili olacağı önerilmektedir. Bunun yanında Yin (2003), mülakattan elde edilen verilerin karşılaştırılarak, bireylerin fikir birliğine vardığı veya ayrı düşündüğü noktaları tespit edebilmek için, verilen cevapların frekanslara göre kategorilere konulmasını önermektedir. Bununla birlikte, mülakattan bazı cümleler direkt alınarak bireyin düşüncelerini olduğu gibi yansıtmanın da çok yararlı olduğuna inanılmaktadır. Bu bağlamda araştırmacı Cohen ve Manion (2005) ve Yin'in (2003) önerileri doğrultusunda mülakatlarını transkript etmiş ve mülakatlar boyunca yaptığı gözlemler ışığında altığı notları ve öğrencilerin mülakatlardaki işlemleri ve çizimlerini de bu transkriptlere eklemiştir. Elde edilen nitel veriler araştırma problemleri doğrultusunda iki kategoriye göre analiz edilmiştir.

İlk kategoride fraktal geometri programının uygulanması sürecinde hazırlanan materyallerin, kullanılan yöntem ve tekniklerin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerini belirlemek amacıyla öğretmen ve öğrencilerin görüşlerine odaklanılmıştır. Bu amaçla öğretmen ve öğrencilerin yarı-yapılandırılmış mülakatlarda verdikleri cevaplar içerisinden aşağıdaki sorulara yanıtlar aranmaya çalışılmıştır.

- Hazırlanan materyallerin ve kullanılan öğretim yöntemlerinin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine etkileri nelerdir?
- Öğretmenin hazırlanan materyallerin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerine yönelik görüşleri nelerdir?

İkinci kategoride ise öğretmen ve öğrencilerin fraktal geometri öğretim programının uygulanması sürecinde yaşadıkları deneyimlere odaklanılmıştır. Bu amaçla öğretmen ve öğrencilerin yarı-yapılandırılmış mülakatlarda verdikleri cevaplar içerisinden aşağıdaki sorulara yanıtlar aranmaya çalışılmıştır.

- Öğrenciler fraktalların öğretimine yönelik hazırlanan materyallere nasıl katıldılar? Neleri yaparken başarılı oldular? Neleri yapmada zorlandılar?
- Öğretmenin fraktalların öğretimine yönelik hazırlanan materyalleri kullanırken başarılı olduğu durumlar nelerdir? Neleri yaparken güçlükle karşılaşmıştır?

Elde edilen veriler yukarıda belirlenen her bir kategori için hafta hafta öğretmen ve öğrencilerin deneyimleri ve düşünceleri betimsel olarak örnek durumlarla doğrudan alıntılara yer verilerek sunulmuştur. Böylece araştırmacı ile öğretmen ve araştırmacı ile öğrenci arasında geçen karşılıklı diyaloglardan doğrudan alıntılara yer verilerek okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunulmaya çalışılmış ve kendi yorumlarını yapma fırsatı sağlanmıştır.

Fraktal geometri öğretim programının uygulama sonu değerlendirilmesinde ise öğrenci ürünlerine bakarak bir yargıya ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla yazılı sınavdan ve klinik mülakatlardan elde edilen veriler fraktal geometri öğrenilebilirlik göstergeleri doğrultusunda değerlendirilmiştir. İlk aşamada öğrencilerin yazılı sınav sorularına verdikleri cevaplar 4 ayrı kategoriye (boş, zayıf, orta, iyi) göre sınıflandırılmıştır. Bu kategorilerin oluşturulmasında fraktal geometri öğrenilebilirlik göstergeleri belirleyici olmuştur. Bu sınıflandırma her bir soru için yapılmıştır. Çünkü yazılı sınavdaki her bir soru belirli kazanımların öğrenciler tarafından kazanılıp kazanılmadığını belirlemeye yöneliktir.

Aşağıdaki tabloda yazılı sınavdaki soruların öğrenilebilirlik göstergeleri doğrultusunda nasıl değerlendirildiği açıklanmıştır.

Tablo 2.2. Yazılı sınav sorularının öğrenilebilirlik göstergeleri doğrultusunda değerlendirilmesi

Sorular	**Göstergelere göre belirlenen kategoriler**		
	İyi	**Orta**	**Zayıf**
1. Soru	Verilen şekilleri doğru sınıflandıran, tam ya da çok az hatalı açıklamalarda bulunan öğrenciler	Verilen şekilleri doğru sınıflandıran ya da bazılarında hatalı sınıflandırmalarda bulunan ve açıklamaları eksik olan öğrenciler	Verilen şekillerin tamamını ya da büyük bir kısmını yanlış sınıflandıran ve çok yetersiz ya da yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler

Tablo 2.2.’nin devamı

Sorular	Göstergelere göre belirlenen kategoriler		
	İyi	**Orta**	**Zayıf**
2. Soru	Verilen tekrarlama kuralına göre üreticiyi ve bir sonraki tekrarlamadaki şekli tam ve doğru olarak çizen öğrenciler; verilen üreticiye göre bir sonraki tekrarlamada oluşan şekli tam ve doğru çizen öğrenciler; verilen üreticinin kuralını tam ve doğru olarak ifade eden öğrenciler	Üreticiyi doğru olarak çizen ancak bir sonraki tekrarlamada hatalı ya da eksik çizim yapan öğrenciler; çizimde küçük hatalar yapan öğrenciler; kuralı doğru ifade eden ancak ifadesinde küçük eksiklikleri bulunan öğrenciler	Üreticiyi yanlış bulan ya da tamamen yanlış bir şekil çizen öğrenciler; şekli çizemeyen ya da tamamen hatalı çizen öğrenciler; kuralı tamamen hatalı söyleyen öğrenciler
3. Soru	Çevre ve alanın hesaplanmasında tam ve doğru bir örüntü bulan, bu örüntüleri bir seri ile tam ve doğru olarak ifade eden ve elde ettiği serilerin toplamını tam ve doğru olarak hesaplayan öğrenciler	Çevre ve alan hesaplamada doğru örüntüler bulan, ancak bu örüntüleri bir seri ile ifade ederken küçük hatalar yapan ve bulduğu serileri hesaplamada eksiklikleri bulunan öğrenciler	Çevre ve alan için bir örüntü bulamayan ya da tamamen yanlış bir örüntü bulan ve bu örüntüyü bir seri ile ifade edemeyen öğrenciler
4. Soru	Verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini tam ve doğru bulan, bu yörüngelere göre başlangıç noktalarının türünü doğru ifade eden ve bu noktalardan Julia kümesi içerisine düşenleri doğru belirleyip, doğru açıklamalar yapan öğrenciler	Verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini doğru bulan, ya da küçük işlem hataları yapan, bu noktaların türünü doğru ya da eksik ifade eden ve bu noktalardan Julia kümesine düşenleri doğru gösteren, ancak yetersiz açıklamalarda bulunan öğrenciler	Verilen noktaların yörüngelerini tamamen yanlış bulan, bu yörüngelere göre noktaların türünü yanlış ifade eden, bu noktalardan Julia kümesi içerisine düşenleri yanlış olarak gösteren ve yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler
5. Soru	Verilen Julia kümelerinin periyotlarını doğru bulan ve Mandelbrot kümesi içerisinde doğru olarak gösteren öğrenciler	Verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulurken küçük hatalar yapan, Mandelbrot kümesi içerisinde gösterirken eksiklikleri bulunan ve yetersiz açıklamalar yapan öğrenciler	Verilen Julia kümelerinin periyotlarını tamamen yanlış bulan ve yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler
6. Soru	Verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini doğru olarak ifade eden ve tam ve doğru açıklama yapan öğrenciler	Öz-benzerlik türlerini doğru ifade eden ancak eksik ya da hatalı açıklamalar yapan öğrenciler	Öz-benzerlik türlerini yanlış ifade eden ve hatalı açıklamalar yapan öğrenciler

Tablo 2.2.'nin devamı

Sorular	Göstergelere göre belirlenen kategoriler		
	İyi	**Orta**	**Zayıf**
7. Soru	Verilen fraktalların öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını tam ve doğru olarak bulan, bu değerlerin logaritmalarını doğru hesaplayan ve elde ettiği sonuçlara göre boyutu $d = \frac{\log(öz-benzer\ parça\ sayısı)}{\log(büyüme\ oranı)}$ şeklinde doğru olarak ifade eden öğrenciler	Öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını doğru bulan ancak boyutu hesaplamada küçük hatalar yapan öğrenciler	Öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını yanlış bulan ve yanlış boyut değerleri hesaplayan öğrenciler
8. Soru	Ağacı içeren kutu sayısını doğru belirleyen, kare kutuların küçülme oranlarının logaritmaları ile şekli içeren kutu sayılarının logaritmalarını doğru olarak bulan, tam ve doğru bir log-log grafiği çizen, çizdiği grafiğe göre noktaların tümünden geçecek şekilde bir doğru belirleyen ve bu doğrunun eğimini tam olarak hesaplayan, bulduğu eğim değerinin negatifinin boyut olduğunu ifade eden öğrenciler	Ağacı içeren kutu sayısını doğru belirleyen, kutu sayısı ile kutuların küçülme oranlarının logaritmalarını doğru bulan, ancak bunları grafikte gösterirken küçük hatalar yapan ve eğimi hesaplarken küçük işlem hataları yapan öğrenciler	Kutu sayılarını doğru belirleyen ancak bunların logaritmalarını bulmayan ya da yanlış bulan, bir grafik çizmeyen ve eğimi belirlemeyen öğrenciler
9. Soru	Kaos oyununda verilen noktaların yerlerini tam ve doğru olarak belirleyen öğrenciler; verilen tekrarlama kuralına göre iki nokta için Kaos oyununu doğru oynayan ve oluşan şekilleri doğru tanımlayan ve doğru açıklamalarda bulunan öğrenciler	Kaos oyununda noktaların yerlerini doğru olarak belirleyen ancak küçük hatalar yapan öğrenciler; kaos oyununu doğru oynamasına karşın oluşan şekilleri tanımlamada ve açıklamalarında küçük hatalar yapan öğrenciler	Kaos oyununda noktaların yerlerini tamamen yanlış belirleyen öğrenciler; kaos oyunu sonucu oluşan şekilleri yanlış tanımlayan ve yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler

Tablo 2.2'ye göre öğrenciler iyi, orta ve zayıf olarak sınıflandırılmışlardır. Sınav sorularına cevap vermeyen öğrencilerinde olabileceği düşünülerek sınav sorularına cevap vermeyen öğrenciler ise boş olarak sınıflandırılmıştır.

İkinci aşamada belirlenen 9 öğrenci ile yazılı sınavda verdikleri cevaplar üzerine klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu sayede öğrencilerin öğrenmeleri derinlemesine incelenmiştir. Böylece programın hangi kazanımlarının öğrenciler tarafından kazanılabildiğine karar verilmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda program sonunda öğrencilerin programın belirlenen kazanımlarının hangilerini kazandıklarını ortaya koymak için yazılı sınav sorularına ve klinik mülakatlara verdikleri cevaplar içerisinden aşağıdaki sorulara yanıtlar aranmaya çalışılmıştır.

- Fraktal geometri öğretim programı sonunda programın hangi kazanımları öğrenciler tarafından kazanılmıştır? Hangilerinin kazanılmasında güçlüklerle karşılaşılmıştır?
- Fraktal geometri öğretim programı sonunda öğrenciler fraktal konularına yönelik ne tür öğrenmeler gerçekleştirmişlerdir?

Elde edilen veriler fraktal geometri öğretim programında yer alan her bir konu altında betimsel olarak sunulmuştur. Bunun nedeni her bir konunun kazanımlarından hangilerinin öğrenciler tarafından kazanıldığını daha doğru olarak ortaya koymaktır.

3. BULGULAR

Bu çalışmanın amacı, ortaöğretim düzeyi için tasarlanan fraktal geometri öğretim programını öğrenilebilirlik ve öğretilebilirlik boyutlarından değerlendirmektir. Bu bölümde yer alan bulgular çalışmanın her bir alt problemine cevap verecek şekilde dizayn edilmiştir. Bu nedenle araştırmada kullanılan mülakatlar ve yazılı sınavlardan elde edilen bulgular ayrı ayrı sunmak yerine çalışmanın alt problemleri çerçevesinde düzenlenerek verilmiştir. Elde edilen bulguların sunulma sırası ise Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1. Bulguların sunuş biçimini gösteren şema

Bulgular Bölümünün Alt Başlıkları	Veri Kaynakları			
3.1. Fraktal Geometri Öğretim Programının Fraktal Konularının Öğrenilmesindeki Yeterliğine İlişkin Bulgular	YS	KM	DSM	ÖM
3.1.1. Programın Kazanımlarına Ulaşmada Öğrencilerin Ne Kadar Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.1. Fraktal Kavramının Öğrenilmesinde Programın Hangi Kazanımlarının Etkili Olduğuna İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.2. Geometrik Tekrarlamalar Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.3. Fraktalların Çevresi, Alanı ve Hacmi Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.4. Cebirsel Tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia Kümeleri Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.5. Öz-benzerlik Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.6. Fraktal Boyut Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.1.7. Kaos Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular	√	√		
3.1.2. Fraktal Geometri Programının Uygulama Sürecinde Hazırlanan Materyaller, Kullanılan Yöntem ve Tekniklerin Öğrencilerin Öğrenme Sürecine Etkilerine İlişkin Bulgular			√	√
3.2. Öğretmen ve Öğrencilerin Fraktal Geometri Öğretim Programının Uygulanması Sürecinde Yaşadıkları Deneyimlerine İlişkin Bulgular			√	√

YS: Yazılı sınav, KM: Klinik mülakat, DSM: Ders sonu mülakat, ÖM: Öğretmen mülakatı

Bu bölümün birinci kısmında hazırlanan fraktal geometri öğretim programının fraktal konularının öğrenilmesindeki yeterliliğini belirlemeye ilişkin bulgular sunulmuştur. Bu bağlamda programın uygulama sürecinde öğrencilerin öğrenmeleri üzerine etkileri ve uygulama sonunda belirlenen kazanımlardan ne kadarının kazanıldığına ilişkin bulgulara yer verilmiştir. İkinci kısımda ise programın uygulanması sürecinde öğretmen ve öğrencilerin yaşadıkları deneyimlere ve karşılaştıkları güçlüklere ilişkin bulgular sunulmuştur.

3.1. Fraktal Geometri Öğretim Programının Fraktal Konularının Öğrenilmesindeki Yeterliğine İlişkin Bulgular

Bu başlık altında fraktal geometri öğretim programının fraktal konularının öğrenilmesindeki yeterliğini belirlemek amacıyla yazılı sınav sorularından, klinik mülakatlardan ve ders sonu mülakatlardan elde edilen bulgulara yer verilmiştir. İlk bölümde programın kazanımlarından ne kadarının uygulama sonunda öğrenciler tarafından kazanıldığına ilişkin bulgular sunulmuştur. İkinci bölümde ise programın uygulama sürecinde fraktal konularının öğretiminde kullanılan materyaller ve öğretim yöntem ve tekniklerinin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerine yönelik bulgular sunulmuştur.

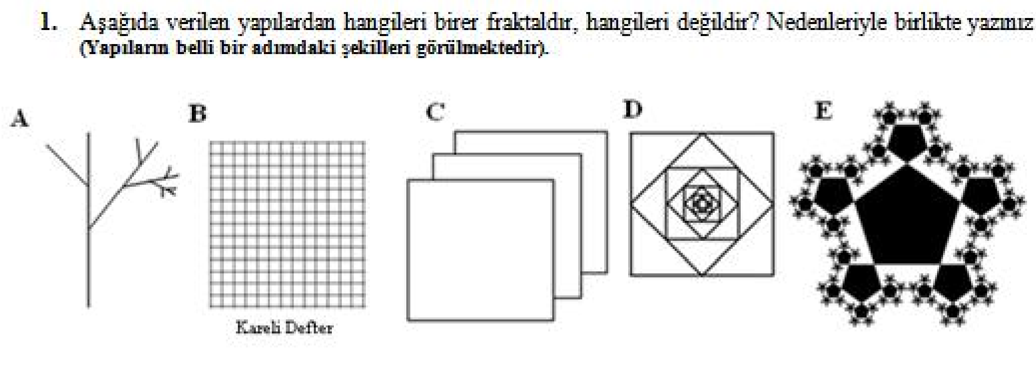
3.1.1. Fraktal Geometri Öğretim Programının Kazanımlarından Ne Kadarının Öğrenciler Tarafından Kazanıldığına İlişkin Bulgular

Bu başlık altında hazırlanan fraktal geometri öğretim programının kazanımlarının uygulama sonunda öğrenciler tarafından ne kadarının kazanıldığına ilişkin bulgular sunulmuştur. Bu amaçla 6 hafta sonunda programın öğrencilerde ne tür fraktal kavramları oluşturduğuna ve her bir fraktal konusunda hangi kazanımların kazanıldığına yönelik bulgulara yer verilmiştir.

3.1.1.1. Fraktal Kavramının Öğrenilmesinde Programın Hangi Kazanımlarının Etkili Olduğuna İlişkin Bulgular

Hazırlanan fraktal geometri öğretim programında öğrencilere doğrudan bir fraktal tanımı verilmemiştir. Bunun yerine öğrencilerin 6 haftalık uygulama süreci sonunda kendi fraktal tanımlarını oluşturmaları beklenmiştir. Bu bağlamda program sonunda öğrencilerin uygun fraktal tanımları oluşturup oluşturmadıklarının, verilen şekillerden fraktal olanları belirleyip belirleyemediklerinin ve bir şekle fraktal denildiğinde hangi özelliklere odaklandıklarının belirlenmesi programın fraktal kavramının öğrenilmesindeki yeterliliğine karar verilmesini sağlayacaktır. Bu nedenle programın fraktal kavramının öğrenilmesindeki yeterliğine karar vermeye yönelik elde edilen bulgular şu aşamalardan geçilerek sunulmuştur. Öncelikle öğrencilerin yazılı sınavda 1. soruya verdikleri cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. Bu kategorilerin belirlenmesinde fraktal konularının öğrenilebilirlik göstergeleri ve öğrencilerin bu soruya verdikleri cevapların ve açıklamaların doğruluğu temel alınmıştır. Bu bağlamda verilen şekilleri doğru sınıflandıran, tam ya da çok az hatalı açıklamalarda bulunan öğrenciler iyi; verilen şekilleri doğru sınıflandıran ya da bazılarında hatalı sınıflandırmalarda bulunan ve açıklamaları eksik olan öğrenciler orta ve verilen şekillerin tamamını ya da büyük bir kısmını yanlış sınıflandıran ve çok yetersiz ya da yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler ise zayıf olarak belirlenmiştir. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Daha sonra sınav sorusuna verdikleri cevaplardan ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuş ve bir sonuç paragrafına göre fraktal geometri öğretim programının öğrencilerin fraktal kavramını öğrenmelerindeki yeterliği özetlenmiştir.

Öğrencilere sınavda sorulan birinci soru verilen şekillerin fraktal olup olmadıklarını belirlemelerine ve bunun nedenlerini açıklamalarına yöneliktir. Soru Şekil 3.1'de ve öğrencilerin bu şekillerin fraktal olup olmadıklarını belirlemelerindeki başarılarını gösteren bulgular ise Tablo 3.2'de sırasıyla sunulmuştur.



Şekil 3.1. Soru 1 ve içeriği

Tablo 3.2. Öğrencilerin verilen nesnelerden fraktal olanları belirlemedeki başarıları

İyi		**Orta**		**Zayıf**		**Boş**	
N	%	N	%	N	%	N	%
30	77	4	10	5	13	0	0

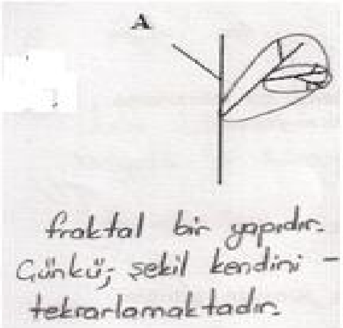
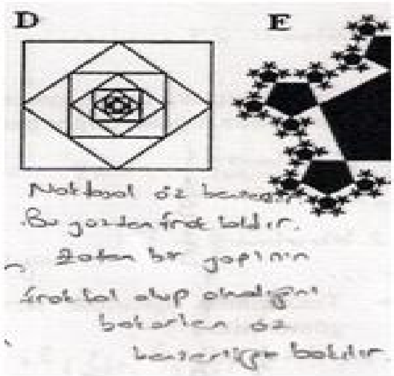
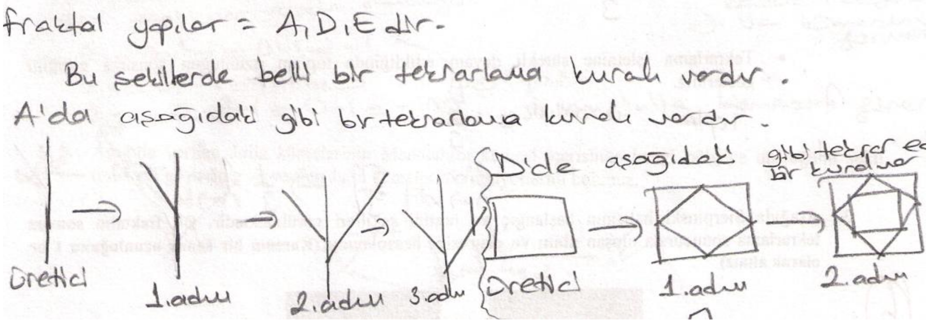
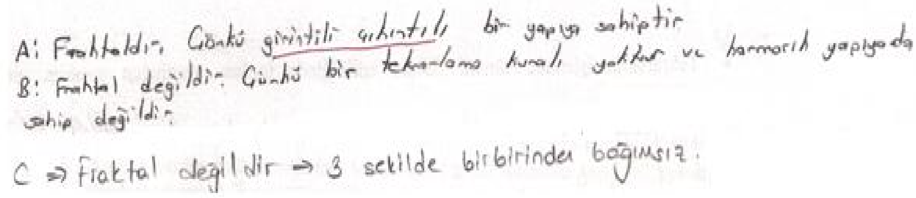
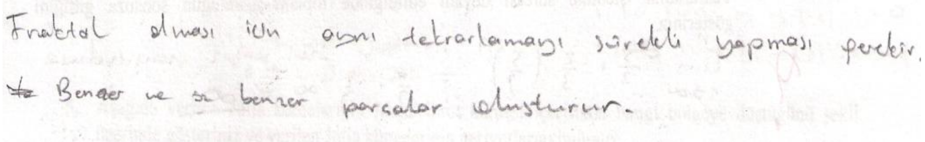
Tablo 3.2 incelendiğinde öğrencilerin %77'sinin verilen nesnelerin fraktal olup olmadığını doğru olarak belirledikleri ve doğru açıklamalarda bulundukları, %13'ünün bu nesnelerin fraktal olup olmadıklarına karar vermede yanlış yaptıkları ya da verilen nesnelerin fraktal olup olmadığına karar vermede çok yetersiz açıklamalarda bulundukları ve %10'unun ise bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede eksik ya da yetersiz açıklamalarda bulundukları belirlenmiştir. Bu bulgu genel olarak öğrencilerin bir nesnenin fraktal olup olmadığına doğru olarak karar verdiklerini göstermektedir.

Öğrencilerin sınav kağıtlarına yazdıkları açıklamalardan ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular verilen bir şeklin fraktal olup olmadığını belirlemede Tablo 3.3'de gösterilen özelliklere odaklandıklarını göstermektedir.

Tablo3.3. Bir nesnenin fraktal olarak belirlenmesinde öğrencilerin odaklandıkları özellikler

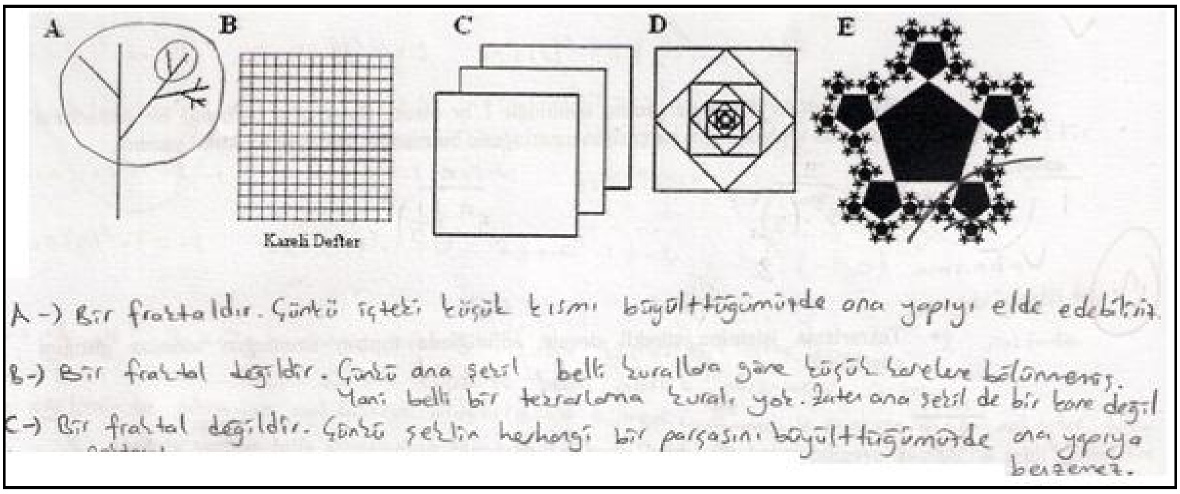
Öğrencilerin Odaklandıkları Özellikler									
Tekrarlama ve öz-benzerlik		**Öz-benzerlik**		**Tekrarlama**		**Tekrarlama, öz-benzerlik ve dış görünüş**		**Tekrarlama, öz-benzerlik ve sonsuzluk**	
N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
18	46	6	15	6	15	5	13	4	11
Tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerine göre fraktalı belirlemeye yönelik örnek					Sadece öz-benzerlik özelliğine göre fraktalı belirlemeye yönelik örnek				

Tablo 3.3'ün devamı

	
Sadece tekrarlama özelliğine göre fraktalı belirlemeye yönelik örnek	
	
Tekrarlama, öz-benzerlik ve dış görünüşe göre fraktalı belirlemeye örnek	
	
Tekrarlama, öz-benzerlik ve sonsuzluğa göre fraktalı belirlemeye örnek	
	

Tablo 3.3 incelendiğinde öğrencilerin bir nesnenin fraktal olarak belirlenmesinde %46 ile en çok öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerinin olup olmadığını aradıkları görülmektedir. Yazılı sınava verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular öğrencilerin verilen nesnelerin fraktal olup olmadığına karar vermede sadece öz-benzerlik ya da sadece tekrarlama kuralının olup olmadığına odaklanmadıkları, aksine bu iki özelliği sıklıkla birlikte aradıklarını göstermektedir.

Örneğin Ö21 yazılı sınav kağıdına A, B ve C şekillerinin fraktal olup olmadığıyla ilgili aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.



Şekil 3.2. Ö21'in açıklamaları

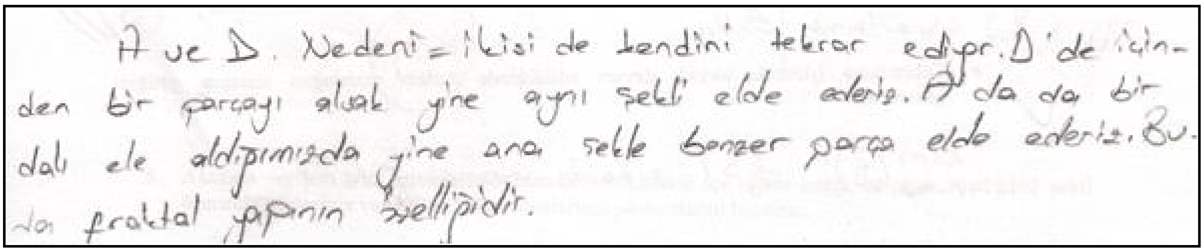
Ö21 A'daki ağacın bir fraktal olma sebebini öz-benzerliğe bağlamakta ve bunu çizdiği şekille de göstermektedir. Bunun yanında B'deki şeklin bir fraktal olmadığını hem şeklin belli bir tekrarlama kuralının olmamasına hem de öz-benzerliğin bulunmamasına bağlamaktadır. C'deki şekli ise öz-benzerliği sağlamamasından dolayı bir fraktal olarak sınıflandırmamaktadır. Bu öğrenci ile yapılan klinik mülakatta da öğrencinin bir nesnenin fraktal olmasında tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerinin bulunması gerektiğini ifade ettiği belirlenmiştir.

> A: Bir nesnenin fraktal olup olmadığına nasıl karar verirsin?
> Ö21: Öncelikle en küçüğünden en büyüğüne doğru olan birbirine benzer yapılar var mı, bunlara bakıyorum. Sürekli aynı birbirini tekrarlayan yapılar var mı, ya da bir mikroskopla hani büyüttüğümüzde yine aynı şekiller oluyor mu, bunlara bakıyorum ve ona göre karar veriyorum.

Ö21 *"en küçüğünden en büyüğüne doğru olan birbirine benzer yapılar … büyüttüğümüzde yine aynı şekiller oluyor mu…"* cümleleri ile bir nesnenin fraktal olmasında öz-benzerliği ve *"Sürekli aynı birbirini tekrarlayan yapılar"* cümlesi ile de tekrarlama özelliğini dikkate aldığını ifade etmektedir. Bu durum aynı zamanda bu öğrencinin bir fraktalı farklı oranlarda birbirine benzer şekillerin tekrarlandığı bir yapı olarak anladığını göstermektedir.

Öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerini birlikte göz önüne alarak bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermeye çalışan öğrencilerin büyük çoğunluğunun verilen şekilleri doğru olarak sınıflandırdıkları ve Ö21'e benzer bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Ancak bazı öğrencilerde öz-benzerlik kavramına yönelik var olan yanlış anlamalar verilen şekilleri hatalı sınıflandırmalarına ve eksik ya da yanlış açıklamalarda bulunmalarına neden olmuştur. Bu durum öğrencilerin fraktal kavramını zihinlerinde anlamlandırmalarında güçlükler yaşamalarına neden olmaktadır.

Örneğin Ö35 sınav kağıdında sadece A, D ve C şekillerinin fraktal olduklarını diğerlerinin ise fraktal olmadıklarını aşağıdaki şekilde ifade etmektedir.


A ve D. Nedeni = İkisi de kendini tekrar ediyor. D'de için-
den bir parçayı alsak yine aynı şekli elde ederiz. A'da da bir
dalı ele aldığımızda yine ana şekle benzer parça elde ederiz. Bu-
da fraktal yapının özelliğidir.

Şekil 3.3. Ö35'in açıklaması

Öğrencinin açıklamaları incelendiğinde verilen şekillerde tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerinin olup olmadığına göre şeklin bir fraktal olup olmadığına karar verdiği görülmektedir. Ancak yapılan klinik mülakatta Ö35, C şeklinin öz-benzer olması nedeniyle fraktal olduğunu ifade etmektedir.

A. Peki C deki şekle niçin bir fraktal dedin?
Ö35: Çünkü birbirine benzer kareler tekrarlanarak sonsuza doğru gitmekte.
A: C deki kareler birbirine benzer yani öz-benzer midir?
Ö35: Evet, çünkü öndeki kare ile bir ardındaki aynıdır.

Ö35, öz-benzerliğe bakarken nesnenin içindeki parçaları birbirleri ile karşılaştırmakta, ancak parça bütün ilişkisini göz önüne almamaktadır. Bunun yanında fraktal yapıların sahip oldukları öz-benzerlik nedeniyle içlerinde farklı oranda kendi parçalarını içerdiklerini de göz ardı etmektedir.

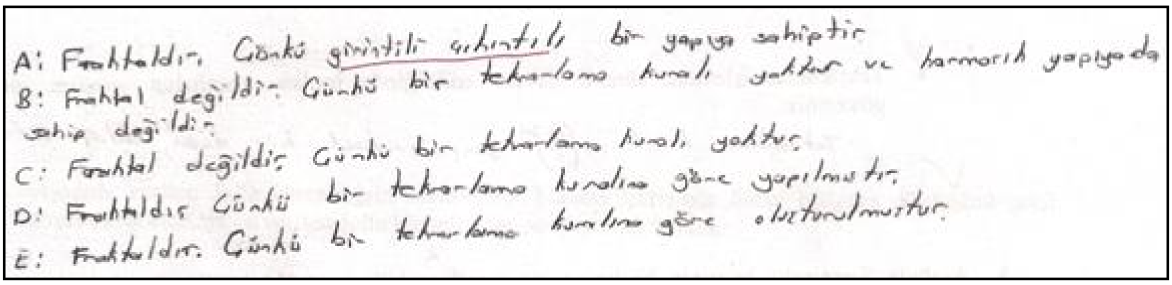
Öğrencilerin tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerine ek olarak verilen nesnelerin fraktal olup olmadığına karar vermede %13 ile şeklin karmaşıklığı, girintili ve çıkıntılı yapısı olarak dış görünüşünü ve % 11 ile de şeklin sonsuz bir yapıya sahip olma özelliklerini de inceledikleri görülmektedir.

Örneğin Ö25 ile yapılan klinik mülakatta sınav sorusunda verilen A ve B, şekillerinin fraktal olup olmamasına yönelik açıklamaları aşağıdadır.

A: A daki ağacı fraktal olarak belirlemişsin. Niçin?
Ö25: Ağaçta belli bir kural var. Bir gövde sonra sola bir dal ve sağa bir dal, sağdaki dal için yine sola bir dal ve sağa bir dal ve bu şekilde devam etmektedir. Bu nedenle bir fraktaldır.
A: Fraktal olması için sadece belli bir kural mı olmalıdır?
Ö25: Bir de yaklaşık öz-benzerdir. Yani dallarda öz-benzerlik var.
A: B'deki kareli defter niçin bir fraktal değildir?
Ö25: Kareli defterde örüntü sonsuza gitmiyor. Evet, başlangıçta kareli defteri 4 eş parçaya bölerek bu şekli çiziyoruz, ama bu sonlu.
A: Peki sonsuza gittiğini düşünelim, şimdi bir fraktal olur mu?
Ö25: Ama yapının iç içe doğru kendini farklı oranlarda tekrarlayan parçaları olmalı. Burada sanki olmaz gibi geliyor.

Ö25 verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar verirken nesnenin tekrarlama, öz-benzerlik ve sonsuz yapıda olma özelliklerini dikkate aldığı görülmektedir. Ö25 verilen şekilde eğer özelliklerden biri sağlıyorsa hemen diğerinin de var olup olmadığını kontrol etmekte ve sonucu buna göre söylemektedir. Bu durum bu öğrencinin fraktalı bir nesnenin kendisini sürekli iç içe tekrarlayan sonsuz bir yapı olarak anladığını göstermektedir.

Benzer şekilde Ö9 verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığını belirlemede öz-benzerlik, tekrarlama ve şeklin görünüşünü dikkate aldığını aşağıdaki açıklamalarıyla göstermektedir.


A: Fraktaldır. Çünkü girintili çıkıntılı bir yapıya sahiptir
B: Fraktal değildir. Çünkü bir tekrarlama kuralı yoktur ve harmonik yapıya da sahip değildir.
C: Fraktal değildir. Çünkü bir tekrarlama kuralı yoktur.
D: Fraktaldır. Çünkü bir tekrarlama kuralına göre yapılmıştır.
E: Fraktaldır. Çünkü bir tekrarlama kuralına göre oluşturulmuştur.

Şekil 3.4. Ö9'un açıklamaları

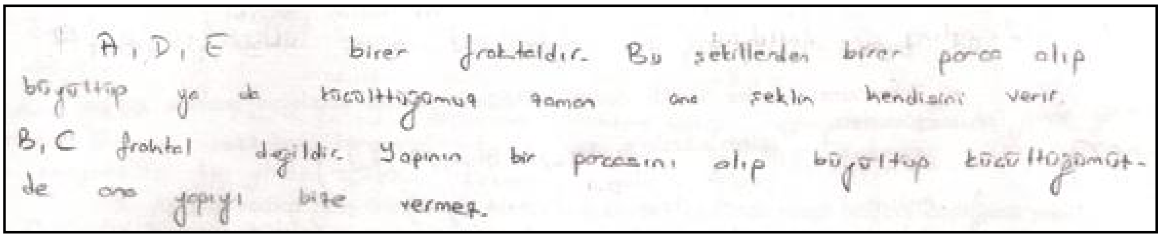
Ö9 sınav kağıdında verilen şekilleri fraktal ve fraktal olmayan şekilde doğru olarak sınıflandırmasına karşın yazılı kağıdına ayrıntılı açıklamalar yapmamaktadır. Yapılan klinik mülakatta Ö9 bir nesnenin fraktal olmasında karmaşık bir yapıya sahip olması, tekrarlama kuralının bulunması ve tam olarak açıklamasa da öz-benzer parçalarının bulunmasının gerektiğini ifade etmektedir.

A: 1. soruda ağacın fraktal olmasını onun girintili ve çıkıntılı bir yapıya sahip olmasına bağlıyorsun? Sence başka bir özelliği var mıdır? Ağacın fraktal olmasının.
Ö9: Karmaşık bir yapısı vardır. Bunun yanında belli bir tekrarlama kuralının olması gerekli
A: Başka özellikleri olması gerekli midir?
Ö9: Oluşan yapılar birbirinin benzeri, tam olarak açıklayamıyorum nedenini, yani biliyorum ama.

Bu bulgu Ö9'un bir fraktalı girintili, çıkıntılı, karmaşık bir yapıya sahip ve birbirine benzer parçaların tekrarlanması sonucu oluşan bir yapı olarak anladığını göstermektedir.

Öğrencilerin verilen nesnelerin fraktal olup olmadığına karar vermede %15'inin sadece öz-benzerlik ve %15'inin ise sadece tekrarlama olmak üzere tek bir özelliğe odaklandıkları görülmektedir.

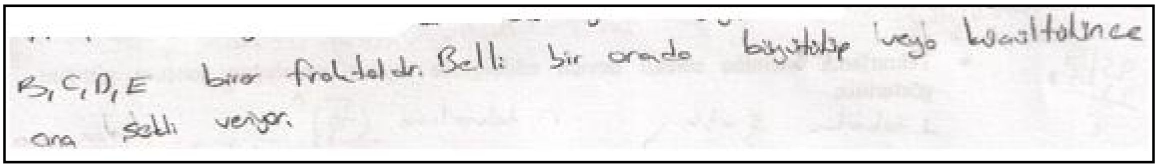
Örneğin Ö1'in yazılı kâğıdına yazdığı açıklamalardan bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede baskın olarak öz-benzerliği kullandığı görülmektedir.


A, D, E birer fraktaldır. Bu şekillerden birer parça alıp büyütüp ya da küçülttüğümüz zaman ana şeklin kendisini verir. B, C fraktal değildir. Yapının bir parçasını alıp büyütüp küçülttüğümüzde ana yapıyı bize vermez.

Şekil 3.5. Ö1'in açıklamaları

Ö1'in bu açıklaması fraktalı herhangi bir parçasını alıp büyütüp küçülttüğümüzde yine ana şekli veren bir yapı olarak anladığını göstermektedir. Ö1 tek bir özelliğe odaklanarak soruda verilen yapıları doğru olarak sınıflandırmasına karşın tek bir özelliğe odaklanan bazı öğrencilerin verilen nesnelerin fraktal olup olmadığına karar vermede yanlış yaptıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö2, B,C,D ve E şekillerinin tümünün fraktal olduğunu belirttiği aşağıdaki açıklamasında bu nesneleri sınıflandırırken sadece öz-benzerlik özelliğini kullanmaktadır.


B, C, D, E birer fraktaldır. Belli bir oranda büyütülüp veya küçültülünce ana şekli veriyor.

Şekil 3.6. Ö2’nin açıklamaları

Oysa B ve C şekilleri birer fraktal değildir. B’deki kareli defter öz-benzer karelere ayrılmasına karşın hem sonlu bir yapıya sahip, hem de bütününde öz-benzerliği sağlamamaktadır. Benzer şekilde C’deki kareler ise birbirlerine benzer olmalarına karşı öz-benzerliği sağlamamaktadırlar.

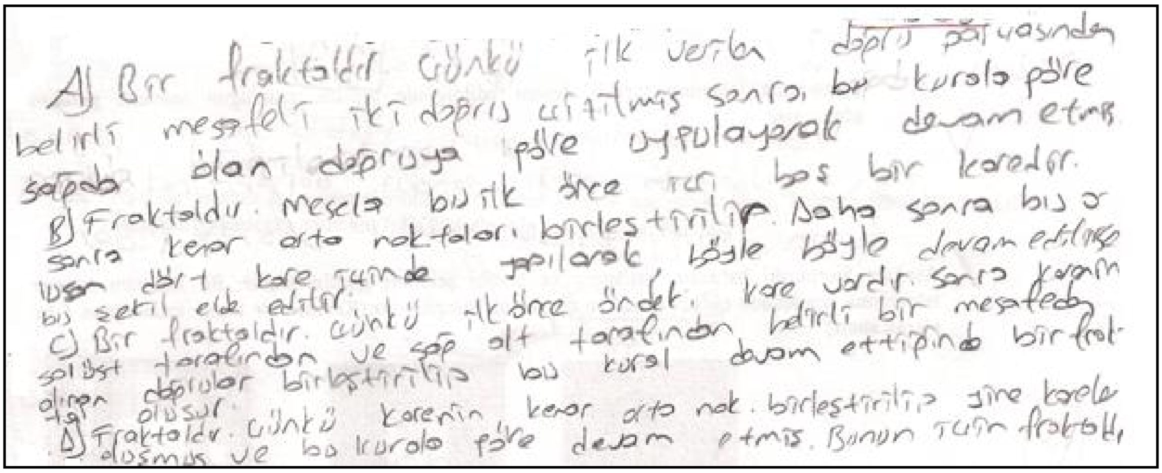
Bunun yanında sadece öz-benzerlik özelliğini göz önüne alan bazı öğrencilerde öz-benzerlik kavramına yönelik var olan yanlış anlamaları ya da eksik bilgileri nedeniyle yanlış fraktal anlamalarına sahip oldukları belirlenmiştir.

Örneğin Ö29, E’de verilen şekli bir fraktal olarak ifade etmesine karşın bu şeklin öz-benzer olmadığını yapılan klinik mülakatta dile getirmektedir.

> A: Son şekil bir fraktaldır demişsin niçin?
> Ö29: Çünkü içerisinde benzer yapılar var.
> A: Ama C’deki şekilde de benzer yapılar vardı? Aralarındaki fark nedir?
> Ö29: C de ben bir benzerlik kuramadım, aynı şekiller devam ediyor sadece.
> A: Belli bir oran mı olmalı devam eden şekillerde?
> Ö29: Evet ben şekle bakınca belli oranda büyüyen küçülen yapılar ararım.
> A: Peki E öz-benzer bir şekil midir?
> Ö29: Orada bir problem oluyor, yani beşgenin köşelerine belli oranlarda küçülen beşgenler konulmuş ama ben mesela şurayı büyütsem (siyah bölgeyi göstererek) ana şekli elde edemiyorum. Bu nedenle öz-benzerlik yok.

Bu bulgu Ö29’un fraktalı belli oranlarda büyüyüp küçülen benzer parçaların oluşturduğu bir yapı olarak anladığını göstermektedir. Ancak Ö29, E’deki şekli bir fraktal olarak ifade etmesine karşın şeklin öz-benzerliğine karar vermede zorlanmaktadır. Bu zorlanmasının nedeni öz-benzerliğin şeklin sadece kenarlarında olduğunu fark etmemesinden kaynaklanmaktadır. Ö29 şeklin iç bölgesinde bulunan bir parça ile şeklin bütününü karşılaştırdığında bir öz-benzerlik kuramamaktadır. Buna karşın E şeklinin farklı oranlarda benzer parçaları içermesinden dolayı fraktal olduğunu da ifade etmektedir. Bu ise öğrencinin bir çelişki yaşamasına neden olmaktadır.

Ö16’nın sınav kağıdına yazdığı açıklamalar ise bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede sadece tekrarlama özelliğini göz önüne aldığını göstermektedir.


A) Bir fraktaldır çünkü ilk verilen doğru parçasından bir kurala göre belirli mesafeli iki doğru çizilmiş sonra bu kurala göre devam etmiş
sağda olan doğruya göre uygulayarak
B) Fraktaldır. Mesela bu ilk önce ... boş bir karedir. Daha sonra bu o
sonra kenar orta noktaları birleştirilip yapılarak böyle böyle devam edilince
uzun dört kare içinde ... kare vardır. Sonra koyarım
bu şekil elde edilir.
C) Bir fraktaldır. Çünkü ilk önce önde ... belirli bir mesafede
sol üst taraftan ve sağ alt tarafından bu kural devam ettiğinde bir frak-
tal oluşur. doğrular birleştirilip
D) Fraktaldır. Çünkü karenin kenar orta nok. birleştirilip yine karele
oluşmuş ve bu kurala göre devam etmiş. Bunun için fraktaldır.

Şekil 3.7. Ö16’nın açıklamaları

Ö16, A’daki ağacın fraktal olma sebebini ağacın bir doğru parçasından başlanarak belli bir kurala göre devam etmesi olarak ifade etmektedir. Benzer bir yaklaşımı B’deki kareli defter içinde uygulayarak kareli defterdeki karelerin kenar orta noktalarının birleştirilmesi sonucu bu şeklin oluştuğunu ve bu nedenle bu şeklin bir fraktal olduğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Ö16, B’deki şekil içerisinde bir kural bulmaya çalışmasına karşın öz-benzer olup olmadığı ya da şeklin sonlu olup olmadığına bakmadığından dolayı yanlış bir sonuca ulaşmaktadır. Benzer şekilde C’de verilen şeklin bir kurala göre oluşturulması nedeniyle fraktal olduğunu belirtmektedir. Oysa C’de verilen şekil öz-benzer olmadığından bir fraktal değildir. Bu öğrenci ile yapılan klinik mülakatta B ve C şekillerinin niçin fraktal oldukları sorulduğunda aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

> A: B deki kareli defter niçin bir fraktaldır?
> Ö16: Bir kare var bu karenin kenar orta noktaları birleştirilmiş ve sonra oluşan kareler içinde bu devam etmiş. Bu nedenle bir fraktaldır.
> A: Peki öz-benzerlik var mı?
> Ö16: Kareli defterin şu parçasını alsam ve bunu büyütsem başlangıçtaki kareyi elde edebilir miyim? elde edemem. Çünkü aldığımız parça büyüdüğünde ana şekli vermiyor, yani bir fraktal değil. Evet, hatalı yapmışım.
> A: C şıkkı niçin bir fraktaldır?
> Ö16: Burada ön tarafta bir kare var. Sonra belli mesafelerle ard arda kareler konulmuş, bu şekilde bir kuralla devam etmiş şekilde düşündüm. Yani kareler ard ardına dizilmiş. Bir kural olduğundan fraktaldır.

Ö16’ya B’nin öz-benzer olup olmadığı sorulduğunda verilen şeklin öz-benzer olmadığını belirlediği ve bu nedenle fraktal olamayacağına karar vererek yanlış yaptığını anladığı görülmektedir. Ancak C'deki şekil için ise hala sadece tekrarlama özelliğine vurgu yaparak fraktal olduğunu ifade ettiği tespit edilmiştir.

Sınav kağıtlarına verilen cevaplar ve yapılan klinik mülakatlar incelendiğinde bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede öğrencilerin nesne içerisinde aradıkları özellik sayısı arttıkça nesnenin fraktal olup olmadığına karar verme düzeylerinin de arttığı belirlenmiştir. Bunun yanında bazı öğrencilerde öz-benzerlik kavramına ait olan yanlış anlamalar her ne kadar verilen nesne içerisinde birden çok özellikler aramalarına karşın verilen nesneleri yanlış sınıflandırmalarına ve fraktal kavramı hakkında yanlış anlamalara neden olduğu tespit edilmiştir.

Öğrenciler fraktal geometri kavramlarını öğrenirken belki de fraktalları diğer nesnelerden ayıran önemli özelliklerden biri olan fraktal boyut özelliğini de öğrenmişlerdir. Ancak hem sınav kağıtlarına verdikleri cevaplarda hem de klinik mülakatlarda öğrencilerden hiç birinin verilen bir şeklin fraktal olup olmadığına karar vermede fraktal boyut özelliğini göz önüne almadıkları belirlenmiştir.

Birkaç öğrencinin ise bir nesnenin fraktal olup olmadığını belirlemede verilen nesneleri fraktal olarak doğru şekilde sınıflandırmalarına karşın bunun nedenini tam olarak açıklayamadıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö7 sınav kağıdında verilen şekillerin tümünü doğru olarak sınıflandırmasına karşın yapmış olduğu açıklamalarının oldukça yetersiz olduğu tespit edilmiştir. Yapılan klinik mülakatla Ö7'nin sınav kağıdına yazdığı cevaplara yönelik açıklaması aşağıda verilmiştir.

> A: Kareli deftere niçin bir fraktal değildir? Yazdın.
> Ö7: Aslında olabilir dedim önce çünkü içinde benzer parçalar var, ama mesela şurayı büyütsem, fraktal olup olmadığına tam karar veremiyorum. Ama bana fraktal değil gibi geliyor, yani şuradaki şekillerden (D ve E deki şekilleri göstererek) farklı
> A: Peki C niçin bir fraktal değildir? D ve E den farkı nedir?
> Ö7: Bunda sanki sadece bir yer değiştirme var gibi, bu nedenle
> A: Diğerlerinden farkı nedir?
> Ö7:Yani onlar kurallı, aslında açıklayamıyorum, tamam olup olmadığına karar verebiliyorum ama nedenini açıklayamıyorum. Mesela C ye baktığımda benzer şeyler göremiyorum, bundan dolayı fraktal değil ama D ve E de bunları görebiliyorum.

Ö7'nin *"şurayı büyütsem…"* şeklindeki ifadesi aslında içsel olarak öz-benzerliği aradığını ve *"onlar kurallı…"* ifadesi ise aynı zamanda bir tekrarlama kuralının var olup olmadığına da baktığını göstermektedir. Bu nedenle Ö7'nin belki içsel olarak bir nesnenin fraktal olup olmamasında öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerine odaklandığı, ancak bunları ifade etmede problem yaşadığı söylenebilir.

Elde edilen bulgular öğrencilerin fraktalları dış görünüşlerine ve sahip oldukları özelliklere göre tanımladıklarını göstermektedir. Öğrenciler fraktalların tekrarlama, öz-benzerlik, karmaşık yapıda bulunma ve sonsuzluk gibi özelliklerini göz önüne almalarına karşın bazı öğrencilerin bu özelliklerden bir ya da bir kaçını birbirinden ayrı olarak düşündükleri yapılan mülakatlar sonucu elde edilmiştir. Van Hiele'nin geometri anlama düzeyleri göz önüne alındığında fraktal geometri dersi sonucu öğrencilerin genel olarak görsel düzey denilen 1. düzey ve analiz düzeyi denilen 2. düzeyde oldukları söylenebilir. Çünkü birçok öğrenci verilen şekillerden fraktal olanları belirlemekte ve bu nesnelerin özelliklerini ifade etmektedir. Ancak bu özelliklerin birbirleriyle olan ilişkilerini açıklamamaktadır. Bunun yanında birkaç öğrenci ise verilen nesnelerden fraktal olanlar ile fraktal olmayanları doğru olarak ayırabilmekte, ancak bunun nedenlerini ifade edememektedir.

Özetle, hazırlanan fraktal geometri öğretim programının fraktal kavramının öğrenilebilirliğine yönelik yeterliğinin belirlenmesinde öğrencilerin sınavda sorulan 1. soruya verdikleri yanıtlar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur:

- Tablo 3.2.'ye göre öğrencilerin büyük çoğunluğunun (%77) verilen şekillerin fraktal olup olmadığına doğru karar verdikleri ve doğru açıklamalarda bulundukları görülmektedir. Bu bağlamda fraktal kavramının öğrenilmesinde programın yeterli olduğu söylenebilir.
- Öğrencilerin %46'sının verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede hem öz-benzerlik hem de tekrarlama özelliklerinin her ikisinin de bulunup bulunmadığına, % 13'ünün bu özelliklere ek olarak şeklin dış görünüşüne ve %11'inin ise şeklin sonsuz yapıda olmasına odaklandıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun verilen bir şeklin fraktal olup olmadığının belirlenmesinde tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerini temel aldıkları söylenebilir.
- Bazı öğrencilerin ise sadece öz-benzerlik (%15) ya da sadece tekrarlama (%15) olmak üzere tek bir özelliğe dikkat ederek verilen nesneleri fraktal ya da fraktal olmayan şekilde sınıflandırmaya çalıştıkları belirlenmiştir.

- Hiçbir öğrencinin verilen nesneleri fraktal ya da fraktal olamayan şekilde sınıflandırırken fraktalların diğer bir ayırt edici özelliği olan fraktal boyuta yer vermedikleri tespit edilmiştir.
- Öğrencilerin verilen şekillerde aradıkları fraktal özellik sayıları arttıkça fraktal olan ve olmayanlar şekilleri daha doğru sınıflandırdıkları ve daha doğru açıklamalarda bulundukları belirlenmiştir. Ancak bazı öğrencilerde öz-benzerlik kavramına yönelik var olan yanlış anlamalar verilen şekilleri fraktal olarak belirlemelerinde hata yapmalarına neden olmaktadır.
- Öğrencilerin büyük çoğunluğunda fraktal kavramına yönelik "farklı oranlarda birbirine benzer şekillerin tekrarlandığı bir yapı" şeklinde bir anlamanın oluştuğu belirlenmiştir. Bu anlamının oluşmasında öğrencilerin en çok öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerine odaklanmalarının neden olduğu söylenebilir. Bunun yanında bu anlamaya paralel olan ve diğer bazı fraktal özelliklerini de içeren "bir nesnenin kendisini sürekli iç içe tekrarlayan sonsuz bir yapı" ve"girintili, çıkıntılı, karmaşık bir yapıya sahip ve birbirine benzer parçaların tekrarlanması sonucu oluşan bir yapı" şeklinde anlamalarında oluştuğu belirlenmiştir.
- Bu anlamların dışında öğrencilerin fraktallarda genellikle tek bir özelliğe odaklanmalarından kaynaklanan "bir parçasını alıp büyütüp küçülttüğümüzde yine ana şekli veren bir yapı" ve "belli oranlardaki benzer parçaların tekrarlandığı bir şekil" şeklinde anlamalarında oluştuğu tespit edilmiştir.
- Bazı öğrencilerin fraktalların tek bir özelliğine odaklanmalarından ya da öz-benzerlik kavramında sahip oldukları yanlış anlamalardan dolayı fraktallara yönelik "tüm fraktallar öz-benzer olmak zorunda değildir" şeklinde yanlış bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir.
- Birkaç öğrencinin fraktal olan ya da olmayan şekilleri doğru olarak belirlemesine karşın bunun nedenlerini ifade edemedikleri tespit edilmiştir.

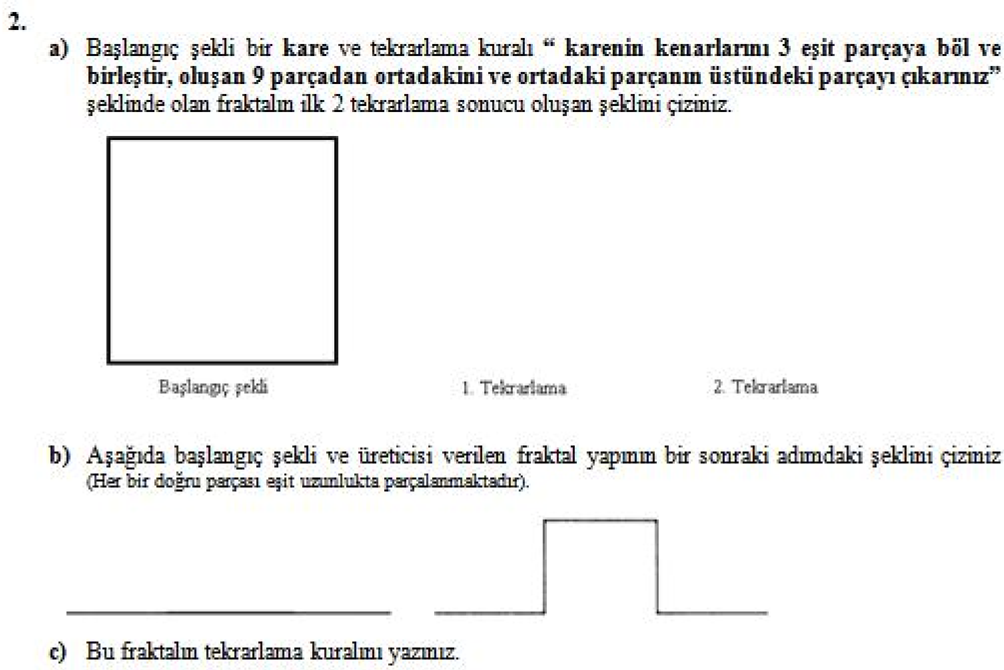
3.1.1.2. Geometrik Tekrarlamalar Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular

Hazırlanan programın geometrik tekrarlamalar konusunun öğrenilmesinde ne kadar yeterli olduğunu belirlemeye yönelik elde edilen bulgular geometrik tekrarlamalar konusunun üç kazanımı temel alınarak sunulmuştur. Bu bağlamda öğrencilerin tekrarlanan ekleme ve çıkartmalar ile dönme ve çevirmeleri kullanarak fraktal yapıları oluşturmaları ve bu yapılar içerisindeki örüntüleri belirlemelerine yönelik sınav sorusunda ve klinik mülakatlarda verdikleri cevaplar irdelenmiştir.

Öğrencilere sınavda sorulan 2. soru verilen tekrarlama kurallarına göre oluşan fraktal şekillerin belli bir adımdaki şekillerini parça ekleme/çıkartma ve döndürmeleri kullanarak çizmelerine yöneliktir. 2. sorunun a şıkkında verilen sözel tekrarlama kuralına göre parça çıkararak öğrencilerin üreticiyi ve bir sonraki tekrarlama adımındaki fraktal yapıyı oluşturmaları, b şıkkında verilen üreticiye göre döndürme ve parça ekleyerek oluşan fraktalın şeklini çizmeleri ve c şıkkında ise verilen üreticinin kuralının bulunması amaçlanmıştır. Bu bağlamda geometrik tekrarlamalar konusunun öğrenilmesinde öğrencilerin programın kazanımlarının ne kadarını kazandıklarına yönelik elde edilen bulgular aşağıdaki aşamalardan geçilerek sunulmuştur. Öncelikle öğrencilerin sınav sorularına verdiği cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. Bu kategorilerin belirlenmesinde fraktal konularının öğrenilebilirlik göstergeleri ile öğrencilerin 2. sorunun a, b ve c şıklarına verdikleri cevapların ve açıklamaların doğruluğu temel alınmıştır. 2. sorunun a şıkkında verilen tekrarlama kuralına göre üreticiyi ve bir sonraki tekrarlamadaki şekli tam ve doğru olarak çizen öğrenciler iyi; üreticiyi doğru olarak çizen ancak bir sonraki tekrarlamada hatalı ya da eksik çizim yapan öğrenciler orta; ve üreticiyi yanlış bulan ya da tamamen yanlış bir şekil çizen öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde b şıkkı için verilen üreticiye göre bir sonraki tekrarlamada oluşan şekli tam ve doğru çizen öğrenciler iyi, çizimde küçük hatalar yapan öğrenciler orta ve şekli çizemeyen ya da tamamen hatalı çizen öğrenciler ise zayıf olarak değerlendirilmiştir. c şıkkında ise b şıkkında verilen üreticinin kuralını tam ve doğru olarak ifade eden öğrenciler iyi, kuralı doğru ifade eden ancak küçük eksiklikleri bulunan öğrenciler orta ve kuralı tamamen hatalı söyleyenler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak

Tablo 3.4'de gösterilmiştir. Daha sonra sınav sorularına verdikleri cevaplardan ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuş ve bir sonuç paragrafına göre geometrik tekrarlamalar konusunun öğrenilmesinde programın kazanımlarının ne kadar başarılı olduğuna yönelik elde edilen bulgular özetlenmiştir.

2. soru Şekil 3.8'de ve öğrencilerin parça ekleme/çıkartma ve döndürmeleri kullanarak verilen tekrarlama kurallarına göre oluşan fraktal yapıların şekillerini çizmedeki başarıları Tablo 3.4 sırasıyla sunulmuştur.



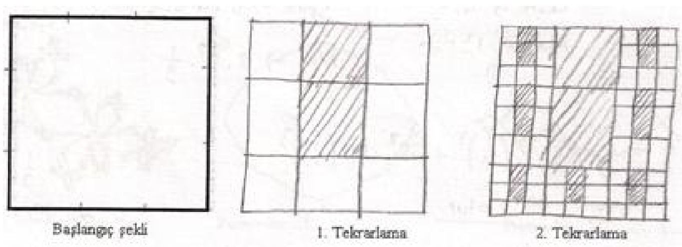
Şekil 3.8 Soru 2 ve a), b) ve c) şıkları

Tablo 3.4. Öğrencilerin parça ekleme/çıkartma ve döndürmeleri kullanarak verilen tekrarlama kurallarına göre fraktalların belli adımdaki şekillerini çizmelerine yönelik başarıları

2. Soru	İyi		Orta		Zayıf		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
a) şıkkı	28	72	6	15	5	13	0	0
b) şıkkı	37	95	0	0	2	5	0	0
c) şıkkı	25	65	6	15	4	10	4	10

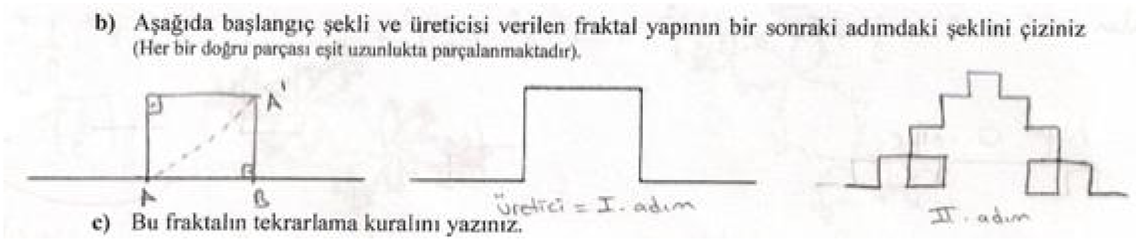
Tablo 3.4 incelendiğinde genel olarak öğrencilerin hemen hemen hepsinin verilen bir tekrarlama kuralına göre ekleme/çıkartma ve döndürmeleri kullanarak fraktal yapıları başarılı şekilde çizebildikleri görülmektedir. Bunun yanında öğrencilerin %95 ile en çok üreticisi verilen bir şeklin döndürme ve parça eklemeleri kullanarak bir sonraki adımdaki şeklini çizmede başarı gösterdikleri, %72'sinin de sözel tekrarlama kurallarına göre parça ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmede başarı gösterdikleri belirlenmiştir. Bu durum üreticisi verilen bir şeklin döndürme ve parça eklemeleri kullanarak bir sonraki adımdaki şeklini çizmede öğrencilerin, sözel tekrarlama kurallarına göre parça ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmeye göre daha başarılı olduklarını göstermektedir. Her ne kadar öğrencilerin büyük çoğunluğu fraktal yapıların şekillerini çizmede başarılı olsa da öğrencilerden %13'ünün sözel tekrarlama kurallarına göre parça ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmede ve %5'inin ise üreticisi verilen bir yapının bir sonraki tekrarlamadaki şeklini çizmede başarılı olamadıkları belirlenmiştir. Bunun yanında öğrencilerin %15'inin ise sözel tekrarlama kurallarına göre parça ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmede küçük hatalar yaptıkları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö21 verilen sözel tekrarlama kuralına göre üreticiyi ve üreticiye bağlı olarak fraktalın bir sonraki tekrarlamadaki şeklini tam ve doğru olarak aşağıdaki şekilde çizebilmiştir.



Şekil 3.9. Ö21'in çizimi

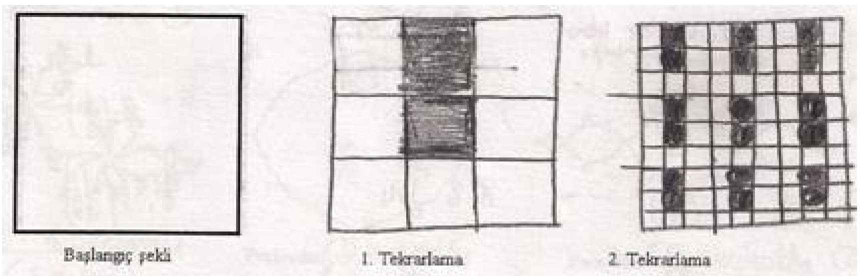
Benzer şekilde Ö21, b şıkkında üreticisi verilen yapının bir sonraki tekrarlama adımındaki şeklini aşağıdaki şekilde tam ve doğru olarak çizmektedir.



Şekil 3.10. Ö21'in çizimi

Bunun yanında birkaç öğrencinin a şıkkında verilen sözel tekrarlama kuralına göre fraktal yapıyı oluşturan üretici adımı doğru çizmelerine karşın bir sonraki tekrarlama adımındaki şekli çizerken hata yaptıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö11'in aşağıda gösterildiği gibi üreticiyi doğru olarak çizmesine karşın bir sonraki tekrarlama adımındaki şekli hatalı çizdiği belirlenmiştir.



Şekil 3.11. Ö11'in çizimi

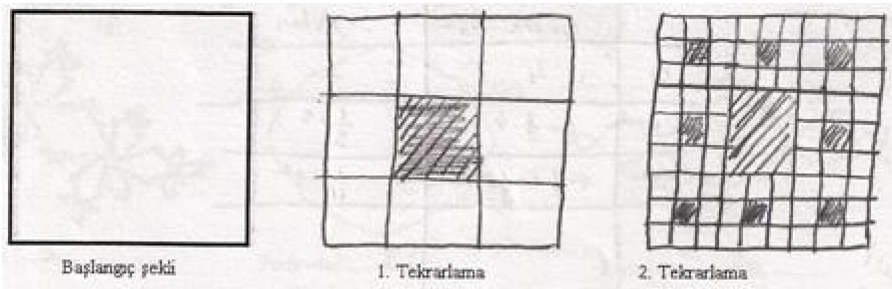
Ö11 verilen tekrarlama kuralına göre kareyi 9 eş kareye bölüp merkezdeki ve bir üstündeki kareyi ilk tekrarlamada karalamasına karşın bir sonraki tekrarlama adımında ise yine her bir kareyi 9 eş kareye ayırmakta ancak karaladığı kareler içinde bu işlemi tekrarlamaktadır. Bu durum öğrencinin verilen tekrarlama kuralına göre şekli hatalı çizmesine neden olmaktadır. Bu öğrenciyle yapılan klinik mülakatta Ö11'in kuralın çıkarılan ya da boyanan her bir kare içinde uygulanması gerektiğini düşündüğü aşağıdaki sözlerinden anlaşılmaktadır.

A: 2. soruda 1. tekrarlama adımındaki şekli nasıl çizdin?
Ö11: Yazılan kurala göre karenin kenarlarını 3 eşit parçaya bölüp birleştirdim. 9 kare oluştu. Sonra ortadaki ve onun üstündekini boyadım.
A: 2. Tekrarlamadaki şeklini nasıl çizdin?
Ö11: Her bir kare için aynı kuralı uyguladım.

A: İlk adımda boyadığın kareler için de mi? kuralı uyguladın?
Ö11: Evet çünkü kural onu söylüyor.

Bu durum Ö11'in verilen tekrarlama kuralına göre hangi parçalar (çıkarılan ya da eklenen) üzerinde örüntünün devam ettiğine çok dikkate etmediğini, ancak verilen kuralı anlayarak uygulayabildiğini göstermektedir.

Ö9 ise a şıkkında verilen tekrarlama kuralına göre ders ortamında öğrendiği Sierpinski halısının şeklini çizdiği belirlenmiştir.



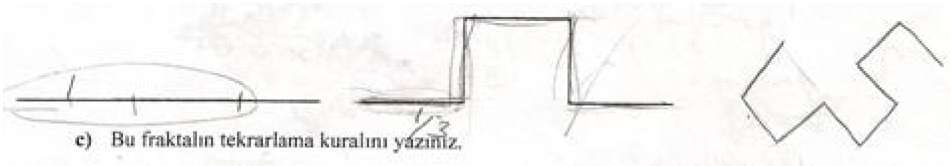
Şekil 3.12. Ö9'un çizimi

Ö9 ile yapılan klinik mülakatta öğrencinin soruyu yanlış okuması nedeniyle şekli yanlış çizdiğini ifade ettiği tespit edilmiştir.

A: 2. soruda 1. tekrarlama adımındaki şekli nasıl çizdin? Neye dikkat ettin?
Ö9: Karenin kenarlarını 3 eşit parçaya bölüp birleştiriyoruz, sonra oluşan 9 parçadan ortadakini çıkartıyoruz.
A: Kural sadece ortadakini mi çıkartmanı söylüyor?
Ö9: Ortadaki ve ortadaki parçanın üstündekini. Soruyu yanlış okumuşum.

Ancak bu soruda Sierpinski halısının şeklini çizen Ö9'dan başka 3 tane daha öğrencinin olması, öğrencilerin verilen tekrarlama kuralına çok fazla dikkat etmeden ders ortamında öğrendikleri bu fraktalın şeklini ezbere çizmeyi tercih ettiklerini akla getirmektedir.

Ö19'un ise b şıkkındaki şekli fraktal ejdere benzeterek çizmeye çalıştığı belirlenmiştir.

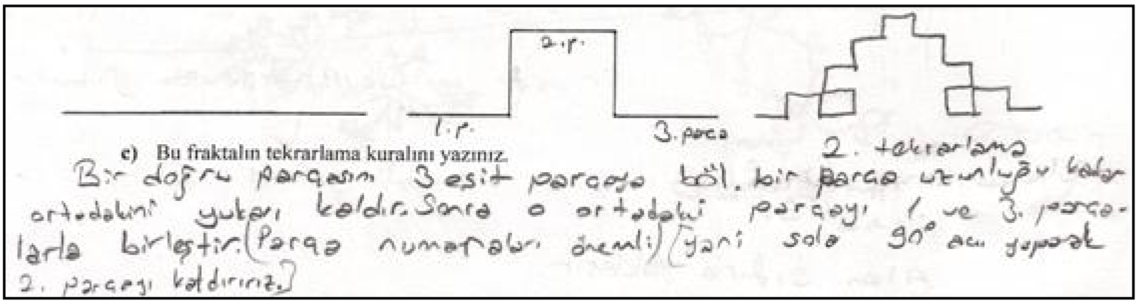


Şekil 3.13. Ö19'un çizimi

Bu öğrencinin üreticiye göre doğru parçasının 3 eş parçaya bölündüğünü belirlediği görülmektedir, ancak üretici adımında şeklin nasıl oluştuğunu yani tekrarlama kuralını tam olarak kavrayamadığından derste öğrendiği fraktal ejdere göre şekli oluşturmaya çalışmaktadır. Bununla birlikte şekli döndürme ve parça eklemeleri hatalı olarak yapmaktadır. Bu durum öğrencinin tekrarlama kuralını tam olarak anlayamadığını ve bildiği bir kuralı kullanarak örüntüyü oluşturmaya çalıştığını göstermektedir.

Tablo 3.4'e göre öğrencilerin %65'inin üreticisi verilen bir fraktal yapının kuralını tam ve doğru olarak ifade ettiği ve %15'inin ise kuralı ifade ederken eksik ya da hatalı ifadelerde bulundukları belirlenmiştir. Bunun yanında öğrencilerin %10'unun üreticisi verilen bir fraktal yapının kuralını yanlış ifade ettikleri ve %10'unun ise üreticisi verilen bir fraktal yapının kuralını ifade etmeyerek bu soruyu boş bıraktıkları tespit edilmiştir. Bu durum bazı öğrencilerin üreticisi verilen bir fraktal yapının kuralını ifade etmede güçlük yaşadığını göstermektedir.

Örneğin Ö25 verilen üreticiye göre fraktalın bir sonraki tekrarlama adımındaki şeklini doğru olarak çizmekte ve üreticiye göre kuralı tam ve doğru olarak aşağıdaki şekilde ifade etmektedir.



Şekil 3.14. Ö25'in çizimi ve açıklamaları

Ö25 tekrarlama kuralını başlangıçtaki doğru parçasının 3 eş parçaya bölünmesi, ortadaki parçanın yukarıya eş parçalardan birinin uzunluğu kadar kaldırılması ve diğer parçalarla 90^0 olacak şekilde 2 yeni parçanın eklenmesi olarak tanımlamaktadır.

Buna karşın Ö13 başlangıçtaki doğru parçasının 3 eşit parçaya bölündüğünü ve ortadaki parçanın 90^0 döndürüldüğünü fark etmekte ancak tekrarlama kuralını tam olarak ifade edememektedir.

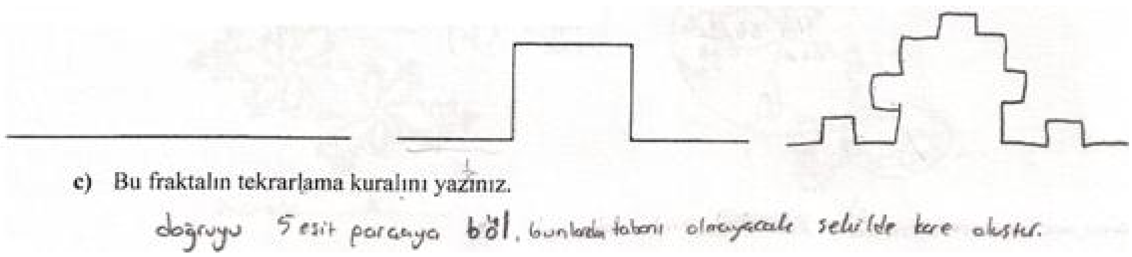
Şekil 3.15. Ö13'ün açıklamaları

Yapılan klinik mülakatta Ö13 öğrencisinin yaşadığı güçlük aşağıda sunulmuştur.

A: 2. sorunun b şıkkındaki şeklin nasıl çizdin? Kural nedir?
Ö13: Ben şekli incelediğimde başlangıçtaki doğru parçasına bir şeyler yapılarak bu hale getirildiğini gördüm. Bir sonraki adımı çizerken oradaki her bir doğruyu başlangıç şekli olarak aldım. Ve ona ne yapılmışsa her bir doğru için aynı şeyi yaptım. Ama bu şekli oluşturan kuralın ne olduğunu tam olarak bulamadım.

Ö13'ün *"(başlangıç şekline)ona ne yapılmışsa aynı şeyi yaptım"* ifadesi aslında şeklin tekrarlama kuralını bulduğunu ancak onu ifade etmede zorlandığını göstermektedir.

Bunun yanında Ö8'in b şıkkında doğru olarak çizdiği şeklin kuralını yanlış olarak ifade ettiği belirlenmiştir.



Şekil 3.16. Ö8'in açıklamaları

Ö8'in üreticide 5 eş parçanın olması nedeniyle başlangıçtaki doğru parçasının 5 eşit parçaya bölündüğünü düşündüğü söylenebilir. Bu durum bu öğrencinin oluşan parça sayısı ile her bir parçanın uzunluğunu karıştırdığını göstermektedir.

Öğrencilere sınavda sorulan 2. sorunun d şıkkı onların tekrarlama süreçleri sonucunda oluşturulan fraktal şekillerdeki örüntüleri bulup bulamadıklarını ve elde ettikleri örüntüleri bir kuralla ifade edip edemediklerini belirlemeye yöneliktir. Öncelikle öğrencilerin 2. sorunun d şıkkında verdiği cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. Bu kategorilerin belirlenmesinde öğrencilerin 2. sorunun d şıkkına verdikleri cevapların doğruluğu temel alınmıştır. 2. sorunun d şıkkında oluşan toplam parça sayısı ve toplam uzunluğa göre tam ve doğru örüntüler bulup bunları bir kuralla ifade eden öğrenciler iyi; toplam parça sayısı ve toplam uzunluğa göre doğru örüntüler bulan ancak bunları bir kuralla ifade etmede eksiklikleri bulunan öğrenciler orta; tamamen yanlış örüntüler bulan ve bu örüntüleri yanlış kurallarla ifade eden öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Daha sonra sınav sorularına verdikleri cevaplardan ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuş ve bir sonuç paragrafına göre öğrencilerin fraktal yapılar içerisindeki örüntüleri bulmada ve bu örüntüleri bir kuralla ifade etmedeki başarıları özetlenmiştir.

Şekil 3.17'de 2. sorunun d şıkkı ve öğrencilerin fraktal yapılar içerisindeki örüntüleri bulmada ve bu örüntüleri bir kuralla göstermedeki başarıları Tablo 3.5'de verilmiştir.

d) (Aşağıdaki soruları b) şıkkındaki fraktalla göre cevaplayınız)

- Her bir tekrarlama adımında kaç doğru parçası oluşmaktadır? Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında kaç tane doğru parçasının oluştuğunu bulmamızı sağlayan bir kural bulunuz.

- Başlangıçtaki doğru parçasının uzunluğu 1 br olsun. Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında toplam doğru parçasının uzunluğunu bulmamızı sağlayan bir kural yazınız.

- Tekrarlama işlemine sürekli devam edildiğinde toplam uzunluğun sonsuza gittiğini gösteriniz.

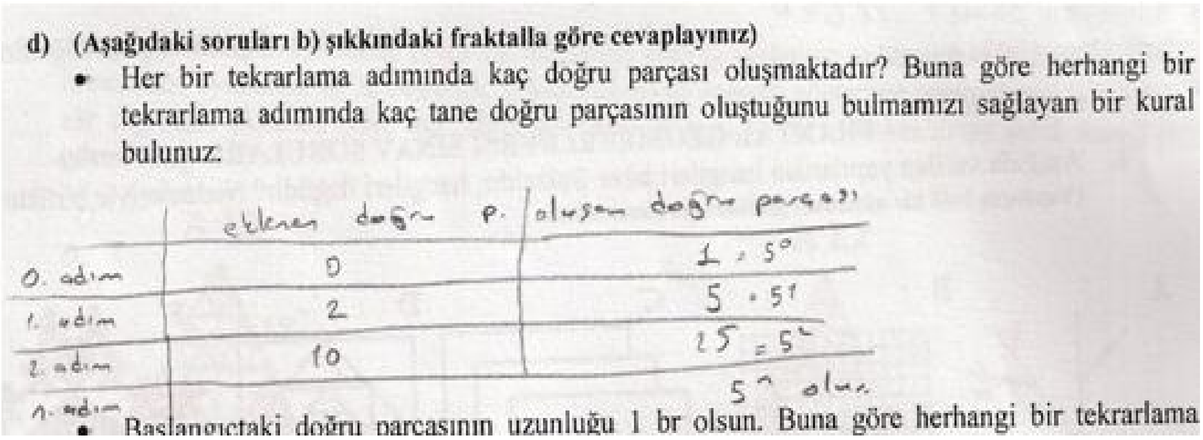
Şekil 3.17. Soru 2'nin d şıkkı

Tablo 3.5. Öğrencilerin fraktal yapılar içerisindeki örüntüleri bulmada ve bu örüntüleri bir kuralla göstermedeki başarıları

2. Soru d şıkkı	İyi		Orta		Zayıf		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
	24	62	2	5	13	33	0	0

Tablo 3.5 öğrencilerin %62'sinin fraktal bir yapı içerisindeki örüntüleri doğru olarak bulabildiğini ve doğru bir kuralla ifade edebildiğini göstermektedir.

Örneğin Ö6'nın b şıkkında oluşturduğu fraktalda toplam doğru parçası sayısı için bulduğu örüntü ve kural aşağıda sunulmuştur.



d) (Aşağıdaki soruları b) şıkkındaki fraktalla göre cevaplayınız)

- Her bir tekrarlama adımında kaç doğru parçası oluşmaktadır? Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında kaç tane doğru parçasının oluştuğunu bulmamızı sağlayan bir kural bulunuz.

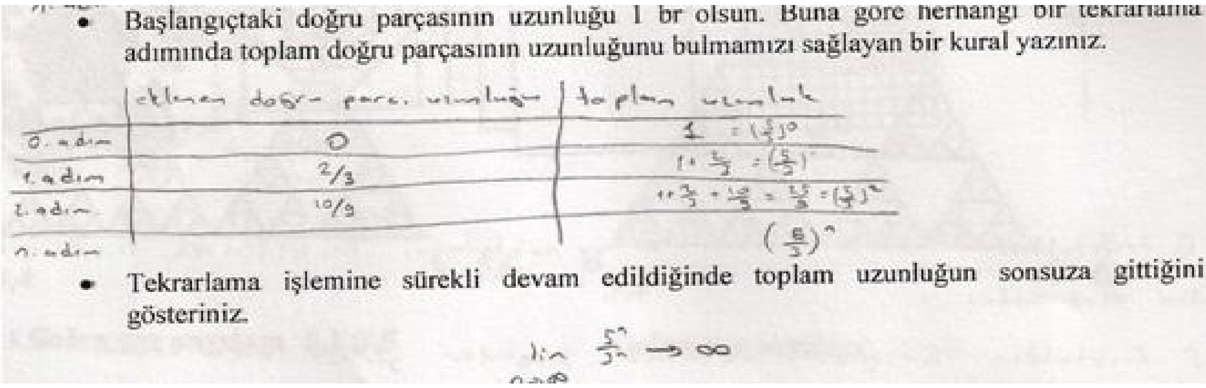
	eklenen doğru p.	oluşan doğru parçası
0. adım	0	$1 = 5^0$
1. adım	2	$5 = 5^1$
2. adım	10	$25 = 5^2$
n. adım		5^n olur

- Başlangıçtaki doğru parçasının uzunluğu 1 br olsun. Buna göre herhangi bir tekrarlama

Şekil 3.18. Ö6'nın çözümü

Bu öğrencinin toplam doğru parçası sayısı için öncelikle her bir tekrarlama adımında eklenen parça sayını bulduğu ve buradan hareketle ise toplam doğru parçası sayısının 5'in kuvvetleri şeklinde arttığını ifade ettiği görülmektedir.

Benzer şekilde Ö6'nın toplam uzunluğu hesaplarken aşağıdaki şekilde bir yol izlediği belirlenmiştir.



- Başlangıçtaki doğru parçasının uzunluğu 1 br olsun. Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında toplam doğru parçasının uzunluğunu bulmamızı sağlayan bir kural yazınız.

	eklenen doğru parç. uzunluğu	toplam uzunluk
0. adım	0	$1 = (\frac{5}{3})^0$
1. adım	$2/3$	$1+\frac{2}{3} = (\frac{5}{3})^1$
2. adım	$10/9$	$1+\frac{2}{3}+\frac{10}{9} = \frac{25}{9} = (\frac{5}{3})^2$
n. adım		$(\frac{5}{3})^n$

- Tekrarlama işlemine sürekli devam edildiğinde toplam uzunluğun sonsuza gittiğini gösteriniz.

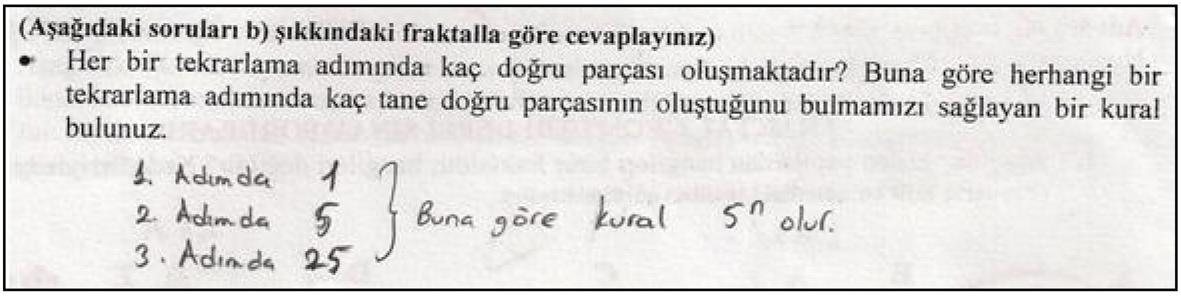
$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{3^n} \to \infty$

Şekil 3.19. Ö6’nın çözümü

Ö6’nın toplam doğru parçası sayısında yaptığı gibi toplam uzunluğu da bulurken eklenen doğru parçalarını göz önüne aldığı ve her bir adımda doğru parçalarının uzunluklarının 1/3 oranında değişmesini kullanarak $(5/3)^n$ şeklinde bir genellemeye ulaştığı belirlenmiştir. Bunun yanında bu ifadenin limit durumunda sonsuza gittiğini belirttiği de görülmektedir. Bu durum öğrencilerin büyük çoğunluğunun verilen fraktallar içersindeki örüntüleri doğru olarak bulabildiklerini ve bunların kurallarını yazabildiklerini göstermektedir.

Tablo 3.5’e göre öğrencilerin %33’ünün bir fraktal şekil içerisindeki örüntüleri belirleyemedikleri ve bu örüntüleri bir kuralla ifade edemedikleri görülmektedir.

Örneğin Ö8’in b şıkkında oluşturduğu fraktal için toplam doğru parçası sayısı için bulmuş olduğu örüntü ve kural aşağıda sunulmuştur.



(Aşağıdaki soruları b) şıkkındaki fraktalla göre cevaplayınız)

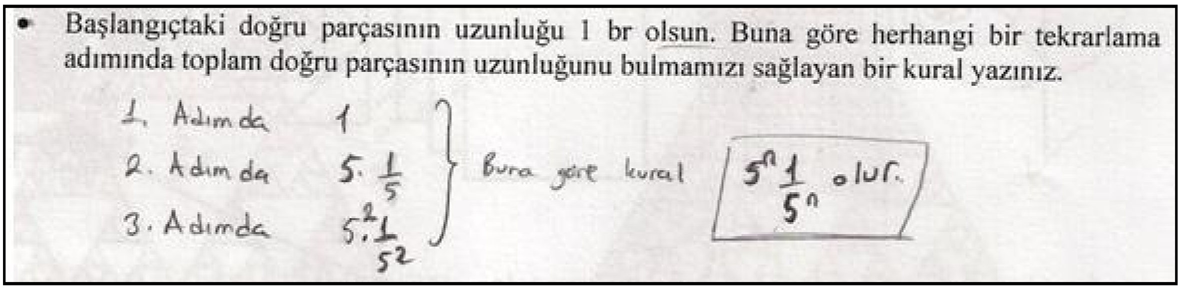
- Her bir tekrarlama adımında kaç doğru parçası oluşmaktadır? Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında kaç tane doğru parçasının oluştuğunu bulmamızı sağlayan bir kural bulunuz.

1. Adımda 1
2. Adımda 5
3. Adımda 25

Buna göre kural 5^n olur.

Şekil 3.20. Ö8’in çözümü

Ö8’in oluşan doğru parçası sayısının her bir tekrarlama adımında 5 ve 5’in kuvvetleri şeklinde arttığını doğru olarak ifade ettiği ve bulduğu örüntüye göre kuralı 5^n şeklinde doğru olarak yazdığı görülmektedir. Ancak toplam uzunluğu bulurken hatalı bir örüntü elde ettiği tespit edilmiştir.


- Başlangıçtaki doğru parçasının uzunluğu 1 br olsun. Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında toplam doğru parçasının uzunluğunu bulmamızı sağlayan bir kural yazınız.

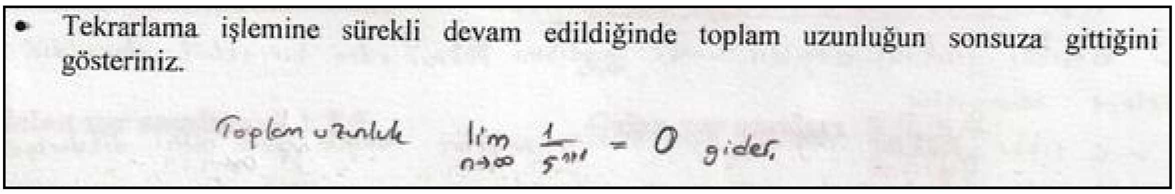
1. Adımda 1
2. Adımda $5.\frac{1}{5}$
3. Adımda $5^2.\frac{1}{5^2}$

Bura göre kural $\boxed{5^n \frac{1}{5^n} \text{ olur.}}$

Şekil 3.21. Ö8'in çözümü

Ö8 üretici adımında toplam 5 yeni doğru parçasının oluşması nedeniyle her bir doğru parçasının uzunluğunun da başlangıç şekline göre 1/5 oranında olduğunu düşünmektedir. Oysa üretici incelendiğinde başlangıç şeklinin 3 eş parçaya bölünerek 2 yeni parçanın eklendiği görülmektedir. Bu hatayı zayıf olarak sınıflandırılan öğrencilerin hemen hemen tamamının yaptığı belirlenmiştir. Bu durumun aynı zamanda öğrencilerin öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranları arasında ilişki kuramadıklarını gösterdiği söylenebilir.

Bunun yanında Ö8'in toplam uzunluğu $5^n.(1/5)^n$ şeklinde bulmasına karşın n, tekrarlama sayısı sonsuza gittiğinde toplam uzunluğun sıfıra gittiğini aşağıdaki şekilde ifade ettiği belirlenmiştir.


- Tekrarlama işlemine sürekli devam edildiğinde toplam uzunluğun sonsuza gittiğini gösteriniz.

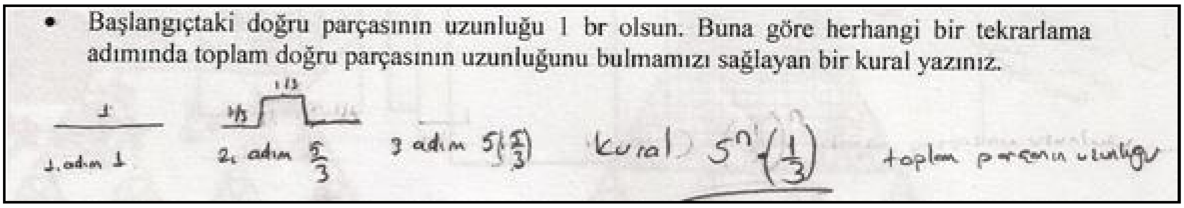
Toplam uzunluk $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^{n+1}} = 0$ gider.

Şekil 3.22. Ö8'in çözümü

Ö8 toplam uzunluğu $5^n.(1/5)^n$ şeklinde bir kuralla göstermesine karşın bu kuralı kullanmamakta ve oluşan doğru parçalarının uzunluklarının değişimine göre limit almakta ve limit değerinin sıfır olduğunu ifade etmektedir. Ö8'in $5^n.(1/5)^n$ ifadesi toplam uzunluğu 1 olarak bulduğunu göstermesine karşın öğrenci bunun farkında değildir.

Tablo 3.5'e göre öğrencilerin %5'inin ise doğru örüntüler bulmalarına karşın bu örüntülerin kurallarını yazarken hata yaptıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö31'in 2. sorunun d şıkkı için doğru bir örüntü başlatmasına karşın örüntünün kuralını yazarken hata yaptığı belirlenmiştir.



Şekil 3.23. Ö31'in çözümü

Ö31 başlangıç şekline göre doğru parçalarının 1/3 oranında küçüldüğünü ve her bir adımda oluşan doğru parçası sayısının ise 5'in kuvvetleri şeklinde değiştiğini bulmasına karşın toplam doğru parçasının uzunluğunu $\frac{5^n}{3}$ şeklinde ifade etmektedir. Yani toplam doğru parçası sayısının 5 ve 5'in kuvvetleri şeklinde değiştiğini belirtmesine karşın her bir tekrarlama adımında oluşan doğru parçalarının uzunluklarının değişmediğini ifade etmektedir.

Özetle, geometrik tekrarlamalar konusunda programın kazanımlarının ne kadar başarılı olduğunun belirlenmesinde öğrencilerin 2. soruya verdikleri yanıtlar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

- Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun verilen bir tekrarlama kuralına göre ekleme/çıkartma ve döndürmeleri kullanarak fraktal yapıları başarılı şekilde oluşturdukları belirlenmiştir. Bu bulgu programın geometrik tekrarlamalar konusunun öğrenilmesine yönelik belirlenen kazanımlarının başarılı olduğunu göstermektedir.
- Öğrencilerin %95 ile en çok üreticisi verilen bir şeklin döndürme ve parça eklemeleri kullanarak bir sonraki adımdaki şeklini çizmede başarı gösterdikleri tespit edilmiştir.
- Üreticisi verilen bir şeklin döndürme ve parça eklemeleri kullanarak bir sonraki adımdaki şeklini çizmede öğrencilerin, sözel tekrarlama kurallarına göre parça

ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmeye göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

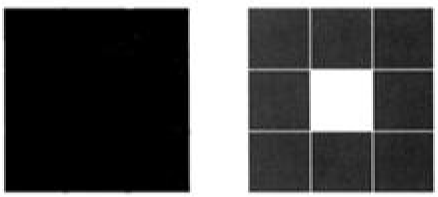
- Öğrencilerin %65 ile en az üreticisi verilen bir fraktal yapının kuralını ifade etmede başarı gösterdikleri belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin geometrik olarak verilen üreticiye göre fraktalın bir sonraki tekrarlama adımındaki şeklini doğru olarak çizmelerine karşın üreticinin kuralını sözel olarak tam ifade edemediklerini göstermektedir.
- Bazı öğrencilerin (%13) parça ekleme/çıkartma ve bazılarının (%5) ise döndürmeleri kullanarak fraktalları çizmede başarılı olamadıkları belirlenmiştir. Bunun bir nedeni öğrencilerin verilen tekrarlama kuralına çok fazla dikkat etmeyerek önceden öğrendikleri fraktalların şekillerini çizmeye çalışmalarıdır. Diğer bir nedeni ise tekrarlama kuralının her bir parçada (çıkarılan parçalar dahil) uygulanmasının zorunlu olduğu yönündeki inançlarıdır.
- Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun (%62) sınavda verilen fraktal yapı içerisindeki örüntüleri doğru olarak buldukları ve doğru kurallarla ifade ettikleri bulgusu elde edilmiştir. Bu durum programın geometrik tekrarlamalarla ilgili kazanımlarının başarılı olduğunu göstermektedir.
- Buna karşın bazı öğrencilerin (%33) örüntüleri belirlemede güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Bunun nedenlerinden biri öğrencilerin öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranları arasında ilişki kuramamalarıdır. Bu öğrencilerin sınavda sorulan soruda oluşan doğru parçası sayısı ile bu doğru parçalarının büyüme oranlarını karıştırdıkları belirlenmiştir.
- Birkaç öğrencinin (%5) ise sınavda sorulan soruda doğru örüntüler belirlemelerine karşın bu örüntülerin kuralını yazarken hata yaptıkları tespit edilmiştir.

3.1.1.3. Fraktalların Çevresi, Alanı ve Hacmi Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular

Öğrencilere sınavda sorulan 3. soru başlangıç ve üreticisi verilen Sierpinski halısı fraktalının çevresi ve alanını hesaplamalarına yöneliktir. Bu soru ile fraktal geometri öğretim programında geometrik seri kavramını kullanarak fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplar kazanımının öğrenciler tarafından ne kadar kazanıldığı belirlenmeye çalışılmıştır. Elde edilen bulgular aşağıdaki aşamalardan geçilerek sunulmuştur. Öncelikle öğrencilerin sınav sorularına verdiği cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. Bu kategorilerin belirlenmesinde fraktal konularının öğrenilebilirlik göstergeleriyle öğrencilerin 3. soruda alan ve çevreye yönelik verdikleri cevapların ve açıklamaların doğruluğu temel alınmıştır. 3. soruda çevre ve alanın hesaplanmasında tam ve doğru bir örüntü bulan, bu örüntüleri bir seri ile tam ve doğru olarak ifade eden ve elde ettiği serilerin toplamını tam ve doğru olarak hesaplayan öğrenciler iyi; çevre ve alan hesaplamada doğru örüntüler bulan, ancak bu örüntüleri bir seri ile ifade ederken küçük hatalar yapan ve bulduğu serileri hesaplamada eksiklikleri bulunan öğrencileri orta; çevre ve alan için bir örüntü bulamayan ya da tamamen yanlış bir örüntü bulan ve bu örüntüyü bir seri ile ifade edemeyen öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Daha sonra sınav sorularına verdikleri cevaplardan ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuş ve bir sonuç paragrafına göre programın geometrik seri kavramını kullanarak fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplar kazanımın öğrenciler tarafından ne kadar kazanıldığına yönelik bulgular özetlenmiştir.

Soru içeriği Şekil 3.24’de ve öğrencilerin fraktalların çevresi, alanını bulmadaki başarıları Tablo3.6’da sırasıyla sunulmuştur.

3. Aşağıda Sierpinski halısının başlangıç ve üretici şekilleri görülmektedir. Bu fraktalın **sonsuz** tekrarlama sonucunda oluşan **alanı ve çevresini** hesaplayınız.**(Karenin bir kenar uzunluğunu 1 br olarak alınız)**



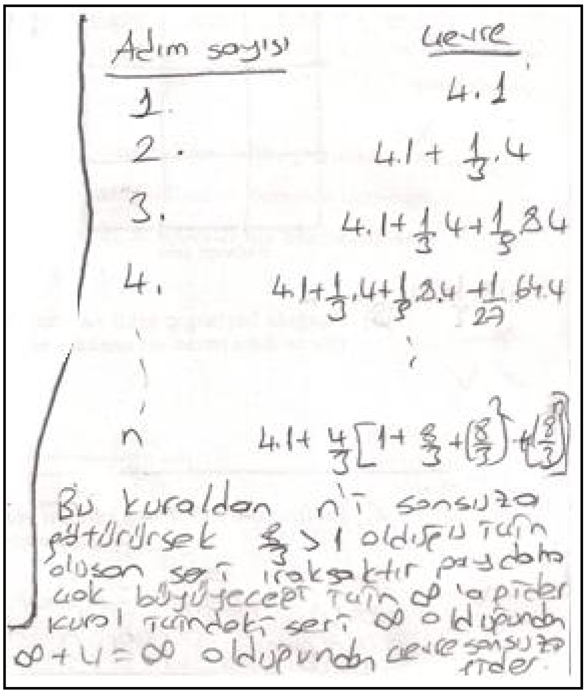
Şekil 3.24. Soru 3

Tablo 3.6. Öğrencilerin sınavda sorulan 3. soruya göre fraktalın çevresi ve alanını hesaplamadaki başarıları

	İyi		**Orta**		**Zayıf**		**Boş**	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Çevre	8	21	13	33	17	43	1	3
Alan	22	56	5	13	11	28	1	3

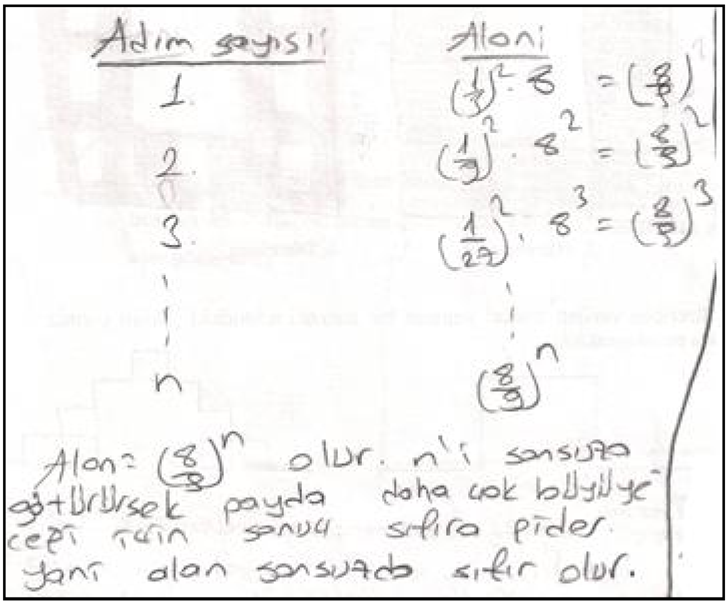
Tablo3.6'ya göre öğrencilerin %56'sının 3. soruda verilen fraktalın alanını tam ve doğru olarak hesapladıkları görülmektedir. Buna karşın öğrencilerin %21'inin ise aynı fraktalın çevresini tam ve doğru olarak hesapladıkları belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin verilen fraktalın alanını çevresine göre daha başarılı şekilde hesapladıklarını göstermektedir. Bunun nedeni öğrencilerin fraktalın çevresini hesaplarken alana göre daha fazla işlem yapmaları olabilir. Çünkü öğrenciler çevreyi hesaplarken her bir tekrarlama adımında oluşan yeni parçaların sayısını, bu parçaların uzunluklarını ve toplam uzunlukları göz önüne alarak bir geometrik seri ile bunları ifade etmekte ve bu serinin toplamını bulmaktadırlar. Oysa alanı hesaplarken ya çıkarılan alanlar üzerinden toplam alanı hesaplamaktalar ki bu yolu öğrencilerin çok fazla tercih etmedikleri belirlenmiştir, ya da her bir adımda oluşan karelerin alanları toplamına göre toplam alanı limit yardımıyla hesaplamaktadırlar.

Örneğin Ö16'nın 3. soruda verilen fraktalın çevresini hesaplarken her bir tekrarlama adımında çıkarılan parçaların oluşturduğu kenarlara göre bir örüntü bulduğu belirlenmiştir.



Şekil 3.25. Ö16'nın çözümü

Ö16'nın ilk adımda çevreyi 4, bir sonraki tekrarlama adımında çevreyi ortadan çıkarılan parçayı da göz önüne alarak 4+4.(1/3) ve bu şekilde devam ederek çıkarılan parça sayısına göre herhangi bir adım için çevreyi $4 + \frac{4}{3}\left[1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \cdots\right]$ şeklinde bir geometrik seri ile belirlediği görülmektedir. Ayrıca $\frac{8}{3} > 1$ olması nedeniyle serinin toplamının sonsuz yani ıraksak olacağını, yani çevrenin sonsuza gideceğini belirlediği görülmektedir. Aynı öğrencinin verilen fraktalın alanı için yaptığı işlemler aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.26. Ö16’nın çözümü

Ö16’nın verilen fraktalın alanını hesaplarken her bir tekrarlama adımında yeni oluşan karelerin alanlarını kullanarak doğru bir örüntü belirlediği tespit edilmiştir. Bu öğrenci başlangıçtaki karenin alanını 1 br^2 olarak almakta ve 1. tekrarlama sonucunda kenar uzunlukları 1/3 olan 8 kare için toplam alanı hesaplayarak 8/9 yazmaktadır. Benzer şekilde bir sonraki tekrarlama adımında ise kenar uzunlukları 1/9 olan 64 kare için alanı hesaplayarak herhangi bir adım için karenin alanının $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ kuralıyla değiştiğini ifade etmektedir. n, tekrarlama sayısının sonsuza gitmesi durumunda paydanın paya göre daha fazla büyümesi nedeniyle bu oranın sıfıra gideceğini yani toplam alanın sıfır olacağını belirttiği görülmektedir.

Tablo 3.6 incelendiğinde verilen fraktalın çevresini hesaplamada öğrencilerin % 33’ünün orta düzeyde, %43’ünün ise zayıf düzeyde oldukları görülmektedir. Benzer şekilde verilen fraktalın alanını hesaplamada ise öğrencilerin %13’ünün orta düzeyde ve % 28’inin ise zayıf düzeyde oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin yazılı sınavlarına verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular onların verilen fraktalın çevresini ve alanını hesaplamada aşağıdaki Tablo 3.7’de belirtilen güçlüklerle karşılaştıklarını göstermektedir.

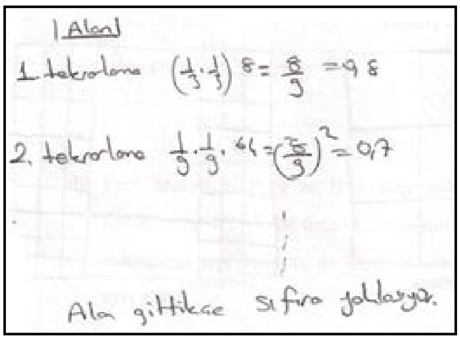
Tablo 3.7. Öğrencilerin verilen fraktalın çevresi ve alanını hesaplarken karşılaştığı güçlükler

Karşılaşılan güçlükler	ALAN	N	%	ÇEVRE	N	%
Örüntü bulma	Bir örüntünün başlatılması, ancak örüntünün kuralının yazılamaması	7	18	Bir örüntünün başlatılması, ancak örüntünün kuralının yazılamaması	9	23
	Bir örüntünün başlatılması ancak hatalı/eksik bir kuralın yazılması	5	13	Bir örüntünün başlatılması ancak eksik/hatalı bir kuralın yazılması	17	43
Geometrik serilerle işlemler	Geometrik serinin toplamının hatalı bulunması	2	5	Geometrik serinin toplamının hatalı bulunması	4	10

Tablo 3.7'ye göre öğrencilerin daha çok verilen fraktalın çevresi ve alanını hesaplamasını sağlayan örüntüleri bulmada güçlük yaşadıkları görülmektedir. Bunun yanında bazı öğrencilerin ise geometrik serilerde işlem yapmada problem yaşadıkları belirlenmiştir.

Tablo 3.7'ye göre öğrencilerin %18'inin verilen fraktalın alanını hesaplamada bir örüntü başlattıkları, ancak örüntünün kuralının yazamadıkları görülmektedir.

Örneğin Ö2'nin verilen fraktalın alanı için yaptığı işlemler aşağıda sunulmuştur.

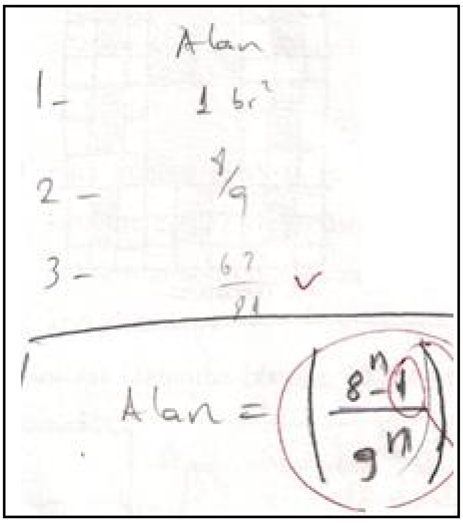


Şekil 3.27. Ö2'nin çözümü

Bu öğrencinin ilk iki tekrarlama için alanı doğru hesapladığı, ancak bir kural bulamadığı görülmektedir. Buna karşın alanın giderek sıfıra yaklaştığını ifade ettiği belirlenmiştir. Öğrenci sezgisel olarak karenin içerisinden sürekli parçalar çıkarılmasının alanı sıfıra götüreceğini tahmin etmekte, ancak matematiksel işlemlerle bu durumu gösterememektedir.

Öğrencilerin %13'ünün ise verilen fraktalın alanını hesaplamada bir örüntü oluşturdukları, ancak örüntünün kuralını eksik ya da hatalı olarak yazdıkları belirlenmiştir.

Örneğin, Ö26'nın verilen fraktalın alanı için bulduğu hatalı örüntü aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.28. Ö26'nın çözümü

Bu öğrencinin başlangıçtaki karenin alanını 1 br^2 olarak kabul ettiği ve 1. tekrarlama sonucunda kenar uzunlukları 1/3 olan 8 kare oluşması nedeniyle alanın 8/9 olduğunu bulduğu görülmektedir. Bir sonraki tekrarlamada ise oluşan karelerin kenar uzunluklarını 1/9 olarak doğru bulmasına karşın oluşan kare sayısını 63 olarak ifade etmektedir. Bu iki tekrarlamaya göre n. adımdaki toplam alan için ise $\frac{8^n-1}{9^n}$ şeklinde yanlış bir genellemeye ulaştığı görülmektedir.

Benzer şekilde Ö38'in verilen fraktalın alanıyla ilgili sınav kâğıdına yazdığı işlemler aşağıda sunulmuştur.

$$\text{Toplam alan} = 1 - \left(\frac{1}{3^2} + 8 \cdot \frac{1}{9^2} + 8 \cdot \frac{1}{27^2} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{9} + \left(8 \cdot \frac{1}{3^4} + 8 \cdot \frac{1}{3^6} + 8 \cdot \frac{1}{3^8} + \cdots\right)$$

$$= \frac{8}{9} - 8 \cdot \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \frac{8}{9} - \frac{8}{3^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = \frac{8}{9} - \frac{8}{3^4} \cdot \frac{3^2}{8} = \frac{8}{9} - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Şekil 3.29. Ö38’in çözümü

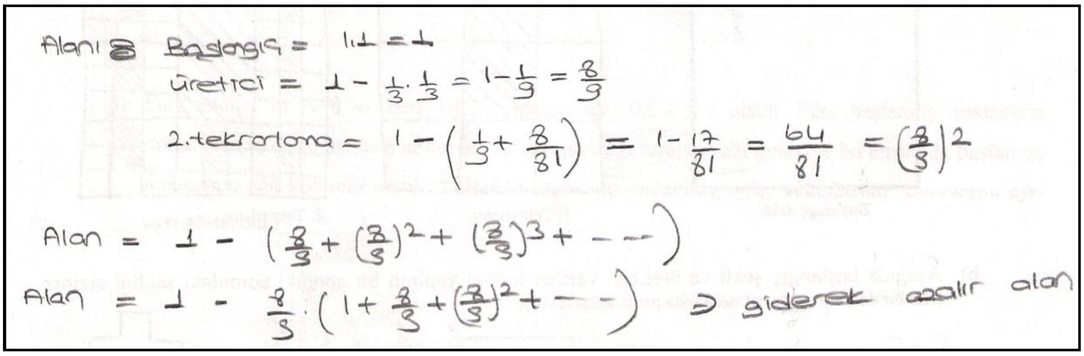
Bu öğrencinin toplam alanı bulurken başlangıçtaki karenin alanını 1 br^2 olarak kabul ettiği ve her bir adımda çıkarılan karelerin alanlarına göre toplam alanı bulmaya çalıştığı görülmektedir. Ö38 ile yapılan klinik mülakatta bu düşüncesini aşağıdaki gibi ifade etmektedir.

> A: Alanı nasıl buldun?
> Ö38: Toplam alan başta 1, ortadaki parçayı yani 1/9 luk parçayı çıkardık, sonra diğerlerinden 8 tane kare çıkarıyoruz bu nedenle alan $8.(1/9)^2$ oldu. Oluşan diğer karelerden de yine kareler çıkarıyoruz, bu böyle devam ediyor. Ama sanırım serinin formülünü yazmada hata yaptım. Bu nedenle sonucu yanlış buldum sanırım.
> A: Sonucu yanlış bulduğunu niçin düşünüyorsun?
> Ö38: Sonuçta her seferinde kareler çıkarıyoruz içinden. Sonsuz durumda içeride alan kalmayacağından alan sıfır olmalı ama ben 7/9 bulmuşum.

Ö38’in bu açıklaması sezgisel olarak alanın sıfır olacağını fark ettiğini ancak, matematiksel olarak alanın sıfıra gittiğini bulamadığını göstermektedir. Ö38 çıkarılan alanları kullanarak bir geometrik seri bulmaya çalışmaktadır. Ancak bulduğu seride çıkarılan kare sayılarını yazarken hata yapmaktadır. Çünkü Ö38, 2. tekrarlama adımından itibaren her seferinde 8 karenin çıkarıldığını düşünmektedir, ancak her tekrarlama adımında 8 ve 8’in katları şeklinde karenin çıkarıldığı görülmektedir. Bu durum hatalı bir seri oluşturmasına neden olmaktadır.

Öğrencilerin %5’inin geometrik serilerde yaptıkları hatalar nedeniyle verilen fraktalın alanını yanlış hesapladıkları ya da hesaplayamadıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö15’in verilen fraktalın alanıyla ilgili sınav kağıdında yaptığı işlemler aşağıda sunulmuştur.



Alanı: Başlangıç = $1.1 = 1$

üretici = $1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

2.tekrarlama = $1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{81}\right) = 1 - \frac{17}{81} = \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$

Alan = $1 - \left(\frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \cdots\right)$

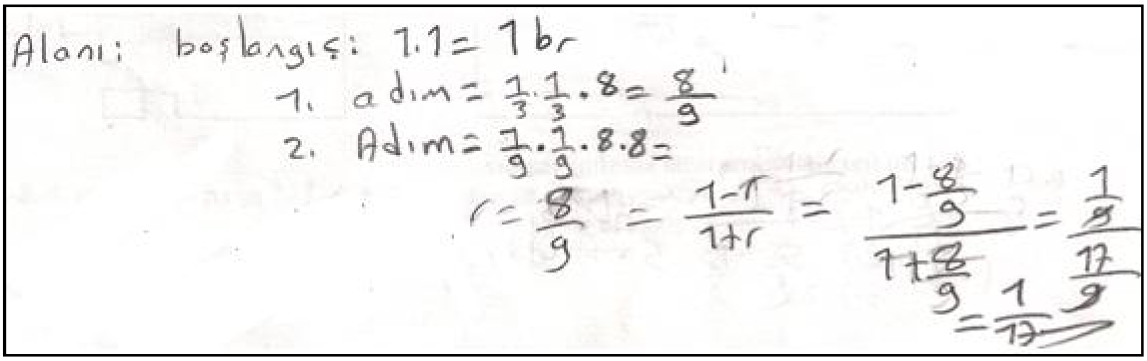
Alan = $1 - \frac{8}{9}\cdot\left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \cdots\right)$ ⇒ giderek azalır alan

Şekil 3.30. Ö15’in çözümü

Bu öğrencinin başlangıç ve üretici adımları için verilen fraktalın alanını doğru olarak hesapladığı ve alanın 8/9’un kuvvetleri şeklinde değiştiğini gördüğü belirlenmiştir. Ö15 başlangıç adımında alanı 1 br^2 olarak almaktadır. Üretici adımında ise merkezden çıkarılan karenin bir kenarı 1/3 olmak üzere alanı $1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ olarak bulmaktadır. Bulduğu bu alan üretici adımındaki toplam alandır. Bir sonraki tekrarlama adımında ise toplam alanı $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ olarak ifade etmektedir. Ancak bu öğrencinin her bir adımda bulduğu toplam alanları çıkarılan karelerin alanları olarak düşündüğü ve başlangıçtaki karenin alanından bu alanların toplamını çıkardığında toplam alanı bulduğu şeklindeki düşüncesi $1 - \left(\frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \cdots\right)$ ifadesinden anlaşılmaktadır. Öğrenci bu aşamaya kadar doğru bir düşünceye sahip olmasına karşın toplam alanı bulmada elde ettiği örüntüyü bir geometrik seriyle ifade ederek hata yapmaktadır. Ancak bu serinin toplamını bulamamakta ve sezgisel olarak serinin giderek azaldığını belirtmektedir.

Bunun dışında 3 öğrencinin ise verilen fraktalın alanını hesaplarken doğru örüntü ve kurallar buldukları, ancak buldukları bu kuralları bir geometrik seriye çevirmeye çalışarak hata yaptıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö29’un verilen fraktalın alanını hesaplarken sınav kağıdına yazdığı işlemleri aşağıda sunulmuştur.



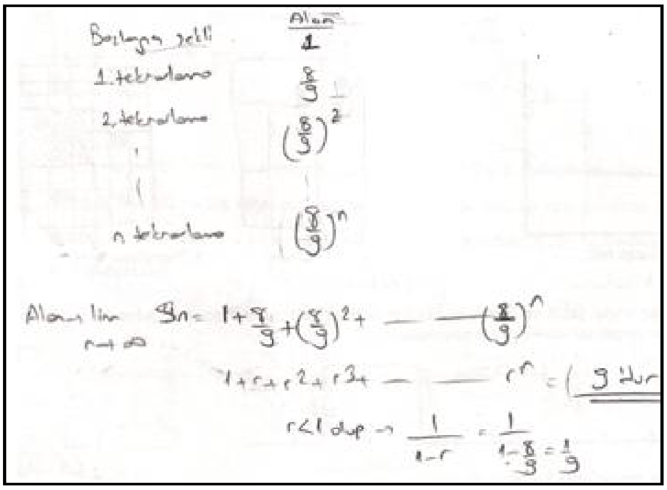
Şekil 3.31. Ö29’un çözümü

Ö29’un alan için doğru bir örüntü başlatmasına karşın örüntünün kuralını yazamadığı ve bir geometrik seri kuramadığı görülmektedir. Ancak $r = \frac{8}{9} = \frac{1-r}{1+r}$ ifadesi geometrik serileri kullanmayı düşündüğünü göstermektedir. Bu öğrenciyle yapılan klinik mülakatta öğrencinin alanın hesaplanması için mutlaka bir geometrik seri bulması gerektiği şeklinde bir düşünceye sahip olduğu belirlenmiştir.

> A: r=8/9 yazmaktasın. Bu ifade de r ile neyi gösteriyorsun?
> Ö29: Ben bu sorunun serilerden çözüleceğini düşündüm. Çünkü arkadaşlarımla da bu konuda çalışırken genelde serilerle bu soruları çözüyorduk. Bu nedenle serilerle çözebilirim diye düşündüm. O nedenle r’yi yazdım.
> A: Sınav kağıdına yazdığın ifade bir seri gösteriyor mu?
> Ö29: Yok böyle yazarsam olmaz, bunları toplamam gerekirdi. Sınav kağıdında yazmamışım ama bakarsak bu seride r=8/9 olduğu görülüyor. Her seferinde bu ifadenin kuvvetleri giderek küçüldüğünden seri sıfıra gitmektedir. Ama ben 1/17 bulmuşum. Hata yaptım sanırım.

Ö29 fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplarken genellikle geometrik serilerin kullanılması nedeniyle bir geometrik seri aradığını ifade etmektedir. Her ne kadar seriyi yazamasa da serinin ortak oranının 8/9 olduğunu düşünmektedir. Bu öğrencide fraktalların çevresi ve alanı hesaplanırken mutlaka bir geometrik serinin bulunması yönünde oluşan bu inanç onun aslında her adımda toplam alanı bulduğu gerçeğini görmesini engellemektedir. Bunun yanında serinin ortak oranının kuvvetlerinin giderek küçülmesi nedeniyle serinin toplamının sıfır olacağı şeklindeki düşüncesi aynı zamanda bu öğrencinin geometrik serilerde yanlış anlamalarının bulunduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde Ö3’ün verilen fraktalın alanını hesaplamaya yönelik yaptığı işlemler aşağıda sunulmuştur.

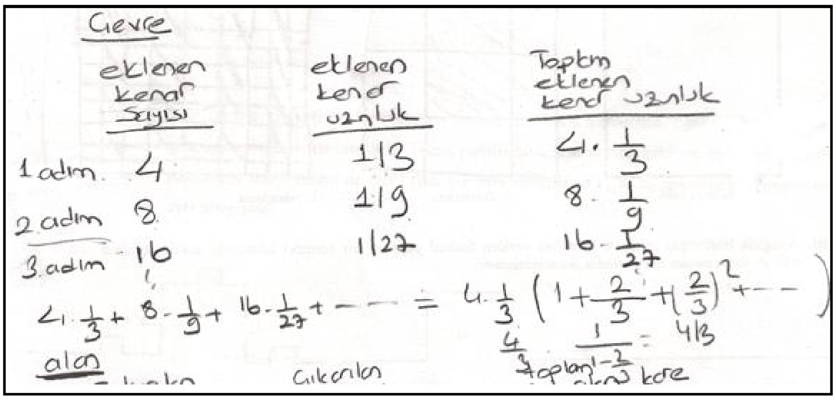


Şekil 3.32. Ö3’ün çözümü

Bu öğrenci de Ö29’da olduğu gibi her bir adım için toplam alanı bulmakta ancak, bir geometrik seri bulması gerektiği yönündeki düşüncesi her adım için elde ettiği bu alanları toplayarak bir geometrik seri oluşturmasına neden olmaktadır. Ö3, Ö29’dan farklı olarak seriyi yazmakta, r=8/9 ortak oranının 1 den küçük olması nedeniyle serinin yakınsak olduğunu ifade etmekte ve serinin toplamını $\frac{1}{1-r}$ den 9 olarak bulmaktadır.

Tablo 3.7’ye göre verilen fraktalın çevresinin hesaplanmasında öğrencilerin %43’ünün bir örüntü başlattıkları ancak hatalı ya da eksik kuralla bunu gösterdikleri belirlenmiştir.

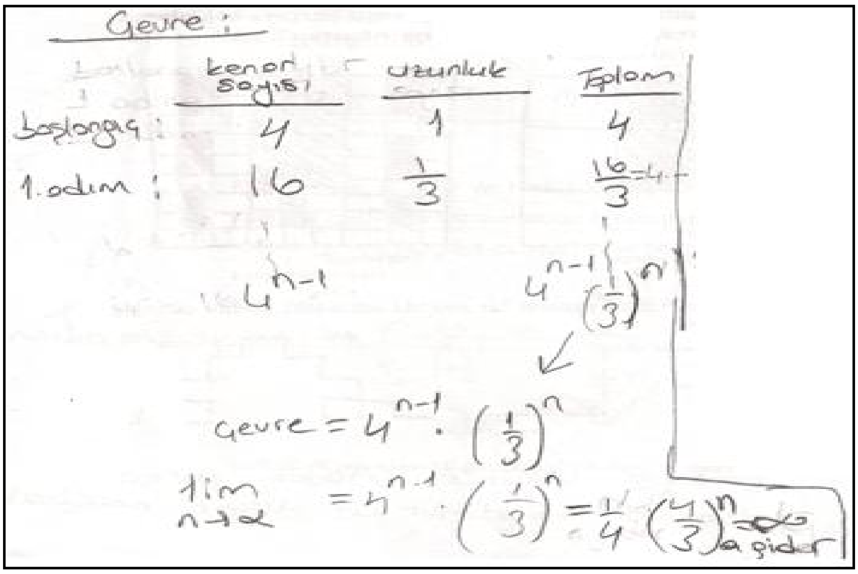
Örneğin Ö28’in verilen fraktalın çevresini hesaplarken sınav kağıdına yazdığı çözüm aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.33. Ö28’in çözümü

Ö28'in eklenen kenar sayısı için 1. tekrarlamada 4, 2. tekrarlamada 8, 3. tekrarlamada ise 16 olarak 2'nin kuvvetleri şeklinde bir örüntü bulmaya çalıştığı görülmektedir. Ancak fraktalın oluşum aşamaları dikkate alındığında 1. tekrarlamada 1/3 uzunluklu 4 parçanın 2. tekrarlamada ise 1/9 uzunluklu 32 parçanın eklendiği görülmektedir. Bu durum öğrencinin hatalı bir örüntü başlattığını ve bu hatalı örüntüye göre de yanlış bir geometrik seri oluşturduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde Ö34'ün verilen fraktalın çevresini hesaplamasına yönelik yaptığı işlemler aşağıda sunulmuştur.

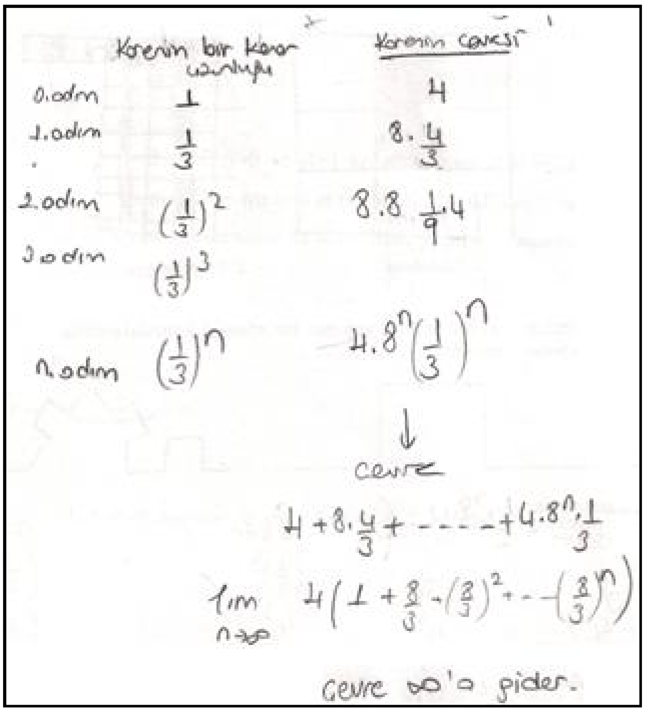


Şekil 3.34. Ö34'ün çözümü

Ö34'ün de Ö28'e benzer şekilde kenar sayısı ve kenar uzunluklarını kullanarak hatalı bir örüntü elde ettiği belirlenmiştir. Çünkü bu öğrenci kenar sayısının 4 ve 4'ün kuvvetleriyle değiştiğini düşünmektedir. İlk iki tekrarlama adımı için bu geçerli olmasına karşın 3. tekrarlamada 1/9 uzunluklu toplam 80 kenarın olması gerekirken bu öğrenci 64 kenarın olması gerektiğini düşünmektedir. Bu durum öğrencinin $(4/3)^n$ şeklinde yanlış bir genellemeye ulaşmasına neden olmaktadır.

Bunun yanında bazı öğrencilerin her bir tekrarlama adımında oluşan kareleri birbirlerinden ayrık olarak düşündüğü ve buna göre çevreyi hesaplamaya çalıştığı belirlenmiştir.

Örneğin Ö11’in verilen fraktalın çevresini hesaplarken yapmış olduğu işlemler aşağıda sunulmuştur.



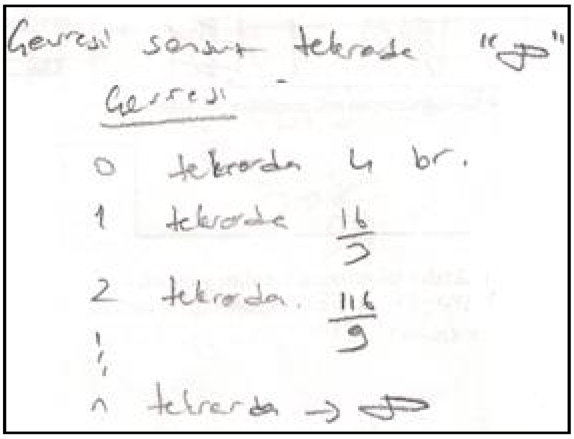
Şekil 3.35. Ö11’in çözümü

Bu öğrencinin çevreyi hesaplarken ortadan çıkarılan kareden sonra geride kalan kareleri ayrık düşündüğü ve her birinin çevresini hesaplayarak bir örüntü bulmaya çalıştığı görülmektedir. Oysa geride kalan bölge 8 kareden oluşmasına karşın kareler ayrık değildir. Bu nedenle bu öğrencinin bulduğu örüntü ve yazdığı kural hatalıdır. Yapılan klinik mülakatta Ö11’in örüntüyü nasıl oluşturduğuna yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Çevreyi hesaplarken 8.(4/3) değerini nasıl buldun?
Ö11: Kurala bakarsak ortadaki kareyi çıkarıyorduk. Geride 8 kare kaldı. Her bir karenin bir kenar uzunluğu 1/3 ve 4 kenarı olduğundan 4.(1/3) yazdım. Burada 8 kare olduğundan 8.(4/3) olarak buldum.

Tablo 3.7 ‘ye göre öğrencilerin %23’ünün verilen fraktalın çevresini hesaplarken bir örüntü başlattıkları ancak bu örüntünün kuralını yazamadıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö13’ün verilen fraktalın çevresini hesaplarken sınav kağıdına yazdığı çözüm aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.36. Ö13'ün çözümü

Ö13'ün ilk iki tekrarlama sonucunda çevreyi hesaplayabildiği, ancak sonraki adımlar için bir kural bulamadığı belirlenmiştir. Bu öğrenci ile yapılan klinik mülakatta da öğrencinin çevre için bir kural bulamadığını ifade ettiği belirlenmiştir.

A: Bu fraktalı çevresini nasıl hesapladın?
Ö13: İlk başta çevre 4 tü. Sonra ben şöyle düşündüm. Böldüğümüzde bir kenarı 1/3 oldu 4 kenarı olduğundan 4/3 olur, içeriden çıkarılan karenin. Bu adımda toplam çevre 4+4/3 den 16/3 olur. Bir sonraki adımda 8 kareyi çıkarıyoruz her birinin bir kenarı 1/9 olduğundan toplam çevre 4+16/3+(4/9).8 olur. Yani işlemi yaparsam 116/9 olur. Ama bundan sonra bir kural bulamadım.

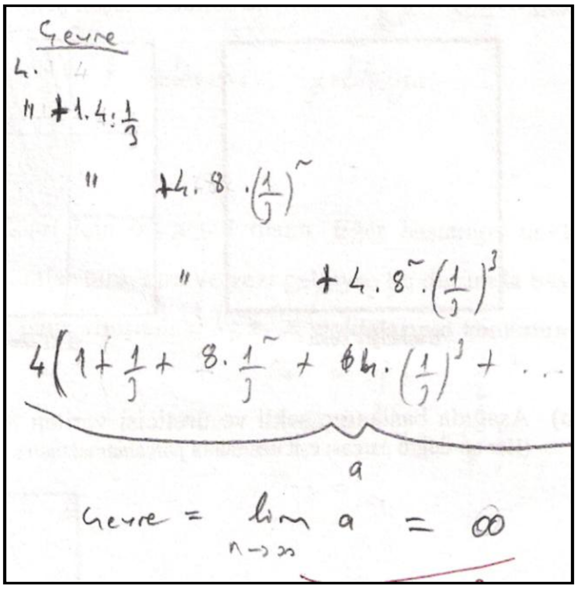
Bunun yanında klinik mülakatta bu öğrenciye çevrenin niçin sonsuza gittiğini açıklaması sorulmuştur.

A: Elde ettiğin bu değerlere göre çevrenin sonsuza gittiğine nasıl karar verdin?
Ö13: Payı paydasından büyük olur, yine limite göre bakarsak sonsuz olur diye düşündüm.
A: Ama bir kural bulamamışsın. Bir sonraki adımda payın paydadan daha büyük olacağını nereden biliyorsun?
Ö13: Evet haklısınız, bilemiyorum, ama sadece öyle olur diye düşündüm. Sonuçta hep uzunluk ekleniyor.

Ö13'ün bu açıklamaları matematiksel olmasa da verilen fraktalın çevresinin sonsuza gittiğini sezgisel olarak fark ettiğini göstermektedir.

Tablo 3.7'ye göre öğrencilerin %10'unun verilen fraktalın çevresini hesaplarken oluşturdukları geometrik serilerle işlem yapmada güçlükler karşılaştıkları belirlenmiştir.

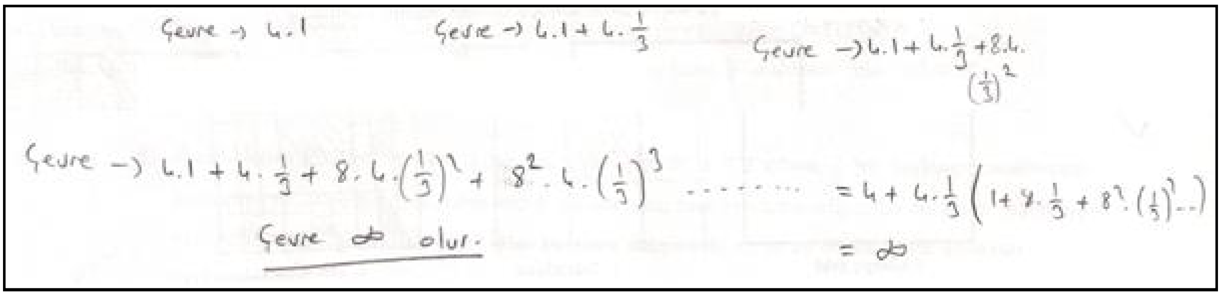
Örneğin Ö7'nin verilen fraktalın çevresini hesaplarken yapmış olduğu işlemler aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.37. Ö7'in çözümü

Ö7'nin her bir tekrarlama adımında oluşan çevre için bir örüntü bulduğu ve bu örüntüyü bir geometrik seri ile ifade ettiği belirlenmiştir. Ancak Ö7'nin çevreyi bu geometrik seriye göre hesaplarken seri toplamı ve serinin yakınsak olup olmadığını göz önüne almadan doğrudan çevrenin sonsuza gittiğini yazdığı tespit edilmiştir.

Benzer şekilde Ö21'in de verilen fraktalın çevresini hesaplarken bir geometrik seri bulduğu ancak serinin toplamını hesaplamada bir güçlükle karşılaştığı belirlenmiştir.



Şekil 3.38. Ö21'in çözümü

Ö21'in de Ö7 gibi verilen fraktalın çevresini hesaplarken doğru bir geometrik seri bulduğu ancak bu serinin toplamını hesaplarken serinin ıraksak olup olmadığına bakmadan toplamının sonsuz olduğunu belirttiği görülmektedir. Ö21 ile yapılan klinik mülakatta bu öğrencinin geometrik serilerin toplamıyla ilgili bilgilerinde eksikliklerin olduğu belirlenmiştir.

A: Çevreyi hesaplarken bir seri bulmuşsun. Bu seri nasıl bir seridir?
Ö21: Artan bir seridir.
A: Serinin toplamının sonsuz olduğuna nasıl karar veriyorsun?
Ö21: Burada 8/3, $(8/3)^2$, … şeklinde gittiğinden bunların toplamı sonsuza gider gibi geldi bana.
A: Niçin?
Ö21: Yani sürekli büyüyen sayıların toplamı sonsuza gider bu nedenle sonsuz olur dedim.

Ö21'in bulduğu serinin türünü tam olarak bilmediği "artan bir seridir" şeklindeki açıklamasından görülmektedir. Bunun yanında bu serinin ıraksak olduğuna serinin ortak oranına bakarak karar verdiği "Burada 8/3, $(8/3)^2$, … şeklinde gittiğinden bunların toplamı sonsuza gider " şeklindeki açıklamalarından tespit edilmiştir. Bu durum bu öğrencinin farkında olmasa da geometrik seri kavramını kullandığını göstermektedir.

Özetle, programın fraktalların çevresi, alanı ve hacmi konusunun öğrenilmesindeki yeterliğini belirlemeye yönelik sınavın 3. sorusuna verilen yanıtlar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

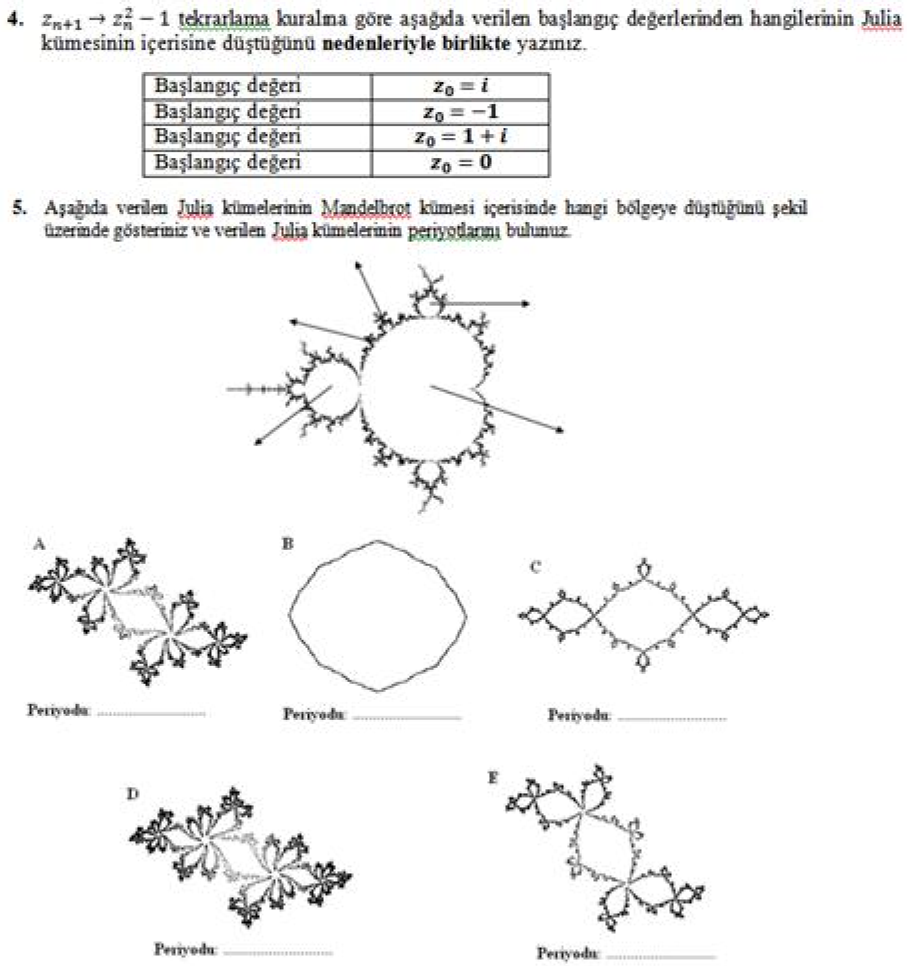
- Öğrencilerin sınavın 3. sorusunda verilen fraktalın alanını hesaplamada (%56) çevresini hesaplamadan (%21) daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Bunun nedeni öğrencilerin fraktalın çevresini hesaplarken alana göre daha fazla işlem yapmaları olabilir. Çünkü öğrenciler çevreyi hesaplarken her bir tekrarlama adımında oluşan yeni parçaların sayısını, bu parçaların uzunluklarını ve toplam uzunlukları göz önüne alarak bir geometrik seri ile bunları ifade etmekte ve bu serinin toplamını bulmaktadırlar. Oysa alanı hesaplarken ya çıkarılan alanlar üzerinden toplam alanı hesaplamaktalar ki bu yolu öğrencilerin çok fazla tercih etmedikleri belirlenmiştir, ya da her bir adımda oluşan karelerin alanları toplamına göre toplam alanı limit yardımıyla hesaplamaktadırlar.
- Öğrencilerin verilen fraktalın çevresi ve alanını hesaplamada en çok çevre ve alanı hesaplamaya yardımcı olan örüntüleri bulmada güçlük yaşadıkları belirlenmiştir.

- Öğrencilerin verilen fraktalın alanıyla ilgili örüntüleri bulmada en çok %18 ile örüntünün kuralını yazmada sorun yaşadıkları ve bir örüntü başlatmalarına karşın bu örüntüye uygun bir kural yazamadıkları belirlenmiştir.
- Bunun yanında öğrencilerin %13'ünün ise verilen fraktalın alanı için bir örüntü başlatmalarına karşın örüntünün kuralını hatalı/eksik olarak yazdıkları tespit edilmiştir.
- Öğrencilerin %5'inin verilen fraktalın alanını hesaplamada geometrik serilerle işlem yaparken güçlük yaşadığı belirlenmiştir.
- Öğrencilerin verilen fraktalın çevresiyle ilgili örüntüleri bulmada en çok %43 ile örüntünün kuralını yazmada sorun yaşadıkları ve bir örüntü başlatmalarına karşın hatalı bir kural yazdıkları belirlenmiştir.
- Öğrencilerin %23'ünün verilen fraktalın çevresiyle ilgili bir örüntü başlatmasına karşın bu örüntüye uygun bir kural yazamadıkları belirlenmiştir.
- Öğrencilerin %10'unun verilen fraktalın çevresini hesaplamada geometrik serilerle işlem yaparken güçlük yaşadıkları belirlenmiştir.
- Çevre ve alanı matematiksel olarak hesaplamada sorunla karşılaşan öğrencilerin çoğunun sezgisel olarak verilen fraktalın çevresinin sonsuza ancak alanının sıfıra gittiğini doğru tahmin ettikleri tespit edilmiştir.
- Öğrencilerin bazılarında fraktalların çevresi ve alanı hesaplanırken mutlaka bir geometrik serinin bulunması gerektiği şeklinde yanlış bir inanışın oluştuğu belirlenmiştir.

3.1.1.4. Cebirsel Tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia Kümeleri Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular

Cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri konusunun öğrenilmesinde hazırlanan fraktal geometri öğretim programının yeterliğini belirlemeye yönelik elde edilen bulgular şu aşamalardan geçilerek sunulmuştur. Öncelikle öğrencilerin sınavda sorulan 4. ve 5. soruya verdikleri cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. 4. soruda verilen tekrarlama kurallarına göre verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini tam ve doğru bulan, bu yörüngelere göre başlangıç noktalarının türünü doğru ifade eden ve bu noktalardan Julia kümesi içerisine düşenleri doğru belirleyip, doğru açıklamalar yapan öğrenciler iyi; verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini doğru bulan, ya da küçük işlem hataları yapan, bu noktaların türünü doğru ya da eksik ifade eden ve bu noktalardan Julia kümesine düşenleri doğru gösteren, ancak yetersiz açıklamalarda bulunan öğrenciler orta; verilen noktaların yörüngelerini tamamen yanlış bulan, bu yörüngelere göre noktaların türünü yanlış ifade eden, bu noktalardan Julia kümesi içerisine düşenleri yanlış olarak gösteren ve yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. 5. soru için ise verilen Julia kümelerinin periyotlarını doğru bulan ve Mandelbrot kümesi içerisinde doğru olarak gösteren öğrenciler iyi; verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulurken küçük hatalar yapan, Mandelbrot kümesi içerisinde gösterirken eksiklikleri bulunan ve yetersiz açıklamalar yapan öğrenciler orta; verilen Julia kümelerinin periyotlarını tamamen yanlış bulan ve yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Daha sonra öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar göz önüne alınarak öğrencilerin cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri konusundaki kazanımlardan hangilerini kazanmada başarılı olduklarına yönelik elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuştur. En sonunda ise bir sonuç paragrafına göre elde edilen bulgular özetlenmiştir.

Öğrencilere sınavda sorulan 4. ve 5. sorular Şekil 3.39'da ve öğrencilerin bu sorulardaki başarıları ise Tablo 3.8'de sırasıyla sunulmuştur.



4. $z_{n+1} \to z_n^2 - 1$ tekrarlama kuralına göre aşağıda verilen başlangıç değerlerinden hangilerinin Julia kümesinin içerisine düştüğünü **nedenleriyle birlikte** yazınız.

Başlangıç değeri	$z_0 = i$
Başlangıç değeri	$z_0 = -1$
Başlangıç değeri	$z_0 = 1 + i$
Başlangıç değeri	$z_0 = 0$

5. Aşağıda verilen Julia kümelerinin Mandelbrot kümesi içerisinde hangi bölgeye düştüğünü şekil üzerinde gösteriniz ve verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulunuz.

Şekil 3.39. Soru 4 ve 5

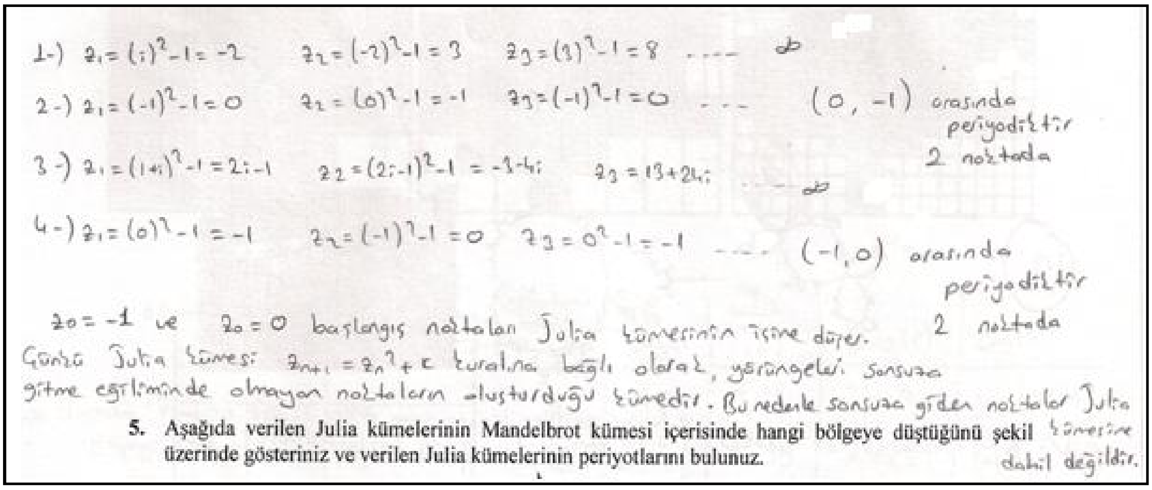
Tablo 3.8. Öğrencilerin sınavda sorulan 4. ve 5. soruya yönelik başarıları

Sınav soruları	İyi		Orta		Zayıf		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
4. Soru	20	51	9	23	7	18	3	8
5. Soru	35	90	3	8	0	0	1	2

Tablo 3.8'e göre öğrencilerin %90 ile en çok 5. soruyu doğru olarak yaptıkları görülmektedir. Öğrencilerin %51'inin ise 4. soruyu doğru olarak yaptıkları belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulmada ve bunları Mandelbrot kümesi içerisinde göstermede verilen başlangıç noktalarının Julia kümesi içerisinde olup olmadığına karar vermeye göre daha başarılı olduklarını göstermektedir. Bu

bulgunun aynı zamanda öğrencilerin Julia kümesinin tanımı ve Julia kümesinin şekli ile periyoduna yönelik öğrenmelerinin de bir göstergesi olduğu söylenebilir.

Örneğin Ö21'in 4. soruya yönelik çözümleri aşağıda sunulmuştur.


1-) $z_1 = (i)^2 - 1 = -2$ $z_2 = (-2)^2 - 1 = 3$ $z_3 = (3)^2 - 1 = 8$ ---- ∞

2-) $z_1 = (-1)^2 - 1 = 0$ $z_2 = (0)^2 - 1 = -1$ $z_3 = (-1)^2 - 1 = 0$ --- $(0, -1)$ arasında periyodiktir 2 noktada

3-) $z_1 = (1+i)^2 - 1 = 2i - 1$ $z_2 = (2i-1)^2 - 1 = -3-4i$ $z_3 = 13+24i$ --- ∞

4-) $z_1 = (0)^2 - 1 = -1$ $z_2 = (-1)^2 - 1 = 0$ $z_3 = 0^2 - 1 = -1$ ---- $(-1, 0)$ arasında periyodiktir 2 noktada

$z_0 = -1$ ve $z_0 = 0$ başlangıç noktaları Julia kümesinin içine düşer.
Çünkü Julia kümesi: $z_{n+1} = z_n^2 + c$ kuralına bağlı olarak, yörüngeleri sonsuza gitme eğiliminde olmayan noktaların oluşturduğu kümedir. Bu nedenle sonsuza giden noktalar Julia kümesine dahil değildir.

5. Aşağıda verilen Julia kümelerinin Mandelbrot kümesi içerisinde hangi bölgeye düştüğünü şekil üzerinde gösteriniz ve verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulunuz.

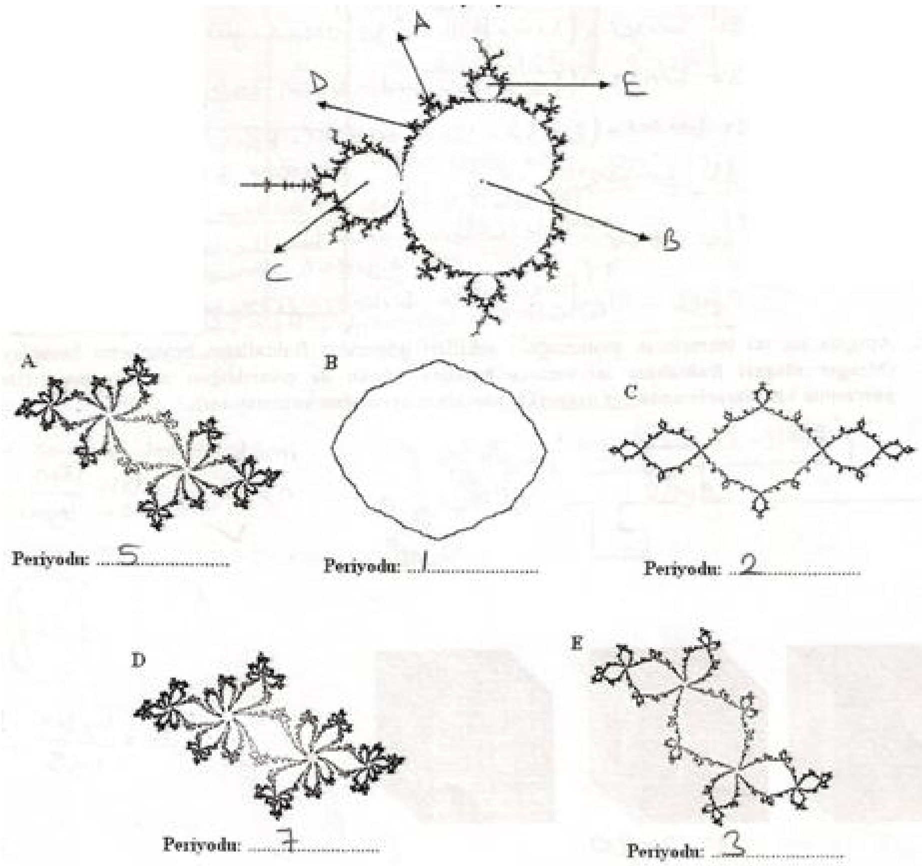
Şekil 3.40. Ö21'in çözümü

Ö21'in verilen başlangıç noktalarının Julia kümesi içerisinde olup olmadığına karar vermede öncelikle bu noktaların yörüngelerini bularak noktaların türlerini belirlediği ve daha sonra belirlediği türlerden mahkûm ve periyodik olanların Julia kümesi içerisinde bulunduklarını belirttiği gözlemlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta da öğrencinin verilen başlangıç noktalarının Julia kümesi içerisinde olup olmadığına karar vermede noktaların kaçak nokta olmamasına dikkat ettiği belirlenmiştir.

> A: Verilen noktaların Julia kümesi içerisinde olup olmadığına nasıl karar verdin?
> Ö21: Öncelikle verilen başlangıç noktaları kaçak olmayacak bunun için noktanın mahkum olup olmadığına baktım. Bunun için noktanın sabit bir değere mi yoksa periyodik mi olup olmadığını belirledim. Bu noktaların yörüngelerini hesapladım ve yörüngeleri sabit bir değere ya da periyodik oluyorsa mahkum dedim.

Bunun yanında Ö21'in "Julia kümesi $z_{n+1} = z_n^2 + c$ tekrarlama kuralına bağlı olarak yörüngeleri sonsuza gitme eğiliminde olmayan noktaların oluşturduğu kümedir" şeklindeki açıklamasıyla Julia kümesini doğru olarak tanımladığı ve ne tür noktalardan oluştuğunu anladığı söylenebilir.

Ayrıca Ö21'in verilen Julia kümelerinin periyotlarını doğru olarak belirlediği ve Mandelbrot kümesi içerisinde gösterdiği tespit edilmiştir.



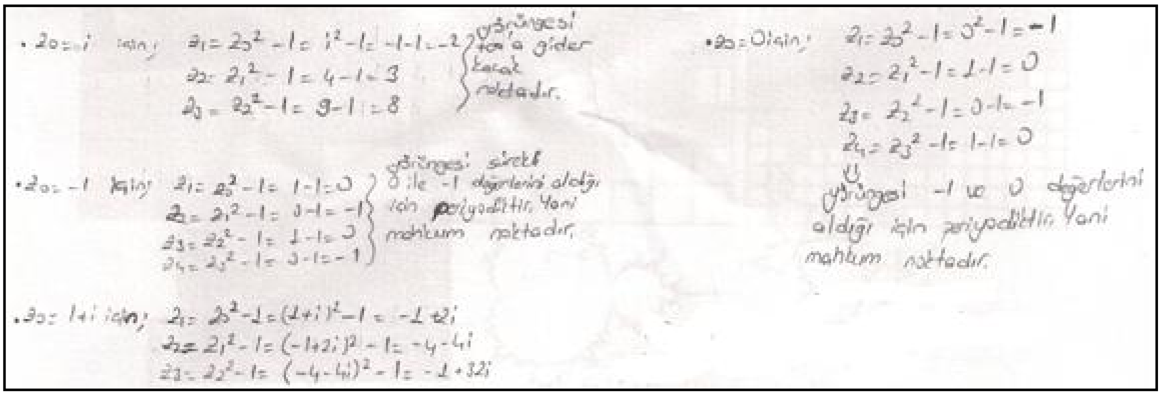
Şekil 3.41. Ö21’in cevabı

Bu öğrenciyle yapılan klinik mülakatta Julia kümelerinin periyotlarına şekillerin dallanmalarına ve öz-benzer parçalarına göre karar verdiği belirlenmiştir.

A: Bu Julia kümesinin periyodunun 5 olduğuna nasıl karar verdin?
Ö21: Şeklin dallanmalarına baktım. Şu bir yapı ise ona benzer şekillere baktım. Bunların sayısı toplam 5 olduğundan periyotu da 5 dir dedim.
A: Niçin o parçaları seçtin? Şu uçtakileri seçsen olmaz mıydı?
Ö21: Periyot belirlerken Julia kümesini birbirinin aynısı benzer parçalar bölmemiz gerekir. Eğer oradan alırsam parçayı şu parça için benzerlik ortadan kalkar.

Tablo3.8’e göre öğrencilerin %23’ünün verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini doğru olarak belirlemelerine ya da küçük işlem hataları yapmalarına karşın bu noktaların Julia kümesi içerisinde olup olmadığına doğru karar veremedikleri ve yetersiz açıklamalarda bulundukları görülmektedir.

Örneğin Ö38’in 4. soruya yönelik çözümleri aşağıda sunulmuştur.



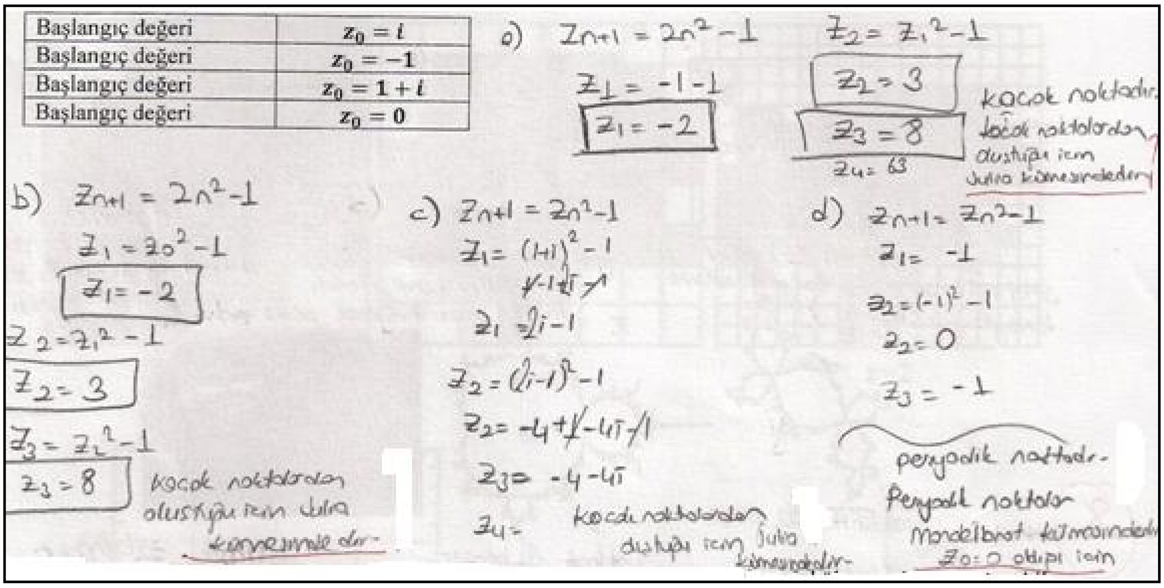
Şekil 3.42. Ö38'in cevabı

Ö38'in verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini bularak onların kaçak, mahkûm ya da periyodik olup olmadıklarını belirlemesine karşın bu noktalardan hangilerinin Julia kümesinin içerisinde olup olmadığına yönelik bir açıklama yapmadığı görülmektedir. Bu öğrenciyle yapılan klinik mülakatta öğrencinin kaçak ve mahkûm noktanın ne demek olduğunu bildiği ancak Julia kümesi ile bu noktalar arasındaki ilişkiyi bilmediği görülmektedir.

> A: Verilen başlangıç noktalarını kaçak ya da mahkûm olarak sınıflandırmışsın? Buna nasıl karar verdin?
> Ö38: Nokta kaçaksa yörüngesi sonsuza gider yani sürekli artar, ya da sürekli azalır. Eğer nokta mahkûmsa yörüngesi sabit bir değere gider. Tabi periyodik noktalar var onlarda ise belli bir alanda kalıyor yörüngeler bu nedenle onlara da mahkûm diyebiliriz.
> A: Bu noktaların hangilerinin Julia kümesi içerisinde olup olmadığını niçin yazmadın?
> Ö38: Kaçak ya da mahkûm noktalardan hangilerinin Julia kümesinin içerisine düştüğünü hatırlayamadığımdan yazmadım.

Tablo 3.8'e göre öğrencilerin %18'inin ise verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini yanlış buldukları ve yanlış açıklamalarda bulundukları belirlenmiştir.

Örneğin Ö11'in 4. soruya yönelik çözümleri ve açıklamaları aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.43. Ö11'in çözümü

Ö11'in verilen başlangıç noktalarından z_0=-1'in yörüngesini hatalı bulduğu, başlangıç noktası z_0=0 ve periyodik olan noktaların Mandelbrot kümesi içerisinde bulunduğu ve kaçak noktaların Julia kümesinin içerisinde yer aldığını ifade ettiği belirlenmiştir. Bu açıklamalar öğrencinin Julia kümeleriyle ilgili yanlış anlamalarının olduğunu göstermektedir. Yapılan klinik mülakatta öğrencinin ne tür noktaların Julia kümesi içerisinde olduğuna tam olarak karar veremediği belirlenmiştir.

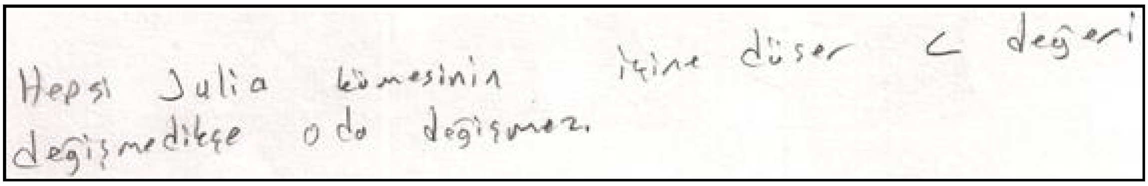
> A: "Bu noktalar kaçak noktalardan oluştuğu için Julia kümesindedir" şeklinde bir ifaden var. Julia kümesi kaçak noktalardan mı oluşur?
> Ö11: Hangi tür noktaların Julia kümesinin içerisinde olduğunu tam olarak hatırlamıyorum. Kaçak noktaların olabileceğini düşündüm.

Bunun yanında öğrencinin kaçak ve mahkum noktanın ne olduğuna yönelik anlamasını belirlemek için bir noktanın kaçak ya da mahkum olduğuna nasıl karar verdiği sorusu sorulmuştur.

> A: Bir noktanın kaçak ya da mahkûm olduğuna nasıl karar verirsin?
> Ö11: Sonsuza gitme eğiliminde olduğu zaman yani mesela -1, 1, 10, 20, 50 … şeklinde olursa kaçak noktadır, ama mesela -1,1,-1,1,… dersek bu da periyodik noktadır. Sabit oluyorsa yani mesela hep 0,0,0 oluyorsa buna da mahkum nokta diyordur.

Bu durum Ö11’in verilen başlangıç noktalarının kaçak ya da mahkûm olduklarını belirleyebilmesine karşın Julia kümesinin ne tür noktalardan oluştuğu konusunda bilgi eksikliğinin olduğunu göstermektedir.

Bunun yanında Ö29’un verilen başlangıç değerlerinden hangilerinin Julia kümesi içerisine düştüğünü belirlemede yörüngeleri bulmaya çalışmadığı ve c-değeri değişmediği sürece tüm noktaların Julia kümesi içerisine düşeceğini ifade ettiği belirlenmiştir.



Hepsi Julia kümesinin içine düşer c değeri değişmedikçe o da değişmez.

Şekil 3.44. Ö29’un açıklamaları

Ö29 ile yapılan klinik mülakatta öğrencinin yörünge kavramını hatırlamadığı ve verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini bulamayacağını ifade ettiği belirlenmiş, ancak sözel olarak kaçak ve mahkum noktaları tanımladığı tespit edilmiştir.

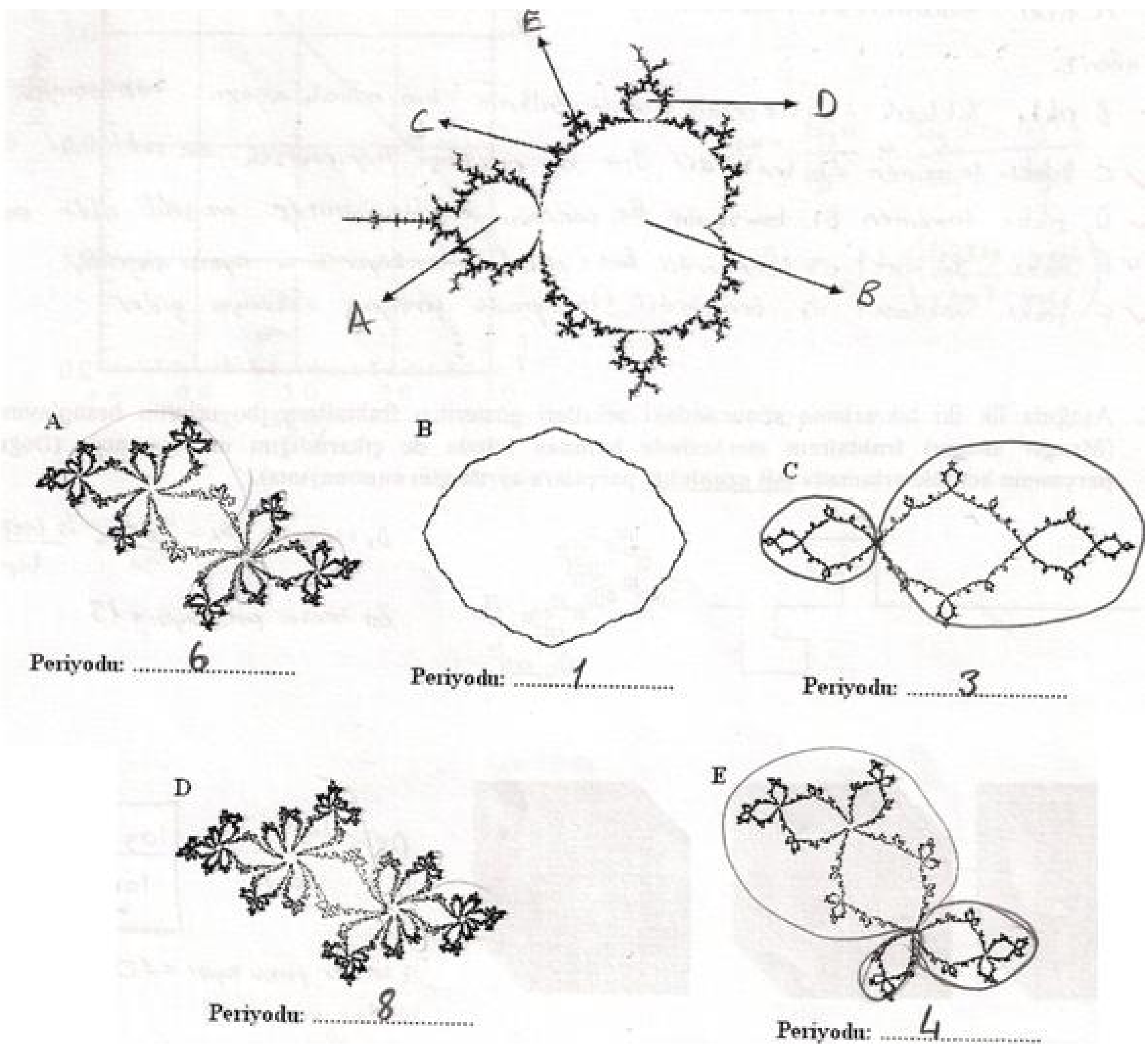
A: Niçin verilen noktaların c-değerine bağlı olarak Julia içerisine düşeceğini yazdın?
Ö29: Derste Julia kümelerinde c-değerinin önemli olduğunu söylemişti hocamız bu nedenle diye düşündüm.

Öğrencinin bu açıklaması aslında bir c-sabitine göre hangi mahkûm noktayı yazarsak yazalım oluşan Julia kümesinin şeklinin değişmeyeceğiyle ilgilidir. Öğrenci bu bilgi ile Julia kümesinin tanımını karıştırmaktadır. Ö29’a kaçak ya da mahkum noktaların ne oldukları sorulduğunda sözel olarak kaçak ve mahkum nokta tanımlarını yaptığı görülmesine karşın verilen bir başlangıç noktasının türünü belirlemesi istendiğinde bunu yapamayacağını ifade ettiği belirlenmiştir.

A: Kaçak ya da mahkûm noktaların ne olduklarını biliyor musun? Tanımlayabilir misin?
Ö29: Evet kaçak ya da mahkûm nokta neye denir biliyorum, belli değerlere yaklaşıyorsa mahkûm nokta ama sürekli artıyor ya da azalıyorsa kaçak noktadır.
A: İlk verilen z_0=i nin kaçak ya da mahkûm nokta olup olmadığını söyleyebilir misin?
Ö29: yok belirleyemem.
A: Yörünge kavramını hatırlıyor musun?
Ö29: yok hatırlamıyorum.

Tablo 3.8'e göre öğrencilerin %8'inin verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulmada ve bunların Mandelbrot kümesi içerisindeki yerlerini göstermede hatalar yaptıkları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö8'in 5. soruya yönelik çözümü aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.45. Ö8'in çözümü

Ö8'in verilen Julia kümelerinin periyotlarını yanlış belirlemesine karşın Julia kümesini doğru öz-benzer parçalara ayırdığı görülmektedir. Ö8'in verilen Julia kümelerinin periyotlarını belirlerken öz-benzer parça sayısının bir fazlasının periyodu vereceği şeklinde bir kural kullandığı söylenebilir. Yapılan klinik mülakatta Ö11'in de bu şekilde bir kural belirlediği tespit edilmiştir.

A: Bu Julia kümesinin 5 periyotlu olduğuna nasıl karar verdin?
Ö11: Aslında ben bu kümelerin periyotlarına karar vermiyordum başta, yani o şekilleri nasıl parçalayacağımı bilemiyordum. Yani hani benzer parçalar var ya onlara karar veremiyordum. Sonra hocamızla şöyle bir kural oluşturduk, bir taraftaki dışa dallanan parçaları saydığımızda onun sayısının 1 fazlası bana periyodu veriyor.

Ö11'in bu açıklaması aslında Julia kümesini öz-benzer parçalara ayıramadığını göstermektedir. Ancak "bir taraftaki dışa dallanan parçaların sayısının 1 fazlası periyodu verir" kuralı onun soruyu doğru olarak yapmasını sağlamaktadır.

Özetle, öğrencilerin hazırlanan programın cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri konusunun öğrenilmesindeki yeterliğini belirlemeye yönelik sınavın 4. ve 5. sorusuna verdikleri yanıtlar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

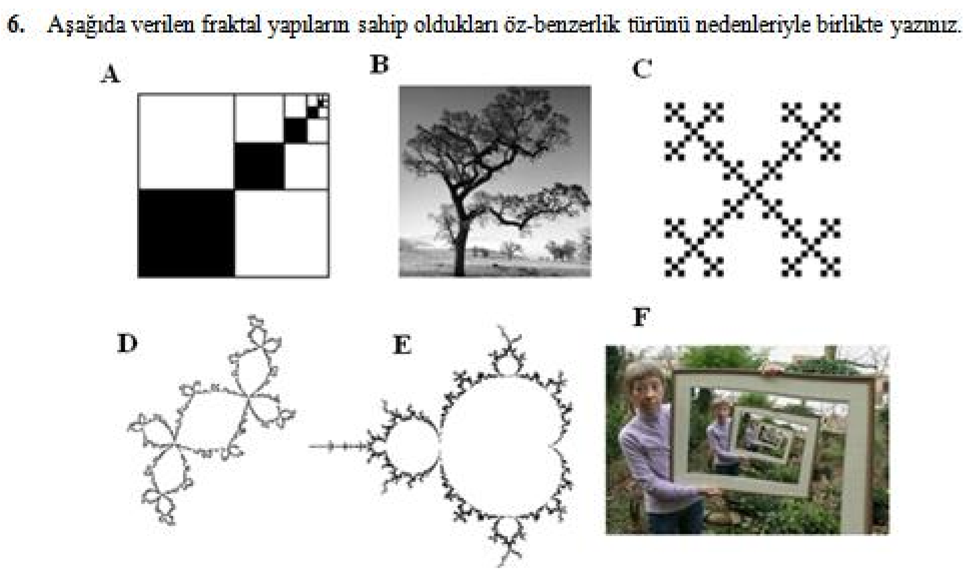
- Öğrencilerin verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulmada ve bunları Mandelbrot kümesi içerisinde göstermede (%90), verilen başlangıç noktalarının Julia kümesi içerisinde olup olmadığına karar vermeye (%51) göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir.
- Öğrencilerin genelde verilen başlangıç noktalarının kaçak, mahkûm ya da periyodik olduklarını doğru olarak belirledikleri tespit edilmiştir.
- Bazı öğrencilerin (%23) verilen noktaların türünü (kaçak, mahkûm ya da periyodik) doğru belirlemelerine karşın, bu noktaların Julia kümesi içerisinde olup olmadığına karar vermede sorun yaşadıkları tespit edilmiştir.
- Bazı öğrencilerin (%8) Julia kümelerinin periyotlarını bulurken öz-benzer parçaları belirleyemedikleri belirlenmiştir. Bu öğrencilerden bir kısmının öz-benzer parçaları belirlemeden periyodu doğru hesaplamalarını sağlayacak bir kural kullandıkları tespit edilmiştir.
- Öğrencilerin genelde Mandelbrot ve Julia kümeleri anlamakta zorlandıkları tespit edilmiştir.

3.1.1.5. Öz-benzerlik Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular

Hazırlanan programın öz-benzerlik konusunun öğrenilmesindeki yeterliğinin belirlenmesine yönelik elde edilen bulgular aşağıdaki aşamalardan geçilerek sunulmuştur.

Öncelikle öğrencilerin sınavda sorulan 6. soruya verdikleri cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. 6. soru daha çok öğrencilerin öz-benzerlik türlerine belirlemelerine yönelik hazırlanmıştır. Ancak yapılan klinik mülakatlarla öğrencilerin öz-benzerlik kavramı hakkındaki bilgileri belirlenmeye çalışılmıştır. 6. soruda verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini doğru olarak ifade eden ve tam ve doğru açıklama yapan öğrenciler iyi; öz-benzerlik türlerini doğru ifade eden ancak eksik ya da hatalı açıklamalar yapan öğrenciler orta; öz-benzerlik türlerini yanlış ifade eden ve hatalı açıklamalar yapan öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Öğrencilerin sınav sorusuna verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuştur. En sonunda ise bir sonuç paragrafına göre elde edilen bulgular özetlenmiştir.

Öğrencilere sınavda sorulan 6. soru Şekil 3.46'da ve öğrencilerin bu sorudaki başarılarını gösteren bulgular ise Tablo 3.9'da sırasıyla sunulmuştur.



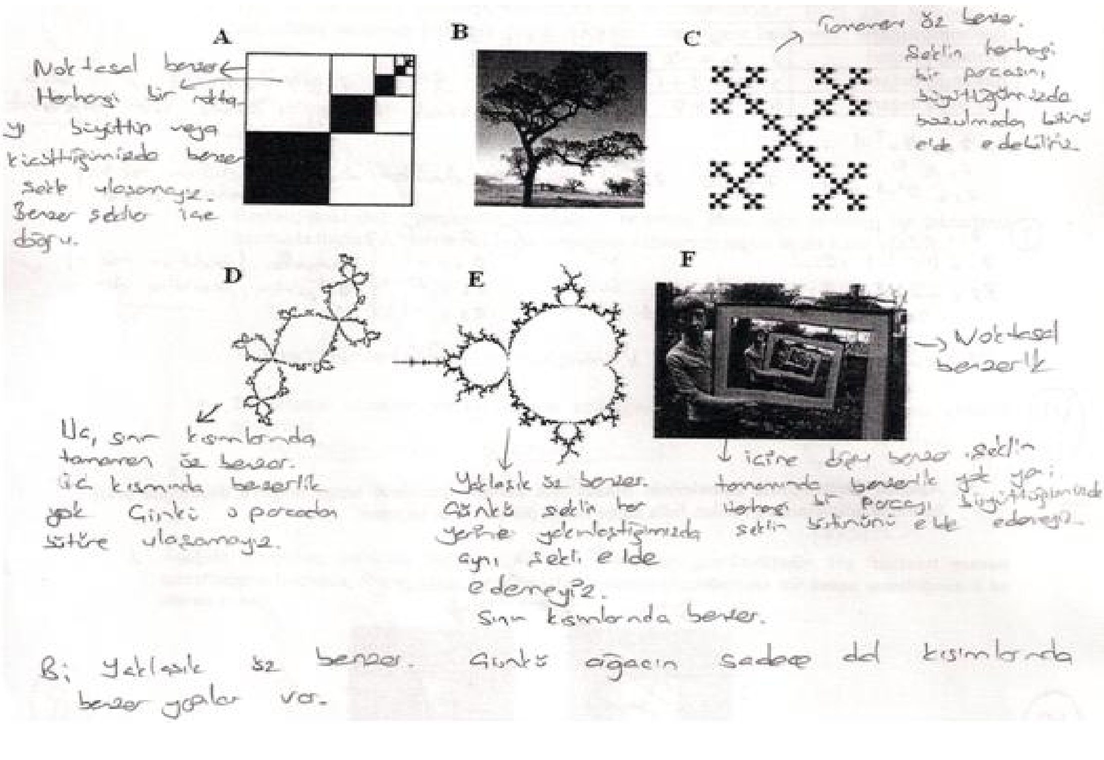
Şekil 3.46. Soru 6

Tablo 3.9. Öğrencilerin sınavda sorulan 6. soruya yönelik başarıları

	İyi		Orta		Zayıf		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
A şıkkı	25	63	1	3	12	31	1	3
B şıkkı	37	94	0	0	1	3	1	3
C şıkkı	34	87	1	3	3	7	1	3
D şıkkı	33	85	2	5	3	7	1	3
E şıkkı	33	85	1	3	2	5	3	7
F şıkkı	33	85	1	3	4	10	1	3

Tablo 3.9'a göre genel olarak öğrencilerin verilen nesnelerin öz-benzerlik türlerini belirlemede başarılı oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin en çok (%94) B şıkkında verilen ağacın öz-benzerlik türünü doğru olarak belirledikleri görülmektedir. Bunun nedeni öğrencilerin ders ortamında doğal fraktal örneklerinden ağaçlarla sıklıkla karşılaşmaları olabilir. Bunun yanında C, D,E ve F şıklarında verilen fraktalların öz-benzerlik türleri ise hemen hemen aynı oranda başarı ile doğru olarak belirlenmiştir.

Örneğin Ö14'ün 6. soruya yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

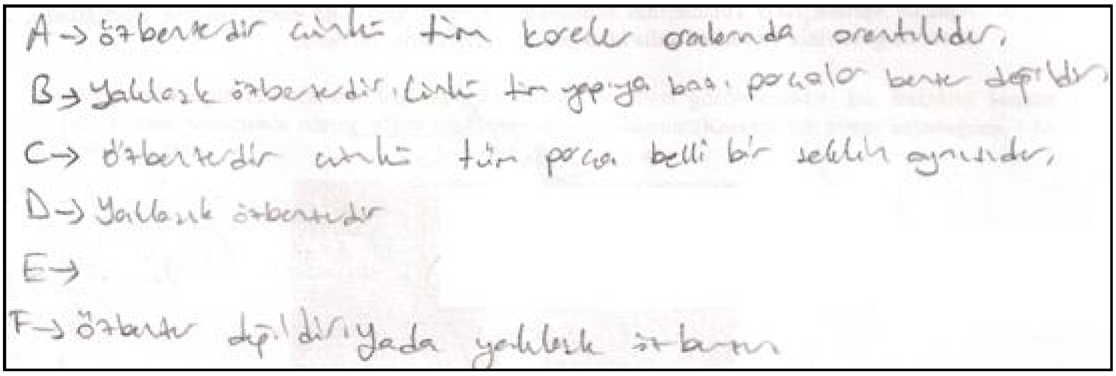


Şekil 3.47. Ö14'ün açıklamaları

Ö14’ün verilen tüm şekillerin öz-benzerlik türlerini doğru belirlediği ve doğru açıklamalarda bulunduğu görülmektedir.

Tablo 3.9’a göre öğrencilerin %63’ünün A’daki şekli noktasal öz-benzer olarak doğru ifade ettikleri görülmektedir. Bu durumda A şıkkında verilen fraktalın öz-benzerlik türünü belirlemede öğrencilerin diğer şekillerin öz-benzerlik türlerini belirlemeye göre daha az başarılı olduğu söylenebilir. Öğrencilerin %31’inin bu fraktalın öz-benzerlik türünü hatalı olarak belirledikleri ve yanlış/eksik açıklamalarda bulundukları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö13’ün öz-benzerlik türlerine yönelik sınav kağıdına yazdığı cevaplar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.48. Ö13’ün açıklamaları

Ö13’ün A’daki şeklin öz-benzer olduğunu ifade ettiği ancak öz-benzerlik türüne karar veremediği görülmektedir. Bu öğrenciyle yapılan klinik mülakatta öğrencinin A’daki şekli tamamen öz-benzer olarak sınıflandırdığı belirlenmiştir.

A: A’daki şekle öz-benzer diyorsun. Sence ne tür bir öz-benzerliğe sahip?
Ö13: Tamamen öz-benzerdir.
A: Niçin?
Ö13: Aynı şekil sürekli tekrarlandığından, yani burada bir kare var ve o hep aynı şekilde tekrarlanarak oluşmuş. Bu nedenle tamamen öz-benzerdir.

Ö13’ün bu açıklamaları bu öğrencinin noktasal öz-benzerlik ile tamamen öz-benzerlik kavramlarını tam olarak anlamadığını göstermektedir. Benzer şekilde Ö13’ün C’deki şekli ise yine öz-benzer olarak ifade ettiği ancak ne tür bir öz-benzerliğe sahip olduğunu yazmadığı belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta bu öğrencinin C şeklini tamamen öz-benzer olarak sınıflandırdığı tespit edilmiştir.

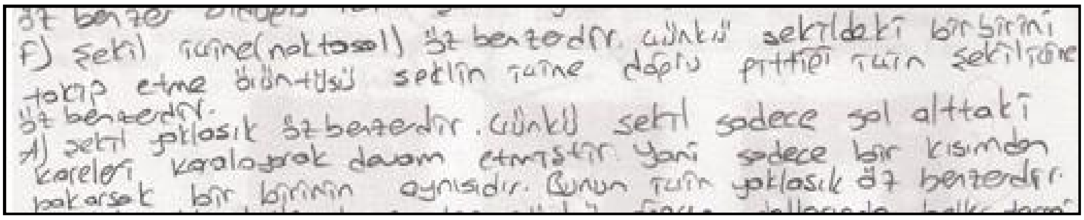
A: C için yine öz-benzer diyorsun, ama ne tür bir öz-benzerliğe sahip olduğunu belirtmiyorsun.
Ö13: Tüm parçalar birbirinin aynısı olduğundan bu da tamamen öz-benzerdir.

Ö13'ün C'deki şekillerinin tümünün birbirinin aynısı olması nedeniyle tamamen öz-benzer olduğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Bu öğrencinin F'deki şekil için ise öz-benzer değildir, ya da yaklaşık öz-benzerdir şeklinde bir açıklama yazdığı belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta öğrencinin F'deki şeklin öz-benzerlik türüne karar veremediği tespit edilmiştir.

A: F için öz-benzer değil ya da yaklaşık öz-benzer demişsin. Niçin?
Ö13: F'deki şekle ne diyeceğimi bilemedim. Kararsız kaldım.

Bunun yanında noktasal öz-benzerlikte hata yapan bazı öğrencilerin noktasal öz-benzerlik ile yaklaşık öz-benzerliği birbirine karıştırdıkları ve noktasal öz-benzer bir şekli yaklaşık öz-benzer olarak ifade ettikleri belirlenmiştir.

Örneğin Ö16'nın 6. soruda verdiği cevaplar aşağıda sunulmuştur.


F) şekil içine(noktasal) öz benzerdir. çünkü şekildeki birbirini
takip etme bağıntısı şeklin içine doğru ittiği için şekil içine
öz benzerdir.
A) şekil yaklaşık öz benzerdir. çünkü şekil sadece sol alttaki
kareleri karalayarak devam etmiştir. Yani sadece bir kısımdan
bakarsak bir birinin aynısıdır. Bunun için yaklaşık öz benzerdir.

Şekil 3.49. Ö16'nın açıklamaları

Ö16'nın F'deki şekli görüntü iç içe doğru ilerlediği için noktasal öz-benzer olarak sınıflandırmasına karşın A'daki şekilde sadece bir bölgede birbirinin aynısı şekillerin olması nedeniyle yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandırdığı belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta Ö16'nın A'daki şekli yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandırmasının nedeni aşağıda sunulmuştur.

A: A daki şekli yaklaşık öz-benzer olarak ifade etmektesin niçin?
Ö16: Çünkü karenin mesela şu parçasını alıp büyüttüğümde ana şekli oluşturmuyor. Sol alt taraftan karalaya karalaya gitmiş şekil.

Ö16'nın A'nın yaklaşık öz-benzer olmasının nedenini birbirine benzer parçaların şeklin sadece belli bir kısmında bulunması şeklinde açıkladığı görülmektedir. Ancak bu öğrencinin F'deki şekil için ise noktasal öz-benzer olduğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Ö16'ya A ile F şekillerinin farkı sorulduğunda verdiği yanıt aşağıda sunulmuştur.

A: Peki F deki şekli ise noktasal öz-benzer olarak tanımlamışsın. A ile F nin farkı nedir?
Ö16: A daki şekil kenara doğru gitmekte ama F deki şekil merkeze doğru gitmektedir. Bu nedenle F deki şekil noktasal öz-benzerdir.

Ö16'nın bu açıklaması F'deki şekilde de benzer parçaların şeklin sadece belli bir bölgesinde bulunduğunu fark ettiğini göstermektedir. Buna karşın bu benzer parçaların A'da sağ üst köşede ve F'de ise merkezde bulunması nedeniyle F'nin noktasal öz-benzer olduğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Yani Ö16'nın noktasal öz-benzerlikten benzer parçaların şeklin merkezinde iç içe devam etmesini anladığı söylenebilir. Bu durumun bir nedeni sınıf ortamındaki çalışma yapraklarında öğrencilerin genellikle merkeze doğru iç içe ilerleyen noktasal öz-benzer şekillerle çalışmış olmaları olabilir. Diğer bir nedeni ise öğrencilerin verilen şeklin öz-benzerlik türüne karar vermede sorunla karşılaştıklarında sıklıkla o nesnenin öz-benzerliğini yaklaşık öz-benzer olarak ifade etmeleri olabilir.

Örneğin Ö11 öğrencisiyle yapılan klinik mülakatta öğrencinin A'daki şekle yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Bu şekle niçin yaklaşık öz-benzer dedin?
Ö11: Şu parçayı alıp büyüttüğümde birinci şekli elde ederim. Ama şuradan bir parça alsam elde edemem. Sağ üst köşede bu sağlanıyor. Tekrarlama kuralı bütün şekli aynı şekilde boyasaydı tamamen öz-benzer diyebilirdik.
A: Niçin noktasal öz-benzer değil?
Ö11: Aslında noktasalda olabilir. Çünkü merkeze doğru gidiyor, karar veremedim.

Ö11'in bu açıklamaları bu öğrencinin verilen bir nesnenin tamamen öz-benzerliğini belirlemesine karşın, noktasal ve yaklaşık öz-benzerliği belirlemede bir sorunla karşılaştığını göstermektedir. Öğrenciler öz-benzerliğe karar verirken sıklıkla nesne içerisinde parçalar alıp bütün ile karşılaştırdıklarından hem noktasal hem de yaklaşık öz-benzerlikte şeklin her noktasında bunun sağlanmadığını görmektedirler. Bu durum bu iki öz-benzerlik türü için ayırım yapamamalarına neden olmaktadır.

Öğrencilerin sınav kâğıdında 1. ve 6. sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde büyük bir çoğunluğunun verilen bir şeklin öz-benzer olup olmadığına doğru karar verebildikleri görülmektedir. Öğrencilerin bu nesnelerin öz-benzerliğini belirlerken hem derste öğrendikleri parça-bütün karşılaştırmasını yaptıkları hem de kendilerinin farklı iki yol geliştirdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin sınav kağıtlarına yazdıkları açıklamalara göre verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığını belirleme şekilleri Tablo 3.10'da sunulmuştur.

Tablo 3.10. Öğrencilerin bir nesnenin öz-benzerliğini belirleme şekilleri

Öz-benzerliği belirleme şekilleri	N	%	Örnek ifadeler
Nesnenin herhangi bir parçası ile nesnenin bütününü karşılaştırmak	25	64	Öz-benzerdir. Çünkü küçük bir parçasını belli bir oranda büyüttüğümüzde aynı şekli elde ederiz. (Ö39)
Nesnenin belli bir parçası ile nesnenin başlangıç şeklini karşılaştırmak	2	5	dıştaki bölgelerden bir parça alınıp büyütüldüğünde baştaki şekli verir. (Ö6)
Nesnenin belli bir parçası ile nesne içerisindeki diğer parçaları karşılaştırmak	12	31	Çünkü şekilde rastgele aldığımız bir parça diğerleriyle aynı (Ö7)

Tablo 3.10'a göre öğrencilerin %64'ünün verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığını belirlemede nesnenin herhangi bir parçası ile nesnenin bütününü karşılaştıkları görülmektedir.

Örneğin Ö21'in klinik mülakatta verdiği cevaplar aşağıda sunulmuştur.

A: Bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına nasıl karar verirsin?
Ö3: Eğer nesne içerisindeki yapıları alıp büyüttüğümde ana yapıyı elde ediyorsam bu nesneye öz-benzer derim.

Ö21'in bu açıklaması verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığını belirlemede nesnenin parçaları ile nesnenin bütünün karşılaştırdığını göstermektedir. Bu durum öğretim programında öz-benzerlik kavramının öğretimi için belirlenen kazanımın öğrenciler tarafından kazanıldığını göstermektedir.

Bazı öğrencilerin bir nesnenin öz-benzerliğini belirlemede nesnenin herhangi bir parçası ile nesnenin bütününü karşılaştırdığını ifade etmesine karşın nesnenin öz-benzerliğini belirlerken hata yaptıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö29'un sınav kâğıdında 1. soruya yönelik yazdığı açıklamalarında öz-benzer bir şekli "benzer parçaların oluşturduğu şekil" olarak tanımlamasına karşın yapılan klinik mülakatta bu öğrencinin öz-benzerlik kavramını tam olarak anlayamadığı belirlenmiştir.

A: Öz-benzerlik deyince ne anlıyorsun?
Ö29: Hocam ben öz-benzerliği tam olarak bilmiyorum. Tamam mesela şu parçayı (A daki şekli göstererek) aldığımda şeklin tamamını göremediğimden öz-benzer değildir dedim.
A: Peki C deki şekle niçin öz-benzer değildir dedin?
Ö29: Çünkü şu küçük parçayı aldığımda ana şekli göremiyorum.
A: Ama şu bölgeye baksan?
Ö29: Orada belki olabilir gibi ama şeklin bütününe bakınca mesela şu bölgede (boşluğu göstererek) yine bütünü göremiyorum. Bu nedenle öz-benzer değildir dedim.
A: Ama o parça çıkarılmadı mı?
Ö29: Tamam bunları bölmüş ve buraları çıkarmış. Demek ki bu şekil buralara bir daha gelmeyecek. Bu nedenle öz-benzer değildir.

Ö29'un bir nesnenin öz-benzer olup olmadığını belirlemede nesnenin herhangi bir parçası ile nesnenin tamamını karşılaştırdığı görülmektedir. Ancak bu öğrencinin bir şeklin öz-benzer olması için öz-benzerliğin şeklin her noktasında sağlanması gerektiğini ifade etmektedir. Bu düşünce C'de verilen tamamen öz-benzer bir fraktalın bile öz-benzer olamayacağını belirtmesine neden olmaktadır. C'de verilen yapıdan çıkarılan bölgeler şeklin bir parçası değildir ve Ö29 bu boşlukların da bu yapının içerisinde olması nedeniyle öz-benzer olamayacağını ifade etmektedir.

Tablo 3.10'a göre öğrencilerin %31'inin verilen bir nesnenin öz-benzerliğini belirlerken nesnenin bir parçası ile nesne içerisindeki diğer parçaları karşılaştırdıkları görülmektedir.

Örneğin Ö11 ile sınavda sorulan 1. soru üzerine yapılan klinik mülakattaki ifadeleri aşağıda sunulmuştur.

A: C'deki şekil sence niçin öz-benzerdir? Nasıl karar verdin?

Ö11: Şeklin içerisinde birbirine benzer şekiller var. Mesela şu parça ile şuradaki büyük parça birbirinin aynısı. Bu şekilde hep benzer şekiller olduğundan öz-benzerdir.

Ö11'in verilen bir nesnenin öz-benzerliğine karar vermede şekil içerisinde birbirine benzer yapıları aradığı söylenebilir.

Tablo 3.10'a göre öğrencilerin %5'inin ise verilen bir nesnenin öz-benzerliğini belirlerken onun oluşum adımlarına göre herhangi bir parçası ile başlangıç şeklini karşılaştırdıkları belirlenmiştir.

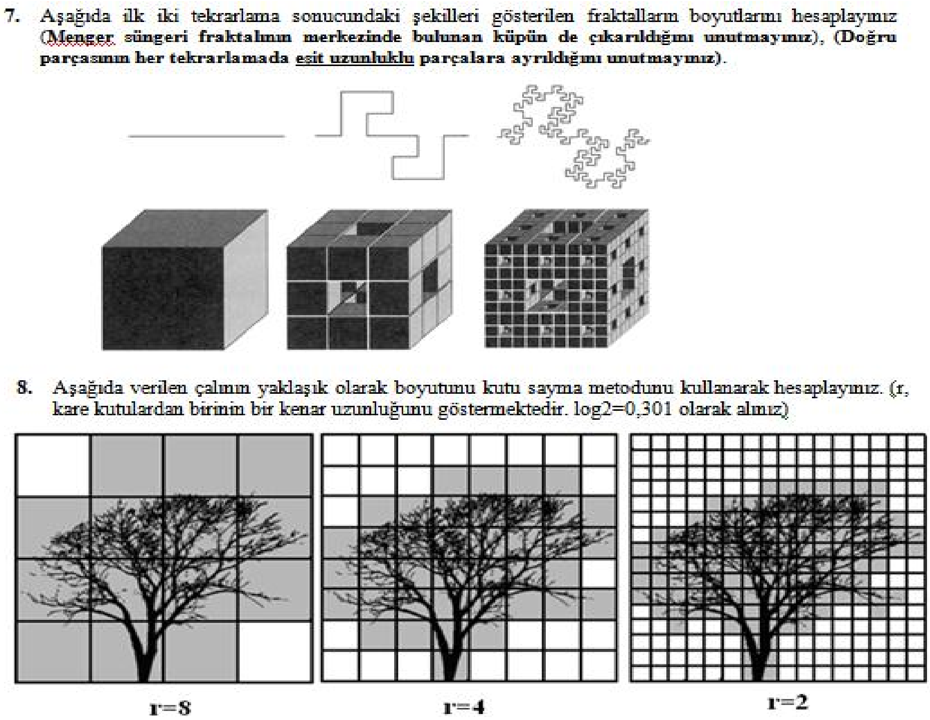
Özetle, öğrencilerin sınavın 6. sorusuna verdikleri yanıtlardan ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

- Tablo 3.9'a göre öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun verilen bir şeklin öz-benzerliğini ve öz-benzerlik türünü doğru olarak belirledikleri görülmektedir.
- Öğrencilerin verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına karar vermede 3 farklı yol izledikleri tespit edilmiştir. Bu yollardan öğrencilerin en çok %64 ile nesnenin bir parçası ile nesnenin bütününü karşılaştırdığı, %31 ile nesnenin bir parçası ile nesnenin diğer parçalarını karşılaştırdığı ve %5 ile nesnenin bir parçası ile nesnenin başlangıç şeklini karşılaştırdığı belirlenmiştir.
- Öğrencilerin genel olarak verilen nesnelerin öz-benzerlik türlerini belirlemede başarılı oldukları belirlenmiştir. Ancak noktasal öz-benzerliği belirlemede öğrencilerin güçlükle karşılaştıkları tespit edilmiştir.
- Noktasal öz-benzerlikte sorun yaşayan bazı öğrencilerin verilen noktasal öz-benzer şekilleri tamamen öz-benzer olarak sınıflandırdıkları belirlenmiştir. Bunun nedeni olarak örüntüdeki şekillerin birbirine benzediklerini ifade ettikleri tespit edilmiştir. Bazılarının ise verilen noktasal öz-benzer şekilleri yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandırdıkları belirlenmiştir. Birkaç öğrencinin verilen öz-benzer yapıdaki şekillerin merkezde iç içe değil de merkez dışında bu şekilde davranmalarından dolayı yaklaşık öz-benzer oldukları yönünde bir anlayışa sahip oldukları belirlenmiştir.
- Öz-benzerlik türünü belirlemede hata yapan bazı öğrencilerin ise sıklıkla o nesnenin öz-benzerliğini yaklaşık öz-benzer olarak ifade ettikleri tespit edilmiştir.

3.1.1.6. Fraktal Boyut Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular

Hazırlanan programın fraktal boyut konusunun öğrenilmesindeki yeterliğinin belirlenmesine yönelik elde edilen bulgular aşağıdaki aşamalardan geçilerek sunulmuştur. Öncelikle öğrencilerin sınavda 7. ve 8. sorulara verdikleri cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. 7. soru öğrencilerin tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamaya yönelik hazırlanmıştır. Bu soruda verilen fraktalların öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını tam ve doğru olarak bulan, bu değerlerin logaritmalarını doğru hesaplayan ve elde ettiği sonuçlara göre boyutu $d = \frac{\log(öz-benzer\ parça\ sayısı)}{\log(büyüme\ oranı)}$ şeklinde doğru olarak ifade eden öğrenciler iyi, öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını doğru bulan ancak boyutu hesaplamada küçük hatalar yapan öğrenciler orta; öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını yanlış bulan ve yanlış boyut değerleri hesaplayan öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde 8. soru içinde ağacı içeren kutu sayısını doğru belirleyen, kare kutuların küçülme oranlarının logaritmaları ile şekli içeren kutu sayılarının logaritmalarını doğru olarak bulan, tam ve doğru bir log-log grafiği çizen, çizdiği grafiğe göre noktaların tümünden geçecek şekilde bir doğru belirleyen ve bu doğrunun eğimini tam olarak hesaplayan, bulduğu eğim değerinin negatifinin boyut olduğunu ifade eden öğrenciler iyi; ağacı içeren kutu sayısını doğru belirleyen, kutu sayısı ile kutuların küçülme oranlarının logaritmalarını doğru bulan, ancak bunları grafikte gösterirken küçük hatalar yapan ve eğimi hesaplarken küçük işlem hataları yapan öğrenciler orta ve kutu sayılarını doğru belirleyen ancak bunların logaritmalarını bulmayan ya da yanlış bulan, bir grafik çizmeyen ve eğimi belirlemeyen öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmışlardır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Öğrencilerin sınav sorularına verilen cevaplar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuştur. En sonunda ise bir sonuç paragrafına göre elde edilen bulgular özetlenmiştir.

Öğrencilere sınavda sorulan 7. ve 8. sorular Şekil 3.50'de ve öğrencilerin bu sorulardaki başarılarını gösteren bulgular ise Tablo 3.11'de sırasıyla sunulmuştur.



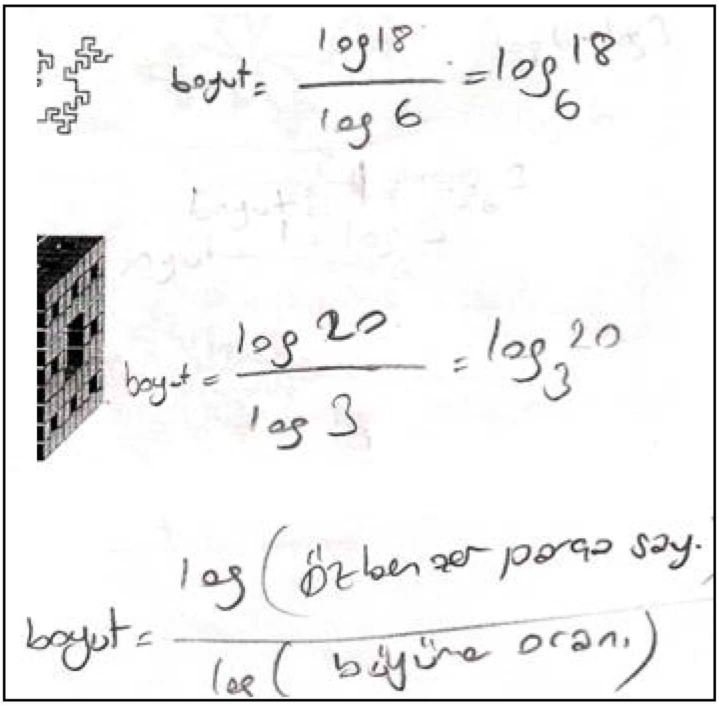
Şekil 3.50. Soru 7 ve 8

Tablo 3.11. Öğrencilerin sınavda sorulan 7. ve 8. soruya yönelik başarıları

Sorular	İyi		Orta		Zayıf		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
7. soru ilk şekil	10	26	4	10	21	54	4	10
7. soru Menger Süngeri	20	51	1	3	15	38	3	8
8. soru	18	46	10	26	0	0	11	28

Tablo 3.11'e göre 7. soruda verilen tamamen öz-benzer fraktal yapılar için öğrencilerin %51 ile en çok Menger süngeri fraktalının boyutunu hesaplamada başarılı oldukları belirlenmiştir. Buna karşın ilk fraktalın fraktal boyutunu hesaplamada öğrencilerin %26'sının başarılı oldukları tespit edilmiştir. Bu durumun nedenlerinden birisi öğrencilerin Menger süngeri fraktalının görünüşüne Sierpinski halısından dolayı alışık olmaları olabilir. Çünkü ders ortamında öğrenciler Sierpinski halısını oluşturmakta ve içerisindeki örüntüleri incelemektedirler. İlk verilen fraktalda bazı kenarlar ard arda tekrarlanarak oluşmaktadır. Bu oluşuma öğrencilerin dikkat etmemesi başarının düşük olmasındaki bir diğer neden olabilir.

Örneğin Ö25'in 7. soruya yönelik verdiği cevaplar aşağıda sunulmuştur.



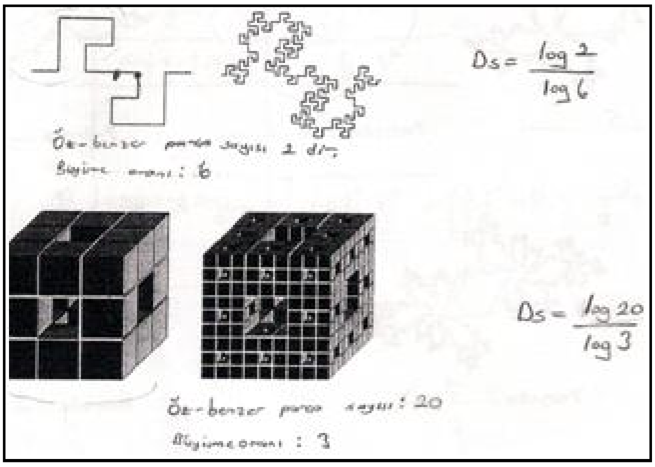
Şekil 3.51. Ö25’in çözümü

Ö25’in verilen tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarının $d = \frac{\log(\ddot{o}z\text{−}benzer\ par\c{c}a\ say\imath s\imath)}{\log(b\ddot{u}y\ddot{u}me\ oran\imath)}$ şeklinde hesaplandığını bildiği görülmektedir. Yapılan klinik mülakatta da öğrencinin öz-benzer parça sayılarına ve büyüme oranlarına yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: İlk fraktalın boyutunu nasıl hesapladın?
Ö25: Burada oluşan doğru parçalarının uzunlukları eşitti, bazıları ard arda gelmişti. Bu parçaları saydığımda öz-benzer parça sayısının 18 olduğunu buldum.
A: Büyüme oranının 6 olduğuna nasıl karar verdin?
Ö25: Başlangıçtaki doğru parçası 6 parçaya bölünmüş ve ona çeşitli parçalar eklenerek ve bazı parçalar 90 derece kaldırılarak ikici şekil oluşturulmuş.
A: Diğer fraktalın boyutunu nasıl buldun?
Ö25: 20 öz-benzer parçası olmaktaydı. Çünkü merkezdekini de çıkarıyorduk. Küpün kenarlarını 3 eş parçaya böldüğümüzden de büyüme oranı 3 tür.

Bu açıklamalar ve öğrencinin sınav kağıdına yazdığı cevaplar Ö25’in verilen tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplayabildiğini göstermektedir.

Bunun yanında Ö9’un verilen ilk fraktalın boyutunu yanlış hesaplamasına karşın Menger süngerinin boyutunu doğru olarak hesapladığı belirlenmiştir.



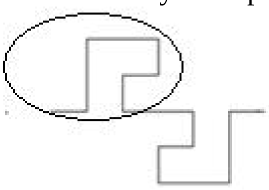
Şekil 3.52. Ö9'un çözümü

Ö9'un Menger süngerinin 2. tekrarlama adımındaki öz-benzer parça sayını 20 ve büyüme oranını ise 3 olarak belirlediği görülmektedir. Klinik mülakattaki bu değerleri belirlemeye yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Menger süngerinin öz-benzer parça sayısını 20 büyüme oranını ise 3 olarak nasıl buldun?
Ö9: her biri 3 parçaya bölündüğü için büyüme oranı 3 dedim. Öz-benzer parça sayısını da saydım. Toplam 27 parça oluşuyordu, 7 parça çıkarılıyordu. Geriye 20 parça kalıyor.

Ö9'un bu açıklamalarından Menger süngerinin öz-benzer parçalarının sayısını bulurken oluşan parçaların öz-benzer olup olmadığına çok fazla dikkat etmediği görülmektedir. Buna karşın ilk fraktalın 2. tekrarlama adımında öz-benzer parça sayısını 2 ve büyüme oranını ise 6 olarak belirlediği tespit edilmiştir. Yapılan klinik mülakatta Ö9'un 7. soruya yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Öz-benzer parça sayısını niçin 2 olarak buldun?
Ö9: İki öz-benzer parçadan oluşmaktadır diye düşündüm. Çünkü şekle baktığımda birbirine benzeyen iki parçaya bölebiliyordum.



Şekil 3.53. Ö9'un mülakattaki çizimi

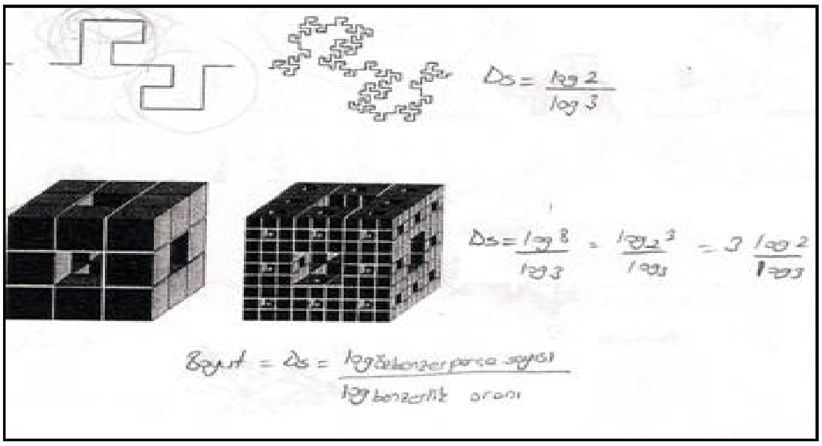
Bu açıklama Ö9'un öz-benzer parçaları belirlerken şekil içerisinde birbirine benzer parçalara odaklandığını göstermektedir. Ancak Ö9, iki öz-benzer parça belirlediğini ifade etmesine karşın büyüme oranını 6 olarak yazmaktadır. Oysa belirlediği öz-benzer parçalar 6 oranında büyütüldüğünde ana yapıya benzememektedirler. Büyüme oranını niçin 6 yazdığına yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Büyüme oranını niçin 6 olarak buldun?
Ö9: Onu tam bilemiyorum. Hatırlamıyorum. Belki parçaları saymış olabilirim.

Ö9'un bu açıklaması öz-benzer parça sayısını doğru olarak bulmasına karşın bu oranı nasıl bulduğunu tam olarak hatırlamadığını göstermektedir. Ö9'un ilk fraktalın boyutunu hesaplamaya yönelik açıklamaları öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını belirlemede sorun yaşadığını göstermektedir. Bunun nedeni olarak bu öğrencinin öz-benzerliğe karar verirken yapı içerisinde birbirine benzeyen şekilleri karşılaştırması olabilir. Böylece Ö9 yapı içerisinde aynı orana sahip parçaları belirlememekte ve şeklin öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranına karar verememektedir.

Tablo 3.11'e göre öğrencilerin en çok %54 ile 7. soruda verilen ilk fraktalın boyutunu ve %38 ile de Menger süngerinin boyutunu hatalı hesapladıkları belirlenmiştir. Bu durumun en büyük nedeni öğrencilerin verilen fraktalların öz-benzer parça sayıları ile büyüme oranlarını belirlemede hatalar yapmalarıdır.

Örneğin Ö38'in 7. soruda verilen fraktalların boyutlarına yönelik çözümleri aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.54. Ö38'in çözümü

Ö38’in verilen her iki fraktalın da fraktal boyutlarını hatalı olarak bulduğu görülmektedir. Bu öğrencinin verilen fraktalların büyüme oranlarını ve bu oranlardaki öz-benzer parça sayılarını belirleyemediği tespit edilmiştir. Yapılan klinik mülakatta Ö38’in fraktal boyutları hesaplarken yapmış olduğu açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

A: İlk fraktalda boyutu log(2)/log(3) olarak ifade etmişsin buradaki log(2) ve log(3) neyi ifade etmektedir?
Ö38: 2 parça sayısını 3 büyüme oranını

Bu açıklamadan Ö38’in boyut hesaplamada paya yazılan logaritma değerinin öz-benzer parça sayısını ve paydaya yazılan logaritma değerinin de büyüme oranını gösterdiğini bildiği söylenebilir. Ayrıca tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarının $d = \frac{\log\,(öz{-}benzer\ parça\ sayısı)}{\log\,(büyüme\ oranı)}$ şeklinde hesaplandığını bildiği de görülmektedir. Ancak tamamen öz-benzer fraktallarda bulunan öz-benzer parça sayılarının ve büyüme oranlarının niçin logaritmalarının alındığını bilmediği aşağıdaki açıklamalarında görülmektedir.

A: Niçin logaritmalarını aldın?
Ö38: Derste öyle yapmıştık, nedenini tam bilmiyorum.

Bu açıklama Ö38’in sınıfta boyut hesaplamada öğrendiği formülü ezberlediğini ve tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplama kuralını bilmesine karşın bu kuralın nasıl oluştuğunu ve niçin kullanıldığını tam olarak bilmediğini göstermektedir. Buna karşın Ö38’in de Ö9’da olduğu gibi öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını belirleyemediği görülmektedir. Yapılan klinik mülakatta da yaşadığı bu güçlüğü Ö38’in dile getirdiği tespit edilmiştir.

A: Öz-benzer parça sayısını niçin 2 buldun?
Ö38: Yapı 3’e bölünmüş, sonra birbirine benzeyen parçaları aldım.
A: 3’e bölündüğüne nasıl karar verdin?
Ö38: Ama iki benzer parça var ikiye mi bölündü? Tam karar veremiyorum
A: Öz-benzer parçaların onlar olduğuna nasıl karar verdin?
Ö38. Bu parça kendi içerisindeki şu parçaya benziyor ben bu nedenle öz-benzer parça sayısını 2 olarak yazdım. Ama bu kez büyüme oranı sağlamıyor dimi?

Ö38’in yapılan mülakatta Ö9 öğrencisi gibi yapı içerisinde birbirine benzer parçaları karşılaştırması nedeniyle öz-benzer parçaları yanlış belirlediği görülmektedir. Bu durum onun büyüme oranını hatalı bulmasına da neden olmaktadır.

Benzer şekilde Ö38'in Menger süngerinin öz-benzer parça sayısını da hatalı olarak belirlediği belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta Ö38'in yüz sayısına göre öz-benzer parçaları belirlediği görülmektedir.

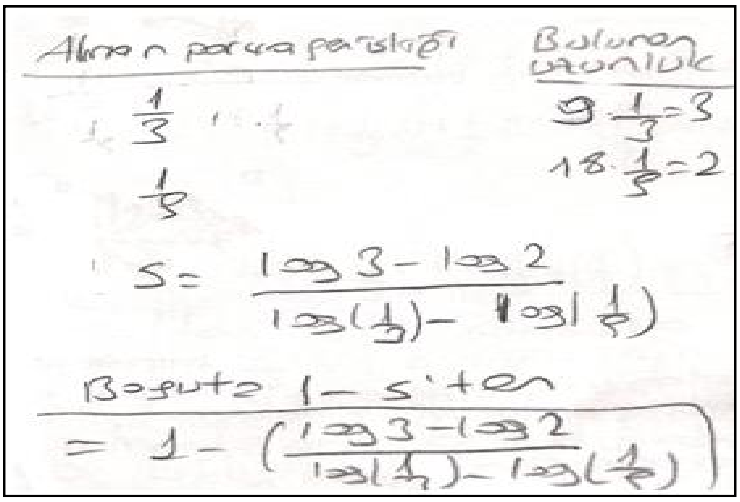
A: Alttaki küp için öz-benzer parça sayısına niçin 8 dedin?
Ö38: Burada (ön yüzdekileri göstererek) 8 parça olduğundan
A: Ama saymadıkların var? Onları niçin saymadın?
Ö38: Ben bu yüzdekileri düşünmüştüm.

Bu açıklama Ö38'in Menger süngerinin öz-benzer parçalarını belirlerken parça ile bütünü karşılaştırmak yerine bir yüzde oluşan küplerin sayısını göz önüne aldığını göstermektedir. Buna karşın Ö38'in Menger süngerinin büyüme oranını doğru olarak bulduğu görülmektedir.

A: Büyüme oranına niçin 3 dedin?
Ö38: Şeklin kenarları 3 parçaya bölündüğünden.

Bu açıklama ise oluşan her bir öz-benzer parçanın ana şeklin 1/3'ü oranında olduğuna dikkat etmediğini sadece Menger süngerinin oluşum adımlarına odaklandığını göstermektedir. Öz-benzer parça sayısını hatalı bulmasının bir nedeni bu olabilir.

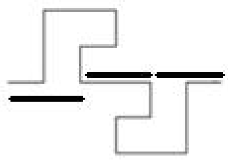
Ö16'nın ise 7. soruda verilen tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada uzunluk ölçme metodunu kullanarak boyutu hesaplamaya çalıştığı belirlenmiştir. Bu öğrencinin sınav kağıdına yazdığı açıklamalar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.55. Ö16'nın çözümü

Ö16'nın ilk fraktal şekli kıyı şeridine benzettiği ve belli oranlarda küçülen doğru parçalarını kullanarak yaklaşık uzunluğunu bulmaya çalıştığı görülmektedir. Daha sonra elde ettiği değerlere göre eğimi hesaplayarak boyutu bulmaya çalışmaktadır. Yapılan klinik mülakattan öğrencinin yapmış olduğu işlemlere yönelik açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

A: İlk şeklin boyutunu bulurken uzunluk ölçme metodundan yararlanmaya çalışmışsın. Neler yaptın?
Ö16: İlk önce nasıl yapacağıma karar veremedim. Sonra şekli bir kıyı şeridine benzettim ve pergelle yaptığımız gibi uzunluk ölçerek boyut bulmaya çalıştım. İlk önce 1/3 uzunluklu bir parça aldım ve toplam uzunluğu 9.1/3 olarak buldum.
A: Niçin uzunluğu 1/3 olarak aldın.
Ö16. Şekle bakarsak şu bölümü (Ö16 fraktalın üretici adımını aşağıdaki gibi 3 eş parçaya bölerek işleme başladığını gösterdi) 1/3 olarak aldım.



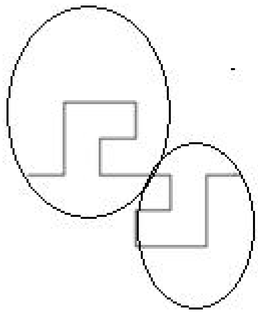
Şekil 3.56. Ö16'nın mülakattaki çizimi

A: 9 parçayı nasıl buldun?
Ö16: Bu parçalarla şekli kabaca ölçmeye başladım 9 parça buldum. Daha sonra uzunluğu tekrar 1/3 oranında küçülttüm yani 1/9 oldu ve yeniden ölçmeye başladım bu sefer 18 parça saydım. Daha sonra bu iki değere göre onların logaritmalarını alıp eğimi buldum ve d=1-s den boyutu hesapladım.

Ö16'nın verilen fraktalı bir kıyı şeridine benzettiği ve uzunluk ölçerek boyutunu hesaplamaya çalıştığı görülmektedir. Ö16'nın ilk 1/3 lük ölçümde kabaca saydığında 9 parça olduğunu söylemesine karşın bu 9 parçanın belirlediği ölçeğe göre eş uzunluklu olmadığı görülmektedir. 1/9 uzunlukta ise 18 eş uzunluklu parça bulduğunu ifade etmektedir. Oysa Ö16, 1/9 uzunluğa göre değil 1/6 uzunluğa göre 18 parça bulmaktadır. Bu durum Ö16'nın hem yanlış büyüme oranları belirlediğini hem de hatalı ölçümler yaparak parça sayılarını yanlış bulduğunu göstermektedir.

Ö16'ya bu fraktalın ne tür bir öz-benzerliğe sahip olduğu sorulduğunda tamamen öz-benzer olduğunu ifade ettiği belirlenmiştir. Ancak öğrencinin öz-benzer parçaları yanlış belirlediği tespit edilmiştir.

A: Verilen bu fraktal yapı nasıl bir öz-benzerliğe sahip noktasal, tamamen ya da yaklaşık mı?
Ö16: Bu tamamen öz-benzer bir fraktal.
A: O halde bu şeklin öz-benzer parçalarını bulabilir misin?
Ö16: Şurası ile şurası

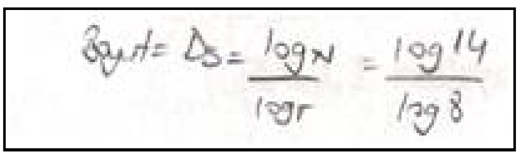


Şekil 3.57. Ö16'nın mülakattaki çizimi

Ö16'nın da Ö9 ve Ö38 öğrencileri gibi öz-benzer parçaları ve büyüme oranlarını belirleme hata yaptığı tespit edilmiştir. Bunun yanında Ö16'nın verilen fraktalın öz-benzerliğini ve öz-benzerlik türünü belirleyebilmesine karşın öz-benzer parçaları ile bu parçaların büyüme oranlarını belirlemede zorlandığı ve hata yaptığı belirlenmiştir.

Tablo 3.11'e göre öğrencilerin %46'sının 8. soruda verilen ağacın boyutunu kutu sayma metodunu kullanarak doğru hesapladıkları, %26'sının ağacın boyutunu hesaplamada küçük işlem hataları yaptığı ve %28'inin ise bu soruyu hiç yapmayarak boş bıraktığı görülmektedir. Bu durum öğrencilerin bazılarının kutu sayma metodunu tam olarak öğrenemediğini ve bu metodu kullanarak bir fraktalın boyutunu hesaplayamadığını göstermektedir.

Örneğin Ö38'in verilen ağacın fraktal boyutunu hesaplamaya yönelik sınav kâğıdına yazdığı çözüm aşağıda sunulmuştur.



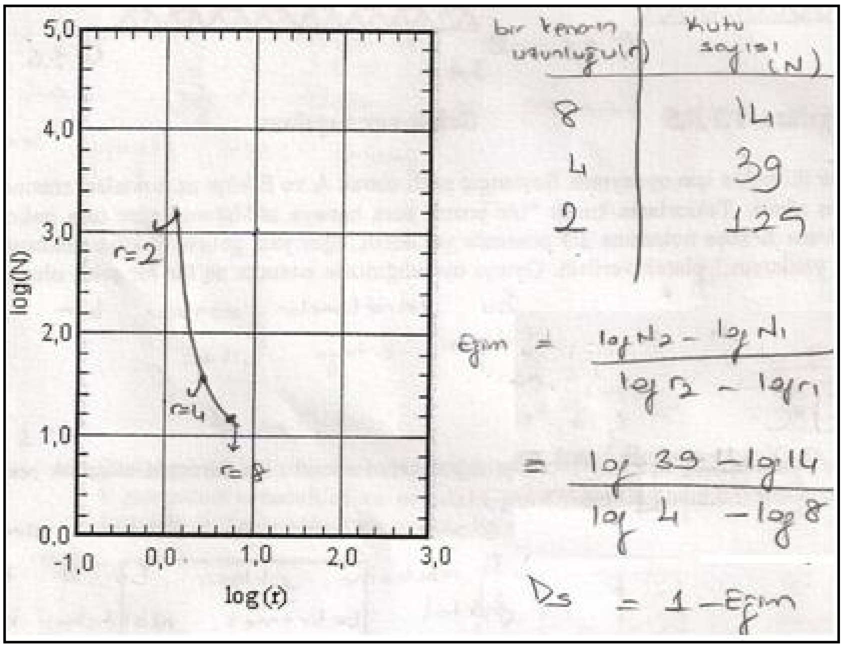
Şekil 3.58. Ö38'in cevabı

Ö38'in sadece verilen ilk kutu için (r=8) boyutu hesaplamaya çalıştığı görülmektedir. Bunun yanında Ö38'in bir eğim değeri bulmadığı ve tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarında olduğu gibi boyutu hesaplamaya çalıştığı belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta Ö38'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Kutu saymaya göre boyutu nasıl buldun?
Ö38: Ben kutu sayma metodunu tam olarak anlamadım. Yani kutuları sayıyorduk ama ne yapacağımı sınavda hatırlayamadım.
A: Logaritmalarını niçin aldın?
Ö38: Kuralımız öyleydi. Sayıp logaritmalarını alıyorduk.

Ö38'in bu açıklamaları kutu sayma metodunu tam olarak bilmediğini göstermektedir. Bunun yanında "kuralımız öyleydi" ifadesinin kuralı ezberlemeye çalıştığını gösterdiği, yani daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirdiği söylenebilir.

Ö9'un kutu sayma metodunu kullanarak 8. soruda verilen ağacın boyutunu bulmaya yönelik cevabı aşağıda sunulmuştur.



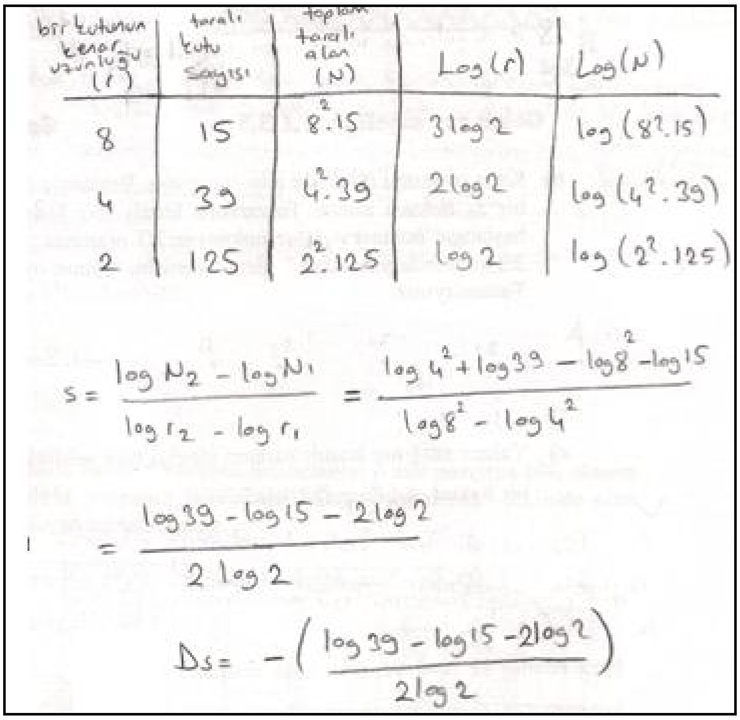
Şekil 3.59. Ö9'un cevabı

Ö9'un ağacı içeren kutu sayılarını bulduğu ve bunların logaritmalarını aldığı, bu değeri bir grafikle gösterdiği ve grafiğin eğimini hesapladığı görülmektedir. Bu durum Ö9'un kutu sayma metodunu kullanarak bir ağacın boyutunu hesaplayabildiğini göstermektedir. Ancak Ö9’un boyutu 1-eğim olarak ifade ettiği belirlenmiştir. Bu ise bu öğrencisinin kutu sayma metodu ile uzunluk ölçme metodunu karıştırdığını göstermektedir. Yapılan klinik mülakatta Ö9’un bu duruma yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Niçin boyutu bulurken 1-s diyorsun?
Ö9: Eğimi bulup negatif olduğundan 1 ekliyorduk, kural buydu.

Bu açıklamayla Ö9’un kutu sayma metodunu anlamlı olarak öğrenmediği sadece uygulama basamaklarını öğrendiğini yani işlemsel bir öğrenme gerçekleştirdiğini gösterdiği söylenebilir.

Buna karşın Ö35’in kutu sayma metodunu kullanarak 8. soruda verilen ağacın boyutunu bulmaya yönelik cevabı aşağıda sunulmuştur.



bir kutunun kenar uzunluğu (r)	taralı kutu sayısı	toplam taralı alan (N)	Log(r)	Log(N)
8	15	$8^2.15$	3log2	$\log(8^2.15)$
4	39	$4^2.39$	2log2	$\log(4^2.39)$
2	125	$2^2.125$	log2	$\log(2^2.125)$

$$s = \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log r_2 - \log r_1} = \frac{\log 4^2 + \log 39 - \log 8^2 - \log 15}{\log 8^2 - \log 4^2}$$

$$= \frac{\log 39 - \log 15 - 2\log 2}{2\log 2}$$

$$Ds = -\left(\frac{\log 39 - \log 15 - 2\log 2}{2\log 2}\right)$$

Şekil 3.60. Ö35’in çözümü

Ö35’in ağacı içeren kutu sayılarını bulduğu ve bunların logaritmalarını aldığı görülmektedir. Bulduğu değerleri bir grafikle göstermemesine karşın elde ettiği değerlere göre bir eğim değeri hesapladığı ve eğimin verilen fraktalın boyut olduğunu bildiği belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakattan da Ö35 öğrencisinin kutu sayma metodunu anladığı görülmektedir.

A: Kutu sayarak boyutu nasıl hesapladın?
Ö35: Öncelikle ağacın içeren kutuları saydım. Daha sonra bu kutu sayıları ile kare kutuların kenar uzunluklarının logaritmalarını aldım.
A. Niçin logaritmalarını alıyorsun?
Ö35: Sonuçta elde ettiğim noktalara göre bir grafik çizdiğimde bu noktaların $y=(1/x)^2$ gibi bir eğrinin grafiği olur. Bu grafik bana çok fazla açıklamada bulunmamakta bunun için noktaların logaritmasını alırsam $y=(1/x)^2$ eğrisi $\log(y)=2\log(1/x)$ gibi bir şey olur ki bu bir doğru grafiğidir ve bunun eğimini bulabilirim. Bulduğum bu eğim değeri ise boyutu verir.

Özetle, hazırlanan programın fraktal boyut konusunun öğrenilmesindeki yeterliğini belirlemede öğrencilerin sınavın 7. ve 8. sorularına verdikleri yanıtlar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

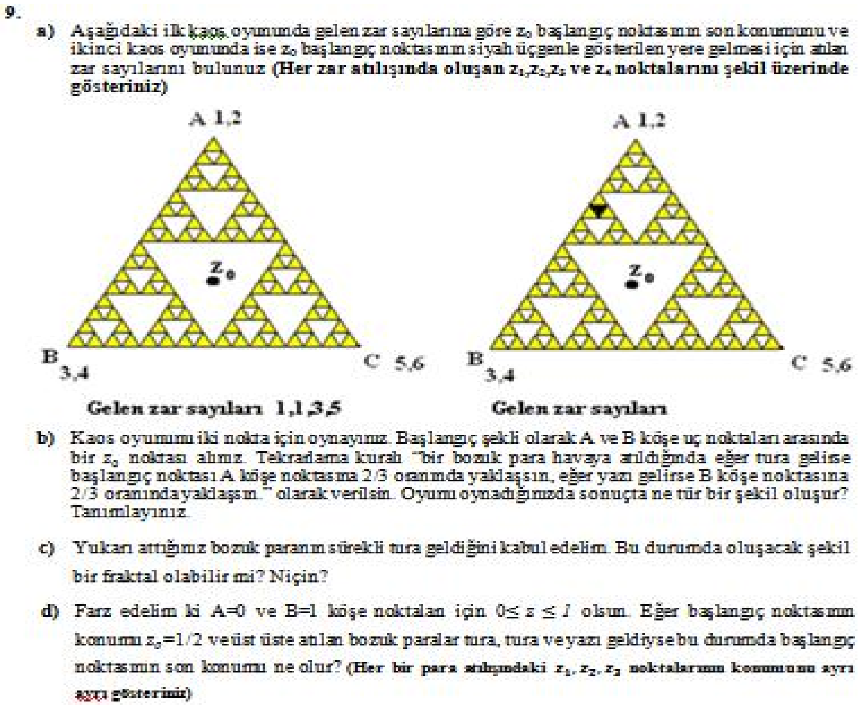
- Tablo 3.11'e göre öğrencilerin %51'i Menger süngerinin boyutunu, %26'sı ile 7. soru ilk şeklin boyutunu ve %46'sı ise ağacın boyutunu tam ve doğru olarak hesapladıklarını göstermektedir. Bu durumda hazırlanan programın kazanımlarının fraktal boyutların öğrenilmesinde istenilen başarıyı sağlamadığı söylenebilir.
- Tablo 3.11'e göre öğrencilerin %57'si 7. soru ilk şeklin boyutunu, %38'i Menger süngerinin boyutunu ve %26'sının ise ağacın boyutunu hesaplamada güçlük yaşadıkları görülmektedir. Ayrıca öğrencilerin %28'inin ise ağacın boyutunu hesaplamayarak bu soruyu boş bıraktıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerin tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplarken en çok öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranını belirlemede sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin tamamen öz-benzer bir nesnenin boyutunu $boyut = \frac{\log(öz-benzer\ parça\ sayısı)}{\log(büyüme\ oranı)}$ formülüyle hesaplandığını bildiği ve formülde paydaki ifadenin öz-benzer parça sayısının logaritmasını ve paydadaki ifadenin ise büyüme oranının logaritması olduğunu bildikleri tespit edilmiştir. Buna karşın öğrencilerin büyük bir kısmının bu formülün nasıl oluştuğunu ve formülü uygularken neleri bulduklarının farkında olmadıkları belirlenmiştir. Bu durum bu öğrencilerin verilen formülü sorgulamadan ezberlediğini ve daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Benzer şekilde bazı öğrencilerin kutu sayma metodunu kullanarak boyut hesaplamada boyutu hesaplayabildiği ancak yaptığı işlemlerin nedeni üzerinde çok fazla düşünmediği ve işlemsel diyebileceğimiz bir öğrenmeye sahip oldukları söylenebilir.

- Tablo 3.11'e göre öğrencilerin 7. soruda verilen Menger süngerinin fraktal boyutunu verilen diğer fraktalın boyutuna göre daha başarılı olarak hesapladıkları görülmektedir. Bu durumun nedenlerinden birisi öğrencilerin Menger süngeri fraktalının görünüşüne Sierpinski halısından dolayı alışık olmaları olabilir. Çünkü ders ortamında öğrencileri Sierpinski halısını oluşturmakta ve içerisindeki örüntüleri incelememektedirler. İlk verilen fraktalda bazı kenarlar ard arda tekrarlanarak oluşmaktadır. Bu oluşuma bazı öğrencilerin dikkat etmemesi başarının düşük olmasındaki bir diğer neden olabilir.
- Birkaç öğrencinin ise uzunluk ölçme metodu ile kutu sayma metodunu karıştırdıkları ve kutu sayma metodunda uzunluk ölçme metodunun işlemlerini yaptıkları belirlenmiştir.

3.1.1.7. Kaos Konusunun Öğrenilmesinde Öğrencilerin Programın Hangi Kazanımlarını Edinmede Başarılı Olduklarına İlişkin Bulgular

Hazırlanan programın kaos konusunun öğrenilmesindeki yeterliğine karar vermek amacıyla öğrencilerin sınavda verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıdaki aşamalardan geçilerek sunulmuştur. Öncelikle öğrencilerin sınavda sorulan 9. soruya verdikleri cevaplar dört ayrı kategoriye (iyi, orta, zayıf ve boş) göre sınıflandırılmıştır. 9. sorunun A şıkkı öğrencilerin kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştuğuna yönelik anlamlarını belirlemek ve B,C ve D şıkları ise farklı noktalara ve farklı tekrarlama kurallarına göre oynanan Kaos oyunu sonucunda ne tür şekillerin oluşacağını ve bunlardan fraktal olanlarını belirleyip belirleyemediklerini tespit etmeye yönelik hazırlanmıştır. 9. Sorunun A şıkkında verilen noktaların yerlerini tam ve doğru olarak belirleyen öğrenciler iyi; noktaların yerlerini doğru olarak belirleyen ancak küçük hatalar yapan öğrenciler orta; noktaların yerlerini tamamen yanlış belirleyen öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde 9. sorunun B,C ve D şıklarında verilen tekrarlama kuralına göre iki nokta için Kaos oyununu doğru oynayan ve oluşan şekilleri doğru tanımlayan ve doğru açıklamalarda bulunan öğrenciler iyi; kaos oyununu doğru oynamasına karşın oluşan şekilleri tanımlamada ve açıklamalarında küçük hatalar yapan öğrenciler orta; kaos oyunu sonucu oluşan şekilleri yanlış tanımlayan ve yanlış açıklamalarda bulunan öğrenciler ise zayıf olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğrencilerin frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak tabloda gösterilmiştir. Öğrencilerin sınav sorusuna verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuştur. En sonunda ise bir sonuç paragrafına göre elde edilen bulgular özetlenmiştir.

Sınavda sorulan 9. Soru Şekil 3.58'de ve öğrencilerin 9. soruya yönelik başarıları Tablo 3.12'de sırasıyla sunulmuştur.


9.

a) Aşağıdaki ilk kaos oyununda gelen zar sayılarına göre z_0 başlangıç noktasının son konumunu ve ikinci kaos oyununda ise z_0 başlangıç noktasının siyah üçgenle gösterilen yere gelmesi için atılan zar sayılarını bulunuz **(Her zar atılışında oluşan z_1, z_2, z_3 ve z_4 noktalarını şekil üzerinde gösteriniz)**

Gelen zar sayıları 1,1,3,5 **Gelen zar sayıları**

b) Kaos oyununu iki nokta için oynayınız. Başlangıç şekli olarak A ve B köşe uç noktaları arasında bir z_0 noktası alınız. Tekrarlama kuralı "bir bozuk para havaya atıldığında eğer tura gelirse başlangıç noktası A köşe noktasına 2/3 oranında yaklaşsın, eğer yazı gelirse B köşe noktasına 2/3 oranında yaklaşsın." olarak verilsin. Oyunu oynadığınızda sonuçta ne tür bir şekil oluşur? Tanımlayınız.

c) Yukarı attığınız bozuk paranın sürekli tura geldiğini kabul edelim. Bu durumda oluşacak şekil bir fraktal olabilir mi? Niçin?

d) Farz edelim ki A=0 ve B=1 köşe noktaları için $0 \leq z \leq 1$ olsun. Eğer başlangıç noktasının konumu $z_0=1/2$ ve üst üste atılan bozuk paralar tura, tura ve yazı geldiyse bu durumda başlangıç noktasının son konumu ne olur? **(Her bir para atılışındaki z_1, z_2, z_3 noktalarının konumunu ayrı ayrı gösteriniz)**

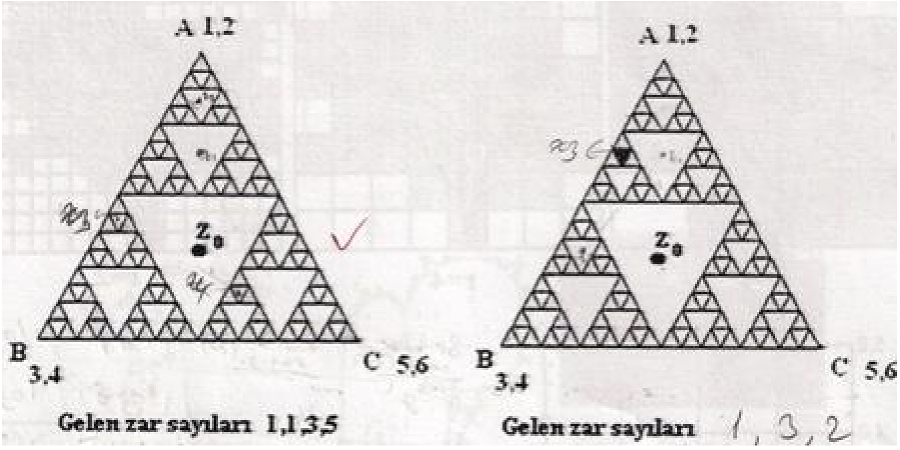
Şekil 3.61. Soru 9

Tablo 3.12. Öğrencilerin 9. soruya yönelik başarıları

9. soru	İyi		Orta		Zayıf		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
A şıkkı	2	5	11	28	17	44	9	23
B,C,D şıkları	8	21	11	28	14	36	6	15

Tabloya göre öğrencilerin %5'inin verilen noktaların konumlarını tam ve doğru olarak belirledikleri, % 28'inin ise verilen noktaların konumlarını belirlemede küçük hatalar yaptıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö25'in 9. sorunun A şıkkında verdiği yanıt aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.62. Ö25'in çözümü

Ö25'in gelen zar sayılarına göre z_0 başlangıç noktasının konumunu doğru olarak belirlediği ve verilen başlangıç noktasının son konumu için gelmesi gereken zar sayılarını doğru tespit ettiği görülmektedir. Yapılan klinik mülakatta Ö25'in elde ettiği bu çözümlere yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Kaos oyununda başlangıç noktasının atılan zar sayılarına göre son konumunu bulurken neye dikkat ettin?
Ö25: İlk zar 1 olduğundan bu nokta bunun tam orta noktası olarak şu diğer üçgenin orta noktasında olacaktır. Yine 1 e tekrar edince diğerinin orta noktası olacaktır. 3 gelince bu durumda nokta tam şuraya gelecektir.
A: Niçin o noktaya gelmeli?
Ö25. Çünkü, kaos oyununda Sierpinski üçgenini oluşturan noktalar her bir zar atılışında gitgide küçülen üçgenler içerisinde hareket etmektedir. Hatta son zar atılışında ise daha küçük bir üçgen içine düşmeli ama soruda çizilmemiş.

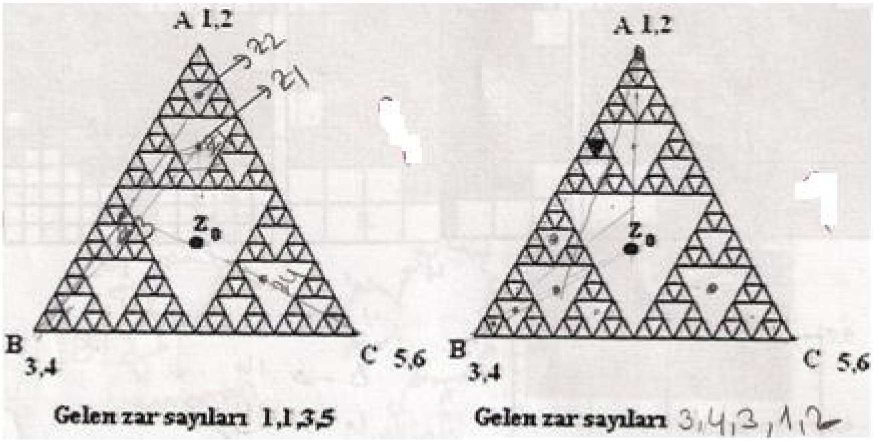
Ö25'in "Sierpinski üçgenini oluşturan noktalar her bir zar atılışında gitgide küçülen üçgenler içerisinde hareket etmektedir" açıklaması onun kaos oyunundaki noktaların hareketini anladığını ve bu nedenle oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunun farkında olduğunu göstermektedir. Bunun yanında Ö25'in verilen başlangıç noktasının son konumu için gelmesi gereken zar sayılarını nasıl belirlediğine yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Diğerinin zar atım kuralının 1,3,2 olduğuna nasıl karar verdin?
Ö25: Tersten hareket etmeyi denedim. Mesela zar dedim 3 gelse şuraya gelecek (bir sonraki büyük üçgeni göstererek) sonra 1 ya da 2 gelirse şuraya gelir dedim ve buldum.

Bu açıklama Ö25'in yine Kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşumunu sağlayan noktaların hareket özelliğini göz önüne aldığını göstermektedir.

Tablo 3.12'ye göre öğrencilerin % 44'ünün A şıkkında verilen noktaların yerlerini belirleyemedikleri ve %23'ünün ise bu soruyu boş bıraktıkları belirlenmiştir. Elde edilen bu bulgu öğrencilerin çoğunun kaos oyununu ve kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştuğunu tam olarak anlayamadıklarını göstermektedir.

Örneğin Ö13'ün sınav kağıdına yazdığı çözümler aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.63. Ö13'ün cevabı

Ö13'ün gelen zar sayılarına göre başlangıç noktasının son konumunu belirlemede noktanın konumunu yaklaşık olarak belirlemeye çalıştığı ve kaos oyununda başlangıç noktalarının her bir zar atılışında Sierpinski üçgeninden çıkarılan üçgenlerdeki hareketini dikkate almadığı görülmektedir. Bu nedenle öğrencinin başlangıç noktasının son konumunu hatalı bulduğu söylenebilir. Yapılan klinik mülakatta da Ö13'ün başlangıç noktasının konumunu yaklaşık olarak belirlemeye çalıştığı tespit edilmiştir.

A: Kaos oyununa geçelim. Başlangıç noktasının zar atılmasına göre hareketini nasıl belirledin?
Ö13: Tahmini olarak hareket noktalarını belirlemeye çalıştım. Yani ölçerken tam milimetrik ölçemedim, göz kararı belirlemeye çalıştım.

Bu açıklama aynı zamanda bu öğrencinin kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştuğunu anlamadığını da göstermektedir. Bunun yanında Ö13'ün verilen başlangıç noktasının son konumunu belirlemede atılan zar sayısını yanlış olarak belirlediği tespit edilmiştir. Ö13 başlangıç noktasını karalı bölgenin içerisine düşürmek için toplam 5 zar atılması gerektiğini belirtmektedir. Oysa 3 zar atılışıyla istenilen bölgeye ulaşılabilmektedir. 5 zar atılışı sonunda ise karalanan bölgenin tam orta noktasına değil de o bölgede bulunan çıkarılan küçük üçgenlerden biri içerisinde başlangıç noktası yer alacaktır. Bu duruma yönelik Ö13'ün açıklaması aşağıda sunulmuştur.

> A: Diğer oyunda zar atımını niçin 3,4,3,1,2 olarak belirledin? Kuralın neydi?
> Ö13: İşaretli yer A ya yakındı bu nedenle önce noktayı o bölgeden çıkarmak istedim. Bunu için B'ye yaklaşmalıydı. Bu nedenle 3,4,3 olmalı dedim. Ondan sonra A ya doğru hareket etmeliyim dedim. Bu nedenle 1,2 yazdım. Böylece bölgeye düştü sanırım.

Ö13'ün "böylece bölgeye düştü sanırım" açıklaması aslında kendisinin de sonuçtan emin olmadığını yaklaşık olarak noktaların yerini belirlemeye çalıştığını göstermektedir.

Öğrencilerin sınav kağıtları incelendiğinde Kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşmasında sıklıkla noktaların nasıl hareket ettiklerini bilmedikleri ve bu hareketleri kabaca tahmin etmeye çalıştıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö11'in klinik mülakattaki açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Kaos oyununda noktaların hareketine nasıl karar verdin?
> Ö11: Tam olarak oyunu anlayamadım. Mesela ilk soruda bu noktanın nereye gideceğini ölçmeden bulamam ki.

Bu açıklama Ö11'in kaos oyunu sonucu nasıl Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlayamadığını göstermektedir.

Bazı öğrencilerin ise kaos oyununun rastgele bir süreç olmadığı ve kurallı olduğu şeklinde bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Bu durumun aynı zamanda kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğuna yönelik bir anlama geliştirmelerine de sebep olduğu söylenebilir.

Örneğin Ö9'un klinik mülakattaki ifadeleri aşağıda sunulmuştur.

> A: Kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni elde edilmektedir?
> Ö9: Tam olarak bilemiyorum. Ancak bu oyunun bir kuralı ve bir başlangıç noktası var. Bu kural sonucunda Sierpinski üçgeni elde ediliyor. Kural atılan adımın bir önceki adımın yarısı kadar gidilmesiyle oluşuyor. Sierpinski üçgeninde de bu kural temel alındığı için bu oyun sonucunda Sierpinski üçgeni oluşuyor.

Ö9'un bu açıklamaları kaos oyununun rastgele değil de kurallı bir oyun olduğu şeklinde bir düşünceye sahip olduğunu ve oyunun kuralı ile Sierpinski üçgeninin oluşum kurallarının benzemesi nedeniyle kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluştuğu şeklinde bir anlamaya sahip olduğu görülmektedir. Bu öğrenciye kaos oyununun kuralını biraz değiştirdiğimizde sonuçta yine Sierpinski üçgeninin oluşup oluşmadığı sorulduğunda verdiği yanıt aşağıda sunulmuştur.

A: Oyunun kuralını 1/3 oranında yapsak yine Sierpinski üçgeni oluşur mu?,
Ö9: Oluşmazdı. Çünkü Sierpinski oluşmasının sebebi ½ oranında olmasından.

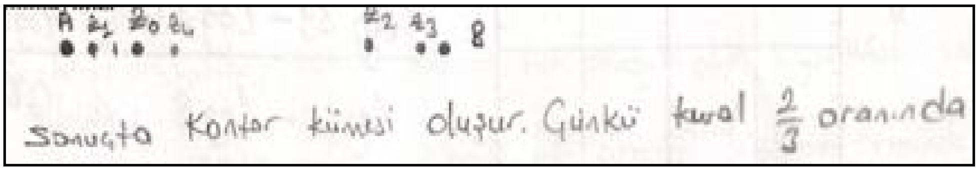
Ö9'un oyunun kuralına göre oluşan şekillerinde farklılaşabileceğini ifade ettiği görülmektedir. Bu öğrenciye kaos oyunu kurallı bir oyun olmasına karşın rastgele seçilen ve rastgele atılan zarlar sonucu nasıl mükemmel Sierpinski üçgeninin oluştuğu sorulduğunda verdiği yanıt aşağıda sunulmuştur.

A: Oyunu başta kağıt üzerinde oynarken sonuçta ne tür bir şekil oluşacağını düşünmüştün?
Ö9: Bir üçgen oluşacağını doğru tahmin etmiştim. Ancak ben boşlukların kalmayacağını üçgenin tüm yüzeyinin noktalarla kaplanacağını sanmıştım.
A: O halde bir kurallı da olsa rastgele seçilen bir nokta ve rastgele atılan zarlara göre nasıl böyle mükemmel bir şekil oluşmakta?
Ö9: Aslında tam olarak niye olduğunu ben de bilmiyorum. Hocamız derste açıklamaya çalıştı ama çok anlamadım.

Bu açıklama her ne kadar Ö9'un kaos oyununun kuralından dolayı Sierpinski üçgeninin oluştuğunu düşünmesine karşın şeklin nasıl oluştuğunu tam olarak anlayamadığını göstermektedir.

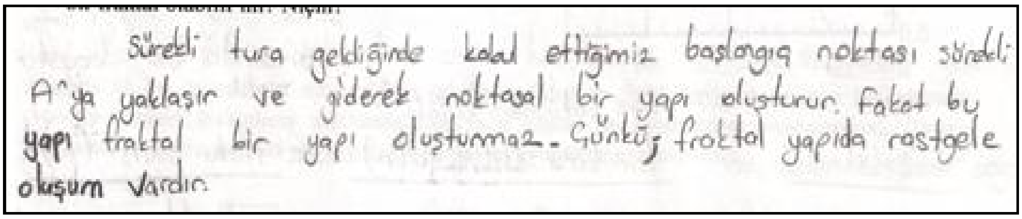
Tablo 3.12'ye göre öğrencilerin %21'inin verilen tekrarlama kuralına göre iki nokta için Kaos oyunu sonucu oluşan şekli doğru tanımladıkları ve doğru açıklamalarda bulundukları, %28'inin ise oyun sonucu oluşan şekli doğru tahmin etmelerine karşın eksik açıklamalarda bulundukları belirlenmiştir.

Örneğin Ö5'in iki nokta için verilen tekrarlama kuralına göre oluşacak şekle yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.


Sonuçta Kontor kümesi oluşur. Çünkü kural $\frac{2}{3}$ oranında

Şekil 3.64. Ö5’in cevabı

Ö5’in verilen tekrarlama kuralına göre noktaların 2/3 oranında hareket etmesinden dolayı Cantor kümesinin oluşacağını ifade ettiği görülmektedir. Bu öğrenciye para atılmasının kurallı olması durumunda oluşacak şeklin bir fraktal olup olmadığı sorulduğunda verdiği cevap aşağıda sunulmuştur.

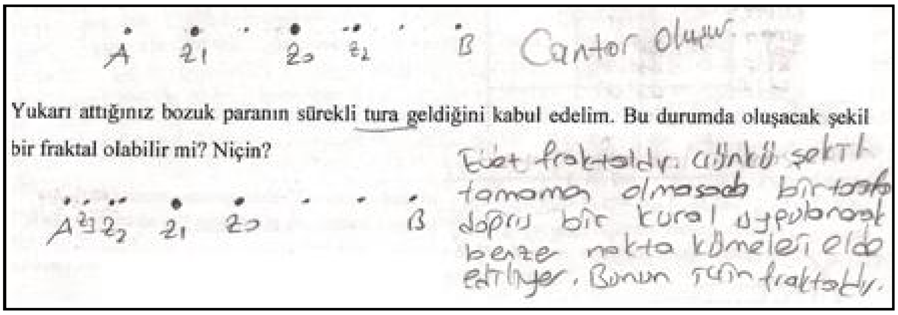

Sürekli tura geldiğinde kabul ettiğimiz başlangıç noktası sürekli A’ya yaklaşır ve giderek noktasal bir yapı oluşturur. Fakat bu yapı fraktal bir yapı oluşturmaz. Çünkü; fraktal yapıda rastgele oluşum vardır.

Şekil 3.65. Ö5’in açıklamaları

Ö5’in para atılması kurallı olduğunda noktaların bir köşeye toplanması nedeniyle bir fraktal yapı oluşmayacağını ve kaos oyununda fraktal yapıların rastgele zar ya da para atılması sonucu oluştuğunu ifade ettiği belirlenmiştir.

Bunun yanında bazı öğrencilerin iki nokta için kaos oyunu sonucu Cantor kümesinin oluşacağını tahmin etmesine karşın para atılması kurallı olduğunda oluşacak şeklin bir fraktal olduğunu ifade ettikleri tespit edilmiştir. Bu durum bazı öğrencilerin her kaos oyunu sonucu mutlaka bir fraktal yapının oluştuğu şeklinde bir anlamaya sahip olduklarını göstermektedir.

Örneğin 16’nın iki nokta için oynanan kaos oyununa ve atılan paraların kurallı olmasına yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.66. Ö16'nın açıklamaları

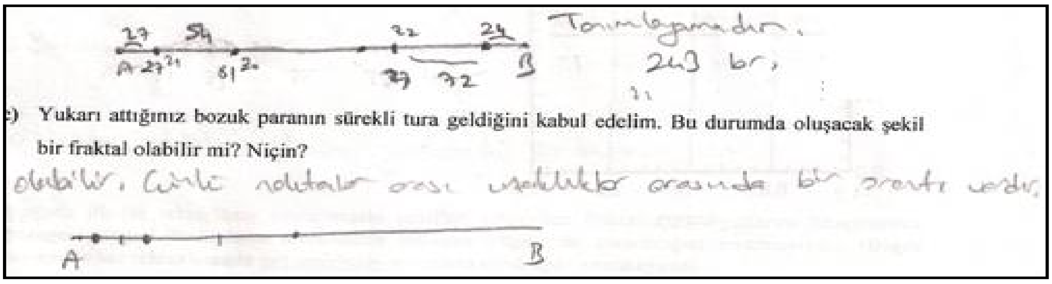
Ö16'nın iki nokta için kaos oyununu oynadığında bir noktalar yığını oluşacağını gördüğünden Cantor kümesinin oluşacağını ifade etmektedir. Ancak bu öğrenci para atılması kurallı olduğunda noktaların bir bölgeye doğru kurallı olarak yaklaşması nedeniyle yine bir fraktalın oluşacağını ifade ettiği belirlenmiştir. Yapılan klinik mülakatta Ö16'nın bu soruya yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Para atılması kurallı olduğunda oluşacak şekle bir fraktal demişsin? Niçin bir fraktal olur?
Ö16: Çünkü sonsuz tane nokta elde ediyoruz ve bu noktalar bir kurala göre hareket ediyor.

Ö16'nın para atılması işlemine devam edildiğinde bir müddet sonra noktaların tek bir nokta gibi görüneceğini düşünmemektedir. Bir tekrarlama kuralının olması nedeniyle oyun sonunda oluşacak şeklin bir fraktal olacağını ifade etmektedir.

Tablo 3.12'ye göre öğrencilerin %36'sının verilen tekrarlama kuralına göre iki nokta için Kaos oyunu sonucu oluşan şekli tanımlayamadıkları ve hatalı açıklamalarda bulundukları, %15'inin ise bu soruyu boş bıraktığı görülmektedir. Bu durum öğrencilerin çoğunun farklı noktalara ve farklı tekrarlama kurallarına göre oynanan Kaos oyunu sonucunda oluşan şekilleri ve bu şekillerden fraktal olanlarını tam olarak belirleyemediklerini göstermektedir.

Örneğin Ö13'ün verilen tekrarlama kuralına göre iki nokta için kaos oyununun sonucu ve paranın kurallı atılması durumunda oluşan şekle yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3.67. Ö13'ün açıklamaları

Ö13'ün iki nokta için verilen tekrarlama kuralına göre kaos oyunu sonucu oluşan şekli tanımlayamadığı görülmektedir. Yapılan klinik mülakatta öğrencinin oluşan şekli niçin tanımlayamadığına yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Paranın atılması sonucu oluşacak şekli niçin tanımlayamadın?
Ö13: Birkaç adım için oluşacak şekli çizmeye çalıştım ama şeklin nasıl olacağına karar veremedim. Yani noktalar oluşuyordu, ama bilemiyorum.

Buna karşın Ö13'ün para atılması kurallı olduğunda oluşacak şeklin bir fraktal olduğunu ifade ettiği görülmektedir. Ö13'ün açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Ama oluşacak şekle bir fraktaldır demişsin, niçin?
Ö13: bir oran olduğundan. Yani noktalar bir kurala göre hareket ediyordu.

Ö13'ün bu açıklaması Ö16'nın açıklamasıyla bir paralellik göstermektedir. Her iki öğrencinin de noktaların bir tekrarlama kuralına göre oluşması nedeniyle oyun sonunda oluşan yapının bir fraktal olabileceğini düşündüklerini göstermektedir. Bu durumun aynı zamanda her iki öğrencinin de kaos oyunu sonucu mutlaka bir fraktal yapının oluştuğu şeklinde bir anlayışa sahip olduğunu gösterdiği söylenebilir.

Özetle, hazırlanan programın kaos konusunun öğrenilmesindeki yeterliğini belirlemeye yönelik öğrencilerin sınavın 9. sorusuna verdikleri yanıtlar ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

- Tablo 3.12'ye göre öğrencilerin %5'i kaos oyununda noktaların hareketini tam belirleyebilirken %28'inin noktaların hareketini belirlemede küçük hatalar yaptıkları görülmektedir. Bu durum öğrencilerin kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunun anlaşılmasında temel kavram olan noktaların hareketlerini anlamadıklarını göstermektedir. Bu ise öğrencilerin kaos oyunu ve kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştuğunu tam olarak anlamamalarına neden olmaktadır.

- Tablo 3.12'ye göre öğrencilerin %44'ünün A şeklindeki noktaların yerlerini belirleyemedikleri ve %23'ünün ise bu soruyu boş bıraktıkları görülmektedir. Sierpinski üçgeni içerisinde verilen noktaların atılan zar sayılarına göre konumlarındaki değişimleri belirlemeleri istendiğinde öğrencilerin sıklıkla gelen zar sayıları ile Sierpinski üçgenindeki farklı küçük üçgenler arasında bir ilişki kurmadıkları ve yaklaşık olarak noktaların yerlerini belirlemeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştuğunu anlamamalarının bir diğer nedenidir.
- Buna karşın sadece iki öğrencinin kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşmasında gelen zar sayıları ile Sierpinski üçgenindeki küçük üçgenleri arasında doğru bir ilişki kurduğu tespit edilmiştir.
- Bazı öğrencilerin kaos oyununun rastgele bir süreç olmadığı ve kurallı olduğu şeklinde bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Bu öğrencilerin oyunun kuralı ile Sierpinski üçgeninin oluşum kurallarının benzemesi nedeniyle kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluştuğu şeklinde bir anlamaya sahip olduğu görülmektedir. Ancak bu öğrencilerin oyun sonunda ortaya çıkan şeklin nasıl oluştuğunu bilmedikleri belirlenmiştir.
- Tablo 3.12'ye göre öğrencilerin %21'inin iki nokta için kaos oyunu sonucu oluşan şekli doğru tanımladıkları, %28'inin ise oluşacak şekli tahmin etmelerine karşın hatalı açıklamalar yaptıkları görülmektedir. Bunun yanında öğrencilerin %36'ının farklı sayıda nokta ve farklı bir tekrarlama kuralı sonunda oluşacak şekli tahmin edemediği ve %15'inin ise bu soruyu boş bıraktı belirlenmiştir. Bu durum farklı sayıda nokta ve farklı tekrarlama kuralları için kaos oyunu sonucu oluşacak şekilleri öğrencilerin tahmin edemediklerini göstermektedir. Ayrıca bazı öğrencilerin zar atılması ya da para atılmasının kurallı olması nedeniyle oluşan noktaların bir kural dahilinde hareket ettiğinden kaos oyunu sonucu oluşan her yapının mutlaka bir fraktal olacağı yönünde bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir.

3.1.2. Fraktal Geometri Programının Uygulama Sürecinde Hazırlanan Materyaller, Kullanılan Yöntem ve Tekniklerin Öğrencilerin Öğrenme Sürecine Etkilerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde fraktal geometri öğretim programının uygulama sürecinde fraktal konularının öğretiminde kullanılan materyaller (çalışma yaprakları, etkinlikler, bilgisayar programları, somut nesneler) ve öğretim yöntem ve tekniklerinin öğrencilerin öğrenmeleri üzerine olan etkilerine yer verilmiştir. Böylece programın uygulama sürecinde ortaya çıkan durumlar belirlenerek programın hangi bölgelerinde iyileştirilmelerin yapılacağına karar verilmiştir. Kısacası elde edilen bulgular programın öğrenilebilirlik boyutundan yeterliğinin uygulama sürecindeki değerlendirilmesini yansıtmaktadır. Bu bölümde öğrencilerle ve dersin öğretmeniyle her ders sonunda yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen bulgular nitel olarak sunulmuştur.

3.1.2.1. Fraktal Kavramına Giriş ve Geometrik Tekrarlamalar

Halis öğretmen fraktal geometri dersine başlarken giriş aşamasında kullanılan PowerPoint sunusunun ve çalışma yaprağı-1'in öğrencilerin fraktal geometrinin Euclid geometrisinden farklı bir geometri olduğu yönünde bir algı geliştirmelerinde etkili olduğunu ifade etmektedir. Bunun yanında dersin öğretmeni sınıf tartışmasında doğal fraktal örnekleri kullanmanın bu farkı öğrencilerinin görmelerine yardımcı olduğunu belirtmektedir.

> Ben dersin şu şekilde gitmesine karar verdim. Öncelikle fraktal geometrinin Euclid geometrisinden farklı bir şey olduğunu öğrencilerin görmesini istedim. Çalışma yaprağında öğrenciler oradaki nesneleri şekillerine göre sınıflandırdılar. Ben de doğadaki nesnelerin Euclid ile ifade edilmesinin güçlüğünü vurguladım. Ağaçların şekillerini, eğrelti otunun şeklinin nasıl olduğunu sınıfta tartıştık. Bu tartışmalar öğrencilerin ilgisini oldukça çekti ve fraktal geometrinin doğayı açıklayan bir geometri olduğu yönünde bir algının oluşmaya başladığını hissettim.

Ders sonu mülakat yapılan öğrencilerde de Halis öğretmenin belirttiği gibi bir algının oluştuğu görülmüştür.

Örneğin Ö7'nin dersin başında yaptıkları çalışmalara yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Bu derse başlarken neler yaptınız?
Ö7: Bu derste çok ilginç şeylerle karşılaştım. Ağaçların, eğrelti otunun da matematikte incelendiğini gördüm. İlk kez farklı bir geometrinin olduğunu gördüm.
A: Fraktal geometri niçin Euclid'den farklı bir geometri?
Ö7: Tam bilmiyorum tabi daha yeni öğrenmeye başladık bu geometriyi, ancak bu geometri Euclid'den farklı olarak doğal nesneleri incelememizi sağlıyor. Mesela derste doğru parçalarını kullanarak ağaç şekilleri oluşturmak beni çok etkiledi.

Öğrencinin bu açıklamaları farklı bir geometri olarak fraktal geometrinin algılanmasında çalışma yaprağı-2'nin de etkili olduğunu göstermektedir.

Bunun yanında Halis öğretmen izlediği bu yol nedeniyle bazı öğrencilerin fraktal geometrinin doğayı tıpa tıp resmedeceği yönünde bir beklenti içine girdiklerini aşağıdaki sözleriyle dile getirmektedir.

Ağacı oluştururken dallanma 3 parçada olmaktaydı ve sonunda güzel bir ağaç ortaya çıktı. Ancak bazı öğrenciler fraktal geometrinin doğanın geometrisi olduğunu söylediğimi, ancak doğada bu türlü mükemmel bir ağacın olamayacağını ifade ettiler. Çevresel faktörlerin ağacın şeklini değiştirdiğini belirttiler. Yani bu geometrinin de tam olarak doğayı ifade edemediklerini söylüyorlar. Ben bu geometrinin de idealize edilmiş bir geometri olduğunu, tabi ki doğadakilerin tıpatıp aynısını olmasa bile gerçeğine çok yakın şekillerin oluşturulabileceğini ifade ettim.

Öğretmenin derste yeni bir kavram olarak fraktal geometri algısını oluşturma çabası bazı yanlış anlamalara neden olsa da en azında öğrencilerin fraktal geometri ile doğal nesneler arasında ilişki kurmalarını sağladığı söylenebilir.

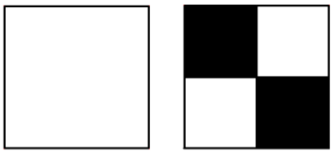
Halis öğretmen öğrencilerin verilen bir başlangıç ve üreticiye göre bir sonraki tekrarlamada oluşacak şekli rahatlıkla çizebildiklerini ifade etmektedir.

A: Öğrenciler parça ekleme ve çıkartmaları ya da döndürmeleri kullanarak fraktalların şekillerini çizebiliyorlar mı?
H: Orada sorun yok. Öğrenciler başlangıç ve üretici iyi tanımlandığı sürece şeklin bir sonraki tekrarlamadaki görünüşünü rahatlıkla çizmekteler.

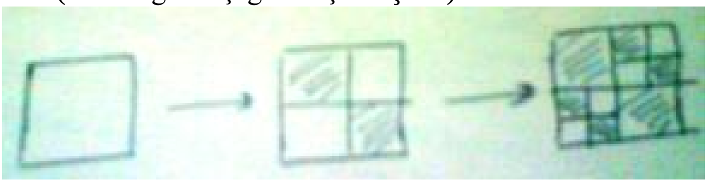
Ders sonu mülakata katılan tüm öğrencilerin verilen bir başlangıç ve üreticiye göre oluşan bir fraktalın birkaç adımdaki şeklini başarılı bir şekilde çizdikleri belirlenmiştir.

Örneğin Ö16'nın ders sonu mülakatta verdiği yanıtlar aşağıda sunulmuştur.

A: Kuralı bu olarak verilen bir fraktalın bir sonraki adımdaki şeklini çizebilir misin?



Ö16: (Ö16 kağıda aşağıdaki şekli çizdi)



A: Çizdiğin bu şekle göre bana başlangıç ve üreticiyi söyler misin?
Ö16: Başlangıç şeklimizi bir kare. Sanırım karenin kenarları eşit olarak ikiye bölünmüş ve dört küçük kare oluşmuş. Daha sonra sol üst ve sağ alttaki kareler siyaha boyanmış.
A: Sen bir sonraki adımda neye dikkat ettin?
Ö16: Bende geride kalan iki kare için (Ö16 boyanmamış kareleri göstererek) aynı şeyi yaptım. Bunların kenarlarını ikiye bölüp toplam 8 kare elde ettim ve sol üstteki kare ile sağ alttaki kareyi karaladım.
A: Peki yörünge nedir?
Ö16: Yörünge bu sıra oluyor. Yani bu her adımda oluşan şekillerin topluluğu.

Ö16'nın bu açıklamaları bu öğrencinin geometrik tekrarlamaları kullanarak şekilleri çizebildiğini ve üretici, başlangıç şekli ve yörünge kavramlarını anladığını göstermektedir. Bu bağlamda geometrik tekrarlamalar konusunun öğrenilmesinde kullanılan çalışma yapraklarının yeterli olduğu söylenebilir.

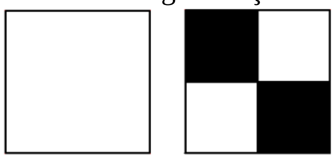
3.1.2.2. Fraktalların Çevresi, Alanı ve Hacmi

Halis öğretmen öğrencilerin fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplarken oldukça zorlandıklarını, ancak bunun nedeninin etkinliklerin zor ve anlaşılmasının güç olmasından değil, öğrencilerin fraktal şekil içerisindeki örüntüleri belirlemede ve bunları bir seriyle göstermedeki eksikliklerinden kaynaklandığını belirtmektedir.

Öğrenciler çevre ve alanı hesaplarken oldukça zorlandılar. Bir kısmı serinin nasıl toplanacağını ya da yakınsaklık ıraksaklık durumunu biliyor, ancak örüntüyü seriye dökemiyor. O seriyi yakalayabilen öğrenci sayısı sınırlı. Özellikle Sierpinski dörtyüzlüsünde bu oran daha da düşüyor. Yani öğrencilerin buldukları örüntüleri matematiksel forma getirmede problemleri var. Diğer bir kısım öğrenci ise ya bir örüntü bulamıyor, ya da bulduğu örüntüyü düzenleyemiyor. Bazen ¼'ün karesi küpü şeklinde giden bir ifadeyi düzenleyip bir geometrik seri haline getirmede sorun yaşıyorlar. Geçen dönem aldıkları derste geometrik seri toplamını öğrenciler gördüler, ancak yine de elde ettikleri verileri düzenleyemiyorlar. Daha doğrusu bir seri yakalamada sıkıntı var.

Ders sonu mülakat yapılan Ö33'ün verilen bir fraktal şeklin çevresi ve alanını hesaplarken oldukça zorlandığı belirlenmiştir.

A: Kuralı bu şekilde verilen fraktalın sonsuz durumda toplam çevresi ve alanı ne olur? Karalanan bölgelerin çıkarıldığını düşün.



Ö33: Şeklin toplam çevresini bulmamı istiyorsunuz. Başlangıçta karenin bir kenar uzunluğu 1 br idi. Tamamından çıkarılanların çevresini çıkarırsam o zaman toplam çevreyi bulurum. 1. tekrarlamada bir kenarı ½ idi o zaman 4 tane olacak ancak 2 kare çıkardım o zaman çıkarılan toplam çevre 2. ½ .4 olmalı.

Ö33 verilen fraktalın toplam çevresini bulurken çıkarılan bölgelerin çevresini başlangıçtaki kareden çıkarmayı düşünmektedir. Ancak yazdığı işlemin sonucu 4'tür ki bu başlangıçtaki karenin çevresidir. Bu durumda bu adım için çevrenin sıfır olması gerekir. Ö33 bu yolla bir seri yakalamaya çalışmakta, ancak şekilde kenarların nasıl değiştiğine dikkat etmemektedir. Ö33'ün mülakattaki diğer açıklamalarına da bakıldığında bu durum görülmektedir.

Ö33: 2. tekrarlamada 4 tane çıkaracak yine ½ nin karesi çarpı 4 olacak sonra 2^3 çarpı ½ nin küpü çarpı 4 olacak ve bu şekilde devam edecek. Ben bunu 4 parantezine alırsam şimdi 2 tane karem var birinin çevresi ½ çarpı 4 kadar olacak daha sonra 4 tane kare çıkartıcam onun da ½ nin karesi çarpı 4 kadar azalacak sonra 8 tane olacak 4 çarpı ½ nin küpü kadar azalacak daha sonra buradan bir seri gelmesi gerekecek. Onu da nasıl hesaplarım. Burada bir şey bulmam lazım. Hepsinde ortak olan ½ çarpı 4 … alırsam 2 artı 4 çarpı ½ buradan şöyle bir tekrar bulup buradan 1/1-r yapmam lazım. Büyük ihtimal şurası (kastetiği yer ortak paranteze aldığı 4.1/2 ve kuvvetleri) 1 den büyük bir sayı gelecek o yüzden burası sonsuz olacak böylece çevrede sonsuz olur.

Ö33'ün bu açıklamalarına göre bu öğrenci bir seri oluşturmaya çalışmaktadır. Ancak karelerin oluşumuna göre doğru bir seri yakalayamamıştır. Bunun yanında $a_1(1/1\text{-}r)$ ifadesi oluşturmaya çalıştığı serinin bir geometrik seri olduğunu bildiğini ve bu serinin toplamını hesaplamaya çalıştığını göstermektedir. Buna karşın yukarıdaki ifadelerine göre yazılan serinin

$$2.\frac{1}{2}.4+4\left(\frac{1}{2}\right)^2.4+2^3.\left(\frac{1}{2}\right)^3.4+\cdots=4.\left(2.\frac{1}{2}+4.\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^3.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right)$$

olduğu görülmektedir. Öğrenci bu serinin yakınsaklığını incelemeden kısmı toplamlar dizisinin toplamını bulmaya çalışmaktadır. Bunun yanında Ö33 başta öncelikle çıkarılan çevreleri bulacağını ve sonra başlangıçtaki kareden bunları çıkararak toplam çevreyi bulacağını ifade etmektedir. Oysa Ö33 çıkarılan çevreyi sonsuz olarak bulduğunu söylemekte ve bunu toplam çevre olarak düşünmektedir. Tüm bu durumlar Ö33'ün geometrik seriler konusunda ön bilgilerinde eksikliklerin olduğunu ve fraktal şekil içerisinde doğru bir örüntü bulamadığını göstermektedir.

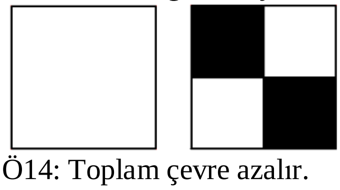
Aynı öğrencinin verilen fraktalın alanını hesaplarken yine bir seri yakalamaya çalıştığı belirlenmiştir.

A: Bu şeklin alanı nedir?
Ö33: Geriye kalan alanı yine diziden bulurum. 1. tekrarlamada alanım nasıl azaldı. Tamamı 1 br ise 1-(1/2) nin karesi çarpı 2 kadar azaldı. 2. tekrarlamada 4 tane kare çıkarıyoruz. Ne kadar değişir, 4 çarpı kenar uzunluğu ½'nin küpü kadar oldu. Sonra 8. ½'nin dördüncü kuvveti olur, çünkü 8 kare çıkardık. Bunları düzenlersem 2 çarpı ½ nin karesi parantezine alabilirim. (Leyla ortak paranteze alarak parantez içine 1+ $2.(1/2) + 2^2.(1/2)^2 + \ldots$ şeklinde bir seri yazmaya çalıştı) Ondan 1 gelir, 2 çarpı ½i gelir sonra ½ nin karesi gelir artı ½ nin 4küp gelir ve böyle devam eder.
A: Yazmış olduğun bu ifade bir ne belirtir.
Ö33: Burada bir seri oluştu. Bunun da yine 1/1-r 'yi kullanırım. Yani burası daima 0 ile 1 arasında olduğu için (burada seri toplamını bulmak için yukarıda verdiği formülü kullanıyor). Böylece sonuç 1 olur. o zaman fark sıfır olur. (Yani alanı sıfır olarak buluyor)

Ö33'ün bu açıklamaları verilen fraktalın çevresini bulmaya çalışırken yine bir seri aradığını ancak hatalı bir seri oluşturduğunu göstermektedir. Ayrıca Ö33'un geometrik serilere yönelik ön bilgilerinde eksikliklerin olduğu tespit edilmiştir. Çünkü seriyi yazarken katsayıları belirtmesine karşın serinin toplamında sadece ortak çarpanı dikkate almaktadır.

Benzer şekilde Ö14 ile yapılan ders sonu mülakatta da bu öğrencinin aynı soru için çevre ve alanı bulmakta oldukça zorlandığı belirlenmiştir.

A: Kuralı bu şekilde verilen fraktalın sonsuz durumda toplam çevresi ve alanı ne olur? Karalanan bölgelerin çıkarıldığını düşün.



Ö14: Toplam çevre azalır.
A: Bunu matematiksel olarak gösterebilir misin?
Ö14: (Ö14 karenin bir kenarını 1 br kabul edip bir örüntü yakalamaya çalıştı. Her bir adımda karelerin ½ oranında küçüldüğünü ifade etti ancak sonuçta bir örüntü belirleyemedi.) Bulamadım.

> A: Alanını bulabilir misin?
> Ö14: Alanı sıfıra gitmez mi?
> A: Bilemiyorum. Eğer alanın sıfıra gittiğini iddia ediyorsan bunu gösterebilir misin?
> Ö14: Başlangıca 1 br dersek her bir adımda $(½)^n$ lisi şeklinde kenar uzunluğu değişmektedir. Ama alanı nasıl oluyor. Bir örüntü bulmalıyım ama bulamadım bunu da.

Ö14'ün bu açıklamaları verilen fraktalın çevresi ve alanını hesaplamada bir örüntü bulamadığını göstermektedir. Ancak bu öğrenci fraktal şeklin oluşum adımlarını izlediğinde alanın sıfıra gittiğini ve çevrenin ise sonsuz olacağını sezgisel olarak ifade etmektedir. Gerçekte bu fraktalın alanı sıfıra giderken çevresi değişmemektedir, ancak Halis öğretmen de derste öğrencilerin verilen bir fraktalın tekrarlama adımlarını takip ederek çevresi ve alanındaki değişimi tahmin edebildiklerini belirtmektedir.

Halis öğretmen fraktalların çevresi, alanı ve hacmi hesaplanırken öğrencilerin çevre sonsuza giderken alanın sıfır olması ya da alan sınırlı kalırken hacmin sıfıra gitmesini anlamakta oldukça zorlandıklarını ifade etmektedir.

> Yani nasıl olur bir şeklin alanı sıfıra giderken çevresi sonsuza gider. Sierpinski üçgenini neredeyse tamamına yakınını içerisinden çıkarıyorsun, ama geride bir sürü nokta kalıyor ve böyle bir durum elde ediyorsun. Öğrenciler hocam bunlar ne olacak bu sonsuz tane noktanın hiç mi değeri yok şeklinde sorular yönelttiler. Bu nedenle geride sonsuz tane noktanın kalması öğrencilerin tereddüt yaşamasına neden oldu. Onlara tabi bunu tam açıklayamadım. Açıkçası ben bile anlamakta zorlanıyorum. Öğrenciler Euclid mantığıyla düşündükleri için bu tür sonuçları bulmak onlara sıra dışı gelmekte ve bunun nedenini sorgulamaktalar. Karşılaştığım en büyük sorun buydu.

Halis öğretmen Sierpinski üçgeninin çevresinin sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesine karşın geride sonsuz tane noktanın kalmasını ve bu tür bir nesnenin nasıl olabileceğini tam olarak açıklayamadığını ifade etmektedir. Bu durum hazırlanan çalışma yapraklarının bu konuda yeterince öğrencilere yardımcı olamadığını göstermektedir. Öğretmenin derste bu sıra dışı durumu açıklarken fraktalların sonsuz yapıda olduklarına öğrencilerin dikkatini çekmeye çalıştığını ifade ettiği belirlenmiştir.

> Fraktalların yapısının sonsuz olduğunu vurgulamama rağmen sonlu adımlardaki yapılar üzerine yaptığımız işlemlerin sonsuzdaki durumlarını kestirmeye çalışmak onlara zor gelmektedir. Öğrencileri Euclid'de nesnelerin hep sonlu yapılarına alışıklar.

Bunun yanında Halis öğretmen fraktalların çevresi, alanı ve hacmindeki bu sıra dışılığı açıklamak için sayılabilir ve sayılamayan küme kavramlarını kullanmaya çalıştığını ifade etmektedir.

> Bu durumu açıklamada sayılabilir ve sayılamayan kümeler ile kümelerin yoğunluğu kavramlarını kullanarak sonsuz noktanın geride kalmasını ve sıfır alana sonsuz çevrenin niçin olduğunu açıklamaya çalıştım: Bir üçgen sonsuz tane noktadan oluşmasına karşın noktalar çok sık ve sayılamayan sayıdadır. Bu nedenle alan ve çevreden bahsedilirken Sierpinski üçgeni içerisinden parçaları bir kurala göre çıkardığımızdan geride kalan noktaları sayılabilir sayıdadır ve bu noktalar bir üçgeninki kadar sık değildir. Bu nedenle içinde sonsuz nokta içerse bile bunlar bir alan teşkil etmemektedir şeklinde bir açıklama yaptım. Öğrencilerin bu konudaki bilgi eksiklikleri tam olarak onları ikna etmedi ama.

Halis öğretmenin çevre sonsuza giderken alanın sıfıra gitmesi ve geride sonsuz tane noktanın kalmasına yönelik açıklamaları doğru gibi görünse de geride kalan noktalar sayılabilir sayıda değil sayılamaz sayıdadır. Bunun yanında öğretmenin de belirttiği gibi öğrencilerin bu konudaki yetersiz ön bilgileri yapılan açıklamaları tam olarak anlamalarını engellemektedir.

Ö25 ile yapılan ders sonu mülakatta Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanıyla Sierpinski dörtyüzlüsünün yüzey alanı ve hacmi hakkındaki düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

> A: Bu derste anlamakta güçlük çektiğin yerler oldu mu?
> Ö25: Çok farklı bir dersti. Çünkü ilk defa böyle şeylerle karşılaştım. Sierpinski üçgeninden parçalar çıkarıldığında çevre artıyor, ama alanı sıfır oluyordu. Bu çok ilginç geldi bana. Aynı durum Sierpinski dörtyüzlüsünde de vardı. Orada da içinden dörtyüzlüleri çıkarıyoruz, tamam hacmi sıfıra gidiyor, ama yüzey alanı sabit kalıyordu. Yani 3 boyutlu bir şeklin nasıl hacmi yokken yüzey alanı değişmez almıyor bunu kafam.

Ö25'in ilk defa bu tür bir çevre, alan, hacim ilişkisi gördüğünden mevcut Euclid bilgileriyle çelişki içerisine düştüğü görülmektedir. Bu öğrenci bir nesnenin alanı yokken çevresinin sonsuza gitmesi ile hacmi yokken yüzey alanının değişmemesini mevcut Euclid bilgileri ile anlamlandıramamaktadır. Bunun yanında kullanılan çalışma yaprakları ve öğretmenin açıklamalarının da yeterli olmadığı söylenebilir.

Benzer şekilde Ö16 ile yapılan ders sonu mülakatta bu öğrencinin Sierpinski üçgeninden çıkarılan nokta sayısına göre bir çevrenin oluşmaması hatta sonsuz tekrarlamada yapının tamamen yok olması şeklinde bir anlayışın olduğu belirlenmiştir.

A: Sierpinski üçgeninde neyi anlayamadın?
Ö16: Sierpinski üçgeninde ortadaki üçgenleri çıkarıyoruz. Bu durumda çıkarılan üçgenlerin köşelerindeki noktaları da çıkarıyoruz. Yani sonuçta geriye hiç nokta kalmaması lazım. Ya da en azından noktaların doğrusal olmaması lazım. Oysa oluşan şekle bakınca doğru parçalarından oluşuyor. Nasıl oluyor da noktalar bir arada kalarak doğruları oluşturuyor?

Bu açıklama öğrencinin Sierpinski üçgeninin nasıl sonsuz bir çevreye sahip olduğunu anlayamadığı göstermektedir. Çünkü Ö16 her bir tekrarlama adımında merkezden parçaların çıkarılmasının oradaki tüm noktaların çıkarılmasını gerektirdiğini mevcut Euclid bilgilerine göre düşünmektedir. Bu nedenle mülakatta Ö16'ya geride kalan üçgenlerin köşe noktalarının olup olmadığı sorulduğunda verdiği cevap aşağıda sunulmuştur.

A: Merkezdeki üçgenleri çıkardığımızda köşe noktalarının da çıkarıldığına emin misin?
Ö16: Evet bakın (Sierpinski üçgeninin ilk iki adımını çizdi ve merkezdeki üçgeni ve üç köşe noktasını işaretleyerek gösterdi) bu üçgeni keser çıkarırsam bu noktalar çıkar.
A: Geride kaç üçgen kaldı?
Ö16: 3 üçgen kalır?
A: Eğer geride 3 üçgen kalıyorsa ve sen merkezdeki üçgeni uç noktalarıyla kesip attığını söylüyorsan geride kalan 3 üçgen birer üçgen olur mu?
Ö16: Yani zaten anlayamadığım nokta da bu aslında. Tamam diyelim ki geride sonsuz tane nokta kalıyorsa bu durumda alan nasıl sıfır olurken çevre sonsuz oluyor? Bunu anlayamıyorum bu seferde.

Ö16 merkezden üçgen çıkartma kuralı nedeniyle Sierpinski üçgenindeki tüm noktaların çıkarılarak geride hiç nokta kalmamasının gerektiğini düşünmektedir. Bunun yanında eğer sonsuz sayıda nokta Sierpinski üçgeni içerisinde kalıyorsa sonsuz noktanın bir düzlem oluşturması, yani bir alan oluşturması gerektiğini ifade etmektedir. Bu iki durum onun Sierpinski üçgeninin çevresinin sonsuza giderken alanının sıfır olmasını anlamasını güçleştirmektedir.

3.1.2.3. Cebirsel Tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia Kümeleri

Halis öğretmen kullanılan slaytın, çalışma yaprağı-7'nin ve Excel programının öğrencilerin kaçak, mahkûm ve periyodik nokta kavramlarını anlamalarında etkili olduğunu ifade etmektedir.

> Öğrenciler ilk çalışma yaprağında yörüngeleri belirlediler ve çalışma yaprağı içinde verilen o köklü sayıların yörüngelerini bulma öğrencilerin oldukça hoşuna gitti. Çünkü tahmin edemedikleri çok ilginç sonuçlar elde ettiler. Bence çalışma yaprağı girişte kaçak, mahkum ve periyodik nokta kavramlarının kazanılması için uygun. Çünkü öğrenciler çok fazla tekrarlama yapıyorlar ve farklı kurallar için bazen yörüngelerin sonsuza gittiğini, bazen ise sabit bir noktaya gittiğini görüyorlar.

Öğretmenin bu açıklamaları çalışma yaprağının kaçak, mahkûm ve periyodik nokta kavramlarının kazanılması yönünde etkili olduğunu göstermektedir. Ayrıca çalışma yaprağının içerdiği soruların öğrencilerin konuya olan ilgisini çektiğini de belirtmektedir.

Halis öğretmen öğrencilerin kaçak, mahkûm ve periyodik noktaları belirlemede çok fazla sorun yaşamadıklarını da ifade etmektedir.

> Öğrenciler verilen noktaların kaçak, mahkûm ve periyodik olduğunu belirleyebiliyorlar. Özellikle slaytta ve Excel'de bu noktaların hareketinin grafikle gösterilmesi kavramların anlaşılmasını daha çok sağladı.

Öğretmen kaçak, mahkûm ve periyodik nokta kavramlarının öğretiminde bu noktaların yörüngelerinin izlediği yolun görselleştirilmesinin kavramların anlaşılmasında etkili olduğunu ifade etmektedir.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda da öğretmenin belirttiği gibi kaçak, mahkûm ve periyodik nokta kavramlarını öğrencilerin anladıkları ve bu noktaları belirleyebildikleri gözlemlenmiştir.

Örneğin Ö2 bir noktanın kaçak ya da mahkûm olduğunu belirlemede bu noktanın yörüngelerini incelediğini ifade etmektedir.

> A. Bir noktanın kaçak ya da mahkûm olduğuna nasıl karar verirsin. Neye bakarsın?
> Ö2: Nokta kaçaksa onun yörüngelerinin sonsuza gittiğini anlıyorum. Mahkûm nokta da ise yörüngelerinin belli bir değer aralığında sıkıştığını.

Ö2'nin bu açıklaması yörüngeleri sonsuza giden noktaları kaçak ve yörüngeleri belli bir değer aralığında sıkışan noktaları ise mahkûm olarak sınıflandırdığını göstermektedir.

Benzer şekilde Ö16'nın verilen başlangıç noktalarının kaçak ya da mahkûm olup olmadığına yörüngelerin hareketine bakarak karar verebildiği belirlenmiştir.

> A: Bana kaçak noktanın tanımını yapabilir misin?
> Ö16: Bir tekrarlama kuralında sonsuza giden noktalara kaçak nokta deriz.
> A: Neler sonsuza gidiyor?

Ö16: Yörüngeler. Aslında onun başlangıç noktasından olan uzaklığı, yani başlangıç noktasına olan uzaklığı sonsuz olduğunda kaçıyor.
A:  tekrarlama kuralına göre bir kaçak bir de mahkum nokta belirleyebilir misin?
Ö16: Mesela z_0=0 olsa z_1=1, z_2=2 … bu böyle sürekli gider.
A: O halde buna biz ne deriz?
Ö16: Kaçak nokta deriz.

Buna karşın bazı öğrencilerin verilen başlangıç noktasının değil de onun yörüngesinin kaçak ya da mahkûm olduğu yönünde bir anlamaya sahip olduğu belirlenmiştir.

Örneğin Ö33'ün açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: $Z_{n+1}= z_n^2-2$ tekrarlama kuralına göre z_0=1 başlangıç noktalarının kaçak ya da mahkûm nokta olduğuna nasıl karar verirsin?
Ö33: Eğer noktanın yörüngesi sabit ya da periyodik gidiyorsa mahkum nokta sürekli artıyor ve artı sonsuz ile eksi sonsuza gidiyorsa kaçak noktadır. İlkinde -1, sonra yine -1 ve bu hep böyle devam edecek o halde sabit bir sayı buldum yani mahkum nokta.
A: Mahkum olan nedir? Yörüngeler mi? yoksa başlangıç noktası mı?
Ö33: Yörüngelerdir. Çünkü onlar sabit bir sayıya gidiyor.
A: Peki başlangıç noktasını z_0=5 olarak belirlesek bu durumda bu nokta nasıldır?
Ö33: 23, 23'ün karesi -2, ve bu şekilde devem edecek. Her seferinde hep daha büyük bir sayı olacak o zaman bu bir kaçak nokta olacak.
A: Hangisi kaçak olacak?
Ö33: Yörüngeler kaçak nokta olacak.

Ö33'ün kaçak ve mahkum noktaları doğru belirlemesine karşın, yörüngelerin artıp azalmasından ya da sabit bir değere yaklaşmasından dolayı yörüngeleri kaçak ya da mahkum olarak sınıflandırdığı gözlemlenmiştir.

Halis öğretmen Julia kümesinin nasıl oluştuğunu anlamada öğrencilerin zorlandıklarını belirtmektedir.

Öğrenciler verilen tanımı anladılar, ancak nasıl oluyor da bu tekrarlamalara göre bu renkli şekillerin oluştuğunu tam olarak algılayamıyorlar. Yani Julia kümesinin içindeki yerler siyah, dışa doğru sarıdan turuncuya doğru renkleniyor, ama niçin böyle boyandığını ve şeklin nasıl olduğunu tam çözemiyorlar.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin Julia kümelerinin tanımını anlamalarına karşın şekillerin ekranda nasıl oluştuğunu tam olarak kavrayamadıklarını göstermektedir. Bu durumun bir nedeni öğrencilerin kendilerinin bir Julia kümesini oluşturamamaları olabilir. Kullanılan Excel ve fraqtive programları yörüngelerin hareketinin incelemelerine yardım etmesine karşın Julia kümesini adım adım değil de doğrudan oluşturmaktadır. Bu ise öğrencilerin renklendirmenin ve şeklin nasıl oluştuğunu tam olarak anlamamalarına neden olmaktadır. Bu duruma bir çözüm için pilot çalışmada manipulatif olarak tüm sınıfın kağıt üzerinde bir Julia kümesi oluşturması etkinliği yapılmaya çalışılmış, ancak hem çok zaman almasından hem de tam olarak şekli yansıtmamasından dolayı vazgeçilmiştir.

Öğretmenin bu açıklamalarına paralel olarak Ö2 ile yapılan ders sonu mülakatta öğrencinin Julia kümesinin oluşumuna yönelik anlaması aşağıda sunulmuştur.

> A: Julia kümesi nedir? Nasıl oluşmaktadır?
> Ö2: Julia kümesinin tanımını tam bilmiyorum ama benzer noktalardan oluştuğunu söyleyebilirim.
> A: Bu benzer noktalar nelerdir? Nasıl kümeyi oluşturmaktadırlar?
> Ö2: Ben şöyle düşündüm. Derste hocamız bize Julia kümelerini gösterdiğinde bazı yerleri siyah, bazı yerleri sarı, bazı yerleri ise kırmızıydı. Belli bir parametre alıyoruz, başta o parametreye göre yörüngeler buluyoruz. Bu yörüngeler eğer belli değerlerde kalıyorsa o siyah yerde kalıyorlar eğer yörüngeler giderek büyüyorsa ona göre de renk değişiyor.
> A: Yani yörüngeler mi Julia kümesini oluşturan?
> Ö2: Evet. Tam kuralı bilmiyorum ama diyelim 2 noktasıyla başladık başta siyah yerde olabilir ama tekrarladık tekrarladık diyelim nokta 50 oldu o zaman diyebiliriz ki bu nokta şuradaki kırmızı yerde.

Bu öğrencinin Julia kümelerinin oluşumu hakkında bir yanlış anlamaya sahip olduğu görülmektedir. Öğrencinin verilen başlangıç noktalarının yörüngelerinin Julia kümesindeki noktalar olduğunu düşündüğü belirlenmiştir. Buna karşın Ö2'nin "yörüngeler belli değerde kalıyorsa siyah bölgeye düşüyor" ifadesi kaçak ve mahkûm noktaları bildiğini göstermektedir.

Halis öğretmen Julia kümesinde olduğu gibi Mandelbrot kümesi içinde öğrencilerin tanımı anlamasına karşın şeklin nasıl oluştuğunu tam olarak anlamadıklarını ifade etmektedir.

> Öğrenciler Mandelbrot kümesinin ne olduğunu anlıyorlar, ancak iç kısmında bulunan siyah noktaların alınan c-sabitleri olduğunun farkına varamıyorlar. Mesela tekrarlama kuralında başlangıç sıfır olduğu için aslında c'yi getirip yerine yazıyoruz diyoruz, ancak bunu birkaç öğrenci yapabiliyor.

Halis öğretmen bu durumun hazırlanan çalışma yapraklarından ziyade kullanılan yazılımdan kaynaklanabileceğini ifade etmektedir.

> Aslında bu durum hazırlanan çalışma yapraklarından kaynaklanmıyor. Çalışma yaprakları belirlenen amaca yönelik hazırlanmış. Ancak kullandığımız yazılımlar öğrencilerin kendilerinin bu şekilleri oluşturmalarında sınırlı. Belki de başka programlar kullanılmalı.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin bu kümelerin nasıl oluştuğunu anlayamamalarının nedenini çalışma yapraklarının yetersizliğinden ziyade kullanılan programın (fraqtive) kümelerinin şekillerinin oluşumunu tam olarak gösterememesine bağlamaktadır.

Ö17 ile yapılan ders sonu mülakatta öğretmenin bu görüşünü desteklemektedir.

> A: Mandelbrot kümesini tanımlayabilir misin?
> Ö17: Başlangıç noktası 0 olmak zorunda olan $Z_{n+1}= z_n^2+$ … sonundaki değeri hatırlamıyorum, bu tekrarlamaya göre oluşan yörüngelerin oluşturduğu şekil olarak tanımlayabiliriz.
> A: Yörüngeler mi şekli oluşturuyor?
> Ö17: Sanırım.
> A: Nasıl?
> Ö17: Yörüngelerin gittiği noktaya göre oluşan yapının şekli değişmektedir. Mesela soğanlarda bağlantı noktalarında yörüngeler farklı değerler almakta bu nedenle farklı şekiller oluşmaktadır.

Ö17'nin bu açıklaması Mandelbrot kümesinin sıfır başlangıç noktasının yörüngelerinden oluştuğunu anladığını göstermektedir. Yani, Mandelbrot kümesindeki her bir noktanın bir yörünge noktası olduğunu düşünmektedir.

Benzer şekilde Ö2'ye Mandelbrot kümesinin nasıl oluştuğu sorulduğunda Julia kümesine yönelik geliştirdiği anlamayı Mandelbrot kümesi içinde kullandığı belirlenmiştir.

> A. Mandelbrot kümesini tanımlayabilir misin?
> Ö2: (Ö2 kağıt üzerine kabaca Mandelbrot kümesinin şeklini çizdi ve soğan yapıları gösterdi)
> A: Bu şekil nasıl oluşuyor? Ne tür noktalar bu şekli oluşturuyor?
> Ö2: Bir ana şekil var ve farklı oranlarda şu küçük yapılar üzerine ekleniyor. Ama bu küçük şekillerin nasıl yerleştiğini açıklayamam.
> A: Bir kural var mı?
> Ö2. Ne tür tekrarlama kuralı olduğunu tam olarak hatırlamıyorum, ancak belli bir kural sonucunda bir araya gelen noktaların yoğunlaşması sonucu bu şekil oluşmuştur. Tıpkı Julia kümesindeki gibi noktalar seyrekleştikçe renkler değişmektedir.

Ö2, Mandelbrot kümesinin kabaca şeklini çizebilmekte ancak bu soğan yapıların nasıl oluştuğunu açıklayamamaktadır. Bunun bir nedeni Mandelbrot ve Julia kümelerinin geometrik tekrarlama kurallarından farklı olarak cebirsel tekrarlanma kurallarına sahip olması olabilir. Çünkü geometrik tekrarlamalarda az çok öğrenci kendisi birkaç adım için fraktal yapının şeklini çizebilmekte ya da oluşturabilmektedir. Ancak cebirsel tekrarlamalarda şekli bilgisayar programları oluşturduğundan bu durum öğrencilerin fraktalın şeklinin oluşumunu anlamasını etkilemektedir. Diğer bir neden ise öğretim sürecinde kullanılan programlardaki eksiklikten olabilir. Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretimi yapılırken bilgisayar programı olarak Excel ve Fraqtive programları kullanılmıştır. Bu iki program da öğrencilere Mandelbrot ve Julia kümelerini oluşturmalarında yardım etmesine karşın adım adım bu kümelerin oluşumunu görmelerini sağlamamaktadır. Ayrıca fraqtive programı fraktalın doğrudan şeklini vermekte ve öğrenci Logo'da olduğu gibi yapıyı kendisi oluşturamamaktadır.

Benzer bir durum Ö28 ile yapılan ders sonu mülakatta gözlemlenmiştir.

A: Julia kümesinin oluşumu hakkında anlayamadığın yerler oldu mu?
Ö28: Mesela derste 0,75 ya da 0,34 sayılarını alıyorduk. Ben bunların nasıl bu kümeleri oluşturduğunu tam olarak anlamadım. Tamam, verilen noktaların kaçak ya da mahkûm olduklarını bulabiliyorum, ama bu tekrarlamalar sonucu nasıl bu şekiller oluşuyor bilemiyorum.

Ö28'in bu açıklaması verilen başlangıç sayılarına göre Mandelbrot kümesi ile Julia kümelerinin şekillerinin nasıl oluştuğunu anlayamadığını göstermektedir.

Buna karşın bazı öğrencilerin ise Julia kümesinin oluşumunu anladıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö25'in Julia kümesine yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Julia kümesini tanımlayabilir misin? Neye biz Julia kümesi deriz?
Ö25: $Z_{n+1}= z_n^2+c$ şeklinde yazılabilen noktalardır.
A: Bu noktaların biz özelliği var mı?
Ö25: Bu noktalar mahkûm ya da periyodik olacak. Yani Julia kümesini söylediğim kurala göre mahkûm ve periyodik noktalardan oluşuyor diye tanımlayabilirim.

Ö25'in bu açıklaması Julia kümesinin verilen tekrarlama kuralına göre mahkûm ve periyodik noktalardan oluştuğunu anladığını göstermektedir. Ö25'in Ö2'den farklı olarak verilen başlangıç noktalarının Julia kümesini oluşturduğunu anladığı aşağıdaki açıklamalarından söylenebilir.

A: $Z_{n+1}= z_n^2-2$ tekrarlama kuralına göre $z_0=1$ başlangıç noktasının kaçak ya da mahkûm nokta olduğuna nasıl karar verirsin?
Ö25: $z_0=1$ tekrarlama kuralında -1, -1, … şeklinde hep -1 oluyor. Gittikçe hep sabit bir değer olduğundan bu bir mahkûm noktadır.

A: Hangisi mahkûm yörüngeler mi? yoksa nokta mı?
Ö25: Nokta mahkûmdur.
A: Bu nokta Julia kümesinin içinde mi dışında mıdır?
Ö25: İçindedir.

Halis öğretmen fraqtive programının Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkiyi göstermede başarılı olduğunu ifade etmektedir.

> Programda iki pencere var ve üstte Mandelbrot altta ise Julia kümesi görülüyor. Öğrenciler kürsörleri Mandelbrot üzerinde hareket ettirdikçe oluşan Julia kümelerini gördüler. Bu onların Mandelbrot kümelerinin Julia kümelerinin bir birleşiminden oluştuğunu görmelerine yardımcı oldu.

Bu açıklama kullanılan fraqtive programının öğrencilerin Mandelbrot ile Julia kümeleri arasında ilişki kurmalarına yardımcı olduğunu göstermektedir.

Öğretmenin bu tespiti öğrencilerin ifadelerinde de gözlemlenmektedir. Örneğin Ö16'nın açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Mandelbrot ve Julia kümeleri arasında bir ilişki var mıdır?
Ö16: Bilgisayar programında Mandelbrot kümesi üzerinde gezindiğimizde farklı Julia kümelerini görmüştük. Sanki Julia kümeleri Mandelbrot kümesi üzerindeki noktalardan oluşmakta.

Bu açıklama Ö16'nın Julia kümelerinin Mandelbrot kümesindeki noktalardan oluştuğu yani, Mandelbrot kümesinin Julia kümelerinin bir birleşimi olduğu yönünde bir anlama geliştirmeye başladığını göstermektedir.

Halis öğretmen Julia kümelerinin benzer parça sayısı ile periyotları arasındaki ilişkide bazı öğrencilerin Julia kümelerindeki benzer parçaları belirlemede zorlandıklarını ve bu nedenle kendisinin bir kural keşfettiğini ifade etmektedir.

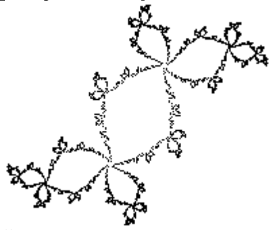
> Bazı öğrencilerin Julia kümelerini benzer parçalara ayırmada güçlük yaşadığını gözlemledim. Bağlantı noktalarından parçaları ayıramıyorlardı, çünkü uçlardaki parçalarında birbirine benzediğini söylüyorlardı. Yani, hangi parçaları ayıracaklarına karar veremiyorlardı. Ben şöyle bir çözüm getirdim. Şekle bakmalarını ve bir bağlantı noktasına göre ana şekil ile onun kulaklarını saymalarını söyledim.

Öğretmenin bu açıklamaları öz-benzer parçaları belirlemede öğrencilere bir yol göstermesine karşın öğrencilerin bunu bir kural haline getirip niçin yaptıklarını anlamadan ezberlemelerine neden olabilir. Bu ise öğrencilerin daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirmelerini sağlayabilir.

Julia kümesinin periyodu ile öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkiyi belirlemede bazı öğrencilerin Julia kümesinin öz-benzer parçalarını belirlemekte zorlandıkları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö33'ün açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Julia kümelerinin periyotlarını nasıl belirliyorsun? Örneğin bu Julia kümesinin periyodu kaçtır?



Ö33: 5 tir. Çünkü bu yapıyı gövde aldığımızda 2 tane bu tarafta 2 tane de diğer tarafta oluşan benzer parçalar var ve bunların sayısı bize periyodu vermekte.

Ö33'ün bu açıklaması Julia kümesinin periyodunu bulmak için bu kümeyi birbirine eş parçalara ayırması gerektiğini bildiğini göstermektedir. Ancak Ö33 Julia kümesini öz-benzer parçalara ayırırken uçlardaki ve ortadaki parçaları eş olarak kabul etmektedir. Oysa ortadaki parça uçlardakini benzemesine karşın aynısı değildir.

3.1.2.4. Öz-benzerlik

Halis öğretmen çemberin herhangi bir bölgesi üzerine sürekli yaklaşıldığında oluşan şekiller ile çemberin bütünü üzerine yapılan tartışmanın öz-benzerlik kavramının öğrencilerin zihinlerinde oluşmasına yardımcı olduğunu ifade etmektedir.

Slaytta ilk olarak bir çember vardı ve belli oranlarda çemberin kenarına doğru yaklaştığımızda oluşacak şekiller üzerine tartıştık. Daha sonra Koch eğrisindeki parçalara yaklaştıklarında hep aynı şekillerin sürekli tekrarlandığını gördüler. Çember ile Koch eğrisi üzerine yapılan bu tartışma öğrencilerin öz-benzerlik algısını oluşturmasına yardımcı oldu.

Öğretmenin bu açıklamaları öz-benzerlik kavramının öğrencilerin zihinlerinde yapılandırılmasında Euclid ve fraktal şekillere belli oranlarda yaklaşıldığında oluşan parçaların görünüşleri üzerine yapılan tartışmaların faydalı olduğunu göstermektedir.

Bunun yanında Halis öğretmen öğrencilerin verilen nesnelerin öz-benzer olup olmadıklarını belirleyebildiklerini de ifade etmektedir.

A: Derste öğrencileriniz verilen şekillerden öz-benzer olanları belirlemede güçlükle karşılaştılar mı?
H: Hayır. Öğrenciler matematiksel olarak derste oluşturduğumuz nesnelerin öz-benzer olup olmadıklarını çok rahat belirliyorlar. Ancak doğal nesnelerin öz-benzerliğine karar vermede biraz zorlanmaktalar. Öğrenciler her nesnede birbirine benzer şeylerin olabileceğini ifade ediyorlar. İşte brokolide, eğrelti otunda mükemmel olarak fraktal özellikler görülebiliyor, ama birçok şeyde bu kadar açık şekilde bu özellikleri göremiyor öğrenciler. Doğal fraktallardaki yaklaşık öz-benzerliği çok fazla anlayamıyor, evet var diyor ama çok fazla da şey yapamıyor.
A: Peki öz-benzerliğe nasıl karar veriyorlar?
H: Şeklin bir parçasına bakıp onu büyüttüğünde şeklin bütününü görebiliyor mu buna bakıyorlar. Çoğunluğu bunu yapabiliyor.

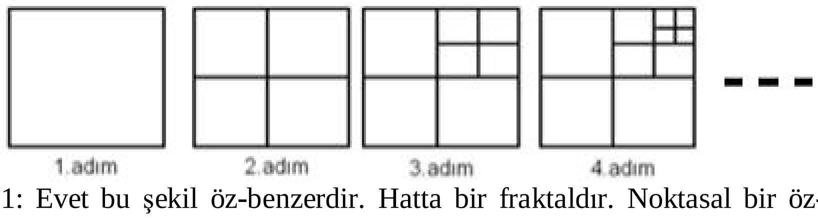
Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda da öğrencilerin verilen şekillerden öz-benzer olanlar ile öz-benzer olmayanları belirleyebildikleri gözlemlenmiştir.

Örneğin Ö1 ile yapılan ders sonu mülakatta öğrencinin öz-benzerlik kavramına yönelik tanımı aşağıda sunulmuştur.

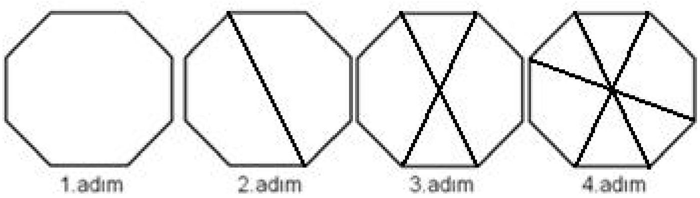
A: Öz-benzerlik deyince ne anlıyorsun?
Ö1: Bir şeklin içinden birer parça alıp büyütüp ya da küçülttüğümüzde yine aynı şekli veriyorsa bu şekle öz-benzer derim.

Bu öğrenciye mülakatta gösterilen şekillerden hangileri öz-benzer olduğu sorulduğunda öğrencinin verilen şekilleri doğru sınıfladığı belirlenmiştir.

A: Bu şekil öz-benzer midir? Niçin?



Ö1: Evet bu şekil öz-benzerdir. Hatta bir fraktaldır. Noktasal bir öz-benzerliği var. Sadece bir noktada öz-benzerlik söz konusu.
A: Peki bu şekil öz-benzer midir?



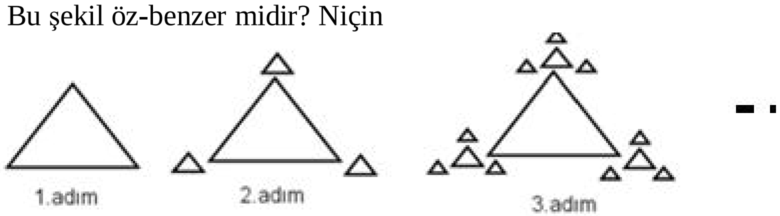
Ö1: Öz-benzer değildir.

A: Niçin?
Ö1:Öz-benzer olması için 1. adımdaki şekil ile diğer adımdaki şekilleri karşılaştırırız. Ayrıca bu şekilde devam etse sonlu bir adımda yani 5. Adımda yapı duracaktır. Bu nedenle değildir.

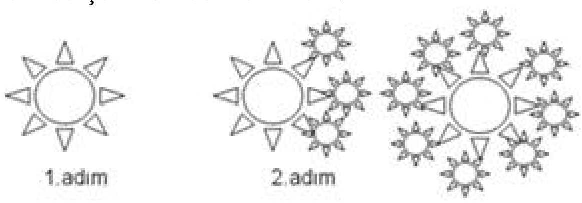
Ö1'in bu açıklamaları verilen nesneleri öz-benzer olarak doğru sınıflandırabildiğini ve öz-benzerliğe karar verirken nesnenin parçası ile nesnenin bütününü karşılaştırdığı görülmektedir.

Benzer şekilde Ö25'de verilen şekillerden öz-benzer olanları doğru şekilde sınıflandırmaktadır.

A: Bu şekil öz-benzer midir? Niçin



Ö25: Öz-benzerdir. Hatta tamamen öz-benzerdir. Çünkü her seferinde üçgenin köşelerine belli oranlarda küçülen üçgenler yerleştirilmekte ve diyelim şu parçayı alıp büyütsem (sol alttaki üçgenlerden birini göstererek) yine başlangıç şeklini elde ederim.
A: Peki bu şekil öz-benzer midir?



Ö25: Bu şekil biraz kafa karıştırıcı. Öncelikle adımlar arasında benzer parçalar var gibi ama 2. Adımda sol tarafta uçtaki üçgen parçayı alıp büyütsem baştakine benzer bir şekil elde edemiyorum. Bu nedenle öz-benzer değildir.

Ö25'in bu açıklamaları öz-benzerliğe karar verirken parça-bütün benzerliğine dikkat ettiğini göstermektedir. Bu bağlamda çalışma yaprağı-10, çalışma yaprağı-11 ve öz-benzerlik slaytının öz-benzerlik kavramının öğrenilmesinde etkili olduğu söylenebilir.

Buna karşın Halis öğretmenin de belirttiği gibi mülakata katılan bazı öğrenciler doğal nesnelerin öz-benzerliğini belirlerken zorlandıklarını ifade etmektedirler.

Örneğin Ö3'ün doğal fraktalların öz-benzerliğine yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Bugünkü derste anlamakta zorlandığın yerler oldu mu?

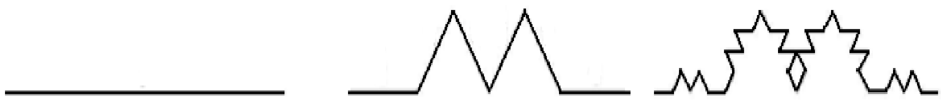
Ö3: Doğal fraktallarda, mesela eğrelti otunda her bir adımda öz-benzerliği göremiyoruz. Çeşitli faktörlerden mesela çevresel faktörler onun dalının yaprağının oluşumunu etkilemekte ve öz-benzerliğini bozmaktadır. Yani doğal nesnelerdeki öz-benzerlik farklı gibi.

Ö3'ün bu açıklamaları bu öğrencinin doğal nesnelerdeki öz-benzerliği belirlemede kullandığı tanımın yetersiz olduğunu göstermektedir. Matematiksel olarak tanımlanan nesnelerde parça-bütün benzerliğini irdeleyerek buna karar vermek kolay olsa da doğal nesneler her bir parçada bile birbirlerine tam olarak benzememektedir. Bu durum öğrencilerin doğal nesnelerin öz-benzerliğine karar vermelerini güçleştirmektedir.

Bunun yanında mülakata katılan bazı öğrencilerin verilen fraktalın öz-benzer parça sayısı ile bunların büyüme oranını doğru belirlerken bazılarının hata yaptıkları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö25'in verilen fraktalın öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını belirlemeye yönelik cevabı aşağıda verilmiştir.

A: Bu şeklin öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranını söyleyebilir misin?

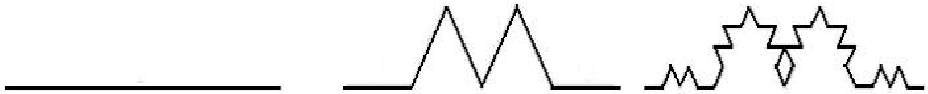


Ö25: Bir doğruyu 4'e bölersek, oluşan parçalardan 2. ve 3.'sünü 60 derece kaldırsak ve bu doğru parçaları kadar da ucuna ekleme yapıyoruz yani ters V'ler oluşturuyoruz. Öz-benzer parça sayısı 6 tanedir. Büyüme oranı ise 4 tür. Çünkü ana şekle göre her bir ¼ oranında. Bir sonraki adımda ise her biri 1/16 oranında 36 parça oluşur.

Ö25'in açıklamaları bu fraktalın öz-benzer parça sayısını ve büyüme oranını doğru olarak belirlediğini göstermektedir. Ö25 aynı zamanda her tekrarlamada öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını 6/4 ve onun kuvvetleri şeklinde arttığının da farkındadır.

Buna karşın Ö16'nın öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını hatalı belirlediği tespit edilmiştir.

A: Bu fraktalın öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını bulabilir misin?



Ö16: Şimdi bunu dört parçaya böldüğünü düşünsek. Sonra parçaları kaldırıp şekli oluştursak, önce bir doğru iken bu doğruyu 4 parçaya bölüp iki doğruyu kaldırdık bunları diğer uçlarla birleştirdik, 6 tane eş parça elde ederiz. Bu parçaların her birinin büyüme oranı 6 olur. O halde tüm parçalarda birbirine eşit olduğundan 1/6 büyüme oranına sahip 6 parça elde ederiz.

Ö16 verilen şeklin üreticisinde öz-benzer parçaları doğru belirlemekte, ancak bu parçaların birbirine eş olması onların parça sayısı kadar büyüme oranına sahip olduklarını düşünmesine neden olmaktadır.

Halis öğretmen ders ortamında kullandığı çalışma yaprağında ve slâyttaki nesnelerin öz-benzer parça sayılarını ve büyüme oranlarını belirlemede öğrencilerin zorlanmadıklarını ifade ettiği belirlenmiştir.

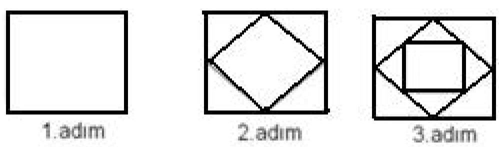
A: Öğrenciler verilen fraktalların öz-benzer parça sayıları ile büyüme oranlarını belirleyebiliyorlar mı?
H: Evet onda sorun yok. Bunları çok kolay belirliyorlar.

Halis öğretmen benzer şekilde öğrencilerinin öz-benzerlik türlerini de belirleyebildiklerini ifade etmektedir.

A: Öğrencileriniz öz-benzerlik türlerini belirleyebiliyorlar mı?
H: Öz-benzerlikte öğrenciler çok zorlanmadılar. Zaten ilk iki çalışma yaprağında öz-benzerliği nasıl belirleyeceklerini öğrendiklerinden bunların türlerini belirlemede sorunla karşılaşmadılar. Sadece doğal nesnelerin öz-benzer parçalarını görmede zorlanıyorlar.

Ders sonu mülakat yapılan dört öğrencinin verilen şekilleri öz-benzerlik türlerine göre doğru sınıflandırdıkları, ancak bir öğrencinin noktasal öz-benzerlikte hata yaptığı belirlenmiştir. Ö10 noktasal öz-benzer olan bir şekli yaklaşık öz-benzer olarak nitelendirmektedir.

A: Bu şeklin öz-benzerlik türü nedir?



Ö10: Yaklaşık öz-benzerdir. Çünkü şeklin şurasından bir parça aldığımda onu büyütürsem şeklin tamamını elde edemem.
A: Niçin noktasal öz-benzer değildir?
Ö10: yani tam bilemiyorum. Noktasal öz-benzerlikte sadece bir nokta üzerinde öz-benzerlik vardı. Burada öyle bir şey var mı? Tam bilemiyorum.

Ö10'un açıklamaları noktasal ve yaklaşık öz-benzerlik hakkında bir bilgisinin olduğunu ancak bu iki öz-benzer türünü tam olarak ayırt edemediğini göstermektedir.

3.1.2.5. Fraktal Boyut

Halis öğretmen farklı boyutların olabileceği yönünde bir algı oluşturmada alüminyum folyo etkinliğinin başarılı olduğunu ifade etmektedir.

> Alüminyum folyo ile yapılan etkinlik öğrencilerin boyut konusunda kafalarının karışmasına neden oldu. Böylece farklı boyutların olabileceği algısı oluşmaya başladı. Çünkü başlangıçta folyonun 2 boyutlu top haline getirilince 3 boyutlu ve açıldığında ise yine 3 boyutlu olduğunu ifade ettiler. Ancak açınca bunun üzerinde düz yerler var dedim. Bunlar 3 boyutlu mu dedim. Yok, hocam oralar 2 boyutludur çıkıntılı olan yerler 3 boyutludur. O zaman niye 3 boyutlu alıyorsunuz de 2 boyutlu almıyorsunuz diye sordum. Bazıları büyük olan alınır, hocam dediler, bir iki kişi de olmadı ortalaması olarak 2,5 alırız dediler. Ama tam bir cevapta vermediler ve gerçekten oluşan şeklin boyutu ne olabilir diye düşünmeye başladılar.

Öğretmenin bu açıklamaları alüminyum folyo etkinliğinin öğrencilerin boyut üzerine düşünmelerini sağladığını ve daha önce dikkat etmedikleri girintili ve çıkıntılı nesnelerin boyutlarının neler olabileceğini tartışmaya başladıklarını göstermektedir. Bu bağlamda etkinliğin öğrencilerde farklı boyutların olabileceği sezgisinin oluşturulmasında etkili olduğu söylenebilir.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda da bu etkinliğin onlarda farklı boyutlar olabileceği yönünde anlayışlar geliştirmelerini sağladığı tespit edilmiştir.

Örneğin Ö25'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Derste anlamakta zorlandığın durumlar oldu mu?
> Ö25: Mesela alüminyum etkinliği çok sıra dışıydı. Folyoyu buruşturup açtığımızda boyutunun 2 ile 3 arasında olabileceğini tartıştık. Benim de aklıma insan için 3 boyutludur diyoruz ama mesela saç tek boyutlu değil mi? deri 2 boyutlu değil mi? o zaman insanın boyutu 2 ile 3 arasında mıdır? şeklinde bir soru geldi.
> A: Sence insan kaç boyutludur?
> Ö25: Bu açıdan bakarsak 2 ile 3 arasında, yani doğada o zaman üç boyutlu bir nesne bulmak çok zor.

Öğrencinin bu açıklamaları fraktal boyutların Euclid'de tanımlı boyutlardan farklı olduğunu da sezinlediğini göstermektedir. Çünkü " doğada o zaman üç boyutlu bir nesne bulmak çok zor" ifadesi Euclid'in en, boy ve yüksekliği işaret eden tanımından farklı olarak nesnelerin şekillerinin girintili ve çıkıntılı olmalarına göre de boyutlarından bahsedilebileceğinin farkına vardığını göstermektedir.

Hazırlanan materyallerin ve öğretimde kullanılan yöntem ve tekniklerin öğrencilerin fraktal boyutları öğrenmelerindeki etkilerini ortaya koyabilmek için öncelikle öğrencilerdeki mevcut boyut tanımlamalarının belirlenmesi gerekir. Yapılan ders sonu mülakatlarda tüm öğrencilerin boyutu en, boy ve yükseklik olarak algıladıkları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö16 ile yapılan ders sonu mülakatta öğrencinin boyut kavramına yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Bir nesnenin boyutunun 1 ya da 2 olarak ifade edilmesinden ne anlıyorsun?
Ö16: 1 boyutlu deyince doğru, 2 boyutlu deyince kare aklıma geliyor.
A: Niçin doğrunun boyutunu 1 olarak ifade ettin?
Ö16: Çünkü sadece uzunluğu var?
A: Senin için boyut nedir?
Ö16: Boyut deyince en, boy, yükseklik geliyor aklıma.

Bu açıklamalar Ö16'nın boyut denilince en, boy ve yüksekliği anladığını göstermektedir.

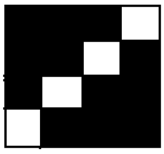
Halis öğretmen öğrencilerin üç farklı boyut hesaplama yöntemi öğrendiklerini ve bu yöntemleri kullanarak verilen fraktalların boyutlarını hesaplayabildiklerini ifade etmektedir. Ancak öğrencilerin fraktal boyutları hesaplarken yapmış oldukları işlemlerin nedenlerini çok fazla bilmediklerini ve bu nedenle de daha çok işlemsel öğrenmeler gerçekleştirdiklerini belirtmektedir.

> Öğrenciler her üç yöntemi de kullanarak fraktalların boyutlarını çok rahat hesaplıyorlar. Formülü de çok rahat çıkardılar ve kullanabiliyorlar. Öğrenciler formülü çıkardıktan ve kullandıktan sonra çok fazla sorgulamadılar, ancak bende oturmayan şeyler var. Tamam, boyutun log(n)/log(m) olduğunu hesaplıyoruz, işte doğru için yapıyoruz, kare için yapıyoruz, küp için yapıyoruz, buradan diyoruz ki işte boyut=d=log(öz-benzer parça sayısı)/log(büyüme oranı). Ancak buradaki kabul de genelleme için yeterli değil, bence.

Benzer şekilde mülakata katılan öğrencilerin verilen bir fraktalın boyutunu hesaplayabildikleri, ancak boyut hesaplarken yaptıkları işlemlerin ne anlama geldiğini çok fazla bilmedikleri belirlenmiştir.

Örneğin, Ö4 öğrencisinin ders sonu mülakatta verdiği yanıtlar aşağıda sunulmuştur.

A: Bu şeklin fraktal boyutunu hesaplayabilir misin?



Ö4: 1. Adımda çıkarılan iki parça var. 2kat büyütmem gerekiyor başlangıçtakini elde etmem için. Bir sonraki adımda 4 tane parçam kaldı. Yine 4 kat büyütmem gerekiyor, bu durumda büyüme oranı 2 ve bu büyüme oranında 2 öz-benzer parça oluşmuş. Bunu logaritma şeklinde boyutunu yazarsak d= log2/log2 den boyutu 1 olarak bulunur.
A: Niçin fraktal boyutu log(öz-benzer parça sayısı)/log(büyüme oranı) şeklinde hesaplıyorsun? Bulduğun değerlerin neden logaritmalarını alıp oranlıyorsun?
Ö4: Derste böyle bir formül çıkarmıştık, yani boyut=logm/logn dedik. Yani formülü çıkarırken hocamızda açıklamıştı, ama tam olarak niçin olduğunu bilmiyorum.

Öğrencinin bu açıklaması fraktal boyut için formülü bildiğini ve bunu kullanabildiğini, ancak formülü kullanırken yaptığı işlemlerin nedenlerini ise bilmediğini göstermektedir.

Buna karşın Ö25'in uzunluk ölçerek verilen bir fraktalın boyutunu hesaplamaya yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Kıyı şeridini farklı oranlarda küçülen doğru parçaları ile ölçtünüz. Burada amaç sence nedir?
Ö25: Amacımız kıyı şeridinin gerçek uzunluğunu bulmak. Farklı oranlarda küçülen doğru parçalarıyla ölçmek aslında kıyı şeridinin gerçek uzunluk değerine yaklaşmamızı sağlamaktadır. Çünkü böylelikle her seferinde daha ayrıntılı ölçümler yapabiliyoruz.
A: Bulduğumuz değerlerin niçin logaritmalarını aldınız?
Ö25: Bulduğumuz noktaların grafiği bir eğri grafiği iken o noktaların logaritmasını almak o eğriyi doğru haline getiriyor. Daha sonra bu doğrunun eğimini buluyorduk. Tabi kıyı şeridi tamamen öz-benzer olmadığından tüm noktalar o doğrunun üzerine düşmüyordu, bu nedenle yaklaşık olarak onları hesapladık. Çıkan değer kıyı şeridinin boyutunun ondalık kısmını vermektedir. Bu nedenle gerçek boyut değerini bulmak için 1 eklemeyiz.

Ö25'in bu açıklamaları uzunluk ölçerek verilen bir nesnenin boyutunu bulmanın aslında şeklin ayrıntılarını belirlemek olduğunu anladığını "Farklı oranlarda küçülen doğru parçalarıyla ölçmek aslında kıyı şeridinin gerçek uzunluk değerine yaklaşmamızı sağlamaktadır" sözlerinden söyleyebiliriz. Bunun yanında hesaplama işlemini yaparken niçin logaritmanın alındığını ve eğimin bulunduğunu anladığı da yaptığı açıklamalarından görülmektedir.

Ö21'in kutu sayma metodunu kullanarak fraktal boyutu hesaplamaya yönelik açıklaması ise aşağıda verilmiştir.

A: Kutu sayma metoduna göre boyutu nasıl hesaplıyoruz?
Ö21: Ağacı belli oranlarda küçülen kutularla kapladık ve o kutularda da ağaca benzer şekiller vardı. Sonra bunların logaritmalarını aldık bir grafik çizip eğimini bulduk. Bulduğumuz eğim bize boyutu verdi?
A: Ağacın boyutunu hesaplamada niçin kutu saymayı kullandınız da öz-benzerlik yöntemini kullanmadınız?
Ö21: Çünkü ağaç yaklaşık öz-benzerdir ve bu tür şekillerde kutu saymayı kullanıyoruz.
A: Bu yöntemi kullanırken niçin logaritmayı ve eğimi kullanıyorsunuz? Eğim nasıl boyutu veriyor?
Ö21: Onu çok bilmiyorum. Zaten çok farklı bir konu, kafamda oturmayan yerler var.

Ö21'de Ö4 gibi fraktal boyut hesaplama yöntemlerini bilmekte ve kullanmakta ancak, yöntemleri kullanırken neleri niçin yaptığının farkında değildir. Bu bağlamda hazırlanan çalışma yaprakları ve diğer materyallerin fraktal boyut konusunda öğrencilerde daha çok işlemsel öğrenmelere neden olduğu söylenebilir.

Halis öğretmen tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarının kesirli olarak hesaplanmasının öğrencilere çok tuhaf geldiğini ifade etmektedir. Bu durumu açıklamak için, yani kesirli boyutların da olabileceği yönünde bir anlayışı öğrencilerine kazandırmak için aşağıdaki şekilde bir yol izlediğini belirtmektedir.

Öğrencilere 1,5 boyut tuhaf geldi. Bunu kabullenmekte sorun yaşıyorlar. Sonra bu durumu şöyle çözmeye çalıştım. Çözmek derken şöyle bir yaklaşım izledim. Bu biraz daha mantıklı geldi onlara. Başta doğru parçası kaç boyutlu dedim. 1 boyutlu. Cantor kümesine bakalım başlangıçta bir doğru parçası iken içini yavaş yavaş boşaltmaya başladık, onu kaç boyuta doğru götürmeye çalıştık sıfır boyuta ancak tam sıfır da olmuyor, o arada bir yerde kalıyor. 0,63 gibi bir değer alıyor. Aynı şeyi Sierpinski üçgeninin ilk hali kaç boyutlu, işte 2 ve içini git gide çıkarıyoruz, tam da bir boyuta indirmiyoruz onu, süreç devam ediyor sürekli olarak. Sonuçta her zaman geride bir şeyler kalıyor. Böylece boyutu 1 ile 2 arasındadır diye bir açıklama getirmeye çalıştım. Tam matematiksel olarak olmasa da sezgisel olarak evet böyle bir şey olabilir kavramı oluştu öğrencilerde.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerde sezgisel olarak fraktal boyutların olabileceğini yönünde algının oluştuğunu göstermektedir. Halis öğretmen parça çıkarmanın boyutu azalttığı ve parça eklemenin ise boyutu artırdığı şeklinde bir açıklama yapmaktadır. Ancak yaptığı bu açıklamalar tüm fraktal yapılar için doğru olmamaktadır. Çünkü bu durumda örneğin Koch dörtyüzlüsünde bir dörtyüzlüye sürekli parçalar eklendiğinden boyutunun 3'den büyük olması gerekir. Oysa Koch dörtyüzlüsünün boyutu 3'den küçüktür. Halis öğretmende bu durumu açıklamayı yaptıktan sonra fark ettiğini ve kendi kuralına uymayan fraktalların boyutlarına sınıfta yer vermediğini belirtmiştir.

> Koch eğrisi dedim kaç boyutludur. Hocam dediler 1 ile başladık bir şeyler ekleyerek devam ettik 1 dek büyük bir şey olur ancak 2'de olmaz dediler. Bunu tahmin edebiliyorlar 1 ile 2 arasında bir şey olacak diye. Ama benim aklıma şöyle bir şey geldi ben onlara kartanesi desem ne olacaktı. Çünkü bu yaptığımız çıkarıma göre kartanesinin boyutunun 2'yi geçmesi gerekir ki bu onlara tuhaf gelecekti. Çünkü 2 ile başladık ve ona bir şeyler ekliyoruz. Burada bu yöntemle biraz sıkıntı yaşadım. Ancak dediğim şekilde anlatınca sorun olmuyor, böyle uç örnekleri hepsine söylemeyerek sadece belirgin örnekleri söyledim mesela Cantor'u, Sierpinskiyi, Koch eğrisini söyledim. Sonunda da Sierpinski dörtyüzlüsünün boyutu kaç olmalıdır diye sordum onlara. Hocam dediler ilk başta 3'tü içini boşaltmaya başladık 2 ile 3 arasında olacak dediler. Verilen tanıma göre onun boyutunu 2 buldular. Ama bunu tartışmadık. Belki bunu tartışsak daha verimli şeyler elde edebilirdik.

Öğretmenin bu açıklamaları fraktalların kesirli boyutlarını açıklamada izlediği yolun çok başarılı olmadığını göstermektedir. Bazı fraktalar için doğru olmasına karşın birçoğu için izlenen yol yanlış anlamalara neden olabilir. Çünkü boyutun hangi aralıkta olacağını öğretmenin izlediği yola göre belirleyen bir öğrenci farklı bir sonuçla karşılaşınca çelişki yaşayabilir.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda öğretmenin fraktal boyutların öğretimini yaparken izlediği bu yolun etkilerine yönelik bir bulguya rastlanmamasına karşın öğrencilerin kesirli boyutları anlamakta zorlandıkları tespit edilmiştir.

Örneğin Ö39'un açıklamaları aşağıda verilmiştir.

> A: Fraktal boyutlarla karşılaşınca neler hissettin?
> Ö39: Başta bu boyutlar inandırıcı gelmedi. Yani matematiksel olarak hesaplıyoruz, tamam, ama ben Sierpinski üçgeninin boyutunu 1,26 görünce çok şaşırdım. Kesirli bir boyut ne demek.
> A: Anlayamadığın ne oldu?
> Ö39: Yani hani bir boyutlu bir nesnenin boyu var iki boyutta eni ve boyu var. Ama 1,26 boyutlu bir nesne nasıl olur? Bunu kafam almıyor.

Ö39'un bu açıklamaları kesirli boyutları tam olarak içselleştirmediğini göstermektedir. Bunun en büyük nedeni öğrencinin boyutu 1,26 olan bir nesnenin görünüşünün nasıl olacağına karar verememesi ve onu tanımlayamamasıdır.

Benzer şekilde Ö21'in fraktal boyuta yönelik düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

> A: Derste yaptığın işlemleri göz önüne aldığında fraktal boyutlar sana inandırıcı geldi mi?
> Ö21: Yani bir nesnenin boyutunun 1,26 olduğunu görünce çok şaşırdım. Tamam, matematiksel olarak bunların olabileceğini gördük, ancak çokta fazla tatmin olmadım.

Ö21'in bu açıklamaları fraktal boyutların ona çok fazla inandırıcı gelmediğini göstermektedir. Bu durumun nedenlerinden biri sahip olduğu Euclid düşüncesinin güçlülüğü olabilir. Bir diğer neden ise uzunluk hesaplama ve kutu sayma yöntemlerini kullanarak yapılan boyut hesaplamalarında tam değil de yaklaşık sonuçların elde edilmesi olabilir.

Buna karşın Halis öğretmen bazı öğrencilerde tam matematiksel olmasa da kesirli boyutlara yönelik algılar ve anlamalar gelişmeye başladığını ifade etmektedir. Ders sonu mülakat yapılan Ö25'de bu tür bir değişimin olduğu gözlemlenmiştir.

A: Boyutu 2 ile 3 arasında olan bir nesneyi tanımlayabilir misin?
Ö25: Mesela ağacın boyutu 2 ile 3 arasındadır.
A: Niçin?
Ö25: Çünkü dalları ve girinti ve çıkıntıları var. Mesela bir prizma düşünelim, 3 boyutludur. Belirli bir şekildir, aralarında boşluk yoktur, tamamen dolu ve düzgündür. Ama ağacı düşündüğümüz zaman sonuçta dallar, yapraklar var arada boşluklar var. Girinti ve çıkıntılar var.

Ö25'in bu açıklaması fraktal boyutu şeklin karmaşıklık derecesini verdiğini anladığını göstermektedir. Ö15'in bir Euclid şekli ile bir fraktal yapıyı karşılaştırarak fraktal boyutların Euclid boyutlarında farkını ortaya koyduğu belirlenmiştir. Belki bu öğrencinin ağacın boyutunun 2 ile 3 arasında olmasının onun görünüşünün sayısal (matematiksel) olarak bir ifadesi olduğunun farkında olmadığı ifade edilebilir, ancak Euclid şekillerinin sahip olduğu düzgünlüğe, ağaç gibi fraktalların sahip olmadığını anladığı söylenebilir.

Benzer şekilde Ö16'nın boyutu 2,5 olarak verilen bir nesnenin eni, boyu ve yüksekliği olabileceğini ifade ettiği ve bu durumda bu nesnenin 3 boyutlu bir nesneden farkının ne olacağına yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Bu nesnenin eni, boyu ve yüksekliği varsa onun 3 boyutlu bir nesneden farkı nedir?
Ö16: Derste bu soru benim aklıma geldi, ama sonra ağacın boyutunu hesaplarken gördüm ki küçük karelerle ağacı kaplayıp en ince ayrıntısına kadar… Sonuçta ağaç bir küp gibi düzgün değil girinti ve çıkıntıları var. Bunları normalde ölçemiyoruz. Ama fraktal boyutla onun boyutunun 2 ile 3 arasında olduğunu bularak yaklaşık olarak bu ölçemediğimiz yerler içinde bir değer söylemiş oluyoruz.

Ö16'nın bu açıklaması fraktal boyutların şeklin karmaşıklığını ölçtüğünü ve şeklin karmaşıklık derecesini verdiğini anladığını göstermektedir. Hatta kesirli boyutu verilen bir nesnenin şeklinin de nasıl olabileceğini tanımlamaya başladığı söylenebilir.

Halis öğretmen öğrencilerde fraktal boyutun "şeklin karmaşıklık derecesini" gösterdiği yönünde bir anlayışın oluşmasında uzunluk ölçerek boyut hesaplama yönteminin etkili olduğunu ifade etmektedir.

> Kıyı şeridinin uzunluğunu hesaplayarak boyutu öğrenciler buldular. En düşük boyut Karadeniz kıyısı iken en büyük boyut Eğe kıyısının çıktı. Öğrencilere kıyıların boyutları ile şekilleri arasındaki ilişkiyi sorduğumda boyutun girinti çıkıntı arttıkça arttığını ifade ettiler. Hatta bir öğrenci alüminyum etkinliğine vurgu yaparak o zaman onun boyutunun da 2 ile 3 arasında olması gerektiğini söyledi.

Öğretmenin bu açıklamaları kıyı şeridinin uzunluğunu ölçerek fraktalın boyutunu hesaplama etkinliğinin öğrencilerin boyut ile şeklin karmaşıklığı arasında ilişki kurmasında etkili olduğunu göstermektedir.

Mülakat yapılan öğrencilerden bir tanesinin fraktalların kesirli boyutları ile bu fraktalların çevresi, alanı ve hacmi arasındaki sıra dışılık arasında bir ilişki kurduğu belirlenmiştir.

> Ö25: İlk haftaki dersimizde verilen fraktalların çevresi, alanı ve hacimlerini bulmuştuk ve benim çok kafam karışmıştı. Çünkü örneğin Sierpinski üçgeninin çevresi sonsuza giderken alanı sıfır oluyordu. Bunu bir türlü anlayamıyordum. Ama fraktal boyutları öğrenince bu durum daha mantıklı geldi bana.
> A: Niçin?
> Ö25: Çünkü Sierpinski üçgeninde alanı sıfıra gidiyor, ama çevresi sonsuza gidiyor ki bu durumda boyutunun 1,5 civarında olması mantıklı geliyor. Yani ne 1 boyutlu ne de 2 boyutlu. Ancak bu tür bir nesnede bu olabilir.

Ö25'in bu açıklamaları fraktalların çevresi, alanı ve hacmindeki sıra dışılığın nedeninin onların boyutlarından kaynaklandığının farkına vardığını göstermektedir. Ö25 Sierpinski üçgeninin boyutunun 1,5 civarında olduğunu söyleyerek, çevrenin boyutun 1 den büyük olması nedeniyle sonsuza gitmesini ve boyutun 2 den küçük olması nedeniyle de alanın sıfıra gitmesini anladığını söyleyebiliriz.

3.1.2.6. Kaos

Halis öğretmen kaos oyunu sonucunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu öğrencilerinin çok fazla anlamadıklarını ifade etmektedir.

> Kaos oyununda ilk başta öğrenciler nasıl bir şekil çıkacağını tahmin edemediler. Daha sonra Sierpinski üçgeninin çıktığını gördüler ama niçin oyun sonunda bu üçgenin ortaya çıktığı yönünde çok anladıklarını da sanmıyorum. Sen istersen anlatıyorsun, sen anlatmazsan niye çıktı diye çokta sorgulamıyorlar. Aslında yazılım olarak biraz sorunluydu. Yazılım öğrenciler üzerinde rahatça işlem yapmalarına izin vermiyor. Tabii ki bir rastgelelik içerisinde ilk başta bulanık gibi görünen bir yapı içerisinde matematiksel bir yapı görmeleri güzel öğrenciler için ama kendilerinin onu yapmaları daha etkili olurdu diye düşünüyorum. Yani oyundaki değişkenleri değiştirdiklerinde ne tür sonuçlar görebilecekleri yazılımda yapılabilseydi öğrenciler oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeni oluştuğuna da daha doğru cevaplar verebilirlerdi. Kaos oyununda çok fazla sorun çıkmıyor ama bunu nedeni öğrencinin çok fazla soru sormamasından kaynaklanıyor. Yani değişkenlerle ben oynayıp niçin böyle olduklarını anlatmazsan sormuyor ki niçin böyle oldu.

Öğretmenin bu açıklamaları derste kullanılan yazılımın oyun sonunda Sierpinski üçgeninin oluşumunu görmede etkili olmasına karşın, niçin bu üçgenin oluştuğunu anlamada çok fazla etkili olmadığını göstermektedir. Bu durumun nedenlerini Halis öğretmen şu şekilde sıralamaktadır:

- Kullanılan yazılımın öğrenciler için çok esnek olmaması. Yani öğrenciler eşkenar üçgen için bu oyunu oynarken, herhangi bir üçgen içinde bu oyunu oynadıklarında ne tür bir durumla karşılaştıklarını irdeleme fırsatı elde edememektedirler.
- Oyunun öğrenciler tarafından oluşturulmaması. Yani, öğrencilerin oyunu kendilerinin oluşturup oynamaları durumunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu daha anlamlı anlayacaklarını ifade etmektedir.

Halis öğretmen farklı başlangıç noktaları içinde oyunu oynadıklarında benzer güçlüklerle karşılaştıklarını ifade etmektedir.

> İki nokta için kaos oyununu oynadığımızda da yine benzer sorunlarla karşılaştık. Öğrenci yazılımı kullanarak tek tek noktaların hareketini takip edemediğinden oyun sonunda oluşan şeklin nasıl oluştuğu ona çok anlamlı gelmiyor. Oluşacak şekli daha çok tahtada tartıştık. Öğrenciler iki nokta için genelde oluşacak şekli tahmin ettiler ama yine de tam olarak anlayamadılar.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlar da öğretmenin ifadeleriyle paralellik göstermektedir. Örneğin Ö21'in kaos oyunuyla ilgili açıklamaları aşağıda verilmiştir.

> A: Kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştu?
> Ö21: Kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski'nin oluştuğunu açıkçası hala bilmiyorum. Derste bende hep bunu düşündüm. Sonra hocamızın açıklamaları doğrultusunda

noktanın mesela çıkarılan üçgenlerde alınması sonucu hep bir sonraki çıkarılan üçgenlerde gezindiğini söyledi. Bu nedenle oluşmaktadır.

Ö21'in bu açıklamaları kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlamadığını göstermektedir. Öğretmenin dersteki açıklamaları Sierpinski üçgeninin oluşumunda noktaların hareketine öğrencilerin dikkatini çekmeye çalışmaktır, ancak öğrenciler noktaların hareketine çok fazla dikkat etmedikleri söylenebilir.

Mülakat yapılan öğrencilere "her kaos oyunu sonucu bir fraktal şekil oluşur mu?" sorusu sorulduğunda ise farklı yanıtların alındığı tespit edilmiştir.

Örneğin Ö2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

A: Her kaos oyunu sonucu bir fraktal şekil oluşur iddiasının doğruluğu için neler söyleyebilirsin?
Ö2: Derste bunu arkadaşlarla yapmaya çalıştık. Mesela iki nokta için oynadığımızda Cantor kümesi oluşmuştu. 3 nokta için oynarken kuralı değiştirdik, Sierpinski'ye benzer başka bir şekil oluşturduk. Yani her seferinde kurallı, düzgün bir şekil oluşuyordu. Bu nedenle iddia doğrudur.
A: Daha farklı noktalar ya da tekrarlama kuralları için bunun doğruluğunu test ettiniz mi?
Ö2: 4 ve 5 nokta içinde baktık. Her seferinde çok düzgün şekiller oluştu.

Ö2'nin bu açıklaması kullandıkları web sitesinde birkaç deneme sonucunda şekilleri düzgün ve kurallı yapılar elde etmelerinden dolayı bu iddianın doğru olacağı sonucuna ulaştığını göstermektedir. Aslında burada öğrencinin odaklandığı nokta oyun sonucu her seferinde düzgün bir şeklin oluşmasıdır. Ancak bu şekillerin her bir bir fraktal olmak zorunda değildir. Bu bağlamda Ö15'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Her kaos oyunu sonucu bir fraktal şekil oluşur iddiasının doğruluğu için neler söyleyebilirsin?
Ö15: hayır her zaman olmak zorunda değil. 4 nokta için oyunu oynadığımızda kare oluşuyordu.

Ö15 açıklamasında oyun sonunda şekilleri düzgün yapılar oluşmasına karşın bunlardan fraktal olmayanlarında bulunduğunu belirtmektedir.

3.2. Öğretmen ve Öğrencilerin Fraktal Geometri Öğretim Programının Uygulanması Sürecinde Yaşadıkları Deneyimlerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde dersin öğretmeni ve öğrencilerin fraktal geometri öğretim programının uygulanması sürecinde yaşadıkları deneyimleri hafta hafta sunulmuştur.

1. Hafta

İlk hafta fraktal geometri kavramına giriş ve geometrik tekrarlamalar konularının öğretimi yapılmıştır. Bu konunun öğretiminde öğretmen aşağıdaki gibi bir yol izlediğini ifade etmektedir.

> A: Fraktal dersinize nasıl başladınız? Neler yaptınız?
> H: Elimdeki öğretmen kılavuzunu temel almaya çalıştım. Öncelikle grup çalışmasının daha faydalı olacağını düşündüm. Çünkü ilk çalışma yaprağında verilen şekillerin görünüşlerine göre sınıflandırılması isteniyordu. Öğrencilere çalışma yaprağını dağıttım ve yaklaşık 15 dakika bunun üzerinde çalışmalarını istedim. Daha sonra slaytı açarak buradaki nesnelerin şekillerini dış görünüşüne göre sınıflandırmalarını istedim. Nesnelerin şekilleri üzerine sınıfta tartıştık. Amacım öğrencilerin doğal nesneleri temel alarak fraktal geometrinin farklı bir geometri olduğu algısını kazanmalarını sağlamaktı.

Öğretmenin bu açıklamaları fraktal geometriye yönelik bir algı geliştirmede grup çalışması ve sınıf tartışmasını kullandığını göstermektedir.

Öğrencilerin yapılan bu etkinlikten hoşlandıkları mülakatta verdikleri cevaplardan görülmektedir.

> A: Bu derste neler yaptınız?
> Ö25: Bugünkü ders çok farklı bir dersti. Başta doğal nesneleri görünüşlerine göre sınıflandırdık ve bunların Euclid geometrisiyle tanımlanmalarının çok zor olduğunu söyledik.
> A: Gerçekten öyle mi?
> Ö25: Yani ben daha önce hiç eğrelti otunun şeklini incelemedim, ya da matematiği kullanarak bir ağacı oluşturmayı.
> A: Yaptığın şeyler ilgini çekti mi?
> Ö25: evet hem çok ilginç, hem de eğlenceliydi. Hocamız bize farklı bir geometri dersi anlatacağını söyleyince yine üçgen kare gibi şeyler olacağını sandım. Ama bugünkü ders çok farklıydı. İlk kez böyle şeyleri gördüm.

Ö25’in bu açıklamalarından dersin başında yaptığı etkinlik ve çalışmaların çok fazla ilgisini çektiği ve farklı bir geometriyle çalışmaya başladığının farkına vardığı söylenebilir.

Halis öğretmen daha sonra fraktal ağacı oluşturmaları için öğrencilerine çalışma yaprağı-2’yi verdiğini ifade etmektedir.

> Öğrencilere doğada gördükleri bu ağacı şimdi doğru parçalarını kullanarak nasıl oluşturacaklarına yönelik çalışma yaprağını dağıttım. Öğrenciler bireysel olarak farklı ağaç şekilleri oluşturdular. Ancak slaytta ve çalışma yaprağında biraz formal bir yapı oldu sanırım. Çünkü bu etkinliklerde amaç başlangıç, üretici ve yörünge kavramlarını kazandırmaktı. Üretici ve başlangıç şekli kavramlarını başta vermek yerine onlara farklı tekrarlama kuralları vererek örüntüleri oluşturmalarını sağlamak ve daha sonra oluşturdukları bu örüntüler üzerinden başlangıç ve üretici kavramlarını tartışmanın daha yararlı olacağını düşünüyorum. Bu daha akılda kalıcı olur. Böyle daha formal oldu sanırım.

Öğretmenin slayt ve çalışma yapraklarında üretici ve başlangıç şekillerine yönelik etkinlikleri formal olarak tanımladığı görülmektedir. Halis öğretmen öncelikle öğrencilerin farklı tekrarlamalarla fraktalları oluşturmalarının daha sonra da elde ettikleri örüntülere göre başlangıç ve üreticinin tanımlanmasının kalıcılığı artıracağını ifade ettiği belirlenmiştir. Bu açıklamalardan Halis öğretmenin bir nevi başlangıç ve üretici kavramlarını öğrencilerin hazır olarak almalarını değil de kendilerinin oluşturmalarını istediği söylenebilir.

Ö25’de fraktal ağaç çizme etkinliğinin ilgisini çektiğini aşağıdaki sözleriyle dile getirmektedir.

> A: Fraktal ağaç etkinliğinde neler yaptın? Neleri yapmakta zorlandın?
> Ö25: Farklı ağaç şekilleri çizdik. Doğru parçaları ve açılara göre şekiller değişiyordu.
> A: Ne tür şekler oluştu?
> Ö25: Mesela aradaki açı 120^0 olunca tam ağaca benzer şekil oluştu, açı 90 olunca böyle antene benzer bişey oluştu. Sonra 3 doğru parçası için bu sefer oluşturduk. Öyle yani,
> A: Bu şekilleri çizmekte zorlandın mı?
> Ö25: yok şekilleri çizmek çok kolaydı, ancak 4. adımdan sonra sıkıcı oluyordu.

Ö25’in bu açıklamaları fraktal ağaç etkinliğini başarıyla yapabildiğini, ancak ağaç şekillerini ilerleyen adımlarda çizmekten biraz sıkıldığını göstermektedir.

Halis öğretmen ilk dersin bu şekilde tamamlandığını ve daha sonra ikinci derste Cantor kümesinin oluşturulması etkinliğinin yapıldığını belirtmektedir. Öğretmen Cantor kümesinin oluşturulması etkinliğinde öğrencilerin çok fazla zorlanmadıklarını ifade etmektedir.

> H: Cantor kümesini oluşturdukları etkinliği grup çalışmasıyla yaptırdım. Çünkü çıkan şeklin özelliklerini daha iyi tartışacaklarını düşündüm. Öğrenciler şekli çok kolay çizdiler. Çalışma yaprağında verilen tablolar örüntüleri bulmalarını kolaylaştırdı.
> A: Etkinliği ne kadar sürede tamamladınız?
> H: Sınıf tartışmasını da katarsak yaklaşık 30 dakikada etkinliği tamamladık.

Öğretmenin bu açıklamaları Cantor kümesinin oluşturulması etkinliğinin başarılı şekilde yapıldığını göstermektedir. Buna karşın ders sonu mülakattaki bazı öğrencilerin Cantor kümesinin şeklini çizmekte zorlandıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö33 Cantor kümesini belli bir adımdan sonra nasıl çizeceğine karar vermede zorlandığını aşağıdaki sözleriyle ifade etmektedir.

> A: Cantor kümesini oluştururken zorlandığın yerler oldu mu?
> Ö33: Çizmekte zorlandım. Sürekli her adımda küçülüyor, belli bir yerden sonra noktalar halini alıyor ki sonrasında nasıl çizebilirim diye düşündüm. Ama karar veremedim.

Ö33'ün bu açıklaması Cantor kümesinin sadece birkaç adım için şeklini oluşturabildiğini, ancak sonraki adımlarda şeklin nasıl görüneceğine karar veremediğini göstermektedir. Bu durum öğrencinin Cantor kümesinin görselleştirilmesinde bir güçlükle karşılaştığını göstermektedir.

Bunun yanında bazı öğrencilerin ise Cantor kümesinde geride kalan nokta sayısını anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö37 Cantor kümesinde geride kalan nokta sayısını anlamakta zorlandığını ifade etmektedir.

> A: Cantor kümesini oluşturabildin mi? Cantor kümesinde anlamadığın yerler oldu mu?
> Ö37: Kümeyi oluşturmak kolaydı. Ama ben geride kalan nokta sayısını anlayamadım. Yani hocamız geride sonsuz nokta kalır dedi, ama her seferinde parça çıkarıyoruz. Bence geride bir şey kalmaz. Zaten uzunluğunu hesapladığımızda sıfır bulduk. Geride nasıl sonsuz nokta kalır?
> A: Peki uç noktalar çıkarılıyor mu?
> Ö37: Başta çıkmıyor gibi ama sonsuzda bir şey kalmıyor ki geride.

Ö37'nin bu açıklamaları Cantor kümesinin oluşumunda geride noktalar yığını kaldığını anlamakta zorlandığını göstermektedir. Uç noktaların asla çıkarılmadığı söylenmesine karşın Ö37 toplam uzunluğu göz önüne alarak geride bir şey kalmadığını söylemektedir. Elde edilen bu bulgular öğrencilerin çalışma yapraklarında verilen fraktalları oluşturabilmelerine karşın bu fraktalların oluşumlarındaki bazı durumları anlayamadıklarını göstermektedir.

Benzer şekilde Ö33'de Cantor kümesinin sonsuz sayıda noktayı içermesine karşın uzunluğunun nasıl sıfır olduğunu anlayamadığını belirtmektedir.

A: Cantor kümesinde anlamakta zorlandığın yerler oldu mu?
Ö33: Aslında oldu. Cantor kümesinin uzunluğunun sıfıra gittiğini bulduk ama sonra hocamız Cantor kümesinin bir noktalar yığını olduğu hatta sonsuz tane sayılamayan noktadan oluştuğunu söyledi. Bunu çok anlayamadım. Yani kalan nokta sayısını algılamakta hala zorlanıyorum. Uzunluğu sıfıra giden sonsuz noktadan oluşan bir şekil nasıl?
A: Cantor kümesi içerisinde sonsuz nokta yok mu?
Ö33: Yani bir kere uç noktaları çıkarmıyoruz. Her bir adımda yeni doğru parçaları oluştuğundan sonsuz gibi. Aslında sorun bu geometride. Mesela Euclid geometrisini uyguluyorsun, şekli karşında görüyorsun. İçerisinden bir şey çıkarmıyorsun. Ancak burada sürekli küçülüyor, küçülüyor sonra mikroskobik nokta oluyor. Sonuçta bakıyoruz geride sonsuz tane nokta var ama sıfır uzunluk olmuş.

Ö33 Cantor kümesinin sonsuz sayıda noktadan oluşmasına karşın sıfır uzunluğa sahip olmasını anlayamadığını dile getirmektedir.

Buna karşın Ö16 ise Cantor kümesini çok kolay oluşturabildiğini ve içerisindeki örüntüleri bulabildiğini belirtmektedir.

A: Derste Cantor kümesini oluştururken herhangi bir güçlükle karşılaştın mı?
Ö16: tabi ilk olarak farklı bir geometriyle karşılaşınca biraz farklı geldiğinden biraz şey olduk ama çok fazla olmadığını söyleyebilirim.
A: Peki Cantor kümesi nasıl oluşmaktaydı? Oluşumunu anlayabildin mi?
Ö16: onu kolaylıkla oluşturabildim, doğru parçasını 3 eş parçaya bölüp ortadakini çıkarıyorduk.
A: Peki Cantor kümesi içerisindeki örüntüleri bulabildin mi? Yani her bir adımda kaç doğru parçası oluşuyor? Uzunlukları nasıl değişiyor?
Ö16: kuralı yakalayınca onları bulmak kolay. Derste sorulan örüntüleri buldum.
A: Cantor kümesinde geride kalan nokta sayısını bulmada bir güçlükle karşılaştın mı?
Ö16: O çok ilginçti. Başta sanki her şey çıkarılıyor gibi geliyor, ama oluşan her doğru parçasındaki uç noktalar asla çıkarılmıyor. Bu nedenle geride sonsuz nokta kalıyor.

Dersin öğretmeni Cantor kümesinde geride kalan noktaların sayısı üzerine sınıf tartışmasında neler yaşandığına yönelik açıklamalarda bulunmamasına karşın, bazı öğrencilerin Cantor kümesinde geride kalan nokta sayısını belirlemede zorlandıkları söylenebilir.

Halis öğretmen ikinci derste fraktal ejderi oluşturmaya çalıştığını, ancak bu etkinliğin planlanandan daha fazla zaman aldığını ifade etmektedir.

> H: Fraktal ejderi oluştururken çok zorlandık. Yani hangi parça nereye 45^0 dönecek, hangisi 90^0 dönecek çelişkide kaldım. Öğretmen kılavuzunda şeklin adım adım oluşmuş halini görmeme rağmen bazı öğrenciler verilen kurala göre farklı şekiller oluşturdular ki bu da kuralın herkes tarafından aynı şekilde anlaşılamadığını göstermektedir. Bence tekrarlama kuralında bir problem var. Çünkü normalde V şeklini elde ettikten sonra 5 rakamına benzer bir şekli elde etmek gerekirken bazı öğrencilerin kare şeklini elde ettiklerini gördüm.
> A: Etkinliği tamamlayamadınız mı?
> H: Yok tamamladık, diğer dersin tümünü bunu açıklamaya ayırdım. Tahtada kendim çizerek ejderi oluşturmaya çalıştım.

Öğretmenin bu açıklamaları fraktal ejder etkinliğinde oldukça zorlandığını göstermektedir. Benzer bir durum öğrencilerin ifadelerinde de rastlanmaktadır.

Örneğin Ö37'nin fraktal ejderi oluşturmaya yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Fraktal ejderi oluştururken bir sorunla karşılaştın mı?
> Ö37: Evet. Ejderi çizmek oldukça zordu. Çizmede baya zorlandım. İşte 45^0 döndür, sonra 90^0 döndür noktayı belirlemek gerekiyor, yoksa yanlış yapabiliyoruz.
> A: Dersteki diğer fraktalların şeklini çizmede zorlandın mı?
> Ö37: hayır. En çok ejderi çizmede zorlandım. Diğerleri daha kolaydı.

Ö37'nin bu açıklamaları Halis öğretmenin açıklamalarını desteklemektedir.

Ders sonunda Halis öğretmen, öğretmen kılavuzunda ölçme değerlendirme bölümündeki etkinlik ve alıştırmaları öğrencilere ödev olarak verdiğini belirtmiştir.

2. Hafta

İkinci hafta fraktalların çevresi, alanı ve hacminin hesaplanması konusunun öğretimi gerçekleştirilmiştir.

Halis öğretmenin Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanına yönelik etkinliği nasıl uyguladığına yönelik görüşleri aşağıda sunulmuştur.

> Sierpinski üçgeni çalışma yaprağını yaparken öncelikle öğrencilere bir önceki haftada yaptıklarımızı kısaca özetledim ve onları ikişerli gruplara ayırdım. Sonra Sierpinski üçgenini oluşturmalarını bekledim. Tüm öğrenciler üçgeni kolayca oluşturdular. Daha

> sonra 15-20 dakika çevre ve alanı hesaplamaları için onları serbest bıraktım. Grupların arasında dolaşarak gerekli yerlerde yardımcı olmaya çalıştım.

Öğretmenin bu açıklamaları etkinliği grup çalışmasıyla yaptırdığını ve sınıf tartışmasıyla elde edilen sonuçları genelleştirmeye çalıştığını göstermektedir.

Halis öğretmen öğrencilerin çalışmalarını izlerken bazı öğrencilerin çevrenin sonsuza giderken alanın sıfır olduğunu belirlediklerini, ancak bu sıra dışı durumu çok anlayamadıklarını belirtmektedir.

> Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanını hesaplarken çevrenin sonsuza gitmesine karşın alanın sıfıra gittiğini gördüler. Bu durum öğrencilere çok sıra dışı geldi. Yani bir nesnenin çevresi sonsuzken alanı nasıl olmamakta, çok anlamlandıramadılar.

Halis öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin Sierpinski üçgeninin çevresi sonsuza giderken alanının sıfır olmasını mevcut Euclid bilgileriyle anlayamadıklarını göstermektedir. Bunun yanında Halis öğretmen öğrencilerin Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanını hesaplamada da zorlandıklarını belirtmektedir.

> Öğrenciler çevre ve alanı hesaplarken oldukça zorlandılar. Bir kısmı serinin nasıl toplanacağını ya da yakınsaklık ıraksaklık durumunu biliyor, ancak örüntüyü seriye dökemiyor. O seriyi yakalayabilen öğrenci sayısı sınırlı. Özellikle Sierpinski dörtyüzlüsünde bu oran daha da düşüyor. Yani öğrencilerin buldukları örüntüleri matematiksel forma getirmede problemleri var. Diğer bir kısım öğrenci ise ya bir örüntü bulamıyor, ya da bulduğu örüntüyü düzenleyemiyor. Bazen ¼'ün karesi küpü şeklinde giden bir ifadeyi düzenleyip bir geometrik seri haline getirmede sorun yaşıyorlar. Geçen dönem aldıkları derste geometrik seri toplamını öğrenciler gördüler, ancak yine de elde ettikleri verileri düzenleyemiyorlar. Daha doğrusu bir seri yakalamada sıkıntı var.

Halis öğretmen öğrencilerin çevre sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesini anlamada zorlanmalarının yanında çevre ve alanı hesaplamaya yönelik örüntüleri bulmada da zorlandıklarını belirtmektedir. Bu durumun nedenini öğrencilerin elde ettikleri verilerin düzenleyip bir örüntü bulamamalarına ve geometrik serilere yönelik ön bilgilerindeki eksikliklere bağlamaktadır.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatta da öğrencilerin Sierpinski üçgenini çok kolay oluşturmalarına karşın çevre ve alanı hesaplamada zorlandıkları ve bazılarının çevrenin sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesini çok fazla anlamlandıramadıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö4'in açıklamaları aşağıda verilmiştir.

> A: Sierpinski üçgeniyle ilgili etkinliklerde neler yaptın? Neleri anlamakta zorlandın?
> Ö4: Sierpinski üçgenini ön sayfada verilenlere göre çizdim ve tabloları doldurdum. Çevresinin sonsuza alanının sıfıra gittiğini buldum. Ancak arkadaki sorular biraz kafa karıştırıcıydı.
> A: Ne gibi?
> Ö4: Matematiksel olarak alanın sıfır ve çevrenin sonsuz gittiğini gösterdik. Ancak bu tür bir şekil nasıl olabilir ki. Bunu anlayamıyorum.

Ö25 ise çevrenin sonsuza giderken alanın sıfıra gitmesi başta kendisine garip gelse de sınıf içerisindeki tartışmalar sonunda bu durumun mantıklı olabileceğini ifade ettiği belirlenmiştir.

> A: Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanı nasıl değişmektedir?
> Ö25: Çevre sonsuza giderken alanı sıfır olmakta.
> A: Bu sana inandırıcı geldi mi?
> Ö25: Başta kendi kendime nasıl olur bu ya dedim. Sonsuz çevreli ama sıfır alanlı bir şekil. Sonra dersteki tartışmalarda her bir tekrarlamada üçgenleri çıkardığımızı ve asla köşe noktalarının çıkarılmadığını söyledik. Tekrarlamalar sonsuza kadar devam ettiğinden sonsuz tane köşe noktası geride kalır ki köşe noktaları da bir alan belirtmediğinden bu olay bana mantıklı geldi.

Bu açıklama sınıf içerisinde yapılan tartışmaların bazı öğrencilerin çevrenin sonsuza giderken alanın sıfıra gitmesi olayını anlamalarına yardımcı olduğunu göstermektedir.

Halis öğretmen çalışma yaprağında yer alan son iki soru üzerinde çok fazla durduğunu ve öğrencileriyle bu soruları tartıştıklarını ifade etmektedir.

> Yani nasıl olur bir şeklin alanı sıfıra giderken çevresi sonsuza gider. Sierpinski üçgenini neredeyse tamamına yakınını içerisinden çıkarıyorsun, ama geride bir sürü nokta kalıyor ve böyle bir durum elde ediyorsun. Öğrenciler hocam bunlar ne olacak bu sonsuz tane noktanın hiç mi değeri yok şeklinde sorular yönelttiler. Sınıf içerisinde bu konuda çok tartıştık. Geride sonsuz tane noktanın kalması öğrencilerin tereddüt yaşamasına neden oldu. Tartışmalarda hem beni hem de onları yeterince tatmin edici bir şeyler söyleyemedim sanırım. Açıkçası ben bile bu durumu anlamakta zorlanıyorum.

Halis öğretmen Sierpinski üçgeninin çevresinin sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesine karşın geride sonsuz tane noktanın kalmasına ve bu tür bir nesnenin nasıl olabileceğine yönelik sınıf tartışmasında tatmin edici bir sonuca ulaşamadığını belirtmektedir.

Örneğin Ö21 ile yapılan ders sonu mülakatta öğrencinin verdiği cevaplar aşağıda sunulmuştur.

> Ö21: Çok farklı bir dersti. Çünkü ilk defa böyle şeylerle karşılaştım. Yani Sierpinski üçgeninden parçalar çıkarıldığında çevre artıyor, ancak alan sıfır oluyor. Bu çok ilginç geldi.
> A: Niçin? Neleri anlamada zorlandın?
> Ö21: Aslında parça çıkarma işi biraz kafamı karıştırdı.
> A: Nasıl?
> Ö21: Sierpinski üçgeninde ortadaki üçgenleri çıkarıyoruz. Bu durumda çıkarılan üçgenlerin köşelerindeki noktaları da çıkarıyoruz. Yani sonuçta geriye hiç nokta kalmaması lazım. Ya da en azından noktaların doğrusal olmaması lazım. Oysa oluşan şekle bakınca doğru parçalarından oluşuyor. Nasıl oluyor da noktalar bir arada kalarak doğruları oluşturuyor?
> A: Merkezdeki üçgenleri çıkardığımızda köşelerdeki noktaların da çıkarıldığından emin misin?
> Ö21: Evet bakın (Ö21 Sierpinski üçgeninin ilk tekrarlamasını çizdi ve merkezdeki üçgeni ve üç köşe noktasını işaretleyerek gösterdi) bu üçgeni kesersem bu noktalarda çıkar.
> A: O zaman geride kalanlar için ne diyebilirsin? Onlar üçgen mi?
> Ö21: Böyle düşününce mantıklı geliyor. Ancak diyelim geride sonsuz tane nokta kalıyorsa nasıl alanı sıfır oluyor? ve nasıl çevre sonsuz oluyor? Bunu anlayamadım.

Ö21'in bu açıklamaları Halis öğretmenin belirttiği gibi sınıf tartışmalarının Sierpinski üçgeninden çıkarılan parça sayılarıyla geride kalan parça sayılarını belirlemede ve bunları çevre ve alanla ilişkilendirmede çok yeterli olmadığını göstermektedir. Buna karşın Ö25'in açıklamaları ise bazı öğrenciler için sınıf tartışmasının alan ve çevrenin bu sıra dışı durumunu anlamada etkili olduğunu göstermektedir.

Halis öğretmen sınıf içi tartışmaların uzun sürmesinden dolayı Sierpinski üçgeni etkinliğinin bir ders süresinden biraz daha fazla zaman aldığını ifade etmektedir.

Diğer derste Halis öğretmen Sierpinski çokyüzlüsünün yüzey alanı ve hacmini hesaplamaya yönelik etkinliği uyguladığını belirtmiştir.

> Etkinliğe başlamadan önce Sierpinski çokyüzlüsü modellerini gruplara dağıttım. Bazı gruplar model sayısının azlığından dolayı 3 ya da 4'er kişilik oldular. Öncelikle öğrencilerden bu modeli incelemelerini ve ne tür şekiller gördüklerini açıklamalarını istedim. Daha sonra çalışma yaprağını dağıttım ve çalışma yaprağındaki ilk iki soruyu sınıf tartışmasında cevaplamalarını istedim. Sonra öğrencileri yaklaşık 20 dakika serbest bırakarak çalışma yaprağındaki yüzey alanı ve hacmi sorularını yanıtlamalarını bekledim. Bu arada sınıf içerisinde dolaşarak öğrencilerin neler yaptıklarını gözledim.

Halis öğretmen Sierpinski çokyüzlüsünde de öğrencilerin yüzey alanını ve hacmini hesaplarken örüntü bulmada ve geometrik serilerde işlem yapmada zorlandıklarını belirtmektedir.

> Çalışma yaprağında öğrencilere yüzey alanı ve çevreyi bulmalarına yardımcı olacak örüntüleri içeren tablo verilmişti. Ancak kullandığımız modeller Sierpinski çokyüzlüsünün 3. adımına kadar yapılmıştı ve bu nedenle öğrenciler oluşan yüz sayısını bulmada zorlandılar.

Benzer şekilde Ö7 Sierpinski dörtyüzlüsünde oluşan yüz sayısı, kenar sayısı ve dörtyüzlü sayısını belirlemede çok zorlandığını aşağıdaki şekilde ifade etmektedir.

> Sierpinski çokyüzlüsünü sınıfta yaptık. Hocamız bir 3 boyutlu Sierpinski modeli sınıfa getirdi. Bu modele göre her bir adımdaki dörtyüzlü sayısını ve kenar sayıları gibi şeyler için kurallar bulduk. Ancak bunları bulmak zordu. Sierpinski üçgeninde daha kolay bulabiliyoruz karalanan üçgen sayısını.

Bu açıklama öğrencinin Sierpinski çokyüzlüsündeki örüntüleri bulmada zorlandığını göstermektedir. Bunun yanında Sierpinski üçgenindeki örüntüleri Sierpinski çokyüzlüsündeki örüntülere göre daha kolay bulması bu öğrencinin 2 boyutlu modellerle tanımlanan fraktal yapılardaki örüntüleri 3 boyutlu modellerle tanımlanan fraktal yapılara göre daha rahat bulabildiğini göstermektedir.

Halis öğretmen bu çalışma yaprağı sonunda da çıkarılan parça sayısı ve geride kalan nokta sayısı üzerine tartışmalar yaptıklarını ifade etmektedir.

> Öğrencilerle Sierpinski üçgeninde olduğu gibi burada da çıkarılmayan kaç nokta olduğu ve hacim sıfıra giderken alanın nasıl değişmediğine yönelik tartışmalar gerçekleştirdik. Bu tartışmalarda yüzey alanının değişmemesini öğrencilerin anladıklarını gözledim. Ancak hacim sıfıra gidince nasıl bir şekil oluşacağını zihinlerinde canlandıramıyorlar. Ben de bunu yapamıyorum açıkçası.

Ö25'in yüzey alanının değişmediğine yönelik açıklaması aşağıda verilmiştir.

> A: Sierpinski çok yüzlüsünün yüzey alanı ve hacmi nasıl değişmektedir?
> Ö25: Yüzey alanı değişmediğini gösterdik. Hacmi sıfıra gidiyordu.
> A: Bu sana mantıklı geldi mi?
> Ö25: Aslında mantıklı geldi. Çünkü Sierpinski çokyüzlüsünün oluşumunda çıkarılan dörtyüzlüler içeride yeni yüzlerin oluşmasını sağlamakta. Böylece alan değişmiyor. Sürekli dörtyüzlüleri çıkararak Sierpinski üçgeninin içinin boşaltıyoruz bu ise hacminin niçin sıfır olduğunu gösterir.

A: Peki hacmi sıfıra giden alanı değişmeyen bir şekil nasıl olur?
Ö25: Orası işte biraz sorunlu. Nasıl bir şekil olur tam bilemiyorum.

Ö25'in bu açıklamaları yavaş yavaş alanı ve hacmi ile alanı ve çevresi arasında bu tür sıra dışıklılıkları anlamaya başladığını göstermektedir. Ancak bu öğrenci bu tür bir özelliğe sahip bir nesnenin görünüşünün nasıl olabileceğini hayal edememektedir.

Ders sonu mülakata katılan tüm öğrencilerin yaptıkları etkinlikleri çok ilgi çekici buldukları ve ilk defa bir derste bu tür tartışmalara girdiklerini ifade ettikleri belirlenmiştir. Örneğin Ö7'nin açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

İlk defa böyle şeylerle karşılaşıyorum. Çok ilgimi çekti. Anlamadığım şeyler oldu, ama daha önce hiçbir derste bu şekilde tartışmalar yapmamıştık. Tartışmalarda herkes fikrini söyledi. Sanki matematik dersi gibi değildi. Yani hocamız bizden bir şeyler bulmamızı istedi hep.

Ö7'nin açıklamaları derste yapılan etkinliklerin onu derse yönelik motive ettiğini ve ilgisini çektiğini göstermektedir.

Halis öğretmen Sierpinski çokyüzlüsünün alanı ve hacmine yönelik çalışma yaprağını tamamlayarak 2. haftadaki dersi tamamladığını belirtmektedir. Bunun yanında sınıf içi tartışmaların uzun sürmesinden dolayı etkinlikleri tamamlamanın biraz fazla zaman aldığını ifade etmektedir. Ders sonunda Halis öğretmen, öğretmen kılavuzunda ölçme değerlendirme bölümündeki etkinlik ve alıştırmaları öğrencilere ödev olarak verdiğini belirtmiştir.

3. Hafta

Bu derste cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümelerinin öğretimi yapılmıştır.

Halis öğretmen dersin başında bir önceki dersle de bağlantı kurmak amacıyla fraktalların oluşumuna yönelik kısa bir açıklama yaptığını ifade etmektedir.

Öğrencilere doğrudan çalışma yaprağını yaptırmaya başlasaydım iki ders arasındaki geçiş arasında bağlantı kuramayacağımı düşündüm. Bu nedenle önce birkaç geometrik tekrarlama yaptım ve yörüngeleri gösterdim. Sonra da bir iki fonksiyon yazarak bu fonksiyonların yörüngelerini buldurdum. Böylece öğrencileri geometrik tekrarlamaların yanında cebirsel tekrarlamaların da olduğuna hazırlamaya çalıştım.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilere sadece geometrik tekrarlamaların değil aynı zamanda cebirsel tekrarlamaların da olduğu algısını kazandırmaya çalıştığını göstermektedir.

Halis öğretmen daha sonra öğrencilerini yine ikişerli gruplara ayırarak çalışma yaprağı-7 yi dağıttığını ifade etmektedir.

> A: Derste etkinlikleri nasıl yaptığınızı anlatabilir misiniz?
> H: Öğrencilere cebirsel tekrarlamalara yönelik bir iki örnek gösterdikten sonra çalışma yaprağını verdim. Öğrenciler ikişerli gruplar halinde çalışma yaprağını doldurdular. Yanlarında hesap makineleri getirmelerini bir önceki derste söylemiştim. Böylece birkaç adım için yörüngelerin hareketlerini belirlediler. Sonra ben çalışma yaprağındaki son üç soruya öğrencilerin dikkatini çektim ve konunun öğretimi için hazırlanan slaytı kullanarak kaçak, mahkum ve periyodik nokta kavramlarını tanımladık.

Ders sonu mülakatlarda öğrencilerin de çalışma yaprağı-7'de zorlanmadıklarını ve kaçak, mahkum ve periyodik noktaları belirleyebildiklerini ifade ettikleri belirlenmiştir.

Örneğin Ö2'nin açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Dersin başında neler yaptınız? Anlatabilir misin? Sen bu etkinlikler nasıl katıldın?
> Ö2: Başta öğretmenimiz geçen derste yaptıklarımızı kısaca anlattı. Sonra bir çalışma yaprağını yapmaya başladık. İçerisinde çeşitli fonksiyonlar vardı ve sürekli bu fonksiyonlarla işlemler yaptık. Biraz sıkıcı gibi geldi ama kareköklü fonksiyonun yörüngesini bulmak ilginçti. Daha sonra buradan kaçak, mahkum ve periyodik noktaları tanımladık.
> A: Tanımı nasıl oluşturdunuz?
> Ö2: Zaten çalışma yaprağındaki soruların bazılarının yörüngesi sonsuza gidiyordu, bazılarının bir sayıya gidiyordu. Yörüngesi sonsuza giden noktaları kaçak ve yörüngeleri bir sayıya giden noktalara da mahkum dedik.

Ö2'nin bu açıklaması bu öğrencinin kaçak, mahkum ve periyodik nokta kavramlarını öğrenebildiğini göstermektedir. Öğrenci çalışma yaprağını yaparken biraz sıkılsa da içerisindeki bazı soruların ilgisini çektiği görülmektedir.

Halis öğretmen daha sonra Julia kümesini tanımladığını ifade etmektedir.

> Slaytı kullanarak öğrencilere Julia kümesinin tanımını verdim. İşte hangi tekrarlama kuralıyla nasıl noktalardan oluştuğunu gösterdim. Tahtada birkaç tekrarlama yaparak Julia kümesinin içinde ve dışında nokta örnekleri gösterdim. Birkaç Julia kümesi şeklini gösterdim. Bu Julia kümeleri renklendirilmişti. Bu renklendirmenin nasıl yapıldığı üzerine açıklamalarda bulundum. İlk dersi bu şekilde tamamladım. En azından öğrencilerin kafasında Julia kümelerinin nasıl kümeler olduğu konusunda bir fikir oluşturmaya çalıştım.

Halis öğretmen ilk dersin sonlarında Julia kümesinin tanımını verdiğini ve bu kümenin ne tür noktalardan oluştuğuna yönelik tahtada açıklamalarda bulunduğunu söylemektedir.

İkinci derste Halis öğretmen Julia kümelerinin öğretimine yönelik etkinlikler yaptırdığını ifade etmektedir.

İkinci derste öğrencilere öncelikle Excel programını tanıttım. Excel'de zaten öğrencilerin başlangıç noktalarını ve c-sabitini girecekleri yerler işaretlenmişti. Doğrudan yörüngeleri bulabiliyorlardı. Ayrıca bir grafikte vardı. Bu grafik noktaların nasıl hareket ettiğini gösteriyordu. Başta programı ben de ilk elime aldığımda biraz yadırgadım. Çünkü programda karmaşık sayıların reel ve imajiner kısımlarını giriyoruz ve bunlar farklı sütunlarla gösterildiğinden ilk etapta biraz insan şaşırıyor. Ancak bir iki değer için denemeden sonra kolaylıkla alışılıyor.

Öğretmenin bu açıklamaları Excel programının kendisine başta farklı gelse de bir iki denemeden sonra kolaylıkla kullanılabildiğini göstermektedir.

Benzer şekilde öğrencilerde programın başta kendilerine farklı geldiğini ancak öğretmenin açıklamalarıyla kolayca kullanabildiklerini ifade etmektedirler.

A: Excel programını kullanmada bir sorun yaşadınız mı?
Ö17: Başta biraz karışık gibi geldi. Karmaşık sayıları girmede zorlandım. Ancak sonradan alıştım. İlk sütun sayının reel kısmını ikincisi ise imajiner kısmını gösteriyordu. Buna göre yörüngeleri inceledik.

Halis öğretmen öğrencilerine birkaç yörüngenin davranışını incelettikten sonra çalışma yaprağı-8 uyguladığını ifade etmektedir.

Bu konuyu anlatırken hoşuma giden durumlar oldu. Mesela çalışma yaprağında öğrencilere tablo verilmişti z^2-1,98 , z^2-0,35+0,38i gibi. Öğrenciler çalışma yaprağında verilen değerleri kullanarak 3 tane örnek yaptılar. Daha sonra tartışmaya geçmeden dedim ki onlara aynı kuralları kullanarak siz mahkum olan noktalar bulun. Sonra her grup kendisi mahkum nokta bulmaya çalıştı. Sonra o mahkum noktaların her birine ben senin bulduğun mahkum nokta kaç periyotlu, senin bulduğun mahkum nokta kaç periyotlu şeklinde sordum ve böylece tüm sınıftan mahkum noktaların verilen tekrarlama kuralına göre aynı periyotlu olduğu sonucuna ulaşmalarını sağladım. Yani diyelim 3 periyotlu olmasını bizim çalışma yaprağında verdiğimiz özel örneklerden değil de kendileri hangi mahkum noktaları alırlarsa alsınlar o tekrarlama kuralı altında aynı periyota sahip olduklarını gördüler. Yani bir nokta eğer mahkum kalacaksa bu kurala göre onun mahkum kalıp kalmamasını belirleyen parametre c-parametresidir sonucunu öğrenciler kendileri çıkardılar. Eğer biz sadece çalışma yaprağına bağlı kalsaydık, sanki bizim onlara verdiğimiz örneklerden dolayı böyle bir şey oluyormuş gibi anlamalara neden olabilirdik. Böyle olunca daha anlamlı oldu sanırım. Aynı

> durumu 5 periyotlular için de yaptık tüm öğrenciler etkinliğe katıldılar. Çok güzel oldu bu şekilde.

Halis öğretmenin bu açıklamaları çalışma yaprağının içeriğini biraz değiştirdiğini göstermektedir. Öğretmen çalışma yaprağında verilen tablonun öğrencileri yönlendirdiğini ve bu nedenle kendisinin bu tür bir yol izlediğini ifade etmektedir.

Dersin sonunda Halis öğretmen fraqtive programını öğrencilerine tanıttığını ve nasıl farklı Julia kümesi şekilleri oluşturacaklarını açıkladığını ifade etmektedir.

> Dersin sonunda fraqtive programını öğrencilere tanıttım. Program İngilizce olmasına karşın kullanımı gayet basitti. Öğrencilerin c-değerlerini girecekleri yerleri gösterdim ve çalışma yaprağındaki c-değerlerine göre oluşan Julia kümelerini incelemeleri istedim.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatta fraqtive programının kullanılmasına yönelik bir sorunla karşılaşmadıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö25'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Fraqtive programını kullanabildiniz mi? Programı kullanarak Julia kümelerini oluşturabildiniz mi?
> Ö25: evet. Bir sorunla karşılaşmadım. c-değerlerini girerek ya da ekranda mouse'u hareket ettirerek Julia kümeleri oluşturduk.

Halis öğretmen üçüncü derste ise Julia kümelerinin öğretimine devam ettiğini belirtmektedir. Öğretmen derste öğrencilerinin Julia kümesinin tanımını anladıklarını ancak şekillerinin nasıl oluştuğunu anlayamadıklarını gözlemlediğini ifade etmektedir.

> Öğrenciler verilen tanımı anladılar, ancak nasıl oluyor da bu tekrarlamalara göre bu renkli şekillerin oluştuğunu tam olarak anlayamıyorlar. Yani Julia kümesinin içindeki yerler siyah, dışa doğru sarıdan turuncuya doğru renkleniyor, ama niçin böyle boyandığını ve şeklin nasıl olduğunu tam çözemiyorlar.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin Julia kümelerinin tanımını anlamalarına karşın şekillerin ekranda nasıl oluştuğunu tam olarak kavrayamadıklarını göstermektedir.

Bu güçlük Ö28 ile yapılan ders sonu mülakatta gözlemlenmiştir.

> A: Julia kümesinin oluşumu hakkında anlayamadığın yerler oldu mu?
> Ö28: Mesela derste 0,75 ya da 0,34 sayılarını alıyorduk. Ben bunların nasıl bu kümeleri oluşturduğunu tam olarak anlamadım. Tamam, verilen noktaların kaçak ya

da mahkum olduklarını bulabiliyorum, ama bu tekrarlamalar sonucu nasıl bu şekiller oluşuyor bilemiyorum.

Ö28'in bu açıklaması verilen başlangıç sayılarına göre Julia kümelerinin şekillerinin nasıl oluştuğunu anlayamadığını göstermektedir.

Benzer şekilde Ö2'nin de Julia kümesinin oluşumunu anlamakta zorlandığı belirlenmiştir.

A: Julia kümesi nedir? Nasıl oluşmaktadır?
Ö2: Julia kümesinin tanımını tam bilmiyorum ama benzer noktalardan oluştuğunu söyleyebilirim.
A: Bu benzer noktalar nelerdir? Nasıl kümeyi oluşturmaktadırlar?
Ö2: Ben şöyle düşündüm. Derste hocamız bize Julia kümelerini gösterdiğinde bazı yerleri siyah, bazı yerleri sarı, bazı yerleri ise kırmızıydı. Belli bir parametre alıyoruz, başta o parametreye göre yörüngeler buluyoruz. Bu yörüngeler eğer belli değerlerde kalıyorsa o siyah yerde kalıyorlar eğer yörüngeler giderek büyüyorsa ona göre de renk değişiyor.
A: Yani yörüngeler mi Julia kümesini oluşturan?
Ö2: Evet. Tam kuralı bilmiyorum ama diyelim 2 noktasıyla başladık başta siyah yerde olabilir ama tekrarladık tekrarladık diyelim nokta 50 oldu o zaman diyebiliriz ki bu nokta şuradaki kırmızı yerde.

Bu öğrencinin Julia kümelerinin oluşumu hakkında yanlış bir anlamaya sahip olduğu görülmektedir. Bu öğrencinin verilen başlangıç noktalarının yörüngelerinin Julia kümesindeki noktalar olduğunu düşündüğü belirlenmiştir. Buna karşın Ö2'nin "yörüngeler belli değerde kalıyorsa siyah bölgeye düşüyor" ifadesi kaçak ve mahkum noktaları bildiğini göstermektedir.

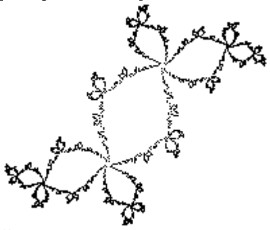
Halis öğretmen Julia kümelerinin öz-benzer parçaları ile periyotları arasındaki ilişkiyi keşfetmek amacıyla çalışma yaprağı-8'in son bölümünü uyguladığını ifade etmiştir.

Julia kümelerinin öz-benzer parça sayıları ile periyotları arasındaki ilişkiyi keşfettirmede de başta yaptığım gibi bir yol izledim. Önce çalışma yaprağında verilen değerlere göre oluşan Julia kümelerinin benzer parçaları ile periyotlarını buldurdum. Daha sonra ise öğrencilerden kendilerinin belirleyecekleri noktalara göre periyot ile benzer parça sayısı arasındaki ilişkiyi belirlemelerini istedim. Bazı öğrencilerin Julia kümelerini benzer parçalara ayırmada güçlük yaşadığını gözledim. Bağlantı noktalarından parçaları ayıramıyorlardı, çünkü uçlardaki parçalarında birbirine benzediğini söylüyorlardı. Yani hangi parçaları ayıracaklarına karar veremiyorlardı. Ben şöyle bir çözüm getirdim. Şekle bakmalarını ve bir bağlantı noktasına göre ana şekil ile onun kulaklarını saymalarını söyledim.

Öğretmenin bu açıklamaları öz-benzer parçaları belirlemede öğrencilere bir yol göstermesine karşın öğrencilerin bunu bir kural haline getirip niçin yaptıklarını anlamadan ezberlemelerine neden olabilir. Bu ise öğrencilerin daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirmelerini sağlayabilir.

Mülakat yapılan öğrencilerden sadece Ö33'ün Julia kümesinin periyodunu belirlemede kümeyi öz-benzer parçalara ayırırken sorunla karşılaştığı tespit edilmiştir.

A: Julia kümelerinin periyotlarını nasıl belirliyorsun? Örneğin bu Julia kümesinin periyodu kaçtır?

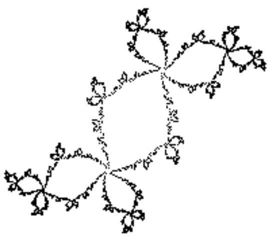


Ö33: 5 tir. Çünkü bu yapıyı gövde aldığımızda 2 tane bu tarafta 2 tane de diğer tarafta oluşan benzer parçalar var ve bunların sayısı bize periyodu vermekte.

Ö33'ün bu açıklaması Julia kümesinin periyodunu bulmak için bu kümeyi birbirine eş parçalara ayırması gerektiğini bildiğini göstermektedir. Ancak Ö33 Julia kümesini öz-benzer parçalara ayırırken uçlardaki ve ortadaki parçaları eş olarak kabul etmektedir. Oysa ortadaki parça uçlardakini benzemesine karşın aynısı değildir.

Ö28'in ise öğretmenin tanımladığı kuralı kullanarak Julia kümesinin periyodunu belirlediği tespit edilmiştir.

A: Sana şöyle bir Julia kümesi göstersem bu Julia kümesinin periyodunu bulabilir misin?



Ö28: Bunun 3.
A:Niçin 3 dedin.
Ö28: Çünkü yapı 2 kulak bir gövdeden oluşuyor. Yani şu noktadan böldüğüm zaman hep aynı parçalar oluşuyor.

Halis öğretmen son dersin ikinci bölümünde Mandelbrot kümesinin öğretimini gerçekleştirmiştir.

Daha sonra Mandelbrot kümesine geçtik. Önce slaytı kullanarak Mandelbrot kümesini öğrencilere tanıttım. Nasıl bir tekrarlama kuralıyla oluştuğunu, Julia kümesinden farkını söyledim. Şeklini gösterdim ve içerisindeki yapıların isimlerini söyledim.

Halis öğretmen daha sonra Excel ve fraqtive programlarını kullanarak Mandelbrot kümesini öğrencilerinin incelediğini belirtmektedir.

H:Öğrencilere son çalışma yaprağını verdim. Julia'daki gibi Excel'de önce tabloda verilen noktaların yörüngelerini incelemelerini istedim. Sonra fraqtive programını kullanarak bu noktaların Mandelbrot kümesinde nereye düştüğünü gördüler ve mahkum noktaların Mandelbrot'ta olduğu sonucunu elde ettiler. Programın zoom özelliğini de gösterdim ve kümenin bazı kenarlarına zoom yaptık, ancak ders süresi yeterli gelmediğinden bu çalışma yaprağını tamamlayamadık.
A: Öğrenciler Mandelbrot kümesinin mahkum noktalardan oluştuğunu belirleyebildiler mi?
H: Evet, zaten program onlara noktanın yerini açıkça gösteriyordu.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin Mandelbrot kümesini anladıklarını göstermektedir. Ayrıca öğretmen ders süresi yeterli gelmediğinden çalışma yaprağı-9'u tamamlayamadıklarını ifade etmektedir.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda bazı öğrencilerin Mandelbrot kümesini tanımlayabilirken, bazı öğrencilerin kümenin şeklinin nasıl oluştuğunu anlayamadıkları belirlenmiştir.

Örneğin Ö25'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Mandelbrot kümesini tanımlayabilir misin?
Ö25: Bunun başlangıcı 0 idi. Yine yukarıdaki söylediğin $z_n^2 + c$ kuralına göre oluşuyordu
A: Peki ne tür noktalar Mandelbrot kümesini oluşturmaktadır?
Ö25: Mahkûm noktalardan oluşmaktadır.

Ö25, Mandelbrot kümesinin sıfır başlangıç noktasına göre mahkûm noktalardan oluştuğunu ifade etmektedir.

Buna karşın Ö17 Mandelbrot kümesinin mahkûm noktalardan oluştuğunu bilmekte, ancak kümenin oluşumuna yönelik yanlış bir anlama geliştirmiştir.

A: $Z_{n+1}= z_n^2-2$ tekrarlama kuralına göre 5 noktası Mandelbrot kümesinin içinde mi yoksa dışında mıdır?
Ö17: Dışındadır.
A. Niçin?

Ö17: Çünkü 5 noktası için devamındaki noktalar kaçak nokta oluşturmaktadır. Buna göre şuradaki kırmızı yerlerde olmaktadır.
A: Niçin kırmızı yerler dedin?
Ö17: Yörüngeler sonsuza doğru gidiyor ve oluşturduğumuz kümede sonsuza doğru gidiyor, bu nedenle olabilir.
A: Mahkum ya da kaçak noktaya göre verilen başlangıç noktasının kümenin içinde olup olmadığına nasıl karar verebilirsin?
Ö17: Diyelim 1 başlangıç noktasını seçtiğimizde sabit olmakta ve belirli bir alan içerisinde kalmakta ancak 5 başlangıç seçtiğimizde sonsuza doğru gitmekte ve dışına düşmektedir. Bu nedenle Mandelbrot'un dışındadır.

Ö17'nin bu açıklaması Mandelbrot kümesinin oluşumunda yörüngenin her bir elemanının tek tek Mandelbrot kümesini oluşturan noktalar olduğu şeklinde bir anlayışa sahip olduğunu göstermektedir. Eğer nokta sabit ya da periyodikse belli bir alanda kalmakta ve mahkum olmakta eğer nokta kaçak ise her bir yörünge noktasını bir yeni başlangıç noktası gibi kabul etmekte ve yörüngelerin hareketinin renklendirilmesi sonucu Mandelbrot'un oluştuğunu düşünmektedir.

Bunun yanında Mandelbrot ve Julia kümelerinin ders boyunca öğrencilerin ilgilerini oldukça çektiği belirlenmiştir.

Örneğin Ö33 ve Ö17'nin açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Bu derste ilgini çeken durumlar oldu mu?
Ö17: Derste gördüğüm şekillerin hepsi çok ilginçti ve güzeldi. Julia kümesine zoom yaptığımızda hep aynı şekillerin oluşması çok ilginçti. Mandelbrot'da kenarlara zoom yapınca çok farklı şekiller oluşmakta.

Benzer şekilde Ö33 öğrencisinin Mandelbrot ve Julia kümelerine yönelik düşünceleri aşağıdaki sunulmuştur.

A: Bu ders ilgini çekti mi?
Ö33: Ben derste çok eğlendim. Mesela derste Excel'de periyodu bulup sonra oluşan şekli görmeye etkinliğinde arkadaşımla çok eğlendik. Çok ilginç şekiller oluştu. Hatta bir süre sonra biz önce şekli çizdirip periyodunu buluyor sonra sonucumuzu Excel'de kontrol ettirdik.

Bu açıklamalardan Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğrencilerin ilgisini çektiğini ve derse motivasyonlarını artırdığı söylenebilir.

Ders sonunda Halis öğretmen, öğretmen kılavuzunda ölçme değerlendirme bölümündeki etkinlik ve alıştırmaları öğrencilere ödev olarak verdiğini belirtmiştir.

4. Hafta

Bu derste öz-benzerlik konusunun öğretimi yapılmıştır. Ayrıca fraktal boyut konusuna giriş yapılarak çalışma yaprağı-13 tamamlanmıştır.

Halis öğretmen ilk ders yapmış olduğu etkinlikleri aşağıda açıklamaktadır.

> Öğrencileri 2-3’erli gruplara ayırdım. Öz-benzerlik ile ilgili ilk çalışma yaprağını verdim. Yaklaşık 15 dakika öğrenciler çalışma yaprağındaki sorularla uğraştılar. Daha sonra slaytı açtım. Slaytta ilk olarak bir çember vardı ve belli oranlarda çemberin kenarına doğru yaklaştığımızda oluşacak şekiller üzerine tartıştık. Daha sonra Koch eğrisindeki parçalara yaklaştıklarında hep aynı şekillerin sürekli tekrarlandığını gördüler. Çember ile Koch eğrisi üzerine yapılan bu tartışmalar öğrencilerde öz-benzerlik kavramına yönelik bir anlayışın oluşmasını sağladı. En sonunda öz-benzerliği öğrencilerden tanımlamalarını istedim.

Öğretmen öz-benzerlik kavramının öğrencilerin zihinlerinde yapılandırılmasında Euclid ve fraktal şekillere belli oranlarda yaklaşıldığında oluşan parçaların görünüşleri üzerine yapılan tartışmaların faydalı olduğunu ifade etmektedir.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda da öğrencilerin öz-benzerliği tanımlayabildikleri ve verilen bir nesnenin öz-benzerliğine karar verebildikleri belirlenmiştir.

Örneğin Ö25’in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Öz-benzerliği tanımla desem nasıl tanımlayabilirsin?
> Ö25: Herhangi bir yapının kendi içerisinde belli bir kurala göre tekrarlanması şeklinde ifade edebilirim. Yani bir şekil üzerinde bir bölge aldığımda onu büyüttüğümde aynısını elde ediyorsam bu şekle öz-benzer denir.
> A: Derste öz-benzerliği tanımlarken neler yaptınız? Neleri yaparken zorlandın?
> Ö25: Derste öncelikle çalışma yaprağında verilen şekillerin herhangi bir yeri ile şeklin tamamını karşılaştırdık. Benzer şekilleri sınıflandırdık. Sonra slaytta çembere yaklaştığımızda bir doğru parçasını görürken Koch eğrisine yaklaştığımızda yine Koch eğrisini gördük ve buradan öz-benzerliği tanımladık.
> A: Zorlandığın yerler oldu mu?
> Ö25: Hayır olmadı.

Ö25’in bu açıklamaları öz-benzerliği, bir şeklin belli bir parçasına yaklaşıldığında yine şeklin aynısı görülüyorsa bu şekle öz-benzerdir denir şeklinde tanımladığı görülmektedir.

Halis öğretmen derste öğrencilerinin verilen nesnelerin öz-benzer olup olmadıklarını belirleyebildiklerini ifade etmektedir.

Öğrenciler matematiksel olarak derste oluşturduğumuz nesnelerin öz-benzer olup olmadıklarını çok rahat belirliyorlar.

Ancak öğrencilerin doğal nesnelerin öz-benzerliğine karar vermede zorlandıklarını belirtmektedir.

Doğadaki öz-benzerliği çok fazla belirleyemiyorlar. Öğrenciler her nesne de birbirine benzer şeylerin olabileceğini ifade ediyorlar. Mesela gözde benzer yapılar olduğunu söylediğimde hocam her yerde buna benzer yapılar olabilir diyorlar. İşte brokolide, eğrelti otunda mükemmel olarak fraktal özellikleri görebiliyorlar, ama birçok şeyde bu kadar açık bu özellikleri göremiyorlar. Doğal fraktallardaki yaklaşık öz-benzerliği çok anlamlandıramadılar. Yani onlar doğadaki öz-benzerlikte de matematiksel fraktallarda olduğu gibi bir mükemmellik bekliyorlar.

Bu açıklamalar öğrencilerin doğal nesnelerin öz-benzerliğine karar vermede güçlük yaşadıklarını göstermektedir. Bunun nedeni doğal nesnelerdeki parçaların birbirinin tamamen aynısı olmaması ve bu parçaların sonlu sayıda olması olabilir. Bu durum öğrencilerde oluşan nesnenin parçalarının birbirine tıpatıp benzemesi ve herhangi bir parça ile bütününü karşılaştırma şeklindeki öz-benzerlik anlamalarının doğal nesnelerdeki öz-benzerlikle çelişmesinden kaynaklanmaktadır.

Öğretmenin derste gözlemlediği bu durum öğrencilerin mülakatlarında da belirlenmiştir. Örneğin Ö3'ün ders sonu yapılan mülakattaki açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Derste öz-benzerlik ile ilgili en çok neleri anlamakta zorlandın?
Ö3: Ben şeyi tam anlamadım. Mesela ağacın gövdesini aldığımızda tamamını elde edemiyoruz demiştik. Ama Sierpinski üçgenini alıp büyüttüğümüzde aynı şekli elde edebiliyorum. Ağaçtaki öz-benzerlik nasıl oluyor, yani Sierpinski gibi değil. Göremiyorum.

Ö3'ün bu açıklaması bir ağacın öz-benzerliğini tam olarak belirleyemediğini göstermektedir. Bunun nedeni ağaçtaki yapıların bir Sierpinski üçgenindeki gibi birbirinin aynısı ve sonsuza kadar giden bir düzen içerisinde olmamasıdır.

Benzer şekilde Ö25'in ders sonu mülakattaki açıklamaları da Ö3 öğrencisinin karşılaştığı bu güçlüğü desteklemektedir.

A: Bugünkü derste anlamakta zorlandığın yerler oldu mu?

> Ö25: Doğal fraktallarda, mesela eğrelti otunda her bir adımda öz-benzerliği göremiyoruz. Çeşitli faktörlerden mesela çevresel faktörler onun dalının yaprağının oluşumunu etkilemekte ve öz-benzerliğini bozmaktadır.

Bu açıklamalar öğrencilerin özellikle doğal fraktalların yaklaşık öz-benzerliğini anlamakta zorlandıklarını göstermektedir.

Halis öğretmen ilk dersin devamında çalışma yaprağı-11'i uyguladığını belirtmektedir.

> Sonra diğer çalışma yaprağını dağıttım. Burada öğrenciler Sierpinski üçgeninin öz-benzer parçaları ile büyüme oranlarını belirlediler. Çalışma yaprağını yapmakta zorlanmadılar. Ben daha sonra slaytı açtım ve Cantor kümesi ve Koch eğrisi gibi birkaç fraktal üzerinde öz-benzer parçalar ile büyüme oranlarını tartıştık. Öğrenciler bunları belirleyebiliyorlar.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin öz-benzer parçalar ile büyüme oranlarını belirleyebildiklerini göstermektedir.

Ö10'un açıklamaları da öğretmenin ifadeleriyle uyuşmaktadır.

> A: Sierpinski üçgeninde öz-benzer parçaları ve büyüme oranlarını belirlemede bir sorunla karşılaştın mı?
> Ö10: Hayır, o etkinlik çok kolaydı. Öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranı arasında 3/2 ve onun kuvvetleri şeklinde bir oran bulduk.
> A: Derste başka hangi fraktalların büyüme oranlarını ve öz-benzer parçalarını buldunuz?
> Ö10: Cantor kümesinin bulduk. Nasıldı. Oluşumuna bakarsak mesela şurada 2 parça var, şekli 3' bölmüştük o zaman büyüme oranı 3. Koch'u da bulduk, ama şimdi hatırlamıyorum.

İkinci derste öğretmen öz-benzerlik türlerinin öğretimini gerçekleştirdiğini belirtmektedir.

> Yine ilk çalışma yaprağında olduğu gibi bu konuyla ilgili son çalışma yaprağını dağıttım ve öğrencilerden verilen fraktalları inceleyerek nerelerde öz-benzerliğin olduğunu belirlemelerini istedim. Yaklaşık 15-20 dakika öğrenciler grup arkadaşlarıyla çalıştı. Daha sonra slaytı açtım ve öğrencilerin elde ettikleri sonuçlar üzerine tartışmalar yaptık. Slayt çalışma yaprağıyla paralel hazırlanmıştı. Öz-benzerlik türlerini belirlerken öz-benzerliğin gerçekleştiği bölgelerin işaretlemesinde slayt etkili oldu. Çalışma yaprağında brokolinin öz-benzerliği tartışma konusu oldu. Çünkü brokoliye bütün bakınca yaklaşık öz-benzer olurken, üstten parçalarına bakınca spiraller görülmekte ve noktasal öz-benzer olmaktadır. Birkaç öğrenci bu durumu ifade etti. Sonuçta bakış açımıza göre eğer brokolinin üzerindeki şekillere

odaklanıyorsak noktasal öz-benzer, eğer bütün olarak brokoliye bakıyorsak yaklaşık öz-benzer olduğu şeklinde bir sonuca vardık.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin öz-benzerlik türlerini belirleyebildiklerini göstermektedir. Sınıf tartışmalarının bu türlerin özelliklerinin ortaya konulmasında etkili olduğu görülmektedir.

Örneğin Ö21'in öz-benzerlik türlerine yönelik açıklaması aşağıda sunulmuştur.

A: Noktasal öz-benzer bir şekil çiz desem, nasıl görünür?
Ö21: mesela bir üçgende böyle iç içe üçgenler çizersek.
A: Noktasal öz-benzerliğin özelliği nedir?
Ö21: Yani böyle içe doğru bir noktaya doğru ilerlemesi. İlla merkeze doğru değil de farklı taraflarda da bu içe doğruluk gidebilir.
A: Yaklaşık öz-benzerlik için örnek verebilir misin?
Ö21: Ağaç yaklaşık öz-benzerdir. Ağacın tamamını düşünüp sadece gövdesini değil de dallarına bakarsak ağacın benzerini görebiliriz. Belli bir kısımda öz-benzerlik oluyor.

Ö21'in bu açıklamaları bu öğrencinin öz-benzerlik türlerini öğrendiğini göstermektedir.

Son derste ise Halis öğretmen farklı bir konu olarak fraktal boyut konusuna yönelik bir çalışma yaprağını uyguladığını belirtmektedir.

Son derste öğrencilere birer parça alüminyum kağıt verdim ve bu konuyla ilgili çalışma yaprağını dağıttım. Amacım öğrencilerin farklı boyutlar olabileceği konusunda bir algı oluşturmalarını sağlamaktı. Öğrencilerin 10-15 dakika grup arkadaşlarıyla çalışma yaprağında verilen adımları takip ederek sorular üzerinde düşünmelerini istedim. Daha sonra sınıf tartışması yaparak folyonun tamamen kapalı olduğu ve folyonun açıldığı durumlardaki boyutlarını tartıştık. Öğrencilerin hepsi folyo buruşturulup top haline getirildiğinde üç boyutlu olduğunu söylediler. Ancak tekrar açtığımızda bazı öğrenciler 3 boyutlu derken bazıları 2 boyutlu olduğunu söylediler.

Öğretmenin bu açıklamaları sınıf tartışmasında folyonun açıldıktan sonra boyutunun ne olduğu üzerine öğrencilerin uzlaştıkları bir durumun olmadığını göstermektedir.

Ö21'in bu tartışmayla ilgili düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ö21: Alimünyum etkinliğinde kafam karıştı.
A: Niçin?
Ö21: Mesela alimünyum folyoya düzgün bir şekilde baktığımızda 2 boyutlu dedik, ama buruşturduk 3 boyutlu oldu, sonra açtık ne oldu? Ona bir şey diyemedim. Çünkü

garip bir şekil ortaya çıktı. Hani yüksekliği var mı desem yok mu desem, 3 boyutlu mu desem 2 boyutlu mu desem, tam karar veremedim. Ama ben ona 2 boyutlu derim.
A: Niçin? Niçin 3 boyutlu demezsin?
Ö21: Bilmiyorum.aslında sadece cisim olarak bakarsak iki boyutlu, evet sanki yerden yüksekliği var gibi ama kağıdı şu şekilde de tuttuğumuzda yerden yüksekliği varmış gibi ama değil. Bu nedenle 2 boyutlu bence.

Öğrencinin bu açıklamaları da ilk defa bu şekilde girintili ve çıkıntılı bir nesnenin boyutuna yönelik bir soruyla karşılaşınca şaşırdığını ve boyutunun ne olabileceğine tam olarak karar veremediğini göstermektedir.

Halis öğretmen alüminyum folyo tartışmasında öğrencilerini biraz yönlendirdiğini aşağıdaki şekilde ifade etmektedir.

Alüminyum folyo ile yapılan etkinlik öğrencilerin boyut konusunda kafalarının karışmasına neden oldu. Böylece farklı boyutların olabileceği algısı oluşmaya başladı. Çünkü başlangıçta folyonun 2 boyutlu top haline getirilince 3 boyutlu ve açıldığında ise yine 3 boyutlu olduğunu ifade ettiler. Ancak açınca bunun üzerinde düz yerler var dedim. Bunlar 3 boyutlu mu dedim. Yok hocam oralar 2 boyutludur çıkıntılı olan yerler 3 boyutludur. O zaman niye 3 boyutlu alıyorsunuz de 2 boyutlu almıyorsunuz diye sordum. Bazıları büyük olan alınır, hocam dediler, bir iki kişi de olmadı ortalaması olarak 2,5 alırız dediler. Ama tam bir cevapta vermediler

Öğretmenin bu açıklamaları alüminyum folyo etkinliğinin öğrencilerin boyut üzerine düşünmelerini sağladığını ve daha önce dikkat etmedikleri girintili ve çıkıntılı nesnelerin boyutlarının neler olabileceğini tartışmaya başladıklarını göstermektedir. Halis öğretmen dersin sonuna kadar bu tartışmaların devam ettiğini belirtmiştir.

Ders sonunda Halis öğretmen, öğretmen kılavuzunda ölçme değerlendirme bölümündeki etkinlik ve alıştırmaları öğrencilere ödev olarak verdiğini belirtmiştir.

5. Hafta

Bu hafta fraktal boyut konusunun öğretimi yapılmıştır.

Halis öğretmen ilk ders yaptığı faaliyetlere aşağıdaki gibi ifade etmektedir.

Dersin başında bir önceki haftada yaptığımız alüminyum folyo etkinliğiyle de ilişki kurmak için 1,5 boyutlu bir nesnenin olup olamayacağını sordum. Öğrenciler olamayacağını söylediler. Sonra kürenin 3 boyutlu, karenin 2, doğrunun 1 ve noktanın boyutsuz olduğunu ifade ettiler. Ben bu boyutlara nasıl karar verebildiklerini sordum. En, boy ve yüksekliklerine göre karar verdiklerini söylediler. Boyut için hazırlanmış slaytı açtım ve önce tamamen öz-benzerlik boyutunu hesaplanması üzerine bir formül

> çıkardık. Slaytta zaten doğru 4'e bölünüp 4 öz-benzer parça ve 4 büyüme oranı var dedik. Öz-benzer parça sayısı büyüme oranına eşit dediler. Sonra kare ve küp için bunu yaptık. Her birinde büyüme oranı parça sayısının karesi, küpü oluyordu. Sonra dedik ki herhangi bir öz-benzer şekil için nasıl bir ilişki bulabiliriz. Buradan öz-benzerlik boyut formülünü çıkardık.

Halis öğretmen derse başlarken bir önceki dersle ilişki kurmak ve öğrencileri kesirli boyut kavramına hazırlamak için onlara sorular yöneltmekte ve sonra da slaytı kullanarak öz-benzerlik boyutunun nasıl hesaplandığını öğrencilerinin bulmasını sağlamaktadır.

Öğretmen formülün genelleştirilmesinin kendisini çok fazla tatmin etmediğini ve birkaç özel örnekten genel bir ifadeye ulaşılmasının sakıncalı olabileceğini ifade ettiği belirlenmiştir.

> Öğrenciler formülü çıkardıktan ve kullandıktan sonra çok fazla sorgulamadılar, ancak bende oturmayan şeyler var. Tamam boyutun log(n)/log(m) olduğunu hesaplıyoruz, işte doğru için yapıyoruz, kare için yapıyoruz, küp için yapıyoruz, buradan diyoruz ki işte boyut=d=log(öz-benzer parça sayısı)/log(büyüme oranı). Ancak buradaki kabul de genelleme için yeterli değil, bence.

Öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda da öğrencilerin öz-benzerlik boyutuna göre fraktalların boyutlarını hesaplayabildikleri belirlenmiştir.

Örneğin Ö16 öğrencisinin açıklamaları aşağıda verilmiştir.

> A: Tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını nasıl hesaplarsın?
> Ö16: Öz-benzer parça sayısının logaritmasının büyüme oranının logaritmasına oranı boyutu verir.
> A: Peki bu formülü nasıl öğrendin?
> Ö16: derste doğru, kare küp için bunu yaptık sonra herhangi şekil için nasıl olabilir diyip formülü elde ettik.

Ö16'nın açıklamaları öğretmenin uyarılarına karşın öğrenciler için formülü belirleme şeklinin çok sıra dışı bir durum olmadığını göstermektedir.

Halis öğretmen daha sonra çalışma yaprağı-14'ü öğrencilerine dağıttığını ifade etmektedir.

> Sierpinski üçgeninin boyutunu bu kuralı kullanarak hesaplamalarını istedim. Logaritmalar için hesap makinesi kullandılar. Boyutun 1,5 olduğunu bulunca çok şaşırdılar. Yani öğrencilere 1,5 boyut tuhaf geldi. Bunu kabullenmekte sorun yaşıyorlar. Sonra bu durumu şöyle çözmeye çalıştım. Çözmek derken şöyle bir yaklaşım izledim. Bu biraz daha mantıklı geldi onlara. Başta doğru parçası kaç boyutlu dedim. 1 boyutlu. Cantor kümesine bakalım başlangıçta bir doğru parçası iken

içini yavaş yavaş boşaltmaya başladık, onu kaç boyuta doğru götürmeye çalıştık sıfır boyuta ancak tam sıfır da olmuyor, o arada bir yerde kalıyor. 0,63 gibi bir değer alıyor. Aynı şeyi Sierpinski üçgeninin ilk hali kaç boyutlu, işte 2 ve içini git gide çıkarıyoruz, tam da bir boyuta indirmiyoruz onu, süreç devam ediyor sürekli olarak. Sonuçta her zaman geride bir şeyler kalıyor. Böylece boyutu 1 ile 2 arasındadır diye bir açıklama getirmeye çalıştım. Tam matematiksel olarak olmasa da sezgisel olarak evet böyle bir şey olabilir kavramı oluştu öğrencilerde.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilere sezgisel olarak fraktal boyutların olabileceğini göstermeye çalıştığını göstermektedir. Halis öğretmen parça çıkarmanın boyutu azalttığı ve parça eklemenin ise boyutu artırdığı şeklinde bir açıklama yapmaktadır. Ancak yaptığı bu açıklamalar tüm fraktal yapılar için doğru olmamaktadır. Çünkü bu durumda örneğin Koch dörtyüzlüsünde bir dörtyüzlüye sürekli parçalar eklendiğinden boyutunun 3’den büyük olması gerekir. Oysa Koch dörtyüzlüsünün boyutu 3’den küçüktür. Halis öğretmende bu durumu açıklamayı yaptıktan sonra fark ettiğini ve kendi kuralına uymayan fraktalların boyutlarına sınıfta yer vermediğini belirtmiştir.

Koch eğrisi dedim kaç boyutludur. Hocam dediler 1 ile başladık bir şeyler ekleyerek devam ettik 1 dek büyük bir şey olur ancak 2’de olmaz dediler. Bunu tahmin edebiliyorlar 1 ile 2 arasında bir şey olacak diye. Ama benim aklıma şöyle bir şey geldi ben onlara kartanesi desem ne olacaktı. Çünkü bu yaptığımız çıkarıma göre kartanesinin boyutunun 2’yi geçmesi gerekir ki bu onlara tuhaf gelecekti. Çünkü 2 ile başladık ve ona bir şeyler ekliyoruz. Burada bu yöntemle biraz sıkıntı yaşadım. Ancak dediğim şekilde anlatınca sorun olmuyor, böyle uç örnekleri hepsine söylemeyerek sadece belirgin örnekleri söyledim mesela Cantor’u, Sierpinskiyi, Koch eğrisini söyledim. Sonunda da Sierpinski dörtyüzlüsünün boyutu kaç olmalıdır diye sordum onlara. Hocam dediler ilk başta 3 tü içini boşaltmaya başladık 2 ile 3 arasında olacak dediler. Verilen tanıma göre onun boyutunu 2 buldular. Ama bunu tartışmadık. Belki bunu tartışsak daha verimli şeyler elde edebilirdik.

Öğretmenin bu açıklamaları fraktalların kesirli boyutlarını açıklamada izlediği yolun çok başarılı olmadığını göstermektedir.

Ö5’in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Cantor kümesi kaç boyutludur?
Ö5: Derste yapmıştım, ama 0 ile 1 arasındaydı.
A: Fraktal ejderin boyutunu söyleyebilir misin?
Ö5: Şimdi hesaplayamam belki ama 1 ile 2 arasındadır.
A: Niçin, nasıl karar veriyorsun?
Ö5: Başta doğru parçası ile başlayıp her seferinde ona yeni parçalar ekliyoruz bu nedenle 1 den büyük 2 den küçük olmalı.

Bu açıklama Ö5'in öğretmenin yöntemine göre sezgisel olarak fraktalların boyutlarını ifade ettiğini göstermektedir.

Bazı öğrencilere fraktal boyutların çok fazla inandırıcı gelmediği yapılan ders sonu mülakatlarda belirlenmiştir.

Örneğin Ö21'in fraktal boyuta yönelik düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

A: Derste yaptığın işlemleri göz önüne aldığında fraktal boyutlar sana inandırıcı geldi mi?
Ö21: Yani bir nesnenin boyutunun 1,26 olduğunu görünce çok şaşırdım. Tamam, matematiksel olarak bunların olabileceğini gördük, ancak çokta fazla tatmin olmadım.
A: Niçin?
Ö21: Yani, nasıl olur bu şekil bilemiyorum. Daha önce hiç karşılaşmadım. Matematiksel olarak varlığını gösterebiliyoruz, ama aklım tam almıyor.

Ö21'in bu açıklamaları fraktal boyutların ona çok fazla inandırıcı gelmediğini düşündüğü belirlenmiştir.

Ö25'in açıklamaları ise aşağıda sunulmuştur.

A: Bu derste neler yaptınız? Neleri yaparken kafanda soru işaretleri oluştu?
Ö25: öncelikle bildiğim şeyler çok kısırmış, çok daha fazlası varmış. Bugüne kadar hep sabit boyutların olduğunu biliyorduk ancak onlar arasında geçiş boyutlarının da olacağını öğrendim.
A: Derste yaptıkların bu tür boyutların olabileceği yönünde sana inandırıcı geldi mi?
Ö25: gözümle çok fazla görmediğim için çokta fazla tatmin olamadım ama sonuçta matematiksel olarak olabileceğini gördük. Aslında derste bu boyutlu nesnelerin nasıl olacağını düşündüm.
A: derste yaptıkların ilgini çekti mi?
Ö25: Fraktal dersinde zaten her hafta çok farklı ve ilginç şeylerle karşılaşıyoruz. Gerçekten çok farklı bir geometri.

Ö25'in bu açıklamaları fraktal boyutların kendisine çok fazla inandırıcı gelmese de bu boyuta sahip nesnelerin nasıl göründüğünü merak ettiğini ve dersin ilgisini çektiğini göstermektedir.

Halis öğretmen ikinci derste uzunluk ölçerek Türkiye'nin kıyılarının boyutlarını hesaplama etkinliğini uyguladığını ifade etmektedir.

Kıyı şeridinin boyutunu hesaplamada slaytı kullandım. Koch eğrisinin uzunluğunu kullanarak boyutun 1-s olduğunu gösterdim. Ancak niçin eğim aldığımızı ve eğimin niçin boyutun ondalık kısmını verdiğini tam olarak anlamadıklarını sezinledim. Nasıl hesaplayacaklarını anladılar, ama bu işlemleri niçin yaptığımızı çok anlamadılar sanırım. Daha sonra Koch eğrisinin kıyı şeridine benzer olduğunu ifade ettim ve Türkiye'nin kıyı şeridi etkinliğine geçtik.

Öğretmenin bu açıklamaları öğrencilerin uzunluk ölçerek fraktal boyutu hesaplayabildiğini, ancak bunları niçin yaptıklarının farkında olmadıklarını göstermektedir.

Halis öğretmen çalışma yaprağını uygularken karşılaştığı güçlüğü aşağıdaki şekilde ifade etmektedir.

> Çalışma yaprağında kıyı şeridinin uzunluğunu git gide küçülerek ölçtüğümüzde bazen hatalı durumlar oluştu. Yani uzunluğun artması gerekirken bazen azaldı. Bu öğrencileri tedirgin etti. Çünkü uzunluk artmalıydı. Bence bu haritanın yeterince büyük olmamasından kaynaklandı. Çünkü harita yeterince büyük olsaydı, ayrıntılar daha doğru ölçülürdü ve o zaman uzunluk hep artardı.

Öğretmenin bu açıklamaları çalışma yaprağında kullanılan haritanın yetersiz olduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde öğrencilerin mülakatlarında da bu güçlüğe rastlanmaktadır.

Örneğin Ö21'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Uzunluk ölçerek boyutu hesaplamada anlamadığın yerler oldu mu?
> Ö21: Harita üzerinde kıyı şeridinde ölçüm yaparken, belki hatalı ölçüm yaptığımızdan da kaynaklanıyor olabilir de doğru değerleri bulamadığımız için acaba yanlış bir işlem mi yaptık diye düşündük. Bu biraz bizi tedirgin etti. Çünkü bazı gruplarda işlem yaparken ölçeği küçültmemize rağmen kıyı şeridinin uzunluğu azalmaktaydı. Böyle bir sıkıntı oldu.
> A: Kıyı şeridinin uzunluğundan boyuta ulaşmak sana mantıklı geldi mi?
> Ö21: Başta çok anlamadım. Ancak Koch eğrisi ve diğer bildiğimiz fraktallarda bu yönteme göre uzunluğu hesaplayınca boyutu verdiğini gördük bu nedenle kıyı şeridi içinde doğru olabileceğini düşündüm.

Öğrencinin bu açıklamaları uzunluk ölçerek boyutları hesaplayabildiğini ve bu yöntemin boyutunu bildiği şekillerde de işe yaramasından dolayı kullanılabilir olduğunu düşündüğünü göstermektedir.

Bunun yanında Ö25'in uzunluk ölçerek boyut hesaplamaya yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Kıyı şeridini farklı oranlarda küçülen doğru parçaları ile ölçtünüz. Burada yapılan nedir?
> Ö25: Amacımız kıyı şeridinin gerçek uzunluğunu bulmak. Farklı oranlarda küçülen doğru parçalarıyla ölçmek aslında kıyı şeridinin gerçek uzunluk değerine yaklaşmamızı sağlamakta.
> A: Bulduğunuz değerlerin niçin logaritmalarını aldınız.
> Ö25. Bulduğumuz noktaların grafiği bir eğri grafiği iken o noktaların logaritmasını almak o eğriyi doğru haline getiriyor. Daha sonra bu doğrunun eğimini buluyorduk.

> Tabi kıyı şeridi tamamen öz-benzer olmadığından tüm noktalar o doğrunun üzerine düşmüyordu, Bu nedenle yaklaşık olarak onları hesapladık. Çıkan değer kıyı şeridinin boyutunun ondalık kısmını vermektedir. Bu nedenle gerçek boyut değerini bulmak için 1 eklemeyiz.

Ö25'in bu açıklamaları öğretmenin aksine bazı öğrencilerin uzunluk ölçerek kıyı şeridinin boyutunu ve her bir adımda yapılan işlemleri anladıklarını göstermektedir. Halis öğretmen kıyı şeridinin boyutunu hesapladıktan sonra öğrencilerin fraktalların boyutları ile onların dış görünüşleri arasında bir ilişki kurmaya başladıklarını ifade etmektedir.

> Gruplar kıyı şeridinin uzunluğunu hesaplayarak boyutu buldular. En düşük boyut Karadeniz kıyısı iken en büyük boyut Eğe kıyısının çıktı. Öğrencilere kıyıların boyutları ile şekilleri arasındaki ilişkiyi sorduğumda boyutun girinti çıkıntı arttıkça arttığını ifade ettiler. Hatta bir öğrenci alüminyum etkinliğine vurgu yaparak o zaman onun boyutunun da 2 ile 3 arasında olması gerektiğini söyledi.

Öğretmenin bu açıklamaları kıyı şeridinin uzunluğunu ölçerek fraktalın boyutunu hesaplama etkinliğinin öğrencilerin boyut ile şeklin karmaşıklığı arasında ilişki kurmasında etkili olduğunu göstermektedir.

Halis öğretmen uzunluk ölçerek boyutu hesaplama etkinliğinin beklenenden daha fazla zaman aldığını ifade etmektedir.

> Öğrencilerin harita üzerinde ölçümleri bayağı zaman aldı. Bazı gruplar haritadan dolayı hatalı ölçümler yaptılar. Sonra sınıf tartışmasında boyut ile şeklin girintili çıkıntılı olması arasında ilişki kurmaya yönelik tartışmalar yaptık. Bir grup ölçümlerindeki hatadan dolayı Akdeniz'in Karadeniz'den boyutunu daha küçük buldu.

Öğretmenin bu açıklamaları uzunluk ölçerek boyut hesaplama yönteminin programda belirlenenden daha fazla zaman aldığını göstermektedir. Bu ise kutu sayma metodunun bir sonraki hafta yapılmasına neden olmuştur.

Ders sonunda Halis öğretmen, öğretmen kılavuzunda ölçme değerlendirme bölümündeki etkinlik ve alıştırmaları öğrencilere ödev olarak verdiğini belirtmiştir.

6. Hafta

Bu haftada kutu sayma metoduna göre boyut hesaplama ile kaos oyunu konularının öğretimi yapılmıştır.

Halis öğretmen kutu sayma metoduna göre boyut hesaplamada yapmış olduğu etkinlikleri aşağıda ifade etmektedir.

> H: Konuya başlamadan önce kutu sayma metodunun neden gerekli olduğunu göstermek için ağacın, eğrelti otunun boyutunun öğrendikleri yöntemlere göre nasıl hesaplanacağını sordum. Öğrencilerden bazıları uzunluk ölçmeyi kullanabileceğimizi söyledi. Ancak ağacın uzunluğunu nasıl ölçeceğimizi sordum.
> A: Bu soruları sormanızdaki amacınız neydi?
> H: Öğrencileri ağacın boyutunu bu iki yöntemle hesaplamalarının zor olduğunu görmelerini ve böylece bu fraktallarında boyutlarının nasıl hesaplanacağına yönelik bir giriş yapmaktı.
> A: Daha sonra neler yaptınız?
> H: Öğrenciler bu sorular karşısında hem şaşırdılar hem de düşünmeye başladılar. Slaytı açtım ve uzunluk ölçme metodunda olduğu gibi Koch eğrisini kare kutularla kaplamaya başladım. Sonra kutu sayısını buldum grafiğin nasıl çizildiğini ve eğimin boyutu verdiğini gösterdim.

Öğretmenin bu açıklamaları hem uzunluk ölçme hem de kutu sayma metotlarının öğretiminde daha çok öğretmen merkezli bir yaklaşımın izlendiğini göstermektedir. Ağacı ya da eğrelti otunun boyutunun ne olacağı ve bunun nasıl hesaplanacağına yönelik sorular öğrencilerin derse olan ilgilerini çekmek amacıyla yapılmıştır.

Öğretmen daha sonra çalışma yaprağı-16'yı uyguladığını ifade etmektedir.

> Öğrenciler uzunluk ölçmede olduğu gibi burada bir sorunla karşılaşmadılar. Kutularda zaten ağacı içeren yerler işaretlenmişti. Gruplar bunları sayarak bir grafik çizdiler. Ancak öğrencilerin çizdikleri grafiğe göre eğimi bulmakta zorlandıklarını gözlemledim. Çünkü grafikte tüm noktalara en yakın doğruyu çizmek zorundalar, ancak birçok grup eğim değerini farklı buldu. Belki ondalık olarak farklılık vardı, ama yine de bu durum onları tedirgin etti. Ben de kutu saymada tam sonuçların değil yaklaşık değerlerin bulunmasının normal olduğunu belirttim. Çünkü tüm noktalardan geçen doğruyu elle çizmenin çok zor olduğunu açıkladım. Bazı öğrencilerin ise ölçüm değerlerine göre grafik çizmeden iki nokta için eğim değerlerini bulduklarını gördüm.

Öğretmenin bu açıklamaları kutu sayma metodunda bulunan boyut değerinin tam değil de yaklaşık bir değer olmasının öğrencileri tedirgin ettiğini göstermektedir.

Ö16'nın açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

> A: Kutu sayma metodunda ağacın boyutunu hesaplarken neler yaptınız?
> Ö16: hocamız çalışma yaprağı verdi. Ağaç kutularla kaplanmıştı. Kutuları sayma işi biraz zor. Ağacın neresinin hangi kutu tarafından tam olarak kaplanıp kaplanmadığına karar vermek zor. Zaten dersteki çalışma yapraklarında kutuların içerdiği parçalar işaretlenmişti, bu nedenle bulmak kolaydı ama benim bulmamı isteseydiniz zor olurdu.

A: Başka neler yaptınız? Zorlandığın yerler oldu mu?
Ö16: Sonra bulduğumuz değerlerin logaritmalarını aldık ve bir grafik çizdik. Biz milimetrik kağıda grafiği çizmede zorlandık. Aslında tam çizemedik, noktaları doğru işaretleyemedik.
A: Siz ne yaptınız.
Ö16: biz iki nokta için eğimi bulduk. Eğimi zaten onun boyutunu veriyordu.
A: Sınıfta ne tür tartışmalar yaptınız?
Ö16: her grup bulduğu eğim değerini söyledi. Ancak hemen herkes farklı bir şey söyledi.
A: Farklı boyutlar mı buldunuz?
Ö16: Aslında birbirine yakın değerlerdi, ama yinede farklıydı. Bu durum biraz bizi çelişkiye düşürdü, yanlış mı yaptık diye. Sonra hocamız buradaki boyutların yaklaşık değer olacağını söyledi ve ortalama bir değeri boyut olarak kabul ettik. Hatta bir arkadaşımız sınavda buradan bir soru gelirse cevabın ne olacağını sordu.

Öğrencinin bu açıklamaları kutu sayma metodunu nasıl kullanacağını öğrendiğini, ancak metot sonunda elde edilen farklı boyut değerlerinin ise kendisini tedirgin ettiğini göstermektedir.

Halis öğretmen kutu sayma metodunu kullanarak boyut hesaplamanın yaklaşık bir buçuk ders aldığını ifade etmektedir. Bu nedenle ikinci dersin ortalarında kaos oyununu oynamaya başladıklarını belirtmiştir.

İkinci ders kaos oyununu oynamaya başladık. Öncelikle öğrencilere oyunu tahtada kısaca tanıtmaya çalıştım. Noktaların nasıl hareket ettiğini gösterdim. Daha sonra ise kaos kelimesini açıklamaya çalıştım. Çünkü bazı öğrenciler dersin başında bu oyuna niçin kaos oyunu denildiğini sordular.

Bu konuda Ö16'nın açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Kaos oyununda anlamakta zorlandığın neler oldu?
Ö16: ben oyunun niye adının Kaos oyunu olduğunu anlamadım. Hocamız anlatmaya çalıştı, ama bende çok oturmadı, yani niye kaos oyunu.

Ö16'nın bu açıklamaları bazı öğrencilerin oyunun neden kaos ismiyle ifade edildiğini tam olarak anlamadıklarını göstermektedir.

Halis öğretmenin daha sonra öğrencilere çalışma yaprağı-17'i uyguladığını belirtmektedir.

Öğrencilere dersten önce cetvel getirmelerini söylemiştim. Kaos çalışma yaprağını dağıttı ve önce ön yüzde oyunu kağıt üzerinde oynamalarını istedim. 10-15 dakika öğrenciler kağıt üzerinde oyunu oynadılar ve ne tür şekillerin ortaya çıkacağını sordum. Tüm öğrenciler sonuçta bir üçgen olacağını söylediler, ancak üçgenin içinin tamamen karalanacağını belirttiler. Daha sonra ara verdik ve diğer derse geçtik.

Ö21’de kaos oyununu oynamaya başladığında öncelikle içi karalanan bir üçgen elde edeceklerini düşündüğünü belirtmektedir.

A: Kaos oyununu kağıt üzerinde oynarken neler yaptınız?
Ö21: Kural köşelere yarısı oranında gitmemizi söylüyordu. Cetveli kullanarak rastgele zarlar atmaya başladık. Her zar atılışında da uygun köşeye göre noktaları işaretledik. 20 hatta 30 nokta işaretledik, açıkçası bir müddet sonra sıkılmaya başladım.
A: Neden?
Ö21:yani sonuçta sadece noktaları işaretliyorduk. Bir de artık 20. noktadan sonra işaretlediğimiz noktaları da karıştırmaya başladık.
A: Sonuçta nasıl bir şekil oluşacağını düşündün?
Ö21: Sierpinski oluşacağı hayatta aklıma gelmezdi. Sonuçta bir üçgen olacağını doğru tahmin ettim ancak ben üçgenin tüm yüzeyinin noktalarla kapatılacağını düşünmüştüm, yani hiç boşluk kalmaz gibi geliyordu, diğer gruplarda benzer şeyler söylemişlerdi. Bilgisayarda Sierpinski çıkınca çok şaşırdım.

Ö21’in bu açıklamaları öğretmenin cevaplarıyla örtüşmektedir. Bunun yanında Ö21 kağıt üzerinde kaos oyununu oynamanın belli bir süre sonra hem zor hem de sıkıcı olduğunu ifade ettiği belirlenmiştir.

Halis öğretmen son derste kaos oyununun bilgisayar üzerinde oynandığını belirtmektedir.

Projeksiyondan web sitesini tahtaya yansıttım ve önce tek tek öğrencilerin kağıt üzerinde oynadıkları gibi oyunu site üzerinde oynamaya başladım. Bu arada öğrencilere belli adımlarda ne oluştuğunu sordum. 100. ya da 200. sanırım belli belirsiz Sierpinski görünmeye başlayınca birkaç öğrenci Sierpinski üçgeninin oluştuğunu ifade ettiler. 1000. tekrarlamadan sonra net olarak üçgen ortaya zaten çıkıyordu. Sonra öğrencilere web sitesinde kendilerinin oyunu oynamalarını söyledim.

Ders sonu mülakatlarda da öğrencilerin kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşmasından oldukça etkilendikleri görülmektedir.

Örneğin Ö25’in açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

A: Kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeni ortaya çıkınca neler hissettin?
Ö25: Çok şaşırdım. Çok sıra dışı geldi bana. Yani hiç beklemiyordum. Birde yani Sierpinski üçgeninin tıpatıp aynısı çıktı.
A: Oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeni çıktı?
Ö25: derste ben de bunu çok düşündüm. Bakınca aslında çıkmaması lazım. Kağıt üzerinde oynayınca sanki noktalar kağıdı kaplayacak sanıyorsun, ancak

Halis öğretmen web sitesinin öğrencilerin Kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşumunu görmelerinde yardımcı olmasına karşın, öğrencilerin oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu tam olarak anlayamadıklarını ifade etmektedir.

> Sierpinski üçgeninin çıktığını gördüler ama niçin oyun sonunda bu üçgenin ortaya çıktığı yönünde çok anladıklarını da sanmıyorum. Bence yazılım olarak biraz sorunluydu. Yazılım öğrenciler üzerinde rahatça işlem yapmalarına izin vermiyor. Tabi ki bir rastgelelik içerisinde ilk başta bulanık gibi görünen bir yapı içerisinde matematiksel bir yapı görmeleri güzel öğrenciler için ama kendilerinin onu yapmaları daha etkili olurdu diye düşünüyorum.

Halis öğretmen daha sonra ders için hazırlanan slaytı kullanarak kendisi oyun sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu göstermeye çalıştığını ifade etmektedir.

> H: Slaytta kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğuna yönelik açıklamalar yer alıyordu. Bunları öğrencilerle tartıştım.
> A: Ne tür tartışmalar yaptınız?
> H: Mesela slaytta bir nokta alındığında gelen zar sayılarına göre hareketini inceledik ve öğrencilerle bu noktaların hareketine yönelik bir kural bulmaya çalıştık. Sonra oyunun kuralı değişirse ne olur ona baktık. Bunun için diğer web sitesini kullandık. Bu site diğerine nazaran oyundaki değişkenleri değiştirmeye izin veriyordu, ancak oyun sonucu oluşan şekli adım adım değil de birden oluşturuyor. Bu nedenle yaptıklarımız çok anlamlı gelmedi, sanırım.

Örneğin Ö16’nın açıklaması öğretmenin tespitiyle uyuşmaktadır.

> A:Sence niçin oyun sonunda Sierpinski üçgeni oluştu?
> Ö16: Bende ders ortamında bunun niye olduğunu düşündüm. Sonra hocamızın açıklamaları doğrultusunda noktanın mesela çıkarılan üçgenlerde alınması sonucu hep bir sonraki çıkarılan üçgenlerde gezindiğini söyledi. Bu nedenle oluşmaktadır.

Ö16’nın açıklamaları oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu tam olarak anlamadığını göstermektedir.

Halis öğretmen iki nokta için kaos oyununu oynayarak oluşan şekli tartıştıklarını ancak sürenin yeterli gelmemesinden dolayı diğer noktalarda ne tür şekillerin oluşacağı üzerine bir tartışma yapamadıklarını ifade etmektedir.

> H:Farklı noktalar için oyun sonunda ne tür şekillerin oluşacağını öğrencilerin görmesini istedim. Böylece belki oyun sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu

yönünde bir anlayış geliştirebileceklerini düşündüm. İki nokta için çalışma yaprağında verilen kuralı kullanarak web sitesinde oyunu oynadım.
A: Siteyi kullanırken bir sorunla karşılaştınız mı?
H: Yok, site İngilizce ancak kullanımı kolay İngilizce çok bilmenize gerek yok.
H: Oyun sonunda öğrenciler alışık oldukları Cantor kümesini elde ettiler. Ben kuralı değiştirsek yine Cantor elde edilir mi diye sordum. Bir kısmı elde edileceğini, ama bazıları da olamayacağını söylediler. Çünkü kurala göre oyun sonunda şeklin oluştuğunu düşündüklerini fark ettim. Ders süresi bittiği için çalışma yaprağındaki diğer soruları cevaplayamadık. Belki bu nedenle kaos konusunun öğretimi eksik kaldı denebilir. Bu bölümleri öğrencilere ödev verdim. Ayrıca öğretmen kılavuzundaki ölçme değerlendirmeleri de yine ödev olarak öğrencilere verdim.

Ders sonu mülakatta Ö21 kaos oyunundan oldukça etkilenmesine karşın bu oyunun günlük hayatta nerede kullanıldığını bilmediğini ifade etmiştir.

A: Son olarak eklemek istediğin şeyler var mı?
Ö21: Kaos oyunu konusu bende merak uyandırdı. Çok farklı geldi. Ancak günlük yaşamda nerelerde kullanıldığına daha fazla yer verilmeliydi. Yani ders ortamında bunu nerede kullanacağımızı hiç belirtmedik.

Bu bulgu Ö21'in kaos oyunundan etkilenmesine karşın bu oyunun günlük yaşamda nerelerde kullanıldığını merak ettiğini göstermektedir. Bu durum hazırlanan öğretim programının kaos konusunun öğretiminde bir eksiliğini göstermektedir.

4. TARTIŞMA

Ortaöğretim düzeyi için tasarlanan bir fraktal geometri öğretim programının yeterliğini belirlemeyi amaçlayan çalışmanın bu bölümünde araştırmanın temel iki alt problemi ile ilgili bulguların, literatürde bu alandaki çalışmalar ile ortak olan ya da olmayan yönlerinin, ayrıntılı olarak tartışılması 3 alt başlık halinde yapılmıştır. Bu alt başlıklar, programın kazanımlarını öğrencilerin edinmedeki başarıları, programın içeriği ve öğretim süreci şeklinde düzenlenmiştir.

4.1. Fraktal Geometri Öğretim Programının Kazanımlarını Edinmede Öğrencilerin Başarılı Olma Durumuna Yönelik Elde Edilen Bulguların Tartışılması

Bir öğretim programının başarılı olabilmesi için programda amaçlanan hedeflere ulaşmış olması gerekir (Demirel, 2004). Program sonunda öğrencilerin kazanılmış davranış ve becerilerini ölçme programın başarısı hakkında karar vermenin yollarından biridir. Bunun yanında öğrencilerin programın uygulama sürecindeki öğrenmelerini ve karşılaştıkları güçlükleri belirlemek, programın başarısına etki eden durumların ortaya çıkarılmasında önemlidir. Bu bağlamda bu alt başlık altında yapılan tartışma, öğrencilerin tasarlanan fraktal geometri programının kazanımlarını ne kadar kazandıklarını ve bu kazanımların edinilmesini sağlayan durumların yorumlanmasını içermektedir. Bu amaçla tasarlanan programın hedeflenen kazanımları öğrencilere kazandırma durumlarını belirlemek için yazılı sınavdan, klinik mülakatlardan ve ders sonu mülakatlardan elde edilen bulgular bu alt başlık altında tartışılmıştır.

Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.2) öğrencilerin büyük bir çoğunluğu verilen şekillerin fraktal olup olmadığına doğru karar vermekte ve doğru açıklamalarda bulunmaktadır. Bu bulgu fraktal geometri programının öğrencilerin doğru fraktal tanımları oluşturmalarını ve fraktal şekilleri belirlemelerini sağladığını göstermektedir. Bu bağlamda fraktal kavramının oluşturulmasında programın yeterli olduğu söylenebilir. Literatürde fraktal kavramı üzerinde uzlaşılmış bir tanıma rastlanmamaktadır (Debnath, 2006). Yapılan tanımlar incelendiğinde sıklıkla fraktalların temel özelliklerine odaklanıldığı görülmektedir. Bunun yanında fraktal geometrinin öğretimine yönelik yapılan çalışmalarda ise genellikle öğrencilere doğrudan bir fraktal tanımının verilmediği tespit edilmiştir. Bu araştırmada da literatürde yapılan çalışmalar doğrultusunda doğrudan bir fraktal tanımı vermek yerine 6 hafta sonunda fraktalların temel özelliklerini öğrenen öğrencilerin kendi fraktal tanımlarını oluşturmaları beklenmiştir. Bu bağlamda hazırlanan programda yazılı olarak belirtilmese de programın örtük amaçlarından biri de öğrencilerin kendi fraktal tanımlarını oluşturmalarını ve fraktal nesneleri belirlemelerini sağlamaktır. Langille (1996) çalışmasında bazı öğrencilerinin fraktal kavramına yönelik bir tanım verilmemesinden dolayı fraktalların özelliklerini tam olarak belirleyemediklerini ifade etmektedir. Bowers (1991) ise fraktalın oluşum aşamasının (tanımının) açık olmamasından dolayı öğrencilerinin verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığını anlamakta zorlandıklarını belirtmektedir. Her iki çalışmada da öğrencilere bir fraktal tanımı yapılmamıştır ve bu tür bir tanımın yapılmaması nedeniyle öğrencilerin verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede zorlandıkları ifade edilmektedir. Buna karşın bu araştırmada elde edilen bulgular öğrencilerin sıklıkla verilen nesnelerin fraktal olup olmadıklarına doğru karar verdiklerini ve böylece kendilerine has fraktal tanımları oluşturduklarını göstermektedir. Bu bağlamda hazırlanan fraktal geometri öğretim programının öğrencilerin kendi fraktal tanımlarını oluşturmalarında ve fraktal şekilleri belirlemelerinde başarılı olduğu söylenebilir.

Elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.3) bir nesnenin fraktal olarak belirlenmesinde öğrencilerin en çok öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerine odaklandıkları görülmektedir. Bunun yanında bazı öğrencilerin bu özelliklerin yanında şeklin dış görünüşüne ya da şeklin sonsuzluğuna odaklandıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda çalışmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğunun verilen bir şeklin fraktal olarak belirlenmesinde öz-benzerlik ve tekrarlama özelliklerini temel aldıkları söylenebilir. Bu durum ise öğrencilerin kendi fraktal tanımlarını oluşturmalarında ve verilen şekillerden fraktal olanları belirlemelerinde programın öz-benzerlik ve geometrik tekrarlamalar konularının etkili olduğunu göstermektedir. Buna karşın bazı öğrencilerin verilen şekillerden fraktal olanlar ile olmayanları hatalı sınıflandırdıkları belirlenmiştir. Bunun nedenlerinden biri öğrencilerin öz-benzerlik kavramına yönelik sahip oldukları yanlış anlamalarıdır. Programda öğrenciler bir şeklin öz-benzerliğine şeklin bir parçası ile şeklin bütününü karşılaştırarak karar vermektedirler. Öz-benzerlikte hata yapan bazı öğrencilerin şeklin bir parçası ile şeklin tamamını karşılaştırırken şeklin hangi parçasını seçmeye karar vermekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Bunun yanında hata yapan bazı öğrencilerin ise öz-benzer bir şeklin öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını belirlemekte zorlandıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerin sıklıkla ya öz-benzer parçaları belirleyemedikleri ya da öz-benzer parçaların büyüme oranlarını hatalı belirledikleri tespit edilmiştir. Bu durum programda öz-benzerlik konusunun öğretimi için hazırlanan çalışma yapraklarının eksiklikleri olduğunu göstermektedir. Bunun yanında öz-benzerliğin belirlenmesinde sadece şeklin parçası ile şeklin bütününü karşılaştırma tanımının da yetersiz olduğu söylenebilir. Bu tanım öğrencilerde daha çok sezgisel bir öz-benzerlik kavramı oluşmasında etkili olmaktadır. Bannon (1991) öz-benzerliğin belirlenmesinde sadece parça ile bütünün karşılaştırılmasının yeterli olmadığını ifade etmektedir. Bunun nedeni olarak verilen şeklin her bir kopyasının şeklin bütününe göre ne kadar küçük olduğuna bu tanımla karar verilmesinin güç olacağını belirtmektedir. Bu nedenle öz-benzerliğin ancak dönüşümlerle tanımlanabileceğini ifade etmektedir.

Öğrencilerin verilen şekillerden fraktal olanlar ile olmayanları hatalı sınıflandırmalarının bir diğer nedeni ise sadece tek bir fraktal özelliğine odaklanmalarıdır. Bu araştırma kapsamında verilen şekillerin fraktal olup olmadığına karar vermede bazı öğrencilerin sadece öz-benzerliğe ya da sadece tekrarlama özelliğine odaklandıkları tespit edilmiştir. Verilen şekiller içerisinde sadece bir tek fraktal özelliğinin varlığını aramak bu şekillerin hatalı olarak sınıflandırılmalarına neden olmaktadır. Bunun yanında bazı öğrencilerin ise verilen şekilleri doğru olarak sınıflandırmalarına karşın bunun nedenini tam olarak açıklayamadıkları belirlenmiştir. Bu durum bu öğrencilerin fraktalların tekrarlama, öz-benzerlik ve karmaşık yapıda bulunma gibi özelliklerini birbirlerinden ayrık olarak düşündüklerini göstermektedir. Bu ise hazırlanan programının bazı öğrencilerin konular arasındaki ilişkileri görmelerini tam olarak sağlayamadığını göstermektedir. Van Hiele’nin geometrik anlama düzeyleri göz önüne alındığında bu öğrencilerin 1. ve 2. düzeye paralel davranışlar sergiledikleri söylenebilir. Blair (2004) hangi geometri olursa olsun geometri içinde düşünme sürecinde Van Hiele’nin teorisinin kullanılabileceğini belirtmektedir. Fraktal geometri bazı temel farklılıklarının olmasına karşın Euclid geometrisinin elemanlarını sıklıkla kullanmakta ve onun postulatlarını kabul etmektedir. Bu anlamda bakıldığında fraktal geometri bir nevi Euclid geometrisinin bir genişlemesi olarak kabul edilebilir. Bu nedenle fraktal geometriyi öğrenen öğrencilerin verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına yönelik açıklamalarının Van Hiele'inin teorisine göre sınıflandırılması anlamlıdır.

Öğrencilerin verilen fraktalları hatalı sınıflandırmaları ve hatalı fraktal anlamaları oluşturmalarının bir diğer nedeni ise fraktalların sonsuz yapıya sahip olmalarıdır. Öğrenciler fraktallarla işlem yaparken sadece birkaç sonlu adımdaki hallerini görmektedirler. Bu durum öğrencilerin Euclid geometrisinden gelen alışkanlıkları nedeniyle yapıların sonlu olduğu şeklinde bir algı oluşturmalarına (Bowers, 1991) ya da yapıların şekillerinin tam olarak nasıl olduğunu algılayamamalarına (Thomas ve diğer, 2002) neden olmaktadır. İster bilgisayar ortamında isterse de kağıt kalem kullanılarak olsun bir fraktal yapının sonsuzdaki şeklinin ne olacağını tam olarak bilemeyiz. Öğrencilerin üzerinde çalıştıkları şekillerin sonsuzdaki hallerinin ne olabileceğini hayal etmedeki yetersizlikleri fraktal kavramına yönelik eksik ya da hatalı bir anlama oluşturmalarının bir diğer nedenidir. Bowers (1991) öğrencilerinin Sierpinski üçgenindeki örüntünün devam edip etmediği konusunda çelişkiler yaşadıklarını ifade etmektedir. Sierpinski üçgeninin bir fraktal mı yoksa içinde boşlukları olan bir üçgen mi olduğuna tam karar veremediklerini belirtmektedir. Bunun yanında fraktal kavramının doğasından kaynaklanan epistemolojik engeller de bu kavramın anlaşılmasında öğrencilerin güçlük yaşamalarına neden olmaktadır (Bowers, 1991). Bowers (1991) sonsuzluk kavramındaki algılarımız nedeniyle öğrencilerin fraktal nesnelerin oluşumlarını tam olarak anlayamadıklarını ifade etmektedir.

Tekrarlama kavramı kelime anlamı olarak “yineleme” anlamına gelmektedir. Fraktal geometri de ise tekrarlama, bu anlamının yanında bir adımdaki sonucun diğer adımın başlangıcı olduğu devamlı bir yineleme süreci (Peitgen ve diğer., 1992, Kelley, 1999) olarak tanımlanmaktadır. Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.4) öğrencilerin hemen hemen tamamının parça ekleme/çıkartma ve döndürmeleri kullanarak fraktal şekilleri çizebildikleri görülmektedir. Bu bulgu programın geometrik tekrarlamalar konusunun öğrenilmesine yönelik belirlenen kazanımlarının başarılı olarak öğrenciler tarafından kazanıldığını göstermektedir. Langille'de (1996) çalışmasında öğrencilerinin hemen hemen tamamının basit tekrarlama kuralları kullanarak fraktal yapıları çizebildiklerini belirtmektedir. Bu bağlamda geometrik tekrarlamalar kullanılarak fraktalların şekillerini çizmede öğrencilerin çok fazla zorlanmadıkları söylenebilir. Öğrencilerin en çok üreticisi verilen bir şeklin döndürme ve parça eklemeleri kullanarak bir sonraki adımdaki şeklini çizmede başarı gösterdikleri tespit edilmiştir. Bunun yanında sözel tekrarlama kurallarına göre parça ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmede de öğrencilerin oldukça başarılı oldukları belirlenmiştir. Üreticisi verilen bir şeklin döndürme ve parça eklemeleri kullanarak bir sonraki adımdaki şeklini çizmede öğrencilerin, sözel tekrarlama kurallarına göre parça ekleme/çıkartmaları kullanarak fraktal yapıların belli adımdaki şekillerini çizmeye göre daha başarılı olmalarının nedeni öğrencilerin sözel tekrarlama kurallarına göre fraktal yapıyı oluştururken öncelikle üreticiyi çizmeleri ve daha sonra örüntüyü devam ettirmeleri olabilir. Yani sözel tekrarlama kuralı verildiğinde öğrenci bu kurala göre hem bir üretici çizmek hem de çizdiği üreticiye göre örüntüyü devam ettirmek zorundadır. Verilen bir tekrarlama kuralına göre oluşan fraktal yapıları çizmede gösterilen başarı kadar olmasa da öğrencilerin büyük çoğunluğunun üreticisi verilen bir fraktal yapının kuralını ifade etmede başarılı olduklarını tespit edilmiştir. Bu bulgu aynı zamanda sözel tekrarlama kurallarına göre fraktal yapıyı oluşturmadaki başarının da üreticisi verilen bir fraktalın şeklini çizmeye göre daha düşük olmasının nedeniyle örtüşmektedir. Buna karşın bazı öğrencilerin parça ekleme/çıkartmaları ve birkaç öğrencinin ise döndürmeleri kullanarak fraktalların şekillerini çizmede hata yaptıkları belirlenmiştir. Bu hatalı çizimlerin bir nedeni öğrencilerin dikkatsizliği ve üreticiyi hatalı okumalarıdır. Diğer bir nedeni ise öğrencilerin verilen tekrarlama kuralına çok fazla dikkat etmeyerek önceden öğrendikleri fraktalların şekillerini çizmeye çalışmalarıdır. Bu ise öğrencilerin verilen tekrarlama kurallarını göz önüne almayarak ezberlerindeki şekilleri çizmeye çalıştıklarını göstermektedir. Bunun yanında tekrarlama kuralının şeklin her bir parçasında (çıkarılan parçalar dâhil) uygulanması gerektiği yönünde sahip oldukları inançları bu tür hatalı çizimler yapmalarının bir diğer nedenidir. Bu inanç öğrencilerin öz-benzer parçaları belirlemelerinde de sorun yaşamalarına neden olmaktadır. Komorek ve diğer. (2001) çalışmasında öğrencilerinin matematiksel olarak oluşturdukları fraktalların üretici adımından sonraki adımları çizmede zorlandıklarını ifade etmektedir. Komorek ve diğer. (2001) bu durumun nedenini öğrencilerin tekrarlama adımlarındaki parçaların sayıları ile oranlarını tam olarak belirleyememesi olarak ifade etmektedir. Bu durum öğrencilerin üretici adımında fraktalı oluşturan kuralı tam olarak belirleyemediklerini göstermektedir. Bu yönüyle bu araştırmada elde edilen bulgular Komorek ve diğer. (2001) ile paralellik göstermektedir. Öğrencilerde tekrarlama kuralının şeklin her bir parçasında uygulanması gerektiği yönünde bir inancı oluşmasının nedeni çalışma yapraklarında sıklıkla tamamen öz-benzer fraktal şekillerine yer verilmesi olabilir. Çünkü tamamen öz-benzer fraktallarda örüntü şeklin her noktasında devam etmekte ve bu durum öğrencinin fraktal şekiller için bu tür bir inanç oluşturmasına neden olmaktadır. Bu bağlamda çalışma yapraklarında noktasal ve yaklaşık öz-benzer fraktal şekillerine daha fazla yer verilmesi bu tür bir inancın oluşmasına engel olabilir. Ayrıca öğrencilerin ilk defa bu tür etkinliklerle karşılaşmaları hatalı fraktal çizimleri yapmalarına neden olabilir. Çünkü fraktal geometri konularıyla tanışmadan önce öğrenciler sadece sonlu yapıya sahip Euclid şekilleriyle çalışmışlardır.

Fraktal yapılar Euclid geometrisinden farklı olarak tekrarlama süreçleri sonucunda oluşurlar. Bu nedenle bu yapılar içlerinde birçok matematiksel örüntüyü içerir. Bu bağlamda matematik öğretim programlarımızda fraktallar özel örüntü örnekleri olarak tanımlanmaktadırlar. Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.5) öğrencilerin genellikle çizdikleri fraktal şekillerdeki basit örüntüleri bulabildikleri ve bunları doğru kurallarla genelleyebildikleri görülmektedir. Bu durum hazırlanan programın öğrencilerin fraktal şekiller içerisindeki basit örüntüleri bulmada etkili olduğunu göstermektedir. Buna karşın bazı öğrencilerin örüntüleri belirlemede güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Bunun nedenlerinden biri öğrencilerin öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranları arasında hatalı ilişkiler kurmalarıdır. Bu öğrencilerin fraktalın şeklini geometrik olarak adım adım doğru çizmelerine karşın sıklıkla oluşan öz-benzer parça sayısını aynı zamanda küçülme oranı olarak aldıkları belirlenmiştir. Bunun nedeni çizdikleri şekillerin görsel olarak aldatıcılığı olabilir. Öğrencilerin her bir adımda oluşan parçaların öz-benzer olması nedeniyle bu parçaların birbirine eşit oldukları ve bu nedenle öz-benzer parça sayısının bir nevi onların küçülme oranlarını verdiği yönünde bir anlayış geliştirdikleri tespit edilmiştir. Ayrıca birkaç öğrencinin ise doğru örüntüler bulmalarına karşın bunları yanlış ya da eksik kurallarla ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu durumun bir nedeni öğrencilerin genelleme oluşturmada güçlük yaşamaları olabilir. Yapılan birçok çalışmada hem ilköğretim hem de ortaöğretim seviyesinde ve hatta üniversite düzeyinde birçok öğrencinin bir örüntü bulup bunu genellemede zorlandıkları ortaya konulmuştur (Stacy, 1989; English ve Warren, 1999; Zaskis ve Liljedahl, 2001; Steele ve Johanning, 2004; Lannin, 2005). Diğer bir neden ise öğrencilerin bu tür geometrik şekiller içerisinden örüntüler bulup bunları genellemeye alışık olmamaları olabilir.

Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.6) az sayıda öğrencinin verilen fraktalın çevresini tam ve doğru hesapladığı, buna karşın alanı hesaplamada daha başarılı oldukları görülmektedir. Bunun nedeni öğrencilerin fraktalın çevresini hesaplarken alana göre daha fazla işlem yapmaları olabilir. Çünkü öğrenciler çevreyi hesaplarken her bir tekrarlama adımında oluşan yeni parçaların sayısını, bu parçaların uzunluklarını ve toplam uzunlukları göz önüne alarak bir geometrik seri ile bunları ifade etmekte ve bu serinin toplamını bulmaktadırlar. Oysa alanı hesaplarken ya çıkarılan alanlar üzerinden toplam alanı hesaplamaktalar ki bu yolu öğrencilerin çok fazla tercih etmedikleri belirlenmiştir, ya da her bir adımda oluşan karelerin alanları toplamına göre toplam alanı limit yardımıyla hesaplamaktadırlar. Çevreyi hesaplamada öğrencilerin bazılarını (%33) orta ve genelde (%43) ise zayıf düzeyde oldukları görülmektedir. Bu durum öğrencilerin program sonunda fraktalın çevresini hesaplamada istenilen başarıya ulaşamadıklarını göstermektedir. Benzer şekilde alanı hesaplamada öğrencilerin birkaçının (%13) orta ve bazılarının (%28) ise zayıf düzeyde oldukları belirlenmiştir. Bu bağlamda alanı hesaplamada çevreyi hesaplamaya göre daha yüksek başarı elde edilmesine karşın yine de program sonunda alan hesaplama için de istenilen başarının tam olarak sağlanamadığı söylenebilir. Bu başarısızlığın oluşmasına (Tablo 3.7) öğrencilerin çevre ve alanı hesaplamada örüntü bulmada yaşadıkları güçlükler ve geometrik seriler konusundaki ön bilgilerindeki eksikliklerin neden olduğu belirlenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgulardan öğrencilerin en çok çevre ve alan için örüntü bulmada zorlandıkları görülmektedir. Literatürde yapılan çalışmalarda öğrencilerin sayı örüntülerini bulmada ve bunları genelleştirmede şekil örüntülerine göre daha başarılı oldukları ifade edilmektedir (Lin ve Yang, 2004; Feifei Ye, 2005; Akkan vd., 2008). Bu durum öğrencilerin verilen fraktalın çevresini ve alanını hesaplarken en çok örüntü bulmada ve bunları genelleştirmede yaşadıkları güçlüğün nedenlerinden biri olabilir. Bunun yanında öğrencilerin fraktal geometriyle ilk defa karşılaşmaları ve sürekli devam eden geometrik şekiller içerisinde birçok örüntüyü bir araya getirip bir kuralla ifade etmenin zorluğu da diğer bir neden olabilir. Öğrencilerin verilen fraktalın çevresi ve alanını hesaplarken karşılaştıkları bir diğer güçlük ise geometrik serilerle yapmış oldukları işlemlerdir. Bu öğrencilerin verilen fraktalın çevresi ve alanını hesaplamada bir geometrik seri bulmalarına karşın bu serinin toplamını hesaplamada zorlandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin serinin kısmi toplamlar dizisinin yakınsak ya da ıraksaklığını çok fazla incelemedikleri ve sezgisel olarak toplamın sıfır ya da sonsuz olduğunu ifade ettikleri tespit edilmiştir. Bazı öğrencilerin ise geometrik serinin ortak oranını belirlerken hata yaptıkları gözlemlenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin geometrik serilerle işlem yapabilmede yeterli ön bilgiye sahip olmadıkları ifade edilebilir. Ayrıca bazı öğrencilerin fraktalların çevresi ve alanını hesaplarken mutlaka bir geometrik serinin bulunması gerektiği şeklindeki inançları da çevre ve alanı hesaplarken hata yapmalarına neden olmaktadır. Bu öğrencilerin doğru örüntüler bulmasına karşın bunları bir geometrik seriye çevirmeye çalışmaları nedeniyle hata yaptıkları belirlenmiştir. Bu inancın oluşmasının nedeni fraktalların çevresi ve alanlarının hesaplanmasında öğrencilerin sürekli geometrik serilerle karşılaşmaları olabilir. Bu bağlamda bu inancın oluşmasını engellemek için çevre ve alanın hesaplanmasında öğrenciler geometrik serilerin dışındaki çözümlerle de karşılaştırılmalıdırlar.

Fraktalların çevresi ve alanını hesaplamada programın istenilen başarıyı gösterememesinin bir diğer nedeni de öğrencilerin sonsuz çevrede sıfır alan ve sıfır hacimde sabit alan şeklindeki sıra dışı olaylarla ilk kez karşılaşmaları olabilir. Çünkü yapılan ders sonu mülakatlarda öğrencilerin hemen hemen tamamının verilen bir fraktalın çevresi sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesini ya da hacminin sıfıra giderken yüzey alanının değişmemesini anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Perham ve Perham (2005) ile Thomas vd. (2002) öğrencilerinin Koch kartanesinin çevresinin sonsuza giderken alanının sınırlı kalmasını anlamakta çok zorlandıklarını ifade etmektedir. Her iki çalışmada da Koch kartanesinin çevresi ve alanının hesaplanmasında limit ve geometrik serileri kullanmak yerine bilgisayar programlarını kullanarak daha çok sezgisel olarak çevre ve alandaki değişim gösterilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin çevre ve alandaki bu sıra dışılığı anlamakta zorlanmalarının en büyük nedeninin kullanılan programların yetersizliği olduğu ifade edilmektedir. Buna karşın öğrencilerin bu sıra dışı duruma yönelik düşüncelerine çok fazla yer verilmemiştir. Bu bağlamda her iki çalışmanın da sonuçları bu araştırmada elde edilen bulgularla uyumlu gözükse de öğrencilerin çevre-alan ve hacim için elde ettikleri bu sıra dışı sonucu anlamlandırmakta zorlanmalarının nedeninin sadece kullanılan bilgisayar programlarına bağlanması yeterli değildir. Çünkü öğrencilerin büyük çoğunluğunda Euclid geometrisinden gelen bir nesnenin çevresi arttığında alanının da artması gerektiği yönünde bir algı bulunmaktadır (Ma, 1999). Oysa elde edilen sonuçlar öğrencilerin bu algılarıyla çelişmekte ve bu sıra dışı durumu anlamalarını güçleştirmektedir. Bunun yanında Lornell ve Westerberg (1999) ise öğrencilerinin Koch kartanesinin alanının sınırlı, ancak çevresinin sonsuz olmasından çok etkilendiklerini ve çelişkili durumlar yaşadıklarını ifade etmektedir. Lornell ve Westerberg (1999) öğrencilerin bu sıra dışı duruma yönelik düşüncelerine çalışmasında yer vermemesine karşın bu tür etkinliklerin öğrencilerin fraktalların alışılagelmişin dışındaki doğalarını görmelerinde ve kendi mevcut bilgilerini sorgulamalarında yardımcı olabileceği belirtilmektedir. Öğrencilerin fraktalların çevresi, alanı ve hacmindeki bu sıra dışılığı anlamakta zorlanmasının bir nedeni Ma’nın (1999) da belirttiği çevre artarken alanında artması yönündeki algımız ve diğer bir nedeni ise fraktalların sonsuz yapıları nedeniyle şekillerinin göz önünde canlandırılmasının güçlüğüdür. Öğrenciler bir fraktalın şeklinin nasıl olduğunu göz önünde canlandıramadıkları ve sonlu birkaç adım için işlem yaptıklarından çevresi olan ancak alanı olmayan bir şeklin nasıl olabileceğini hayal etmede zorlanmaktadırlar. Bunun yanında öğrenciler fraktal yapıların sadece birkaç adımda oluşan görüntüleri üzerinde çalıştıklarından yapıları genelde sonlu olarak algılamaktalar ve matematiksel olarak çevre ve alanı doğru hesaplamalarına karşın bu durum onlarda bir çelişki yaratmaktadır. Örneğin Sierpinski dörtyüzlüsünün üç boyutlu modeliyle çalışan öğrencilerin şeklin hacminin sıfıra yaklaşırken yüzey alanının değişmediğini matematiksel olarak doğru hesaplamalarına karşın modeldeki yapının nasıl hacminin olamayacağını algılamakta zorlandıklarını dile getirmektedirler. Bunun yanında çevre ve alanı hesaplamada öğrencilerin yaşadığı bir diğer güçlük ise çıkarılan ve geride kalan nokta sayısıyla ilgilidir. Yapılan ders sonu mülakatlarda öğrencilerin büyük çoğunluğunun Sierpinski üçgeni ve dörtyüzlüsü ile Cantor kümesi gibi fraktalların oluşumunda çıkarılan nokta sayısının ve geride kalan nokta sayısının sonsuz sayıda olmasını anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Özellikle Sierpinski üçgeninde merkezden üçgen çıkarıldığında o üçgendeki tüm noktaların çıkarıldığını ve bu nedenle de nasıl geride noktaların kaldığını anlayamadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin tedirgin oldukları nokta merkezden üçgen çıkarıldığında geride kalan üç üçgenin üçgen olup olmadığı üzerinedir. Çünkü eğer geride üç üçgen kalıyorsa o zaman merkezden çıkarılan üçgenin köşe noktalarının çıkarılmadığını ifade etmektedirler. Bunun yanında anlamakta zorlandıkları bir diğer konu ise sonsuz tane nokta dışarı çıkarılırken geride sonsuz nokta kalıyorsa sonsuz nokta bir çevre oluştururken nasıl alan oluşturmadığı üzerinedir. Öğrencilerin yaşadıkları bu güçlük literatürde fraktal geometrinin öğretimi üzerine yapılan hiçbir çalışmada yer almamaktadır. Bu güçlüğün ortaya çıkmasının bir nedeni öğrencilerin sonsuzluk kavramına yönelik algıları olabilir. Diğer bir nedeni ise sayılabilir ve sayılamayan kümeler hakkında bir ön bilgilerinin olmamasıdır. Çünkü örneğin Cantor kümesinden sonsuz tane nokta çıkarılmasına karşın geride sayılamayan sayıda nokta kalmaktadır ki bu sayılamayan sayıdaki nokta bir uzunluk belirtmemektedir. Öğrenciler çıkarılan nokta sayısına göre çevre ve alanın bu sıra dışı durumunun onların boyutlarıyla ilgili olduğunun farkına fraktal boyut kavramını öğrendikten sonra varabilirler. Bu durum ise fraktalların çevresi, alanı ve hacminin tekrarlama konusu içerisinde değil de fraktal boyuttan sonra verilmesinin daha yararlı olabileceğini akla getirmektedir.

Mandelbrot ve Julia kümelerinin temelinde verilen tekrarlama kurallarına göre seçilen noktaların yörüngelerinin hareketi önemlidir. Eğer bir noktanın belli bir tekrarlama kuralına göre oluşan yörüngeleri belli bir sayıya yaklaşıyorsa bu durumda noktaya mahkum, eğer noktanın tekrarlama kuralına göre oluşan yörüngeleri belli sayılar arasında sürekli bir salınım yapıyorsa bu durumda noktaya periyodik ve eğer noktanın tekrarlama kuralına göre yörüngeleri belli bir sayıya gitmiyor ya da bir aralıkta salınım yapmıyorsa bu durumda noktaya kaçak nokta denir (Peitgen vd., 2004). Hem yazılı sınavlardan hem de ders sonu ve klinik mülakatlardan elde edilen bulgular öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun verilen bir tekrarlama kuralına göre bir başlangıç noktasının kaçak, mahkum ya da periyodik olup olmadığını belirleyebildiklerini göstermektedir. Bu durumda hazırlanan öğretim programının öğrencilerin kaçak, mahkum ya da periyodik nokta kavramlarını öğrendiklerini gösterdiği söylenebilir. Bunun yanında bazı öğrencilerin noktaların yörüngelerini inceleyerek kaçak, mahkum ya da periyodik olup olmadığına doğru karar vermelerine karşın verilen başlangıç noktasının değil de onun yörüngesinin kaçak, mahkum ve periyodik olduğu yönünde bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Bu tür bir algının ortaya çıkmasına öğrencilerin kullandıkları Excel programında yörüngelerin orijinden uzaklaştığı ya da belli bir sayıya yaklaştığını görmeleri neden olmuş olabilir. Çünkü öğrenciler ortalama 40 tekrarlamadan sonra yörüngelerin davranışları hakkında bir tahminde bulunmaktalar ve bu tahminlerinde sürekli yörüngelere odaklanmaktadırlar. Bu bağlamda bu tür bir algının oluşmasını önlemek için çalışma yapraklarında ve kullanılan programda başlangıç noktasının türünü belirlerken yörüngelerin hareketini incelemenin yanında farklı bir yol olarak modül de kullanılabilir. Böylece öğrenciler iki farklı yolu da kullanarak başlangıç noktasının türünü belirleyebilirler. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde (Frantz ve Lazarnick, 1991; Bremer, 1997; Langille, 1996; Ford, 2004) kaçak, mahkum ve periyodik noktaların bulunmasına yönelik genellikle çalışma yapraklarının geliştirildiği ve bilgisayar programlarının tanıtıldığı görülmektedir. Buna karşın bu noktalar belirlenirken öğrencilerin geliştirdikleri anlamalar ve güçlüklere yönelik bir çalışmaya henüz rastlanmamıştır. Bu bağlamda bu araştırma kaçak, mahkum ve periyodik noktaların belirlenmesinde öğrencilerin geliştirmiş olduğu anlamaları yansıtması yönünde önemlidir.

Bu araştırmada elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.8) öğrencilerin büyük çoğunluğunun 5. soruyu doğru olarak cevapladıkları belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin Julia kümelerinin periyotlarını doğru bulduklarını ve periyotları ile öz-benzer parça sayıları arasında doğru ilişkiler kurduklarını göstermektedir. Bu bağlamda programın Julia kümesinin periyotlarıyla öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik kazanımının başarılı olduğu söylenebilir. Buna karşın öğrencilerin yarısı 4. soruyu doğru olarak cevaplandırmıştır. Bu durum hazırlanan programın Julia kümelerinin öğretimi için başarılı olduğunu gösterse de tam bir başarının sağlanamadığı söylenebilir. Bazı öğrencilerin verilen başlangıç noktalarının yörüngelerini doğru belirlemelerine karşın bu noktaların Julia kümesi içerisinde olup olmadığına karar veremedikleri belirlenmiştir. Bu ise bu öğrencilerin Julia kümelerinin nasıl oluştuğunu ve hangi noktaların Julia kümelerinde bulunduğunu bilmediklerini göstermektedir. Çünkü öğrenciler kaçak, mahkum ya da periyodik noktaları belirlemesine karşın bunların Julia kümesiyle olan ilişkisini kuramamaktadır. Bunun nedenlerinden biri öğrencilerin Julia kümelerinin şekillerini tam olarak anlayamamalarından kaynaklanabilir. Örneğin ders sonu mülakatlarda öğrencilerden bazılarının verilen başlangıç noktalarının yörüngelerinin Julia kümesindeki noktalar olduğunu düşündüğü tespit edilmiştir. Bunun yanında bazı öğrencilerin ise şekillerin nasıl renklendirildiğini tam olarak anlayamadığı belirlenmiştir. Öğretim sürecinde kullanılan bilgisayar programlarının yetersizliği bu güçlüklerin ortaya çıkmasının nedeni olabilir. Çünkü Excel programı sadece yörüngelerin davranışı hakkında bilgi verirken fraqtive programı ise doğrudan oluşacak Julia kümesini çizmeyi sağlıyordu. Bu ise öğrencilerin bir Logo programında olduğu gibi hem kurulan döngüyü hem de şeklin adım adım oluşumunu görmelerini engellemektedir. Bu bağlamda Julia kümelerinin adım adım oluşumunu gösteren programların kullanılmasının daha anlamlı öğrenmelerin oluşmasına katkı sağlayacağı söylenebilir. Benzer şekilde Mandelbrot kümesinin oluşumunun algılanmasında da aynı güçlüklerin yaşandığı tespit edilmiştir.

Yapılan ders sonu mülakatlarda birkaç öğrencinin Julia kümelerinin Mandelbrot kümesindeki noktalardan oluştuğu yani Mandebrot kümesinin Julia kümelerinin bir birleşimi olduğu yönünde bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Bu bağlamda programın Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik kazanımının tam olarak olmasa da bazı öğrenciler tarafından kazanıldığını göstermektedir. Bu anlamanın oluşmasında kullanılan fraqtive programının etkisini olduğu söylenebilir. Çünkü program Julia kümesi ile Mandelbrot kümesini aynı ekranda eş zamanlı olarak göstermekte ve her bir noktanın da değerini anlık yansıtmaktadır. Ayrıca Mandelbrot ve Julia kümelerinin şekillerinden hoşlandıkları ve derse yönelik olumlu tutum içerisinde oldukları belirlenmiştir. Benzer şekilde Ford'un (2004) da Mandelbrot kümeleriyle çalışan öğrencilerin oluşan şekillerden çok etkilendiklerini ve bu nedenle de hem derse hem de konuya yönelik olumlu bir tutum içerisinde olduklarını ifade ettiği tespit edilmiştir. Literatürde Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretimine yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların daha çok bu konuların öğretimine yönelik hazırlanan çalışma yaprakları ve programları tanıtıcı nitelikte oldukları görülmektedir. Buna karşın öğrencilerin bu kümelerin oluşumuna dair geliştirdikleri anlamaların belirlenmesine yönelik bir çalışmaya henüz rastlanmamaktadır. Bu bağlamda bu araştırmadan elde edilen bulgular literatürdeki bu eksikliği de giderecek niteliktedir.

Geometride, eğer iki şekil aynı büyüklükte olmak zorunda olmadan aynı şekle sahipse bu şekillere benzerdir denir. Örneğin tüm eşkenar üçgenler benzerdir. Öz-benzerlik ise bir şeklin tamamının şeklin içindeki küçük bir parçasına benzemesi ve bu küçük parçanın da kendi içinde şeklin tamamına benzer bir başka parça içermesi ve benzeri durumun devam etmesi olarak tanımlanır (Kelley, 1999). Öz-benzer şekiller incelendiğinde ana şeklin aslında kendi benzerlerinden oluştuğu ve onlarında daha küçük benzerleri tarafından oluşturulduğu görülmektedir. Bu araştırmada öz-benzerlik kavramının öğretimi öğrencilere bütün ile parçalarının karşılaştırılması ve büyüme oranıyla olan ilişkileri vurgulanarak yapılmıştır. Öğrencilerin 1. soruya verdikleri cevaplardan ve yapılan ders sonu mülakatlardan elde edilen bulgular verilen nesnelerin öz-benzer olup olmadıklarını belirleyebildiklerini göstermektedir. Bu bağlamda öğrencilerin öz-benzer bir şekli çoğunlukla "belli oranda büyütülmüş/küçültülmüş kendine benzer parçaları içeren nesne" olarak tanımladıkları belirlenmiştir. Bunun yanında bazı öğrencilerin ise öz-benzer bir şekli "kendisini sürekli tekrarlayan benzer nesneler topluluğu" olarak tanımladıkları tespit edilmiştir. Bu durum hazırlanan öğretim programının öz-benzerlik kavramının öğrenilmesinde etkili olduğunu göstermektedir. Buna karşın mülakat yapılan bazı öğrencilerin öz-benzerliği belirlemede zorlandıkları tespit edilmiştir. Bunun bir nedeni öz-benzerlik konusunun öğretiminde kullanılan tanımın yetersizliği olabilir. Çünkü öğrencilerin verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına karar vermede üç farklı yol izledikleri tespit edilmiştir. Bu yollardan öğrencilerin en çok nesnenin bir parçası ile nesnenin bütününü karşılaştırdığı, bazılarının nesnenin bir parçası ile nesnenin diğer parçalarını karşılaştırdığı ve birkaç öğrencinin ise nesnenin bir parçası ile nesnenin başlangıç şeklini karşılaştırdığı belirlenmiştir. Ders ortamında öz-benzerliğin belirlenmesinde sıklıkla nesnenin bir parçası ile nesnenin bütününün karşılaştırılması tanımı vurgulanmasına karşın öğrencilerin öz-benzerliği belirlemede farklı yollar geliştirdikleri belirlenmiştir. Bu yolları geliştirmelerinin en büyük nedeni adım adım oluşum kuralı verilen bir nesnenin öz-benzerliğine sınıf ortamında vurgulanan tanımın yetersiz olmasından kaynaklanmaktadır. Öğrenciler sınıf ortamında öğrendikleri parça bütün karşılaştırması tanımına göre herhangi bir adımda aldığı bir parçayı büyüttüğünde şeklin tamamını içerisinde görememektedir. Bu durum sonucu öğrencilerin verilen nesnenin öz-benzerliğini belirlemede nesnenin parçası ile nesnenin başlangıç şeklini karşılaştırma ya da nesne içerisinde birbirinin kopyası parçaları arama yöntemlerini geliştirdikleri söylenebilir. Özellikle adım adım oluşumu verilen bir fraktalın öz-benzerliğini belirlemede tanım yetersiz kalmaktadır. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde öz-benzerlik kavramının ya matematiksel olarak (Bowers, 1991; Bannon, 1991) ya da parça bütün ilişkisini inceleyerek (Langille; 1996; Komorek vd., 2001; Thomas ve Thomas, 2002) öğrencilere kazandırılmaya çalışıldığı belirlenmiştir. Bu bağlamda programda öz-benzerliğin belirlenmesinde parça-bütün karşılaşmasını içeren tanımın yanında matematiksel öz-benzerlik tanımına da yer verilmesi bu güçlüğün giderilmesinde etkili olabilir. Ancak Bowers'ın (1991) çalışması incelendiğinde onun öğrencilerinin de öz-benzerlik kavramını anlamakta zorlandıkları ve matematiksel tanımı (çevirme, dönme, ölçekleme) kullanarak bir nesnenin öz-benzerliğine karar vermede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda öz-benzerliğe karar vermede yaşanan bu güçlüğün bir nedeni de öz-benzerlik kavramının doğasından kaynaklanan bir güçlük olabilir. Ayrıca birkaç öğrencinin öz-benzerliğin nesnenin her noktasında sağlanması gerektiği şeklinde bir anlama geliştirdikleri belirlenmiştir. Bu öğrencilerin sıklıkla kağıt üzerinde oluşturulmuş nesnelerin öz-benzer olmadıklarını ifade ettikleri belirlenmiştir. Bunun en büyük nedeni kağıt üzerinde oluşturulan fraktal yapıların öz-benzerliğinin sadece birkaç adım için görülebilmelerinden kaynaklanmaktadır. Bu ise öğrencilerde bir nesne fraktal olabilir ancak öz-benzer olmak zorunda değildir şeklinde yanlış bir anlamanın oluşmasına neden olmaktadır. Benzer bir durum Thomas vd. (2002) çalışmalarında da rastlanmaktadır. Thomas vd. (2002) öğrencilerinin bilgisayar programlarında fraktalların sonuçta belli bir adıma kadar oluşmuş hallerini gördüklerini ve bu durumun ise öğrencilerin verilen fraktalın öz-benzer olup olmadığını anlamalarında sorun yarattığını ifade etmektedir. Hem bu araştırmada hem de Thomas vd. (2002) çalışmasında öğrencilerin sezgisel olarak fraktalın oluşumunun devam ettiğini göz önüne almadıklarından dolayı öz-benzerliğe karar vermede zorlandıkları belirlenmiştir.

Yapılan ders sonu mülakatlardan ve yazılı sınavda tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarına yönelik verdikleri cevaplardan öğrencilerin öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranlarını belirlemede güçlük yaşadıkları görülmektedir. Bu bulgu öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranı arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik kazanımın tam olarak başarılı olamadığını göstermektedir. Bunun nedeni öğrencilerin öz-benzerliği belirlemede sadece parça-bütün karşılaştırması tanımını kullanmaları olabilir. Bu tanım öğrencilerde verilen şekillerin öz-benzer olup olmadığını belirlemede bir algı oluşturmasına karşın bu parçaların büyüme oranları hakkında bir bilgi vermemektedir. Bannon (1991) çalışmasında öz-benzerliğin belirlenmesinde nesnenin parça-bütün karşılaştırması tanımının yetersiz olduğunu ifade etmektedir. Çünkü bu tür bir tanımlama yapıldığında verilen nesnenin her bir kopyasının ne kadar küçük olarak belirtilmediğini ifade etmektedir. Bu nedenle öz-benzerlik kavramına dönüşüm (transformation) kavramını kullanarak girilmesini önermektedir. Bu bağlamda Bannon'un önerdiği gibi bir öz-benzerlik tanımının da programda katılması öğrencilerin öz-benzer parçalar ile onların büyüme oranlarını belirlemeleri sağlayabilir.

Öz-benzerlik kavramı benzerlik kavramıyla yakın bir ilişki içerisinde olmasına karşın benzerlikte iki nesnenin karşılaştırılması yapılırken öz-benzerlik nesnenin kendisine ait olan bir özelliktir. Ancak tüm öz-benzer nesneler aynı özellikleri göstermemektedir. Bu durum farklı öz-benzerlik türlerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu araştırmada tamamen, noktasal ve yaklaşık öz-benzerlik olmak üzere üç öz-benzerlik türünün öğretimi yapılmıştır. Literatürde öz-benzerlik kavramının öğretimi üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde öz-benzerlik türlerinin öğretimi, öğrencilerin bu türleri nasıl anladıkları ve algıladıkları üzerine yapılmış bir çalışmaya henüz rastlanmamıştır. Bu bağlamda bu araştırmadan elde edilen bulgular bir ilk niteliği taşımaktadır. Bu araştırmanın bulgularına göre (Tablo 3.9) öğrencilerin genel olarak fraktalların öz-benzerlik türlerini başarılı olarak belirleyebildikleri görülmektedir. Bu bağlamda programın öğrencilerin öz-benzerlik türlerini belirlemelerinde başarılı olduğu söylenebilir. Ancak bazı öğrencilerin noktasal öz-benzerliği belirlemede güçlük yaşadığı tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden bir kısmının noktasal öz-benzer olan bir şekli tamamen öz-benzer olarak sınıflandırdıkları belirlenmiştir. Bunun nedeni ise bu öğrencilerin öz-benzerlik türüne karar verirken nesne içerisindeki benzer parçaları birbirleriyle karşılaştırmalarıdır. Diğerlerinin ise verilen noktasal öz-benzer şekilleri yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandırdıkları belirlenmiştir. Bunun bir nedeni öğrencilerin verilen öz-benzer şekillerin merkezde iç içe değil de merkez dışında bu şekilde iç içe olmalarından dolayı yaklaşık öz-benzer oldukları yönünde bir anlayışa sahip olmalarıdır. Bu durum programda kullanılan öz-benzerlik ve noktasal öz-benzerlik tanımlarının yetersiz olduğunu göstermektedir. Bunun yanında bu bulgu aynı zamanda öğrencilerin noktasal öz-benzerlik kavramını tam olarak anlayamadıklarını ve ezbere bir öğrenme gerçekleştirdiklerini de göstermektedir. Ayrıca bazı öğrencilerin ise verilen nesnenin öz-benzerlik türüne karar veremediklerinde nesneyi yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandırdıkları görülmüştür. Bu tür bir anlayışın ortaya çıkmasının nedeni doğal fraktalların yaklaşık öz-benzer olması olabilir. Çünkü Thomas vd. (2002) yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin doğal nesnelerin öz-benzerliği tam olarak yansıtamamaları nedeniyle nasıl fraktal olduklarını anlayamadıklarını ifade etmektedir. Öğrenciler eğrelti otu ya da brokoli de öz-benzer parçaları görebilmelerine karşın bu parçaların matematiksel olarak tanımlanan fraktallardaki gibi mükemmel bir benzerliğe sahip olmadıklarını ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu ise öğrencilerin kendi öz-benzerlik kavramlarını oluşturmalarında bir güçlük yaratmaktadır. Bu çalışmada da öğrencilerin doğal nesnelerin öz-benzerliğini belirlemede zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu bağlamda programda öz-benzerliği tamamen yansıtacak eğrelti otu, brokoli gibi fraktallara daha fazla yer verilmeli ve bu nesnelerdeki öz-benzerliğin sonlu olduğu vurgulanmalıdır. Buna karşın Komorek vd. (2001) öğrencilerinin öz-benzerlik kavramını zihinlerinde oluşturmalarında doğal fraktalların yararlı olduklarını ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu araştırmacılar öğrencilerinin öz-benzerlik kavramını öğrenirken öncelikle brokoli, eğrelti otu gibi doğal nesneleri incelediklerini ve daha sonra matematiksel olarak öz-benzerlik kavramının oluşturulduğunu belirtmişlerdir. Ancak çalışmalarında genel anlamıyla öz-benzerlikten söz edilirken öz-benzerlik türlerine değinilmediği belirlenmiştir. Bu bağlamda genel olarak öz-benzerlik kavramına yönelik bir algı oluşturmada doğal nesnelerin kullanılmasının yararlı olduğu söylenebilir. Ancak doğal fraktal şekillerin hem matematiksel fraktallardaki gibi bir mükemmelliğe sahip olmamaları ve çoğu zaman benzer parçalarının yaklaşık olarak birbirine benzemesi hem de sonlu bir yapıya sahip olmaları nedeniyle öğrencilerin verilen nesnelerin öz-benzerlik türünü belirlemelerini ve öz-benzerlik kavramını oluşmalarını güçleştirdiği söylenebilir.

Fraktalların belki de en sıra dışı ve ilginç özellikleri onların boyutlarıdır. Euclid geometrisine göre sezgisel olarak noktanın 0-boyutlu, doğrunun 1-boyutlu, düzlemin 2-

boyutlu ve küpün ise 3-boyutlu olduğu ifade edilir. Fraktal boyut ise şeklin karmaşıklığının ölçüsüdür. Kabaca fraktal boyut verilen bir kümede kaç tane nokta bulunduğunu, yani kümenin ne kadar geniş olduğu kavramını ifade eden sayısal bir gösterimdir (Devaney, 1998). Fraktallar genellikle kesirli boyutlara sahiptirler. Bu nedenle fraktallarla ilk defa karşılaşan biri için bu boyutlar hem çok şaşırtıcı hem de anlaşılması o denli güç olan kavramlardır. Bu araştırmadan elde edilen bulgular öğrencilerin büyük çoğunluğunun fraktalların boyutlarını matematiksel olarak hesaplayabilmelerine karşın elde ettikleri boyut değerlerinin ne anlama geldiğini ve kesirli boyutları anlamada sorun yaşadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin fraktal boyutları anlamada güçlük yaşamalarının nedenlerinden birisi bir tek evrensel boyut tanımına sahip olmalarıdır (Bowers, 1991). Fraktal geometri dersinden önce öğrencilerin tamamının boyutu sadece en, boy ve yükseklik olarak tanımladıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu tanımlamalarının kökeni Euclid geometrisine dayanmaktadır (Bowers, 1991; Langille, 1996; Devaney, 1998). Bir diğer nedeni ise öğrencilerin boyutu nesnenin kendine özgü bir özelliği olarak düşünmesidir (Bowers, 1991; Devaney, 1998). Öğrenciler geometrik nesneleri üç kategoriye ayırmaktadır: 1 boyutlu nesneler, 2 boyutlu nesneler ve 3 boyutlu nesneler. Bu araştırmada mülakat yapılan öğrencilerin çoğunun nesnelerin boyutunu nesnelerin uzaydaki konumunun özelliği olduğunu düşündükleri tespit edilmiştir. Öğrencilere düzlemin niçin 2 boyutlu olduğu sorulduğunda eni ve boyundan dolayı olduğunu ifade ettikleri belirlenmiştir. Yani öğrenciler eni, boyu ve yüksekliği bir boyut olarak düşünmektedirler. Bu bulgu Bowers (1991) ve Devaney'in (1998) çalışmalarında elde edilen bulgularla paralellik göstermektedir. Onların öğrencileri de bir nesnenin enini bir boyut, boyunu bir boyut ve yüksekliğini de bir boyut olarak kabul etmektedirler. Devaney (1998) öğrencilerin sahip oldukları bu boyut tanımının yetersizliğinin fraktal boyutları anlamalarını da güçleştirdiğini ifade etmektedir. Fraktal boyutların öğrenciler tarafından anlaşılmasında güçlük yaşanmasının bir diğer nedeni ise hem algısal hem de teorik seviyede evrensel bir boyut tanımının yapılmamış olmasıdır (Kaye, 1989). Peitgen vd. (2004) yaklaşık elliden fazla boyut tanımının olduğunu ifade etmekte ve bu boyut tanımlarının kendi içlerinde tutarlı olmalarına karşın birbirleriyle çeliştikleri durumlarında olduğunu ifade etmektedir. Bunun yanında öğrenciler Euclid geometrisinden alışık olarak sadece tam sayılarla ifade edilen boyutlarla karşılaşmışlardır. Bu nedenle alışık olmadıkları kesirli boyutlar onlara sıra dışı gelmektedir. Bowers (1991) çalışmasında öğrencilerin fraktal boyutları anlamakta zorlanmalarının nedenini onların sürekli tam sayılı boyutlarla çalışmış olmalarına bağlamaktadır. Bu bağlamda fraktal boyutların anlaşılmasında öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin programdan ziyade onların sahip oldukları boyut tanımlarının yetersizliğinden, ön bilgi eksikliklerinden ve fraktal boyutların doğasından kaynaklandığı söylenebilir.

Bu araştırmadan elde edilen bulgulardan (Tablo 3.11) öğrencilerin yarısının (%51) Menger süngerinin boyutunu doğru hesaplarken, Peano eğrisinin boyutunu doğru hesaplamada öğrencilerin daha az başarılı (%26) oldukları görülmektedir. Bu durum hazırlanan programın fraktal boyut konusunun öğrenilmesinde istenilen başarıyı yakalayamadığını göstermektedir. Öğrencilerin sınav kağıtlarına yazdıkları cevapları incelendiğinde büyük bir çoğunluğunun tamamen öz-benzer bir fraktalın boyutunu $boyut = \frac{\log\,(öz\text{−}benzer\ parça\ sayısı)}{\log\,(büyüme\ oranı)}$ formülüyle hesaplandığını bildiği ve formülde paydaki ifadenin öz-benzer parça sayısının logaritmasını ve paydadaki ifadenin ise büyüme oranının logaritması olduğunu bildikleri tespit edilmiştir. Buna karşın hem klinik mülakatlardan hem de ders sonu mülakatlardan bazı öğrencilerin bu formülün nasıl oluştuğunu ve formülü uygularken neleri bulduklarının farkında olmadıkları belirlenmiştir. Bu durum bu öğrencilerin daha çok verilen formülü sorgulamadan ezberlediğini ve daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Benzer bir bulgu Langille’nin (1996) çalışmasında da görülmektedir. Langille öğrencilerinin formülü kullanarak fraktalların boyutlarını hesapladıklarını, ancak tam olarak buldukları değerlerin ne olduğunu bilmediklerini ifade etmektedir. Bu nedenle öğrencilerinin öz-benzerlik boyutunu daha çok işlemsel olarak öğrendiklerini ifade etmektedir. Bu durumun bir nedeni fraktal boyut kavramının öğretiminde izlenen yol olabilir. Langille (1996) fraktal boyutta daha çok işlemsel öğrenmelerin ortaya çıkmasının nedenini tanımlar üzerinde tartışılmamasına bağlamaktadır. Tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarının hesaplanmasını sağlayan formül oluşturulurken özel birkaç örnek üzerinden gidilmesi ve formülün sadece tamamen öz-benzer parçalara ayrılabilen nesneler için geçerli olduğunun vurgulanmaması bu tür bir öğrenmenin ortaya çıkmasına neden olabilir. Fraktal boyut tanımı esasen Hausdorff-Besicovitch tarafından tanımlanan boyut tanımına dayanmaktadır. Bu boyut temellerini ölçü teorisinden alır ki üniversite birinci sınıf öğrencilerinin bu konuda yeterli ön bilgileri bulunmamaktadır. Bu nedenle literatürde yapılan çalışmalarda göz önüne alındığında (Thomas, 1989; Bowers, 1991; Langille, 1996; Bremer, 1997; Devaney, 1998; Hughes, 2003) fraktal boyutun sıklıkla bu çalışmada izlenen yola göre öğretiminin yapıldığı görülmektedir. Bu bağlamda hem bu çalışmada hem de literatürde yapılan çalışmalarda işlemsel öğrenmelerin olduğu görülse de bu tür bir yaklaşımın en azından öğrencilerde kesirli boyutların da olduğu yönünde bir algının oluşmasına katkı sağlayacağı söylenebilir. Bu araştırmadan elde edilen bulgular öğrencilerin yarıdan fazlasının (%57) Peano eğrisini boyutu ve bazı öğrencilerin (%38) ise Menger süngerinin boyutunu hatalı hesapladıklarını göstermektedir. Bunun en büyük nedeni öğrencilerin öz-benzer parça sayıları ile bunların büyüme oranlarını belirlemede zorlanmalarıdır. Öz-benzerlik konusunun öğrenciler tarafından öğrenilebilirliğine yönelik elde edilen bulgularda da öğrencilerin öz-benzer parçalar ile bunların büyüme oranlarını belirlemede zorlandıkları tespit edilmişti. Bu bağlamda öz-benzerlik konusunda yaşadıkları bu güçlük öğrencilerin boyut konusunda da zorlanmalarına neden olmaktadır. Benzer şekilde Bowers'da (1991) öğrencilerinin öz-benzerlik boyutunda büyüme oranlarını belirlemede güçlük yaşadıklarından dolayı boyutları hesaplayamadıklarını ifade etmektedir. Bowers (1991) bu durumun nedenini çalışmanın statik olan kağıt kalem üzerinde yapılmasına bağlamaktadır. Bilgisayar programlarının dinamik yapıları ve büyüme ve küçülmelere imkan vermeleri nedeniyle bu sorunun derslerde daha çok bilgisayar programının kullanılmasıyla giderilebileceğini ifade etmektedir. Öğrencilerin tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada zorlanmalarının bir diğer nedeni ise öz-benzerlik konusunda oluşturdukları öz-benzerlik tanımlarıdır. Öğrenciler verilen bir fraktalda öz-benzer parçaları belli bir tekrarlama adımında şekil içerisindeki benzer parçaları birbirleriyle karşılaştırarak belirlemektedirler. Bu tür bir yaklaşım ise Ö9 ve Ö38'de olduğu gibi öz-benzer parça sayısını hatalı bulmalarına neden olmaktadır. Bu nedenle öz-benzerlik konusundaki tanımların yeniden gözden geçirilmesi gerekmektedir.

Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin yarıya yakınının (%46) verilen ağacın boyutunu kutu sayma metodunu kullanarak doğru hesapladıkları belirlenmiştir. Bu bulgu tamamen öz-benzer fraktalların boyutunda olduğu gibi kutu sayma metodunun öğrenilmesinde de programın istenilen başarıya ulaşamadığını göstermektedir. Bunun yanında bazı öğrencilerin (%26) ağacın boyutunu hesaplarken hatalar yaptıkları ve bazılarının (%28) ise bu soruyu hiç yapmadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin sınav kağıdına verdikleri cevaplardan, klinik mülakatlardan ve ders sonu mülakatlardan elde edilen bulgular öğrencilerin kutu sayma metodunu kullanarak boyut hesaplamada boyutu hesaplayabildiklerini, ancak yaptıkları işlemlerin nedeni üzerinde çok fazla düşünmedikleri ve işlemsel diyebileceğimiz bir öğrenmeye sahip olduklarını göstermektedir. Bu bulgu Langille'nin (1996) bulgularıyla paralellik göstermektedir. Bowers (1991) öğrencilerdeki tek bir evrensel boyut olduğu sezgisinin ancak matematiksel bir boyut tanımının yapılmasıyla değişebileceğini ifade etmektedir. Bu araştırmada öğrencilere temelde Hausdorff-Besicovitch boyut tanımına dayanan üç boyut hesaplama yönteminin öğretimi yapılmıştır. Bu bağlamda öğrenciler ilk defa sezgisel olmayan matematiksel boyut tanımlarıyla karşılaşma imkanı elde etmişlerdir. Bu araştırmada fraktal boyut kavramıyla tanışan öğrencilerin çoğunluğunun fraktal boyutu şeklin karmaşıklığının ölçüsünü verdiği şeklinde bir anlama geliştirdikleri belirlenmiştir. Bu anlamanın oluşmasında uzunluk ölçme ve kutu sayma metotlarının etkili olduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda hazırlanan programın fraktal boyutların şeklin karmaşıklığını belirlediği yönünde bir algının oluşmasında etkili olduğu söylenebilir. Bowers (1991) öğrencilerden bir nesnenin şekline göre boyutunu tanımlamaları istendiğinde genellikle çelişki yaşadıklarını ifade etmektedir. Özellikle karmaşık şekilli nesnelerin boyutlarına karar vermede güçlük yaşadıklarını belirtmektedir. Benzer şekilde Devaney (1998) öğrencilerin bir doğrunun boyutunu 1 boyutlu olarak belirlemelerine karşın düzlemde ya da uzayda tanımlanan bir eğrinin boyutunu 2 ya da 3 olarak ifade ettiklerini belirtmektedir. Bu araştırmada da öğrencilere doğru, düzlem ve eğrilerin boyutlarının neler olabilecekleri sorulduğunda Devaney'in (1998) elde ettiği sonuçlara benzer bulgular tespit edilmiştir. Bu bağlamda fraktal boyutların özellikle Euclid şekilleri dışında ve karmaşık yapıya sahip nesnelerin boyutlarının tanımlanmasında öğrencilerin karşılaştığı çelişkilerin önlenmesinde faydalı olabileceği söylenebilir. Bu araştırmada ders sonu mülakata katılan birçok öğrencinin Euclid şekilleri ile fraktal geometri şekillerini karşılaştırdıklarında fraktalların boyutlarının kesirli olmasının onların şekillerinin düzgün olmamasından kaynaklandığını ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu bağlamda programın öğrencilerde bir fraktal boyut algısı oluşturmaları yönünde etkili olduğu söylenebilir. Bunun yanında bazı öğrencilerin fraktal boyutu verilen bir nesnenin görünüşünü tanımladıkları da tespit edilmiştir. Örneğin Ö16 öğrencisi boyutu 2,5 olan bir nesnenin görünüşünü eni, boyu ve yüksekliği olan, ancak onu 3 boyutlu bir nesneden ayıran özelliğin yüzeyinin girintili ve çıkıntılı olması şeklin tanımladığı belirlenmiştir. Yani Ö16 öğrencisi fraktal boyutun şeklin karmaşıklığını ölçtüğünü ifade etmektedir. Buna karşın Langille (1996) çalışmasında öğrencilerinin fraktal boyutu şeklin karmaşıklığının derecesi olarak tanımlayamadıklarını, ancak verilen iki kıyı şeridini boyut bağlamında doğru karşılaştırabildiklerini ifade etmektedir. Bunun yanında öğrencilerinin fraktal boyutu verilen şekillerin dış görünüşlerini tanımlamada zorlandıklarını ve nesneleri tanımlarken dış görünüşlerinin girintili ve çıkıntılı olduklarına odaklanmadıklarını, daha çok Euclid'e dayalı olan en, boy ve yüksekliğe yöneldiklerini belirtmektedir. Bu durum Langille'nin öğrencilerinin henüz fraktal boyutun ne anlama geldiğini tam olarak anlayamadıklarını göstermektedir. Bunun nedeni Langille'nin çalışmasında uzunluk ölçme metoduna yer vermesine karşın boyut hesaplamada çoğunlukla tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarına odaklanması olabilir. Çünkü bu araştırmada öğrencilerin özellikle uzunluk ölçme ve kutu sayma metotlarını öğrendikten sonra bu tür bir anlayış geliştirdikleri tespit edilmiştir. Benzer şekilde Hughes'de (2003) çalışmasında öğrencilerinin kesirli boyutları anlamakta ve onların şekillerini ifade etmekte zorlandıklarını belirtmektedir. Örneğin öğrencilerinin 2,6 boyutunun neyi ifade ettiğini ve nasıl bir şekil olduğunu tam olarak bilemediklerini ifade etmektedir. 2-boyutlu bir kağıdın katlanıp açıldığında boyutunun niçin 3 değil de 2,3 gibi bir değer olduğunu anlayamadıklarını ifade etmektedir. Bu durum Hughes'in de öğrencilerinin fraktal boyutun şeklin karmaşıklığını verdiğini tam olarak anlayamadığını göstermektedir.

Bu araştırmada ders sonu mülakata katılan bazı öğrencilerin fraktal boyutları inandırıcı bulmadıkları belirlenmiştir. Bu durumun nedenlerinden birinin bu öğrencilerin matematiksel olarak bu boyutların hesaplanabilirliğini görmelerine karşın sahip oldukları baskın Euclid düşüncesinin bu boyutlara inanmalarını güçleştirdiği söylenebilir. Bunun yanında fraktal boyutların yaklaşık değerler vermesi de inandırıcılıklarını azaltmaktadır. Hughes (2003) öğrencilerinin kutu sayma ya da uzunluk ölçme metotları sonucunda buldukları boyut değerlerinin gerçek bir değeri değil de yaklaşık bir değeri verdiğini düşündüklerinden bu boyutların çokta inandırıcı olmadıklarını ifade ettiklerini belirtmektedir. Bu çalışmada da bazı öğrencilerin özellikle kutu sayma metodunda eğimi hesaplarken yaklaşık değerin alınmasından dolayı asla gerçek boyut değerlerinin bulunamayacağını ve bu nedenle bu boyutların çok fazla inandırıcı gelmediğini ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu durum uzunluk ölçme ve kutu sayma metotlarının yaklaşık boyut değerleri vermelerinden dolayı fraktal boyutlara olan inandırıcılığı azalttığını göstermektedir.

Ders sonu mülakata katılan bir öğrencinin fraktal boyutlar ile fraktalların çevresi, alanı ve hacmindeki sıra dışılık arasında ilişki kurduğu ve daha önceden anlamsız gelen çevre-alan-hacim arasındaki bu ilişkinin fraktal boyutlarla anlam kazandığını ifade ettiği belirlenmiştir. Bu durum fraktalların çevresi, alanı ve hacminin hesaplanması konusunun fraktal boyut konusunun öğretiminin yapılmasından sonra verilmesinin faydalı olacağını göstermektedir. Bunun yanında programın bu tür bir ilişkinin kurulmasını sağladığını göstermektedir.

Kaos matematiksel olarak kurallı bir davranışa benzeyen bir şeyin rastgele davranması olarak tanımlanmaktadır (Cederberg, 2001). Bu araştırmada kaosun küçük bir örneği olarak oynanan kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşmasının öğrencileri oldukça etkilediği ve zihinlerinden birçok soru işaretinin de ortaya çıkmasına neden olduğu belirlenmiştir. Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre (Tablo 3.12) sadece iki öğrencinin kaos oyununda noktaların hareketini belirleyebilirken, bazı öğrencilerin (%28) noktaların hareketini belirlemede hata yaptıkları, büyük bir çoğunluğunun (%44) noktaların hareketini belirleyemediği ve bazılarının (%23) ise bu soruyu boş bıraktığı görülmektedir. Bu durum öğrencilerin kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunun anlaşılmasında temel olan noktaların hareketini anlamadıklarını göstermektedir. Bu bulgu öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlarda ve klinik mülakatlarda da belirlenmiştir. Bu bağlamda programın kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunun öğretiminde yetersiz olduğu söylenebilir. Literatürde yapılan birçok çalışmada da bu tür bir bulguya rastlanmaktadır (Langille, 1996; Devaney, 1998; Komorek vd., 2001). Bunun nedeni öğrencilerin ilk defa rastgele gibi görünen bir olay sonucunda çok mükemmel bir şeklin ortaya çıkmasını görmeleri olabilir. Çünkü oyun oynanırken öğrencilerin tamamının oyun sonunda ya rastgele dağınık noktalar yığını ya da bir üçgenin içinin tamamen noktalarla kaplandığı bir durumla karşılaşacaklarını tahmin ettikleri belirlenmiştir. Barton (1990) ve Devaney'de (1998) yaptıkları çalışmalarında öğrencilerinin kaos oyunu sonucunda ya düzensiz noktalar yığınıyla ya da tam bir üçgenle karşılaşacaklarını tahmin ettiklerini belirtmekte, ancak oyun sonunda Sierpinski üçgeni oluşunca çok şaşırdıklarını ve bunun nedenini sorguladıklarını ifade etmektedirler. Ayrıca derste izlenen yöntem ve kullanılan bilgisayar programlarının yetersizliği de oyun sonunda niçin Sierpinski üçgenin oluştuğunun anlaşılmasını güçleştirebilir. Derste kaos oyunu başlangıçta kağıt kalem kullanılarak oynatılmıştır. Bunun nedeni öğrencilerin oyunda noktaların nasıl hareket ettiklerini görmelerini sağlamaktır. Barton (1990) ve Devaney'in (2004) de kaos oyununun başlangıçta kağıt kalem kullanılarak oynanmasının oyunun temel fikrinin öğrenciler tarafından daha anlamlı olarak anlaşılabileceğine yardımcı olacağını ifade ettikleri belirlenmiştir. Daha sonra derste web siteleri aracılığıyla kaos oyunu oynatılmıştır. Web sitelerinde yer alan Java appletler kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşumunu adım adım göstermelerine karşın appletlere öğrencilerin çok fazla müdahalede bulunamamaları oyun sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluştuğunu anlamamalarının nedeni olabilir. Java appletlerde öğrencilerin çoğunlukla oluşan şekilleri gözlemlediklerini ifade ettikleri belirlenmiştir. Yani öğrenciler kullandıkları programa müdahalede bulunma ve farklı durumlar için oluşacak yapıları inceleme şansını çok fazla elde edememişlerdir. Bu durum sınavda sorulan soruda öğrencilerden Sierpinski üçgeni içerisinde verilen noktaların gelen zar sayılarına göre konumlarındaki değişimleri belirlemeleri istendiğinde öğrencilerin sıklıkla gelen zar sayılarıyla Sierpinski üçgenindeki farklı küçük üçgenler arasında bir ilişki kuramadıkları ve yaklaşık olarak noktaların yerlerini belirlemeye çalışmalarından da görülmektedir. Bu ise öğrencilerin kaos oyununda noktaların ne tür bir kural takip ettiğini yani kaos oyununda Sierpinski üçgeninin çekici bir üçgen olduğunu anlayamadıklarını göstermektedir. Ayrıca farklı noktalara ve farklı kurallara göre oyun oynandığında ne tür şekillerin oluşacağını görmek öğrencilerin kaos oyununu daha iyi anlamalarına yardımcı olabilir. Bu nedenle öğrencilerin oyunu kendilerinin tasarlamasına imkan veren yazılımların ya da farklı durumlar için Kaos oyunu sonucu oluşan yapıları incelemelerini sağlayan programların kullanılması oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlamlarına yardımcı olabilir. Buna karşın birkaç öğrencinin (%5) kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşmasında gelen zar sayıları ile Sierpinski üçgenindeki küçük üçgenler arasında doğru bir ilişki kurduğu tespit edilmiştir. Bu durum bazı öğrencilerin zaman ilerledikçe ve oyunla daha fazla uğraşma imkanı edindikçe kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu anlamaya başladıklarını göstermektedir. Ayrıca bazı öğrencilerin kaos oyununun rastgele bir süreç olmadığı ve kurallı olduğu şeklinde bir anlamaya sahip oldukları belirlenmiştir. Bu öğrencilerin oyunun kuralı ile Sierpinski üçgeninin oluşum kurallarının benzemesi nedeniyle kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluştuğu şeklinde bir anlama geliştirdikleri görülmektedir. Komorek vd. (2001) öğrencilerine elektrolizle çinko dallanmalarının kaos oyununa benzer şekilde rastgele bir süreç içerisinde oluştuklarını göstermektedir. Kaos oyunundaki gibi öğrencilerin başlangıçta olayın rastgele olduğunu ve düzenli şekillerin ortaya çıkamayacağını düşündükleri, ancak oyun sonunda düzgün dallanma yapılarını görünce çok şaşırdıklarını ifade etmektedir. Komorek vd. (2001) tıpkı kaos oyununda olduğu gibi öğrencilerinin deney sonundaki şekillerin oluşumunu anlamakta zorlandıklarını belirtmektedir. Bu araştırmadan elde edilen bulgulara paralel şekilde Komorek vd. (2001) de çalışmasında bazı öğrencilerin olayın rastgele gerçekleşmediğini ve kurallı olması nedeniyle bu tür bir şeklin ortaya çıktığını ifade ettikleri belirtilmektedir. Çünkü bu öğrencilere göre fizikte rastgele olayların yeri olmadığı şeklinde bir inançlarının olduğu ifade edilmektedir. Onlara göre aynı yapı sürekli sürekli tekrarlandığından bu tür bir dallanma oluşmaktadır. Öğrencilerin matematiğin doğasına yönelik inançlarını inceleyen birçok çalışmada Euclid geometrisinin katı yapısına bağlı olarak matematiği değişmez, katı ve tutarlı bilgiler bütünü olarak gördükleri belirlenmiştir (Schoenfeld, 1988; Frank, 1988; Garofalo, 1989; Fleener, 1996). Bu bağlamda bu araştırmaya katılan öğrencilerin de sadece tek bir geometri olarak Euclid geometrisiyle tanışmış olmalarından ve temel matematik bilgilerinin Euclid geometrisine dayanmasından dolayı bu tür bir inanca sahip olmaları olasıdır. Bu durum bu araştırmaya katılan öğrencilerin rastgele bir olay sonucunda kurallı ve mükemmel bir şeklin olamayacağı ve mutlaka bir kuralın olması şeklinde bir anlayış geliştirmelerine neden olabilir. Bu anlayışların bazı öğrencilerin hatalı anlamalar oluşturmasına neden olduğu belirlenmiştir. Bu öğrencilerin zar atılması ya da para atılmasının kurallı olması durumunda oluşan noktaların bir kural dahilinde hareket etmesi nedeniyle kaos oyunu sonucu oluşan her yapının mutlaka bir fraktal olacağı yönünde hatalı bir anlama geliştirdikleri tespit edilmiştir.

Bu araştırmada sadece kaos oyunu öğrencilere tanıtılmış, ancak kaotik olay örneklerine yer verilememiştir. Hazırlanan programda kaotik olay örneklerinden nüfus artışı modeline göre bir çalışma yaprağı tasarlanmış, ancak zaman yetersizliğinden dolayı uygulama fırsatı olmamıştır. Iovinelli (2000) nüfus artışı modelinin öğrencilerin kaotik olayı anlamalarında etkili olduğunu ifade etmektedir. Nüfus artışı modeli gibi etkinliklerin matematiksel olarak kaosu tanımlamamasına karşın, günlük hayattan örnekler vererek matematiğin bu yeni alanında öğrencilerin küçük değişikliklerin nasıl farklı ve büyük değişikliklerin oluşmasını sağladığını görmelerine yardımcı olacağı belirtilmektedir. Aynı zamanda bu tür etkinliklerin öğrencilerin kaotik olayı tanımalarına ve ne tür örnekler üzerinde kaotik olayların olduğunu tartışmalarına yardımcı olacağı da ifade edilmektedir.

4.2. Hazırlanan Fraktal Geometri Öğretim Programının İçeriğinin Tartışılması

Bir öğretim programının içerik boyutundan belirlenen amaçlara ulaşması için “Ne öğretelim?” sorusuna cevap vermek önemlidir (Demirel, 2004; Baki, 2008). Bu çalışmada ortaöğretim düzeyi için tasarlanan bir fraktal geometri öğretim programıyla öğrencilerin fraktalların temel özelliklerini öğrenmelerine yönelik bir içerik hazırlanmıştır. İçeriğin oluşturulmasında hem ortaöğretim matematik ve geometri öğretim programları hem de literatürde fraktal konularının öğretimine yönelik yapılan çalışmalar göz önüne alınmıştır.

Hem dersin öğretmeni hem de öğrencilerle yapılan ders sonu mülakatlar program süresince yürütülen etkinliklerin çoğunun öğrencilerin ilgisini çektiğini ve amaçlarına ulaştığını göstermektedir. Ayrıca bilgisayar programları ve somut materyaller kullanılarak gerçekleştirilen etkinliklerin ve sonsuz çevreye sıfır alan, Mandelbrot ve Julia kümelerinin şekilleri, fraktal boyut ve kaos gibi yeni konuların öğrencileri etkilediği, ilgilerini çektiği ve motivasyonlarını artırdığı da görülmüştür. Bu bulgular hazırlanan içeriğin öğrencileri derse karşı olumlu motive ettiğini, ilgilerini çektiğini ve yeni bilgileri kazanmalarını sağladığını göstermektedir. Bu bağlamda programın ilgi çekicilik ölçütünü sağladığı ve öğrencilere yeni bilgiler kazandırmada yeterli olduğu söylenebilir. Bunun yanında fraktalların doğasından kaynaklanan özellikleri de öğrencilerin bu konuya karşı ilgi göstermelerinin bir diğer nedenidir. Langille (1996) fraktalların öğrencilerin matematiğe olan ilgilerini çekmede ve motivasyonlarını artırmada kullanılabileceğini ifade etmektedir. Lornell ve Westerberg (1999) fraktal geometrinin geleneksel matematik öğretim programlarının tıpkı dinamik geometri yazılımlarında olduğu gibi hareketlendirilmesinde ve canlandırılmasında kullanılabileceğini belirtmektedir. Özellikle alan, çevre ve hacim hesaplamalarında fraktallara yer verilmesinin geleneksel müfredatları hareketlendireceği ifade edilmektedir. Bedford (1998) ise fraktal geometri ile kaos teorinin kendi içsel özelliklerinden dolayı öğrencilerin ilgisini çektiğini ve derse olan motivasyonlarını artırdığını belirtmektedir. McKee (1996) fraktallarla çalışmanın öğrencilere eğlenceli geldiğini ve matematiğin soğuk ve zor bir ders olduğu yönündeki algılarını değiştirdiğini ifade etmektedir.

Tasarlanan program ortaöğretim düzeyine yönelik hazırlandığından öncelikle bu düzeydeki öğrencilerin fraktal konularını öğrenecek yeterli ön bilgilere sahip olmaları gerekmektedir. Literatürde fraktal geometri konularının 2-12. sınıf seviyeleri arasında öğretiminin gerçekleştirilebileceği ifade edilmektedir (Vacc, 1999). Ancak fraktalların öğretimine yönelik hazırlanan etkinlik ve çalışma yapraklarının daha çok 7-12. sınıf seviyesine uygun olduğu belirlenmiştir(Goldenberg, 1991). Vacc (1999) fraktalların 2. sınıftan itibaren öğretiminin yapılabileceğini ve erken yaşlarda bu konunun öğretiminin öğrencilerde fraktal algısının oluşmasında daha etkili olacağını belirtmektedir. Goldenberg (1991) ise 7-12. sınıf seviyelerinde fraktalların öğretiminin yapılması gerektiğini ifade etmektedir. Goldenberg (1991) bunun nedeni olarak öğrencilerin fraktal geometri konularını öğrenmeleri için ölçüm yapabilme, fonksiyonlar ve örüntü kavramları hakkında ön bilgilerinin olması gerektiğini belirtmektedir. Ayrıca Goldenberg (1991) limit, seriler, uzunluk, alan, boyut, uzay ve olasılık gibi birçok konunun fraktal geometriyle yakın ilişkilerinin olduğunu ve bu nedenle öğrencilerin bu konular hakkında ön bilgilerinin olmasının fraktalların öğretimini kolaylaştıracağını ifade etmektedir. Bir nesnenin kesirli bir boyuta sahip olduğu fikri birçok kişi için çok sıra dışı bir durumdur. Bunun yanında bir nesnenin alanının sıfıra giderken çevresinin sonsuza gitmesi de hiç alışık olmayan bir durumdur. Goldenberg (1991) bu tür paradoks durumların öğrencilerde çelişkiler oluşturacağına ve onların matematiksel bilgilerini yeniden ele almalarına neden olacağını ifade etmektedir. Bu bağlamda öğrencilerin ders sonu mülakatlarına verdikleri cevaplardan hazırlanan programın içeriğinin öğrencilerin merakını uyandıracak ve araştırmaya sevk edecek nitelikte olduğu söylenebilir. Ancak çevre-alan-hacim ve fraktal boyut konularının öğretimine yönelik hazırlanan içerikteki bazı etkinliklerin öğrencilerin seviyelerinin üzerinde olduğu düşünülmektedir. Çünkü fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplarken öğrencilerin çıkarılan nokta sayısı ve geride kalan nokta sayısını anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Dersin öğretmeni de bu sıra dışı durumu açıklamak için sayılabilir ve sayılamayan kümeleri kullanmaya çalışmasına karşın öğrencilerinin bu konu hakkında yeterli ön bilgileri bulunmamaktadır. Çevre-alan ve hacim arasındaki bu sıra dışı durum fraktalların boyutlarıyla ilgilidir. Bu nedenle öğrencilerin çevre-alan ve hacim arasındaki bu sıra dışı ilişkilerin onların boyutlarından kaynaklandığını anlamalarına yardımcı olması amacıyla bu konunun fraktal boyuttan sonra verilmesinin daha yararlı olabileceği düşünülmektedir.

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun fraktal boyutları hesaplamalarına karşın bu boyutları hesaplarken neyi niçin yaptıklarının çok fazla farkında olmadıkları belirlenmiştir. Bu durum bu öğrencilerin daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Yani programda fraktal boyutların öğretimine yönelik hazırlanan içerik işlemsel öğrenmelerin gerçekleşmesini sağlamaktadır. Fraktal boyut tanımı esasen Hausdorff-Besicovitch tarafından tanımlanan boyut tanımına dayanmaktadır. Bu boyut temellerini ölçü teorisinden alır ki üniversite birinci sınıf öğrencilerinin bu konuda yeterli ön bilgileri bulunmamaktadır. Bu çalışmada bu nedenle bu tür bir boyut tanımından kaçınılmış ve literatürde yapılan çalışmalar temel alınarak özel birkaç örnek üzerinden fraktal boyut tanımlanmıştır. Ancak bu tür bir yaklaşım dersin öğretmeninin de vurguladığı gibi formal bir genellemeye ulaşmayı güçleştirmektedir. Buna karşın en azından içeriğin öğrencilerin kesirli boyutların varlığı ve bu boyutların nasıl hesaplandığı şeklinde bir algının oluşturulmasında etkili olduğu söylenebilir. Çünkü çalışma sonunda öğrencilerin çoğunluğunun fraktal boyutu şeklin karmaşıklığının ölçüsünü verdiği şeklinde bir anlama geliştirdikleri belirlenmiştir. Bunun yanında öz-benzerlik boyutunun hesaplanmasında öğrencilerin öz-benzer parça sayıları ile büyüme oranını belirlemede oldukça zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu durum içeriğin bu konunun öğretiminde yetersiz olduğunu göstermektedir. Bunun bir nedeni öz-benzerlik tanımının sadece sözel olarak verilmesi ve matematiksel bir öz-benzerlik tanımının yapılmamasıdır. Bannon (1991) çalışmasında öz-benzerliğin belirlenmesinde nesnenin herhangi bir parçasının nesnenin bütününe benzediği tanımının yetersiz olduğunu ifade etmektedir. Çünkü bu tür bir tanımlama yapıldığında verilen nesnenin her bir kopyasının ne kadar küçük olarak belirtilmediğini ifade etmektedir. Bu nedenle dönüşüm kavramı kullanılarak matematiksel olarak öz-benzerlik tanımının kullanılmasını önermektedir. Bu çalışmada öz-benzerlik konusunun öğretiminde matematiksel bir tanıma yer verilmemiş, ancak öğretim süreci sonunda öğrencilerin kendi tanımlarını oluşturmaları beklenmiştir. Öğrencilere doğrudan bir tanım verilmemesinin nedeni çalışmaya katılan öğrencilerin dönüşümler konusunda ön bilgilerinin olmamasıdır. Ülkemizde 2005 yılında öğretim programlarında yapılan reform hareketleri kapsamında ilköğretim matematik öğretim programına dönüşümler konusu girmesine karşın ortaöğretim geometri öğretim programında bu konu ancak 2010-2011 eğitim öğretim yılında yer almıştır. Bu nedenle çalışmaya katılan üniversite birinci sınıf öğrencilerinin dönüşümler konusunda bir ön bilgileri bulunmamaktadır.

Öğrencilerin ders sonu mülakatlara, klinik mülakatlara ve yazılı sınava verdikleri yanıtlar geometrik tekrarlamaları kullanarak fraktal şekilleri oluşturmadaki başarıları somut materyaller ve çizme-boyama etkinliklerinin fraktalların şekillerinin çizilmesinde etkili olduğunu göstermektedir. Bu tür kağıt kalem etkinliklerinin üretici ve başlangıç kavramlarının daha iyi öğrenilmesini sağladığı ve fraktal şeklin oluşumunu adım adım görmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Coes III’de (1993) manipulatif etkinliklerin öğrencilerin fraktalların oluşum adımlarını görmelerinde etkili olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde McKee (1996) ve Simmt ve Davis (1998) ise fraktal şekilleri oluşturmada somut modeller ve çizme katlama etkinliklerinin bu şekillerin oluşumlarını anlamayı artırdığını ifade etmektedir. Bunun yanında Gluchoff (2006) sadece bilgisayar etkinlikleriyle fraktalları oluşturmanın öğrencilerin şekillerin nasıl oluştuğunu anlamlarını güçleştirdiğini belirtmektedir. Bu bağlamda geometrik tekrarlamalar konusunda içerikte yer verilen çizme-boyama etkinlikleri ile somut materyallerin etkili olduğu söylenebilir. Ayrıca Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretiminde kullanılan Excel programının öğrencilerin kaçak, mahkûm ya da periyodik nokta kavramlarını öğrenmelerinde etkili olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanında fraqtive programının Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkinin fark edilmesinde ve bu kümelerin öz-benzer parçalarının incelenmesinde etkili olduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda içerikte yer verilen Excel ve fraqtive programlarının kaçak, mahkum ya da periyodik nokta kavramlarıyla Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğrenilmesinde etkili olduğu söylenebilir. Thomas (1989) ve Thomas ve Thomas (2002) çalışmalarında fraktal geometri konularının öğretiminde bilgisayar programlarının kullanılmasının etkili olduğunu ifade etmektedirler. Özellikle oluşturulan algoritmalarda açıların ve dönmelerin daha rahat anlaşılabileceğini belirtilmektedirler. Bu bağlamda fraktalların tekrarlamalarla oluşturulmasında oluşum adımlarının anlaşılmasına yardımcı olmak için kağıt kalem etkinliklerini içeren çalışmalara yer verilmesinin yanında oluşacak şeklin daha doğru ve gerçekçi halini görmek ve farklı açı ya da başlangıç şekillerine göre oluşan şekilleri anında belirleyebilmek için bilgisayar destekli etkinliklere de yer verilmelidir. Buna karşın tasarlanan fraktal geometri öğretim programının içeriğinde Logo ve Cabri gibi öğrencilerin kendilerinin fraktal şekilleri oluşturmalarını ve bunların özelliklerini incelemelerini sağlayan yazılımlara yer verilmemiştir. Bunun nedeni öğrencilerin bu yazılımlar hakkında bir ön bilgilerinin olmamasıdır. Tasarlanan programın uygulama süresinin sınırlı olması da öğrencilere bu yazılımlar hakkında bilgiler verilmesini engellemiştir. Bu nedenle programın içeriğinde çok fazla yazılım bilgisi içermeyen hazır programlara, öğretim amaçlı web sitelerine, çizme-boyama şeklindeki kağıt kalem etkinliklerine ve somut materyallere yer verilmiştir. Ancak bu durum bazı öğrencilerin fraktal şekilleri görselleştirmelerinde zorlanmalarına ve Mandelbrot ve Julia kümleri ile kaos oyununu sonucu oluşan şekillerin nasıl oluştuklarını tam olarak anlamamalarına neden olmuştur. Thomas ve Thomas (2002) Geometer's Skecthpad gibi yazılımların hem öğrencilerin fraktal şekilleri kendilerinin çizmelerine yardımcı olduğunu hem de fraktalların sonsuzdaki şekillerinin daha gerçekçi olarak görselleştirilmelerine imkan verdiklerini ifade etmektedir. Bu bağlamda bu programın içeriğinde manipulatif etkinliklere yeterince yer verilmesine karşın öğrencilerin kendi fraktallarını oluşturacakları bilgisayar destekli etkinliklere yeterince yer verilmediği söylenebilir.

Dersin öğretmen fraktal geometrinin doğası gereği Euclid geometrisini ve matematiğin diğer konularını reddetmediğini ve onlarla sürekli bir etkileşim içerisinde olduğunu ifade etmektedir. Bu bağlamda fraktal geometrinin kullandığı matematik öğrencilere çok farklı gelmemektedir. Bu ise öğrencilerin mevcut ön bilgileri ile fraktal geometri arasında kolay ilişkiler kurmalarını sağlamaktadır. Ancak dersin öğretmeni programın içeriğinde fraktalların günlük hayatla ilişkilerini yansıtacak etkinliklere daha fazla yer verilmesinin öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini artıracağını belirtmektedir. Özellikle fraktal boyut, Mandelbrot ve Julia kümeleri gibi ünitelerde fraktalların diğer disiplinlerle olan ilişkilerine ve bu disiplinlerde kullanım alanlarına daha fazla yer verilmesi gerektiğini belirtmektedir. Benzer şekilde Ö21 gibi birkaç öğrencinin de fraktalları niçin öğrendiklerini ve günlük hayattaki kullanım şekillerini merak ettikleri belirlenmiştir. Bu durum programın içeriğinin fraktalların kullanım alanlarını göstermede istenilen başarıyı tam olarak sağlayamadığını göstermektedir. Ders ortamında kullanılan slaytlarda ve çalışma yapraklarında fraktalların günlük hayattaki kullanım şekillerine yer verilmesine karşın, bazı öğrencilerin fraktalları niçin öğrendikleri sorusuna cevap bulamamaları içeriğe bu konuların daha fazla vurgulanarak eklenmesi gerektiğini göstermektedir.

4.3. Programın Öğretim Süreci Açısından Tartışılması

Bir öğretim programının belirlenen içeriğini “Nasıl öğretelim” sorusuna verilen cevap programın öğretim sürecini oluşturmaktadır (Baki, 2008). Programda içeriğin öğretimine ayrılan zaman dilimi, içeriğin öğretilmesinde kullanılacak her türlü etkinlik bu kısımda yer alır. Bu etkinliklerin nasıl planlanacağı, uygulama sırasında hangi yöntemlerin kullanılacağı ve hangi öğretim ilkelerine uyulması gerektiği bu kısımda açıklanır (Baki, 2008). Kısacası öğrencilere istenilen davranışların kazandırılmasını sağlayan öğrenme yaşantılarının düzenlenmesi bu aşamada ele alınmaktadır (Demirel, 2004).

Bu çalışmada genel olarak ortaöğretim matematik öğretim programında da vurgulandığı gibi öğrenciyi merkeze alan ve öğrencinin aktif katılımını sağlayan yapılandırmacı bir öğrenme yaklaşımı temel alınmıştır. Hazırlanan çalışma yapraklarında ve etkinliklerde doğrudan öğrenciye bilgiler vermek yerine onun bu bilgileri oluşturması için ortamlar hazırlanmıştır. Öğretmen ve öğrencilerin ders sonu mülakatlarına verdikleri yanıtlar sıklıkla derste grup çalışmasının kullanıldığını göstermektedir. Çalışmada öğrenciler 2-3’erli gruplara ayrılmış ve ders öncelikle grup içerisinde verilen çalışma yaprağının tamamlanması ve daha sonra da sınıf tartışmasıyla elde edilen sonuçların genelleştirilmesi şeklinde yürütülmüştür. Geleneksel matematik öğretimi bilginin öğrenciye doğrudan aktarılmasıyla yapılmaktadır. Bu tür öğretim yaklaşımında öğrenilen bilginin öğrenme sürecinden bağımsız olduğu kabul edilir. Bu nedenle, matematik öğretiminde öğrencilere, yaptıkları ulaştıkları bilgileri açıklamaları ve akranlarıyla paylaşmaları için fırsat verilir (Baki, 2008). Bu bağlamda hazırlanan fraktal geometri programının sınıf içi uygulamasının öğrencilere kendi kavramları hakkında konuşma, kendi stratejilerini kurma, varsayımda bulunma ve matematiksel bilgilerini tartışma imkânını verdiği söylenebilir. Hazırlanan bu ortamda ise öğretmenin rolünün bilgiyi doğrudan aktarmak yerine öğrencileri yönlendiren ve bir orkestra şefi gibi tartışmaları yöneten konumunda olduğu yapılan ders sonu mülakatlardan anlaşılmaktadır. Ancak fraktal boyut konusunun öğretiminde öğretmenin öğrenci merkezli yaklaşımdan ziyade öğretmen merkezli bir yaklaşımı izlediği ders sonu mülakatlarda verdiği cevaplardan anlaşılmaktadır. Benzer şekilde Langille (1996) de fraktal boyutların öğretiminde öğrencilerinin çok fazla zorlanması nedeniyle daha çok geleneksel bir öğretim yaklaşımı benimsediğini ve doğrudan tanım ve açıklamalarda bulunduğunu ifade etmektedir. Bu durum fraktal boyutların öğretiminde öğretmenlerin daha çok geleneksel öğretim yaklaşımını temel aldığını göstermektedir.

Dersin öğretmeninin programın uygulama sürecinde bazı çalışma yapraklarında çalışma yapraklarının dersi formelleştirmesinden dolayı değişiklikler yaptığını ifade etmektedir. Örneğin öğretmenin başlangıç, üretici ve yörünge kavramlarının öğretiminde kullanılan çalışma yapraklarının dersi formelleştirdiği ve öğrenci merkezli bir yaklaşımdan uzaklaştırdığını ifade ettiği belirlenmiştir. Bu nedenle bu etkinliklerin öğrencilerin bu tanımları kendilerinin oluşturmalarına yönelik yeniden düzenlenmesinin daha etkili olacağını ve kalıcılığı artıracağını ifade ettiği tespit edilmiştir. Bu amaçla öncelikle farklı tekrarlamalara göre öğrencilerin örüntüler belirleyip bunları çizmelerinin sağlanmasını ve daha sonra da yaptıkları bu etkinlikler üzerine tartışılmasını önermektedir. Bunun yanında Sierpinski üçgenini oluştururken doğrudan tekrarlama kuralını vermek yerine adım adım şekli oluşturmanın ve her adımda yapılan işlemlerin tartışılmasının daha yararlı olacağını ifade etmektedir. Yapılandırmacı felsefeye göre birey bilgiyi bizzat aktif olarak kendisi oluşturur. Bu yaklaşıma göre, bilgi bireyden bağımsız değildir ve birinden bir başkasına doğrudan aktarılamaz (Baki, 2008). Bu bağlamda üretici ve yörünge kavramlarının öğretimine yönelik hazırlanan çalışma yapraklarının geleneksel yaklaşımı benimsediği söylenebilir. Bunun yanında Halis öğretmen çalışma yapraklarında verilen tabloların öğrencilerin fraktal yapılardaki örüntüleri bulmalarına ve genelleştirmelerine yardımcı olduğunu ifade ettiği de belirlenmiştir. Benzer şekilde dersin öğretmeni Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretiminde de çalışma yaprağı-8'in ilk bölümünün formel bir yapıda olduğunu ve öğrenciyi sınırlandırdığını ifade etmektedir. Öğretmen mahkum noktaların c-parametrelerine göre aynı periyotlu olduğunun belirlenmesinde sadece çalışma yaprağında verilen değerlere odaklanılarak bir sonuca varmanın yeterli olmadığını, öğrencilerin kendilerinin belirleyecekleri c-sabitlerine ve mahkum noktalara göre de bu ilişkinin her zaman sağlandığını görmelerinin etkili olacağını ifade etmektedir. Bu bağlamda çalışma yaprağına öğrencilerin kendilerinin belirleyeceği noktalara göre sonucu test edebilecekleri bölümlerin eklenmesinin yararlı olacağını dile getirmektedir. Buna karşın öğretmenin ders sonu mülakatlarından fraktalların öğretimi için hazırlanan slaytların öğretimi olumlu etkilediği belirlenmiştir. Pilot çalışmada da öğretim sürecinde slaytların kullanılmasının öğrencilerin fraktalları daha rahat anlamalarına katkı sağladığı belirlenmiştir. Öğretmenin ders sonu mülakatlarından slaytların dersin başında öğrencileri derse karşı motive etmede ve sınıf içi tartışmalarda tartışmanın odak noktalarını belirlemede etkili olduğu söylenebilir. Bunun yanında slaytların Mandelbrot ve Julia kümeleriyle fraktal boyut tanımlarının oluşturulmasında ve öz-benzer nesnelerin parça bütün ilişkilerinin gösterilmesinde kullanışlı olduğu söylenebilir. Örneğin öğretmen öz-benzerlik kavramına girişte kullanılan slaytta Euclid şekillerinden öz-benzer olanlar ile olmayanlar üzerine yapılan sınıf içi tartışmanın bu kavrama yönelik öğrencilerin sezgisel bir anlama oluşturmalarına yardımcı olduğunu ifade etmektedir.

Fraktal geometri öğretim programının belirlenen uygulama süresinde bazı etkinliklerinin tamamlanamadığı ya da hiç yapılamadığı belirlenmiştir. Bu durum programın içeriğinin uygulanmasının tahmin edilen süreden daha fazla zaman aldığını göstermektedir. İlk hafta fraktal geometriye giriş ve geometrik tekrarlamalar konularının öğretiminin belirlenen sürede tamamlandığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda bu konuların öğretimi için içerikte verilen süre yeterlidir. 2. haftada ise fraktalların çevresi, alanı ve hacmi konusunda hazırlanan etkinliklerin beklenenden daha uzun sürede tamamlandığı tespit edilmiştir. Bu durum içerikte yer verilen sürenin fraktalların çevresi, alanı ve hacmi konusunun öğretimi için biraz daha artırılmasını gerektirmektedir. 3. hafta da ise Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretimi gerçekleştirilmiştir. Programda bu konunun 3 ders saati içerisinde tamamlanması tasarlanmıştır. Ancak bir önceki haftadan tamamlanmamış bir konuya bu hafta devam edilmesi ve bilgisayar etkinliklerinin beklenenden daha fazla zaman alması bir çalışma yaprağının tamamlanamamasına neden olmuştur. 4. hafta öz-benzerlik konusunun öğretimi yapılmış ve programda belirlenen sürede bu konunun öğretimi gerçekleştirilmiştir. 5. hafta da ise fraktal boyut konusunun öğretimi yapılmıştır. 3 ders saatinde tamamen öz-benzer fraktalların boyutu, uzunluk ölçerek boyut hesaplama ve kutu sayma metotlarının öğretiminin yapılması planlanmıştır. Ancak kesirli boyut kavramıyla ilk defa öğrencilerin tanışmaları ve hassas ölçümler yapmaları sadece ilk iki konunun bu hafta içerisinde tamamlanmasını sağlamıştır. Son hafta da ise bir önceki hafta tamamlanamayan kutu sayma metodu ve kaos oyunu konularının öğretimi gerçekleştirilmiştir. Ancak kaos oyunundaki çalışma yaprağı tamamlanamamış ve kaotik olaya yönelik hazırlanan nüfus artışı etkinliği yapılamamıştır. Bu bağlamda programın içeriğinde belirlenen sürenin programın uygulama sürecinde yeterli olmadığı söylenebilir.

5. SONUÇLAR

Bu araştırmada, ortaöğretim düzeyi için tasarlanan bir fraktal geometri öğretim programının öğrenilebilirlik ve öğretilebilirlik kapsamında yeterliğinin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Programın uygulama sürecinde ve sonunda öğrenci ürünlerinden ve öğretmenin programa yönelik görüşlerinden elde edilen nitel bulgular araştırmanın alt problemleri çerçevesinde yorumlanarak tartışıldıktan sonra ulaşılan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

5.1. Öğrencilerin Fraktal Geometri Öğretim Programının Kazanımlarına Ulaşmalarıyla İlgili Sonuçlar

Bu alt başlık altında fraktal geometri programının öğrencilerde ne tür fraktal anlamaları oluşturduğu, fraktalları belirlerken nelere dikkat ettikleri, programın kazanımlarını ne ölçüde kazandıkları, programın uygulanması sürecinde ve sonunda ne tür öğrenmeler ve anlamalar geliştirdikleri konuları ele alınmıştır. Bu kapsamda araştırmadan elde edilen sonuçlar aşağıda sunulmuştur:

- Hazırlanan fraktal geometri programı öğrencilerde bir fraktal kavramının oluşturulmasında etkili olmuştur.

Bu araştırmada öğrencilerden doğrudan bir fraktal tanımı vermek yerine süreç içerisinde kendi tanımlarını kendilerinin oluşturmaları beklenmiştir. Bu bağlamda programda açıkça belirtilmese de hazırlanan fraktal programının örtük amaçlarından birisi de öğrencilerin kendi fraktal tanımlarını oluşturmalarıdır. Araştırmadan elde edilen bulgular hazırlanan fraktal geometri programının öğrencilerin kendi fraktal tanımlarını oluşturmalarında ve verilen şekillerden fraktal olanları belirlemelerinde etkili olduklarını göstermektedir.

- Öğrencilerin verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına karar vermede en çok tekrarlama ve öz-benzerlik özelliklerini kullandıkları belirlenmiştir.

Bu sonuç programda yer alan tekrarlama ve öz-benzerlik konularının fraktalların tanımlanmasında ve belirlenmesinde etkili olduklarını göstermektedir.

- Hazırlanan fraktal geometri programı bazı öğrencilerin verilen şekillerin fraktal olup olmadığına doğru karar vermelerini sağlamasına karşın bunun nedenlerini açıklayamadıkları belirlenmiştir.

Bu sonuç bazı öğrencilerin verilen nesneleri doğru olarak fraktal ya da fraktal değildir şeklinde sınıflandırmalarına karşın bunların nedenlerini açıklayamamaları fraktallara yönelik daha çok sezgisel bir anlayış geliştirdiklerini göstermektedir.

- Hazırlanan program geometrik tekrarlamaları kullanarak fraktalların sonlu adımdaki şekillerinin çizilmesinde yeterlidir.

Bu sonuç aynı zamanda öğrencilerin fraktal geometri de tekrarlama kavramını anladıklarını göstermektedir. Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğunun verilen üreticiye göre başarılı fraktal şekilleri çizdikleri belirlenmiştir. Birkaç öğrencinin fraktal şekilleri çizmede hata yaptıkları belirlenmiştir ki bu durum daha çok öğrencilerin kendilerinden kaynaklanmaktadır.

- Hazırlanan program öğrencilerin fraktal şekiller içerisindeki örüntüleri bulmada ve bu örüntüleri cebirsel bir kuralla ifade etmede yeterlidir.

Öğrencilerin fraktal yapılar içerisinde oluşan kenar sayısı ya da oluşan üçgen sayısı gibi basit örüntüleri kolayca buldukları ve cebirsel kurallarla ifade ettikleri saptanmıştır. Buna karşın bazı öğrencilerin bu örüntüleri bulurken hata yaptıkları belirlenmiştir. Bunun bir nedeni öz-benzerlik konusunda öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranını belirlemedeki yetersizlikleridir. Diğer bir nedeni ise öğrencilerin kendilerine ait olan ve literatürdeki çalışmalarda da belirtilen örüntü bulmaya yönelik yaşadıkları güçlüklerdir.

- Fraktalların çevresi, alanı ve hacminin hesaplanmasında programın istenilen başarıyı sağlayamadığı sonucu elde edilmiştir.

Bunun nedeni öğrencilerin örüntü bulmada yaşadıkları güçlükler ve geometrik seriler konusundaki ön bilgilerindeki eksikliklerdir. Fraktalların çevresi, alanı ve hacmi hesaplanırken oluşan parça sayısı, kenar uzunlukları, yüzey sayıları ve alanları gibi birçok etken çevre, alan ve hacmin hesaplanmasına yönelik bir örüntünün kurulmasında kullanılmaktadır. Öğrencilerin bu örüntüleri kurmada yaşadıkları problemler çevre, alan ve hacim hesaplamadaki başarıyı düşürmektedir. Bunun yanında öğrencilerin geometrik dizi ve serilerin toplamı, yakınsaklık ve ıraksaklık konularındaki ön bilgi eksiklikleri ve yanlış anlamaları çevre, alan ve hacmin hesaplanamamasındaki bir diğer etkendir.

- Öğrenciler fraktalların çevresi sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesi ya da yüzey alanının değişmezken hacminin sıfıra gitmesi gibi durumları anlamakta zorlanmaktadırlar.

Öğrencilerin özellikle bu tür bir şeklin görünüşünün nasıl olabileceğini algılamakta zorlandıkları saptanmıştır. Öğrencilerin çevre artarken alanın da artması şeklindeki kalıplaşmış düşünceleri ve fraktal şekillerin göz önünde canlandırılmasındaki güçlük bu anlamanın oluşmamasının en önemli nedenidir.

- Julia kümelerinin periyotları ile öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkinin belirlenmesinde programın etkili olduğu sonucu elde edilmiştir.

Öğrencilerin verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulmada ve bu Julia kümelerinin Mandelbrot kümesi içerisindeki yerlerini göstermede oldukça başarılı oldukları belirlenmiştir.

- Hazırlanan program öğrencilerin verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına doğru karar vermesi yönünde yeterlidir.

Bu sonuç programın öğrencilerin verilen şekillerin öz-benzerliğine karar vermede etkili olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin genel olarak verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına karar verebildikleri belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin programın öz-benzerlik kavramının öğrenilmesine yönelik kazanımlarını edindiklerini göstermektedir.

- Öğrencilerin verilen bir nesnenin öz-benzer olup olmadığına doğru karar verebilirken, öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranlarını belirlemede zorlandıkları tespit edilmiştir.

Bu sonuç programın öğrencilerin verilen şekillerin öz-benzerliğine karar vermede etkili olduğunu göstermekte, ancak programın içeriğinde öz-benzerlik konusunun öğretimine yönelik hazırlanmış çalışma yapraklarının eksiklikleri olduğunu işaret etmektedir.

- Bazı öğrencilerin hatalı öz-benzerlik anlamaları oluşturdukları belirlenmiştir

Bazı öğrencilerin öz-benzerliğin nesnenin her noktasında sağlanması gerektiği şeklinde bir anlama geliştirdikleri belirlenmiştir. Bu öğrenciler sıklıkla kağıt üzerinde oluşturulmuş nesnelerin öz-benzer olmadıklarını ifade etmektedirler. Bunun en büyük nedeni kağıt üzerinde oluşturulan fraktal yapıların öz-benzerliğinin sadece birkaç adım için görülebilmelerinden kaynaklanmaktadır. Bu ise öğrencilerde bir nesne fraktal olabilir ancak öz-benzer olmak zorunda değildir şeklinde yanlış bir anlamanın oluşmasına neden olmaktadır.

- Hazırlanan program öz-benzerlik türlerinin öğrenilmesinde yeterlidir.

Öğrenciler genel olarak verilen öz-benzer bir nesnenin öz-benzerlik türüne karar verebilmektedirler.

- Öğrenciler noktasal öz-benzerlikte daha çok işlemsel bir öğrenme gerçekleştirmiştir.

Bazı öğrencilerin noktasal öz-benzerliği belirlemede güçlük yaşadığı tespit edilmiştir. Bu öğrenciler noktasal öz-benzer olan bir fraktalı ya tamamen öz-benzer ya da yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandırmaktadırlar. Noktasal öz-benzer bir fraktalı tamamen öz-benzer olarak sınıflandıran öğrencilerin sadece öz-benzer parçaları dikkate aldığı ve iki öz-benzerlik türünün birbirinden ayrılan yönlerini tam olarak bilmedikleri belirlenmiştir. Noktasal öz-benzer bir fraktalı yaklaşık öz-benzer olarak sınıflandıran öğrencilerin ise öz-benzerlik türüne karar veremediklerinde doğrudan bu öz-benzerliğin yaklaşık öz-benzerlik olacağı şeklinde bir anlayışa sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu durum içerikte yer verilen çalışma yapraklarının yeterli olmadığını göstermektedir.

- Doğal nesnelerin yaklaşık öz-benzerliği öğrencilerin öz-benzerlik kavramını zihinlerinde oluşturmalarında ve öz-benzerlik türlerini sınıflandırmalarında güçlük yaşamalarına neden olmaktadır.

Öğrenciler eğrelti otu ya da brokoli de öz-benzer parçaları görebilmelerine karşın bu parçaların matematiksel olarak tanımlanan fraktallardaki gibi mükemmel bir benzerliğe sahip olmadıklarını görmektedirler. Bu nedenle doğal fraktal şekillerin hem matematiksel fraktallardaki gibi bir mükemmelliğe sahip olmamaları ve çoğu zaman benzer parçalarının yaklaşık olarak birbirine benzemesi hem de sonlu bir yapıya sahip olmaları nedeniyle öğrencilerin verilen nesnelerin öz-benzerlik türünü belirlemelerini ve öz-benzerlik kavramını oluşmalarını güçleştirmektedir

- Öğrencilerin büyük çoğunluğu fraktalların boyutlarını matematiksel olarak hesaplayabilmektedirler.

Öğrenciler derste öğrendikleri boyut hesaplama kurallarını kullanarak verilen bir fraktalın boyutunu bulabilmektedirler. Ancak özellikle tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplarken büyüme oranı ve öz-benzer parça sayılarını belirlemede güçlük yaşamalarından dolayı bazı öğrencilerin formülü bilmesine karşın doğru kullanamadığı belirlenmiştir

- Öğrencilerin fraktal boyutları daha çok işlemsel olarak öğrendikleri ortaya çıkmıştır.

Öğrencilerin boyutu nasıl hesaplayabileceklerini bildikleri, ancak bazılarının formülü uygularken sonuçta buldukları değerin neyi ifade ettiğini ve formülün nasıl oluştuğunu tam olarak anlamadıkları belirlenmiştir. Bu durum hazırlanan programın fraktal boyutların öğrenilmesinde daha çok işlemsel öğrenmelerin oluşmasına neden olduğunu göstermektedir.

- Öğrenciler en çok kesirli boyutları anlamakta ve bu boyutlara göre oluşan şeklin görünüşünün nasıl olabileceğine karar vermekte zorlanmaktadırlar.

Öğrencilerin ilk defa kesirli boyutlarla karşılaşmalarından dolayı bu boyutların varlığını kabullenmede ve neyi ifade ettiklerini anlamakta oldukça zorlandıkları belirlenmiştir. Bunun yanında programın fraktal boyutlar konusunda daha çok işlemsel öğrenmelerin oluşmasını sağlaması bu güçlüğün oluşmasının bir diğer nedenidir.

5.2. Fraktal Geometri Programının İçeriğinin Yeterliğine İlişkin Sonuçlar

Bu alt başlık altında fraktal geometri programının içeriğinde yer alan çalışma yapraklarının, etkinliklerin ve bilgisayar programlarının öğrencilerin öğrenmeleri ve anlamaları üzerine olan etkileri ele alınmıştır. Bu kapsamda araştırmadan elde edilen sonuçlar aşağıda sunulmuştur:

- Bazı öğrencilerin hatalı fraktal tanımları ve anlamaları oluşturdukları belirlenmiştir

Bu anlamaların oluşmasının bir nedeni programın içeriğinin öz-benzerlik ve fraktal boyut konularının öğretiminde yetersiz olmasıdır. Diğer bir nedeni ise fraktalların kendi doğalarından kaynaklanan güçlüklere sahip olmalarıdır.

- Bazı öğrencilerde çevre-alan ve hacim hesaplamada mutlaka bir geometrik serinin bulunması gerektiği yönünde bir inancın oluştuğu tespit edilmiştir.

Bu inancın oluşmasının nedeni programda yer alan etkinliklerde çevre-alan ve hacim hesaplamalarında sıklıkla geometrik serilerin kullanılması olabilir. Bu durum öğrencilerin bu tür bir hatalı anlayış geliştirmelerine neden olmaktadır.

- Çevre-alan ve hacim hesaplamalarında çıkarılan nokta sayısı ve geride kalan nokta sayısına göre çevre-alan ve hacimdeki değişimin öğrenciler tarafından anlaşılmadığı sonucu elde edilmiştir.

Bunun nedeni öğrencilerin bu konuların tartışılmasında yeterli ön bilgilere sahip olmamaları ve programda konunun fraktal boyuttan önce verilmiş olması olabilir.

- Hazırlanan program cebirsel tekrarlamalar konusunda kaçak, mahkum ve periyodik nokta kavramlarının öğrenilmesinde yeterlidir.

Bu araştırmanın bulguları öğrencilerin verilen bir başlangıç noktasının kaçak, mahkum ya da periyodik olup olmadığına karar verebildiklerini göstermektedir. Yani hazırlanan öğretim programının öğrencilerin kaçak, mahkum ya da periyodik nokta kavramlarını öğrenmelerini sağlamıştır.

- Hazırlanan program bazı öğrencilerin verilen başlangıç noktasının değil de onun yörüngesinin kaçak, mahkum ve periyodik olduğu yönünde bir anlama oluşturmalarına neden olmuştur.

Bu tür bir anlamanın oluşmasında programın öğretim sürecinde izlenen yol olabilir. Çünkü öğrenciler verilen bir başlangıç noktasının türünü belirlerken sadece noktanın tekrarlama kuralına göre yörüngesinin hareketini incelemektedir. Yani yörünge belli bir sayıya yaklaşmakta ya da uzaklaşmaktadır. Bu durum öğrencilerin yörüngenin kaçak ya da mahkûm olduğu yönünde bir algı geliştirmesine neden olmaktadır.

- Hazırlanan program Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğrenilmesinde istenilen başarıyı göstermemiştir.

Öğrencilerin verilen tekrarlama kurallarına göre yörüngeleri belirleyebildikleri tespit edilmiştir. Ancak öğrencilerin başlangıç noktalarının mı yoksa yörüngelerin mi bu kümeleri oluşturduğuna karar veremedikleri saptanmıştır. Yani öğrencilerin bu kümelerin nasıl oluştuğunu ve şekillerinin nasıl çizildiğini anlayamadıkları belirlenmiştir. Bu durum programın içeriğinde yer alan bilgisayar programlarının ve çalışma yapraklarının yeterli olmadığını göstermektedir.

- Birkaç öğrencinin Mandelbrot ve Julia kümeleri arasında doğru ilişkiler kurdukları tespit edilmiştir.

Bu sonuç programın bu iki küme arasındaki ilişkinin fark edilmesini sağladığını göstermektedir. Özellikle programın içeriğinde yer alan fraqtive programının bu ilişkinin kurulmasında etkili olduğu söylenebilir.

- Öz-benzerlik konusunun öğretiminde kullanılan tanımın yetersiz olduğu sonucu elde edilmiştir.

Hazırlanan programda öz-benzerlik sadece nesnenin bir parçası ile nesnenin bütününün karşılaştırılmasına dayanmaktadır. Ancak bu tanım adım adım oluşumu verilen bir fraktalın öz-benzerliğinin belirlenmesinde ve hangi oranda parça-bütün karşılaştırılmasının yapılmasında yeterli bilgi vermemektedir. Bu bağlamda parça-bütün karşılaştırma tanımının yanında matematiksel olarak da öz-benzerlik tanımının verilmesi gereklidir.

- Hazırlanan program öğrencilerin fraktal boyutların şeklin karmaşıklığının ölçüsünü verdiği yönünde bir anlayış geliştirmelerinde etkili olmuştur.

Bu anlayışın oluşmasında içerikte yer alan uzunluk ölçme ve kutu sayma metotlarının etkili olduğu belirlenmiştir.

- Fraktal boyutlar bazı öğrencilere inandırıcı gelmemektedir.

Bunun nedeni öğrencilerin sahip oldukları baskın Euclid düşünce tarzının yanında özellikle kıyı şeridi ve kutu sayma metotlarında bulunan fraktal boyut değerlerinin yaklaşık olması bu tür bir inancın oluşmasında etkendir.

- Alüminyum folyo etkinliği kesirli boyutların olabileceği yönünde bir algının oluşturulmasında etkili olmuştur.

Fraktal boyut konusunun öğretiminde kullanılan slaytlar ve alüminyum folyo etkinliğinin kesirli boyutların var olabileceği şeklinde bir algının oluşmasına yardımcı olduğu, ancak tam olarak bu tür bir algının oluşmasını sağlayamadığı belirlenmiştir.

- Hazırlanan program kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğunu açıklamaya yetersizdir.

Öğrencilerin kaos oyununu hem kağıt kalem ile hem de bilgisayar üzerinde oynarken oyundaki noktaların hangi kuralla nasıl hareket ettiklerini tam olarak anlayamadıkları tespit edilmiştir. Bu durum içeriğin bu konuların öğretiminde yetersiz olduğunu göstermektedir.

- Hazırlanan program fraktal geometrinin Euclid geometrisinden farklı bir geometri olduğu yönünde bir algının oluşmasında etkili olmuştur.

Bu algının oluşmasında içerikte yer alan doğal fraktal örneklerinin ve sınıf içi tartışmaların etkili olduğu söylenebilir. Öğrencilerin eğrelti otları ve brokolideki öz-benzer parçaları görmeleri ve bilgisayarda fraktal ağaç modellerini incelemeleri konusu doğa olan farklı bir geometriyle çalışmaya başladıkları şeklinde bir algının oluşmasına yardımcı olmaktadır.

- Hazırlanan programın içeriği öğrencilerin ilgisini çekmekte ve derse olan motivasyonlarını artırmaktadır.

Mandelbrot ve Julia kümeleri, fraktal boyutlar ve kaos oyunu konularının öğretimine yönelik hazırlanan çalışma yaprakları ve slaytlar ile kullanılan bilgisayar programlarının bu ilginin oluşmasında etkili olduğu belirlenmiştir.

- Programın içeriği öğrencilerin merakını artıracak ve araştırmaya sevk edecek niteliktedir.

Öğrencilerin kesirli boyutların varlığını sorguladıkları, ne tür şekillerin fraktal olabileceğini tartıştıkları ve kaos oyunu sonucu niçin çok düzgün bir şeklin oluştuğunu anlamaya çalıştıkları yapılan mülakatlarda ortaya çıkmıştır. Bu mülakatlarda bazı öğrencilerin internet gibi farklı kaynakları kullanarak bu sıra dışı durumların nedenlerini açıklamaya çalıştıkları tespit edilmiştir.

- Fraktal boyut ve çevre-alan ve hacim hesaplamalarında çıkarılan nokta ile geride kalan nokta sayısına yönelik bazı etkinliklerin öğrenci seviyesinin üzerinde olduğu belirlenmiştir.

Fraktal boyutlar Hausdorff'un boyut tanımına dayanmaktadır ki bu seviyedeki öğrencilerin bu tanımı anlamaları oldukça zordur. Bunun yanında çıkarılan nokta sayısı ve geride kalan nokta sayısına yönelik yapılan tartışmalarda öğrencilerin sayılabilir ve sayılamayan kümeler hakkında ön bilgilerinin olmasını gerektirmektedir.

- Fraktal şekillerin oluşturulmasında içerikte yer verilen kağıt-kalem ve somut materyallerin kullanıldığı etkinliklerin etkili olduğu belirlenmiştir.

Çizme ve boyama etkinlikleri sayesinde öğrencilerin sonlu adımlarda fraktalların şekillerini çizebildikleri ve fraktalların oluşumlarını anlayabildikleri tespit edilmiştir.

- Programın içeriğinde öğrencilerin kendi fraktallarını kendilerinin oluşturacakları bilgisayar programlarına yer verilmemiştir.

Bu durum özellikle Mandelbrot ve Julia kümeleri ile kaos konularının öğretiminde kendini göstermektedir. Bu konuların öğretiminde kullanılan bilgisayar programlarının yetersizliği konuların öğrenilmesinde güçlükler yaşanmasına neden olmuştur.

- Programın içeriği öğrencilerin fraktalların günlük yaşamdaki kullanım alanlarını görmelerinde yetersiz kalmıştır.

Tasarlanan programda akciğerlerin yüzey alanı ve hacmiyle kürenin yüzey alanı ve hacmini karşılaştırma gibi fraktalların günlük yaşamla ilişkisini gösteren etkinlik örneklerine yer verilmesine karşın ders ortamında sıklıkla soyut fraktal şekillerine yer verilmesi öğrencilerin fraktalların günlük yaşamla ilişkisini belirlemelerini güçleştirmektedir.

- İçerikte yer alan bazı çalışma yapraklarının dersi öğrenci merkezli yaklaşımdan uzaklaştırdığı ve bu nedenle öğretim sürecini gelenekselleştirdiği sonucu elde edilmiştir.

Başlangıç ve üretici kavramlarının ve fraktal boyut konusunun öğretiminde kullanılan bazı çalışma yapraklarının dersi gelenekselleştirdiği ve öğrenci merkezli yaklaşımdan uzaklaştırdığı, ancak öz-benzerlik ve Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretiminde kullanılan çalışma yapraklarının ise daha çok öğrenci merkezli yaklaşımı desteklediği ortaya çıkmıştır.

5.3. Fraktal Geometri Programının Öğretim Süreciyle İlgili Sonuçlar

Bu alt başlık altında fraktal geometri programının öğretim sürecinde öğretmenin öğretim yöntem ve teknikleri ve öğretmen ve öğrencilerin uygulama sürecinde yaşadıkları deneyimleri ele alınmıştır. Bu kapsamda araştırmadan elde edilen sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

- Kağıt kalem ve somut materyaller kullanarak fraktalların sonlu adımdaki şekillerini çizmede/oluşturmada öğrencilerin ve öğretim elemanının sorunla karşılaşmadıkları belirlenmiştir.

Fraktalın oluşumunu sağlayan üreticinin iyi tanımlanması fraktal şeklin doğru çizilmesinde etkili olmaktadır.

- Öğrencilerin Mandelbrot ve Julia kümelerinde verilen bilgisayar programlarını kullanabildikleri ve bu programlara göre verilen bir noktanın türüne karar verdikleri, ancak programlarda oluşan Mandelbrot ve Julia kümelerinin şekillerinin nasıl oluştuğunu tam olarak anlayamadıkları görülmüştür.
- Fraktalların çevresi, alanı ve hacmi arasındaki sıra dışı ilişkilerin keşfi öğrencilerin çevre, alan ve hacme yönelik mevcut bilgilerini yeniden sorgulamalarında etkili olmuştur.

Özellikle Sierpinski üçgeninin çevresinin sonsuza giderken alanının sıfıra gitmesi, öğrencileri sıfır alanlı ancak sonsuz çevreli bir şeklin nasıl olabileceğini tartışmaya yönlendirmektedir.

- Öğrencilerin fraktal boyutları hesaplayabildikleri ve fraktal boyutun şeklin karmaşıklığını temsil ettiğinin farkına vardıkları belirlenmiştir.

Bu tür bir farkına varmada özellikle doğal fraktalların boyutlarının hesaplanmasının etkili olduğu söylenebilir.

- Fraktal boyutların öğrenciler tarafından anlaşılmasına yardımcı olmak amacıyla öğretmen tarafından izlenen yaklaşım yanlış öğrenmelerin oluşmasına neden olmuştur.

Dersin öğretmeninin fraktal boyutların öğretiminde parça eklendiğinde nesnenin boyutunun büyüdüğü ve parça çıkarıldığında ise nesnenin boyutunun küçüldüğü gibi bir yaklaşım izlemesi öğrencilerin yanlış boyut anlamaları oluşturmalarına ve çelişkili durumlarda kalmalarına neden olmuştur. Örneğin Koch dörtyüzlüsünün boyutu başta 3 idi parça eklendiği için 3'den büyük olmalıydı, ancak Koch dörtyüzlüsünün boyutu yaklaşık 2,58 dir.

- Programın uygulanmasında daha çok öğrenci merkezli bir yaklaşımın benimsendiği ortaya çıkmıştır.

Hazırlanan çalışma yaprakları ve etkinlikler ile öğretim sürecinde öğretmenin kullandığı yöntemler öğrencilerin derste aktif olmalarını sağlamaktadır.

- Fraktal etkinliklerine öğrencilerin büyük çoğunluğunun aktif olarak katıldıkları görülmüştür.

Bunun nedeni fraktal konularının kendi doğalarının çekici ve farklı olması ya da hazırlanan programın içeriği olabilir.

- Öğretim sürecinde kullanılan slaytların öğretimi olumlu etkilediği belirlenmiştir.
- Programın uygulama süresi tasarlanandan daha uzun sürmüştür. Bu nedenle bazı etkinliklerin tamamlanamadığı belirlenmiştir.
- Dersin öğretmeninin konuyla ilk defa tanışması ve yeterli deneyiminin olmaması öğretim sürecini etkilemiştir.

Dersin öğretmeni ilk defa fraktal geometri konularının öğretimini gerçekleştirdiği için kendisine sıra dışı gelen birçok kavramla karşılaşmıştır. Bu ise onun bazı kavramların nedenlerini öğrencilerine tam olarak açıklayamamasına ya da hatalı açıklamalarda bulunmasına neden olmuştur.

6. ÖNERİLER

Ortaöğretim düzeyi için tasarlanan bir fraktal geometri öğretim programının yeterliğinin belirlenmesine yönelik yapılan bu çalışmanın sonuçlarına dayalı olarak aşağıdaki öneriler yapılmıştır.

6.1. Araştırmanın Sonuçlarına Dayalı Olarak Yapılan Öneriler

Hazırlanan fraktal geometri programında öğrencilerin geometrik tekrarlamalar konusunu öğrenmede başarılı oldukları belirlenmiştir. Bu başarının elde edilmesinde somut materyaller ile çizim etkinlikleri etkili olmuştur. Ancak somut materyaller ve çizim etkinlikleri fraktal şekillerin sadece birkaç adım için oluşturulmasını ve oluşum kuralının anlaşılmasını sağlamasına karşın, fraktalın ilerleyen adımlardaki şeklinin nasıl olduğu konusunda yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle somut materyaller ve çizim etkinliklerinin yanında bilgisayar programlarına da yer verilmesi daha doğru ve gerçekçi fraktal şekillerin oluşturulmasını sağlayabilir.

Hazırlanan fraktal geometri programında öğrencilerin fraktalların çevresi ve alanını hesaplarken çevrenin sonsuza giderken alanın sıfıra gitmesi gibi sıra dışı durumları anlamakta zorlandıkları sonucu elde edilmiştir. Bu bağlamda bu konunun fraktal geometri konularının öğretimine başlarken verilmesinin uygun olmadığı söylenebilir. Çevre-alan-hacim hesabının fraktal boyuttan sonra verilmesinin daha yararlı olacağı düşünülmektedir. Çünkü bu sayede öğrenciler fraktal boyut ile çevre-alan-hacim arasında bir ilişki kurma fırsatı elde edebilirler.

Hazırlanan programda manipulatif etkinliklerin yanında öğrencilerin kendi fraktallarını kendilerinin oluşturacakları bilgisayar programlarına da yer verilmelidir. Programda Mandelbrot ve Julia kümeleriyle kaos konusunun öğretiminde bu durumun eksikliği belirlenmiştir. Mandelbrot ve Julia kümelerinin öğretiminde noktaların türlerini belirlemede öğrencilerin hemen hemen tamamının başarılı olmalarına karşın bazı öğrencilerin kümelerin ekranda nasıl oluştuğunu tam olarak anlayamadıkları tespit edilmiştir. Bunun bir nedeni derste kullanılan yazılımın sınırlılığıdır. Bu konunun öğretiminde öğrencilerin bu kümeleri her adımda kendilerinin oluşturabileceği ve farklı durumlar için oluşan şekilleri incelemelerini sağlayacak yazılımların kullanılması daha etkili olacaktır. Benzer bir durum kaos oyunu için geçerlidir. Kaos oyununda da kullanılan yazılımın sınırlı olması öğrencilerin oyunu anlamasını güçleştirmektedir. Bunun yanında kaos konusunun içeriğinin genişletilmesinin fraktalların bir diğer oluşum şekli olan rastgeleliğin öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacağı söylenebilir. Bu sayede öğrenciler kurallı durumların dışında rastgele olaylar sonucunda da fraktal yapıların oluştuğunu görebilirler. Bunun yanında her ne kadar araştırmada uygulama fırsatı olmasada kaotik durumları sergileyen örneklere yer vermenin kaosun anlaşılmasında yararlı olacağı söylenebilir. Ayrıca fraktalların sonsuz yapılarının öğrenciler tarafından fark edilmesinde ve fraktalların daha gerçekçi görselleştirilmelerinde bu tür yazılıların daha etkili olabileceği söylenebilir.

Öz-benzerlik konusunun öğretiminde programda sadece şeklin parçası ile şeklin bütününü karşılaştırmaya yönelik bir tanıma yer verilmiştir. Ancak elde edilen sonuçlar tek başına bu tanımın yetersiz olduğunu ve matematiksel bir öz-benzerlik tanımının da yapılması gerektiğini göstermektedir. Matematiksel öz-benzerlik tanımının Bannon'un (1991) önerdiği gibi dönme, çevirme ve büyüme oranını göstermesi, öğrencilerin belirlemekte zorlandıkları öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranlarını bulmalarını kolaylaştırabilir. Bunun yanında öz-benzerlik konusunun öğretiminde doğal fraktal örneklerini kullanırken öz-benzerliği yansıtan nesnelerin seçilmesi öğrencilerin doğru öz-benzerlik anlamaları oluşturmalarını sağlayabilir. Bunun için özellikle eğrelti otu ve brokoli gibi nesneler üzerine öz-benzerliği tartışılması daha yararlı olabilir.

Araştırmada fraktal boyut konusu öğrencilerin anlamakta en çok zorlandıkları konu olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğunun fraktal boyutları hesaplayabildikleri tespit edilmiştir. Bu durum programın fraktal boyutların hesaplanmasında yeterli olduğunu göstermektedir. Ancak fraktal boyutlarda öğrenciler daha çok işlemsel öğrenmeler gerçekleştirmişlerdir. Fraktal boyutların daha derinlemesine incelenmesi anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesini sağlayabilir, ancak bu durum ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerin ön bilgilerinin oldukça üzerinde olacaktır. Bu nedenle ortaöğretim düzeyi için fraktal boyutların sadece sezgisel olarak öğretiminin yapılmasının daha uygun olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle bu konunun öğretiminde öncelikle bu tür bir algının oluşturulması gereklidir. Bunun yanında öğrencilerin ilk defa bu kadar irdeledikleri boyut konusunda bilgilendirilmeleri kesirli boyutların anlaşılmasını kolaylaştıracaktır. Çünkü öncelikle öğrencilere boyuttan ne kastedildiği ortaya konursa fraktal boyuta yönelik algılarda daha anlamlı şekilde oluşur.

Hazırlanan fraktal geometri programı 9-12. sınıf seviyesine yöneliktir ve öğrencilerin limit, logaritma, seriler vb. konularda yeterli ön bilgilerinin olduğu kabul edilmiştir. Eğer bu program ayrı bir ünite şeklinde okutulacaksa her bir konunun başında ilgili konuya yönelik kısa hatırlatmalarda bulunmak konuların öğretilmesinde daha etkili olacaktır. Bunun yanında fraktalların oluşumunda şekilden parça çıkarmak ya da eklemek ile geride kalan nokta sayısı ve çevre alan arasında kurulan ilişkiler hem öğrencileri çelişkili durumlarda bırakarak bu durumların nedenlerini araştırmaya sevk etmekte hem de üst düzey tartışmalar gerçekleştirmelerini sağlamaktadır. Ancak bu tartışmalarda öğrencilerin ön bilgileri iyi belirlenmelidir. Örneğin bu araştırmada öğretmenin sayılabilir ya da sayılamayan kümelere yönelik açıklamaları öğrencilerin bu konulardaki yetersiz bilgileri nedeniyle etkisiz olmuştur.

6.2. Fraktal Geometrinin Okul Matematiğine Entegresi İle İlgili Öneriler

Fraktal geometri konularının mevcut matematik öğretim programlarına entegre çalışmaları son yıllarda oldukça yoğunlaşmıştır. Ülkemizde 2005 yılında ilköğretim 8. sınıf matematik öğretim programında ve 2010 yılında ortaöğretim 9-10. sınıflarda fraktallar konusuna rastlanmaktadır. Ancak yapılan çalışmalar incelendiğinde fraktal geometri kavramlarının öğretimine yönelik hem ders kitapları ve öğretim programında hem de öğretmen ve öğretmen adaylarının bilgilendirilmelerinde çeşitli eksikliklerin olduğu görülmektedir. Bunun yanında fraktal geometrinin sadece geometri öğretim programına entegre edilmeye çalışılması da bu konunun birçok özelliğini dışarıda bırakmakta ve bu geometrinin tam olarak öğrenilememesine neden olmaktadır. Çünkü fraktal geometri bir geometri olmasına karşın aynı zamanda cebir alanıyla yakından ilişkilidir. Bu bağlamda fraktal geometrinin öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılabilmesi için tüm matematik öğretim programına entegre edilmesi daha yararlı olacaktır.

Fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanan bu program bir yol haritası niteliği taşımaktadır. Bu araştırmada yapılan çalışmalar bu konunun öğrenilmesinde ve öğretiminde karşılaşılabilecek durumları yansıtmaktadır. Bu bağlamda şu anda mevcut geometri öğretim programlarımızda yer verilen fraktal yapıları oluşturma, içerisindeki örüntüleri bulma ve çevrelerini hesaplama konularında öğrencilerin zorlanmadıkları ve rahatlıkla bu konuları öğrenebildikleri belirlenmiştir. Ancak ilerleyen dönemlerde eğer matematik öğretim programımızda Mandelbrot ve Julia kümeleri, kaos ve fraktal boyut gibi konuların öğretimine yer verilecekse bu konuların öğretiminde dikkatli olunmalıdır. Çünkü öğrenciler bu konuları öğrenmede oldukça zorlanmaktadırlar. Bunun yanında bilgisayar destekli etkinlikler de fraktal geometri konularının öğretiminde oldukça etkilidir. Matematik ve geometri öğretim programlarımızda yer verilen fraktal geometri konularının öğretiminde herhangi bir bilgisayar programının kullanılmasına yer verilmemiştir. Bu durum bu konuların öğretimini olumsuz etkileyebilir. Çünkü tarihsel gelişim sürecinde bile fraktallar 1870'li yıllarda keşfedilmelerine karşın 1970'den sonra bilgisayar teknolojisinin kullanılmasıyla popüler olmaya ve çalışılmaya başlanmıştır.

Fraktal geometri konularının öğretimi ülkemizde 8. sınıfta başlamakta ve 9-10. sınıflarda devam etmektedir. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde 3-12. sınıf seviyesi aralında bu konuların öğretiminin yapılabildiği belirtilmektedir. Bu tür bir geniş zaman aralığında fraktal geometri konularına yer verilmesi hem öğrencilerin farklı geometrilerinde olduğu yönünde bir algı oluşturmalarına, hem de fraktal boyut ve Mandelbrot ve Julia kümeleri gibi konuların öğretiminde karşılaşılan güçlüklerin giderilmesine yardımcı olabilir.

Fraktal yapıları oluşturma ve içerisindeki örüntüleri bulmada öğrencilerin çok fazla zorlanmamaları bu konuların 9. ve 10. sınıf geometri öğretim programlarına eklenebileceğini göstermektedir. 9. sınıf geometri öğretim programında "çokgenler ve düzlemde kaplamalar" ünitesi içerisinde öz-benzerlik kavramı sezgisel olarak verilebilir ve basit dönüşümlerle fraktal şekiller oluşturulabilir. Bunun yanında 9. sınıf matematik öğretim programında fonksiyonların kendileriyle bileşkelerinde başlangıç ve üretici kavramlarına yönelik etkinliklere yer verilebilir. 10. sınıf geometri öğretim programında ise "dönüşümlerle geometri ünitesi" içerisinde fraktallara yer verilebilir. 10. sınıf geometri öğretim programında bu konu içerisinde fraktallar konusu yer almaktadır. Programda yapılan çalışmaları yanında bir önceki yıl sezgisel olarak verilen öz-benzerlik kavramı bu seviyede dönüşümler kullanılarak matematiksel olarak verilebilir. Bunun yanında üçgenler yardımıyla farklı fraktal şekiller çizdirilebilir. Bu çizimlerde bilgisayar programlarının kullanılması dönüşümlerin daha kolay anlaşılmasına ve daha gerçekçi fraktal şekillerin oluşturulmasına katkı sağlayabilir. Bunun yanında çevre ve alan sonlu adımlar için buldurulup sezgisel olarak çevre ile alan arasındaki sıra dışılığı öğrencilerin fark etmeleri sağlanabilir. 10. sınıf matematik öğretim programında ise özellikle "permütasyon, kombinasyon ve olasılık” ünitesi içerisine kaos konusu eklenebilir. Basit manada olasılık hesabına göre ne tür şekillerin oluşacağına yönelik etkinliklere yer verilebilir. 11. sınıf geometri öğretim programı içerisinde ise dörtgenler, çokgenler, çemberler ve katı cisimler yardımıyla fraktal şekillerin oluşturulmasına yönelik etkinlik örneklerine yer verilebilir. Ayrıca geometrik dizi ve seriler yardımıyla fraktalların çevresi, alanı ve hacmi hesaplanarak bu kavramlar arasındaki ilişkiler tartışılabilir. Bunun yanında 11. sınıf matematik öğretim programında da geometrik diziler konusu içerisinde fraktalların çevresi, alanı ve hacmine yönelik etkinliklere de yer verilebilir. 11. sınıf matematik öğretim programında “karmaşık sayılar” ünitesinde Mandelbrot ve Julia kümelerine kaçak, mahkum ve periyodik nokta bağlamında bir giriş yapılabilir ve bu noktalardan hangilerinin bu kümelerin içinde ya da dışında olduğuna yönelik etkinler tasarlanabilir. Fraktal boyut konusunda öğrencilerin oldukça zorlandıkları çalışma sonunda belirlenmiştir. Bu bağlamda eğer matematik öğretim programına fraktal boyut konusu eklenecekse bu durumda 11. sınıf matematik öğretim programında “logaritma” ünitesi içerisine bu konu yer almalıdır. Ancak bu konunun öğretiminden önce boyut kavramından ne anlaşılacağına yönelik bilgilere yer verilmeli ve fraktal boyutların daha çok sezgisel anlamda öğretimi yapılmalıdır.

Fraktal geometri konularının öğretimine ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarında başlanmasına karşın üniversite düzeyinde bu konuların öğretimine henüz başlanmamıştır. Ancak tarihsel süreç içerisinde fonksiyonlar, türev gibi konularda olduğu gibi fraktal geometri konularının da doğrudan ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarında yer alması yerine daha yumuşak bir geçiş için üniversite düzeyinde başlanılması gerekmekteydi. Bunun yanında bu konuların öğretimini yapacak olan öğretmen ve öğretmen adaylarının fraktallar hakkında bilgilendirilmemeleri de bu entegrasyon sürecini olumsuz etkileyecektir.

Güven (2006) Euclid-dışı geometrilerin 3 nedenden dolayı okul matematiğine entegre edilmelerinin gerekli olduğunu belirtmektedir. Güven’in (2006) önerileri doğrultusunda fraktal geometri okul matematiğine 4 nedenden dolayı entegre edilebilir.

1. Geometri eğitiminin genel amaçları incelendiğinde en temel amacın öğrencinin geometriyi bir araç olarak kullanabilmesi olduğu görülmektedir. Doğadaki birçok olayı anlamada ve algılamada Euclid geometrisinin tek başına yeterli olmadığı düşünüldüğünde fraktal geometrinin okul matematiğine entegre edilmesi gerekmektedir.

2. Yapılandırmacı bilgi kuramının benimsendiği yeni öğretim programlarımızda öğrencilerin anlamlı öğrenmeler gerçekleştirmelerinde sık sık bilişsel dengesizlikler yaşamaları gerekmektedir. Euclid geometrisi ile fraktal geometrinin birlikte okutulması bilişsel dengesizliklerin ortaya çıkmasına neden olacak ve öğrencinin yeni dengeyi yakalaması için yeni kavramlar öğrenmelerini sağlayacaktır. Örneğin Sierpinski üçgeninin sonsuz çevrede sıfır alanının olması bu tür bir dengesizliği sağlayabilir.
3. Okul matematiğinde öğrenciler daha çok doğadan kopuk soyut nesnelerle uğraşmaktadır. Ancak fraktal geometri ile öğrenciler bir ağacın ya da yaprağın damarlarının oluşum adımlarını, içerisindeki örüntüleri görebilmekte ve bunlar üzerine matematik yapabilmektedir. Bu ise öğrencilerin matematiğin doğadan kopuk soyut bir ders olduğu yönündeki algılarında bir değişime neden olabilir.
4. Fraktal geometri gibi farklı geometrilerle çalışmak öğrencilerdeki tek mutlak doğru olan Euclid geometrisinin bulunmadığı farklı geometrilerinde olduğunu görmelerini sağlar. Her iki geometride karşılaştıkları çelişkili durumlar öğrencilerin matematikteki mutlak doğruluk kavramını yeniden sorgulamalarına yardımcı olur.

6.3. Benzer Araştırmalara Yönelik Öneriler

Literatürde fraktal geometri konularının öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiği ve öğretildiğine yönelik araştırmalara çok az rastlanmaktadır. Fraktalların mevcut matematik öğretim programlarına entegrasyonu çalışmaları başlamasına karşın, öğrencilerin bu konuları nasıl öğrendiği, ne tür anlamalar geliştirdikleri çok fazla göz önüne alınmamaktadır. Bu araştırmada fraktal geometri konularının öğretimine yönelik hazırlanmış bir öğretim programının yeterliği belirlenmeye çalışılmış ve bu amaçla üniversite birinci sınıf öğrencilerinin hazırlanan programda doğrultusunda fraktalları nasıl öğrendikleri ve öğretim sürecindeki deneyimleri yansıtılmaya çalışılmıştır. Ancak çalışmada kullanılan öğrenci sayısının sınırlı olması elde edilen sonuçların genellenebilirliğini azaltmaktadır. Bu nedenle elde edilen bulguları doğrulamak ya da çürütmek için daha geniş ve farklı öğrenci grupları üzerinde benzer çalışmalar yürütülebilir.

Hazırlanan fraktal geometri programı lise matematik ve geometri öğretim programları temelinde oluşturulmuştur. Ancak programın lisede uygulaması gerçekleşmemiştir. 2010-2011 eğitim öğretim yılından itibaren lise geometri öğretim programında fraktal konularının öğretimi yapılacaktır. Bu bağlamda geliştirilen programın etkilerinin belirlenmesi ve lise öğrencilerinin fraktal konularını nasıl öğrendiklerinin ortaya çıkarılması için hazırlanan fraktal geometri programı lise seviyesinde uygulanabilir. Bu uygulama sadece lise son sınıf öğrencilerine olabileceği gibi dört yıl boyunca takip edilecek bir gruba da her bir öğretim kademesine uygun olacak şekilde uygulanabilir.

Bu araştırmada öğrencilerin özellikle fraktal boyutlar ve kaos konularını anlamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Sadece bu konular üzerine odaklanılarak yapılacak çalışmalar sonunda bu güçlüklerin nedenleri derinlemesine incelenerek belirlenebilir ve uygun çözün önerileri sunulabilir.

Öğretmen ve öğretmen adaylarının fraktal geometri konuları hakkında yeterli bilgileri bulunmamaktadır. Birçok öğretmen eğitimi programında fraktal geometri konularının öğretimine yer verilmemektedir. Bu durum bu konuların öğretimini de sınırlandıracaktır. Bu nedenle farklı sınıf seviyesindeki öğretmenlerin bu konuları öğrenmeleri için kurslar düzenlenebilir ve öğretmenlerin görüşleri doğrultusunda uygun etkinlik ve çalışma yaprakları geliştirilebilir. Ayrıca fraktal konularının öğretiminde öğretmenin rolü ve bu konuların öğretimine özel uygun öğretim yöntem ve teknikleri de belirlenebilir. Bu tür etkinlikler entegrasyon çalışmalarının da başarılı olmasına katkı sağlayacaktır.

Fraktal geometri düzlem geometrisi olarak tanımlanan Euclid geometrisi ile yakın ilişki içerisindedir ve sıklıkla Euclid geometrisinin elemanlarını kullanmaktadır. Düzlem geometrisi içerisinde birçok fraktal yapı oluşturulup özellikleri incelenebilir. Bu bağlamda fraktal geometrinin öğrencilerin geometri anlama düzeylerine etkisi araştırılabilir. Literatürde henüz bu tür bir çalışmaya rastlanmamıştır.

7. KAYNAKLAR

Adams, T.L. ve Aslan-Tutak, F., 2006. Serving Up Sierpinski!, Mathematics Teaching in The Middle School, 11, 5, 248-251.

Akkan, Y., Atasoy, E., Güven, B., ve Çakıroğlu, Ü., 2008. Aritmetikten Cebire: Örüntü Genelleştirme, 8. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 27-29 Ağustos, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Baki, A., 2001. Bilişim Teknolojisi Işığı Altında Matematik Eğitiminin Değerlendirilmesi. Milli Eğitim Dergisi, 149, 26–31.

Baki, A., 2002. Öğrenenler ve Öğretenler İçin Bilgisayar Destekli Matematik, İstanbul: Ceren-Yayın Dağıtım.

Baki, A., 2008. Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi, Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Bannon, T.J., 1991. Fractals and Transformations, Mathematics Teacher, 84, 178-85.

Barnsley, 1988. Fractals Everywhere, San Diego, CA: Academic Press.

Barton, R., 1990. Chaos and Fractals, Mathematics Teacher, 83, 524-529.

Barton, P.S., 2003. Pascals’s Triangle, Montessori LIFE, 35-36.

Bedford, C.W., 1998. The Case for Chaos, Mathematics Teacher, 91, 4, 276-281.

Bertrand, İ.ve Stephen, D.F., 1995. Advanced Educational Uses of The World Wide Web. http://www.igd.fhg.de/archive/1995_www95/proceedings/papers/89/paper.html 12.12.2007.

Bishop, J.W., 1997. Middle School Students’ Understanding of Mathematical Patterns And Their Symbolic Representation, Doktora Tezi, Illinois State University, USA.

Blair, S.D., 2004. Describing Undergraduates’ Reasoning Within and Across Euclidean Taxicab and Spherical Geometries, Doktora Tezi, Portland State University, USA.

Bogdan, R.C. ve Biklen, S.K., 1998. Qualitative Research For Education: An Introduction to Theory And Methods, Needham Heights, MA: Ally & Bacon.

Bolte, L.A., 2002. A Snowflake Project: Calculating, Analyzing, and Optimizing with The Koch Snowflake. Mathematics Teacher, 95, 6, 414–419.

Bowers, C.S., 1991. On Teaching and Learning The Concept of Fractals, Yüksek Lisans Tezi, Concordia University, Canada.

Bremer, M.E., 1997. An Investigation Of The Effects Of A Unit Of Instruction On Middle And Secondary School Teachers' Knowledge Of And Attitudes Toward The Contemporary Topics Of Chaos And Fractals, Doctoral Dissertation, Graduate School of the University of Missouri-St. Louis, St Louis.

Büyükkaragöz, S., 1995. Program Geliştirme. Kaynak Metinler, Konya: Damla Ofset Matbaacılık ve Ticaret A.Ş.

Camp, D. R., 1991. A Fractal Excursion. Mathematics Teacher. 84, 265-75.

Cederberg, J.H., 2001. A Course in Modern Geometries (2nd edition), USA: Springer-Verlag.

Cibes, M., 1990. The Sierpinski Triangle: Deterministic versus Random Models, Mathematics Teacher, 83, 617-21.

Choate J. ve Picciotto H., 1997. Iterating Linear Function-An Introduction To Dynamical Systems, The Mathematics Teacher, 90, 2, 122-125.

Choate, J., Devaney, R.L., ve Foster, A., 1999. Fractals A Tool Kit of Dynamics Activities, Key Curriculum Press.

Clement, J., 2000. Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability. In Kelly, A.E & Lesh, R.A. (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Coes III, L., 1993. Building Fractal Models with Manipulatives, The Mathematics Teacher, 86, 8, 646–651.

Cohen, L., Manion, L., ve Morrison, K. 2005. Research Methods in Education, Routledge Falmer.

Cohen, L., Manion, L., ve Morrison, K. 2007. Research Methods in Education, Newyork: Taylor & Francis Group.

Çepni, S., 2005. Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş (2.Baskı), Üçyol Kültür Merkezi, Trabzon.

Debnath, L., 2006. A Brief Historical Introduction To Fractals And Fractal Geometry, International Journal of Mathematical Education In Science And Technology, 37,1, 29-50.

Demirel, Ö., 2004. Kuramdan Uygulamaya Eğitimde Program Geliştirme (7. Baskı). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Devaney, R. L., 1990. Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Devaney, R.L., 1997. Putting Chaos into Calculus Courses. Rosenstein, J.G., Franzblau, D.S., Roberts, F.S. (Eds) Discrete Mathematics in The School. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Science,36, 239-253. American Mathematical Society.

Devaney, R.L., 1998. Chaos in The Classroom. Lehrer, R. and Chazan, D. (Eds) Designing Learning Environments For Developing Understanding of Geometry and Space. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers, Mahwah, New Jersey.

Devaney, R.L., 2000. The Mandelbrot And Julia Sets A Tool Kit of Dynamics Activities, USA: Key Curriculum Press,

Devaney, R., L., 2004. Fractal Patterns and Chaos Games, Mathematics Teacher, 98, 4, 228–233.

Ekiz, D., 2003. Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metodlarına Giriş, Ankara: Anı Yayıncılık.

English, L.D. ve Warren, E.A., 1999. Introduction the Variable Through Pattern Exploration, 141-145. Ed: B. Moses, Algebraic Thinking, Grades 9-12: Readings from NCTM's School Based Journals and Other Publications, Reston, Va:NCTM.

Erden, M., 1993. Eğitimde Program Geliştirme. Ankara: Personel Eğitim Merkezi Yayınları No:6.

Falconer, K., 2003. Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications (2nd Edition). England: John Wiley & Sons Ltd.

Feifei, Y., 2005. Diagnostic Assessment of Urban Middle School Student Learning of Pre-algebra Patterns, Doktora Tezi, Ohio State University, USA.

Felber, P., 2000. Fractals Antennas, A Literature Study As A Project For ECE 576. Illinois Institue of Technology.

Fitzpatrick, J.L.; Sanders, J.R.ve Worthen, B.R., 2004. Program Evaluation: An Alternative Approaches and Practical Guidelines. Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Fleener, M.J., 1996. Scientific Worldbuilding on The Edge Of Chaos: High School Students' Beliefs About Mathematics and Science, School Science and Mathematics, 96, 6, 312-320.

Fraboni, M ve Moller, T., 2008. Fractals in The Classroom, Mathematics Teacher, 102, 3, 197-199.

Frame, M.L. ve Mandelbrot, B.B., 2002. Fractals, Graphics and Mathematics Education. USA: MAA.

Frank, M.L., 1988. Problem Solving and Mathematical Beliefs, Arithmetic Teacher, 35, 5, 32-34.

Frantz, M. ve Lazarnick, S., 1991. The Mandelbrot Set In The Classroom, Mathematics Teacher, 84, 3, 173-177.

Ford, R., 2004. Discovering and Exploring Mandelbrot Set Points with a Graphing Calculator. Mathematics Teacher, 98, 1, 38-46.

Garofalo, J., 1989. Beliefs and their influence on mathematical performance. Mathematics Teacher, 82, 502-505.

Gleick, J., 2005. Kaos (Çev. Fikret Üçcan), Tübitak Yayınları.

Gluchoff, A., 2006. Hands-on Fractals and The Unexpected in Mathematics, Mathematics Teacher, 99, 8, 570-575.

Goldenberg, E.P., 1991. Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. Zimmermann, W.& Cunningham, S. (Eds.) Visualization In Teaching And Learning Mathematics. A Project Sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America, Washington, D.C.

Goldin, G.A., 1998. Observing Mathematical Problem Solving Through Task-Based Interviews, Eds. A.R., Teppo, Qualitative Research Methods in Mathematics Mathematics Education, NCTM.

Goldin, G.A: 2000. A Scientific Perspective on Structured Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. In A.E. Kelley & R.A. Lesh, (Eds.) Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (517-545), N.Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Groth, R. E. ve Bergner, J.A., 2006, Preservice Elementary Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Mean, Median, and Mode, Mathematical Thinking and Learning, 8, 1, 37-63.

Güven, B., 2006. Öğretmen Adaylarının Küresel Geometri Anlama Düzeylerinin Karakterize Edilmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Yaz, N., 2005. Fraktal Geometri I. A.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü. Ankara.

Hughes, J.R., 2003. Fractals in a First Year Undergraduate Seminar, Fractals, 11, 1, 109-123.

Hunting, R.P., 1997, Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice, Journal of Mathematical Behaviour, 16, 2, 145-165.

Iovinelli, R.C., 2000. Chaotic Behavior in The Classroom. The Mathematics Teacher,93,.2, 148-152.

Jason, M.H., 2008. Evaluating Programs to Increase Student Achievement. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C.W., Mooney, E.S., Perry, B. ve Putt, I.J. 2000. A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking, Mathematical Thinking and Learning, 2, 4, 269-307.

Jürgens H.; Peitgen H.-O. ve Dietmar S., 1990. The Language of Fractals, Scientific American, 263, 40-47.

Karaman, S. ,2007. Ders Web Sayfaları: Özellikleri, Hazırlanması, Kullanımı ve Öğretim Elemanlarının Tutumları. İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 7,13, 47-68.

Karataş, İ, ve Güven, B., 2003. Problem Çözme Davranışlarının Değerlendirilmesinde Kullanılan Yöntemler: Klinik Mülakatın Potansiyeli, İlköğretim Online, 2, 2, 2-9.

Karatepe, A.; Yıldırım, H.İ.; Şensoy, Ö. ve Yalçın, N., 2004. Fen Bilgisi Öğretimi Amaçlarının Gerçekleştirilmesinde Yeni Programın İçerik Boyutundan Uygunluğu Konusunda Öğretmenlerin Görüşleri. Kastamonu Eğitim Dergisi, 12, 2, 327-338.

Kaye, B., 1989. A Random Walk Through Fractal Dimensions, New York: VCH.

Kelley, P., 1999. Build a Sierpinski Pyramid. Mathematics Teacher, 92, 5, 384–386.

Kern, J. F. & Mauk, C. C., 1990. Exploring Fractals- A Problem- Solving Adventure Using Mathematics And Logo, Mathematics Teacher, 179-244.

Khedre, N.H.A., 2004. On Improving School Maths Curriculum through Fashionable Maths. http://math.unipa.it/~grim/21_project/CiechKhedre.pdf, 12.06.2007.

Komorek, M.; Duit, R.; Bücker, N.; Naujack, B., 2001. Learning Process Studies in the Field of Fractals. Research in Science Education- Past, Present, and Future (H. Behrendt et al (eds)), 95-100, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Langille, M.W., 1996. Studying Students' Sense Making of Fraktal Geometri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Simon Fraser University.

Lannin, J., K., 2005. Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning through Patterning Activities, Mathematical Thinking and Learning, 73, 7, 231-258.

Lin, F.L. ve Yang, K.L. 2004. Differentiation of Students' Reasoning on Linear and Quadratic Geometric Number Patterns, Proceedings of The 28th Conference of

The International Group For The Psychology of Mathematics Education, 4, 457-464.

Lornell, R. ve Westerberg, J., 1999. Fractals in High School: Exploring a New Geometry. Mathematics Teacher, 92, 3, 260–269.

Ma, L., 1999. Knowing and Teaching Elementary Mathematics Teachers’ Understanding of Fundamental Mathematics in China and United States, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mandelbrot, B. B., 1983. The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman and Co.

McKee, R., 1996. Students Making Connections Through Interactions With Fractal Geometry Activities. Yüksek Lisans Tezi, Memorial University of Newfoundland, Canada.

MEB, 1992. Geometri Dersi Programı (10-11. Sınıf), www.ttkb.meb.gov.tr, 3 Mart 2006.

MEB, 2004. Milli Eğitim Bakanlığına Bağlı İlköğretim Okullarında Okutulacak Ders Kitaplarının Yarışma Yoluyla Hazırlanmasına İlişkin Şartname. www.ttkb.meb.gov.tr, 23.Mart 2007.

MEB, 2007. İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu, www.ttkb.meb.gov.tr, 12 Mayıs 2008.

MEB, 2008. İlköğretim Matematik 8. Sınıf Ders Kitabı, Ankara: Devlet Kitapları.

MEB, 2010. Ortaöğretim Geometri Dersi 9-10.Sınıf Taslak Öğretim Programları, www.ttkb.meb.gov.tr, 2 Haziran 2010.

Mellilo, J., A., 1999. An Analysis of Students’ Transition from Arithmetic to Algebriac Thinking, Doctoral Dissertation, Kent State University, Ohio.

Money, E., S., 2002. A Framework for Characterizing Middle School Students' Statistical Thinking, Mathematical Thinking and Learning, 4,1, 23-63.

Murdock, J.; Komischke, E. ve Komischke, E., 2004. Discovering Advance Algebra: An Investigate Approaches. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Naylor, M., 1999. Exploring Fractals in The Classroom. Mathematics Teacher, 92(4), 360–366.

Naylor, M., 2005. Fractal Fraction Fun. http://www.teachingk-8.com 12 Ekim 2006.

NCTM, 1989. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

NCTM, 1991. Professional Standards For Teaching Mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM, 2000. Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Norko, D. E., 1998. Make Room For Fractals. A Thesis Submitted to the School of Graduate Studies in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science. Southern Connecticut State University, New Haven, Connecticut.

Olkun, S. ve Toluk, Uçar, Z., 2007. İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi, Ankara: Maya Akademi.

Özdaş, A.; Tanışlı, D.; Köse, N.Y.ve Kılıç, Ç., 2005. Yeni İlköğretim Matematik Dersi (1-5. Sınıflar) Öğretim Programının Öğretmen Görüşlerine Dayalı Olarak Değerlendirilmesi. Eğitimde Yansımalar: VIII. Yeni İlköğretim Programları Değerlendirme Sempozyumu. Kayseri: Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi Tekışık Eğitim Araştırma Geliştirme Vakfı, 240-255.

Patton, M.Q., 1990. Qualitative Evaluation And Research Methods (2nd ed.) Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc.

Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T. ve Yunker, L. 1991. Fractals For The Classroom: Strategic Activities Volume One, New York, NY: Springer-Verlag.

Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., 1992. Fractals For The Classroom Part One: Introducrion to Fractals and Chaos, New York: Springer-Verlag.

Peitgen, H-O.; Jürgens, H.; Saupe, D., 2004. Chaos and Fractals New Frontiers of Science Second Edition. New York: Springer-Verlag.

Perham, A., E. ve Perham, F., L., 2005. The Power of L-System in Fractal Construction and Theory, Mathematics Teacher, 98, 7, 459–467.

Piaget, J. 1975. The Child’s Conception of The World. Totowa. NJ: Littlefield, Adams.

Raiteri, A. C., 2005. An Action Research On Line To Introduce Fractals In The Teaching And Learning Of Mathematics From Primary To Secondary School http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_codetta.pdf, 10 Aralık 2006.

Sandefur, J. T., 1996. Using Self-Similarity to Find Length, Area, and Dimension. The American Mathematical Monthly,103, 2, 107-120.

Sanders, J.R.; Sullins, C.D., 2006. Evaluating School Programs An Educator’s Guide (3rd edition). Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Satchithananthan, K., 1996. The Development of a Mini Course on Fraktal Geometri For The Community College Mathematics Students. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Rowan College in Mathematics Education.

Schoenfeld, A. H., 1988. When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. Educational Psychologist, *23*(2), 145-166.

Schultz, K., 2001. Seven Ways to Achieve Chaos in Twenty-Four Minutes or Less, Ohio Journal of School Mathematics, 44, 10-13.

Scriven, M, 1967. The Methodology of Evaluation. In R.W. Tyler, R.M. Gagne & M. Scriven (Eds.) Perspectives of Curriculum Evaluation 39-83. Chicago, IL: Rand McNally.

Serra, M., 2008. Discovering Geometry: An Investigative Approach. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Shearer, R. R., 1996. Real or Ideal? DNA Iconography in a New Fractal Era. Art Journal, 55, 1, 64–69.

Simmt, E. ve Davis, B., 1998. Fractal Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics. The Mathematics Teacher, 91, 2, 102-108.

Smith, E., 2003. Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra Throughout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Smith, R.D., 2008. The Dynamics of Internet Traffic: Self-Similarity, Self-Organization, and Complex Phenomena. arxiv.org, 01 Aralık 2008.

Stacey, K., 1989. Finding and Using Patterns in Linear Generalizing Problems, Educational Studies in Mathematics, 20, 147–164.

Steele, D. ve Johanning D., I., 2004. A Schematic–Theoretic View of Problem Solving and Development of Algebraic Thinking, Educational Studies in Mathematics, 57, 65–90.

Thomas, C.S., Thomas, D.A. ve Wallace, M.L., 2002. Finding Infinity in a Snowflake, Learning&Leading with Technology, 29,7, 28-38.

Thomas, D. A., 1989. Investigating Fractal Geometry Using LOGO, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 8, 3, 25- 31.

Tikoo, M., 1998. Integrating Geometry In A Meaningful Way (A Point Of View). Int. J. Math. Educ. Sci. Technology, 29, 5, 663-675.

Uçan, A., 1989. Çağdaş Eğitimde Program Geliştirme Sürecine Genel bir Bakış. İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Sempozyumu Bildiri Özetleri. 15-17 Haziran. Malatya: İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi 51-64.

Üstün, C., 1999. Fraktal Geometri Konusunun Ortaöğretim Programına Uygulanması, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Vacc, N.N., 1999. Exploring Fractal Geometry With Children, School Science and Mathematics, 99,2, 77-83.

Varış, F. (1988). Eğitimde Program Geliştirme. Ankara: Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi Yayınları No: 53.

Wright, D.J., 1996. Dynamical systems and fractals lecture notes. http://www.math.okstate.edu/mathdept/dynamics/lecnotes/lecnotes.html, 5 Kasım 2008.

Wulf, K.M. ve Schave, B. 1984. Curriculum Design: A Handbook for Educators. California: Scott, Foresman and Company.

Yıldırım, C. 2004. Matematiksel Düşünme, İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H., 2006. Nitel Araştırma Yöntemleri, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R.K., 2003. Case Study Research Design and Methods (3rd ed.), USA: Sage Publications, Inc.

Zaskis, R. ve Hazzan, O., 1999. Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions, Journal of Mathematical Behaviour, 17, 4, 429-439.

Zazkis, R. ve Liljedahl, P., 2001. Exploring Multiplicative and Additive Structure of Arithmetic Sequence, Proceedings of the 25th International Conference for Psychology of Mathematics Education. Utrecht, Netherlands.

8. EKLER

Ek 1. Fraktal Geometri için Geliştirilen Programın Konu Sırası ve Kazanımları

Konu1: Fraktal Geometriye Giriş		
Kazanımlar	**Etkinlik Örnekleri**	**Açıklamalar**
1.Çevresinde bulunan nesnelerin şekillerini tanımlar ve bu nesneleri dış görünüşlerinin karmaşıklığına göre sınıflandırır.	• Aşağıda verilen nesnelerin şekillerini tanımlayınız ve bu nesneleri dış görünüşlerine göre sınıflandırınız.(Sizde çevrenizde gördüğünüz farklı nesneleri bu listeye ekleyebilirsiniz)  • Sınıflandırmanıza göre bu nesnelerden hangileri Euclid geometrisinin elemanları kullanılarak tanımlanabilmekte, hangileri tanımlanamamaktadır? Açıklayınız. • Yukarıda verilen ağacın gövdesi gerçekten silindirik midir? Açıklayınız. • Peki, eğrelti otunun yaprakları bir üçgen midir? • Yıldırımlar bir doğru boyunca mı ilerlerler?	Öğrencilerin farklı nesnelerin şekillerini tanımlamalarını sağlayınız. Doğal nesnelerin şekillerini Euclid geometrisini kullanarak tanımlamanın zor olduğunu fark etmelerini sağlayınız.
Konu 2: Geometrik Tekrarlamalar		
Kazanımlar	**Etkinlik Örnekleri**	**Açıklamalar**
1. Başlangıç şekli, üretici ve yörünge terimlerini örneklerle açıklar	• **Başlangıç şekli** bir doğru parçası ve **tekrarlama kuralı** ise “doğru parçasını 3 eşit parçaya böl ve ortadaki parçayı çıkart” şeklinde olan fraktalın ilk 6 tekrarlama sonucu oluşan şeklini çiziniz. ⇓	Öğrencilerin kendilerinin tanımlayacağı üreticilere göre farklı şekiller çizmelerini sağlayınız.

Ek 1'in devamı

<table>
<tr><th>Kazanımlar</th><th>Etkinlik Örnekleri</th><th>Açıklamalar</th></tr>
<tr>
<td>2. Tekrarlanan ekleme ve çıkartmaları kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.</td>
<td>
Başlangıç şekli bir doğru parçası ve tekrarlama kuralı ise "doğru parçasını 3 eşit parçaya böl ve ortadaki parçayı çıkart" şeklinde olan fraktalın ilk 6 tekrarlama sonucu oluşan şeklini çiziniz.
$\Downarrow$
Oluşturduğunuz şekle göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız.
<table>
<tr><th></th><th>Kalan toplam doğru parçası sayısı</th><th>Bir doğru parçasının uzunluğu</th><th>Toplam doğru parçasının uzunluğu</th></tr>
<tr><td>Başlangıç şekli (doğru parçası)</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1. tekrarlama</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. tekrarlama</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. tekrarlama</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n. tekrarlama</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında kalan doğru parçası sayısını ve toplam uzunluğu hesaplayınız.
Kalan doğru parçası sayısı ve toplam uzunluk nasıl değişmektedir?
</td>
<td>Koch eğrisi, Peano eğrisi vb. fraktal şekilleri çizmelerini sağlayabilirsiniz.

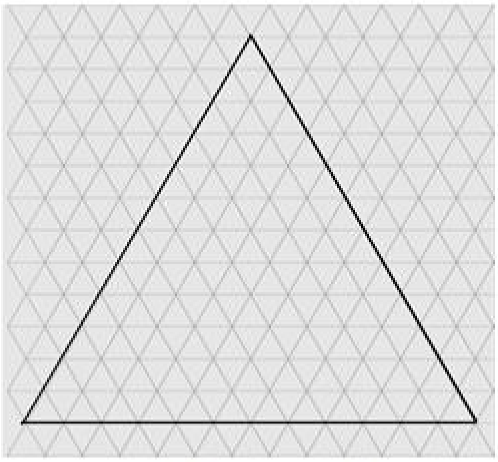
Farklı bilgisayar yazılımları kullanılabilir.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Tekrarlanan dönme ve çevirmeleri kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.</td>
<td>
Başlangıç şekli bir doğru parçası ve tekrarlama kuralı ise "AB doğru parçasında B noktasını A noktası etrafında saat yönünde 45^0 döndür. AB doğru parçasını hipotenüs kabul edecek şekilde döndürdüğün parça üzerinde bir X noktası belirle ve X noktası etrafında A noktasını saatin tersi yönünde 90^0 döndürerek dik kesişen AX ve XA doğru parçalarını oluştur."şeklinde olan fraktalın ilk 4 tekrarlama sonucu oluşan yörüngesini bulunuz.
Oluşturduğunuz şekle göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız.
<table>
<tr><th>Tekrarlama sayısı</th><th>Doğru parçası sayısı</th><th>Bir doğru parçasının uzunluğu</th><th>Toplam uzunluk</th><th>Oluşan köşe sayısı</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Dönme ve çevirmelerde noktaları isimlendirmeyi unutmayınız.

Daha gerçekçi şeklinin oluşturulmasında bilgisayar programlarının kullanılması daha yararlı olacaktır.</td>
</tr>
</table>

Ek 1'in devamı

<table>
<tr><td colspan="3">Konu 3: Fraktalların çevresi, alanı ve hacmi</td></tr>
<tr><td>Kazanımlar</td><td>Etkinlik Örnekleri</td><td>Açıklamalar</td></tr>
<tr><td>1. Fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplar.</td><td>

- Aşağıdaki grid kağıdı yardımıyla tekrarlama kuralı "eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktalarını birleştiriniz, oluşan 4 küçük üçgenden merkezdekini çıkarınız" şeklinde olan fraktalın ilk 4 tekrarlama adımını oluşturunuz.



- Oluşturduğunuz şekle göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız (Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğunu 1 br. olarak alınız.)

<table>
<tr><th>Adım</th><th>Eklenen kenar sayısı</th><th>Eklenen her bir kenarın uzunluğu</th><th>Bu adıma kadar eklenen toplam kenar uzunluğu</th><th>Toplam kenar uzunluğu (Çevre)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

</td><td>Çevre, alan ve hacim hesaplamalarında geometrik serilerle ilgili öğrencilerin ön bilgilerini yordayınız.</td></tr>
<tr><td>2. Fraktalların çevre-alan ve hacim arasındaki ilişki ile Euclid geometrisindeki şekillerin çevre-alan-hacim arasındaki ilişkileri karşılaştırır, benzerlik ve farklılıkları belirler.</td><td>

- Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanı nasıl değişmektedir? Öklit geometrisindeki nesnelerin çevreleri ve alanları arasındaki ilişki ile fraktalların çevreleri ve alanları arasındaki ilişkiyi karşılaştırınız.
- Sierpinski üçgeninin oluşum kuralında üçgenin içerisinden üçgenler kesip çıkarılmaktaydı. Buna göre üçgeninin içerisinden asla çıkarılmayan noktalar var mı? Varsa kaç tane bu şekilde nokta vardır?
- Sierpinski üçgeninin alanı n, adım sayısı sonsuza yaklaştığında sıfıra gitmektedir. Eğer Sierpinski üçgeninin içerisinde sonsuz tane silinmeyen nokta varsa buna göre alan nasıl sıfıra yaklaşmaktadır?

soruları ile Fraktallar ve Euclid şekillerinin çevre ve alanları arasındaki farklılıklar belirlenmeye çalışılır.</td><td></td></tr>
</table>

Ek 1'in devamı

<table>
<tr><th colspan="3">Konu 4: Cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri</th></tr>
<tr><th>Kazanımlar</th><th>Etkinlik Örnekleri</th><th>Açıklamalar</th></tr>
<tr>
<td>1. Cebirsel tekrarlama kuralları kullanarak farklı başlangıç noktaları için yörüngeler bulur, bu yörüngelere göre başlangıç noktasının türünü belirler</td>
<td>Aşağıda verilen başlangıç noktalarının verilen tekrarlama kurallarına göre yörüngelerini hesaplayınız. Yörüngeler nasıl hareket etmektedir? Sınırsız şekilde mi büyüyor? Periyodik mi? Yoksa sabit bir noktaya mı gidiyor?
<table>
<tr><th>Tekrarlama kuralı</th><th>Başlangıç değeri</th><th>Yörüngeler</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = |z_n| - 2$</td><td>z_0=-1</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=0</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = \frac{z_n}{2}$</td><td>z_0=4+4i</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = 2z_n - 1$</td><td>z_0=1</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=-2</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = z_n^2$</td><td>z_0=1+i</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=i</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = \sqrt{z_n}$</td><td>z_0=16</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=1/4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = z_n^2 + 1$</td><td>z_0=0</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=-1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = z_n^2 - 0{,}5$</td><td>z_0=0</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$z_{n+1} = z_n^2 - 1$</td><td>z_0=0</td><td></td></tr>
<tr><td>z_0=2</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Yörüngelerin bu şekilde periyodik davrandıkları durumda seçilen başlangıç noktasına mahkum nokta denir. Yörüngelerin bu şekilde sınırsız bir olarak sonsuza gitmesi durumunda seçilen başlangıç noktasına kaçak nokta denir.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Karmaşık düzlemde Julia kümesini tanımlar.</td>
<td>Julia kümesini karmaşık sayılar sisteminde $z_{n+1}=z_n^2+c$ şeklindeki tekrarlama kuralı sonucu mahkum ve periyodik noktaların oluşturduğu noktalar kümesi olarak tanımlanır.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3. Verilen başlangıç noktalarından hangilerinin Julia kümesi içerisinde hangilerinin dışarıda olduğuna karar verir.</td>
<td>
Hesap makinesi ya da Excel ile aşağıdaki tekrarlama kurallarına göre verilen başlangıç değerlerinin yörüngelerinin nasıl hareket ettiklerini belirleyiniz ve her bir yörüngenin modülünün nasıl değiştiğini inceleyiniz.
<table>
<tr><th>Tekrarlama Kuralı</th><th>$z \to z^2 - 1{,}98$</th></tr>
<tr><th>Başlangıç Değeri</th><th>Yörüngeler</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>0,112i</td><td></td></tr>
<tr><td>0,01+0,1i</td><td></td></tr>
<tr><td>-0,12-0,5i</td><td></td></tr>
<tr><th>Tekrarlama Kuralı</th><th>$z \to z^2 - 0{,}12 + 0{,}75i$</th></tr>
<tr><th>Başlangıç Değeri</th><th>Yörüngeler</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>-0,1+0,3i</td><td></td></tr>
<tr><td>0,3+0,2i</td><td></td></tr>
<tr><td>0,4+0,01i</td><td></td></tr>
<tr><th>Tekrarlama Kuralı</th><th>$z \to z^2 + 0{,}38 + 0{,}34i$</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>-0,1+0,1i</td><td></td></tr>
<tr><td>0,02-0,03i</td><td></td></tr>
<tr><td>1-i</td><td></td></tr>
</table>
Verilen tekrarlama kurallarına göre Julia kümesi içerisindeki farklı başlangıç noktalarının yörüngelerinin hareketini ne belirler.
</td>
<td>Julia kümelerinin oluşumu c-sabitine bağlı, başlangıç noktasından bağımsızdır.</td>
</tr>
</table>

Ek 1'in devamı

<table>
<tr><th>Kazanımlar</th><th>Etkinlik Örnekleri</th><th>Açıklamalar</th></tr>
<tr><td>4. Farklı c-parametreleri için oluşan Julia kümelerinin öz-benzer parça sayısı ile bu Julia kümelerini oluşturan noktaların yörüngelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi keşfeder.</td><td>

- Aşağıdaki tabloda verilen farklı c-parametreleri için oluşan Julia kümelerinin şekillerini Fragtive programında çiziniz. Periyotları ile parça sayıları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

<table>
<tr><th>ç-parametresi</th><th>Periyodu</th><th>Parça Sayısı</th></tr>
<tr><td>-0,1-0,75i</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-0,5+0,55i</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,25i</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,39+0,222i</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-1+0,12i</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td>Julia kümesini oluşturan noktaların yörüngelerinin periyotları ile Julia kümesinin tamamen benzer parça sayısı eşittir.</td></tr>
<tr><td>5. Karmaşık düzlemde Mandelbrot kümesini tanımlar ve özelliklerini belirler.</td><td>Mandelbrot kümesi karmaşık sayılar sisteminde başlangıç noktası sıfır ve $z_{n+1}=z_n^2+c$ şeklindeki tekrarlama kuralı sonucu mahkum ve periyodik noktaların oluşturduğu noktalar kümesi olarak tanımlanır.</td><td></td></tr>
<tr><td>6. Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkileri belirler.</td><td>

- Aşağıda Mandelbrot kümesinin ana kardiyoidi içerisinden seçilmiş c-parametreleri görülmektedir. Bu parametrelerin yörüngelerini inceleyiniz. Yörüngeler nasıl hareket etmektedir?

<table>
<tr><th>ç-parametresi</th><th>Yörünge</th></tr>
<tr><td>0+0i</td><td></td></tr>
<tr><td>-0,31+0,26i</td><td></td></tr>
<tr><td>-0,36-0,54i</td><td></td></tr>
<tr><td>0,27+0,32i</td><td></td></tr>
</table>

- Fragtive programı yardımıyla bu c-parametrelerinin oluşturduğu Julia kümelerini çiziniz. Julia kümelerinin periyotlarını belirleyiniz. ç-parametrelerinin yörüngeleri ile Julia kümelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
</td><td>Mandelbrot kümesinin doldurulmuş Julia kümelerinin bir birleşimidir.</td></tr>
</table>

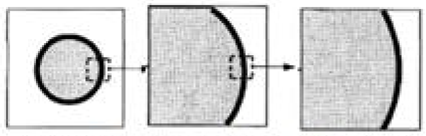
Ek 1'in devamı

<table>
<tr><td colspan="3">Konu 5: Öz-benzerlik</td></tr>
<tr><td>Kazanımlar</td><td>Etkinlik Örnekleri</td><td>Açıklamalar</td></tr>
<tr><td>1. Çevresinde bulunan nesneleri parça-bütün benzerliğine göre sınıflandırır, bunlardan fraktal olanları belirler ve Euclid şekilleriyle farklılıklarını açıklar.</td><td>

- Aşağıda verilen şekillerin herhangi bir parçasını alıp büyüttüğümüzde ya da herhangi bir parçasına adım adım yaklaştığımızda ne tür şekillerle karşılaşırsınız? Tanımlayınız.

- Çemberin bir kenarına adım adım yaklaştığımızda ne görmektesiniz? Çemberin yaklaştığınız kenarını büyüttüğümüzde yine bir çember görebiliyor musunuz?



- Benzer şekilde topun bir kenarına adım adım yaklaştığımızda ne görmektesiniz? Topa yaklaştığınız kenarını büyüttüğümüzde yine bir top görebiliyor musunuz?

</td><td>Parça-bütün karşılaştırmasına göre fraktal şekillerin belli oranlarda küçülen benzer parçalarını içerdikleri ifade edilir.</td></tr>
<tr><td>2. Öz-benzerliği tanımlar ve öz-benzer şekillerin büyüme oranları ile öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkiyi belirler.</td><td>

Sierpinski üçgeni parçaları ile Sierpinski üçgeninin bütününü birlikte düşünün aralarında nasıl bir ilişki görmektesiniz? Yazınız.

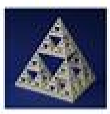
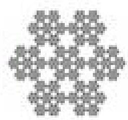
Sierpinski üçgeni içerisinde 4 oranında büyüttüğümüzde ana şeklin tamamen aynısı olan kaç öz-benzer parça bulunur? Bu parçaları işaretleyiniz.

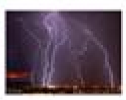
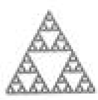
Yukarıda yaptıklarınızı dikkate alarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

<table>
<tr><td></td><td>Başlangıç şekli</td><td>1. Adım</td><td>2. Adım</td><td>3. Adım</td><td>...</td><td>n. Adım</td></tr>
<tr><td>Büyütme oranı</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td>Öz-benzer parça sayısı</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>...</td><td></td></tr>
</table>

</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Öz-benzerlik türlerini tanımlar ve verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini belirler</td><td>

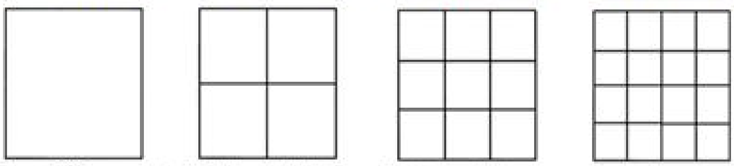
- Aşağıda verilen fraktalları inceleyiniz. Bu fraktalların öz-benzerliklerinin şekillerin hangi bölgelerinde (şeklin tamamında mı?, bazı yerlerinde mi, yoksa sadece bir noktasında mı?) olduğuna karar veriniz. Verdiğiniz karara göre fraktalları sınıflandırınız.

</td><td>Basit dallanma süreçlerinin tekrarlanması sonucu oluşan fraktal yapıların yaklaşık öz-benzer, spiraller sonucu oluşan fraktal yapıların noktasal öz-benzer ve şeklin her bölgesinde aynı öz-benzerlik sağlanıyorsa buna da tamamen öz-benzerlik denir</td></tr>
</table>

Ek 1’in devamı

Konu 6: Fraktal boyut		
Kazanımlar	**Etkinlik Örnekleri**	**Açıklamalar**
1. Çevresindeki nesneleri Euclid geometrisi anlamında boyutlarına göre sınıflandırır ve bu nesnelerden dış görünüşleri düzgün olanların boyutları ile dış görünüşleri girintili, çıkıntılı olanların boyutlarını karşılaştırır.	• Alüminyum kâğıt parçalarınızı elinize alınız. Alüminyum kâğıdın kalınlığı çok küçük olduğundan bunu ihmal ettiğimizi düşünelim. Böylece alüminyum kâğıdı 2-boyutlu olarak kabul edelim.  • Alüminyum kâğıdı elinizde buruşturarak bir top haline getiriniz. Oluşan şekli inceleyiniz. Bu şeklin boyutu nedir? Açıklayınız.  • Oluşturduğumuz topu dikkatlice açınız. Oluşan şeklin görünüşünü tanımlayınız? Bu şeklin boyutu nedir? Tartışınız.  • Son oluşan şekil ile bir önceki adımda oluşan şekli karşılaştırınız. Her iki şekil arasında ne tür farklılıklar vardır? Son oluşan şeklin boyutu bir önceki şeklin boyutuyla aynıdır diyebilir miyiz? Tartışınız.	
2. Tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını tanımlar ve bu fraktalların boyutlarını hesaplar.	**A.** Aşağıda bir doğru parçası ve onun belli küçülme oranlarına sahip öz-benzer parçaları görülmektedir.  Başlangıç doğru parçası 1 br uzunluğunda 1 tane öz-benzer parçaya sahip $1=1^1$ Her biri ¼ küçülme oranına sahip 4 öz-benzer doğru parçası $4=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4^1$ Her biri 1/8 küçülme oranına sahip 8 öz-benzer doğru parçası $8=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8^1$ Yukarıda verilen şekilleri incelediğinizde doğru parçalarının **küçülme oranları** ile **öz-benzer parça sayıları** arasında nasıl bir ilişki bulunmaktadır? Yazınız. $Öz-benzer\ parça\ sayısı=\left(\frac{1}{\dots\dots\dots\dots}\right)^{(\dots)}$ **B.** Aşağıda bir kare ve onun belli küçülme oranlarına sahip öz-benzer parçaları görülmektedir.  Başlangıç şekli kenar uzunluğu 1br. olan kare 1 öz-benzer parçaya sahip $1=1$ Her bir kenarı ½ küçülme oranında 4 öz-benzer parçaya sahip $4=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2=2^2$ Her bir kenarı 1/3 küçülme oranında 9 öz-benzer parçaya sahip $9=\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2=3^2$ Her bir kenarı ¼ küçülme oranında 16 öz-benzer parçaya sahip $16=\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2=4^2$ Yukarıda verilen şekilleri incelediğinizde karelerin **küçülme oranları** ile **öz-benzer parça sayıları** arasında nasıl bir ilişki bulunmaktadır? Yazınız. $Öz-benzer\ parça\ sayısı=\left(\frac{1}{\dots\dots\dots\dots}\right)^{(\dots)}$	Öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranı arasındaki ilişki verilen şeklin boyutunu bulmayı sağlamaktadır.

Ek 1'in devamı

Kazanımlar	Etkinlik Örnekleri	Açıklamalar
3. Kıyı şeridi gibi yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada uzunluk ölçme yöntemini kullanır.	Türkiye'nin kıyı şeridinin uzunluğu ne kadardır? sorusu tartışılır. Bu sorunun yanıtının kıyı şeridine ne kadar yaklaşıldığına ve kullanılan ölçme aracının uzunluğuna bağlı olduğu vurgulanır. Eğer bir harita ve bir cetvel kullanılarak kıyı şeridinin uzunluğu hesaplanmaya çalışılırsa belli bir sonuç elde edilir. Eğer kıyı şeridi adımlanarak ölçülmeye çalışılırsa daha farklı ve daha büyük bir sonuç elde edilir. Ancak bulunan sonuçta yaklaşık bir değerdir. Daha doğru bir sonuca ulaşmak için her bir girintinin, kayanın, taşın, çakılın, kumun uzunluğunun ölçülmesi gerekir. Sonuçta kıyı şeridinin uzunluğunun her bir ayrıntılı ölçmede daha da arttığı vurgulanarak sonsuza yaklaştığı üzerinde durulur. Bu bağlamda kıyı şeridi gibi fraktal yapıları tanımlamada (sayısal olarak) fraktal boyutların oldukça kullanışlı kavramlar olduğu vurgulanır.	Fraktal boyutun şeklin karmaşıklık derecesi olduğunu ifade eder.
4. Yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada kutu sayma metodunu kullanır.	Bir ağacın boyutunun nasıl hesaplanacağı sorulur ve daha verilen iki metodunda bu fraktalın boyutunu hesaplamada yetersiz kaldığını görmeleri beklenir.	

Konu 7: Kaos

Kazanımlar	Etkinlik Örnekleri	Açıklamalar
1. Rastgele olarak ifade edilen bir süreç sonunda düzgün ve kurallı örüntülerin oluşabileceğini keşfeder.	Aşağıda verilen adımları takip ederek Kaos oyununu oynayınız. Verilen A, B ve C köş noktalarının oluşturduğu iç bölgede bir z_0 başlangıç noktası seçiniz. Daha sonra bir za atınız. Atılan zara göre tekrarlama kuralı: "Eğer zarın değeri • 1 ya da 2 gelirse z_0 başlangıç değeri ile A köşesinin orta noktasını bulu işaretleyiniz. • 3 ya da 4 gelirse z_0 başlangıç değeri ile B köşesinin orta noktasını bulu işaretleyiniz. • 5 ya da 6 gelirse z_0 başlangıç değeri ile C köşesinin orta noktasını bulu işaretleyiniz." İşaretlediğiniz yeni noktayı z_1 ile gösteriniz. Artık yeni başlangıç noktanız z_1 oldu. Şimd aynı işlemi z_1 noktası için tekrarlayınız. Tekrarlama işlemine devam ettiğinizde z_0, z_1, z z_3, … noktalar dizisi elde edilir. Bu noktaların yerini işaretleyiniz.	Öncelikle kağıt kalemle Kaos oyununu oynatınız. Daha sonra uygun bir bilgisayar programını kullanınız.

Ek 1’in devamı

Kazanımlar	Etkinlik Örnekleri	Açıklamalar
	7. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız. Oyunda tekrarlama kuralını “sağ ve sol alt köşelere başlangıç noktasının hareketi ½ oranında ve üst köşeye ise 2/3 oranında olsun” şeklinde değiştirirsek bu durumda yine Sierpinski üçgeni oluşur mu? Açıklayınız. Eğer oluşmazsa ne tür bir şekil oluşur? Tanımlayınız. **8.** http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız.Kaos oyununu iki nokta için oynayınız. Başlangıç şekli olarak A ve B köşe uç noktaları arasında bir z_0 noktası alınız. Tekrarlama kuralı “bir bozuk para havaya atıldığında eğer tura gelirse başlangıç noktası A köşe noktasına 1/3 oranında yaklaşsın, eğer yazı gelirse B köşe noktasına 1/3 oranında yaklaşsın.” olarak verilsin. Bu durumda oyun sonunda oluşacak şekli tanımlayınız. **9.** http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız. 4 köşe noktasını bir karenin köşe noktaları yapınız. Başlangıç noktasının köşe noktalara olan hareket oranı ½ olsun. Oluşan şekli tanımlayınız.	Her kaos oyunu sonucu mutlaka bir fraktal şekil oluşmak zorunda değildir. Farklı noktalara ve farklı tekrarlama kurallarına göre oynanan Kaos oyunları sonucu oluşacak şekillerden fraktal olanları tahmin eder
2. Kaos teorinin kullanıldığını disiplinleri ifade eder ve bu teoriyi kullanarak uygulamalar yapar.	• Bir ormanda bulunan tavşanların nüfus değişimi f(x)=kx şeklinde gösterilmektedir. Burada x, tavşanların şuan ki nüfuslarını, f(x) gelecekteki nüfuslarını ve k ise sabit bir sayı olarak doğurganlık oranlarını göstermektedir. • Hangi k değerleri için tavşan nüfusu gitgide azalarak yok olacaktır? • Hangi k değerleri için tavşan nüfusu sınırsız şekilde artacaktır? • Eğer tavşanların nüfusu sürekli artarsa ortamda yiyecek sıkıntısı oluşacaktır. Bu durum nüfuslarının artmasını engelleyecek ve belki de yok olmalarına neden olacaktır. Yiyecek sıkıntısı göz önüne alındığında tavşanların nüfusları f(x)=kx(L-x) şeklinde bir denklemle belirlenmiştir. Burada f(x) gelecekteki tavşan nüfusunu, k sabiti doğurganlık oranını, x şu anki tavşan nüfusunu ve L ise maksimum tavşan nüfusu göstermektedir. Yazılan bu fonksiyon kaç değişkenli bir fonksiyondur? • L=1 olarak alınırsa x hangi aralıkta alınmalıdır? • Başlangıçtaki tavşan nüfusu 0,5 ile gösterilirse bu durumda f(x)=kx(1-x) tekrarlama kuralını kullanarak aşağıda verilen k-değerleri için yörüngeler bulunuz.	Kaos teorinin ekoloji, hava durumu tahmini ve borsa işlemleri gibi birçok disiplinde kullanıldığını ifade eder. Kaos teoride sıklıkla çalışılan nüfus artışı tahmininin nasıl yapıldığını keşfeder.

Ek 2: Kullanılan Çalışma Yaprakları

ÇALIŞMA YAPRAĞI-1

- Aşağıda verilen nesnelerin şekillerini tanımlayınız ve bu nesneleri dış görünüşlerine göre sınıflandırınız.(Sizde çevrenizde gördüğünüz farklı nesneleri bu listeye ekleyebilirsiniz)










- Sınıflandırmanıza göre bu nesnelerden hangileri Euclid geometrisinin elemanları kullanılarak tanımlanabilmekte, hangileri tanımlanamamaktadır? Açıklayınız.

- Yukarıda verilen ağacın gövdesi gerçekten silindirik midir? Açıklayınız.

- Peki, eğrelti otunun yaprakları bir üçgen midir?

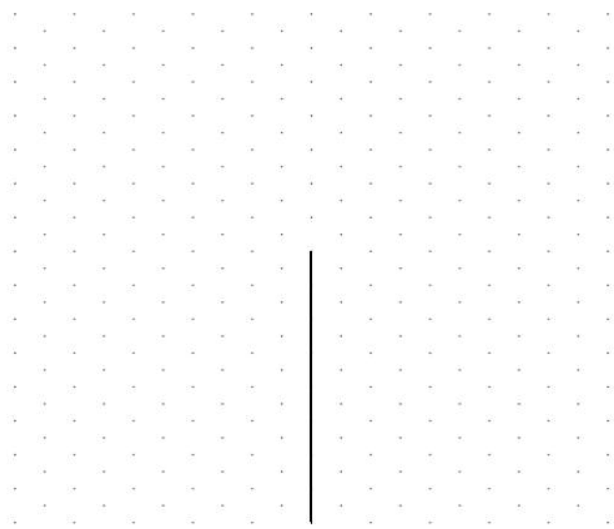
- Yıldırımlar bir doğru boyunca mı ilerlerler?

- O halde bu nesnelerin şekillerini matematiği kullanarak nasıl tanımlayabiliriz?

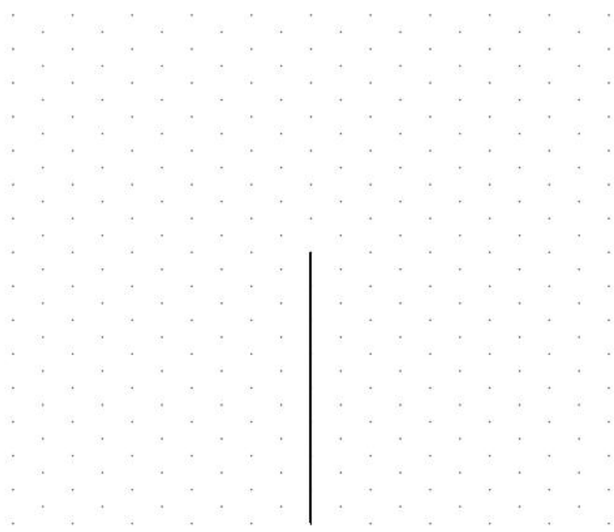
Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-2

- Aşağıda 8 br. uzunluklu bir doğru parçası verilmiştir. Bu doğru parçasının yarısı uzunluğunda iki doğru parçasını aralarındaki açı 120^0 olacak şekilde 8 br. uzunluklu doğru parçasının ucuna ekleyiniz. Çizdiğiniz her yeni doğru parçası için bu işlemi tekrar ediniz. (Bu işlemi en az 5 defa tekrarlayınız)



- Doğru parçalarının arasındaki açıyı 90^0 olarak değiştiriniz ve şekli yeniden çiziniz. (Bu işlemi en az 5 defa tekrarlayınız)
- Bu kez aralarındaki açı 60^0 olan üç doğru parçası için oluşacak şekli çiziniz. (Bu işlemi en az 5 defa tekrarlayınız)



Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-3

- **Başlangıç şekli** bir doğru parçası ve **tekrarlama kuralı** ise "doğru parçasını 3 eşit parçaya böl ve ortadaki parçayı çıkart" şeklinde olan fraktalın ilk 6 tekrarlama sonucu oluşan şeklini çiziniz.

$\Downarrow$

- Oluşturduğunuz şekle göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız.

	Kalan toplam doğru parçası sayısı	**Bir doğru parçasının uzunluğu**	**Toplam doğru parçasının uzunluğu**
Başlangıç şekli (doğru parçası)	1	1	1
1. tekrarlama			
2. tekrarlama			
3. tekrarlama			
…			
n. tekrarlama			

- n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında kalan doğru parçası sayısını ve toplam uzunluğu hesaplayınız.

- Kalan doğru parçası sayısı ve toplam uzunluk nasıl değişmektedir?

- Tekrarlama işlemine devam ettiğinizde doğru parçasında asla silinmeyen noktalar var mıdır? Eğer varsa bu noktaları yazınız.

-

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-4

- **Başlangıç şekli** bir doğru parçası ve **tekrarlama kuralı** ise "AB doğru parçasında B noktasını A noktası etrafında saat yönünde 45^0 döndür. AB doğru parçasını hipotenüs kabul edecek şekilde döndürdüğün parça üzerinde bir X noktası belirle ve X noktası etrafında A noktasını saatin tersi yönünde 90^0 döndürerek dik kesişen AX ve XA doğru parçalarını oluştur."şeklinde olan fraktalın ilk 4 tekrarlama sonucu oluşan **yörüngesini** bulunuz.

- Oluşturduğunuz şekle göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız.

Tekrarlama sayısı	Doğru parçası sayısı	Bir doğru parçasının uzunluğu	Toplam uzunluk	Oluşan köşe sayısı
0	1	1	1	0
1				
2				
3				
…				
n				

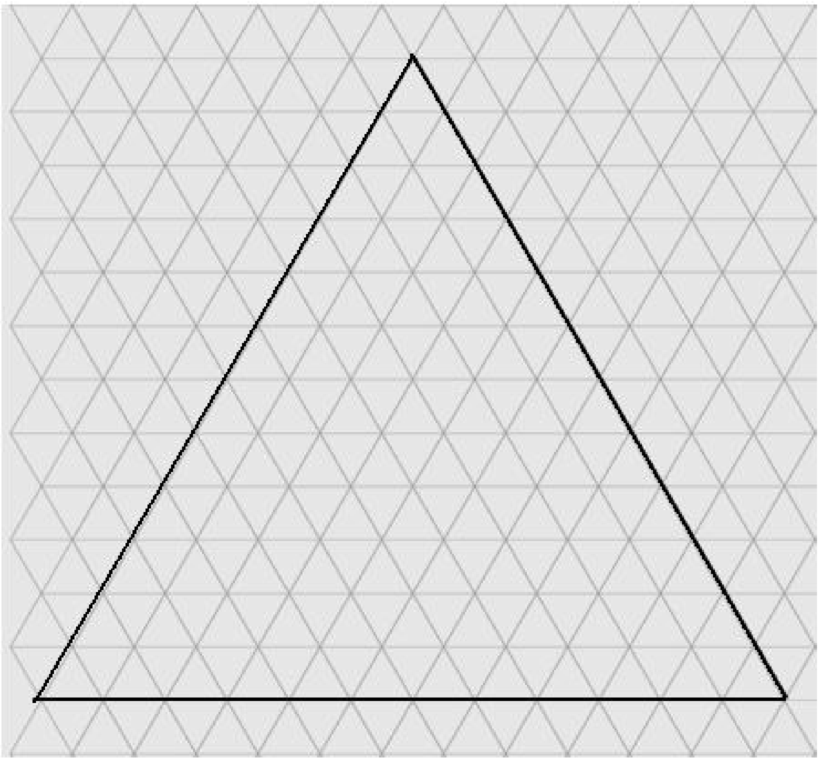
- n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında fraktal ejderi oluşturan doğru parçası sayısını ve ejderin toplam uzunluğunu hesaplayınız.

- Fraktal ejderi oluşturan doğru parçası sayısı ve ejderin toplam uzunluğu nasıl değişmektedir?

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-5

- Aşağıdaki grid kağıdı yardımıyla tekrarlama kuralı "eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktalarını birleştiriniz, oluşan 4 küçük üçgenden merkezdekini çıkarınız" şeklinde olan fraktalın ilk 4 tekrarlama adımını oluşturunuz.



- Oluşturduğunuz şekle göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız (Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğunu 1 br. olarak alınız.)

Adım	Eklenen kenar sayısı	Eklenen her bir kenarın uzunluğu	Bu adıma kadar eklenen toplam kenar uzunluğu	Toplam kenar uzunluğu (Çevre)
0	0	0	0	3
1				
2				
3				
…				
n				

Ek 2'nin devamı

- Sierpinski üçgeninin çevresi her bir adımda bir öncekine göre nasıl değişmektedir? Buna göre n adım sayısı sonsuza yaklaşırken çevreyi hesaplayınız.

- Benzer şekilde aşağıda verilen tabloyu kullanarak Sierpinski üçgeninin alanını hesaplayınız.

Adım	Çıkarılan üçgen sayısı	Çıkarılan her bir üçgenin alanı	Çıkarılan Toplam alan
0	0	0	0
1			
2			
3			
…			
n			

- n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında Sierpinski üçgeninden çıkarılan toplam alanı hesaplayınız.

- Elde ettiğiniz sonuçlara göre n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında Sierpinski üçgeni fraktalının alanını bulunuz.

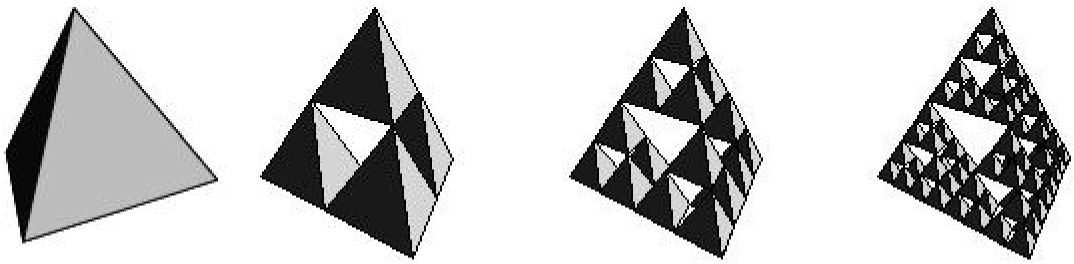
- Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanı nasıl değişmektedir? Öklit geometrisindeki nesnelerin çevreleri ve alanları arasındaki ilişki ile fraktalların çevreleri ve alanları arasındaki ilişkiyi karşılaştırınız.

- Sierpinski üçgeninin oluşum kuralında üçgenin içerisinden üçgenler kesip çıkarılmaktaydı. Buna göre üçgeninin içerisinden asla çıkarılmayan noktalar var mı? Varsa kaç tane bu şekilde nokta vardır?

- Sierpinski üçgeninin alanı n, adım sayısı sonsuza yaklaştığında sıfıra gitmektedir. Eğer Sierpinski üçgeninin içerisinde sonsuz tane silinmeyen nokta varsa buna göre alan nasıl sıfıra yaklaşmaktadır?

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-6



- Yukarıda ilk 4 tekrarlamadaki şekli görünen Sierpinski çokyüzlüsünün oluşum kuralını yazınız.
- Sierpinski çokyüzlüsünün orta kısmında yer alan büyük boş bölgenin şeklini tanımlayınız?
- Sierpinski çokyüzlüsünün bir kenarını 1 br. kabul ederek aşağıda verilen tablo yardımıyla toplam kenar uzunluğu, yüzey alanı ve hacmini hesaplayınız

Adım sayısı	Dörtyüzlü sayısı	Dörtyüzlünün Bir kenar uzunluğu	Toplam kenar uzunluğu	Bir yüzün alanı	Toplam Yüzey Alanı	Bir dörtyüzlünün hacmi	Toplam Hacim
0							
1							
2							
3							
…							
n							

- n, tekrarlama sayısı sonsuza giderken Sierpinski çokyüzlüsünün toplam kenar uzunluğunu hesaplayınız.
- n, tekrarlama sayısı sonsuza giderken Sierpinski çokyüzlüsünün toplam yüzey alanı nasıl değişmektedir?
- n, tekrarlama sayısı sonsuza giderken Sierpinski çokyüzlüsünün toplam hacmini hesaplayınız.

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI- 7

1. $f(x)=x^2+1$, $x \in R$ fonksiyonu için $f(0)=1$ ise $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ değerlerini bulunuz.

2. $f(z_{n+1})=z_n+i$, $z \in C$ kompleks fonksiyonu için $f(z_0)=-i$ ise $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$, $f(z_4)$, $f(z_5)$ değerlerini bulunuz.

3. Aşağıda verilen başlangıç noktalarının verilen tekrarlama kurallarına göre yörüngelerini hesaplayınız. Yörüngeler nasıl hareket etmektedir? Sınırsız şekilde mi büyüyor? Periyodik mi? Yoksa sabit bir noktaya mı gidiyor?

Tekrarlama kuralı	**Başlangıç değeri**	**Yörüngeler**
$z_{n+1} = \lvert z_n \rvert - 2$	$z_0=-1$	
	$z_0=0$	
$z_{n+1} = \frac{z_n}{2}$	$z_0=4+4i$	
	$z_0=1$	
$z_{n+1} = 2z_n - 1$	$z_0=1$	
	$z_0=-2$	
$z_{n+1} = z_n^2$	$z_0=1+i$	
	$z_0=i$	
$z_{n+1} = \sqrt{z_n}$	$z_0=16$	
	$z_0=1/4$	
$z_{n+1} = z_n^2 + 1$	$z_0=0$	
	$z_0=-1$	
$z_{n+1} = z_n^2 - 0{,}5$	$z_0=0$	
	$z_0=1$	
$z_{n+1} = z_n^2 - 1$	$z_0=0$	
	$z_0=2$	

Ek 2’nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-8

- Hesap makinesi ya da Excel ile aşağıdaki tekrarlama kurallarına göre verilen başlangıç değerlerinin yörüngelerinin nasıl hareket ettiklerini belirleyiniz ve her bir yörüngenin modülünün nasıl değiştiğini inceleyiniz.

Tekrarlama Kuralı	$\boldsymbol{z \to z^2 - 1,98}$
Başlangıç Değeri	**Yörüngeler**
0	
0,112i	
0,01+0,1i	
-0,12-0,5i	
Tekrarlama Kuralı	$\boldsymbol{z \to z^2 - 0,12 + 0,75i}$
Başlangıç Değeri	**Yörüngeler**
0	
-0,1+0,3i	
0,3+0,2i	
0,4+0,01i	
Tekrarlama Kuralı	$\boldsymbol{z \to z^2 + 0,38 + 0,34i}$
0	
-0,1+0,1i	
0,02-0,03i	
1-i	

- Verilen tekrarlama kurallarına göre Julia kümesi içerisindeki farklı başlangıç noktalarının yörüngelerinin hareketini ne belirler.

- Fraqtive programını kullanarak tablodaki Julia kümelerini çiziniz. Oluşan Julia kümelerinin şekillerini inceleyiniz. Gözlemlerinize göre Julia kümesinin oluşumu neye bağlıdır? Açıklayınız.

Ek 2'nin devamı

- Aşağıdaki tabloda verilen farklı c-parametreleri için oluşan Julia kümelerinin şekillerini Fraqtive programında çiziniz. Periyotları ile parça sayıları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

c-parametresi	Periyodu	Parça Sayısı
-0,1-0,75i		
-0,5+0,55i		
0,25i		
0,39+0,222i		
-1+0,12i		

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-9

- Aşağıda Mandelbrot kümesinin ana kardiyoidi içerisinden seçilmiş c-parametreleri görülmektedir. Bu parametrelerin yörüngelerini inceleyiniz. Yörüngeler nasıl hareket etmektedir?

c-parametresi	Yörünge
0+0i	
-0,31+0,26i	
-0,36-0,54i	
0,27+0,32i	

- Fraqtive programı yardımıyla bu c-parametrelerinin oluşturduğu Julia kümelerini çiziniz. Julia kümelerinin periyotlarını belirleyiniz. c-parametrelerinin yörüngeleri ile Julia kümelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

- Benzer şekilde Mandelbrot kümesinin ön tarafında bulunan soğan içerisinden seçilmiş c-parametrelerinin yörüngelerini inceleyiniz. Yörüngeler nasıl hareket etmektedir?

c-parametresi	Yörünge
-1-0,05i	
-1+0,2i	
-1,24	
-0,8+0,1i	

- Fraqtive programı yardımıyla bu c-parametrelerinin oluşturduğu Julia kümelerini çiziniz. Julia kümelerinin periyotlarını belirleyiniz. c-parametrelerinin yörüngeleri ile Julia kümelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
- Mandelbrot kümesinin üst tarafında bulunan soğan içerisinden seçilmiş birkaç c-parametresinin yörüngelerini inceleyiniz. Yörüngeler nasıl hareket etmektedir?

c-parametresi	Yörünge
-0,014+0,812i	
-0,186+0,743i	
-0,06+0,704i	

Ek 2'nin devamı

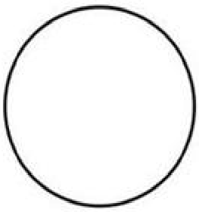
- Fraqtive programı yardımıyla bu c-parametrelerinin oluşturduğu Julia kümelerini çiziniz. Julia kümelerinin periyotlarını belirleyiniz. c-parametrelerinin yörüngeleri ile Julia kümelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

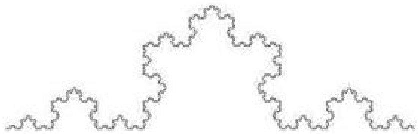
- Fraqtive programı yardımıyla Mandelbrot kümesinin farklı soğanları içerisinden seçeceğiniz farklı c-parametreleri ile bu parametrelere göre oluşan Julia kümeleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

Ek 2'nin devamı

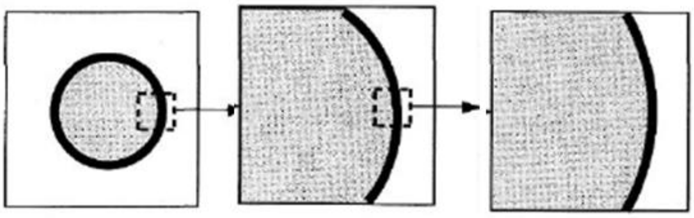
ÇALIŞMA YAPRAĞI-10

- Aşağıda verilen şekillerin herhangi bir parçasını alıp büyüttüğünüzde ya da herhangi bir parçasına adım adım yaklaştığınızda ne tür şekillerle karşılaşırsınız? Tanımlayınız.



- Çemberin bir kenarına adım adım yaklaştığınızda ne görmektesiniz? Çemberin yaklaştığınız kenarını büyüttüğünüzde yine bir çember görebiliyor musunuz?



- Benzer şekilde topun bir kenarına adım adım yaklaştığınızda ne görmektesiniz? Topa yaklaştığınız kenarını büyüttüğünüzde yine bir top görebiliyor musunuz?

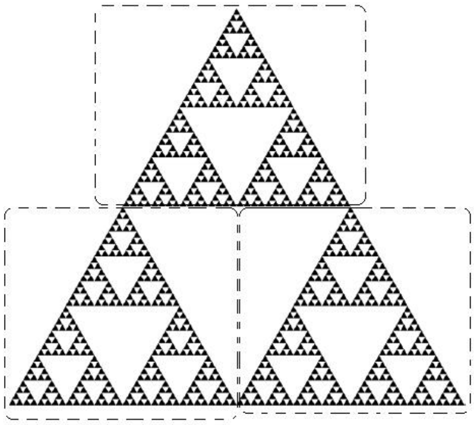
- Eğrelti otunun bir dalına yaklaştığımızda görünen şekil eğrelti otuna benziyor mu? Tanımlayınız.

- Koch eğrisinin bir parçasına yaklaştığımızda (ya da bir parçasını alıp büyüttüğümüzde) oluşan şekil yine Koch eğrisine benzemekte midir? Açıklayınız.

- Sizde farklı fraktal olan ve fraktal olmayan nesneler için bu işlemi yineleyiniz. Elde ettiğiniz sonuca göre Euclid şekilleri ile fraktal şekiller arasında ne tür bir farklılığa rastladınız? Açıklayınız.

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-11



Yukarıdaki Sierpinski üçgenini dikkatlice inceleyiniz.

1. **1.** İşaretlenmiş Sierpinski üçgeni parçaları ile Sierpinski üçgeninin bütününü birlikte düşünün aralarında nasıl bir ilişki görmektesiniz? Yazınız.

2. **2.** İşaretlenmiş parçalar hangi oranda büyütülürse ana şekil olan Sierpinski üçgeni elde edilir?

3. **3.** Sierpinski üçgeni içerisinde 4 oranında büyüttüğümüzde ana şeklin tamamen aynısı olan kaç öz-benzer parça bulunur? Bu parçaları işaretleyiniz.

4. **4.** Yukarıda yaptıklarınızı dikkate alarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

	Başlangıç şekli	**1. Adım**	**2. Adım**	**3. Adım**	**…**	**n. Adım**
Büyütme oranı	1	**2**	**4**		**…**	
Öz-benzer parça sayısı	1				**…**	

5. **5.** Sierpinski üçgeninin başlangıç şekli olan eşkenar üçgen ile 2. adımdaki bir üçgenin benzer olduklarını gösteriniz.

6. **6.** Benzer şekilde 3. ve 4. adımlarda oluşan her bir üçgen için de bu benzerliği gösteriniz.
7. **7.** Elde edilen sonuçlara göre bir şeklin benzer ve öz-benzer olmasının ne anlama geldiği tartışınız.

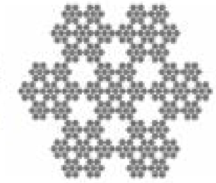
Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-12

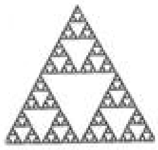
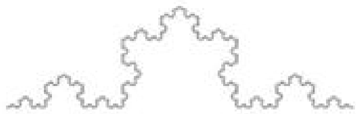
- Aşağıda verilen fraktalları inceleyiniz. Bu fraktalların öz-benzerliklerinin şekillerin hangi bölgelerinde (şeklin tamamında mı?, bazı yerlerinde mi, yoksa sadece bir noktasında mı?) olduğuna karar veriniz.Verdiğiniz karara göre fraktalları sınıflandırınız.







- Oluşturduğunuz sınıflamaya göre farklı fraktal örnekleri bularak bunların öz-benzerliklerinin hangi bölgelerde olduğunu tartışınız.

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-13

- Alüminyum kâğıt parçalarınızı elinize alınız. Alüminyum kâğıdın kalınlığı çok küçük olduğundan bunu ihmal ettiğimizi düşünelim. Böylece alüminyum kâğıdı 2-boyutlu olarak kabul edelim.

- Alüminyum kâğıdı elinizde buruşturarak bir top haline getiriniz. Oluşan şekli inceleyiniz. Bu şeklin boyutu nedir? Açıklayınız.

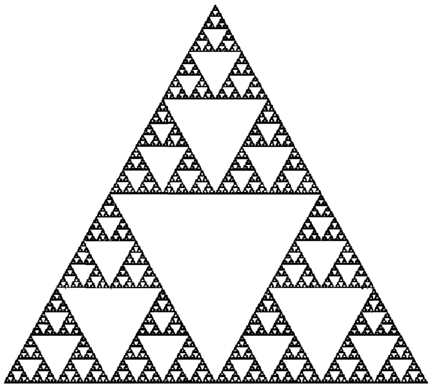
- Oluşturduğumuz topu dikkatlice açınız. Oluşan şeklin görünüşünü tanımlayınız? Bu şeklin boyutu nedir? Tartışınız.

- Son oluşan şekil ile bir önceki adımda oluşan şekli karşılaştırınız. Her iki şekil arasında ne tür farklılıklar vardır? Son oluşan şeklin boyutu bir önceki şeklin boyutuyla aynıdır diyebilir miyiz? Tartışınız.

- 0-boyutlu, 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu terimlerini sıklıkla duymuşsunuzdur. Yukarıda oluşan şeklin boyutunun 2,38-boyutlu olduğu söylenirse bu duruma ne gibi bir açıklama getirebilirsiniz?

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-14



1. Sierpinski üçgeninde büyüme oranı 2 olan öz-benzer parçaların sayısı nedir?

2. Elde ettiğiniz öz-benzer parça sayısı ve büyüme oranına göre bu fraktalın boyutunu hesaplayınız.

3. Elde ettiğiniz sonuç şaşırtıcı mı? Önceden bildiğimiz boyut kavramıyla ne gibi farklılıklar gözlemlemektesiniz? Yazınız.

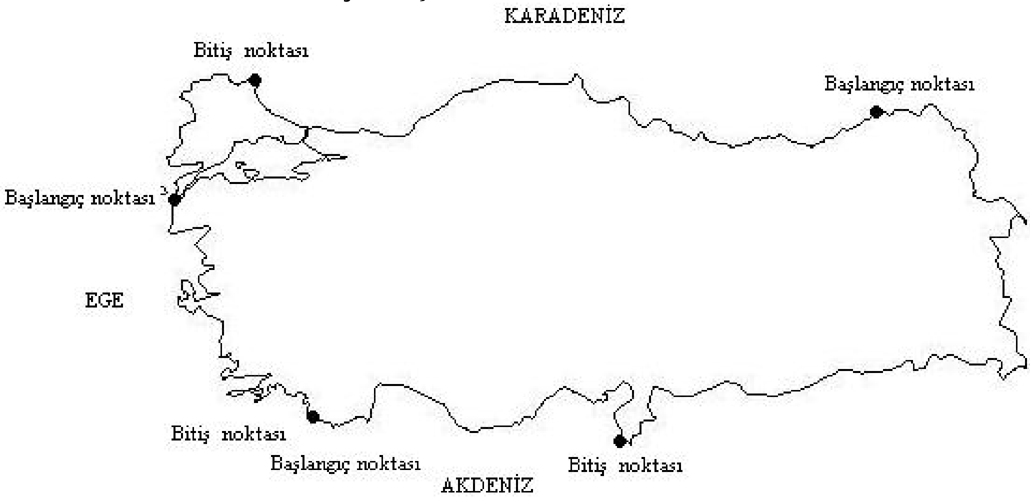
4. Şimdi Sierpinski üçgeninin 4 büyüme oranına sahip öz-benzer parçalarının sayısını bulunuz. Bulduğunuz bu değerlere göre boyutu hesaplayınız. 2. soruda hesapladığınız boyut sonucundan farklı bir sonuç elde ettiniz mi?

5. Benzer şekilde 8 ve 16 büyüme oranına sahip öz-benzer parçalar için de boyut değerlerini hesaplayınız ve bulduğunuz boyut değerlerini karşılaştırınız. Herhangi bir n. adımdaki büyüme oranı için Sierpinski üçgeninin boyutunun ne olabileceğini tartışınız.

6. Benzer şekilde Cantor kümesi ve Koch eğrisi fraktallarının boyutlarını hesaplayınız. Elde ettiğiniz sonuçlara göre fraktal şekillerin boyutları ile Euclid şekillerinin boyutlarını karşılaştırınız.

Ek 2’nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-15



Yukarıda Türkiye’nin kıyı şeridleri görülmektedir.

1. Pergelinizi 6cm genişliğinde açınız ve başlangıç noktasından kıyı şeridi eğrisini kesecek şekilde bir yay çiziniz.

2. Kıyı şeridi eğrisi ile yayın kesişim noktasını yeni başlangıç noktanız olarak kabul ediniz ve 1. adımda yaptığınız işlemleri tekrarlayınız. **(Eğer pergelinizin son çizdiği yay bitiş noktası üzerine tam düşmüyorsa yaklaşık olarak kaç defa ölçüm yaptığınızı bulunuz)**

3. Karadeniz kıyı şeridinde bitiş noktasına gelene kadar aynı işlemleri tekrarlayınız.

4. Daha sonra pergelinizi 3 cm genişliğinde açınız ve başlangıç noktasından başlayarak yukarıda yaptığınız işlemleri tekrarlayınız.

5. Benzer şekilde pergelinizi 1,5 cm genişliğinde açınız ve aynı işlemleri tekrarlayınız.

6. Pergelinizi 0,75 cm genişliğinde açınız ve aynı işlemleri tekrarlayınız.

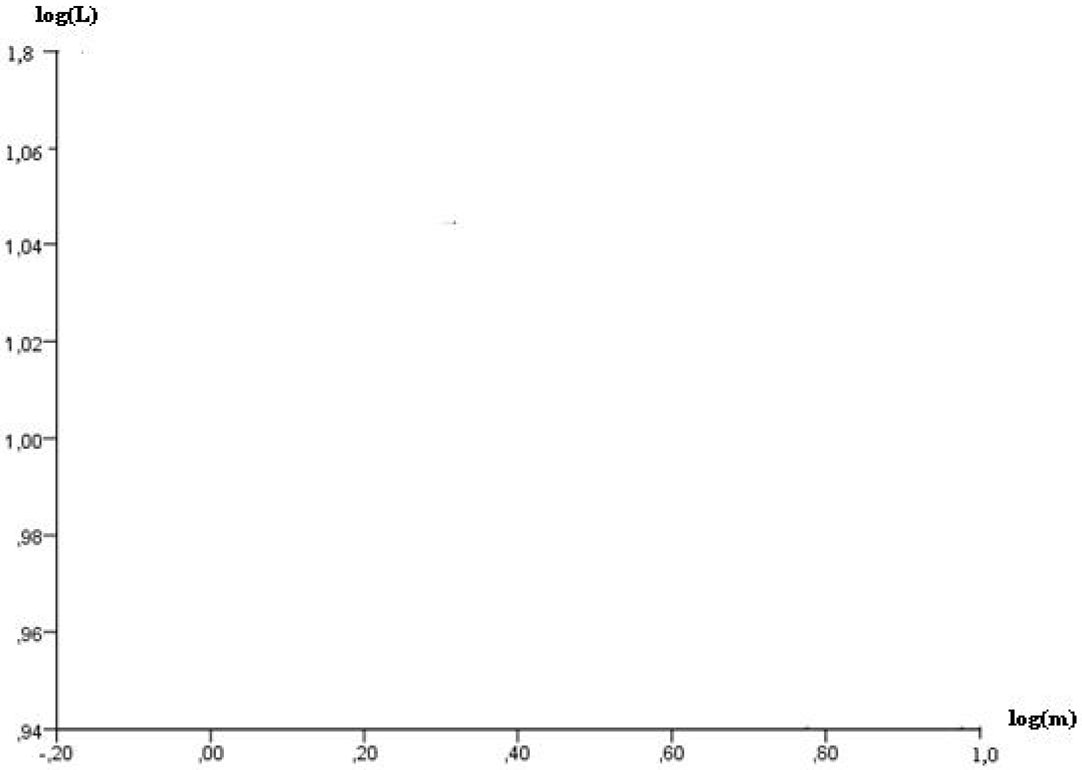
7. Elde ettiğiniz değerlere göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Pergel genişliği (m)	Ölçüm sayısı (n)	Toplam uzunluk (L= n.m)	Log(m)	Log(L)
6				
3				
1,5				
0,75				

Ek 2'nin devamı

8. Elde ettiğiniz tabloya göre pergel genişliği azaldıkça toplam uzunluk nasıl değişmektedir?

9. Tabloya göre bir Log(L)-log(m) grafiği çiziniz.



10. Çizdiğiniz grafikteki noktaların hepsinden geçen bir doğru çizmeye çalışın (Çizdiğiniz doğru tüm noktalardan geçmeyebilir, ancak hepsinden en yakın geçen doğruyu çizmeye çalışın).

11. Çizdiğiniz doğrunun eğimini bulunuz ve bu eğim değerinden yararlanarak Karadeniz kıyı şeridinin boyutunu hesaplayınız.

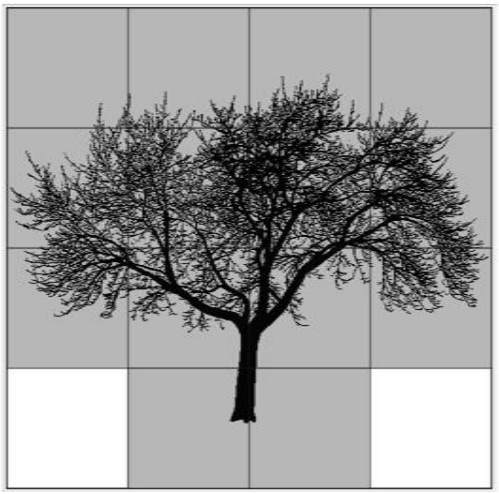
12. Benzer şekilde siz de Ege ve Akdeniz kıyılarının boyutlarını hesaplayınız.

13. Boyutu en büyük olan kıyı şeridi hangisidir? Bu kıyı şeridinin şekli ile diğer kıyı şeridlerinin şekillerini karşılaştırınız ve boyut ile verilen nesnenin şekli arasındaki ilişkiyi yazınız.

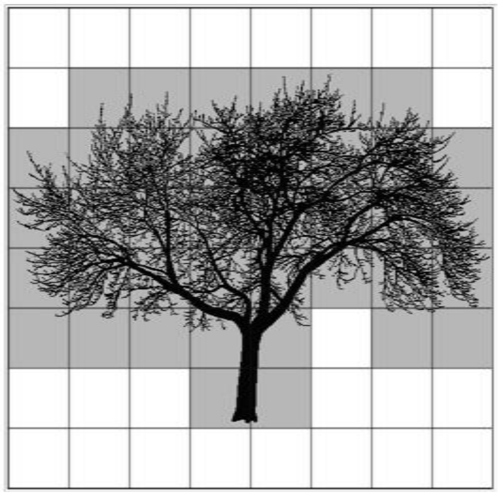
Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-16

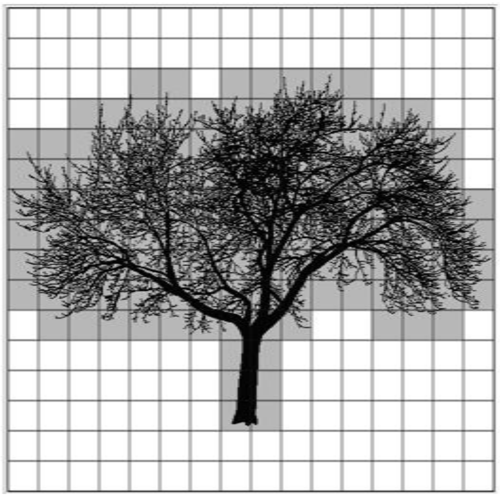
1. Aşağıda bir ağaç resmi görülmektedir. Ağaç resmi farklı oranlarda küçültülmüş kare kutucuklarla kaplanmıştır. Buna göre ağacın tamamı ya da bir kısmını içeren kutuları sayınız ve bulduğunuz sonuçları aşağıdaki tabloda yazınız.



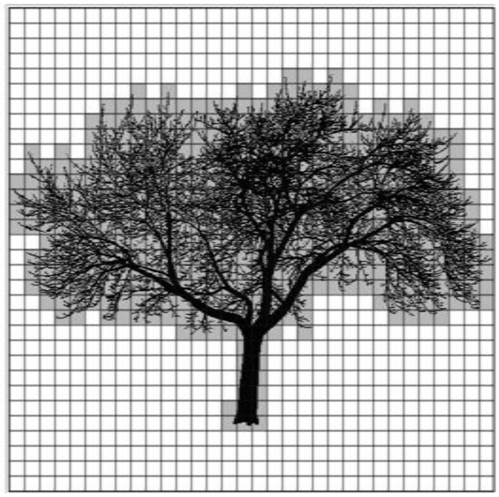
$r_1=16$



$r_2=8$



$r_3=4$



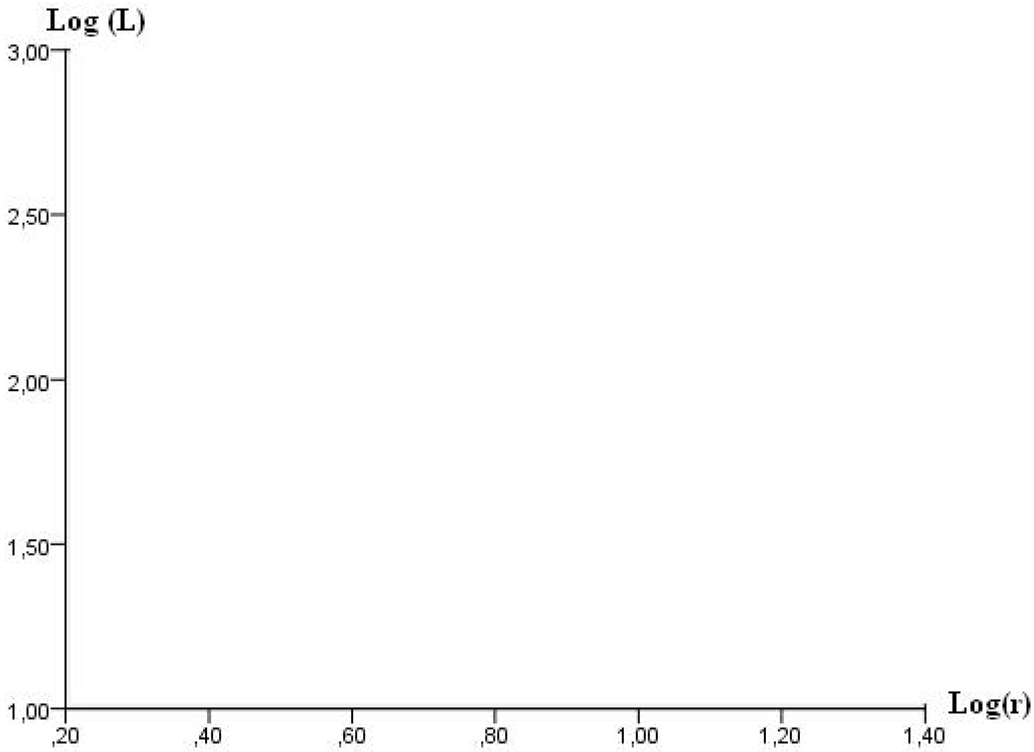
$r_4=2$

Kare Kutuların bir kenar uzunluğu (r)	Kutu sayısı (N)	Log(r)	Log(N)
16			
8			
4			
2			

Ek 2'nin devamı

2. Tabloya göre kare kutuların kenar uzunlukları azaldıkça ağacı içeren toplam kutu sayısı nasıl değişmektedir?

3. Tabloya göre bir Log(N)-log(r) grafiği çiziniz.



4. Çizdiğiniz grafikteki noktaların hepsinden geçen bir doğru çizmeye çalışın (Çizdiğiniz doğru tüm noktalardan geçmeyebilir, ancak hepsinden en yakın geçen doğruyu çizmeye çalışın).

5. Çizdiğiniz doğrunun eğimini bulunuz.

6. Bulduğunuz bu eğim değeri ağacın boyutudur.

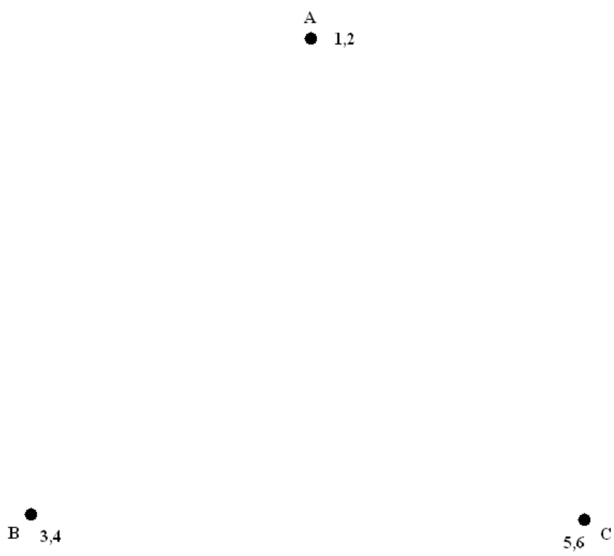
Ek 2’nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-17

Aşağıda verilen adımları takip ederek Kaos oyununu oynayınız. Verilen A, B ve C köşe noktalarının oluşturduğu iç bölgede bir z_0 başlangıç noktası seçiniz. Daha sonra bir zar atınız. Atılan zara göre tekrarlama kuralı: “Eğer zarın değeri

- 1 ya da 2 gelirse z_0 başlangıç değeri ile A köşesinin orta noktasını bulup işaretleyiniz.
- 3 ya da 4 gelirse z_0 başlangıç değeri ile B köşesinin orta noktasını bulup işaretleyiniz.
- 5 ya da 6 gelirse z_0 başlangıç değeri ile C köşesinin orta noktasını bulup işaretleyiniz.”

İşaretlediğiniz yeni noktayı z_1 ile gösteriniz. Artık yeni başlangıç noktanız z_1 oldu. Şimdi aynı işlemi z_1 noktası için tekrarlayınız. Tekrarlama işlemine devam ettiğinizde z_0, z_1, z_2, z_3, … noktalar dizisi elde edilir. Bu noktaların yerini aşağıda verilen şekil üzerine işaretleyiniz.



1. 20. başlangıç noktasının yerini işaretleyiniz. Bu adımda elde ettiğiniz şekli tanımlayınız.
2. Tekrarlama işlemine devam edildiğinde 100. tekrarlama sonucu ne tür bir şekil elde edeceğinizi grup arkadaşınızla tartışınız.
3. Tekrarlama işlemine devam edildiğinde 5000. tekrarlama sonucu ne tür bir şekil elde edeceğinizi tahmin etmeye çalışınız.

Ek 2'nin devamı

4. www.geoastro.de\ChaosSpiel\ChaosEnglish.html web sitesini açınız ve oyunu oynayınız. 5000. Tekrarlama sonucu hangi şekli elde ettiğinizi açıklayınız.

5. Kaos oyununda başlangıç noktasının A,B,C köşe noktaları içerisinde seçilmesi oyun sonunda Sierpinski üçgeninin oluşması için gerekli midir? Açıklayınız.

6. Kaos oyununda atılan zarlar rastgele değil de belli bir kuralla göre olsaydı, oyun sonunda yine Sierpinski üçgeni oluşur muydu? Tartışınız.

7. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız. Oyunda tekrarlama kuralını "sağ ve sol alt köşelere başlangıç noktasının hareketi ½ oranında ve üst köşeye ise 2/3 oranında olsun" şeklinde değiştirirsek bu durumda yine Sierpinski üçgeni oluşur mu? Açıklayınız. Eğer oluşmazsa ne tür bir şekil oluşur? Tanımlayınız.

8. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız.Kaos oyununu iki nokta için oynayınız. Başlangıç şekli olarak A ve B köşe uç noktaları arasında bir z_0 noktası alınız. Tekrarlama kuralı "bir bozuk para havaya atıldığında eğer tura gelirse başlangıç noktası A köşe noktasına 1/3 oranında yaklaşsın, eğer yazı gelirse B köşe noktasına 1/3 oranında yaklaşsın." olarak verilsin. Bu durumda oyun sonunda oluşacak şekli tanımlayınız.

9. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız. 4 köşe noktasını bir karenin köşe noktaları yapınız. Başlangıç noktasının köşe noktalara olan hareket oranı ½ olsun. Oluşan şekli tanımlayınız.

10. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız. 5 köşe noktasından 4'ünü bir karenin köşeleri ve 5. noktayı da karenin merkezine alınız. Başlangıç noktasının 1/3 hareket oranı için Kaos oyununu oynayınız. Oluşan şekli tanımlayınız.

11. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesini açınız.Farklı sayıda nokta ve farklı tekrarlama kuralları için kaos oyunları oynayınız. Oyun sonunda oluşan şekilleri inceleyerek **"her kaos oyunu sonucu mutlaka bir fraktal oluşur"** iddiasının doğruluğunu irdeleyiniz.

Ek 2'nin devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI-18

- Bir ormanda bulunan tavşanların nüfus değişimi f(x)=kx şeklinde gösterilmektedir. Burada x, tavşanların şuan ki nüfuslarını, f(x) gelecekteki nüfuslarını ve k ise sabit bir sayı olarak doğurganlık oranlarını göstermektedir.
- Hangi k değerleri için tavşan nüfusu gitgide azalarak yok olacaktır?
- Hangi k değerleri için tavşan nüfusu sınırsız şekilde artacaktır?
- Eğer tavşanların nüfusu sürekli artarsa ortamda yiyecek sıkıntısı oluşacaktır. Bu durum nüfuslarının artmasını engelleyecek ve belki de yok olmalarına neden olacaktır. Yiyecek sıkıntısı göz önüne alındığında tavşanların nüfusları f(x)=kx(L-x) şeklinde bir denklemle belirlenmiştir. Burada f(x) gelecekteki tavşan nüfusunu, k sabiti doğurganlık oranını, x şu anki tavşan nüfusunu ve L ise maksimum tavşan nüfusu göstermektedir. Yazılan bu fonksiyon kaç değişkenli bir fonksiyondur?
- L=1 olarak alınırsa x hangi aralıkta alınmalıdır?
- Başlangıçtaki tavşan nüfusu 0,5 ile gösterilirse bu durumda f(x)=kx(1-x) tekrarlama kuralını kullanarak aşağıda verilen k-değerleri için yörüngeler bulunuz.

k-değerleri	**Yörüngeler**
k=0,2	
k=0,4	
k=0,6	
k=0,8	

- k değerlerine göre tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- 0<k<1 aralığındaki farklı k değerleri için tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- k=1 ve k=1,1 için tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- Aşağıda verilen k-değerleri için yörüngeleri bulunuz.

k-değerleri	**Yörüngeler**
k=1,3	
k=1,8	
k=2	
k=2,5	

- Her bir k değeri göz önüne alındığında tavşan nüfusunun nasıl değişmektedir?
- 1<k<3 aralığındaki farklı k değerleri için tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?

Ek 2'nin devamı

- k=3 ve k=3,1 olduğunda tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?

- Aşağıda verilen k-değerleri için yörüngeleri bulunuz.

k-değerleri	**Yörüngeler**
k=3,2	
k=3,4	
k=3,5	
k=3,554	

- k değerlerine göre tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- 3<k<3,5 aralığında farklı k-değerleri için tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- k=3,554 için tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- k=3,556 ve k=3,57 için tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?
- k değeri 3,83 ile 3,87 değeri arasında seçilirse tavşan nüfusu nasıl değişmektedir?

Ek 3: Hazırlanan Programın Öğretmen Kılavuzu

1. Fraktal Geometriye Giriş ve Geometrik Tekrarlamalar

Kazanımlar:

1. Çevresinde bulunan nesnelerin şekillerini tanımlar ve bu nesneleri dış görünüşlerinin karmaşıklığına göre sınıflandırır.
2. Başlangıç şekli, üretici ve yörünge terimlerini örneklerle açıklar.
3. Tekrarlanan ekleme ve çıkartmaları kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.
4. Tekrarlanan dönme ve çevirmeleri kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.

Öğrenme Öğretme Süreci

1. Öğrencileri 3-4'er kişilik gruplara ayırınız. Çalışma yaprağı-1'i dağıtınız ve öğrencilerden çalışma yaprağında verilenler ile bunların dışında çevrelerinde gördükleri doğal ve insan yapımı nesneleri sınıflandırmalarını isteyiniz. Belirledikleri bu nesnelerin görünüşlerini tanımlamalarını sağlayınız. Daha sonra hazırlanan slaytı kullanarak sınıf tartışmasıyla öğrencilerin doğal nesnelerin şekillerinin Euclid geometrisince tam olarak tanımlanamadığı sonucunu elde etmelerini sağlayınız. Bu tür doğal nesneleri konu edinen yeni bir geometri olarak fraktal geometrinin olduğunu slaytta bulunan örnekleri göstererek açıklayınız. Böylece hem öğrencilerin Euclid geometrisinin doğal nesneleri açıklamadaki yetersizliğini görmeleri hem de fraktal geometrinin Euclid'den farklı bir geometri olduğu yönünde bir algı geliştirmeleri sağlanmış olur.
2. Slayt yardımıyla farklı oranlarda küçülen doğru parçalarını kullanarak bir fraktal ağaç çiziniz. Öğrencilerin kendilerinin de doğru parçaları ve farklı açıları kullanarak çeşitli ağaçlar oluşturabileceklerini ifade ediniz. Bu amaçla çalışma yaprağı-2'yi dağıtınız. Bu çalışma yaprağında farklı doğru parçası sayısı ve farklı açılara göre farklı ağaç şekillerini öğrencilerin oluşturmalarını bekleyiniz. Böylece öğrencilerin bir fraktalın oluşumunu sağlayan tekrarlama döngüsünde başlangıç değeri, üretici ve yörünge kavramlarını fark etmesi beklenir. Bu amaçla slayt

Ek 3'ün devamı

yardımıyla farklı fraktal şekillerinin adım adım oluşumları üzerine sınıf tartışmaları yapınız. Öğrencilerin de kendi tanımlayacakları başlangıç şekilleri ve üreticilerine göre farklı fraktal şekiller oluşturmalarına imkan veriniz.

3. Fraktalları oluşturmanın bir yolunun parça ekleme ve çıkartmaları kullanmak olduğu öğrencilere açıklanır. Bu amaçla çalışma yaprağı-3 dağıtılır. Bu çalışma yaprağında öğrencilerin Cantor kümesinin şeklini sonlu adımlarda parça çıkartmaları kullanarak oluşturmaları istenir. Öğrencilerin aşağıdaki şekli çizmeleri beklenir.

Cantor kümesinin şekli kullanılarak geride kalan doğru parçası sayısı ve bu doğru parçalarının uzunluğuna yönelik örüntüleri belirlemeleri istenir. Bu amaçla aşağıdaki şekilde tabloyu doldurmaları beklenir.

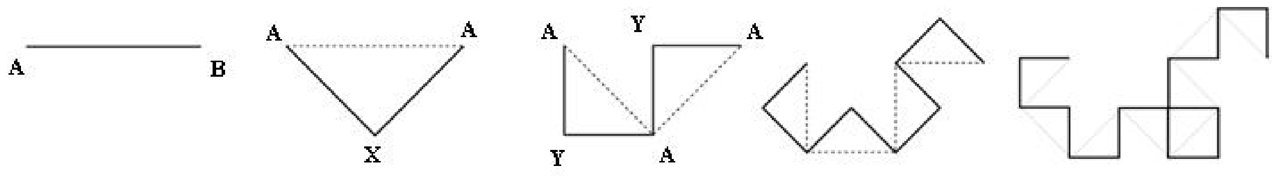
	Kalan toplam doğru parçası sayısı	**Bir doğru parçasının uzunluğu**	**Toplam doğru parçasının uzunluğu**
Başlangıç şekli (doğru parçası)	1	1	1
1. tekrarlama	2	1/3	2/3
2. tekrarlama	4	1/9	4/9
3. tekrarlama	8	1/27	8/27
…	…	…	…
n. tekrarlama	2^n	$1/3^n$	$(2/3)^n$

n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında kalan doğru parçası sayısının ve toplam uzunluğun ne olacağı tartışılır. Kalan doğru parçası sayısının sonsuza doğru arttığı buna karşın toplam uzunluğun ise gitgide azalarak sıfıra yaklaştığını ifade etmeleri beklenir. Cantor kümesinin oluşumunun sonsuz olduğu vurgulanır, yani teoride Cantor kümesinin son adımının bulunmadığı, oluşumunun devam ettiği hissettirilir. Elde edilen

Ek 3'ün devamı

yörüngelerdeki her bir şekle yaklaşıldığında öğrencilerin ne gördüklerini açıklamaları istenir. Bu amaçla hazırlanan slayt kullanılabilir. Bu tür bir durumun Öklit şekilleri olan nokta, doğru, üçgen ya da piramit için sağlanıp sağlanmadığı tartışılır. Tekrarlama işlemine devam edildiğinde doğru parçasında asla silinmeyen noktaların varlığı sorgulanır. Eğer varsa bu noktaların neler olduğu buldurulur. Uç noktaların asla silinmediğini ve Cantor kümesinin sonsuz bir küme olması nedeniyle sonsuz tane noktanın silinmeyeceğini görmeleri beklenir. Bu nedenle Cantor kümesine **fraktal toz** denildiği ifade edilir.

4. Fraktalları oluşturmanın bir diğer yolunun dönme ve çevirmeleri kullanmak olduğu öğrencilere açıklanır. Bu amaçla çalışma yaprağı-4 dağıtılır. Öğrencilerden ilk dört tekrarlamada aşağıdaki şekilleri çizmeleri beklenir.



Başlangıç şekli 1. Tekrarlama: Üretici 2. Tekrarlama 3. Tekrarlama 4. Tekrarlama

Slayt yardımıyla fraktal ejderin ileriki adımlardaki şekilleri gösterilir ve bu şekle niçin fraktal ejder denildiği tartışılır. Fraktal ejderde oluşan doğru parçası uzunluğu ve toplam uzunluğa yönelik öğrencilerin örüntüleri belirlemeleri istenir. Bu amaçla aşağıdaki şekilde tabloyu doldurmaları beklenir.

Tekrarlama sayısı	**Doğru parçası sayısı**	**Bir doğru parçasının uzunluğu**	**Toplam uzunluk**	**Oluşan köşe sayısı**
0	1	1	1	0
1	2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	1
2	4	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$	$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$	3
3	8	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$	$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3$	7
…	…	…	…	…
n	2^n	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$	$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n = (\sqrt{2})^n$	2^n-1

n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaştığında fraktal ejderi oluşturan doğru parçası sayısının, oluşan köşe sayısının ve ejderin toplam uzunluğunun nasıl değiştiği tartışılır.

Ek 3'ün devamı

Ölçme ve Değerlendirme

1. Başlangıç şekli bir doğru parçası olan Koch eğrisinin oluşum kuralı:

- doğru parçasını 3 eşit parçaya böl,
- ortadaki parçayı sol uçtan yatayla 60^0 açı yapacak şekilde yukarı kaldır,
- eşit uzunluklu bir doğru parçası ile yukarı kaldırdığın parçanın sağ ucu ile diğer doğru parçasının sol ucunu birleştirerek ters V şekli oluştur.

şeklindedir.

a) Buna göre Koch eğrisinin başlangıç şeklini, üretici ve ilk 4 tekrarlama sonucu oluşan yörüngesini bulunuz.

b) Elde ettiğiniz yörüngeyi kullanarak aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

	Başlangıç şekli	**1. tekrarlama**	**2. tekrarlama**	**3. tekrarlama**	**…**	**n. tekrarlama**
Doğru parçası sayısı	1					
Her bir doğru parçasının uzunluğu	1					
Toplam Çevre	1					

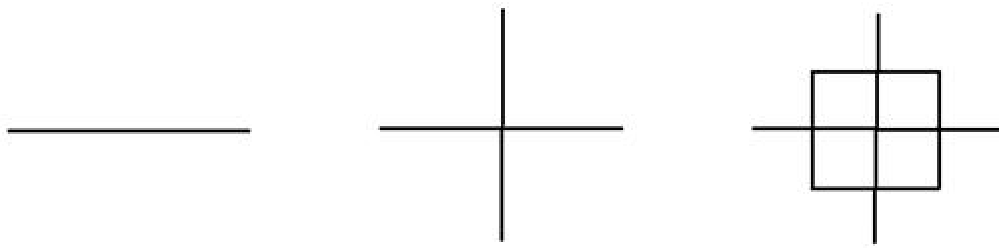
c) Tabloya göre Koch eğrisinin çevresi nasıl değişmektedir? n, tekrarlama sayısı sonsuza gittiğinde çevre ne olur?

d) Koch eğrisini bir eşkenar üçgenin her bir kenarı üzerinde oluşturursak oluşan şekle **Koch Kartanesi** denir. Buna göre 4. tekrarlama adımında Koch kartanesinin görünüşünü çiziniz.

e) Tekrarlama kuralında yatayla 30^0 ve 90^0 açı yapıldığında oluşacak fraktalların ilk 3 adımdaki yörüngelerini belirleyiniz. Koch eğrisi ile ne tür benzerlik ve farklılıklara sahiptirler? açıklayınız.

2. Aşağıda başlangıç şekli ve ilk iki tekrarlaması verilen fraktalın 3. tekrarlamadaki şeklini çiziniz.

Ek 3’ün devamı



Başlangıç şekli 1. Tekrarlama: Üretici 2. Tekrarlama 3. Tekrarlama

a) Sonsuz tekrarlama adımı sonucunda şeklin nasıl görüneceğini ifade ediniz.

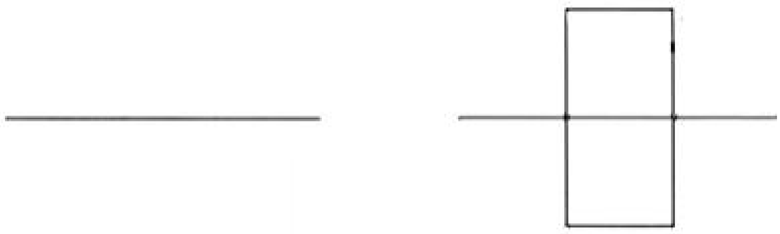
b) 1. tekrarlamada kaç yeni doğru parçası eklenmiştir? (Not: bazı durumlarda bütün olarak görülen doğru parçalarını birbirinden ayrı ayrı düşününüz.)

c) 2. tekrarlamada kaç yeni doğru parçası eklenmiştir?

d) Herhangi bir tekrarlama adımı için kaç yeni doğru parçasının eklendiğini gösteren bir kural bulunuz.

e) Herhangi bir adımda toplam kaç tane doğru parçasının olduğunu gösteren bir kural bulunuz.

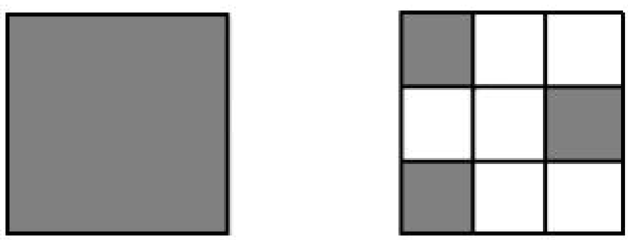
3. Aşağıda Peano eğrisi fraktalının başlangıç ve üretici adımları verilmiştir.



a) Bu fraktalın bir sonraki tekrarlamadaki şeklini çiziniz.

b) Tekrarlama işlemine devam edildiğinde ne tür bir şeklin oluşacağını tahmin ediniz.

4. Aşağıda başlangıç ve üretici adımları verilen fraktalın bir sonraki adımda oluşan şeklini çiziniz.



Ek 3'ün devamı

- Elde ettiğiniz yörüngeye göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

	Başlangıç şekli: kare	**İlk tekrarlama**	**İkinci tekrarlama**	**Üçüncü tekrarlama**	**…**	**n. tekrarlama**
Kalan karelerin sayısı	1					
Her bir karenin kenar uzunluğu	1					

- Tekrarlama sürecine devam ettiğimizde sonuçta nasıl bir şekil oluşacak? Açıklayınız.

5. Başlangıç şekli olarak bir doğru parçası alınız. Tekrarlama kuralınız "*doğru parçasının yarısı uzunluğunda iki doğru parçasını aralarındaki açı* 120^0 *olacak şekilde başlangıç şeklinin bir ucuna ekleyiniz*" şeklindedir. Bu işlemi birkaç adım için tekrarlayarak bir fraktal ağaç oluşturunuz. Oluşturduğunuz fraktal ağaç şekline göre aşağıda verilen tabloyu tamamlayınız.

	Başlangıç şekli	**1. tekrarlama**	**2. tekrarlama**	**3. tekrarlama**	**…**	**n. tekrarlama**
Yeni dal sayısı	1					
Toplam dal sayısı	1					
Tek bir yeni dalın uzunluğu	8					
Toplam dal uzunluğu	8					

- Dallar arası açı değiştiğinde ne tür fraktal ağaç modelleri olabilir? Bunun için yanda verilen programı Logoda koşturunuz. Dallar arasındaki açıyı değiştirerek farklı ağaç modelleri oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız. Bu ağaçların ne tür özellikleri olabileceklerini tartışınız

```
to agac :a :b
if :b=0 [stop]
fd :a
lt 60
agac :a/2 :b-1
wait 30
rt 120
agac :a/2 :b-1
lt 60
back :a
end
```

Ek 3’ün devamı

2. Fraktalların Çevresi, Alanı ve Hacmi

Kazanımlar:

1. Fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplar.
2. Fraktalların çevre-alan ve hacim arasındaki ilişki ile Euclid geometrisindeki şekillerin çevre-alan-hacim arasındaki ilişkileri karşılaştırır, benzerlik ve farklılıkları belirler.

Öğrenme-Öğretme Süreci

1. Dersin başında öğrencilerle Euclid şekillerinin çevreleri, alanları ve hacimlerindeki değişim üzerine kısa bir tartışma yapınız. Bu tartışma fraktal şekillerin çevreleri, alanları ve hacimlerinin Euclid şekillerinden farklı olduğunu görmelerine yardımcı olacaktır. Bunun yanında öğrencilerin geometrik seriler konusundaki ön bilgilerini belirleyiniz. Ön bilgilerinde eksiklikleri olan öğrencilere gerekli yardımı yapınız. Bir önceki derste oluşturulan fraktalların çevresi, alanı ve hacminin hesaplanmasına yönelik çalışma yaprağı-5’i dağıtınız. Bu çalışma yaprağında öğrencilerden Sierpinski üçgeninin sonlu adımdaki şekillerini aşağıdaki gibi oluşturmaları beklenir.

Sierpinski üçgeninin her bir tekrarlamada oluşan kenar sayıları ve bu kenarların uzunluğuna göre öğrencilerin bir örüntü bulmaları beklenir. Buldukları bu örüntüler Sierpinski üçgeninin çevresini hesaplamada öğrencilere yardımcı olacaktır. Buna göre aşağıdaki tablo yardımıyla Sierpinski üçgeninin çevresinin hesaplanmasında öğrencilerin bir geometrik seri yazmaları beklenir.

Ek 3'ün devamı

Adım	Eklenen kenar sayısı	Eklenen her bir kenarın uzunluğu	Bu adıma kadar eklenen toplam kenar uzunluğu	Toplam kenar uzunluğu (Çevre)
0	0	0	0	3
1	3	1/2	3/2	3+3/2
2	9	1/4	9/4	3+3/2+9/4
3	27	1/8	27/8	3+3/2+9/4+27/8
…	…	….	….	…
n	3^n	$(½)^n$	$(3/2)^n$	$3+3/2+(3/2)^2+(3/2)^2+\ldots+(3/2)^n$

Her bir tekrarlama adımında Sierpinski üçgeninin çevresinin nasıl değiştiği tartışılır. n, tekrarlama sayısı sonsuza yaklaşırken Sierpinski üçgeninin çevresi hesaplanır.

$$Ç = 3 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \cdots = 3 + \frac{3}{2}\left[1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$

şeklinde çevrenin bir geometrik seri tanımladığını görmeleri beklenir. Bu seri de $r = \frac{3}{2}$ ortak oranı 1'den büyük olduğundan çevrenin giderek büyüdüğü ve sonlu bir değere yakınsamadığı ifade edilir.

Benzer şekilde elde edilen yörünge ve aşağıda verilen tablo kullanılarak Sierpinski üçgeninin alanını hesaplanır:

Adım	Çıkarılan üçgen sayısı	Çıkarılan her bir üçgenin alanı	Çıkarılan Toplam alan
0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}$
2	3	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$
3	9	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4}$
…	…	…	…
n	3^n	$\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots + 3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ek 3'ün devamı

n, adım sayısı sonsuza yaklaştığında Sierpinski üçgeni fraktalından çıkarılan toplam alan için

$$ÇA = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4} + \dots + 3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$

geometrik serisi bulunur. Bu seride r=$\frac{3}{4}$ ortak oranı 1'den küçük olduğundan seri yakınsaktır ve yakınsadığı sayıyı bulmak için serinin kısmi toplamlar dizisi hesaplandığında

$$S_{ÇA} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

$$S_{ÇA} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

elde edilir. Başlangıçtaki eşkenar üçgenin alanından çıkarılan üçgenlerin alanlarının toplamı çıkarılarak Sierpinski üçgeninin alanının sıfır olduğu sonucunu elde etmeleri beklenir.

Sierpinski üçgeninin alanı ve çevresinin nasıl değiştiği sorgulanarak Öklit geometrisindeki nesnelerin çevreleri ve alanları arasındaki ilişkilerle karşılaştırmalar yapmaları beklenir. Sierpinski üçgeninin oluşum kuralında üçgenin içerisinden üçgenler kesip çıkarıldığı hatırlatılarak üçgeninin içerisinden asla çıkarılmayan noktalar var olup olmadığı sorgulanır. Varsa kaç tane bu şekilde noktanın olduğu tartışılır. Çıkarılan üçgenlerin köşe noktalarının üçgenin içerisinden asla çıkarılmadığını görmeleri beklenir. Bu durumda sonsuz tane noktanın üçgenin içerisinden çıkarılmadığı sonucunu elde etmeleri sağlanır. Sierpinski üçgeninin alanı n, adım sayısı sonsuza yaklaştığında sıfıra gitmektedir. Eğer Sierpinski üçgeninin içerisinde sonsuz tane silinmeyen nokta varsa buna göre alanın nasıl sıfıra yaklaştığını açıklamaları beklenir. Noktanın boyutu olmaması nedeniyle sonsuz tane noktanın da bir alan belirtmeyeceği sonucuna ulaşmaları beklenir.

Ek 3'ün devamı

2. Bu derste Sierpinski çokyüzlüsünün yüzey alanı ve hacmini hesaplamaya yönelik etkinlikleri yapınız. Dersin başında öğrencilere dörtyüzlülerin yüzey alanları ve hacimlerinin nasıl hesaplandığına yönelik hatırlatmalarda bulunabilirsiniz. Daha sonra Sierpinski çokyüzlülerini ya ders ortamında öğrencilerinizden oluşturmalarını isteyiniz ya da kendiniz hazır modeller getiriniz. Eğer öğrencilerin bu modelleri kendilerinin oluşturmalarını isterseniz, modellerin ders ortamında oluşturulmalarının çok zaman alması nedeniyle bunu bir ev ödevi şeklinde verebilirsiniz. Yüzey alanı ve hacmi hesaplamadan önce Sierpinski çokyüzlüsünün nasıl oluştuğu, her bir tekrarlamada kaç yeni parçanın oluştuğu, yüzlerinin sayısının nasıl değiştiğine yönelik sınıf içi tartışmalar yapınız. Bu tartışmalar öğrencilerin Sierpinski dörtyüzlüsünün oluşumunu daha iyi anlamalarını sağlayacaktır. Çalışma yaprağı-6'da verilen tablo yardımıyla Sierpinski çokyüzlüsünün yüzey alanı ve hacminin öğrenciler tarafından hesaplanması beklenir.

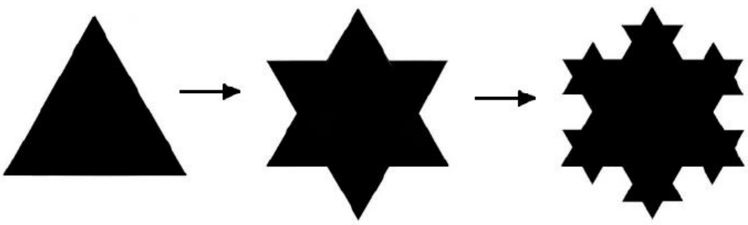
Adım sayısı	**Dörtyüzlü sayısı**	**Dörtyüzlünün Bir kenar uzunluğu**	**Toplam kenar uzunluğu**	**Bir yüzün alanı**	**Toplam Yüzey Alanı**	**Bir dörtyüzlünün hacmi**	**Toplam Hacim**
0	1	1	6	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$
1	4	$\frac{1}{2}$	$4.6.\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}$	$4.4\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$	$\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{12}$	$4.\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{12}$
2	16	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$4^2 6\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$	$4.4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $=\sqrt{3}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{12}$	$4^2.\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{12}$
3	64	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$4^3 6\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4}$	$4.4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{4}$ $=\sqrt{3}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^3\frac{\sqrt{2}}{12}$	$4^3\left(\frac{1}{8}\right)^3\frac{\sqrt{2}}{12}$
…	…	…	…	…	…	…	…
n	4^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$4^n 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $=6.2^n$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{4}$	$4.4^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{4}$ $=\sqrt{3}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^n\frac{\sqrt{2}}{12}$	$4^n\left(\frac{1}{8}\right)^n\frac{\sqrt{2}}{12}$

Ek 3'ün devamı

n, tekrarlama sayısı sonsuza giderken limit kavramı yardımıyla Sierpinski çokyüzlüsünün toplam kenar uzunluğunun $6.2^n \to \infty$ olduğunu; toplam yüzey alanının değişmeyerek $\sqrt{3}$ olduğunu ve toplam hacminin ise $4^n\left(\frac{1}{8}\right)^n \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{2}}{12} \to 0$ olduğunu bulmaları beklenir. Her bir tekrarlama adımında toplam yüzey alanının değişmemesinin nedenini oluşturdukları modeli kullanarak açıklamaları beklenir. Sierpinski çokyüzlüsünün yüzey alanı ve hacminin nasıl değiştiği sorgulanarak Öklit geometrisindeki nesnelerin alanları ve hacimleri arasındaki ilişkilerle karşılaştırmalar yapmaları beklenir.

Ölçme ve Değerlendirme

1. Aşağıda başlangıç ve ilk iki tekrarlama sonucu oluşan şekli görünen Koch kartanesi fraktalının sonsuz adımdaki çevresi ve alanını hesaplayınız.

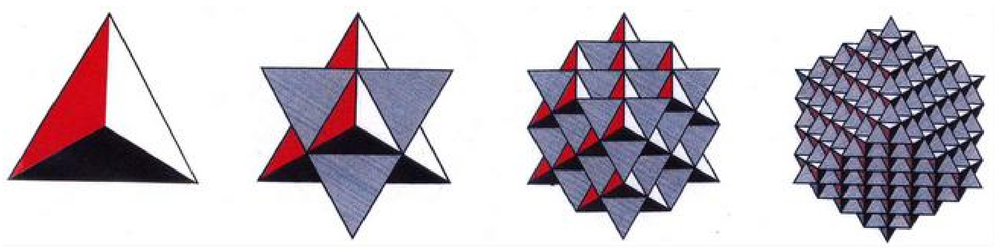


a) Koch kartanesinin çevresi nasıl değişmektedir? Artmakta ya da azalmakta mıdır?

b) Koch kartanesinin alanı nasıl değişmektedir?

c) Koch kartanesinin çevresi ve alanı için elde ettiğiniz sonuçlar ile Sierpinski üçgeninin çevresi ve alanı için elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız. Ne gibi benzerlik ve farklılıklar bulunmaktadır?

2. Aşağıda Koch çokyüzlüsünün başlangıç ve ilk üç tekrarlama sonucu oluşan şekli görülmektedir.



Ek 3'ün devamı

- Aşağıda verilen tablo yardımıyla bu çokyüzlünün yüzey alanı ve hacmini hesaplayınız.

Adım sayısı	**Eklenen Dörtyüzlü sayısı**	**Eklenen toplam yüz sayısı**	**Bir Yüzün Alanı**	**Toplam Yüzey Alanı**	**Bir Dörtyüzlünün Hacmi**	**Toplam Hacim**
0	1	4	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$
1						
2						
3						
…	…	…	…	…	…	…
n						

- n, tekrarlama sayısı sonsuza giderken Koch dörtyüzlüsünün toplam yüzey alanı ve hacmini bulunuz.
- Koch çokyüzlüsünü tekrarlama kuralını defalarca uygulayarak oluşturmaya devam edelim. Sonuçta oluşan şekil neye benzemektedir?
- Bir kenarının uzunluğu $\sqrt{2}/2$ br. Olan bir küpün hacmini bulunuz. Bulduğunuz sonuç ile Koch dörtyüzlüsünün hacmini karşılaştırınız. Ne tür bir ilişki görmektesiniz?

3. Akciğerlerimiz solunum sistemimizin en temel organıdır. Ortalama olarak bir akciğerin yüzey alanı 100 m^2 ve hacmi ise 5 litredir.

- Buna göre bir akciğerin yüzey alanının hacmine oranını m^2/m^3 cinsinden hesaplayınız (1 m^3=1000 litredir).
- Herhangi bir kürenin yüzey alanının hacmine oranını bulunuz. Bu oranın yukarıdaki akciğer için bulduğunuz orana eşit olması için kürenin yarıçapının ne olması gerekir. Bu tür bir küre nasıl görünür?

Ek 3'ün devamı

3. Cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri

Kazanımlar:

1. Cebirsel tekrarlama kuralları kullanarak farklı başlangıç noktaları için yörüngeler bulur, bu yörüngelere göre başlangıç noktasının türünü belirler.
2. Karmaşık düzlemde Julia kümesini tanımlar.
3. Verilen başlangıç noktalarından hangilerinin Julia kümesi içerisinde hangilerinin dışarıda olduğuna karar verir.
4. Farklı c-parametreleri için oluşan Julia kümelerinin öz-benzer parça sayısı ile bu Julia kümelerini oluşturan noktaların yörüngelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi keşfeder.
5. Karmaşık düzlemde Mandelbrot kümesini tanımlar ve özelliklerini belirler.
6. Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkileri belirler.

Öğrenme ve Öğretme Süreci

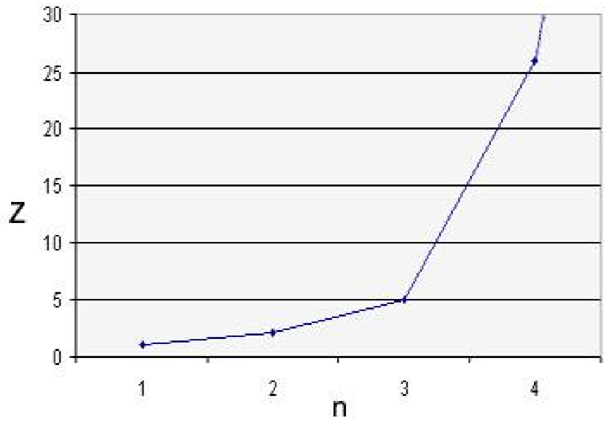
1. Dersin başında öğrencilere karmaşık sayılar ve bileşke fonksiyonlarla ilgili hatırlatmalar yapınız. Reel ve karmaşık değerli birkaç fonksiyon tanımlayınız ve bu fonksiyonların birkaç adım için kendileriyle sürekli bileşkelerini alınız. Böylece öğrencilerinizi cebirsel tekrarlamalara hazırlayınız. Daha sonra çalışma yaprağı-7'yi dağıtınız ve buradaki cebirsel tekrarlamalar sonucu oluşan yörüngelerin nasıl davrandığını açıklamalarını isteyiniz. Yörüngelerin bulunmasında hesap makinesi kullanabilirsiniz. Hazırlanan slayt yardımıyla çalışma yaprağında bulunan son iç tekrarlamaya öğrencilerin dikkatini çekiniz ve buradan kaçak, mahkum ve periyodik nokta tanımlarını aşağıdaki gibi yapınız.

c = 1 için $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + 1$ tekrarlama kuralına göre başlangıç noktası z_0= 0 seçildiğinde oluşan yörüngelerin

$$z_1 = \quad 0^2 + 1 \quad = 1$$
$$z_2 = \quad 1^2 + 1 \quad = 2$$
$$z_3 = \quad 2^2 + 1 \quad = 5$$
$$z_4 = \quad 5^2 + 1 \quad = 26$$
$$\ldots \quad \ldots. \quad \ldots.$$

Ek 3'ün devamı

şeklinde 1, 2, 5, 26, … olarak sürekli arttığı belirlenir. Grafiksel olarak incelendiğinde de 4. tekrarlamadan sonra yörünge değerlerinin çok hızlı büyüdüğü görülür.

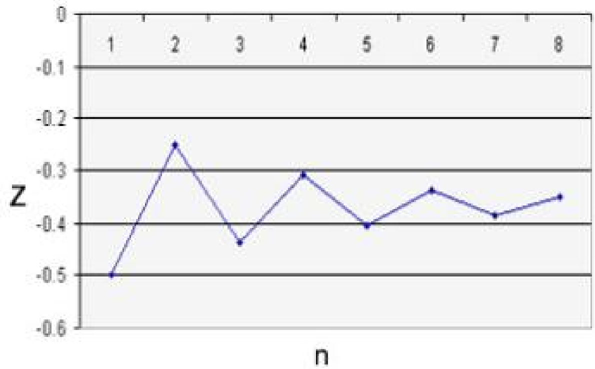


Yörüngelerin bu şekilde sınırsız bir olarak sonsuza gitmesi durumunda seçilen başlangıç noktasına **kaçak nokta** denir.

c = -0,5 için $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 - 0{,}5$ tekrarlama kuralına göre başlangıç noktası z_0 = 0 seçildiğinde oluşan yörüngelerin

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0^2 - 0{,}5 &&= -0{,}5 \\
z_2 &= (-0{,}5)^2 - 0{,}5 &&= -0{,}25 \\
z_3 &= (-0{,}25)^2 - 0{,}5 &&= -0{,}4375 \\
z_4 &= (-0{,}4375)^2 - 0{,}5 &&= -0{,}3086 \\
z_5 &= (-0{,}3086)^2 - 0{,}5 &&= -0{,}4048 \\
&\dots \qquad \dots\dots && \dots
\end{aligned}
$$

şeklinde -0,5; -0,25; -0,4375; -0,3086; -0,4048; -0,3362; … şeklinde belli bir sayıya yaklaştığı görülür. Grafiksel olarak incelendiğinde ise yörüngelerin -0,35 ile -0,38 arasındaki bir sayıya yaklaştığı belirlenir.



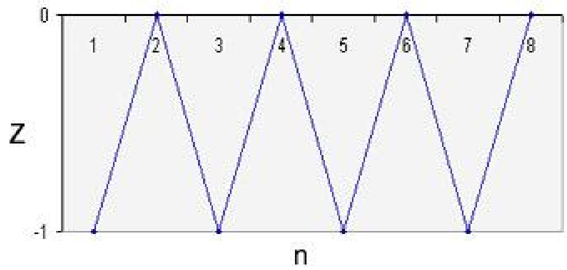
Ek 3'ün devamı

Yörüngelerin bu şekilde sabit bir sayıya gitmesi durumunda seçilen başlangıç noktasına **mahkum nokta** denir.

c = -1 için $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 - 1$ tekrarlama kuralına göre başlangıç noktası z_0 = 0 seçildiğinde oluşan yörüngelerin

$$z_1 = 0^2 - 1 = -1$$
$$z_2 = (-1)^2 - 1 = 0$$
$$z_3 = 0^2 - 1 = -1$$
$$z_4 = (-1)^2 - 1 = 0$$

şeklinde -1; 0; -1; 0; -1; … periyodik olarak hareket ettiği belirlenir. Grafiksel olarak incelendiğinde ise yörüngelerin -1 ile 0 arasında 2-periyotlu olarak hareket ettiği görülür.



Yörüngelerin bu şekilde periyodik davrandıkları durumda seçilen başlangıç noktasına **mahkum nokta** denir.

Slayt yardımıyla Julia kümesini karmaşık sayılar sisteminde $z_{n+1}=z_n^2+c$ şeklindeki tekrarlama kuralı sonucu mahkum ve periyodik noktaların oluşturduğu noktalar kümesi olarak tanımlayınız. Birkaç basit tekrarlama ile Julia kümesinin içerisinde ve dışında olan noktaları gösteriniz. Öğrencilerinizden de bu tür noktalar bulmalarını isteyiniz. Slayt yardımıyla Julia kümelerinin şekillerinden örnekler öğrencilerinize gösteriniz ve bu kümelerin kağıt üzerinde oluşturulmalarının zor olduğunu ve bilgisayar programlarında oluşturulabildiklerini açıklayınız.

2. Excel yardımıyla aşağıda verilen tekrarlama kuralları için başlangıç değerlerinin yörüngeleri bulunur ve her bir yörünge değerinin modülü hesaplanır. Yörüngelerin hareketini incelerken Excelde her bir sütunun karmaşık sayının reel ve imajiner kısımlarını gösterdiği açıklanır.

Ek 3'ün devamı

Tekrarlama Kuralı	$z_{n+1} \to z^2{}_n - 1{,}98$
Başlangıç Değeri	**Yörüngeler**
0	-2 ve 2 aralığında yörüngeler hareket eder; her bir modül 2 den küçüktür.
0,112i	-2 ve 2 aralığında yörüngeler hareket eder; her bir modül 2 den küçüktür.
0,01+0,1i	Yörüngeler sonsuza gider; modül değerleri 2 yi geçince sınırsız büyümekte.
-0,12-0,5i	Yörüngeler sonsuza gider; modül değerleri 2 yi geçince sınırsız büyümekte.
Tekrarlama Kuralı	$z \to z^2 - 0{,}12 + 0{,}75i$
Başlangıç Değeri	**Yörüngeler**
0	Yörüngeler 3 değere gitmekte; 3-periyotlu; her bir modül 2 den küçüktür.
-0,1+0,3i	Yörüngeler 3 değere gitmekte; 3-periyotlu; her bir modül 2 den küçüktür.
0,3+0,2i	Yörüngeler 3 değere gitmekte; 3-periyotlu; her bir modül 2 den küçüktür.
0,4+0,01i	Yörüngeler sonsuza gider; modül değerleri 2 yi geçince sınırsız büyümekte.
Tekrarlama Kuralı	$z \to z^2 + 0{,}38 + 0{,}34i$
0	Yörüngeler 5 değere gitmekte; 5-periyotlu; her bir modül 2 den küçüktür.
-0,1+0,1i	Yörüngeler 5 değere gitmekte; 5-periyotlu; her bir modül 2 den küçüktür.
0,02-0,03i	Yörüngeler 5 değere gitmekte; 5-periyotlu; her bir modül 2 den küçüktür.
1-i	Yörüngeler sonsuza gider; modül değerleri 2 yi geçince sınırsız büyümekte.

Yukarıdaki tablo yardımıyla Julia kümelerinin oluşumunun c-sabitine bağlı olduğu ve başlangıç noktasından bağımsız olduğu sonucunu elde etmeleri beklenir. Çünkü her bir c-değeri için bu değerin oluşturduğu tekrarlama kuralında yörüngeleri sonsuza gitme eğilimde olmayan mahkum noktaların birleşimi bir Julia kümesi oluşturur. Elde edilen

Ek 3'ün devamı

kaçak ve mahkum noktaların verilen tekrarlama kuralları atındaki her bir yörüngesinin ve c değerlerinin modülü incelenir ve modül değerlerinin 2 sayısını geçtiğinde verilen noktanın bir kaçak nokta olduğu ifade edilir. Bu sonucun her zaman doğru olduğu matematiksel olarak gösterilir: Bunun için z_n herhangi bir yörüngedeki n. değer ve $|z_n| \geq |c| > 2$ olmak üzere z_{n+1}'in yörüngelerinin kaçak olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c|$$

üçgen eşitsizliğinden yazılabilir. $|z_n| > |c|$olduğundan $-|z_n| < -|c|$ olur. Bu ifade yukarıdaki eşitsizlikte kullanıldığında

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c| > |z_n|^2 - |z_n| = (|z_n| - 1)|z_n|$$

yazılır. $|z_n| > 2$olduğundan $(|z_n| - 1) > 1$ dir. Bu durumda $|z_n| - 1 = D$olacak şekilde bir $D > 1$ sayısı vardır. Böylece

$$|z_{n+1}| > D|z_n|$$

yazılabilir. $|z_{n+1}| > |z_n|$ olduğundan aynı işlem tekrarlanırsa bu durumda

$$|z_{n+2}| > D|z_{n+1}|$$

ve buradan

$$|z_{n+2}| > D^2|z_n|$$

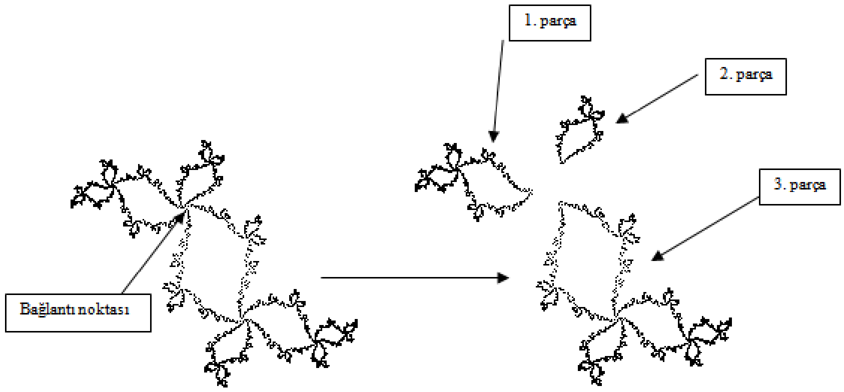
olur. Bu şekilde devam edildiğinde

$$|z_{n+k}| > D^k|z_n|$$

olur. $D > 1$ olduğundan D^k sürekli artacaktır. Bu ise $|z_{n+k}|$ modülünün sürekli büyümesi demektir. Yani başlangıç değeri z'nin yörüngesi sonsuza gitmektedir.

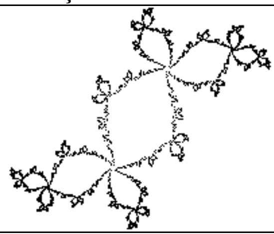
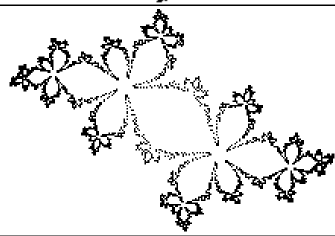
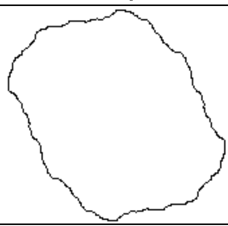
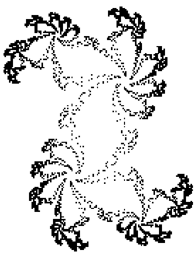
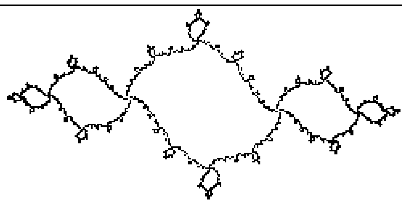
Fractint programı kullanılarak verilen c-değerlerinin şekilleri çizilir. Oluşan Julia kümelerinin tamamen birbirine benzer parça sayıları ile yörüngelerinin periyot değerleri karşılaştırılır. Julia kümesini oluşturan noktaların yörüngelerinin periyotları ile Julia kümesinin tamamen benzer parça sayısının aynı olduğu ifade edilir. Aşağıda $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 - 0{,}07 + 0{,}762i$ tekrarlama kuralına göre oluşturulmuş bir Julia kümesi görülmektedir. Dikkat edilirse Julia kümesinde sonsuz tane bağlantı noktası bulunmaktadır. Ancak bu bağlantı noktaları sonuçta 3 tane büyük birbirine benzer bölgenin birleşmesinden meydana gelmektedir.

Ek 3'ün devamı



Julia Kümesi, Bağlantı noktası ve Parça sayısı

Farklı c-paremetreleri için yukarıda elde edilen sonuç kontrol edilir.

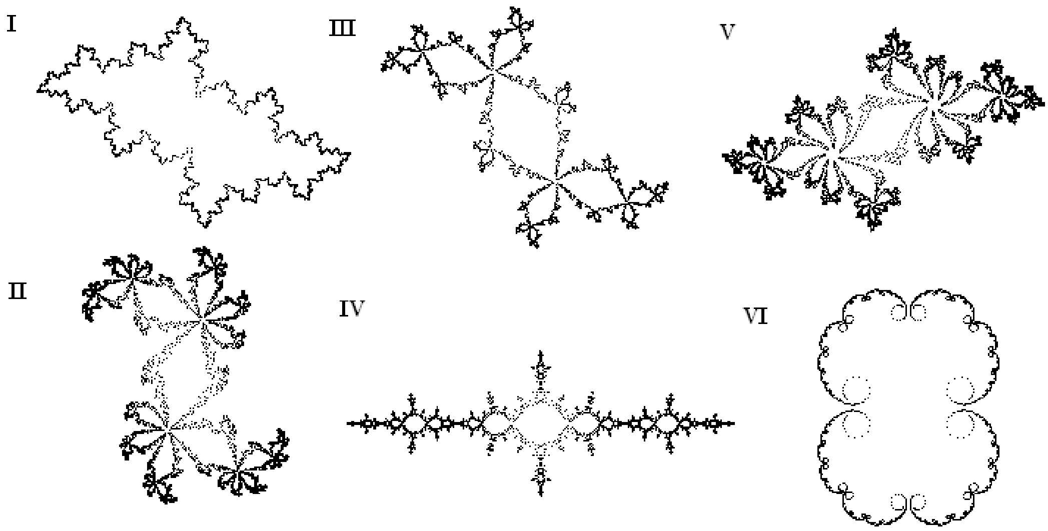
c-parametresi	Periyodu	Parça Sayısı	Oluşan Julia Kümesi
-0,1-0,75i	3	3	
-0,5+0,55i	5	5	
0,25i	Yörünge sabit bir noktaya yaklaşır.	1	
0,39+0,222i	6	6	
-1+0,12i	2	2	

Ek 3’ün devamı

Ölçme ve Değerlendirme

1. Aşağıda birkaç c-parametresinin oluşturduğu Julia kümeleri görülmektedir. Hangi Julia kümesinin hangi c-parametresi tarafından oluşturulduğunu bulunuz.

c-parametresi	Julia Kümesi
a. 0,26	
b. 0,132+0,615	
c. -0,5+0,5i	
d. 0,391+0,338i	
e. -1,32	
f. -0,11+0,78i	

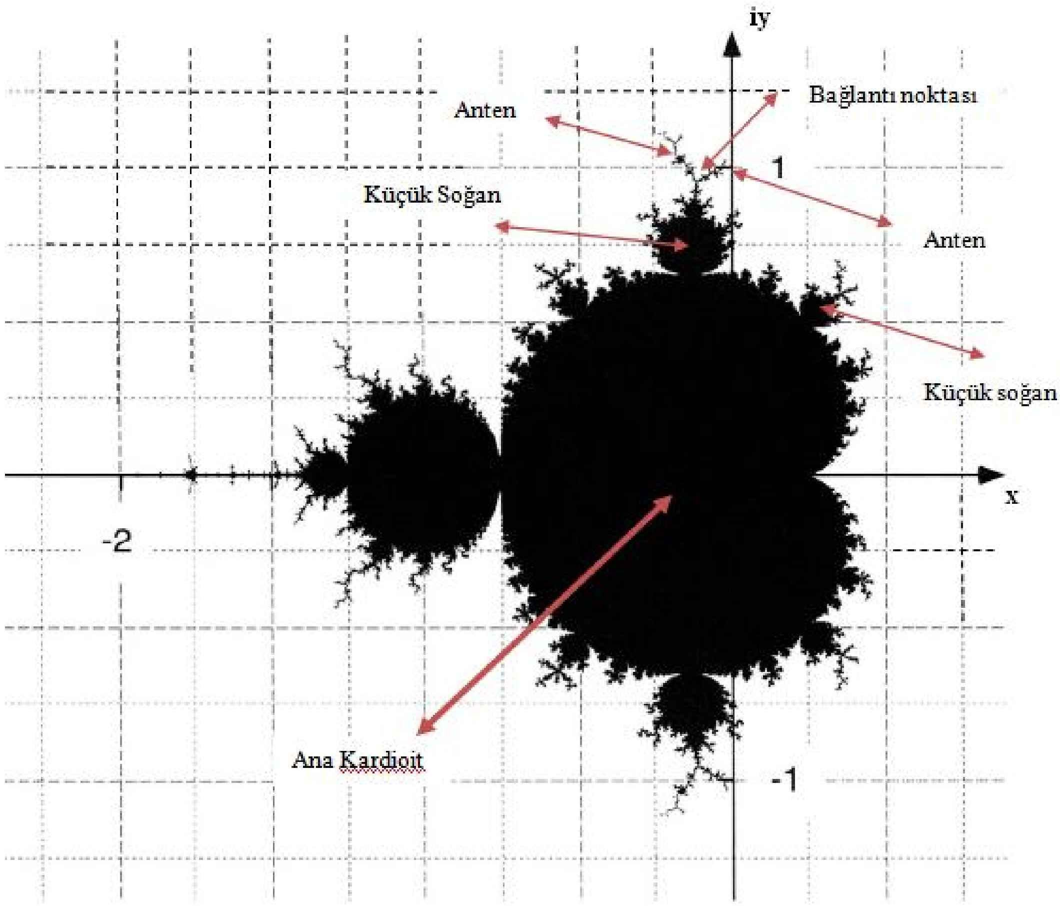


2. Herhangi bir c-parametresine göre periyodu 3, 4 ve 5 olarak verilmiş olan Julia kümelerinin şeklini çiziniz.
3. Aşağıda verilen tekrarlama kuralları için verilen başlangıç noktalarından hangilerinin kaçak hangilerinin mahkum nokta olduğunu modüllerini inceleyerek bulunuz. Elde ettiğiniz sonuçları yörüngelerin hareketini inceleyerek kontrol ediniz.

Tekrarlama kuralı	$z \rightarrow z^2 - 0{,}1 - 0{,}75i$	
Başlangıç değeri	**Kaçak**	**Mahkum**
0		
1+i		
-0,2-0,86i		
Tekrarlama kuralı	$z \rightarrow z^2 + 0{,}286 + 0{,}54i$	
Başlangıç değeri	**Kaçak**	**Mahkum**
0,1+0,1i		
-0,7-0,2i		
0,3-0,2i		

Ek 3'ün devamı

Slayt yardımıyla Mandelbrot kümesinin de Julia kümesinde olduğu gibi karmaşık sayılar sisteminde $z_{n+1}=z_n^2+c$ şeklindeki tekrarlama kuralı sonucu oluştuğu ifade edilir. Ancak burada Julia kümesinden farklı olarak sadece z=0 başlangıç noktalarının yörüngelerinin hareketinin incelendiği belirtilir. Yani, Mandelbrot kümesi $z \to z^2 + c$ tekrarlama kuralı altında z=0 başlangıç noktasının sonsuza gitmeyen yörüngeleri için c-parametrelerinin bir resmidir.



Mandelbrot kümesinin şekli incelenerek kümenin merkezi orijin ve yarıçapı 2 br. olan bir çemberin içerisinde yer aldığı, kuyruğunun -2+0i noktasına kadar uzandığı, x-eksenine göre simetrik ancak sanal eksene göre merkezinin biraz kaymış olduğu ifade edilir.

Mandelbrot kümesinin ana parçasına şeklinden dolayı **ana kardioit,** ana parçaya bağlı birçok küçük parçaya **soğanlar**, soğanlara bağlı çıkıntılara **antenler** ve her antenin orta noktasına ise **bağlantı noktası** denir. Kısaca Mandelbrot kümesi ana kardioit, soğanlar ve antenlerden oluşmaktadır.

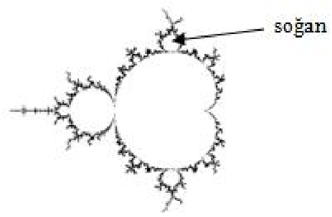
Ek 3'ün devamı

Mandelbrot kümesinin ana kardioiti içerisinden birkaç c-parametresi seçilir. Bu c-parametreleri için 0 başlangıç noktasının yörüngeleri belirlenir.

c-parametresi	Yörünge
0+0i	0 sabit noktasına gider.
-0,31+0,26i	-0,267+0,169i sabit noktasına gider
-0,36-0,54i	-0,34-0,32i sabit noktasına gider
0,27+0,32i	0,11+0,41i sabit noktasına gider

Tablo yardımıyla ana kardioit içerisinden seçilen c-parametrelerinin yörüngelerinin sabit bir noktaya gittiği belirlenir.

Fractint programı yardımıyla z=0 başlangıç noktası için verilen c-parametrelerinin oluşturdukları Julia kümeleri bulunur ve Mandelbrot kümesiyle olan ilişkileri açıklanır.



Mandelbrot kümesinin üst tarafında bulunan soğan içerisinden birkaç c-parametresi belirlenir. Seçilen c-parametrelerinin yörüngeleri incelenir.

c-parametresi	Yörünge
-0,014+0,812i	3-periyotlu olma eğiliminde
-0,186+0,743i	3-periyotlu olma eğiliminde
-0,06+0,704i	3-periyotlu olma eğiliminde

Yörüngelerin her zaman 3 periyotlu olduğu ve bu nedenle Mandelbrot kümesinin bu soğanına 3-periyotlu soğan denildiği ifade edilir. Fraqtive programı yardımıyla Mandelbrot kümesi içerisindeki farklı soğanlardan seçilen c-değerleri için 0 başlangıç noktasının yörüngeleri ve bu c-değerleri için oluşan Julia kümeleri incelenir. Soğanların periyotları ile oluşan Julia kümelerinin periyotlarının aynı olduğu görülür. Böylece Mandelbrot kümesinin doldurulmuş Julia kümelerinin bir birleşimi olduğu sonucu elde edilir.

Ölçme ve Değerlendirme

1.

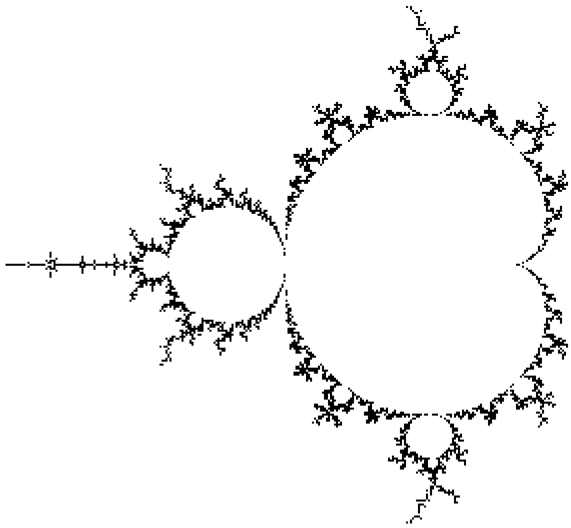
a) Aşağıda verilen c-parametrelerinden hangilerinin Mandelbrot kümesinin içerisinde olduğunu bulunuz.

c-parametresi	Yörünge	c-parametresi	Yörünge
0,12-0,78i		-0,12-0,75i	
-0,1-0,75i		i	
0,28+0,5i		2i	
0,25+0,08i		-1,5	
0,34+0,47i		-2	

Ek 3’ün devamı

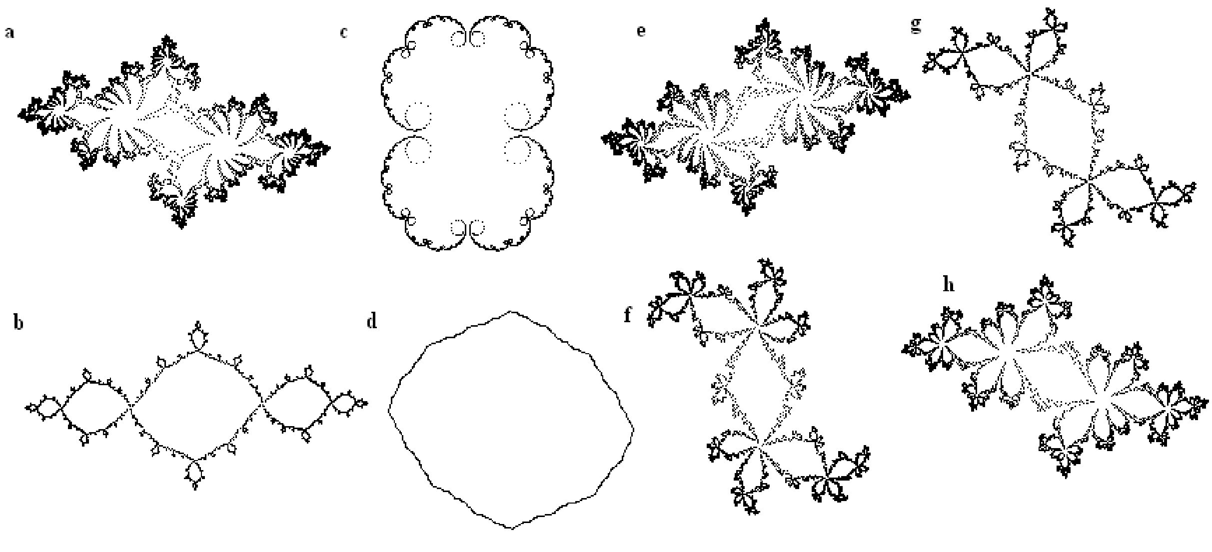
-0,76-0,13i		0,25	
-0,5-0,57i		-1-i	
-0,4-0,25i		0,04+0,7i	

b) Mandelbrot kümesinin içerinde yer alan noktaların kümenin hangi bölgesinde olduğunu (ana kardioit mi? soğanlar mı?) aşağıdaki şekil üzerinde gösteriniz.

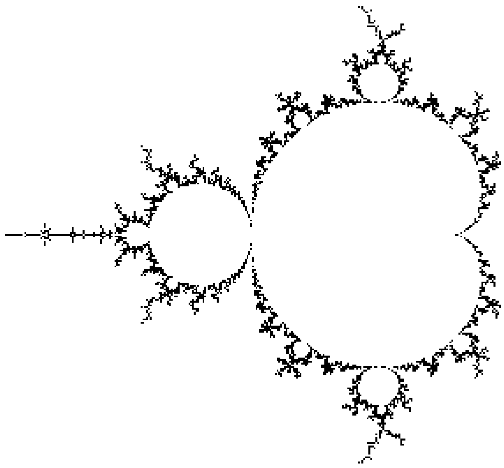


2.

a) Aşağıdaki Julia kümelerinin Mandelbrot kümesi içerisinde nerede bulunduklarını gösteriniz.

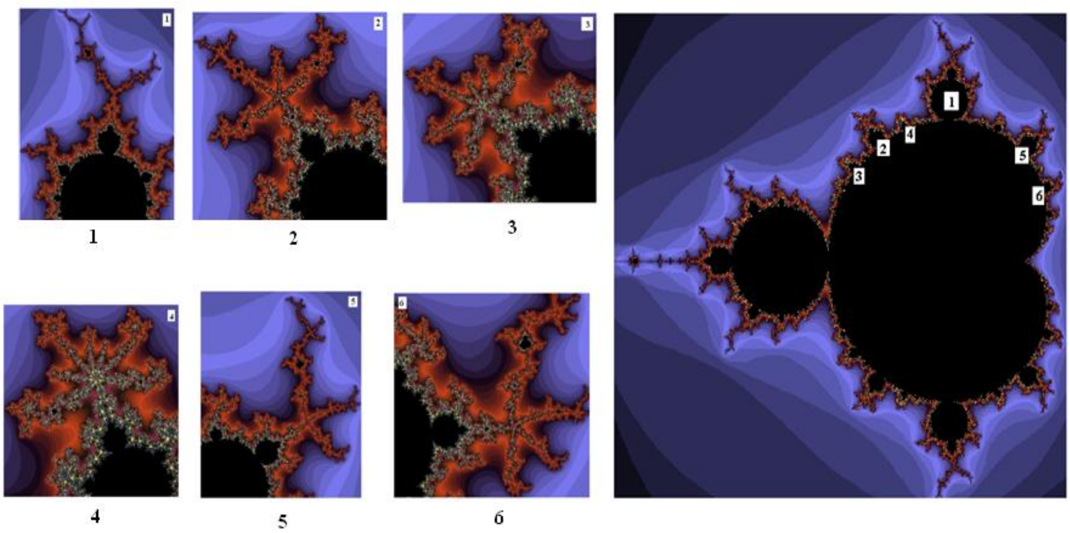


Ek 3'ün devamı



b) Bu Julia kümelerinin ve Mandelbrot kümesi içerisinde seçildikleri soğanların periyotlarını bulunuz.

3. Aşağıda bir Mandelbrot kümesi ve bu kümede ana-kardioide bağlı olarak soğanlar ve antenler görülmektedir. Her bir soğanın periyodunu bulunuz.



- Her bir soğan üzerinde bulunan antenlerin sayılarını (soğanın ucundaki bağlantı anteni dâhil) bularak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Soğan	Periyodu	Anten Sayısı
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Ek 3'ün devamı

- Elde ettiğiniz sonuçlara göre soğanların periyotları ile anten sayıları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

4. Öz-benzerlik

Kazanımlar:

1. Çevresinde bulunan nesneleri parça-bütün benzerliğine göre sınıflandırır, bunlardan fraktal olanları belirler ve Euclid şekilleriyle farklılıklarını açıklar.
2. Öz-benzerliği tanımlar ve öz-benzer şekillerin büyüme oranları ile öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkiyi belirler.
3. Öz-benzerlik türlerini tanımlar ve verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini belirler.

Öğrenme ve Öğretme Süreci

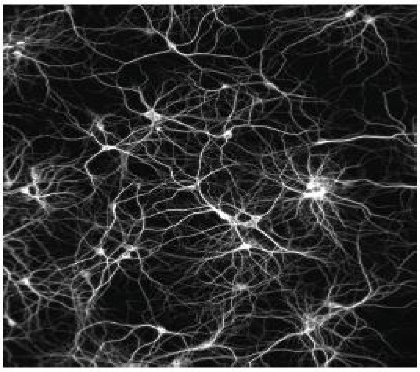
8. Çalışma yaprağı-10'u öğrencilere veriniz. Bu çalışma yaprağında öğrencilerden fraktal şekiller ile Euclid şekillerinin belli parçalarına yaklaşıldığında ne tür farklılıkların olduğu belirlemelerini isteyiniz. Böylece öz-benzerliğin fraktallara ait bir özellik olduğunu öğrencilerin fark etmelerini sağlayınız. Slaytı kullanarak çemberin herhangi bir kenarına yaklaşıldığında oluşan şekiller ile eğrelti ve otu ve Koch eğrisinin bir kenarına yaklaşıldığında oluşan şekillerin neler olduğunu tartışınız. Bu tartışmalar sonucunda parça-bütün karşılaştırmasına göre öz-benzerliği tanımlayınız.
9. Çalışma yaprağı-11'i uygulayınız. İşaretlenmiş Sierpinski üçgeni parçaları ile Sierpinski üçgeninin bütününü birlikte düşünülerek aralarındaki ilişki tartışınız. İşaretlenmiş parçalar hangi oranda büyütülürse ana şeklin elde edileceğini tartışınız.. 4 oranında büyültüldüğünde ana şeklin elde edileceği parçaların bulunması istenir. İşaretlenen her bir parça ile şeklin bütünü karşılaştırılarak aralarındaki ilişki tartışılır. Bu tartışmalar doğrultusunda aşağıdaki tablo doldurulur.

	Başlangıç şekli	**1. Tekrarlama**	**2. Tekrarlama**	**3. Tekrarlama**	**n. Tekrarlama**
Büyütme oranı	**1**	**2**	**4**	**8**	**2^n**
Öz-benzer parça sayısı	**1**	**3**	**9**	**27**	**3^n**

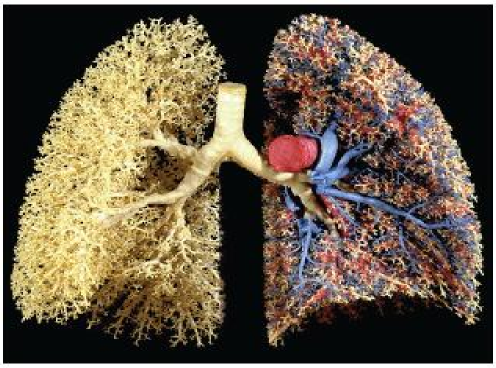
Ek 3'ün devamı

Sierpinski üçgeninin oluşumunda başlangıçtaki eşkenar üçgen ile 2.tekrarlamadaki üçgenin benzer oldukları gösterilir. Benzer şekilde 3., 4., vb. şekildeki üçgenler içinde başlangıçtaki üçgen ile benzerliği gösterilir. Böylece herhangi bir tekrarlama adımında da Sierpinski üçgeninin öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranı arasında bir oranın olduğunu fark etmeleri sağlanır. Slayt yardımıyla farklı fraktalların da öz-benzer parça sayıları ile bunların büyüme oranlarının neler olduğu tartışılır.

10. Çalışma yaprağı-12 dağıtılır ve verilen fraktalların öz-benzerliklerinin nerelerde olduğunu belirlemeleri istenir. Elde ettikleri sonuçlara göre bu fraktalları sınıflandırmaları istenir. Basit dallanma süreçlerinin tekrarlanması sonucu oluşan fraktal yapıların yaklaşık öz-benzer, spiraller sonucu oluşan fraktal yapıların noktasal öz-benzer ve şeklin her bölgesinde aynı öz-benzerlik sağlanıyorsa buna da tamamen öz-benzerlik denir şeklinde bir tanım oluşturmaları beklenir. Slayt yardımıyla aşağıdaki şekiller gösterilerek bunların öz-benzerlik türleri tartışılır.

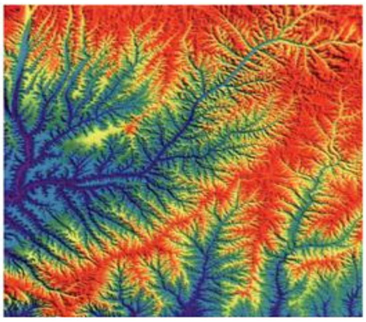


Beyin zarındaki nöronların dallanması oldukça karmaşık iletişim ağlarının oluşmasını sağlar. Bu ağlar bizim tüm algılama, hayal etme ve hatırlamalarımızdan sorumludur.



Akciğerlerimiz dallanmış fraktallardır ve yüzey alanları yaklaşık 100 m^2 dir. Bu yapılar ağaçların dallanmasına benzer ve hem akciğerler hem de ağaçlar sahip oldukları geniş yüzey alanını oksijen ve CO_2 değişiminde kullanırlar.

Ağaçlar birçok dallanma sonucu oluşurlar ve her bir dal kendi içinde yeniden yeniden dallanarak devam eder.



Milyonlarca yıl içinde erezyon ve yağmurlar sonucu oluşan nehir yatakları.

Ek 3'ün devamı

Bir tür kaktüs. Bu kaktüs sabit bir açıyla yeni oluşan parçalarının dönmesi sonucu oluşmaktadır.

Uzaydan çekilmiş bir kasırga fotoğrafı

İçerisinde milyonlarca yıldızı barındıran bir spiral galaxy

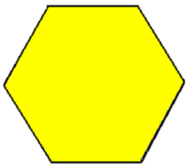
Brokoli. Tepeye doğru bir spiral yapı oluşmaktadır.

Spiral şeklinde oluşan bir bitki filizi

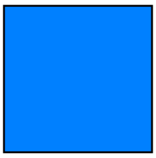
Salyangozun kabuğunun spiral şeklindedir.

Ölçme ve Değerlendirme

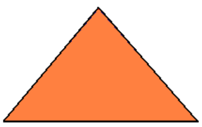
1. Aşağıda başlangıç şekilleri verilen nesneleri kullanarak kendinizin tanımlayacağı tekrarlama kurallarıyla tamamen öz-benzer fraktallar oluşturunuz.



$\Rightarrow$



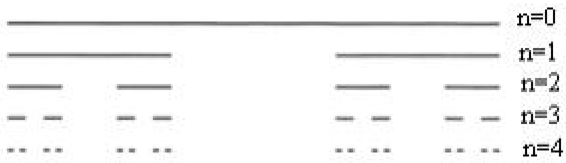
$\Rightarrow$



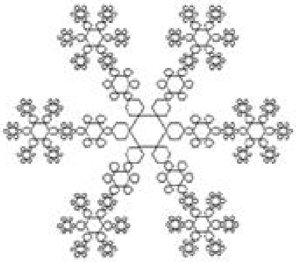
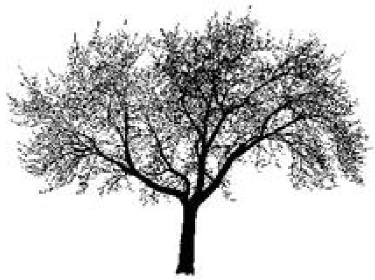
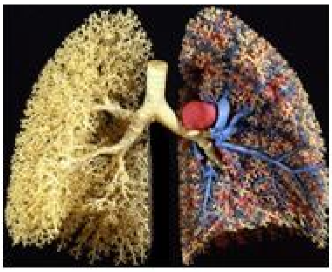
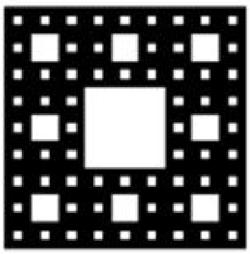
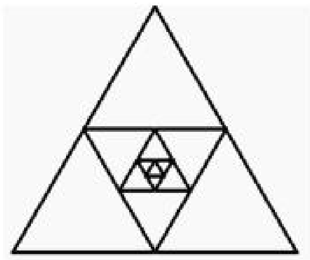
$\Rightarrow$

Ek 3'ün devamı

2. Yandaki şekilde Cantor kümesinin oluşumunun ilk 4 adımı görülmektedir. Cantor kümesinin tamamen öz-benzer olduğunu cebirsel olarak gösteriniz. *(Yol gösterme: Herhangi bir adımda sol taraftaki bir parçanın sağ taraftaki parçaya öz-benzer olduğunu gösteren birebir ve örten bir fonksiyon tanımlayınız.)*

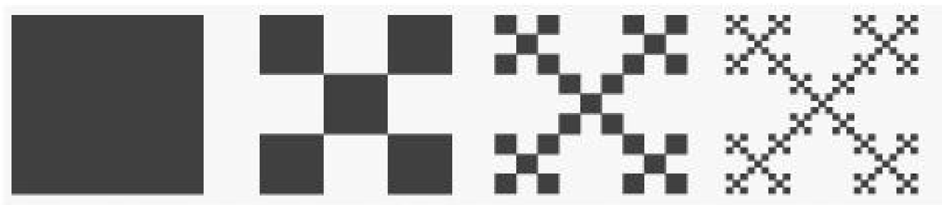


3. Aşağıda verilen fraktal yapıları inceleyiniz. Bu yapıların ne tür öz-benzerliğe sahip olduğunu ifade ediniz.

4. Bir bilgisayara bağlı bir kameraya bilgisayar ekranında kameranın görüntüsünü gösteriniz. Kamerayı yavaş oynatarak oluşan örüntüleri tanımlayınız. Ne tür öz-benzer fraktal yapılar oluşmaktadır?

5.



0. Adım: Başlangıç şekli | 1. Adım: Üretici | 2.Adım | 3. Adım

Yukarıda ilk 3 adımdaki oluşumu verilen bir fraktal şekil görülmektedir.

1. Bu fraktal ne tür bir öz-benzerliğe sahiptir?

Ek 3'ün devamı

2. Fraktalın oluşum kuralını göz önüne alarak fraktalın küçülme oranı ile öz-benzer parça sayısı arasında nasıl bir ilişki olduğunu aşağıdaki tabloyu kullanarak belirleyiniz.

Adım Sayısı	**0**	**1**	**2**	**3**	**…**	**n**
Küçülme Oranı	**1**	**3**				
Öz-benzer Parça Sayısı	**1**					

6. Bir yaprağın damar sisteminin niçin öz-benzer olduğunu açıklayınız. Bu öz-benzerliğin ne tür bir öz-benzerlik olduğunu ifade ediniz.

5. Fraktal Boyut

Kazanımlar:

1. Çevresindeki nesneleri Euclid geometrisi anlamında boyutlarına göre sınıflandırır ve bu nesnelerden dış görünüşleri düzgün olanların boyutları ile dış görünüşleri girintili, çıkıntılı olanların boyutlarını karşılaştırır.
2. Tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını tanımlar ve bu fraktalların boyutlarını hesaplar.
3. Kıyı şeridi gibi yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada uzunluk ölçme yöntemini kullanır.
4. Yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada kutu sayma metodunu kullanır.
5. Fraktal boyutun şeklin karmaşıklık derecesi olduğunu ifade eder.

Öğrenme ve Öğretme süreci

Fraktal boyut konusuna başlamadan önce öğrencilerin boyut konusundaki bilgilerinin ortaya çıkarılması ve boyut denilence ne anladıklarının belirlenmesi, fraktal boyutların daha anlamlı olarak öğrenilmesini sağlayacaktır. Çünkü öğrencilerin boyut kavramı hakkındaki düşüncesini bilmek ne tür yanlış anlamalara sahip olduklarını ortaya çıkaracaktır. Bunun yanında dersin ilk 20 dakikalık bölümünde Euclid anlamında boyut konusunda öğrencilerin bilgilendirilmeleri de kesirli boyutların öğrenilmesine katkı

Ek 3'ün devamı

sağlayacaktır. Öğrencilerde kesirli boyutların olabileceğine yönelik bir algı oluşturmak için çalışma yaprağı-13 kullanılır. Alüminyum folyonun katlanma şekillerine göre oluşan şekillerin boyutlarının ne olabileceği üzerine tartışmalar yapınız. Alüminyum folyo kırıştırılıp bir top haline getirildiğinde boyutunun ne olduğu sorgulanır. Top halindeki folyo dikkatlice açıldığında oluşan nesnenin boyutunun ne olacağı tartışılır. Bunun için başlangıçtaki folyonun şekli ile son oluşan hali göz önüne alınır. Son şeklin bazı yerleri düz iken bazıları buruşturulmuş, hacimlenmiş görülmektedir. Bu bölgelerin boyutunun ve böylece şeklin tümünün boyunun ne olabileceği tartışılır.

1. Slayt yardımıyla doğru parçası, kare ve küpü kullanarak tamamen öz-benzer fraktallar için boyut hesaplama kuralını öğrencilerin oluşturmaları beklenir. Bu kuralı kullanarak çalışma yaprağı-14'de verilen Sierpinski üçgeninin boyutunu hesaplamaları istenir. Benzer şekilde Koch eğrisi ve Cantor kümesinin de fraktal boyutları hesaplanır. Böylece öğrencilerin fraktalların Euclid şekillerinden farklı olarak kesirli boyutlara sahip olduklarını görmeleri beklenir.

Bir kıyı şeridinin boyunun nasıl hesaplanabileceği sorularak tamamen öz-benzer fraktallar için oluşturulan tanımın bu fraktalların boyutlarını hesaplamada yeterli olmadığı sezdirilir. Türkiye'nin kıyı şeridinin uzunluğu ne kadardır? sorusu tartışılır. Bu sorunun yanıtının kıyı şeridine ne kadar yaklaşıldığına ve kullanılan ölçme aracının uzunluğuna bağlı olduğu vurgulanır. Eğer bir harita ve bir cetvel kullanılarak kıyı şeridinin uzunluğu hesaplanmaya çalışılırsa belli bir sonuç elde edilir. Eğer kıyı şeridi adımlanarak ölçülmeye çalışılırsa daha farklı ve daha büyük bir sonuç elde edilir. Ancak bulunan sonuçta yaklaşık bir değerdir. Daha doğru bir sonuca ulaşmak için her bir girintinin, kayanın, taşın, çakılın, kumun uzunluğunun ölçülmesi gerekir. Sonuçta kıyı şeridinin uzunluğunun her bir ayrıntılı ölçmede daha da arttığı vurgulanarak sonsuza yaklaştığı üzerinde durulur. Bu bağlamda kıyı şeridi gibi fraktal yapıları tanımlamada (sayısal olarak) fraktal boyutların oldukça kullanışlı kavramlar olduğu vurgulanır. Slayt yardımıyla uzunluk ölçerek boyut hesaplama metodu tanımlanır. Öğrencilerden bu metodu kullanarak Türkiye'nin kıyı şeridlerinin boyutlarını hesaplamaları istenir. Böylece boyut ile şeklin karmaşıklığı arasında bir ilişki kurmaları beklenir. Kıyı şeridinin boyutu hesaplanırken mümkün olan en büyük haritayı

Ek 3'ün devamı

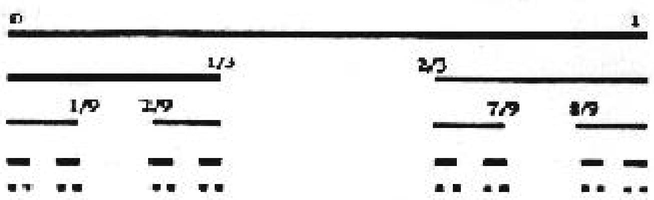
kullanmak ölçümlerin daha doğru yapılmasını sağlamaktadır.

2. Daha sonra bir ağacın boyutunun nasıl hesaplanacağı sorulur ve yukarıda verilen iki metodunda bu fraktalın boyutunu hesaplamada yetersiz kaldığını görmeleri beklenir. Slayt yardımıyla kutu sayma metodu tanımlanır. Bu metoda göre öğrencilerin bir ağacın boyutunu hesaplamaları istenir.

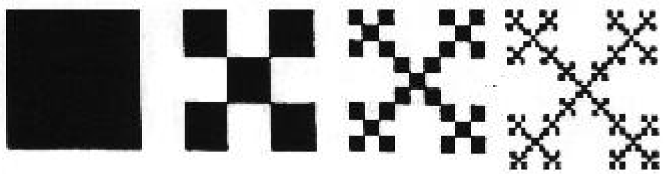
Ölçme ve Değerlendirme

1) Aşağıda verilen tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplayınız.

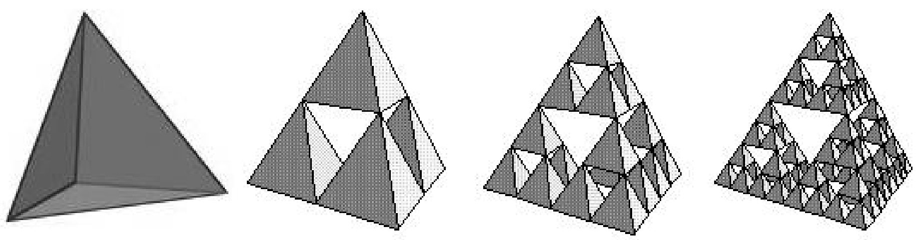
a)



b)

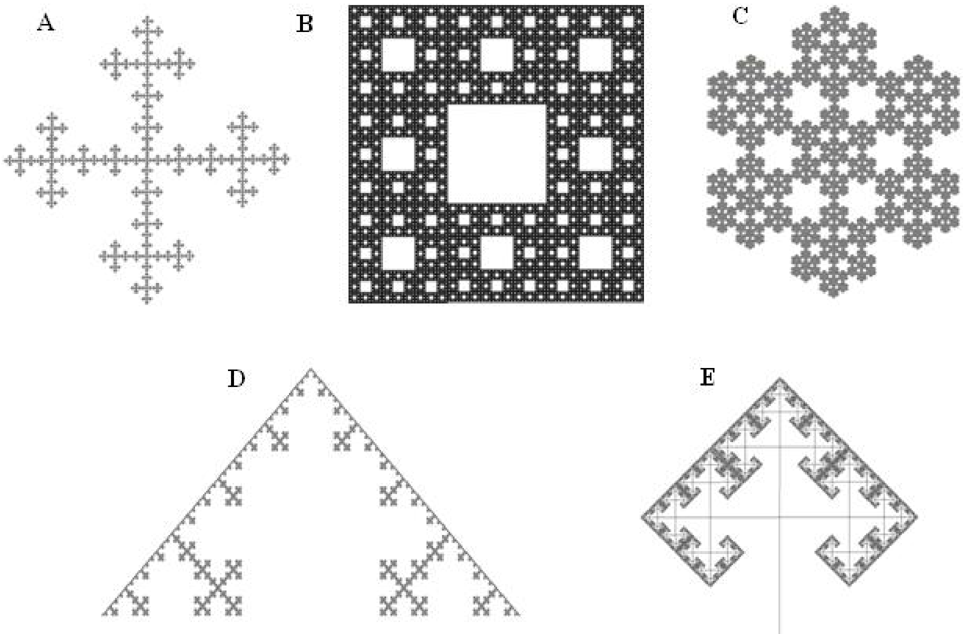


c)



2. Aşağıda verilen fraktal şekilleri inceleyiniz. Bu şekillerin boyutlarını tahmin etmeye çalışınız. Tahminleriniz doğrultusunda şekillerin boyutlarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

Ek 3'ün devamı



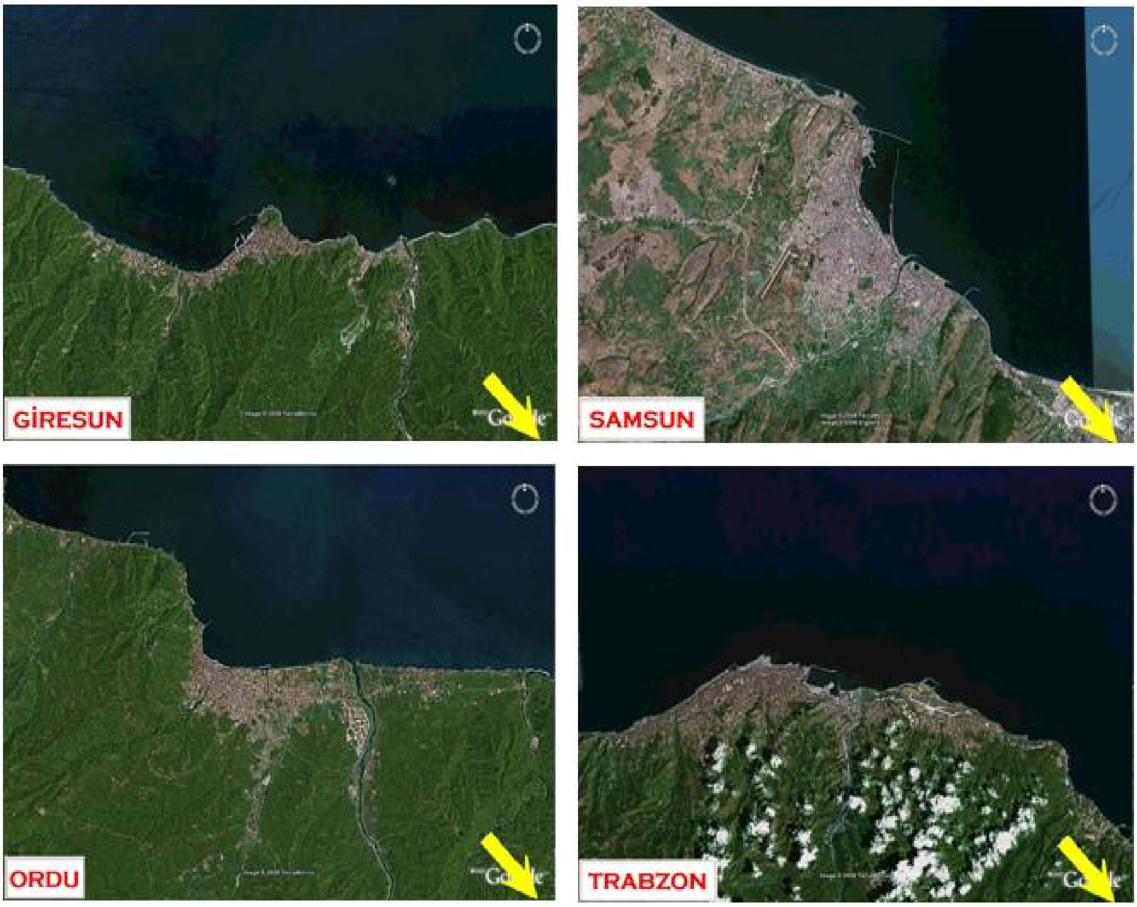
- Yukarıdaki fraktalların boyutlarını hesaplayınız. Bulduğunuz sonuçlarla tahminlerinizi karşılaştırınız.
- Boyutu en büyük olan fraktal hangisidir? Bu fraktalın şeklini diğer fraktalların şekilleriyle karşılaştırınız. Hangisi daha karmaşık görünüyor?

3. Aşağıda verilen kümülüs bulutunun boyutunu uzunluk ölçme metodunu kullanarak hesaplayınız.

Ek 3'ün devamı

4.

A) Aşağıda Giresun, Ordu ve Trabzon ve Samsun şehirlerinin kıyı şeridlerinin uydu fotoğrafları görülmektedir. Bu kıyı şeridlerinin fraktal boyutlarını bulunuz.



B) Boyutu en büyük kıyı şeridi hangi şehre ait? Bu kıyı şeridinin diğer kıyı şeridlerine göre görünüşü nasıldır?

Ek 3’ün devamı

5. Yan tarafta verilen şeklin boyutunu hesaplayınız.

6. Bir karenin boyutunu kutu sayma metodunu kullanarak hesaplayınız. Kullandığınız kutular küçüldükçe elde ettiğiniz boyut değerleri nasıl değişmektedir? açıklayınız.
7. Farklı türdeki ağaçların resimlerini çekiniz. Bu ağaçların boyutlarını hesaplayınız. Elde ettiğiniz sonuçlar ile ağaçların görünüşleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

6. **Kaos**

Kazanımlar:

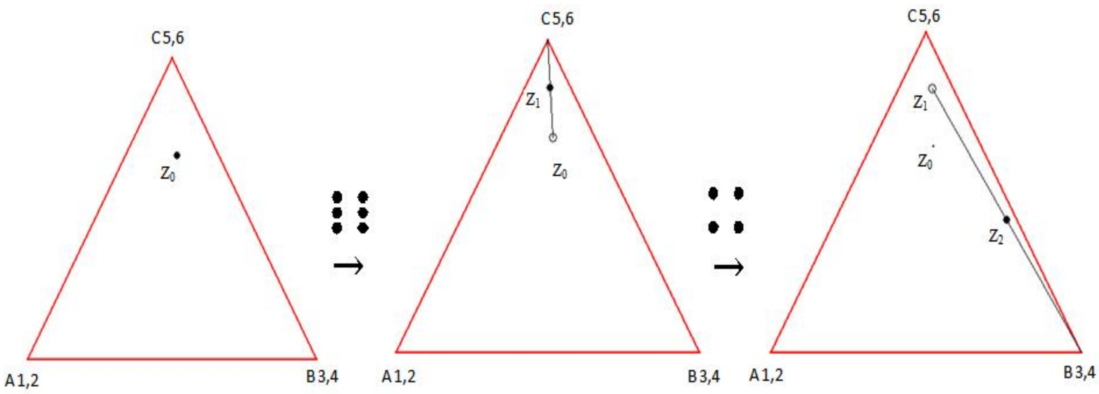
1. Rastgele olarak ifade edilen bir süreç sonunda düzgün ve kurallı örüntülerin oluşacağını keşfeder.
2. Farklı noktalara ve farklı tekrarlama kurallarına göre oynanan kaos oyunları sonucu oluşacak şekillerden fraktal olanları tahmin eder.
3. Kaos teorinin ekoloji, hava durumu tahmini ve borsa işlemleri gibi birçok disiplinde kullanıldığını ifade eder ve bu teoride sıklıkla çalışılan nüfus artışı tahmininin nasıl yapıldığını keşfeder.

Öğrenme ve Öğretme Süreci

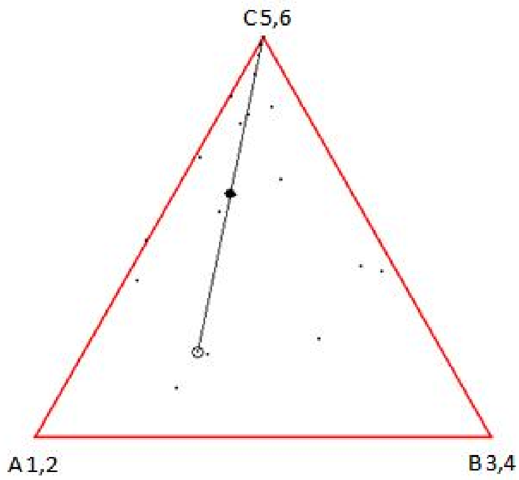
Çalışma yaprağı-17 öğrencilere dağıtılır. Öncelikle kağıt üzerinde rastgele zar atılmasına göre kaos oyunu oynanır ve oyun sonunda ne tür bir şeklin oluşacağı üzerine tartışılır. Daha sonra www.geoastro.de\ChaosSpiel\Spiel1English.html web sitesi

Ek 3'ün devamı

yardımıyla adım adım gelen zar sayılarına göre öğrencilerin noktaların hareketini görmeleri sağlanır. Böylece oyun sonunda niçin Sierpinski üçgeninin oluştuğuna yönelik bir algı geliştirmeleri beklenir. Bu bağlamda noktaların hareketine göre aşağıdaki tartışmalar yapılır.

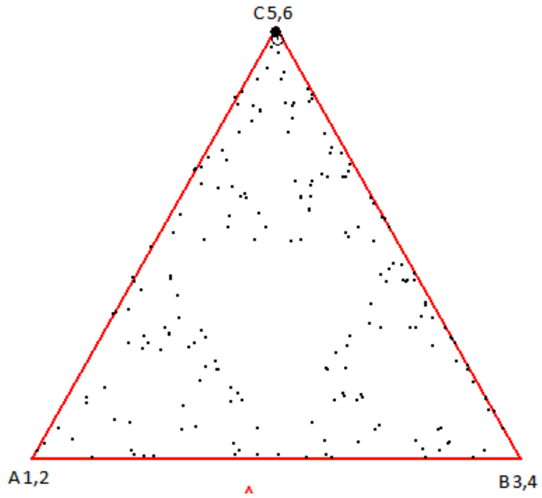


20. başlangıç noktasının yeri işaretlenerek bu adımda oluşan şekil tanımlanmaya çalışılır.

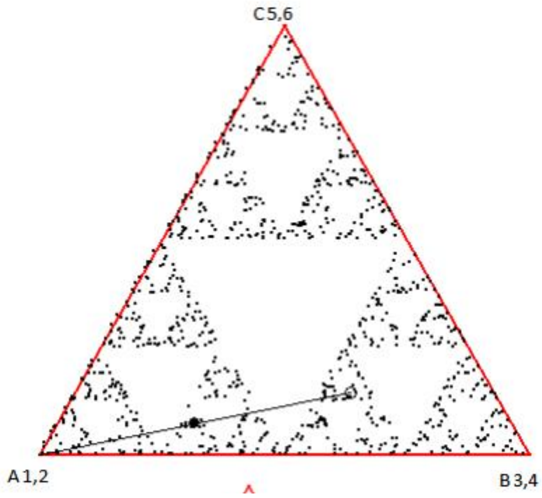


Tekrarlama işlemine devam edildiğinde sonuçta ne tür bir şeklin oluşacağı tartışılır. www.geoastro.de\ChaosSpiel\Spiel1English.html web sitesi yardımıyla 200 tekrarlama sonucu ne tür bir şeklin oluşacağı tartışılır.

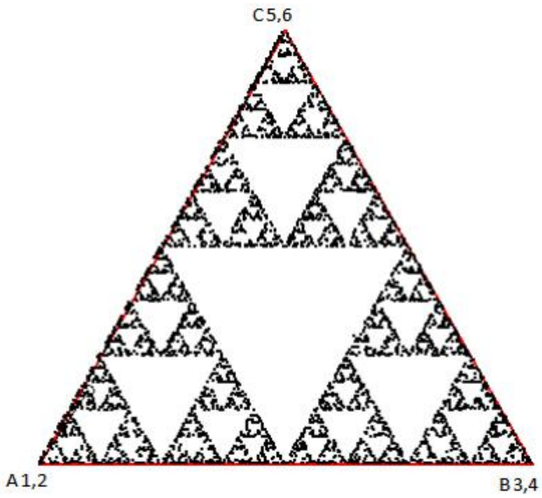
Ek 3'ün devamı



- 1000 tekrarlama sonucu oluşan şekil tanımlanır ve daha önceden bilinen fraktal örnekleriyle ilişkilendirilir.



- 5000 tekrarlama sonucu Sierpinski üçgeni fraktalın oluştuğu ifade edilir.



Ek 3'ün devamı

- Rastgele bir olay sonucu kurallı olarak ifade edilen düzgün bir fraktal yapının niçin oluştuğu tartışılır. Eğer zarın atılması rastgele değil de kurallı olsaydı sonuçta yine Sierpinski üçgeninin oluşup oluşmayacağı sorgulanır. Bu amaçla http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html web sitesi kullanılarak farklı kurala ve farklı noktalara göre kaos oyunu oynanır. Böylece öğrencilerin oyun sonunda niçin düzenli şekiller oluştuğunu açıklamaları beklenir.

1. Yaşadığımız dünyada sonucunu önceden tahmin edemediğimiz ya da belli bir aşamaya kadar kabaca tahmin ettiğimiz kaotik olarak ifade edilen ne tür durumlarla karşılaştığımız tartışılır. Bunun sonucunda özellikle ekolojide türlerin nüfuslarındaki değişimin, hava durumu tahminlerinin, deprem tahminlerinin, yıllık toprak mahsulü üretiminin, yapılan alış-veriş oranlarının, borsanın, döviz kurlarının vb. birçok sistemin kaotik olduğu ifade edilir. Tüm bu sistemlerin ortak noktasının davranışlarının bazen tahmin edilebilir olmasına karşın çoğunlukla tahmin edilememeleri ve amaçlarının gelecekteki durumlarını bilmek olduğu ifade edilir. Örneğin ekolojide türlerin gelecekteki durumlarının belirlenmesinin niçin önemli olacağı sorgulanarak bir türün gelecek var olup olmaması ya da ne kadarının var olacağı ve ne zaman yok olacaklarının tespit edilmesinin hem türün devamlılığının sağlanması hem de ekolojik dengenin bozulmaması açısından önemi vurgulanır. Bir ormanda bulunan tavşanların nüfus değişimi f(x)=kx şeklinde gösterilmektedir. Burada x, tavşanların şuan ki nüfuslarını, f(x) gelecekteki nüfuslarını ve k ise sabit bir sayı olarak doğurganlık oranlarını göstermektedir. Nüfus pozitif bir olay olduğu için x ve k değerlerinin her zaman pozitif olacağına dikkat ediniz.

a) Hangi k değerleri için tavşan nüfusu gitgide azalarak yok olacaktır?

b) Hangi k değerleri için tavşan nüfusu sınırsız şekilde artacaktır?

Yukarıda tanımlanan model gelecekteki tavşan nüfusunun belirlenmesi için oldukça basittir. Tavşanların nüfus değişimlerini belirleyen ve modelin göz önüne almadığı birçok durum bulunmaktadır. Buna göre daha gerçekçi bir hesaplama yapmamıza

Ek 3'ün devamı

neden olacak modelin göz önüne almadığı bu durumlar neler olabilir?

c) Eğer tavşanların nüfusu sürekli artarsa bu durumda ortamda yiyecek sıkıntısı oluşacaktır. Bu durum nüfuslarının artmasını engelleyecek ve belki de yok olmalarına neden olacaktır. Yiyecek sıkıntısı göz önüne alındığında tavşanların nüfusları f(x)=kx(L-x) şeklinde bir denklemle belirlenebilir. Burada f(x) gelecekteki tavşan nüfusunu, k sabiti doğurganlık oranını, x şu anki tavşan nüfusunu ve L ise maksimum tavşan nüfusu göstermektedir. Denklemde verilen k ve L değerleri birer değişkendir. Bu değişkenler hangi türleri modellediğimize, çevreye ve diğer birçok faktöre bağlıdır. İşlemlerimizde kolaylık olsun diye L=1 olarak kabul edelim. L=1 demek tavşan nüfusunun maksimum 1 olması demek değildir. L=1 olarak alınması başlangıçtaki tavşan sayısı x'in hangi aralıkta olmasını gerektirir?

d) x, 0 çok yakınsa yani başlangıçtaki tavşan nüfusu oldukça az ise ya da x, 1'e çok yakınsa yani başlangıçtaki tavşan nüfusu oldukça fazla ise bu durumda gelecekteki tavşan nüfusu f(x) nasıl değişir?

e) Eğer bir tekrarlama kuralında $f(x_0)=x_0$ ise bu durumda x_0'a **sabit nokta** olduğu ifade edilerek f(x)=kx(1-x) tekrarlama kuralının sabit noktaları bulunur. (k>0 ve 0<x<1 olduğuna dikkat ediniz.)

f) Başlangıçtaki tavşan nüfusu 0,5 ile gösterilir. Buna göre f(x)=kx(1-x) tekrarlama kuralını kullanarak aşağıda verilen k-değerleri için yörüngeler hesaplanır.

k-değerleri	**Yörüngeler**
k=0,2	0,05 - 0,0095 - 0,0019 -…- 0
k=0,4	0,1 - 0,036 - 0,014 - 0,005 - 0,002 - 0,0008 - …- 0
k=0,6	0,15 - 0,08 - 0,04 - 0,02 - 0,01 - 0,008 - 0,005 - 0,001 - 0,0006 - …- 0
k=0,8	0,2 - 0,128 – 0,09 – 0,06 - … - 0,001 – 0,0008 - … - 0

- Elde edilen sonuçlara göre tavşan nüfusuna ne olduğu sorulur?
- Siz de 0<k<1 aralığı için farklı k değerleri için yörüngeler bulunuz. Aynı davranışların gözlemlenip gözlemlenmediği sorgulanır
- Buna göre 0<k<1 aralığındaki her bir k değeri için 0 sabit noktasının bir çekici nokta olduğu ifade edilir.

Ek 3'ün devamı

- k=1 olduğunda ya da k değeri k=1,1 gibi 1 i çok az geçtiğinde yörüngelerin davranışı sorulur. k=1 olduğunda tavşanların yavaş yavaş ölmeye başladıkları ve k değeri 1'e yaklaştıkça tavşan ölümlerinin yavaşladığını görmeleri beklenir. Eğer k değeri 1 den biraz büyük olursa bu durumda yeni bir sabit noktanın olduğu yani tavşanların nüfuslarının azaldığını ancak belli bir süre sonra sabit değere yaklaştıklarının farkına varmaları beklenir.

  g) Aşağıda verilen tablo kullanılarak 1<k<3 aralığında farklı k-değerleri için yörüngeler hesaplanır.

k-değerleri	**Yörüngeler**
k=1,3	0,325 – 0,285 - … - 0,2307 sabit noktasına yaklaşır
k=1,8	0,45 – 0,445 – 0,4447 - … - 4/9 sabit noktasına yaklaşır
k=2	0,5 – 0,5 – 0,5 - … - 0,5 sabit noktasına yaklaşır
k=2,5	0,625 – 0,586 – 0,607 – 0,597 - … - 0,599 – 0,6 – 0,6 sabit noktasına yaklaşır.

- Her bir k değeri göz önüne alındığında tavşan nüfusunun nasıl değiştiği sorgulanır.
- 1<k<3 aralığında farklı k-değerleri için de benzer bir davranışın gözlenip gözlenmediği sorulur.
- k=3 olduğunda ya da k değeri k=3,1 gibi 3'ü çok az geçtiğinde yörüngelerin davranışı sorulur. k=3 olduğunda yörüngenin iki sayı arasında gidip geldiği görülmesine karşın çok fazla tekrarlama yapıldığında aslında sabit bir sayıya yaklaştığı ifade edilir. k değeri 3'den büyük olduğunda k=3,1 için 0,558 ile 0,764 sayıları arasında periyodik davrandığı gözlemlenir.

I) Aşağıda verilen tablo kullanılarak 3<k<3,5 aralığında farklı k-değerleri için yörüngeler hesaplanır.

k-değerleri	**Yörüngeler**
k=3,2	0,5130 ve 0,7995 sayıları arasında gider gelir 2-periyotlu olma eğilimindedir.
k=3,4	0,452 ve 0,842 sayıları arasında gider gelir 2-periyotlu olma eğilimindedir
k=3,5	0,5009 – 0,8749 – 0,3828 – 0,8269 arasında 4 periyotlu olma eğilimindedir.
k=3,554	0,5007 – 0,8884 – 0,3520 – 0,8107 – 0,5453 – 0,8812 – 0,3720 – 0,8303 arasında 8-periyotlu olma eğilimindedir.

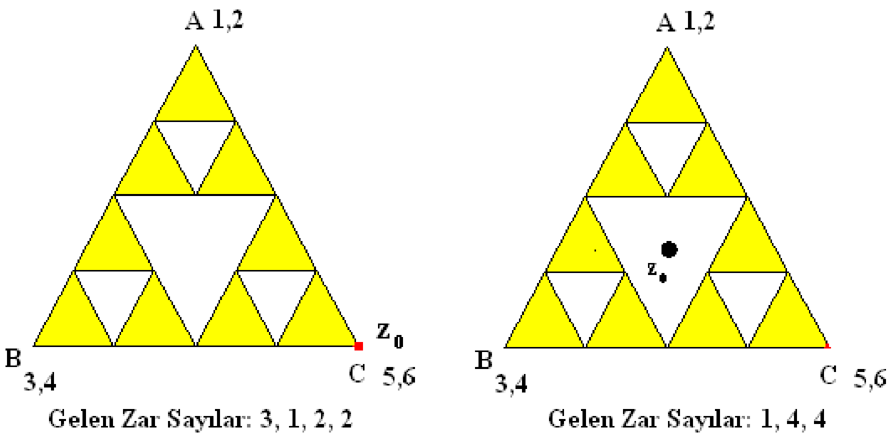
Ek 3'ün devamı

- Tavşan nüfusunun her bir durum için nasıl değiştiği sorulur. k değerinin 3 den 3,554'e kadar artığında tavşan nüfusunun bir değerdeki sabitliğinden 2 değer arasında değiştiği (2-periyolu), 4 değer arasında değiştiği (4-periyotlu) ve 8 değer arasında değiştiği (8-periyotlu) sonucunu ifade etmeleri beklenir.
- 3,554'ü çok az geçen bir k-değeri örneğin k=3,556 için yörüngeler nasıl davranmaktadır? k=3,57 için durum nedir?
- k değeri 3,83 ile 3,87 değeri arasında seçilirse yörüngelerin hareketi için ne söylenebilir?

Ölçme ve Değerlendirme

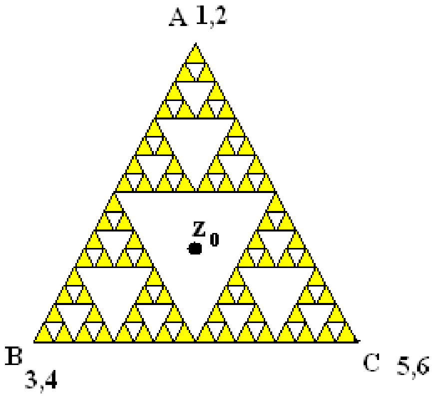
1.

a) Aşağıda verilen Sierpinski üçgenlerinde Kaos oyunu oynanmaktadır. Atılan zar sayılarına göre başlangıç noktasının en son bulunacağı bölgeyi işaretleyiniz.

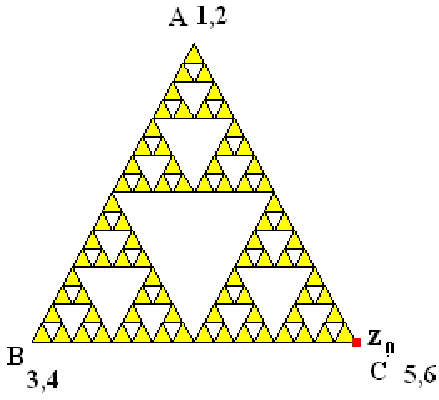


b) Z_0 başlangıç noktasının ilk konumuyla atılan zar sayısına göre başlangıç noktasının son konumunu bulmanızı sağlayan bir kural bulunuz. Elde ettiğiniz kuralı aşağıdaki Kaos oyunlarında deneyiniz.

Ek 3'ün devamı

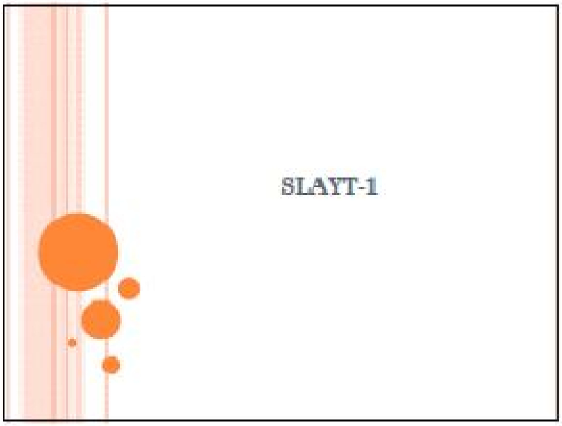


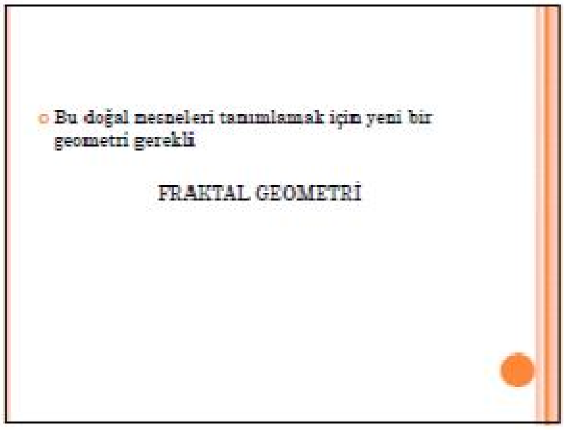
Gelen Zar Sayıları: 1, 3, 5

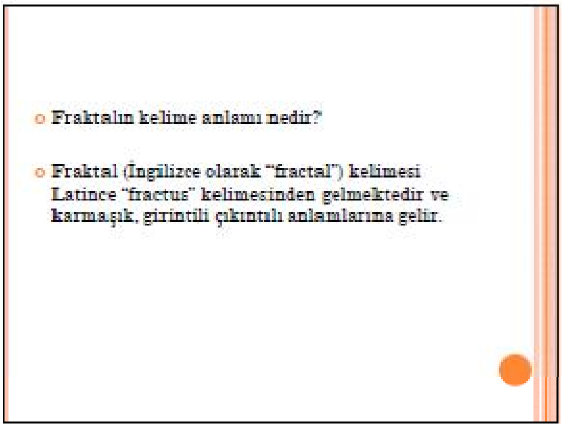


Gelen Zar Sayıları: 3, 2, 6, 4, 1

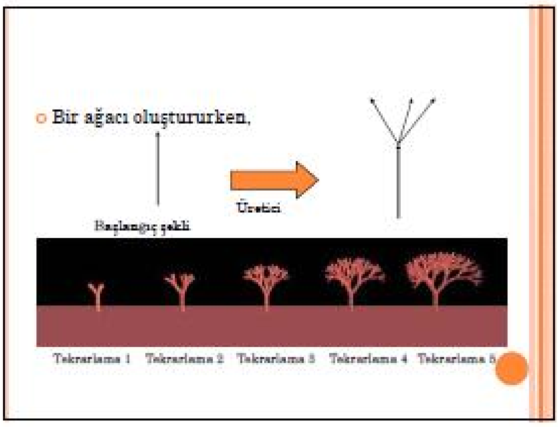
Ek 4: Hazırlanan PowerPoint Sunuları

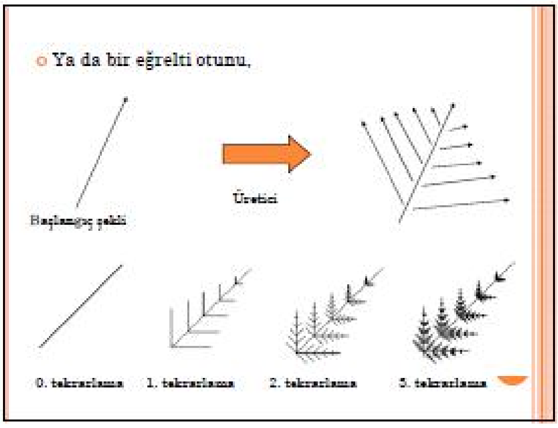


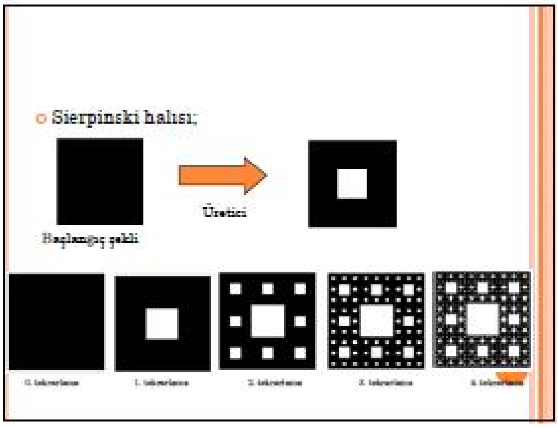


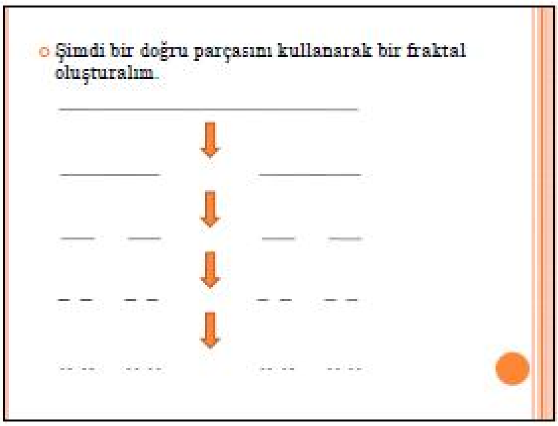


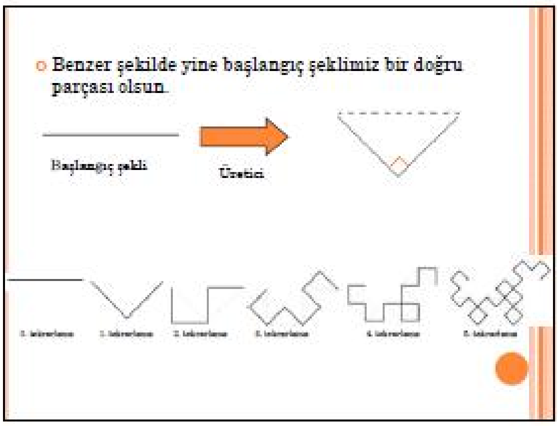
Ek 4’ün devamı



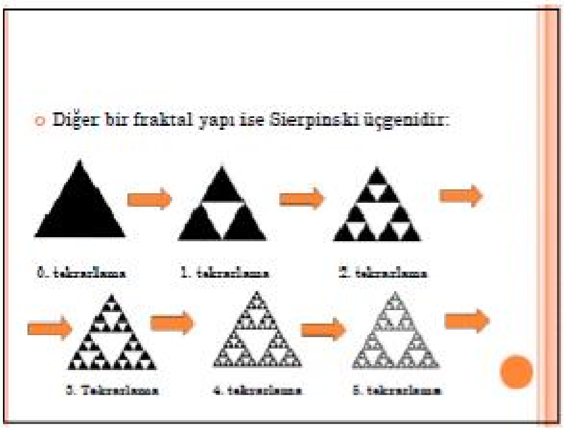


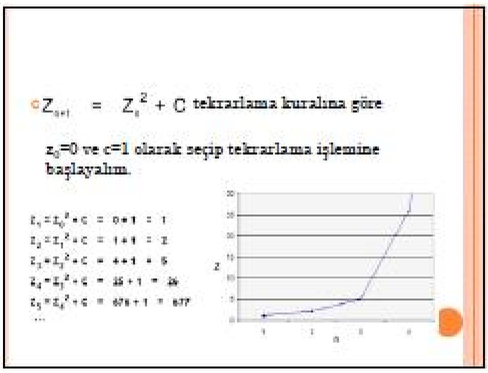


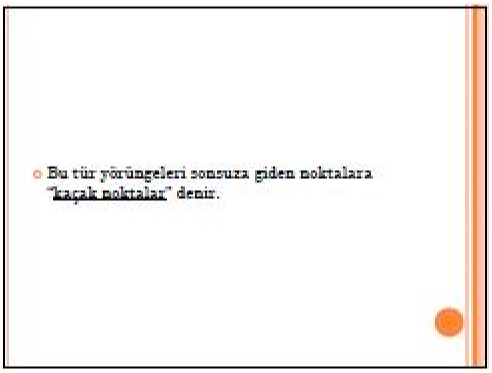




Ek 4'ün devamı



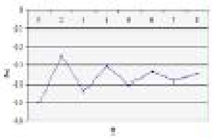




Ek 4'ün devamı

- Yine aynı tekrarlama kuralı ve başlangıç değeri ve farklı bir c sabiti C=-0.5 için tekrarlama işlemini yapalım

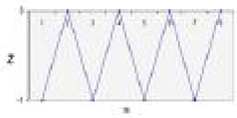
$z_1 = z_0^2 + c = 0 + -0.5 = -0.5$
$z_2 = z_1^2 + c = 0.25 + -0.5 = -0.25$
$z_3 = z_2^2 + c = 0.0625 + -0.5 = -0.4375$
$z_4 = z_3^2 + c = 0.1914 + -0.5 = -0.3086$
$z_5 = z_4^2 + c = 0.0952 + -0.5 = -0.4048$
$z_6 = z_5^2 + c = 0.1638 + -0.5 = -0.3362$
$z_7 = z_6^2 + c = 0.1130 + -0.5 = -0.3870$
$z_8 = z_7^2 + c = 0.1498 + -0.5 = -0.3502$
...



- Yörüngeler -0,35 ile -0,38 arasında bir yerde bulunmaktadırlar.
- Bu tür yörüngeleri sabit bir noktaya giden noktalara "**mahkum noktalar**" denir.

- Aynı tekrarlama kuralını ve başlangıç değerini kullanarak c=-1 için oluşan yörüngeleri incelediğimizde

$z_1 = z_0^2 + c = 0 + -1 = -1$
$z_2 = z_1^2 + c = 1 + -1 = 0$
$z_3 = z_2^2 + c = 0 + -1 = -1$
$z_4 = z_3^2 + c = 1 + -1 = 0$
$z_5 = z_4^2 + c = 0 + -1 = -1$
...



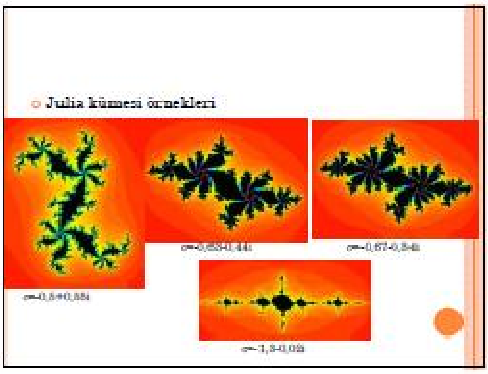
- Yörüngeler 0 ile -1 arasında periyodik davranmaktadırlar.

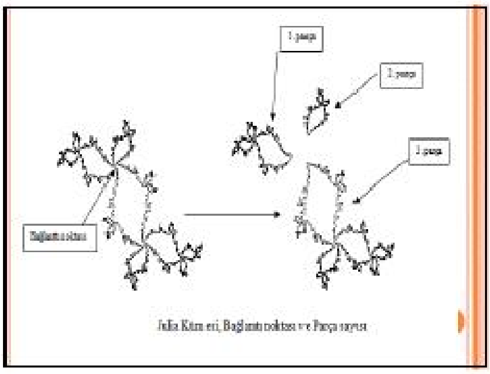
JULİA KÜMELERİ

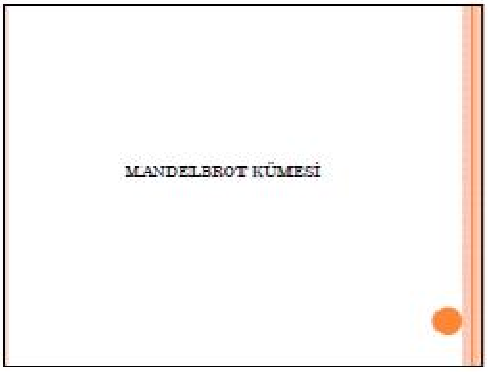
$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c$$

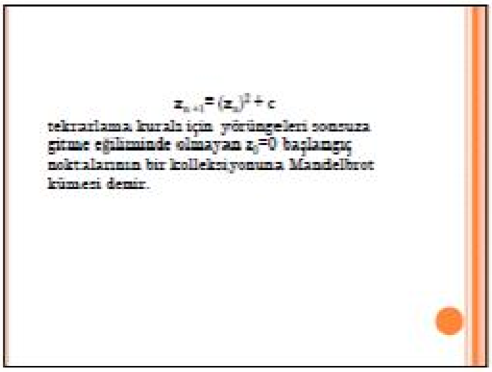
tekrarlama kuralı için yörüngeleri sonsuza gitme eğiliminde olmayan noktaların bir kolleksiyonuna Julia kümesi denir.

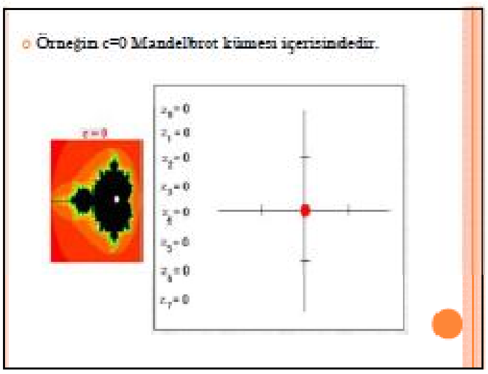
Ek 4'ün devamı

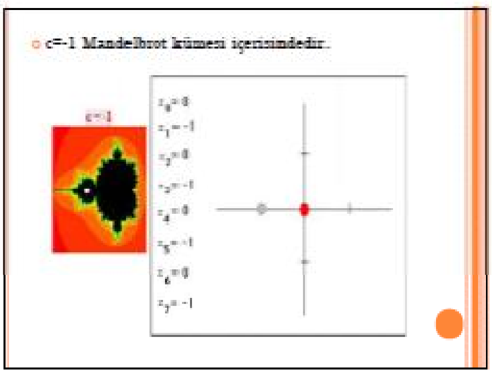




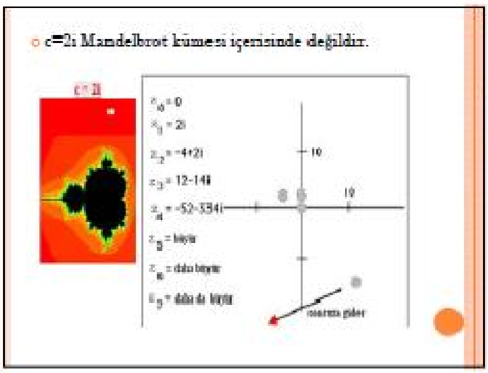


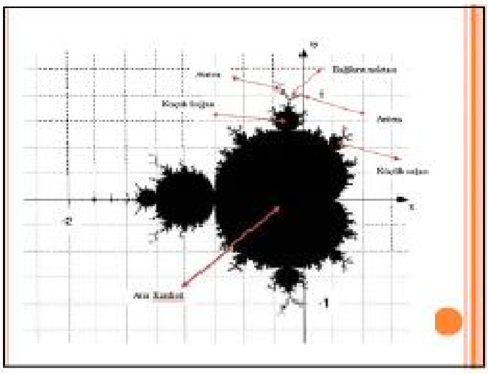


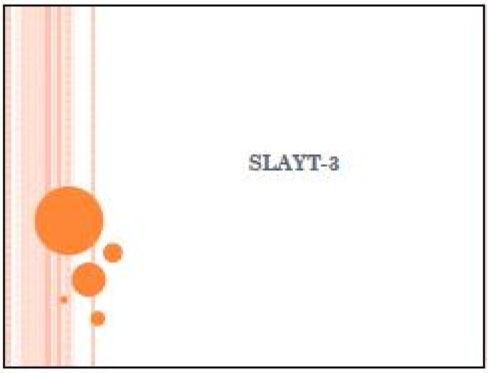


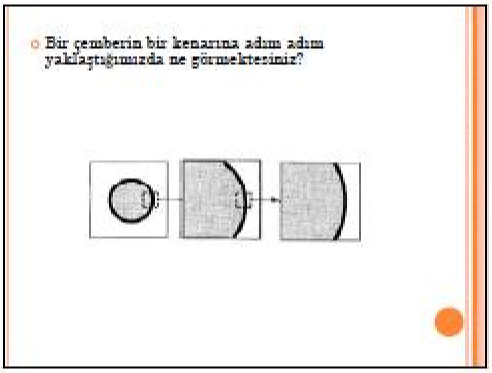


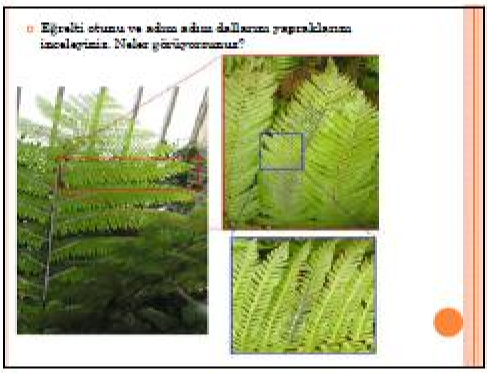
Ek 4'ün devamı



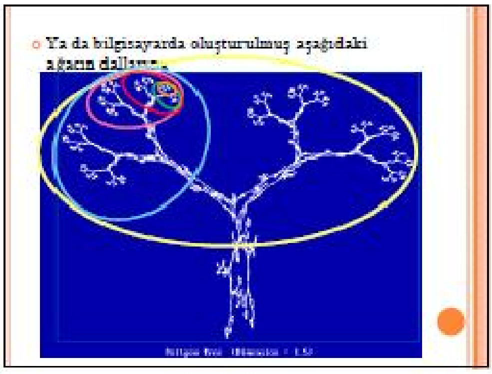


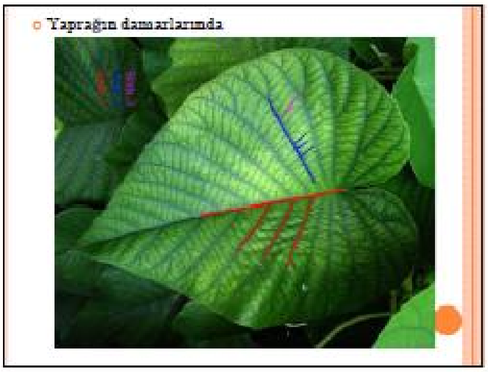


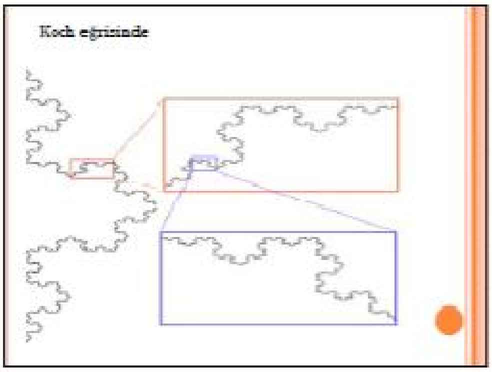


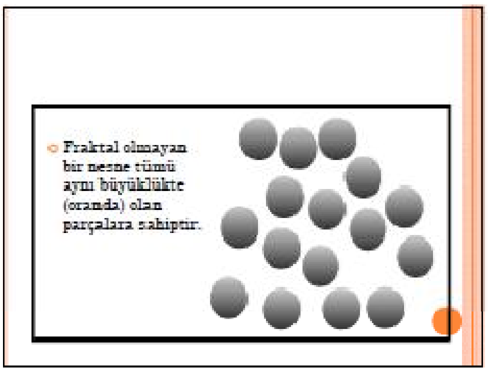


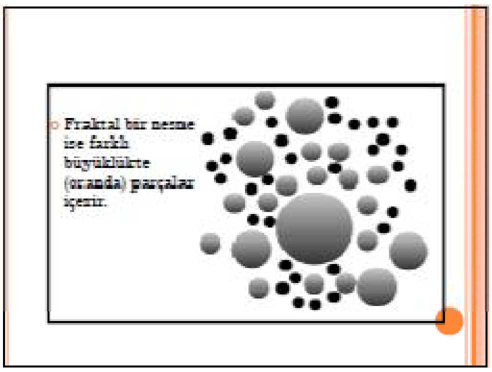
Ek 4'ün devamı



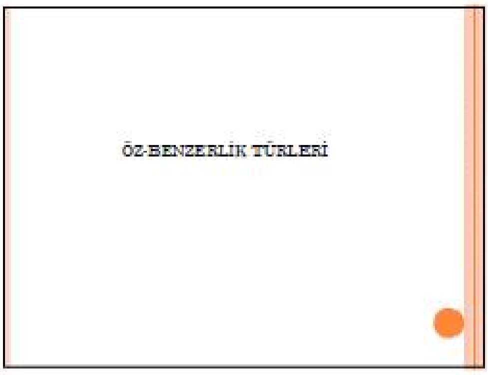


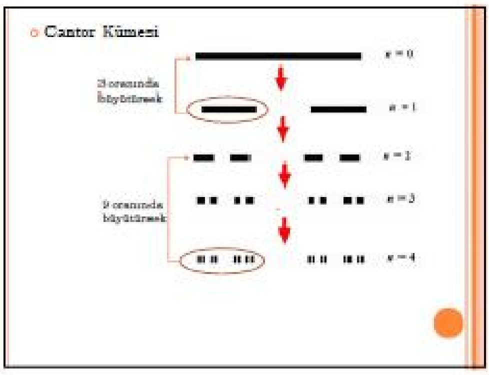


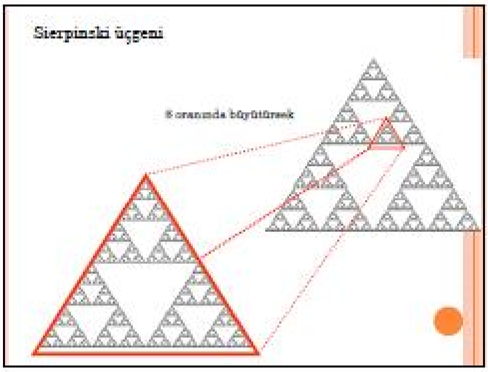


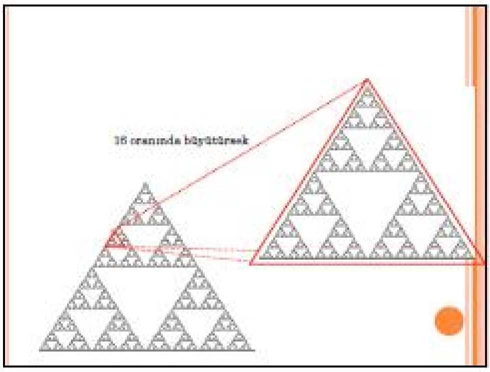


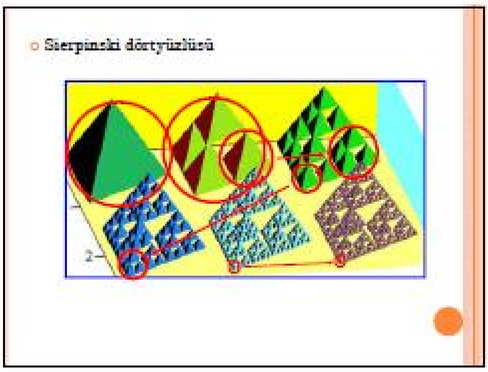
Ek 4'ün devamı

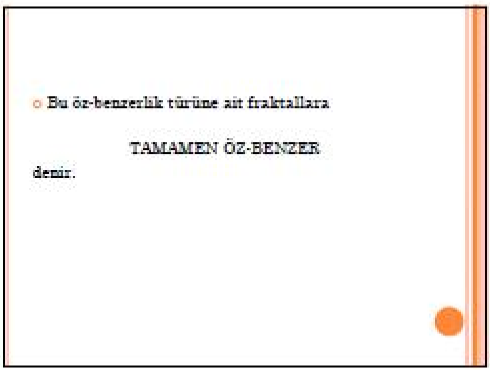




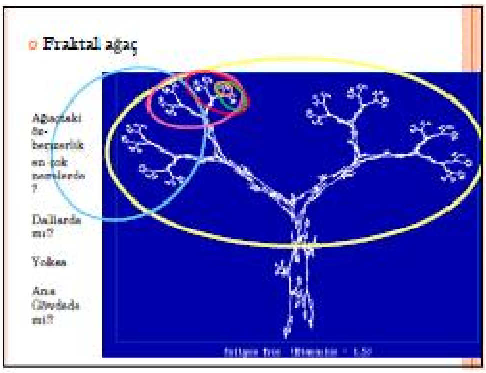


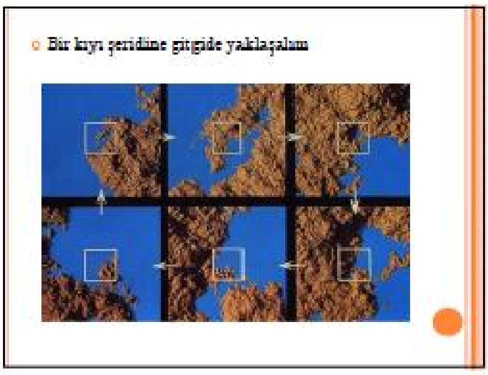


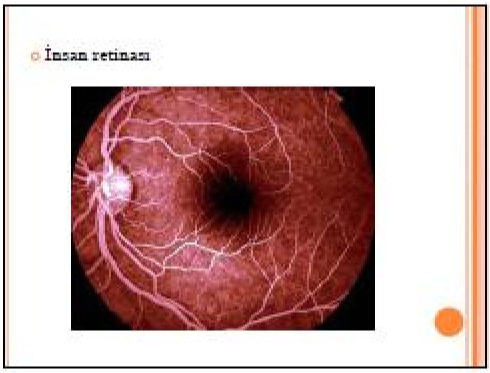




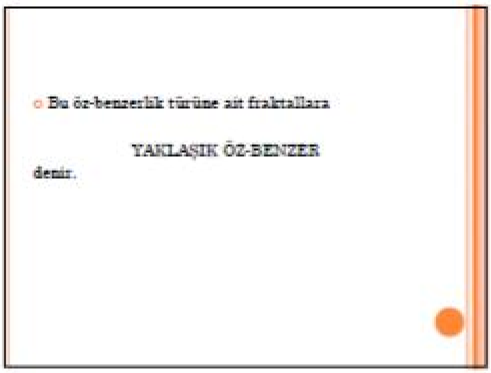
Ek 4'ün devamı

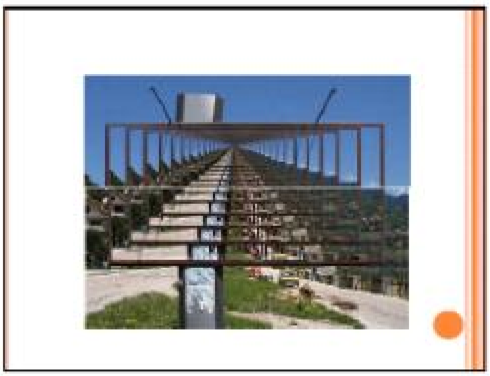




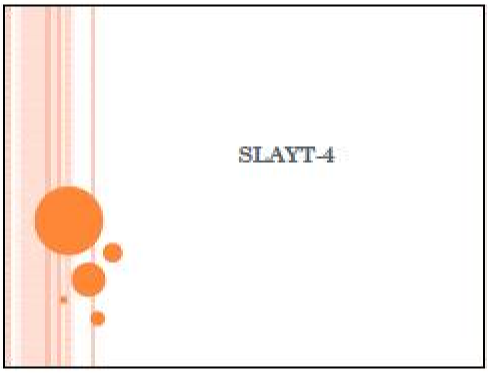


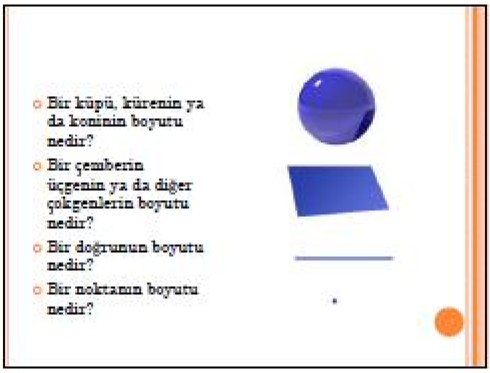
Ek 4'ün devamı



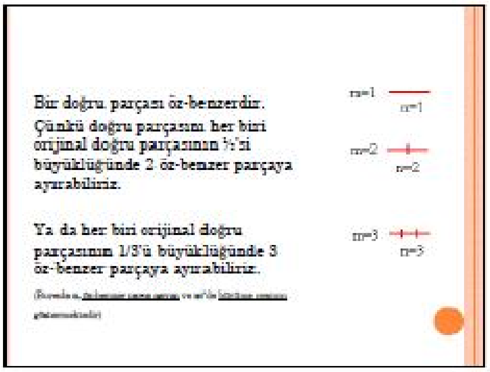


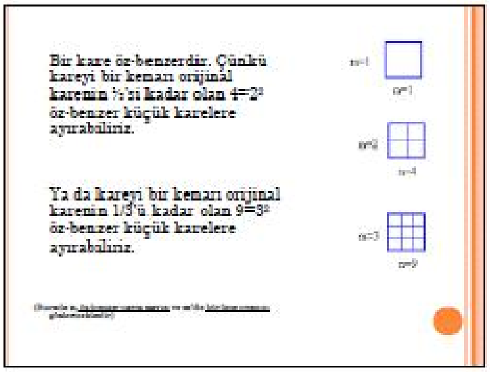
Ek 4'ün devamı

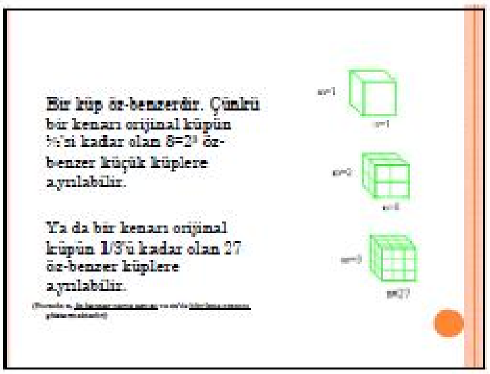


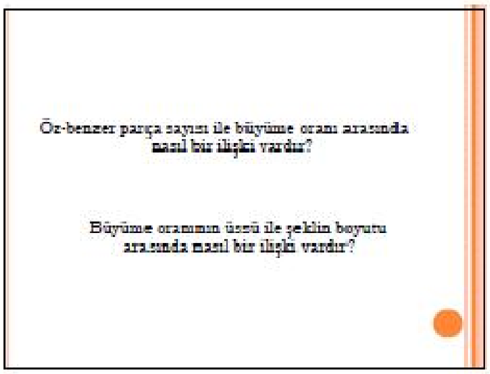


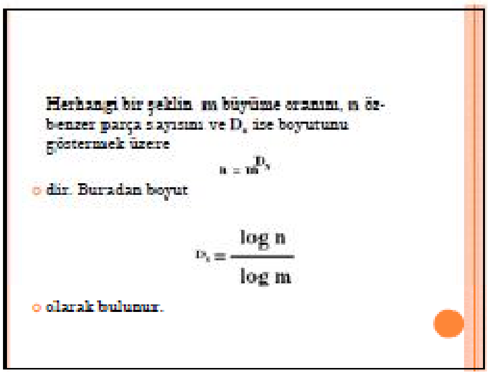
Ek 4’ün devamı

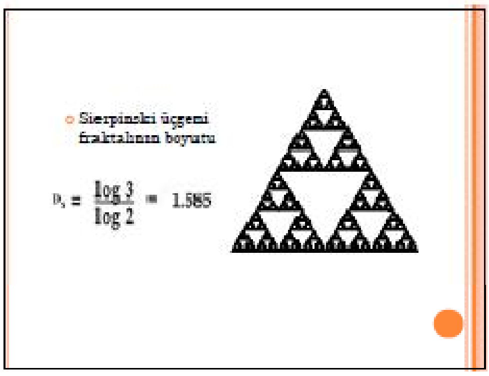




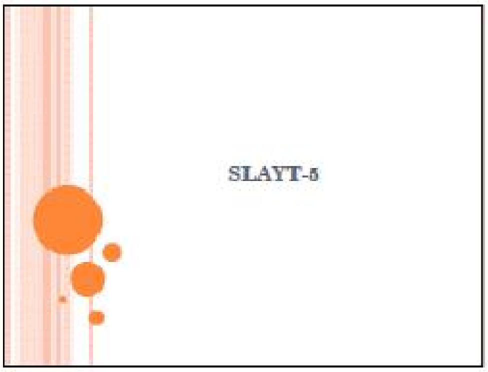


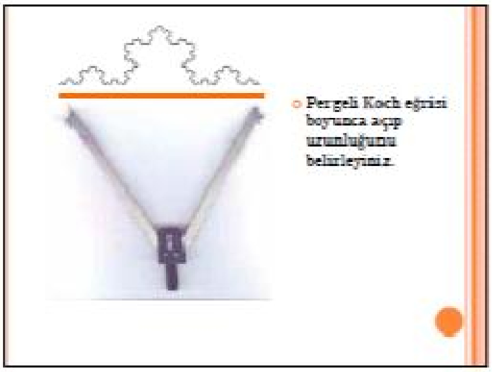


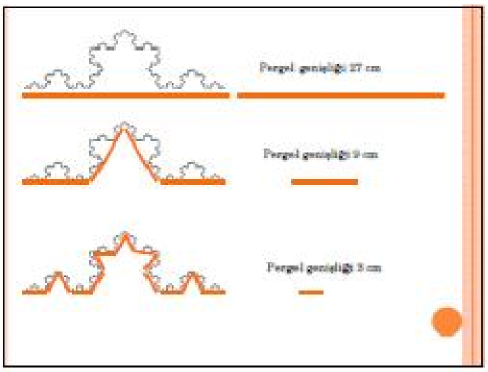


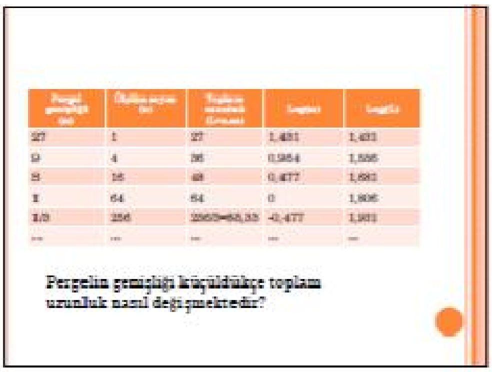


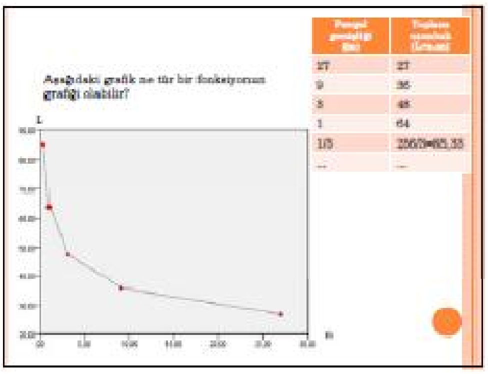
Ek 4'ün devamı

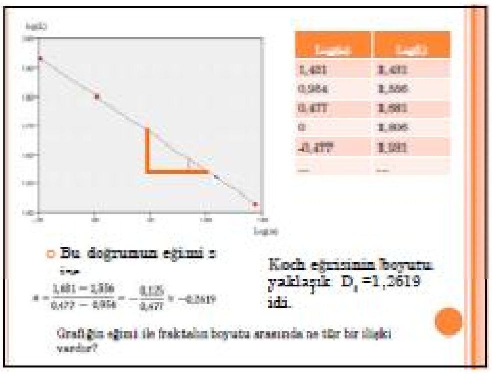




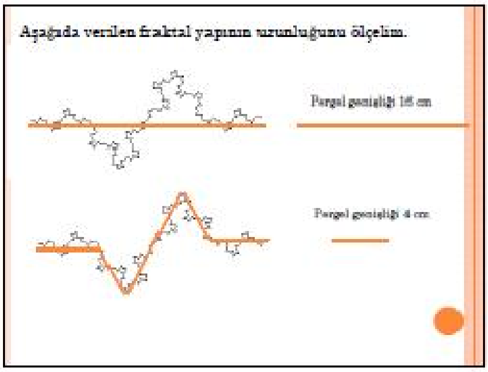


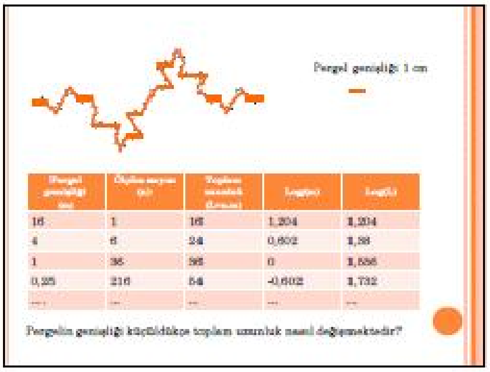


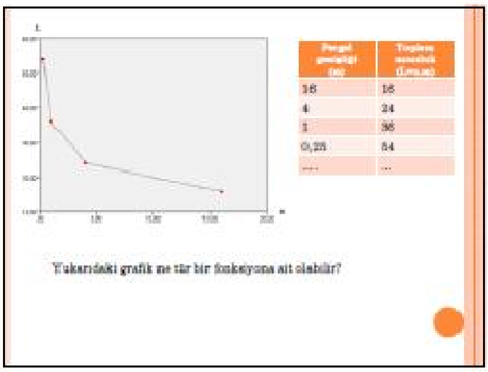


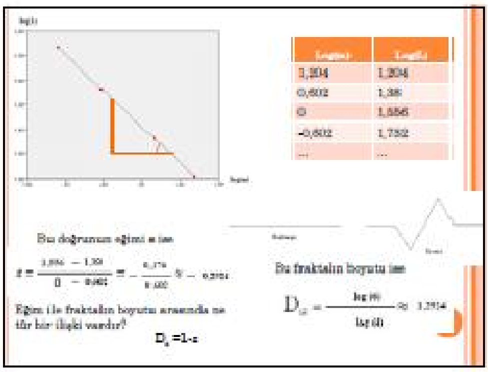


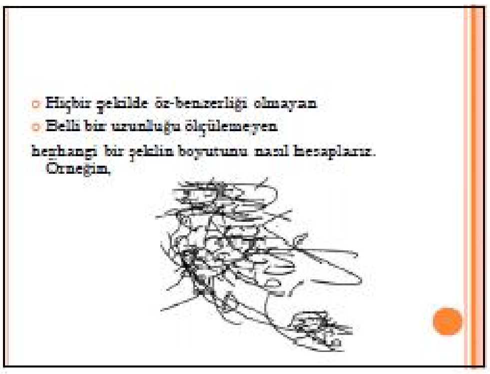
Ek 4'ün devamı



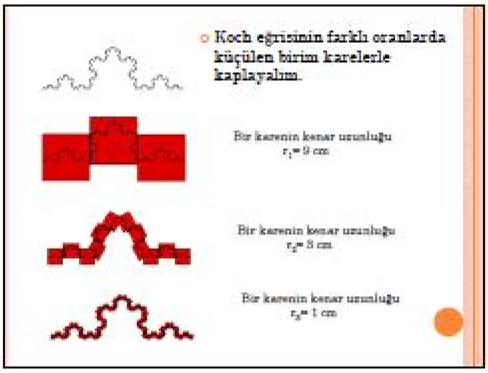




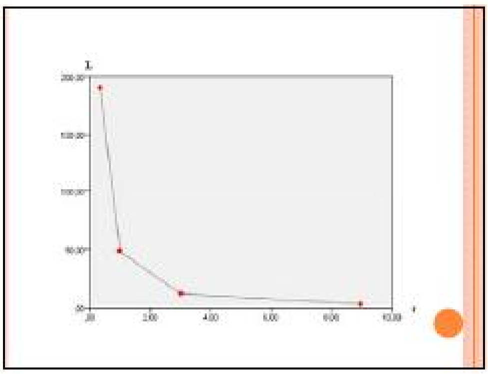


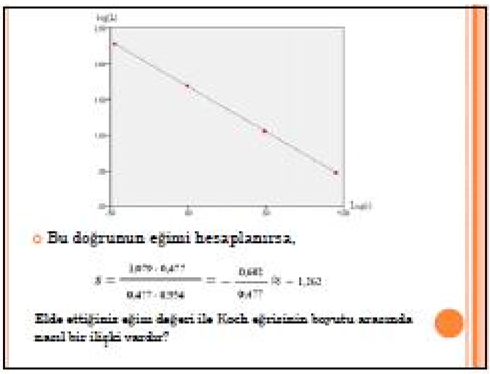


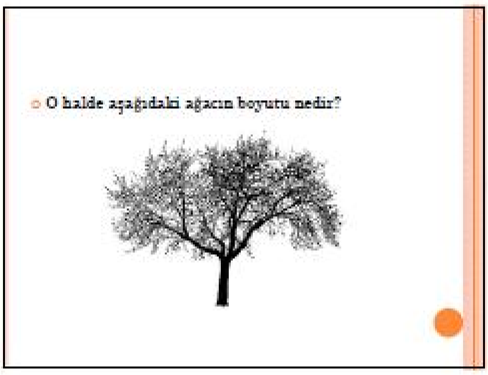
Ek 4'ün devamı



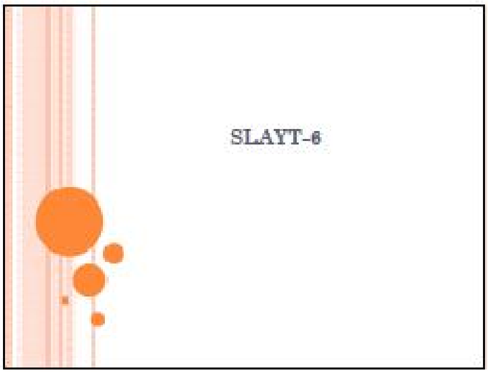
Kare kutuların bir kenar uzunluğu (r)	Kutu sayısı (N)	Log(r)	Log(N)
9	3	0,954	0,477
3	12	0,477	1,079
1	48	0	1,681
1/3	192	-0,477	2,283
...	...	...	...

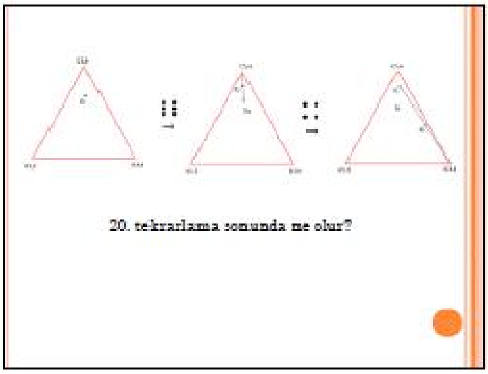


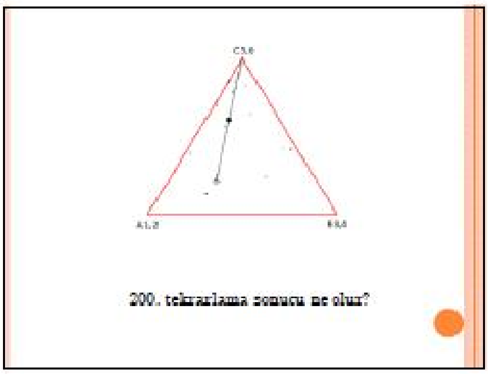


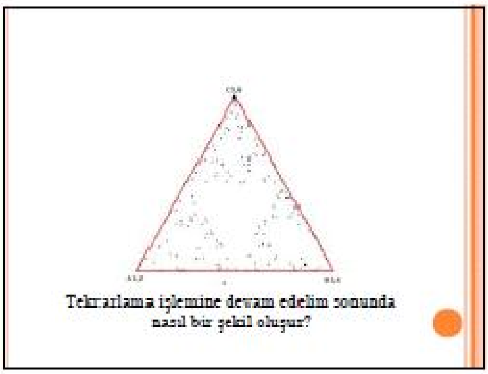


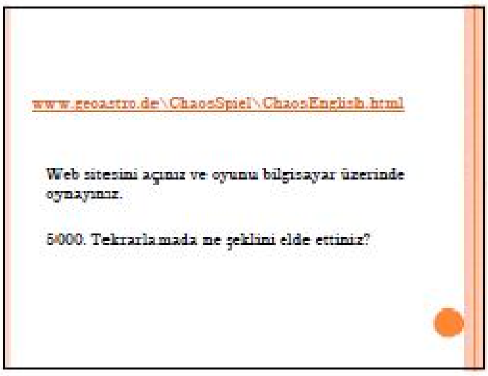
Ek 4'ün devamı

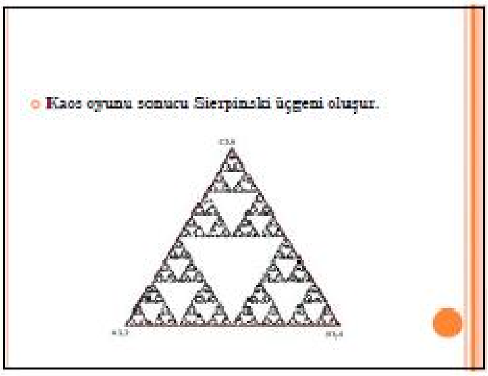




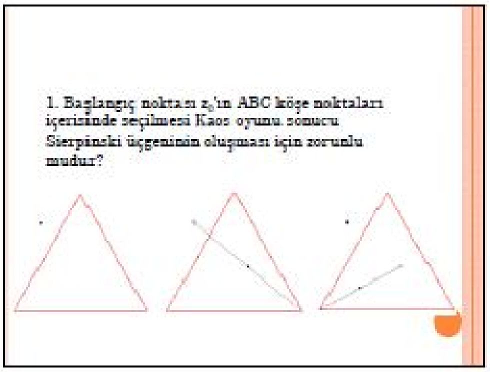


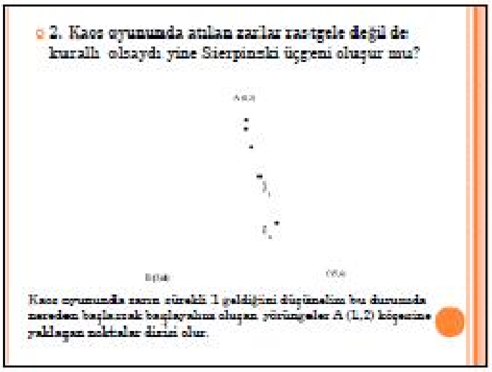


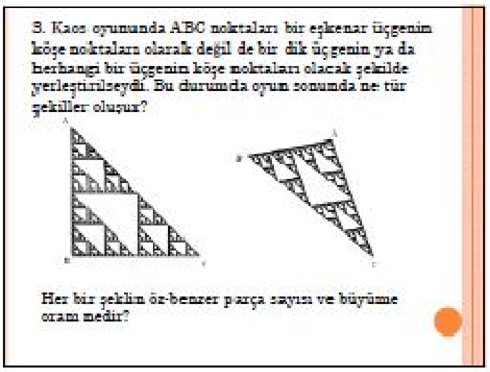


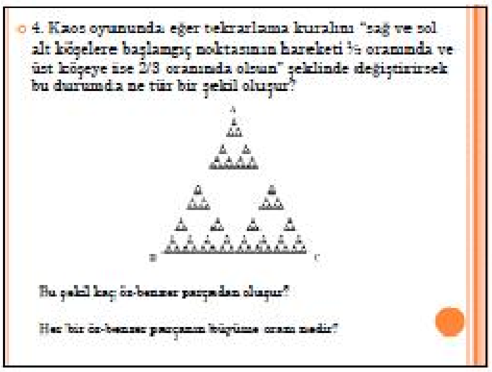


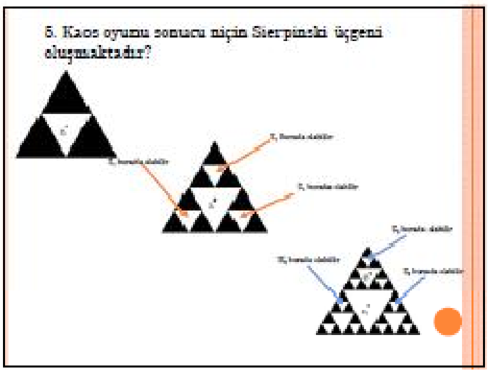
Ek 4'ün devamı

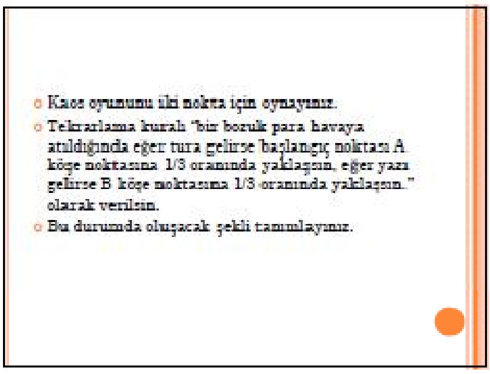












Ek 5: Öğrenilebilirlik Göstergeleri

Geometrik Tekrarlamalar	
KAZANIMLAR	**GÖSTERGELER**
1. Başlangıç şekli, üretici ve yörünge terimlerini örneklerle açıklar.	Bir tekrarlama adımındaki başlangıç şeklinin verilen tekrarlama kuralına (üreticiye) göre oluşan sonucunun diğer tekrarlama için yeni başlangıç şekli olduğunu çizdiği şekillerinde ya da cebirsel ifadelerinde gösterir. Tekrarlama sürecindeki öğelerin işlevlerini "başlangıç şeklinin tekrarlamayı başlatan şekil, üreticinin tekrarlama döngüsünün kuralı ve yörüngenin de tekrarlama işlemi sonucu oluşan şekiller ya da cebirsel ifadeler topluluğu" söyler/yazar. Tekrarlama sürecindeki öğelerdeki yetersizliklerin diğer öğeleri nasıl etkileyeceğini söyler/yazar. Verilen bir başlangıç şekline ve üreticiye göre birkaç adım için yörüngeleri çizer.
2. Tekrarlanan ekleme ve çıkartmaları kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.	Verilen bir üreticiye göre ekleme/çıkartma yaparak geometrik tekrarlamalar oluşturur ve oluşan şekilleri çizer. Elde ettiği yörüngeler yardımıyla eklenen/çıkarılan parça sayısı, yüz sayısı, kenar sayısı vb. arasında örüntüler bulur ve bu örüntüleri cebirsel olarak ifade eder.
3. Tekrarlanan dönme ve çevirmeleri kullanarak sonlu adım için fraktal yapılar oluşturur ve bu yapıların içerisindeki örüntüleri keşfeder.	Verilen üreticiye göre dönme/ çevirmeler yaparak geometrik tekrarlamalar oluşturur ve oluşan şekilleri çizer. Elde ettiği yörüngeler yardımıyla eklenen/çıkarılan parça sayısı, yüz sayısı, kenar sayısı vb. arasında örüntüler bulur ve bu örüntüleri cebirsel olarak ifade eder.
Fraktalların çevresi, alanı ve hacmi	
KAZANIMLAR	**GÖSTERGELER**
1. Fraktalların çevresi, alanı ve hacmini hesaplar.	Verilen bir fraktal yapının çevresi/ alanı/ hacmi için bir örüntü bulur, bu örüntüyü geometrik bir seriye dönüştürür, serinin yakınsaklığını inceler ve serinin toplamını bularak çevre/alan/hacmi hesaplar.
2. Fraktalların çevre-alan ve hacim arasındaki ilişki ile Euclid geometrisindeki şekillerin çevre-alan-hacim arasındaki ilişkileri karşılaştırır, benzerlik ve farklılıkları belirler	Fraktalların Euclid geometrisindeki şekillerden farklı olarak sonsuz çevrede sıfır alan / sonsuz alanda sıfır hacim / sabit alanda sıfır hacim gibi özelliklere sahip olduklarını ifade eder.

Ek 5'in devamı

Cebirsel tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia kümeleri	
KAZANIMLAR	**GÖSTERGELER**
1. Cebirsel tekrarlama kuralları kullanarak farklı başlangıç noktaları için yörüngeler bulur, bu yörüngelere göre başlangıç noktasının türünü belirler.	Cebirsel tekrarlama kurallarına göre verilen bir başlangıç noktasının yörüngesini bulur, yörüngenin hareketini inceler, eğer yörünge sabit bir noktaya gidiyorsa başlangıç noktasını **mahkum**, eğer yörünge belli sayılar arasında salınım gösteriyorsa başlangıç noktasını **periyodik**, eğer yörünge sonsuza gitme eğilimi gösteriyorsa başlangıç noktasını **kaçak nokta** olarak tanımlar.
2. Karmaşık düzlemde Julia kümesini tanımlar.	Julia kümesini $z_{n+1} = z_n^2 + c$ tekrarlama kuralına göre yörüngeleri sonsuza gitme eğiliminde olmayan (yani kaçak olmayan) noktaların kümesi olarak tanımlar.
3. Verilen başlangıç noktalarından hangilerinin Julia kümesi içerisinde hangilerinin dışarıda olduğuna karar verir.	Verilen başlangıç noktalarından hangilerinin Julia kümesi içerisinde olduğuna yörüngeleri ya da yörüngelerin modülünü inceleyerek karar verir. Eğer yörüngeler /modül sabitse ya da periyodikse noktanın Julia içerisinde aksi halde dışında olduğunu ifade eder.
4. Farklı c-parametreleri için oluşan Julia kümelerinin öz-benzer parça sayısı ile bu Julia kümelerini oluşturan noktaların yörüngelerinin periyotları arasındaki ilişkiyi keşfeder.	Bir c-parametresi kullanılarak oluşturulan bir tekrarlama kuralındaki tüm mahkum noktaların aynı periyoda sahip olduğunu gösterir. Bu c-parametresine göre oluşan Julia kümesini bilgisayar programı yardımıyla çizer. Herhangi bir bağlantı noktasından Julia kümelerini birbirinin aynısı (öz-benzer) parçalara ayırır. Ayırdığı parça sayısı ile Julia kümesinin periyodunun aynı sayıda olduğunu bulur. Böylece c-sabitinin Julia kümesinin kaç parçadan oluştuğuna karar verdiği sonucunu elde eder.
5. Karmaşık düzlemde Mandelbrot kümesini tanımlar ve özelliklerini belirler.	Mandelbrot kümesini $z_{n+1} = z_n^2 + c$ tekrarlama kuralına göre yörüngeleri sonsuza gitme eğiliminde olmayan 0 başlangıç noktasının bir kolleksiyonu olarak tanımlar. Yani Mandelbrot kümesinin mahkum c-sabitleri tarafından oluşturulduğu sonucunu üretir. Bilgisayar ekranında Mandelbrot kümesine zoom yaparak yaklaşık olarak öz-benzer olduğunu belirler.

Ek 5'in devamı

6. Mandelbrot ve Julia kümeleri arasındaki ilişkileri belirler.	Bilgisayar programlarını kullanarak Mandelbrot kümesi içerisindeki farklı bölgelerden seçtiği (ana kardiyoid, soğanlar) c-sabitlerine göre oluşan Julia kümelerini belirler. Buna göre Mandelbrot kümesinin Julia kümelerinin bir birleşimi olduğunu ifade eder. Ana kardiyoidin 1-periyotlu Julia kümelerinden, soğan yapıların ise (sol taraftakilerin) büyükten küçüğe doğru 2,3,5,7… periyotlu Julia kümelerinden oluştuğunu (sağ taraftakilerin ise sırasıyla) 2,3,4,5,6,7… periyotlu Julia kümelerinden oluştuklarını belirler. Böylece y-eksenine göre simetri olmadığını ifade eder. Benzer şekilde aşağıdaki soğan yapılar içinde aynı sonucu elde eder ve buradan x-eksenine göre Mandelbrot kümesinin simetrik olduğunu belirler.
Öz-benzerlik	
KAZANIMLAR	**GÖSTERGELER**
1. Çevresinde bulunan nesneleri parça-bütün benzerliğine göre sınıflandırır, bunlardan fraktal olanları belirler ve Euclid şekilleriyle farklılıklarını açıklar 2. Öz-benzerliği tanımlar ve öz-benzer şekillerin büyüme oranları ile öz-benzer parça sayıları arasındaki ilişkiyi belirler	Öz-benzerliği bir şeklin belli bir parçasının şeklin bütününe benzemesi olarak tanımlar. Verilen bir şeklin öz-benzer olup olmadığına karar vermede şeklin tamamı ile şeklin belli bir kısmını karşılaştırır. Tamamen öz-benzer şekillerin belli bir parçalarının belli bir büyüme oranında büyütülmesi sonucu ana şeklin bulunabileceğini böylece şeklin büyüme oranı ile öz-benzer parça sayısı arasında bir örüntünün olduğunu belirler. Verilen bir büyütme oranı için oluşan öz-benzer parçaları gösterir ya da işaretlenen öz-benzer parçaların büyüme oranlarını bulur
3.Öz-benzerlik türlerini tanımlar ve verilen fraktalların öz-benzerlik türlerini belirler	3 tür öz-benzerlik olduğunu söyler. Ana şekil ile şeklin herhangi bir parçasını karşılaştırdığında ana şeklin aynısını elde ediyorsa bu şekli tamamen öz-benzer olarak tanımlar. Eğer ana şeklin belli bir parçası ile ana şekli karşılaştırdığında ana şekle kısmen benzerlik belirliyorsa bu şekli yaklaşık öz-benzer olarak tanımlar. Eğer öz-benzerliği sadece şeklin bir noktasında buluyorsa bu şekli noktasal öz-benzer olarak tanımlar

Ek 5'in devamı

Fraktal boyut	
KAZANIMLAR	**GÖSTERGELER**
1. Çevresindeki nesneleri boyutlarına göre sınıflandırır ve bu nesnelerden dış görünüşleri düzgün olanların boyutları ile dış görünüşleri girintili, çıkıntılı olanların boyutlarını karşılaştırır 2. Tamamen öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplar.	Verilen tamamen öz-benzer bir fraktalın öz-benzer parça sayısı ile büyüme oranını belirler. Öz-benzer parça sayısının logaritmasının büyüme oranının logaritmasına oranının şeklin boyutunu verdiğini söyler/gösterir.
3. Kıyı şeridi gibi yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada uzunluk ölçme yöntemini kullanır	Kıyı şeridi gibi uzunluğu ölçülebilen fraktalların uzunluklarını belli oranlarda küçülen ölçeklerle ölçer ve her bir ölçmede kullandığı ölçek uzunluğunun logaritması ile elde ettiği toplam uzunluğa göre bir grafik çizer. Çizdiği grafikte her bir ölçümde elde ettiği noktaların tümüne en yakın geçen doğruyu çizmeye çalışır. Bu doğrunun eğimini belirler. Bulduğu eğim değerinin uzunluğunu hesapladığı fraktalın boyutunun ondalık kısmını verdiğini söyler/yazar ve buradan boyutu boyut=1+eğim olarak hesaplar.
4. Yaklaşık öz-benzer fraktalların boyutlarını hesaplamada kutu sayma metodunu kullanır	Farklı küçülme oranlarındaki kare kutularla verilen fraktal şekli kaplar ve kare kutular tarafından şeklin tamamı ya da bir kısmını içeren parçaların sayısını bulur. Kare kutuların küçülme oranlarının logaritmaları ile şekli içeren kutu sayılarının logaritmalarını bulur ve grafiğini çizer. Çizdiği grafikte her bir adımda elde ettiği noktaların tümüne en yakın geçen doğruyu çizmeye çalışır. Bu doğrunun eğimini belirler. Bulduğu eğim değerinin şeklin boyutunun negatif değeri olduğunu söyler/yazar. Verilen iki şekilden boyutunun büyük olanının daha karmaşık bir yapıya sahip olduğunu ifade eder, boyutunun küçük olanının ise daha sade bir yapıya sahip olduğunu söyler ve farklı boyut değerlerine göre şekillerinin görünüşlerini ifade eder.

Ek 5'in devamı

Kaos	
KAZANIMLAR	**GÖSTERGELER**
1. Rastgele olarak ifade edilen bir süreç sonunda düzgün ve kurallı örüntülerin oluşabileceğini keşfeder.	Kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluşacağını söyler/gösterir. Kaos oyununda Sierpinski üçgeninin çekici bir üçgen olduğunu çizdiği noktaların yörüngelerini kullanarak gösterir. Bu nedenle Kaos oyunu sonucu Sierpinski üçgeninin oluştuğunu söyler/yazar Farklı noktalar için Kaos oyununu oynar ve oluşan örüntülerden fraktal olanları ayırt eder.
2. Kaos teorinin kullanıldığını disiplinleri ifade eder ve bu teoriyi kullanarak uygulamalar yapar.	Nüfus değişimi gibi bir çok olay için lineer olamayan fonksiyonlar tanımlar bu fonksiyonlarda değişkenlerin durumuna göre nüfus artış ve azalış hızını tahmin eder, bazı değişken durumlar için ise nüfustaki değişimin belirlenemediğini gösterir ve bu durumları kaotik olaylar olarak tanımlar.

Ek 6: Yarı-yapılandırılmış mülakat soruları

Geometrik Tekrarlamalar ve Alan-Çevre-Hacim Konularıyla İlgili Mülakat Soruları

1. "Tekrarlama" kelimesi sana neyi ifade etmektedir?

2. Başlangıç şekli, üretici ve yörünge kavramları ne demektir? Bir tekrarlama sürecinde bu kavramların işlevleri nelerdir?

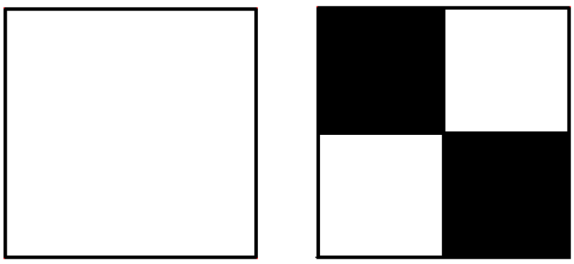
3. Tekrarlama dersi boyunca neleri yaparken zorlandınız? Bunun nedeni ne olabilir?

- Cantor ve Sierpinski üçgenini başarılı bir şekilde oluşturabildin mi? Çalışma yapraklarını nasıl kullandın?
- İçerisindeki örüntüleri bulabildin mi? Örüntü bulmada zorlandığın yerler oldu mu?
- Bu fraktalların çevreleri ve alanları arasında ne tür bir ilişki vardır? Bu sıra dışı durumun hakkında ne düşünüyorsun?
- Sierpinski dörtyüzlüsünü incelerken ne tür güçlüklerle karşılaştın?

4. Tekrarlama ünitesi boyunca en iyi yaptığınız şeyler nelerdir?

5. Bu derste hangi etkinlikleri tam olarak yaptınız? Bu etkinliklerde neleri tam olarak anladın? Neleri tam olarak anlayamadın?

6. Aşağıda başlangıç ve üretici adımları verilen şeklin bir sonraki adımdaki görüntüsünü çizebilir misin?



- Şekli çizerken neye dikkat ettin?
- Tekrarlama kuralını ifade edebilir misin?
- Her bir tekrarlama adımında siyaha boyanan kare sayısı nasıl değişmektedir? Örneğin 5. adımda siyaha boyanan toplam kare sayısı ne olur?
- Benzer şekilde her bir adımda siyaha boyanan her bir karenin bir kenar uzunluğu nasıl değişmektedir? Örneğin 5. adımda siyaha boyanan bir karenin bir kenar uzunluğu nedir?
- Kabul edelim ki her bir adımda siyaha boyanan kareler kesilip atılsın. Bu durumda oluşan şeklin çevresi ve alanı nasıl değişir?
- Çevreyi ve alanı bulabilir misin?

Ek 6'nın devamı

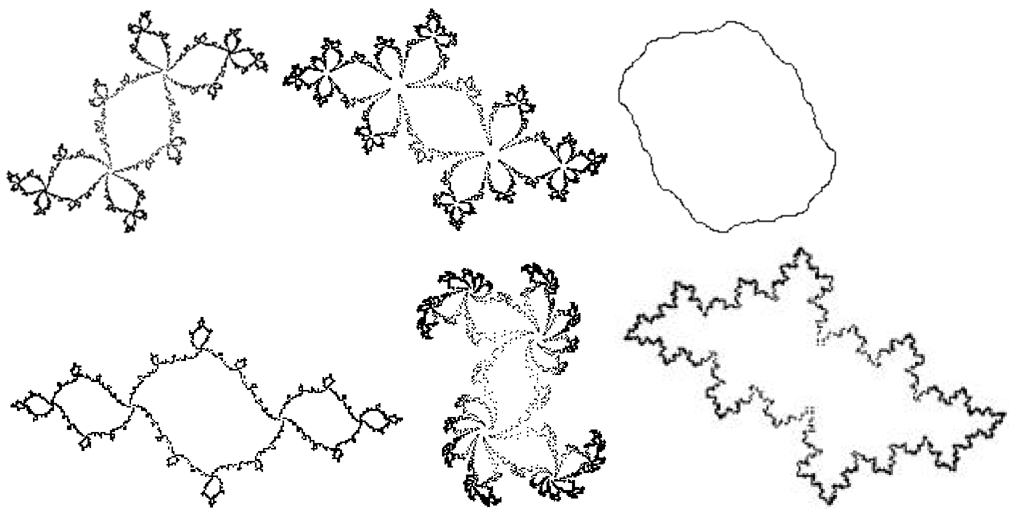
Cebirsel Tekrarlamalar ve Mandelbrot-Julia Kümeleriyle İlgili Mülakat Soruları

1. $Z_{n+1}= z_n^2-2$ tekrarlama kuralına göre $z_0=1$ ve $z_0=5$ başlangıç noktalarının kaçak ya da mahkûm nokta olduğuna nasıl karar verirsin? (Yörüngeleri inceleyerek mi? Yoksa modüle göre mi?)

2. Julia kümesini tanımlayabilir misin? (Bir noktanın Julia kümesi içinde olup olmadığına nasıl karar verirsin?)

- Mandelbrot ve Julia kümeleri konusunda hangi etkinlikleri yapabildiniz? Hangi etkinlikleri yaparken zorlandınız? Niçin? Neleri tam olarak anlayamadın?

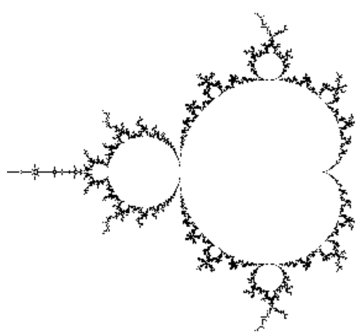
3. Aşağıda verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulunuz.



- Yukarıdaki Julia kümelerinin periyotları ile yörüngelerinin hareketleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

4. Mandelbrot kümesini tanımlayabilir misin?

5. Yukarıda verilen Julia kümelerinin Mandelbrot kümesinin içerisindeki hangi bölgede bulunduğunu söyleyebilir misin?



6. Mandelbrot ve Julia kümesi arasında ne tür bir ilişki vardır? Açıklayınız.

7. Bu ders boyunca en iyi yaptığınız şeyler nelerdir?

Ek 6’nın devamı

Öz-Benzerlik Konusuyla İlgili Mülakat Soruları

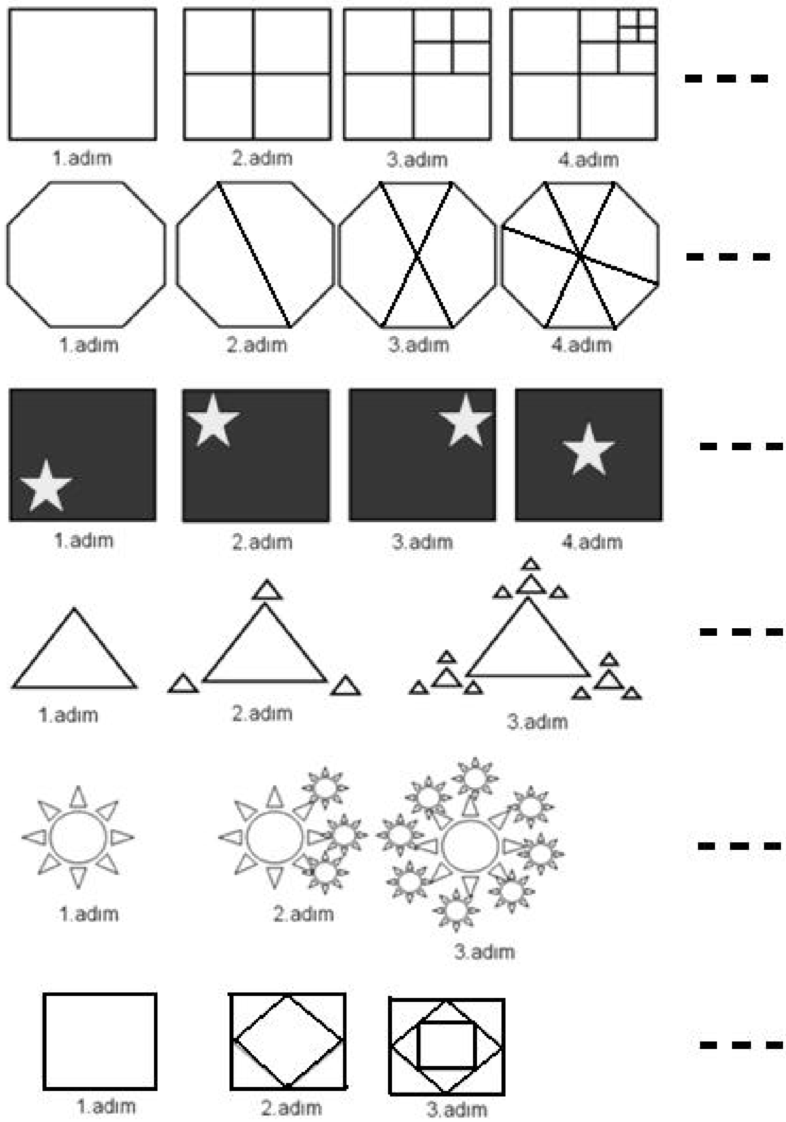
1. Öz-benzerlik nedir? Tanımlayabilir misin? Niçin bir üçgen öz-benzer değilken Sierpinski üçgenine öz-benzer demekteyiz?

2. Benzerlik ile öz-benzerlik arasındaki ilişkiyi açıklayabilir misin?

3. Başlangıç şekli ve tekrarlama kuralını kendinin tanımlayacağın tamamen öz-benzer bir fraktal çizebilir misin?

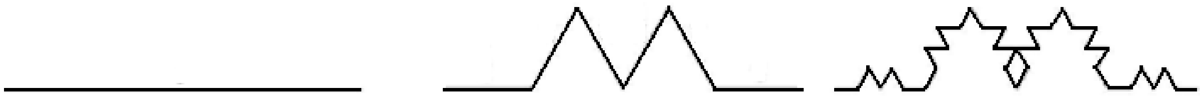
- Noktasal öz-benzer bir şekil çizebilir misin?
- Yaklaşık öz-benzer bir şekli çizebilir misin?

4. Verilen bir nesnenin fraktal olup olmadığına nasıl karar verirsiniz? Örneğin Koch eğrisi bir fraktal iken niçin bir üçgen fraktal değildir? Açıklayınız. Buna göre aşağıda verilen örüntüleri inceleyiniz. Hangileri birer fraktaldır? Hangileri fraktal değildir?



Ek 6'nın devamı

5. Aşağıda bir fraktalın oluşum adımları görülmektedir. Bu fraktalın öz-benzer parça sayısının ve büyüme oranının nasıl değiştiğini ifade edebilir misin?



6. Vücudumuzdaki dolaşım sistemimiz nasıl bir öz-benzerliğe sahiptir.

7. Doğada bulunan öz-benzer yapılara örnek verebilir misin? Bunlar ne tür öz-benzerliğe sahiptir.

8. Noktasal öz-benzer, yaklaşık öz-benzer ve tamamen öz-benzer fraktal yapılara örnek verebilir misin? (Niçin bu yapılar söylediğin öz-benzerlik türüne ait)

9. Bu ders boyunca neleri yaparken zorlandınız? Etkinlikleri nasıl yaptınız? Ders boyunca en iyi yaptığınız şeyler nelerdir?

10. Bu derste ilginiz çeken durumlar oldu mu? Bu durumlar nelerdir?

Ek 6'nın devamı

Fraktal Boyut Konusuyla İlgili Mülakat Soruları

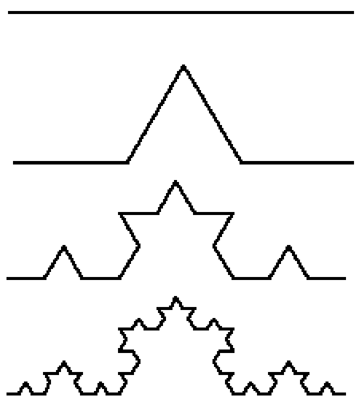
1. Bir nesnenin boyutunun 1 ya da 2 olarak ifade edilmesi sana neyi ifade etmektedir? Boyut deyince ne anlıyorsun?

2. Fraktal boyut neye denir? Bir nesnenin fraktal boyutunu hesaplamak bize nesnenin hangi özelliğini gösterir?

3. Bu ders boyunca neleri yaparken zorlandınız? Etkinlikleri nasıl yaptınız? Ders boyunca en iyi yaptığınız şeyler nelerdir?

- Neleri tam olarak anlamadın?
- Boyut hesaplamaları yapabildin mi?

3. Aşağıda verilen fraktalın boyutunu hesaplayabilir misin? (Boyut hesaplarken nelere dikkat ettin?)



2. tekrarlama ya da 3. tekrarlama adımları için boyut nasıl değişmektedir?

4. Boyutu $d = \frac{\log 9}{\log 5}$ olan **öz-benzer** bir fraktalın ilk iki tekrarlamadaki şeklini çizebilir misin? (Fraktalın şeklini yazdığınız tekrarlama kuralına göre kendiniz belirleyeceksiniz. Başlangıç şeklini de istediğiniz şekilde seçebilirsiniz.)

5. Tamamen öz-benzer olmayan fraktalların boyutlarını nasıl hesaplayabiliriz? Örneğin bir kıyı şeridinin boyutunu nasıl hesaplarsın?

6. Kutu sayma metodunu kullanarak bir karenin boyutunu nasıl hesaplarsın?

7. İki kıyı şeridi düşününüz. Birisinin fraktal boyutu 1,5 ve diğerinin ki de 1,9 olsun. Bu kıyı şeridleri nasıl görünür? Tanımlayabilir misin? Hangi yönlerden farklıdırlar?

8. Bu derste öğrendiklerini düşünerek sizce boyutu 2 ile 3 arasında olan bir yapı olabilir mi? Neden? Bu tür bir nesne neye benzer?

9. Bu derste ilginiz çeken durumlar oldu mu? Bu durumlar nelerdir?

Ek 6'nın devamı

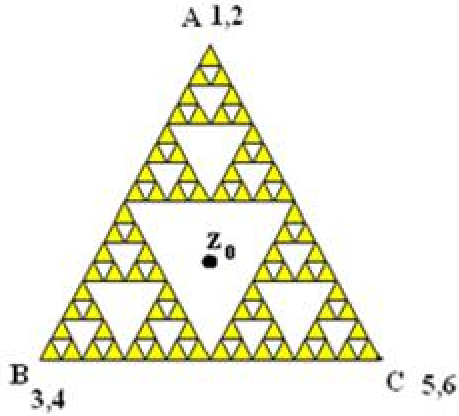
Kaos Konusuyla İlgili Mülakat Soruları

1. Ne tür olaylara kaotik olay denir? Kaotik olayın özellikleri neler olabilir? Kaotik birkaç olaya örnek verebilir misin?

2. Kaos teori ile fraktal geometri arasında ne tür bir ilişki vardır?

3. Kaos oyunu sonucu niçin Sierpinski üçgeni oluşmaktadır?

4. Aşağıda verilen Kaos oyununda diyelim ki başlangıç noktası çıkarılan büyük beyaz üçgenin içinde olsun bu durumda her bir zar atılışında bu nokta nasıl bir yol izler açıklayınız.



5. Kaos oyununda zar rastgele değil de belli bir kurala göre gelseydi yani hep 1,1 yada 2, 2 gelseydi yine sonuçta Sierpinski üçgeni oluşu muydu?

6. Dört noktayı bir karenin köşelerine gelecek şekilde yerleştirelim ve bir kaos oyunu oynayalım. Sonuçta oluşacak şekli tahmin edebilir misin?

7. Bu ders boyunca neleri yaparken zorlandınız? Bunun nedeni ne olabilir?

8. Bu ders boyunca en iyi yaptığınız şeyler nelerdir?

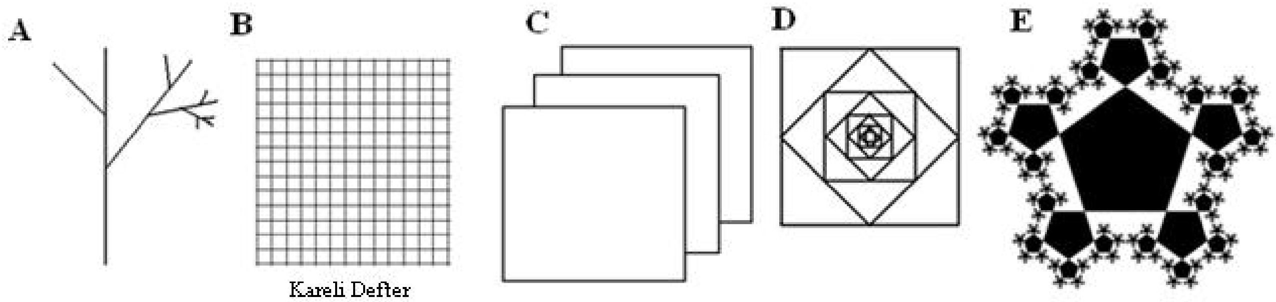
9. Bu derste ilginiz çeken durumlar oldu mu? Bu durumlar nelerdir?

10. Eklemek istediğiniz başka şeyler var mıdır?

Ek 7: Yazılı Sınav

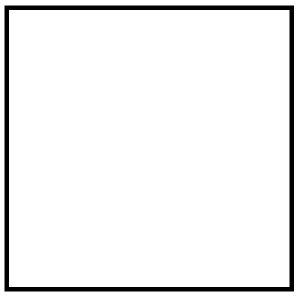
FRAKTAL GEOMETRİ SINAV SORULARI

1. Aşağıda verilen yapılardan hangileri birer fraktaldır, hangileri değildir? Nedenleriyle birlikte yazınız **(Yapıların belli bir adımdaki şekilleri görülmektedir).**



2.

a) Başlangıç şekli bir **kare** ve tekrarlama kuralı **“ karenin kenarlarını 3 eşit parçaya böl, oluşan 9 parçadan ortadakini ve ortadaki parçanın üstündeki parçayı çıkarınız”** şeklinde olan fraktalın ilk 2 tekrarlama sonucu oluşan şeklini çiziniz.



Başlangıç şekli   1. Tekrarlama   2. Tekrarlama

b) Aşağıda başlangıç şekli ve üreticisi verilen fraktal yapının bir sonraki adımdaki şeklini çiziniz (Her bir doğru parçası eşit uzunlukta parçalanmaktadır).

c) Bu fraktalın tekrarlama kuralını yazınız.

d) **(Aşağıdaki soruları b) şıkkındaki fraktalla göre cevaplayınız)**

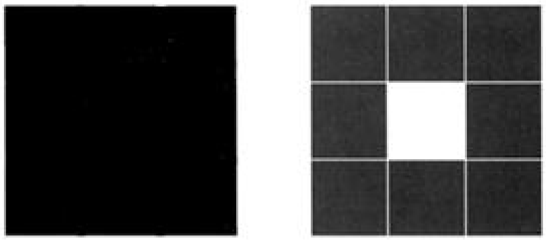
- Her bir tekrarlama adımında kaç doğru parçası oluşmaktadır? Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında kaç tane doğru parçasının oluştuğunu bulmamızı sağlayan bir kural bulunuz.

Ek 7'nin devamı

- Başlangıçtaki doğru parçasının uzunluğu 1 br olsun. Buna göre herhangi bir tekrarlama adımında toplam doğru parçasının uzunluğunu bulmamızı sağlayan bir kural yazınız.

- Tekrarlama işlemine sürekli devam edildiğinde toplam uzunluğun sonsuza gittiğini gösteriniz.

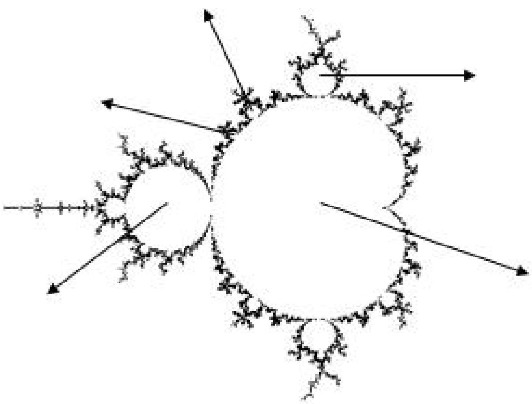
3. Aşağıda Sierpinski halısının başlangıç ve üretici şekilleri görülmektedir. Bu fraktalın **sonsuz** tekrarlama sonucunda oluşan **alanı ve çevresini** hesaplayınız.**(Karenin bir kenar uzunluğunu 1 br olarak alınız)**



4. $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 - 1$ tekrarlama kuralına göre aşağıda verilen başlangıç değerlerinden hangilerinin Julia kümesinin içerisine düştüğünü **nedenleriyle birlikte** yazınız.

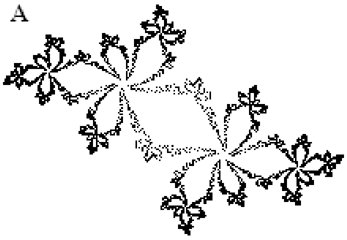
Başlangıç değeri	$\boldsymbol{z_0 = i}$
Başlangıç değeri	$\boldsymbol{z_0 = -1}$
Başlangıç değeri	$\boldsymbol{z_0 = 1 + i}$
Başlangıç değeri	$\boldsymbol{z_0 = 0}$

5. Aşağıda verilen Julia kümelerinin Mandelbrot kümesi içerisinde hangi bölgeye düştüğünü şekil üzerinde gösteriniz ve verilen Julia kümelerinin periyotlarını bulunuz.



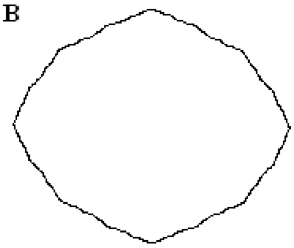
Ek 7'nin devamı

A



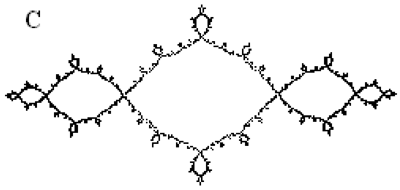
Periyodu: ....

B



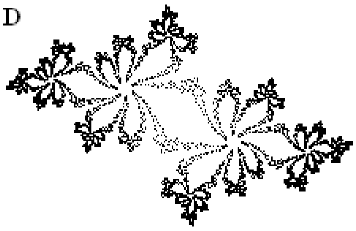
Periyodu: ....

C



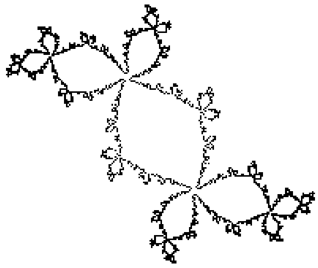
Periyodu: ....

D



Periyodu: ....

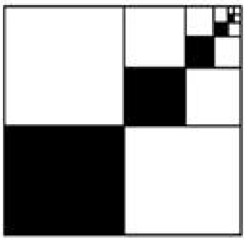
E



Periyodu: ....

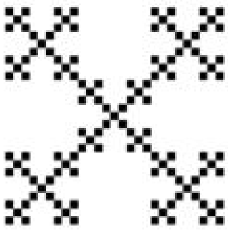
6. Aşağıda verilen fraktal yapıların sahip oldukları öz-benzerlik türünü nedenleriyle birlikte yazınız.

A

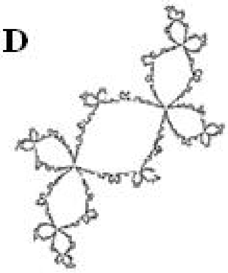


B

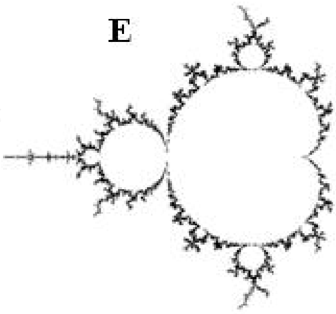
C



D



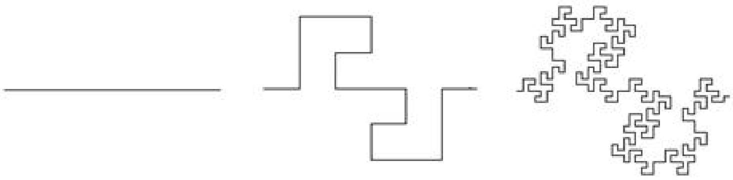
E

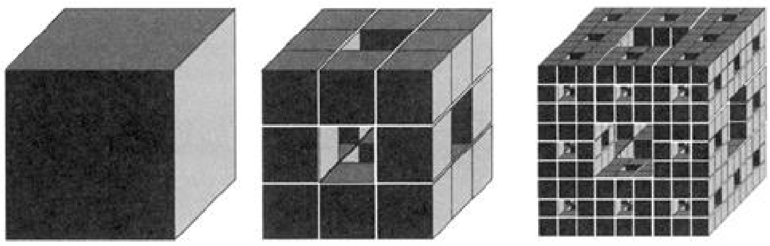


F

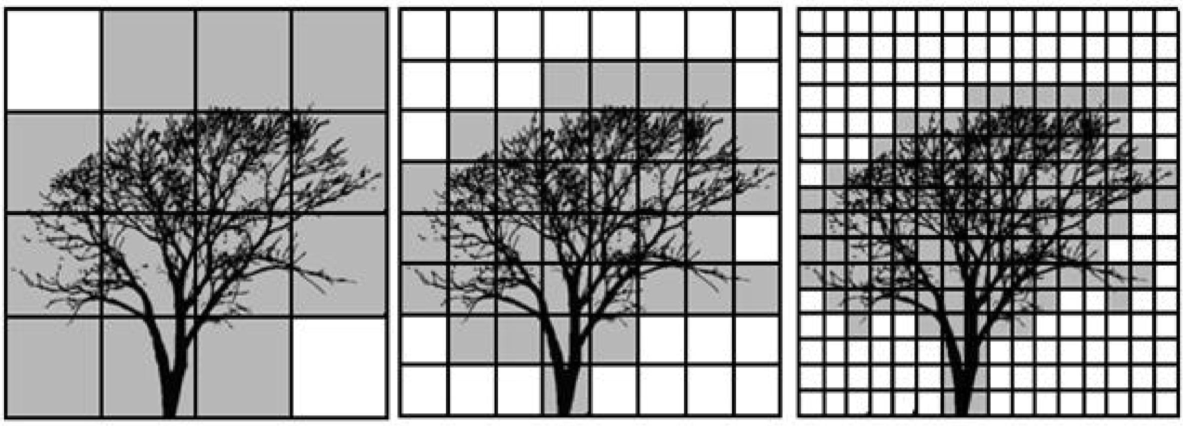
Ek 7’nin devamı

7. Aşağıda ilk iki tekrarlama sonucundaki şekilleri gösterilen fraktalların boyutlarını hesaplayınız (**Menger süngeri fraktalının merkezinde bulunan küpün de çıkarıldığını unutmayınız**), **(Doğru parçasının her tekrarlamada <u>eşit uzunluklu</u> parçalara ayrıldığını unutmayınız)**.



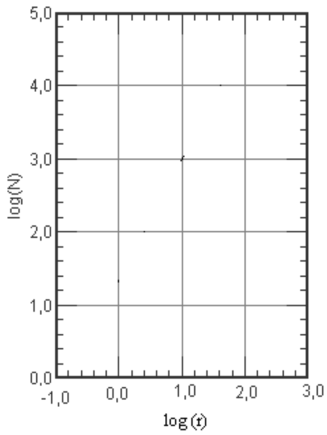


8. Aşağıda verilen çalının yaklaşık olarak boyutunu kutu sayma metodunu kullanarak hesaplayınız. (r, kare kutulardan birinin bir kenar uzunluğunu göstermektedir. log2=0,301 olarak alınız)



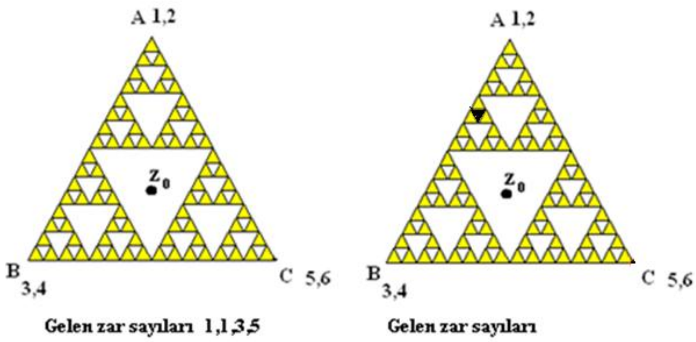
r=8 r=4 r=2

Ek 7'nin devamı



9.

a) Aşağıdaki ilk kaos oyununda gelen zar sayılarına göre z_0 başlangıç noktasının son konumunu ve ikinci kaos oyununda ise z_0 başlangıç noktasının siyah üçgenle gösterilen yere gelmesi için atılan zar sayılarını bulunuz **(Her zar atılışında oluşan z_1,z_2,z_3 ve z_4 noktalarını şekil üzerinde gösteriniz)**



b) Kaos oyununu iki nokta için oynayınız. Başlangıç şekli olarak A ve B köşe uç noktaları arasında bir z_0 noktası alınız. Tekrarlama kuralı "bir bozuk para havaya atıldığında eğer tura gelirse başlangıç noktası A köşe noktasına 2/3 oranında yaklaşsın, eğer yazı gelirse B köşe noktasına 2/3 oranında yaklaşsın." olarak verilsin. Oyunu oynadığınızda sonuçta ne tür bir şekil oluşur? Tanımlayınız.

c) Yukarı attığınız bozuk paranın sürekli tura geldiğini kabul edelim. Bu durumda oluşacak şekil bir fraktal olabilir mi? Niçin?

d) Farz edelim ki A=0 ve B=1 köşe noktaları için $0 \leq z \leq 1$ olsun. Eğer başlangıç noktasının konumu z_0=1/2 ve üst üste atılan bozuk paralar tura, tura ve yazı geldiyse bu durumda başlangıç noktasının son konumu ne olur? **(Her bir para atılışındaki z_1, z_2, z_3 noktalarının konumunu ayrı ayrı gösteriniz)**

ÖZGEÇMİŞ

Fatih KARAKUŞ 1979 yılında Sivas'ta doğdu. İlköğrenimini 1990 yılında Halil Rıfat Paşa İlkokulu'nda tamamladıktan sonra 1993 yılında Dört Eylül Ortaokulu'ndan, 1997'de Prof. Dr. Necati Erşen Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun oldu. 2001 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümünü bitirdi. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2001-2002 eğitim öğretim yılında Sivas Selçuk Anadolu Lisesi'nde, 2002-2004 eğitim öğretim yılları arasında ise Sivas Anadolu Teknik, Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptı. 2004 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Alanında "Fourier Serilerinin ve Orthogonal Serilerin Toplanabilirliği Üzerine" isimli yüksek lisans tezini tamamladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2005 yılında doktora eğitimini tamamlamak üzere Karadeniz Teknik Üniversitesi'ne görevlendirildi.

Araştırmacı evli ve iki kız çocuğuna sahip olup yabancı dili İngilizcedir.