KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SINIF ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL ANLAYIŞLARININ cK¢ TEORİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Selcen ÇALIK UZUN

TRABZON
Temmuz 2012

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SINIF ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL ANLAYIŞLARININ cK¢ TEORİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

Selcen ÇALIK UZUN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce
Doktor Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Danışmanı
Doç. Dr. Selahattin ARSLAN

Trabzon
Temmuz, 2012

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 16/07/2012

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Selahattin ARSLAN ....

Üye : Prof. Dr. Adnan BAKİ ....

Üye : Prof. Dr. Sinan OLKUN ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Derya ÇELİK ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tuba İSKENDEROĞLU....................

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Haluk ÖZMEN

Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı ve bu tezi KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Selcen ÇALIK UZUN
16/07/2012

ÖNSÖZ

Öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının belirlenmesi, öğrenenlerin zihinlerinde matematiksel bilgiye dair neler olduğu hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlarken bir bakıma onların zihin haritalarını oluşturmamıza imkân verecektir. Bu imkânların öğretenlere, öğrenme ortamlarını tasarlarken, soru hazırlarken ve bu sorulara verilen cevapları değerlendirirken katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Tezimin her aşamasında desteklerini esirgemeyen, tezin her satırına emek veren, çıkmaza girdiğim zamanlarda yolumu bulmama yardımcı olan, çok değerli hocam, danışmanım Doç. Dr. Selahattin ARSLAN'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Çalışmam boyunca görüş ve önerileri ile tezin zenginleşmesini sağlayan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Adnan BAKİ'ye, yapıcı eleştirileriyle motivasyonumun hep yüksek kalmasını sağlayan hocalarım Doç. Dr. Bülent GÜVEN'e, Yrd. Doç. Dr. Derya ÇELİK'e, Yrd. Doç. Dr. Tuba İSKENDEROĞLU'na içtenlikle teşekkür ederim.

Yoğun iş yaşamında çok değerli vaktini benim için ayıran Prof. Dr. Sinan OLKUN'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmamın belli bir aşamasına kadar Tez İzleme Komitesinde yer alan ve katkılarını esirgemeyen Prof. Dr. Salih Çepni'ye teşekkür ederim.

Değerli görüşlerini benimle paylaşan, yanımda olarak beni her zaman motive eden, değerli hocalarım Doç. Dr. Ayşegül SAĞLAM ARSLAN, Yrd. Doç. Dr. Gönül GÜNEŞ, Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK, Öğretim Görevlisi Müjgan BAKİ ve Okutman Yasemin ŞENGÜN'e, her zaman kendi odamdaymışım gibi hissettiren, benden hiçbir şeyi esirgemeyen çok değerli arkadaşım Arş. Gör. İlknur ÖZPINAR'a çok teşekkür ederim.

Beni her zaman destekleyen, izin isteklerimi hiçbir zaman geri çevirmeyen Artvin Çoruh Üniversitesi Eğitim Fakültesi yöneticileri ile 2007 öncesinde KTÜ Artvin Eğitim Fakültesi'nde görev yapmış olan yöneticilere çok teşekkür ederim.

Desteğini bir an olsun esirgemeyen, uzun zamandan beri bana katlanmaktan hiç şikâyet etmeyen değerli meslektaşım ve dostum Yrd. Doç. Dr. Özlem ULU KALIN'a, bilgisayar bilgisi ile tezin yazım aşamasında rehberliğini esirgemeyen Arş. Gör. Abdulkadir KARADENİZ'e ve her zaman yanımda olduklarını bildiğim tüm mesai arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Beni gerçek sevgiyle büyüten, bugünlere gelmem için sayısız fedakarlıkta bulunan, yaşadığım her sıkıntıda benimle olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen pozitif enerji kaynağım canım annem Dilek ÇALIK'a, hayatıma yön vermemde büyük payı olan, en sıkıntılı zamanlarımda beni rahatlatmayı başarabilen, motivasyon kaynağım, en büyük destekçim biricik babam Mehmet ÇALIK'a, seminer zamanlarımda beni yalnız bırakmayan, varlığı ile beni mutlu eden bir tanecik kardeşim Arzu ÇALIK'a içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca bu günlere gelene kadar üzerimde emekleri olan bütün öğretmenlerime, bana güvendikleri için çok teşekkür ederim.

Ve son olarak dualarını benden esirgemeyen ÇAVDAROĞLU, ÇALIK ve UZUN ailelerine, bu zorlu yola çıktığım ilk günden beri benimle oradan oraya sürüklenmekten hiç şikâyet etmeyen, huzur kaynağım, her şeyim, eşim Çağrı ve varlığı ile yaşamıma renk katan, hayatımın anlamını değiştiren biricik melek oğlum Kuzey'e sabırlarından dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez, 735 nolu proje kapsamında KTÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir. KTÜ BAP birimine desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Temmuz, 2012 Selcen ÇALIK UZUN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Sınıf Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Anlayışlarının cK¢ Teorisine Göre İncelenmesi

Öğrenenlerin zihinlerinde neler olduğu, bilgiyi nasıl yapılandırdıkları, nasıl kullandıkları vb. sorular araştırmacılar için her zaman merak konusu olmuştur. Bu sorulara cevap bulmak amacıyla, çeşitli teorik yapıların kullanıldığı, birçok araştırma yapılagelmektedir. Bu araştırmalarda kullanılan çeşitli yapılardan biri *anlayış* (conception) diğeri de *kavram yanılgıları* olup yapılan araştırmaların kavram yanılgılarına yoğunlaştıkları görülmektedir. Matematiksel kavramlarla ilgili olarak öğrencilerin sahip oldukları yanılgıları belirlemek, onların zihinlerinde neler olup bittiğini anlama açısından önemli olsa da bunun çok kullanışlı olmadığı söylenebilir. Çünkü matematik birçok kavramı içermektedir ve her bir kavramla ilgili olarak öğrenenlerin sahip oldukları kavram yanılgılarının listesi oldukça uzun olacaktır. Öte yandan öğrencilerin sahip oldukları yanılgıların belirli anlama ya da anlamlandırmanın kısacası *anlayış*ın (conception) belirtisi olarak ortaya çıkma potansiyeli olduğu düşünüldüğünde öğrencilerin sahip oldukları bu anlayışların belirlenmesi gerekliği ortaya çıkmaktadır.

Bu bağlamda araştırmanın amacı, sınıf öğretmeni adaylarının temel matematik dersindeki bilgilerini cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre belirlemek ve incelemektir. Bu amaç doğrultusunda çalışmanın verileri, öğretmen adaylarına uygulanan sınavlar ve yapılan klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Betimsel nitelik taşıyan nitel araştırma yönteminin benimsendiği çalışmada Küme, Denklem, Fonksiyon ve Sayılar konularında hazırlanan sınavlar 61 sınıf öğretmeni adayına uygulanmış, sınavların ardından 26 öğretmen adayı ile mülakatlar yürütülmüştür. Uygulanan sınavlarda sorulan soruların ayrıntılı analizi yapılarak öğretmen adaylarının bu soruları çözerken kullandıkları her türlü bilgi belirlenmiştir. cK¢ teorisinin anlayış aşamasında "operatör" olarak ifade edilen bu bilgilerin birbirleri ile ilgili olanlarının sınıflanmasıyla, sınıf öğretmeni adaylarının sahip oldukları genel matematiksel anlayışlara ulaşılmıştır.

Çalışmanın sonucunda, sınıf öğretmeni adaylarının; yanlış sonuca ulaştırsa da kolaycı düşünerek en kısa yoldan çözüme ulaşma (*pragmatik düşünme*), belli durumlar için doğru sonuç veren bir kural ya da özelliği karşılaştıkları yeni durumda kullanma (*bilgi transferi*), sınırlı sayıda örnek yardımıyla genellemelere ulaşma (*kısmi genelleme*) şeklinde ifade edilebilen 10 genel anlayışa sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Bu anlayışlardan bazıları literatürde farklı isimlerde yer alırken, bir kısmı ise bu çalışma sonucunda ortaya çıkarılarak literatüre kazandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: cK¢ Teorisi, Anlayış (Conception), Sınıf Öğretmeni Adayları

ABSTRACT

Determining Preservice Elementary Teachers' Mathemetical Conceptions According to cK¢ Theory

The questions like what happens in students' mind, how they construct and use knowledge have always been hot issues for researchers. There have been numerous studies pursuing this inquiry with various theoretical frameworks. *Conception* and *misconception* concepts have been two structures used in such studies and researches have mainly focused on misconceptions. Although determining misconceptions in students' mind has an important role in understanding what is happening in their minds, it can be said that it is not fully practical.

Because mathematics has innumerable concepts and there will be a huge list of misconceptions about each concept. On the other hand when we consider that misconceptions students bear have potential to be the trace of certain understanding or meaning conception, determining conceptions students face at divers subjects is obviously necessary.

Having stated the theoretical framework the aim of this study is to determine and investigate mathematics course knowledge of pre-service elementary school teachers with regard to the conception model of the cK¢ theory. The data of the study were collected with the examinations and clinical interviews conducted with pre-service teachers. In this study adopting a descriptive qualitative research method; 61 preservice teachers were tested with examinations prepared on *Sets*, *Equations*, *Functions* and *Numbers* topics and 26 of them were interviewed. The examinations applied were analyzed in detail and any types of knowledge used by the candidate teachers while solving the questions were determined. The mathematical understanding of the candidate teachers was determined by categorizing this related knowledge, which is called "operator" in the conception stage of cK¢ theory.

In the end, the conceptions of the preservice elementary teachers were divided under 10 titles whenever they could be expressed as; to reach solution with the shortest way possible, even it is wrong (*pragmatic thinking*), applying a property that is solving one case for a newly faced situation (*knowledge transfer*), making generalizations based on limited numbers of examples (*partial generalization*). When these conceptions were compared with the literature, some of these conceptions have existed in the previous studies with various names; some others have been identified in this study for the first time.

Key Words: cK¢ Theory, Conception, Preservice Elementary Teachers

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil Nr.	Şekil Adı	Sayfa Nr.

Şekil Nr.	Şekil Adı	Sayfa Nr.

Şekil Nr.	Şekil Adı	Sayfa Nr.

Şekil Nr.	Şekil Adı	Sayfa Nr.

Şekil Nr.	Şekil Adı	Sayfa Nr.

ŞEMALAR DİZİNİ

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics
cK¢ Teorisi	: Conception (Anlayış)-Knowing (Bilme)-Concept (Kavram) Teorisi
Ö1...Ö61	: Katılımcı Kodları
C	: Anlayış
R	: Operatör
L	: Gösterim
$\sum$	: Kontrol Bilgisi
$\mathbf{R_k}$	: Kümeler Konusu ile ilgili Doğru Operatör
$\mathbf{R^-_k}$	: Kümeler Konusu ile ilgili Hatalı Operatör
$\mathbf{R_s}$	: Sayılar Konusu ile ilgili Doğru Operatör
$\mathbf{R^-_s}$	: Sayılar Konusu ile ilgili Hatalı Operatör
$\mathbf{R_d}$	: Denklemler Konusu ile ilgili Doğru Operatör
$\mathbf{R^-_d}$	: Denklemler Konusu ile ilgili Hatalı Operatör
$\mathbf{R_f}$	: Fonksiyonlar Konusu ile ilgili Doğru Operatör
$\mathbf{R^-_f}$	: Fonksiyonlar Konusu ile ilgili Hatalı Operatör

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Matematik; "soyutlama, genelleme ve sentez yapmak için zihinsel bir araç ve bilimin ve teknolojinin evrensel dili" (Smith, 2003), "yaşamın soyutlanmış biçimi" (Altun, 2006), "ardışık soyutlamalar ve genellemeler süreci olarak geliştirilen fikirler ve bağlantılardan oluşan bir sistem" (Baykul, 2002), "düşüncenin müziği" (Baki, 2008) gibi çeşitli şekillerde tanımlanmaktadır. Bu tanımların ortak noktası matematiğin soyut olduğu gerçeğidir. Bu nedenle doğrudan algılanamayan ve güncel hayat deneyimleriyle kolay kazanılamayan kavram ve ilişkilerden oluşan bir bilim olup (Duval, 1993; 2000) öğrencilerin çoğu zaman çekindiği, zor anladığı ve ön yargı ile yaklaştığı bir ders olarak karşımıza çıkmaktadır (Umay, 1996; Sertöz, 1998; Yenilmez ve Uysal, 2007; Baki, 2008; Işık, Çiltaş ve Bekdemir, 2008; Doğan ve Yeniterzi, 2011; Gökçek ve Güneş, 2011). Umay (1996, 245) matematiğin zorluğunu "soyut düşünmenin somutlaştırılması matematik öğretmeyi kolaylaştırır, ancak matematikten uzaklaştırır. Matematiğin ve matematik öğretiminin zorluğu da buradan kaynaklanmaktadır." şeklinde ifade etmektedir.

Matematiğin öğrenciler tarafından zor bir ders olarak algılandığı fikri ne kadar gerçekse, bu zorluğun üstesinden gelebilmek için öğrencilerin zihinlerinde neler olup bittiğinin öğrenilmesi de bir o kadar gereklidir. Bu gerekliliğin farkında olan araştırmacılar çeşitli teorilerden yararlanarak, öğrencilerin zihinlerindeki bilgileri ortaya çıkarmaya, öğrencilerin bu bilgileri nasıl oluşturduklarını belirlemeye yönelik çeşitli araştırmalar yapmaktadırlar. Bu araştırmaların son yıllarda öğrencilerde mevcut olan kavram yanılgılarını incelemeye odaklandığı da literatürde bu konuda yapılan yüzlerce araştırmadan hareketle söylenebilir. Ancak öğrencilerin zihinlerinde neler olup bittiğini anlamak için sadece belli konularla ilgili olarak sahip oldukları kavram yanılgılarını belirlemek yeterli olacak mıdır? Bu soruya son yıllarda öğrenme teorileri arasında en çok benimsenen yapılandırmacı kuram penceresinden baktığımızda "evet" cevabını vermek doğru olmayacaktır. Nitekim öğrenmeye; öğrencinin önceki bilgileri üzerine yeni bilgisini kendisinin kurduğu bir uyum süreci olarak bakan yapılandırmacı kurama göre oluşan yeni bilginin tamamen yanlış olması düşüncesi kabul edilemez (URL-1). Bu durumda öğrencilerin sahip oldukları yanılgıların belirli anlamaların ya da anlamlandırmaların kısacası bir *anlayış*ın (conception) belirtisi olarak ortaya çıkma potansiyeli vardır denilebilir (URL-2).

Anlayış kelimesi Türk Dil Kurumu güncel Türkçe sözlükte; *anlama işi, telakki; bir toplum veya topluluktaki bireylerde görüş ve inanış etmenlerinin etkisiyle beliren düşünme yolu, düşünüş biçimi, zihniyet, mantalite; anlama yeteneği, izan, zekâ, benzerlerinden ayıran özellik, konsept* (URL–3) olarak tanımlanmaktadır. Bu kavram eğitim terimleri sözlüğünde ise *bir kimsenin anlama biçimi ya da anlama gücü, bir kimsenin benimsemiş olduğu düşüncelerin ve inançların tümüne verilen ad* (URL–3) olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda matematiksel anlayış, öğrencilerin "*matematiği anlama biçimi, matematiksel düşüncelerinin ve inançlarının tümü"* olarak tanımlanabilir. Bu durumda bir bireyin matematiksel anlayışı denildiğinde, kastedilen şey o bireyin matematiksel bilgiyi anlama, oluşturma biçimi, matematiksel düşüncelerinin ve inançlarının tümüdür. Bu durumda öğrencilerin matematiksel bilgiyi zihinlerinde nasıl oluşturdukları, nasıl kullandıklarının araştırılması bir bakıma öğrencilerin matematiksel anlayışlarının ortaya çıkarılması anlamına gelmektedir. Öğrencilerin matematiksel anlayışları onların matematiksel bilgiyi oluşturma ve anlama biçimleri olduğuna göre bu biçimler, ancak onların yaptıkları matematiğin incelenmesiyle resmedilebilir. Öğrencilerin geliştirdikleri matematiksel anlayışlar, karşılaştıkları bir problemi çözerken, onların doğru çözümü gerçekleştirmelerini sağlayabilecekleri gibi hatalı sonuca ulaşmalarına da neden olabilirler. Bu durumda öğrencilerin matematiksel anlayışları iki boyutta düşünülebilir; doğru matematiksel anlayışlar ve hatalı matematiksel anlayışlar. Literatür incelendiğinde öğrencilerin doğru anlayışlarını doğrudan ortaya koyan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Ancak öğrencilerin nasıl öğrendikleri, zihinlerinde neler olup bittiği, bilgiyi nasıl kurdukları sorularına cevap arayan birçok araştırma mevcuttur. Bu araştırmalardan bazıları bilginin zihinde belli aşamalardan geçerek soyutlandığı fikri üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu araştırmaların ortaya koyduğu teorilerden biri Ed Dubinsky tarafından ortaya atılan ve öğrencinin verilen bir problemin üstesinden gelirken matematiksel bilgisini kurmasının belli aşamalarda gerçekleştiği varsayımına dayanan APOS (*Action, Process, Object, Shema*) teorisidir. APOS adı bu aşamaların baş harflerinden gelmektedir. Bu aşamalar, *hareket-eylem (action), süreç (process), nesne (object)* ve bunların organize edildiği *şema (shema)* olarak ifade edilmektedir (Dubinsky ve McDonald; 2001).

Matematiksel bilginin öğrenciler tarafından nasıl oluşturulduğunu ve nasıl soyut hale getirildiğini araştıran Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001), soyutlama sürecini daha önce oluşturulmuş matematiksel bilgiler arasında yeni ilişkiler kurulmak suretiyle tekrar düzenlenerek yeni bir matematiksel yapı oluşturulması olarak tanımlamaktadırlar. Hershkowitz vdğ (2001) bu tanımla sınırları çizilmiş olan RBC teorisinin adını (Recognizing, Building with, Constructing); *tanıma (Recognizing), kullanma (Building with) ve oluşturma (Constructing)* epistemik eylemlerinin ilk harflerinin bir araya gelmesinden aldığını belirtmişlerdir. Epistemik eylemler; bilginin kurulumu ile ilgili gözlenebilen ve tanımlanabilen zihinsel eylemlerdir (Hershkowitz, Hadas, Dreyfus, Schwarz, 2007).

Öğrencilerin zihinlerinde oluşturdukları bilgileri anlama ve modellemeye dayalı olarak geliştirilen bir başka teori de Balacheff tarafından ortaya atılmıştır. Balacheff (2000) öğrenme ortamlarını tasarlarken yararlanılacak bir araç olması adına, öğrenci anlamalarını anlamak için bir bilgi modeli olarak *cK¢ Teorisini* geliştirdiklerini ifade etmiştir. Bu teori de bireyin bilgisini, *anlayış (conception), bilme (knowing) ve kavram (concept)* aşamalarından geçirerek kavramsallaştırdığını belirtmektedir. Bu teori, ilk aşaması olan anlayış üzerinde yoğunlaşmakta ve bu aşamayı da 4 bileşene ayırmaktadır. İleriki bölümlerde detaylı olarak açıklanacak olan anlayış aşamasında, bir anlayışı oluşturan bu bileşenler; anlayışın uygulanabildiği problemler kümesi (P), bu problemleri çözerken öğrencilerin kullandıkları her türlü bilginin oluşturduğu operatörler kümesi (R), problemin sorulduğu konuya ait olarak kullanılabilecek her türlü gösterimi içeren gösterim sistemi (L) ve öğrencilerin çözümlerini dayandırdıkları kontrol bilgileri ($\sum$) olarak özetlenebilir.

Öğrencilerin zihinlerinde neler olduğu üzerine yapılan çalışmalardan bazıları öğrencinin zihnindeki bilgi ile formal matematiksel bilgi arasındaki ilişkiyi karşılaştırarak öğrencinin kullandığı kavram görüntülerinden hareketle, o kavramı nasıl oluşturdukları sorusuna cevap aramaktadırlar (Kavram Görüntüsü / Kavram Tanımı).

Öğrencilerin nasıl öğrendikleri sorusuna cevap arayan araştırmalardan bazıları ise öğrencilerin kavramları ve aralarındaki ilişkileri doğru kurduklarında kavramsal olarak öğrendiklerini aksi halde öğrenmenin işlemsel olmadan öteye geçmediği başka bir ifadeyle öğrencinin bir bilgiyi gerçek anlamda anlamasından ziyade ezberlemesi üzerinde yoğunlaşmaktadır (İşlemsel - Kavramsal Öğrenme).

Literatürde öğrencilerin hatalı anlayışlarını (kavram yanılgıları) doğrudan ortaya koyan çalışmalar mevcuttur. Öğrencilerin kavramsallaştırma sürecinde sistemli bir şekilde oluşturdukları ve hata yapmalarına neden olan anlayışlarını başka bir ifadeyle kavram yanılgılarını inceleyen çalışmalarda, belirlenen yanılgılardan hareketle bilginin öğrencilerin zihninde nasıl kullanıldığına, kavramsallaştırmanın nasıl gerçekleştiğine cevap aranmaya çalışılmaktadır.

Bu araştırmaların işaret ettiği gibi, öğrencilerin bilgiyi nasıl yapılandırdıkları, nasıl kullandıkları gibi sorular, araştırmacılar için her zaman merak konusu olmuştur. Öte yandan bu öğrenciler arasında özel bir yeri ve geleceği şekillendirmede önemli bir misyonu olan öğretmen adaylarının da bilgiyi nasıl yapılandırdıklarının ortaya koyulabilmesi, matematiksel anlayışlarının belirlenmesi gerekmektedir. Nitekim eğitim öğretim sürecinin ilk kademesi olması nedeniyle öğrencinin öğretmeni model olarak aldığı ilköğretim birinci kademe için yetiştirilen sınıf öğretmenlerinin niteliği son derece önemlidir. Özellikle yasamın her alanında uygulama alanı olan ve eğitim sisteminin her kademesinde öğrencinin ihtiyaç duyduğu matematik söz konusu olduğunda, sınıf öğretmenlerinin bu alandaki anlayışları daha da önem kazanmaktadır (Yürekli, 2008).

Eğitim sisteminin en temel yapı taşlarından biri olan öğretmenlerin ülkenin gelişimindeki rolünün çok önemli olduğu tartışılmaz bir gerçektir. Bu nedenle öğretmenlerin hizmet öncesinde ve hizmet içinde nitelikli bir şekilde yetiştirilmesi gerekmektedir (Aydın ve Peker, 2003; Gürleyük, 2008). Öğretmenlerin eğitim sisteminin temel yapı taşı olduğu ne kadar şüphe götürmez bir gerçekse, çocuğa, toplum içinde diğer bireylerle uyum içinde yaşama kural ve becerileriyle, yaşamlarını daha iyi bir biçimde sürdürmeleri için gerekli bilgi ve becerilerin kazandırıldığı, Türkçe, matematik, fen ve sosyal bilgiler gibi disiplinlerin okuryazarlığının öğretildiği ilköğretim ilk kademesinin de eğitim sisteminin temel yapı taşlarından biri olduğu açıktır (Erden, 2005). O halde sınıf öğretmenlerinin diğer branş öğretmenleri nezdinde biraz daha önemli bir rol üstlendikleri söylenebilir. Eğitimin niteliği ve kalitesinin büyük ölçüde öğretmenlerin niteliği ile doğru orantılı olduğu düşünüldüğünde (Şişman ve Acat, 2003), sınıf öğretmeni adaylarının nitelikli birer öğretmen olarak topluma kazandırılmaları, onların da topluma kazandıracakları için önem arz etmektedir.

Her branşta olduğu gibi, matematik dersinin öğretimi ve öğrenimi açısından, eğitim sürecinin ilk kademesi olması nedeniyle ilköğretim birinci kademe büyük bir önem taşımaktadır (Baykul, 2002; Kandemir, 2004). Anne-babadan sonra öğrencilerin model aldığı ilk insanlar arasında yer alan sınıf öğretmenlerinin her davranışı öğrencileri tarafından gözlemlenmektedir. Öğretmenin sahip olduğu bilişsel ve duyuşsal becerilerin öğrencileri de etkileyeceği düşüncesinden hareketle, yüksek kalitede bir öğretim için öğretmenin konu alanı ile ilgili derin anlamalara sahip olması gerekir (Çelik, 2007). Bu durumda öğretmenlerin sahip oldukları matematiksel anlayışların, öğrencilerin anlayışlarını oluşturmalarında büyük bir paya sahip oldukları söylenebilir. Öğretmenini model alan çocuğun, onun yanlışlarını da edinmesi olağan bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır. Chappell (2003), öğrencilerin matematik öğrenmede başarısız olmalarındaki önemli nedenlerden biri olarak, matematik öğretmenlerindeki bilgi yetersizliğini işaret etmektedir (Akt. Halat, 2008, s. 117). Benzer şekilde Çelik (2007), bir öğrencinin matematiği neden öğrenemediği sorusuna verilen en yaygın cevabın "öğretmenin matematik bilgisinin yetersizliği" şeklinde olduğunu belirtmektedir. O halde ilköğretim birinci kademe öğrencilerine iyi birer matematik anlayışının kazandırılmasında sınıf öğretmenlerinin rolünün çok büyük olduğu söylenebilir.

İlköğretimde matematik derslerinde oluşabilecek herhangi bir eksikliğin sonradan giderilmesi zordur. Bu noktada en önemli görev sınıf öğretmenine düşmektedir (Kandemir, 2006). Ancak Toluk Uçar (2011), son yıllarda yapılan birçok araştırmada öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının ilköğretim düzeyinde öğretim yapabilmeleri için yetersiz olduğunun vurgulandığını belirtmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının gelişmesinde üniversite öğrenimleri süresince aldıkları matematik derslerinin önemi düşünüldüğünde, bu anlayışların ortaya çıkarılabilmesi için Temel Matematik dersinin iyi analiz edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının Temel Matematik I ve II dersi kapsamında yer alan ve matematiğin yapı taşını oluşturan Küme, Sayı, Denklem ve Fonksiyon konularının yardımıyla resmedilebileceği düşüncesi bu çalışmanın temelini oluşturmaktadır. Bu resmi, bilimsel bir şekilde ortaya koyabilmek için, öğrencilerin zihinlerinde neler olup bittiği sorusuna cevap arayan sistemli bir araca olan ihtiyaç gündeme gelmiş ve bu durum çalışmanın yukarıda bahsedilen teorilerden *cK¢ Teorisine* dayandırılması ile çözüme kavuşmuştur.

1.2. Araştırmanın Gerekçesi

Günümüzde öğrenme öğretme faaliyetlerinde etkisini çokca hissettiğimiz yapılandımacı öğrenme kuramıyla beraber bireyin bilgiyi nasıl yapılandırdığı, yapılandırma sürecinde nelerin etkili olduğu, ne tür koşulların, bilginin niteliğini arttırabileceği gibi hususlar, öğrenme alanının önemli araştırma konuları haline gelmiştir Bu durumun neticesinde, öğrenme, bilgi oluşturma, soyutlama, kavram oluşturma, kavram yanılgıları gibi anahtar kelimelerin yer aldığı araştırmalar artış göstermiştir (Altun ve Yılmaz, 2008). Her branşta olduğu gibi matematik eğitiminde de bu yönde çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Matematik soyut kavramlardan oluşmuştur. Bu kavramların öğrenilmesi ve aralarındaki ilişkilerin kurulması matematiksel bilgiye ulaşmamızı sağlar. Kavramsal öğrenme kavramı tanımak veya kavramın tanımını bilmekle değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki ilişkileri kurabilmekle gerçekleşir (Baki, 2008). Bu durumda kavramlar matematik öğrenme için çok önemlidir; çünkü matematiksel kavramlar, matematik öğreniminin ve öğretimin en temel yapı taşlarıdır. Bireyin gerçek manada matematiksel öğrenmesi, kavramsal öğrenme ile ilişkili olduğundan, öğrencilerin öğrendikleri matematiksel bilgileri nasıl oluşturduklarının, nasıl kavramlaştırdıklarının, bu kavramsallaştırma sürecinde ne tür yanılgılar ve zorlukların ortaya çıktığının belirlenmesinin gerekliği ortaya çıkmaktadır. Bu amaçla yapılan araştırmalar bu gerekliliğin bir göstergesi olarak kabul edilebilir (Orhun, 1998, Dede, Yalın ve Argün, 2002; Cengiz, 2006; Yeşildere, 2006; Yeşildere, Türüklü, 2008; Barak, 2007; Yazgan, 2006; Kocaoğlu, Yenilmez, 2010).

Matematik öğrenenler, öğrenme süreci boyunca çeşitli bilişsel, duyuşsal ve devinişsel süreçlerden geçmektedirler. Bu süreçlerden geçerken, öğrencilerin özellikle bilişsel becerileri kazanma aşamalarında çok çeşitli anlayışlar geliştirdikleri ve bu anlayışların onları her zaman doğru çözüme ulaştırmadığı, kavramsallaştırma sürecini doğru olarak tamamlamalarına izin vermedikleri düşünülmektedir. Bu bağlamda araştırmacılar, son yıllarda öğrencilerin kavramsallaştırma yolunda sergiledikleri yanılgıları incelemektedirler. “Kavram yanılgıları” olarak literatürümüzde yer alan bu önemli konu üzerinde çeşitli araştırmalar yapılmış ve yapılmaya devam edilmektedir. Baki (2008) kavram yanılgılarını, “bir kişinin bir konuyu veya problemi kendisine mantıklı gelecek şekilde anlaması fakat bu alandaki uzman bir kişinin kavramsal anlamasıyla çelişmesi” (s.281) olarak tanımlamakta ve yanılgıların bireyin yanlış inanışları ve deneyimleri sonucunda ortaya çıkan davranışları olduğunu belirtmektedir. Bu durumda öğrencilerin yanlış inanışları tespit edilmez ise bu yanlış inanışlar üzerine kurulan matematiksel bilginin geçerli olması beklenemez. O halde kavram yanılgılarının tespit edilmesi ve giderilmesi önemlidir. Bu önemin farkında olan araştırmacılar, matematik öğreniminde çeşitli konularda öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları ve kavram yanılgılarını belirlemek ve gidermek amacıyla çok sayıda araştırma yapmışlardır. İlgili araştırmalar incelendiğinde dikkati çeken husus bu yanılgıların konu temelli olmalarıdır (Ercan 2010; Kabael, 2010; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Uğurel ve Moralı, 2010; Erbaş, Çetinkaya ve Ersoy, 2009; İpek, Albayrak ve Işık, 2009; Küçük ve Demir, 2009; Aydın ve Köğce, 2008; Baki 2008, İşgüden, 2008; Pesen, 2008; Soylu ve Soylu 2005; Cengiz, 2006; Özçifçi, 2007; Pesen, 2007; Zembat 2007; Kandemir, 2006; Ural, 2006; Linchevski ve Vinner 1988). Başka bir ifadeyle bu araştırmalar, öğrencilerin ilgili dersin müfredatında yer alan herhangi bir konuya ait kavram yanılgılarını inceleme ve gidermeye yöneliktir. Bu tür araştırmaların sonunda işe yarar sonuçların bulunduğu şüphe götürmezken, bu sonuçların çoğunun ilgili konunun ötesine geçemediği de aşikardır. Bu durum, her konu için farklı yanılgıların ortaya koyulduğu bir yanılgılar denizine doğru gittiğimizi göstermektedir.

Matematik bir çok konuyu ve kavramı içermektedir. O halde bu yanılgılar listesinin uzayıp gideceği aşikadır. Bu kadar çok yanılgının yer aldığı böylesine uzun bir listenin öğretmenler için çok da kullanışlı olmayacağı düşünülmektedir. Bu nedenle öğrenenlerin matematiksel anlayışlarının mümkün olduğunca çok konu için genellenmesi araştırmacıların ve öğretmenlerin işini kolaylaştıracaktır.

Literatür incelendiğinde öğrencilerin genel matematiksel anlayışlarını ortaya koyan çalışmalara rastlanmamıştır. Ancak öğrencilerin yanlış anlayışlarını(kavram yanılgılarını), sınıflandıran genel çalışmaların yanı sıra (Committee of Undergraduate Science Education, 1996, Akt. Yağbasan ve Gülçiçek, 2003, s. 111), özel olarak matematiğin farklı konularında da işleyen genel yanlış anlayışları veya yanlışları belirleyen sınırlı sayıda araştırma mevcuttur (Graeber ve Johnson, 1991, Akt. Zembat, 2008; Santagatata, 2002; Ryan ve Williams, 2007; Türkdoğan, 2011). Comitte of Undergraduate Science Education (1996) öğrencilerin sergiledikleri kavram yanılgılarını; deneyimsiz kanılar, bilimsel olmayan inançlar, kavramsal yanlış anlamalar, kullanım dilinden kaynaklanan kavram yanılgıları ve yanlış benimseme olarak sınıflamaktadır (Akt. Yağbasan ve Gülçiçek 2003, s.111). Özel olarak matematik eğitiminde yapılan çalışmalardan biri olan Türkdoğan (2011), çalışmasında 4 yanlış türü belirlemiştir. Bunlar bilimsel dile ilişkin yanlışlar, işlem ve strateji kullanımına ilişkin yanlışlar, tümevarım-tümdengelim ile ilgili yanlışlar ve sınıflandırmalara ilişkin yanlışlar olarak sıralanmaktadır. Santagata (2002) ise yanlışı kavramsal, işlem aşamaları, çizim, hesaplama yanlışları, dikkatsizlik sonucu oluşan yanlışlar, prensip, özellik ve tanımlar ve diğer olmak üzere 7 başlık altında incelemiştir (Akt. Türkdoğan, 2011, s.32). Ryan ve Williams (2007), öğrencilerin yanlışlarını; *modelleme* (modelling), *prototiplendirme* (prototyping), *aşırı genelleme* (overgeneralization) olarak sınıflamaktadırlar. Zembat (2008) ise Graeber ve Johnson (1991)'ın yaptıkları araştırmalar sonunda kavram yanılgılarını dört ayrı kategoride ele aldıklarını belirtmektedir. Bu kategoriler *aşırı genelleme* (overgeneralization), *aşırı özelleme* (overspecialization), *yanlış tercüme* (mistranslation) ve *kısıtlı algılama*[1] dır (limited conception). İlgili literatür bölümünde detaylandırılacak olan bu çalışmaların sınırlı sayıda olduğu görülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin hatalı ve doğru alayışlarının belirlendiği araştırmalara ihtiyaç vardır.

Öğretenlere, öğrenme ortamlarını tasarlarken, tasarladıkları öğrenme-öğretme sürecini uygularken, bu sürecin sonunda öğrencilerinin ne öğrendiklerini ölçmek için soru hazırlarken ve bu soruları değerlendirirken rehber olacak çok yönlü bir araştırmaya ihtiyaç vardır. Bu araştırma sonucunda belirlenen anlayışlar yukarıda sayılan tüm amaçlara hizmet edebilirler. Şöyle ki; öğrencilerinin sahip olmaları muhtemel anlayışlarını bilen bir öğretmen ders tasarımında, dersin uygulanmasında ve değerlendirilmesinde bu anlayışlardan yararlanabilir. Bir örnekle açıklamak gerekirse; yukarıda iki araştırmada da ortak olarak belirlenen yanlış türlerinden *aşırı genelleme*yi bir anlayış olarak ele alalım. Aşırı genellemeden kastedilen şey belli bir sınıfa ait bir kural, prensip veya kavramın diğer sınıflara da yayılmasıdır (Akt. Zembat, 2008; s. 43). Aşırı genelleme anlayışına sahip bir öğrenci doğal sayılara özgü olan çarpmanın toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği kuralının, bölme işlemi için de geçerli olacağını düşünebilir. Yani çarpma işlemi için doğru olan bir kuralı bölme işlemine genelleyerek aşırı genelleme yapmaktadır. Bu durumda öğrenci $a \text{ x } (b \pm c) = (a \text{ x } b) \pm (a \text{ x } c)$ eşitliğinin doğruluğundan hareketle $a \div (b \pm c) = (a \div b) \pm (a \div c)$ eşitliğinin doğru olduğunu düşünmekte ve bu bilgiyi kullanmaktadırlar.

Benzer mantıkla bir öğrencinin $A / (B \cup C) = (A / B) \cup (A / C)$ ve $A /(B \cap C) = (A / B) \cap (B / C)$ eşitliklerini doğru bir bilgi olarak kabul ederek, bu bilgisini gerektiği zaman kullandığını düşünelim. O halde bu öğrencinin de Graeber ve Johnson'ın (1991, Akt, Zembat, 2008) tanımladıkları *aşırı genelleme* anlayışına sahip olduğu düşünülebilir mi? Bu soruya cevap verebilmek için öğrencinin kullandığı bilgiyi analiz edelim. Bilindiği gibi kümelerle kesişim ve birleşim işlemlerinin birbirleri üzerine dağılma özelliği mevcuttur, bu

[1]Türkçe anlamları arasında yer almamasına rağmen, birçok durumun izahında cümle düşüklükleri ortaya çıktığı gerekçesiyle Zembat (2008) tarafından "Conception" kelimesinin karşılığı olarak "Algı" kelimesi kullanılmıştır. Bir karışıklığa sebebiyet vermemek için tezin bu bölümünde "algı" kelimesi muhafaza edilmiştir. Ancak, ilerleyen bölümlerde gerekçeleriyle verileceği üzere "Conception" kavramı için "anlayış" kelimesinin daha uygun bir karşılık olacağı düşünülmektedir.

durumda $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ eşitlikleri doğru olmaktadır. Örnekteki öğrencinin, doğal sayılar ve kümelerde kullanılan ve belli işlemlerde doğru sonuç veren bu kuralı kümelerdeki fark işlemi için de kullandığı söylenebilir. Bu durumda yukarıdaki soruya, öğrencinin *aşırı genelleme* anlayış sahip olduğu düşünülebilir, şeklinde bir cevap verilebilir. Örneklerden de görüleceği gibi sadece *aşırı genelleme* anlayışını bilen bir öğretmen, bu anlayış sayesinde öğrencilerinin yaptığı pek çok yanlışı açıklayabilecek ve gerekli önlemleri alabilecektir. Öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri için önemli bir yol haritası oluşturacak olan matematiksel anlayışların bilincinde işlenecek bir matematik dersi ile öğrencilerin matematik yaparken nasıl davrandıkları sorusuna cevap verilebilir. Böylece, matematik dersi anlatırken olası öğrenci anlayışlarının bilincinde olmak, öğretmenlerin önemli bir avantaj elde etmelerini sağlayacaktır. Öte yandan öğrencilerinde bu anlayışın oluşabilceğini bilen bir öğretmen soru hazırlanken veya öğrencilerinin sorulara verdikleri çözümleri analiz ederken bu anlayıştan yararlanabilecektir. Öğrencilerinin *aşırı genelleme* anlayışına sahip olup olmadıklarını belirlemek için bu anlayışı ortaya çıkarabilecek sorular hazırlayabilir. Aynı zamanda öğrencilerinin sorulara verdikleri cevapları bu anlayışın ortaya çıktığı durumları göz önünde bulundurarak inceleyebilir. Öğrencilerinin arasında herhangi bir kuralı farklı durumlarda kullananları tespit ettiğinde bu öğrencilerinde aşırı genelleme anlayışının olduğuna kannat getirebilir. Böylece çıkardığı sonuçları ders anlatımına yansıtarak öğrencilerini bu yanlış anlayışlarından kurtarabilir.

Öğrencilerin matematiğin farklı konularındaki kavram yanılgılarının kategorilendirilmesi gerekli iken bu sınıflamanın bir yönüyle eksik kaldığı düşünülmektedir. Öğrencilerin matematiksel bilgilerini oluştururken sadece yanlış anlayışlar değil doğru anlayışlar da geliştirdikleri bilindiğinden, öğrencilerin farklı konlarda ortaya çıkabilecek genel matematiksel anlayışlarının mümkün olduğunca öğrencilerin doğru ve yanlış anlayışlarını kapsayacak şekilde belirlenmesi gerekmektedir. Öğrencilerin sahip oldukları anlayışları belirlemenin, öğretenler açısından yukarıda sayılan çok yönlü doğurguları olacağı ve bu nedenle, öğretenlerin öğrenme ortamlarını tasarlarken ve öğrencilerinin çözümlerini analiz ederken kullanabilecekleri bir araç olması adına, bir çok matematik konusunda ortaya çıkabilecek olan genel anlayışların belirlendiği çalışmaların yapılmasına ihtiyaç vardır.

Mandacı Şahin'in (2007) belirttiği gibi, ülkemizin geleceğinde çok önemli bir yere sahip olan matematik eğitiminde sorunlar olduğu, matematiksel öğrenme ve anlamayı inceleyen birçok çalışmada ortaya konulmuştur. Bu sorunların giderilebilmesi için öncelikle öğretmenlerin nitelikli bir şekilde yetiştirilmesi gerekmektedir. Bilindiği gibi sınıf öğretmenleri, okul öncesi öğretmenlerinden sonra öğrencilere temel bilgileri veren, öğrencilerin yetişmesinde önemli bir model olan öğretmenlerdir. Bu mesleğin, branş öğretmenleri arasında da yeri ayrıdır. İlköğretim çağındaki öğrencilere, temel matematik bilgilerini kazandıracak olan, yakın geleceğin sınıf öğretmenlerinin de sahip olduğu matematiksel anlayışların belirlenmesi gerekmektedir. Nitekim öğretmen adaylarının hizmet öncesinde geliştirdikleri bu anlayışlar, onlar hizmet içindeyken de var olacaktır. Bu anlayışların belirlenmesinin, sınıf öğretmenliği programında yürütülen temel matematik dersi için tasarlanacak öğrenme ortamlarına da ışık tutacağı düşünülmektedir.

1.3. Araştırmanın Problemi

Öğrencilerin, *"matematiksel problemleri çözme süreci içinde kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilmelerini"* sağlamak matematik eğitiminin genel amaçları arasında yer almaktadır (MEB, 2005; s. 9.). Öte yandan bir problemin çözümü veya bir işlemin yürütülmesi öğrencinin mantığına, önceki birikimlerine, kendi matematiksel düşüncesine uygun düşebilir ve öğrenci yaptıklarının matematiksel geçerliliğinin olmadığını da bilmeyebilir (Baki, 1998). Bu durumda öğrencilerin çözüm stratejilerine yansıyan bu bilgileri veya anlayışları ortaya konulmalıdır. Confrey (1990)'e göre, eğer biz bir öğrencinin verdiği yanlış bir cevapta dikkatlice bir anlayış ararsak, o cevabın mantıklı tarafını keşfedebiliriz (Akt. Webber, 2004). O halde öğrencilerin bir soruyu nasıl çözmeye çalıştığı anlaşılabilirse, onların matematiği daha iyi anlamalarına yardımcı olunabileceği fikri gündeme gelmektedir (Aydın, 2008). Niss'e göre; eğer öğrencilerin matematiği öğrenme yollarını ve bu yolları tıkayan engelleri anlayabilirsek matematik bilgisinin nasıl üretildiğini, nasıl hafızaya alındığını ve nasıl kullanıldığını daha iyi anlayabiliriz (Niss, 1999). Böylece öğrencilerin davranışlarını modelleyebilir ve ilerideki öğrenmeleri için fikir sahibi olabiliriz.

O halde araştırmacı ve aynı zamanda eğitimci olarak öğrencilerin daha anlamlı öğrenmelerini sağlamak için onların çözüm stratejilerini incelemek, ne tür hatalar yaptıklarını ortaya çıkarmak gerekmektedir. Baki'nin (1998) de belirttiği gibi öğretmenler öğrencilerin yazılı kağıtlarını okurken ya da ödevlerini değerlendirirken sadece not vermek için değil, öğrencinin eksiklerini, yanılgılarını belirlemek için de okumalıdırlar. Bu durumu göz önünde bulunduran araştırmacı öğrencilerin gerek ders içinde gerekse sınavlarda bir problemle karşılaştıklarında nasıl davrandıklarını gözlemleyerek, onların farklı anlayışlar geliştirdiklerini, umulmadık hatalar yaptıklarını fark etmiştir. Öğrencilerin sınav kağıtları incelediğinde, bazı hataların tek bir konuda ortaya çıkmadığı, öğrencilerin benzer hataları farklı konularda da tekrarladıkları gözlemlenmiştir. Bu durum araştırmacıyı "öğrencilerin farklı konulardaki genel matematiksel anlayışları ortaya çıkarılabilir mi? sorusunu sormaya yöneltmiştir. Bu soruya öğrencilerin sahip olduğu bilgileri ve bu bilgileri kullanarak geliştirdikleri yeni bilgileri anlamamızı kolaylaştıracak olan cK¢ teorisinin anlayış aşamasından faydalanılarak cevap bulunabileceği düşünülmektedir. İlk bölümde de kısaca bahsedilen bu teori ile ilgili olarak, ilerleyen bölümlerde geniş bilgi verilecektir ancak araştırma problemlerinin daha anlaşılır olabilmesi için, çalışmanın analiz aşamasında bu teorinin anlayış aşamasından yararlanıldığını belirtmek gerekmektedir. Bu bağlamda anlayış aşamasının ön gördüğü üzere, öğrencilerin kullandıkları operatörlerin sınıflanması ile matematiksel anlayışlara ulaşılmaya çalışılmıştır.

Tüm bu bilgiler ışığında araştırmada "sınıf öğretmeni adaylarının matematiğin birçok konusunda sahip olabilecekleri genel matematiksel anlayışları nelerdir?" şeklinde yapılandırılan ana problem çerçevesinde aşağıdaki iki alt probleme cevap aranmıştır:

a. Sınıf öğretmeni adaylarının temel matematik bilgilerini yansıttıkları operatörler nelerdir?
b. Sınıf öğretmeni adayları kullandıkları operatörlere bağlı olarak, ne tür anlayışlara sahiptirler?

1.4. Araştırmanın Amacı

Öğrencilerin sahip oldukları matematiksel anlayışlarını belirlemenin, kavramsal öğrenmeleri için önemli bir yol haritası oluşturacağı ve bu sayede öğrencilerin zihinlerinde neler olup bittiğinin, matematik yaparken nasıl davrandıklarının, oluşturdukları matematiksel bilgilerini nasıl kullandıklarının anlaşılmasına dair fikir sahibi olmanın hem öğrenen hem de öğreten açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Bu bağlamda araştırmanın amacı; sınıf öğretmeni adaylarının Temel Matematik dersindeki bilgilerini cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre inceleyerek, bu model ışığında onların sahip oldukları genel matematiksel anlayışları belirlemektir.

1.5. Araştırmanın Önemi

Yapılandırmacılık Kuramına göre matematiksel bilgiler var olan eski bilgilere eklenerek bireyin zihninde kendilerine yer edinirler. Öğrenme ise ancak yeni bilgi zihinde doğru bir şekilde yapılanmış olan eski bilgi ile ilişkilendirildiğinde gerçekleşmiş olur (Baki, 2008). Böyle bir öğrenme neticesinde oluşan matematik; tavırları, düşünme kabiliyetlerini, stilleri, stratejileri vs. geliştirir, daha önce hiç karşılaşmadığımız yeni durumları anlama, kavrama ve karşılık verme imkânını sağlar (Aydın, 2008). Bunun yanında matematik öğrenme problem çözme, akıl yürütme, iletişim ve ilişkilendirme becerilerini kazandırır (MEB, 2005). Ancak geleceğin şekillenmesinde büyük rolü olan matematik eğitiminin önündeki engelleri en aza indirmek adına, bu üst düzey becerileri kazanacak olan bireylerin matematiksel anlayışlarının belirlenmesinin önemli olacağı düşünülmektedir.

Öğrencilerin sahip oldukları matematiksel anlayışların belirlenmesi hem öğrencilerin yaptıkları hataları genellemek ve önlem almak, hem de yaptıkları doğruları genelleyerek nasıl düşündüklerini ortaya koymak açısından önemlidir. Bu araştırma ile sınıf öğretmeni adaylarının sahip oldukları matematiksel anlayışlar belirlenerek, bir bakıma öğrencilerin zihin haritaları oluşturulmuş olacaktır. Bu durum öğrencilerin matematik konuları ile ilgili olarak zihinlerinde oluşturdukları bilgileri nasıl kullandıklarını, farklı durumları nasıl bir araya getirdiklerini, anlamamız açısından önem arz etmektedir.

Anlayışlar hakkında düşünmek matematik eğitimi araştırmacılarına öğrencilerin bilgilerini biçimlendirmede yardımcı olurken, öğrencilere ne tür sorular sormaları gerektiğine dair bakış açısı kazanmalarında rehber olmaktadır (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Nitekim öğretmenler, öğrencilerin sahip oldukları anlayışları çoğu zaman fark edememektedirler. Matematik eğitimcilerinin öğrenci anlayışları üzerine yaptıkları araştırmalar sayesinde, öğrencilerin zihinlerinde var olan matematiksel bilgiler biçimlendirebilecektir. Belirlenen anlayışlar neticesinde farklı bir bakış açısı kazanan öğretmenler, öğrencilerini ölçecekleri soruları hazırlarken ve bu soruları değerlendirirken bu anlayışlardan yararlanabileceklerdir. Şöyle ki, öğrencilerde “bir ondalık sayı iki tam sayının virgül ile ayrılmış halidir” anlayışının olabileceğinin farkında olmayan bir öğretmen düşünelim. Bu öğretmen, ondalık sayılarla toplam işlemi ile ilgili olarak sorabileceği soruları 3,1+2,7 örneğinde olduğu gibi eldeli toplamayı gerektirmeyecek şekilde seçmiş olsun. Bu durumda öğrencisinde yukarıda bahsedilen anlayış oluşmuş olsa dahi bu sorularla bu anlayışı fark edemeyecektir; çünkü öğrenci bu tür sorular için her zaman doğru sonuca ulaşacaktır. Öğrencisinin her zaman doğru sonuç vermeyen bu anlayışını teşhis edemeyen öğretmenin, bu anlayışı değiştirmesi de beklenemez. Bu durumda bu öğrenci karşına 3,5+2,7 gibi eldeli toplama gerektiren bir işlem çıktığında geliştirmiş olduğu anlayıştan hareketle 5,12 şeklinde cevap vererek hatalı sonuca ulaşacak ancak, kendi zihinsel çıkarımlarına ters düşen herhangi bir çelişki yaşamayacağı için, hatasının kendisi de farkına varamayacaktır. Ancak aynı öğretmen "bir ondalık sayı iki tam sayının virgül ile ayrılmış halidir" anlayışına sahip öğrencisinin bu anlayışının sonucunda ürettiği "ondalık sayılar toplanırken virgülden önceki ve sonraki sayılar ayrı ayrı toplanır, virgül ile ayrılır" bilgisini kullanabileceğini bilirse, sorularını bu doğrultuda hazırlayacaktır. Yani öğrencide oluşabilecek bu anlayış, öğretmene soru hazırlarken farklı bir bakış açısı kazanmasında rehber olacaktır. O halde belirlenen matematiksel anlayışları hesaba katarak dersini planlayan bir öğretmen, bir bakıma öğrencilerinin yapacakları hataları, zihinlerinde yerleşmiş veya yerleşmesi muhtemel anlayışları önceden bilerek öğrencilerinin bir adım önüne geçecektir. Matematikle ilgili birçok konunun işlenişinde kullanabileceği bu anlayışlar sayesinde dersin işleniş kalitesinin artacağı ve içeriğinin zenginleşeceği düşünülmektedir. Bu savların araştırılması, bu konu ile ilgilenen araştırmacıları harekete geçirerek, çalışılacak yeni konuların oluşması hususunda literatüre de katkı sağlayacaktır. Ayrıca literatür incelendiğinde öğrencilerin zihinlerinde neler olup bittiğine, bilgiyi nasıl kurduklarına anlam vermeye çalışan cK¢'nin de içinde bulunduğu teorilerin (APOS, RBC, Zihinsel Modeller v.b) konu temelli olduğu, bir konu ya da kavram üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir (Yazgan, 2006; Maracci, 2006; Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Ancak bu araştırma, cK¢ teorisinin anlayış aşamasını kullanarak, öğrencilerin matematikle ilgili olarak geliştirdikleri ve bu nedenle matematiğin birçok konusuyla ilgi sahip olabilecekleri genel anlayışları kullandıkları operatörlere bağlı olarak belirlemeyi ve böylece literatürde yer alan boşluğu doldurmayı hedeflemiştir. Bu bakımdan araştırmanın konu bağımlılığını aşarak öğrencilerin anlayışlarını belirleme adına örnek olması önemini ortaya koymaktadır.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Çalışmanın uygulama evreni Artvin Çoruh Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Sınıf Öğretmenliği Programında öğrenim gören 61 öğretmen adayı ve çalışma kapsamındaki konular ise bu programda okutulan Temel Matematik I-II dersi içeriğindeki Küme, Sayı, Denklem ve Fonksiyon konuları ile sınırlı tutulmuştur.

1.7. Araştırmanın Varsayımları

Araştırmada; hazırlanan sınavlar için kapsam geçerliği konusunda başvurulan uzman görüşlerinin yeterli olduğu, yazılı sınav uygulanan ve mülakat yapılan öğrencilerin samimi oldukları ve gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

1.8. Teorik Çerçeve

Araştırma cK¢ teorisinin anlayış aşamasına dayandırılmıştır. Bu bölümde önce kısaca teori tanıtılmış daha sonra bu teorinin ilk aşamasını oluşturan anlayış aşaması detaylı olarak açıklanmıştır.

1.8.1. cK¢ (Conception-Knowing-Concept) Teorisi[2]

Balacheff (2000) öğrenme ortamlarını tasarlarken yararlanılacak bir araç olması adına, öğrencilerin "anlamalarını anlamak" için *cK¢ Teorisini* geliştirildiğini ifade etmiştir. Bu teori "Anlayış (conceptiom)", "Bilme (Knowing)" ve "Kavram (Concept)" olarak ifade edilen hiyerarşik üç aşamadan oluşmaktadır. Balacheff (2000, 2002), *anlayış*ın öğrencilerin sahip olduğu ve belirli görevler yerine getirilirken gözlemlenen yanlış anlamalarını açıklamak üzere 80'li yıllardan beri kavram yanılgısı yerine kullanıldığını ancak bu düşüncede öğrencilerin tamamen yanlış olduğu düşünülemeyeceğini belirtmiştir. Bu nedenle öğrencilerin sadece belirli durumlarda işe yarayan, diğer durumlarda yanlış olduğu ispatlanabilen muhtemel anlam yapılandırmalarına sahip olduklarını ve bu yapılandırmaların anlayış olarak ifade edilebileceğini belirtmektedir. Teorinin ikinci aşaması olan "bilme (knowing)" ise öğrencilere zorla sunulan otoriter anlamından kurtulmak için Bilgi (Knowledge) kelimesinin yerine kullanılmıştır. Burada "bilme"nin

---

[2] cK¢ kısaltması İngilizce Conception, Knowing ve Concept kelimelerinin ilk harflerinden oluşmaktadır. İlk ve son kelimelerin baş harfleri aynı olduğundan karışmalarını önlemek için ikinci c harfinin üzerine bir kesme işareti koyulmuştur.

bilginin öğrencinin bakış açısından düşünülen hali olarak kullanıldığı ve değişik durumlarda uygulanabilen bir dizi anlayış olarak da ifade edilebildiği söylenebilir. Son aşama "kavram (concept)" ise klasik anlamına oldukça yakın bir şekilde kullanılmış ve bilmeler kümesinin işaret ettiği etiket olarak ifade edilmiştir. Özetle bu teoride anlayışların birleşerek "bilme"leri, bilmelerin de birleşerek kavramları oluşturduğu sonucu çıkarılabilir. Buradan hareketle anlayış daha ayrıntılı olarak tanımlanabilirse diğer aşamaların belirlenmesinin daha kolay olacağı düşünülmektedir (URL-2). Öte yandan bu araştırma öğretmen adaylarının sahip oldukları genel matematiksel anlayışları belirlemeyi amaçladığından, bu genel anlayışlardan hareketle genel bilmeler veya genel kavramların belirlenmesi mümkün olmayacağından, çalışmada teorinin ilk aşaması olan anlayış (conception) aşamasına odaklanılmıştır. İlerleyen bölümde yalnızca anlayışla ilgili bilgi verilmiş ve anlayışla ilgili yapılan çalışmalar tanıtılmıştır.

1.8.1.1. Anlayış (Conception)

"Başlangıç, kavram, düşünce, fikir, görüş, kavrama, kavrayış, anlayış, anlama yetisi" gibi birçok Türkçe karşılığa sahip olan "conception" kelimesi Türkçe anlamları arasında yer almamasına rağmen, birçok durumun izahında cümle düşüklükleri ortaya çıktığı gerekçesiyle Zembat (2008) tarafından "perception" kelimesinin karşılığı olan "algı" olarak Türkçeleştirilmiştir. Bu çalışmada da ilk olarak "conception" kelimesini karşılayan Türkçe kelime olarak "algı" kullanılmıştır; ancak kullanılabilecek kelimenin ne olması gerektiği konusu, bilimsel toplantılarda dinleyicinin görüşüne sunulduğunda "algı" kelimesinin, anlamı tam olarak karşılamadığı ortak görüşüne varılmış ve "anlama ve kavrama yetisi" anlamlarına gelen "kavrayış" kelimesinin kullanılmasının daha uygun olacağı ifade edilmiştir. Ancak bu kelimenin de daha çok doğru bilgileri içerdiği ve çalışmada kullanılan modelde ifade edilen "*conception*" sözcüğünü tam karşılamadığı fikri gündeme gelmiştir. Yapılan müzakereler sonucunda "Anlayış kelimesinin daha uygun olacağı fikri kabul görmüştür. Gerçekten de Türk Dil Kurumu'nun Eğitim Terimleri sözlüğü incelendiğinde "anlayış" kelimesinin karşılığı olarak "*bir kimsenin anlama biçimi ya da anlama gücü, bir kimsenin benimsemiş olduğu düşüncelerin ve inançların tümüne verilen ad*" denmektedir ki bu tanım da "anlayış"ın uygun bir karşılık olacağını onaylamaktadır.

Anlayış kavramı matematik öğrenimi ve öğretimi ile ilgili araştırmalarda yıllardır yer almış olsa da sınırları açıkça tanımlanmamış ve genel bir bakış açısı olarak kullanılmıştır. Artigue (1991)'in analizine göre epistemolojik olarak aslında kavram yanılgısı (misconception) ile aynı kökene sahip olan anlayış terimi (Akt. Balacheff, 2000; Balacheff ve Gaudin, 2002) farklı araştırmalarda kullanılmasına rağmen tanımı örtük kalmış ve herkes tarafından kabul gören, kesin bir tanımı yapılmamıştır. Bu nedenle anlayışlar ve bu anlayışların farklılıklarını ve ortak yönlerini analiz etmeye imkân veren sağlam temellere dayanan tanımlara ihtiyaç vardır. (Balacheff, Gaudin, 2002; 2003).

Balacheff, anlayış hakkındaki görüşlerini şu şekilde ifade etmektedir;

> *"Sadece kurtulmak maksadı gütmeden hatalar anlaşılmaya çalışıldığında, öğrencilerin anlayışları önem kazanmaktadır. Yapılandırmacı teoriler tarafından ortaya atılan anlamanın bir uyum süreci sonunda meydana gelen yapılandırma olarak kabul edildiği bakış açısına göre hatalar, sadece rastlantısal olarak ortaya çıkıyor olamaz. Gerçekten de dikkat eksikliğinden kaynaklanan ya da sadece kaza eseri oluşan hatalar vardır. Fakat epistemolojinin ya da öğrenme biliminin bakış açısına göre önemli olan hatalar, toplumda ve/veya belirlenen bir durumda anlamlı bir derecede tekrarlanan hatalardır. Bu hataların belirli anlamaların ya da anlamlandırmaların kısacası anlayışın (conception) belirtisi olarak kullanılma potansiyeli vardır ve bizim belirlemeye çalıştığımız anlayış tam olarak budur."(URL–2)*

> *"Anlayış" 80'li yıllardan beri öğrencilerin sahip olduğu ve belirli görevler yerine getirilirken gözlemlenebilen yanlış anlamaları açıklamak üzere; şu meşhur kavram yanılgısı yerine kullanılmıştır. Ancak bu düşüncede öğrencilerin sadece yanlış olduğu düşünülemez. Onların sadece belirli durumlarda işe yarayan, başka diğer durumlarda yanlış olduğu ispatlanabilen muhtemel anlam yapılandırmalarına sahip oldukları kabul edilir. Bunu daha iyi açıklayabilmek için şunu söyleyebiliriz: eğer öğrenme bir uyum (adaptation) süreci ise ürünü tamamıyla yanlış olmaz. Elbette bu iddianın da sınırlılıkları vardır fakat ciddiye alınmaya değer bir düşüncedir. (URL–1)*

Balacheff, insan beyninin içinde bilgiye dair meydana gelen olaylarla ilgili çok fazla bilgiye sahip olmadığımızı belirterek, bu konuda gözlemleyebildiklerimizin başlangıç noktamızı oluşturabileceği fikrini önermektedir. Bu başlangıç noktasını, özelliklerini belirleyebildiğimiz bir ortamda meydana gelen bir etkinlik sırasında belirlenebilen davranışlar olarak tanımlayan Balacheff (URL-1), bu davranışlar yardımıyla ortaya konulabilecek olan anlayış aşamasını aşağıdaki 4 bileşenle ifade etmektedir (Balacheff 2000).

Bu modelde anlayış C;

P; problemler kümesi

R:operatörler kümesi

L;gösterim sistemi

∑: kontrol bilgisi

olmak üzere C(P,R,L, ∑) dörtlüsü ile tanımlanmaktadır.

P problemler kümesi; anlayışın uygulama alanıdır (Balacheff, 2000; Balacheff ve Gaudin, 2002). Başka bir ifadeyle anlayışın anlamlı olduğu problemler kümesi olarak tanımlanabilir. Bir örnekle ifade etmek gerekirse, "ondalık sayılar toplanırken virgülden önceki ve sonraki sayılar ayrı ayrı toplanır ve virgül ile ayrılır" anlayışının uygulama alanı ondalık kesir sayılarıyla ilgili toplama işlemini gerektiren sorulardır. Bu durumda bu anlayışın problemler kümesi, ondalık sayılarla toplama işleminin yapıldığı bütün problemleri kapsamaktadır. Bu örnekte de görüldüğü gibi bu kümede yer alan problemlerin belirlenmesi oldukça karmaşık bir iştir. Anlayışın uygulama alanı olan problemler kümesini belirleme ile ilgili olarak birbirinden farklı iki görüş önerilmektedir. Bunlardan ilki; üzerine düşünülen anlayışın uygulama alanındaki tüm problemleri hesaba katma fikridir (Vergnaud, 1991). Ancak bu seçenek çok geneldir ve birçok durumda erişilmez olacağından kullanışlı bulunmamıştır; örneğin yukarıdaki anlayışın, gözlemleneceği problemler kümesi sonsuz elemanlı olacaktır (Balacheff ve Gaudin, 2002; 2003). Bu nedenle bütün problemleri kullanmak mümkün olmayacaktır. Öteki seçenek ise diğer problemlerin belirlenen problemlerden türediğini varsayarak sonlu sayıda problemi dikkate almayı öneren Brousseau (1997) tarafından ortaya atılmıştır. Fakat bu seçenek her anlayış için bu kadar genelleştirilmiş bir problem kümesinin nasıl oluşturulabileceği gerçeğini açıklayamamaktadır (Balacheff ve Gaudin, 2002; 2003).

Balacheff ve Gaudin (2002) bunlar yerine, P problemler kümesini, ilgili içeriğe bağlı olarak oluşturulan ortamlarda yapılan öğrenci gözlemlerinden türeterek f*aydacı* (*pragmatik)* bir tavır izlemeyi önermişlerdir. Buradan hareketle problemler kümesi, öğrencilerin sahip olduğu anlayışların görülebileceği en temel içerikten oluşturulabilir (Webber, 2004).

Operatörler kümesi R ise P'deki problemleri çözüme kavuşturmak için kullanılan işlemler, kurallar, teoremler (Webber, 2004), başka bir ifadeyle çözüme ulaşmak için öğrencilerin kullandığı her türlü bilgi olarak düşünülebilir. Operatörler işlemin doğrudan yapılmasına izin verecek şekilde "somut" olabileceği gibi dilbilimsel, sembolik ya da grafiksel temsillere dönüşümüne izin verecek şekilde "soyut" olabilirler (Balacheff ve Gaudin; 2002). Operatörler, öğrencilerin gerçekleştirdiği çözümde yer almaktadır. O halde öğrenciler bir dizi operatör kullanarak çözümlerini gerçekleştirirler (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Operatörler genellikle "Eğer, …..ise…..dir" kalıbı ile ifade edilirler. "(Eğer) $f: R \to R$ fonksiyonunda $\forall$ $x \in \mathrm{R}$ için $f(x) = x$ ise f fonksiyonu birim fonksiyondur" ifadesi operatöre örnek verilebilir. Bununla birlikte operatörlerin yukarıda verilen tanımı hatırlandığında, “doğal sayılarda toplama işlemi” örneğinde olduğu gibi tüm operatörlerin bu kalıba uygun olarak ifade edilemeyeceği de anlaşılmaktadır.

Anlayışın üçüncü bileşeni gösterim sistemi olarak isimlendirilen L; P problemler kümesi ve R operatörler kümesinde kullanılan her türlü grafik, sembol, simge vb. gösterimlerden oluşmaktadır. Diğer bir ifadeyle problemlerin ifade edilmesi ve çözülmesinde gerekli ihtiyacı karşılayan, operatörlerin kullanımına izin veren, cebirsel dil, geometrik çizim, doğal dil, vb. gösterim sistemleri L kümesini oluşturur (Balacheff ve Gaudin; 2002).

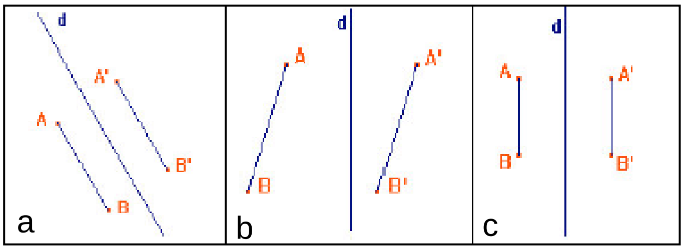
Balacheff ve Gaudin (2003); operatör ve gösterim sistemi bileşenlerinin somut olarak tanımlanmasının daha kolay olduğunu belirterek, günümüzde mevcut olan ‘bir kavramı açıklarken kullanılabilen operatörler ve gösterimler o kavramın anlamını oluşturan parçalardır’ şeklindeki yaygın tanımı kabul ettiklerini ifade etmişlerdir.

Anlayışın son bileşeni ise; işlemlerin doğruluğunu denetleyen kontrol bilgileri (∑) olarak ifade edilebilir. Seçim yapmak, karar almak ve yargıda bulunmak için gerekli bütün araçlar bu bileşeni oluşturmaktadır (Balacheff ve Gaudin; 2002). Öğrenciler problem çözerken kullanacakları işlemleri seçerler, yaptıkları eylemlerin geçerliğini denetlerler ve sonuca ulaşırlar. İşte bu üç aşamanın her biri kontrol bilgilerinin rehberliğinde gerçekleşmektedir (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Bu boyut, problemi çözmek için kullanılacak işlemlerin uygun olup olmadığına, verilen problemin çözülüp çözülemeyeceğine karar vermeyi ya da bir matematiksel kavramın anlaşılmasında rol oynayan en can alıcı öğelerin farkına varmayı sağlayan kriterlerin uygulandığı bir boyut olmasına karşın çoğu zaman üstü kapalı bırakılmıştır (Balacheff, Gaudin; 2002). Bu duruma neden olarak, kontrol bilgilerinin öğrencilerin çözümlerinde gizli olduğu ve öğrencilerin de bunları çoğu zaman farkında olmadan kullandıkları düşüncesi gösterilebilir.

Polya ve üstbiliş (metacognition) konusunda oluşturulan araştırma geleneğinin ardından, Schoenfeld (1985) kontrol bilgisinin problem çözmedeki hayati rolünü ortaya çıkarmıştır (Akt. Balacheff, Gaudin 2003). Bir eylemin ilgili mi ilgisiz mi olduğuna, bir problemin çözülüp çözülmediğine karar vermeye yarayan kontrol bilgileri muhtemelen diğer boyutlara göre daha hipotetik özellikler sergileyecektir.

Anlayış, kendisini oluşturan dörtlü ile yukarıdaki şekilde tanımlandıktan sonra, aşağıda verilen örneklerle daha anlaşılır olacağı düşünülmektedir. Aşağıdaki örnekler, Türk literatürünün aşina olmadığı cK¢ Terosinin anlayış aşamasının tanıtılması ve okuyucunun “anlayış” kavramı ile ilgili olarak bir fikir edinebilmesi adına verilmiş olup bir konu ya da kavrama özgü olarak belirlenen anlayışları içermektedir.

Simetri öğretilirken öğretmenler genellikle ayna benzetmesini kullanırlar. Ardından öğrencilerinin bir parça kağıdı ikiye katlamalarını sağlayarak her bir parçayı incelemelerini isterler. Bu durumu tartıştıktan sonra öğrencilerini, kendi matematiksel becerilerini kullanabilecekleri bir problem durumu ile karşıya bırakırlar. Örneğin öğretmen öğrencilerinden kağıt üzerinde bir doğru parçasının bir doğruya göre simetriğini oluşturmalarını isteyebilir (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002. s.99). Grenier (1988) öğrencilere bu uygulamayı yapmış ve öğrencilerin “iki doğru parçası simetrik ise paraleldirler” şeklinde bir inanışa sahip olduklarını belirlemiştir (Akt. Webber, Pesty ve Balacheff, 2002. s.99). Simetri ile ilgili olan bu inanış daha kesin olarak “paralellik anlayışı” olarak isimlendirilebilir. Şekil 1’de de görüldüğü gibi bu anlayışa sahip öğrenciler doğru parçası simetri doğrusuna paralel olduğu zaman verilen soruyu doğru çözdükleri gibi (Bkz. Şekil 1a, 1c) doğru parçası simetri doğrusuna paralel olmadığında ise hatalı sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 1b) .

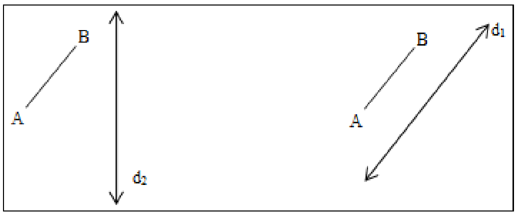


Şekil 1. Paralellik anlayışına sahip öğrencilerin çizimleri
(Webber, Pesty ve Balacheff, 2002. s.99)

Bu durumda paralellik anlayışının C_p; simetriği alınacak olan doğru parçasının, simetri doğrusunu kesmediği, ya da simetri doğrusuna paralel olduğu durumları içeren problemler kümesi (P_p); bu problemleri çözerken kullanılacak olan paralel, yatay, eğik ve dikey doğru parçaları, noktalar, diklik ilişkisi, paralellik ilişkisi, kesişme ilişkisi bilgileri (R_p); nokta, doğru parçası, doğru, diklik, kesişim ve orta noktaların gösterimlerini içeren çizimler (L_p) ve doğru parçası ile bu doğru parçasının bir doğruya göre simetriği alınarak elde edilen görüntüsünün şekil ve büyüklüğünün aynı olması bilgisi ($\sum_p$) bileşenlerinden oluşmaktadır.

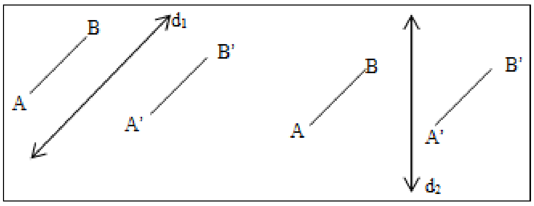
Bu örneği bu çalışmaya göre uyarlayacak olursak;

Ö1 öğrencisinin P_1 problemini çözmesi istenir. Çözümü incelenerek öğrencinin kullandığı en belirgin bilgi R_1 olarak ifade edilir. Bu durumda



Şema 1. Paralellik anlayışını belirlemeye yönelik bir problem

P_1: Yukarıdaki şekilde [AB] 'nın d_1 ve d_2 doğrularına göre simetriğini çiziniz.



Şema 2. Ö1'in P_1'e verdiği cevap

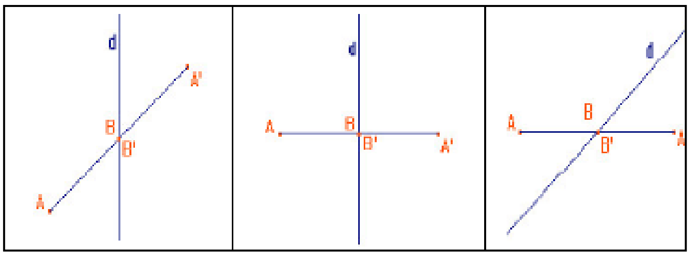
R_1: Eğer iki doğru parçası simetrik ise paraleldirler,

L_1: Doğru, doğru parçası çizimleri,

$\sum_1$: Doğru parçası ile simetriğinin şekilleri ve uzunlukları aynıdır,

şeklinde özelleştirilebilir.

Simetri ile ilgili olarak belirlenen diğer bir anlayış "merkezi simetri" anlayışıdır (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Bu anlayışa sahip bir grup öğrenci ise "bir doğru parçası ile simetri doğrusunun kesişim noktası simetri merkezidir" inanışına sahiptirler (Bkz. Şekil 2).



Şekil 2. Merkezi Simetri anlayışına sahip öğrencilerin çizimleri (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002. s.99)

O halde merkezi simetri anlayışı C_{ms} simetriği alınacak olan doğru parçasının, simetri doğrusunu kestiği durumları içeren problemler kümesi (P_{ms}); bu problemleri çözerken kullanılacak olan paralel, yatay, eğik ve dikey doğru parçaları, noktalar, kesişme ilişkisi bilgileri (R_{ms}); nokta, doğru parçası, doğru, diklik, kesişim ve orta noktaların gösterimlerini içeren çizimler (L_{ms}) ve doğru parçası ile bu doğru parçasının bir doğruya göre simetriği alınarak elde edilen görüntüsünün şekil ve büyüklüğünün aynı olması bilgisi, her iki uç noktanın eşit uzaklıkta olması gerektiği bilgisi ve doğru parçası ile doğrunun dik olma durumu ($\sum_{ms}$) bileşenlerinden oluşmaktadır.

1.8.1.2. cK¢ Teorisine Göre Anlayışın Özellikleri

Balacheff (1995) anlayışın iki özelliğinden bahsetmektedir.

1. Anlayışın geçerli olduğu bir alan vardır: Doğru bir anlayış geçerlilik alanı değiştiğinde hatalı bir anlayış haline gelebilir. Bunun tersi de doğrudur. Örneğin:

C_1: Bir sayının karesi kendisinden büyüktür.

olmak üzere bu anlayışı oluşturan bileşenler;

P_1: Tam sayıların karesini almayı gerektiren sorular

R_1: Kare alma işlemi

L_1: Üslü sayıların gösterimi

$\sum_1$: Tekrarlı çarpma

olarak verilebilir.

Bu anlayış; tam sayıların karesini almayı gerektiren soruların (P_1) çözümünde kullanıldığında doğru sonuç verirken, R_1, L_1, $\sum_1$ değişmeksizin

P_2: Reel sayıların karesini almayı gerektiren sorular

olarak değiştirildiğinde C_1 anlayışı geçerliğini yitirmektedir. Çünkü anlayışın geçerli olduğu tam sayılar kümesi değişmiştir. [0, 1] aralığındaki reel sayılar düşünüldüğünde, bu aralıktaki rasyonel sayılar için bu anlayış geçerli olmayacaktır. Bu durumda doğru bir anlayış geçerli olduğu alan değiştiğinde hatalı bir anlayış durumuna gelebilmektedir.

2. Anlayış ve operatör kavramları esnektir. Bir anlayış (daha geniş) başka bir anlayışın operatörü durumuna gelebilir. Örneğin "C_1: İki ondalık sayı toplanırken, virgülden önceki ve sonraki sayılar ayrı ayrı toplanır ve virgülle ayrılır" anlayışı, "ondalık sayı, iki tam sayının virgül ile ayrılmış halidir" şeklinde ortaya çıkabilecek C_2 anlayışının operatörü durumuna gelebilir. Bu durumda

C_2: Bir ondalık sayı iki tam sayının virgül ile ayrılmış halidir,

şeklinde alındığında

$C_1=R_2$: İki ondalık sayı toplanırken, virgülden önceki ve sonraki sayılar ayrı ayrı toplanır ve virgülle ayrılır

anlayışı bu yeni anlayışın operatörü olarak alınabilir.

Bu durum bir anlayışın başka bir anlayışın operatörü olabileceğini, anlayış ve operatör kavramlarının bazı durumlarda kesin olarak ayrılamayacağını ortaya koymaktadır.

Yukarıda anlayışın bileşenleri ve özellikleri tanımlanmıştır. Bu tanımlamalardan sonra anlayışın gözlemlenebilir bir eylem olmadığını, onu gözlemlenebilir kılan şeyin bileşenlerinin bir gözlemci tarafından belirlenmesi olduğunu belirtmek gerekmektedir. O halde anlayışı ortaya çıkarmak için kullanılan problemler, öğrencilerin bu problemleri çözmek için kullandıkları her türlü işlem, problemlerin ve işlemlerin anlaşılmasını destekleyen gösterim sistemi ve öğrencinin çözümünü dayandırdığı kontrol bilgilerinin bir gözlemci tarafından belirlenmesi, o öğrencilerin anlayışlarının ortaya çıkarılmasında kullanılabilir.

Balacheff (2000)'e göre öğrencilerin davranışlarını analiz ederken, bu davranıştaki çelişkinin (tutarsızlığın) varlığı ve hatalı zihinsel yapı gözlemcinin bakış açısıyla ele alınmalıdır. Öğrencilerin bir problemi çözerken mantıklı ve doğrulanabilir bilgiyi kullandıkları bilindiğinde, öğrencilerde var olan bu hatalı zihinsel yapıların da özel durumlara uygulandığında mantıklı olarak görülebileceği fikri ortaya çıkmaktadır. Örneğin; bir öğrencinin $(A/B)\cap(A/C)=A/(B\cap C)$ eşitliğini kullanması *(2x5)+(2x8)=2x(5+8)* eşitliğini kullanmasından farksızdır. Burada önemli olan gözlemcinin, bu eşitliği öğrenci için mantıklı ve doğrulanabilir kılan anlayışı ortaya çıkarabilmesidir.

1.8.1.3. cK¢ Teorisinin Anlayış Aşamasının Seçilme Nedenleri

Literatür incelendiğinde öğrencilerin bilgiyi nasıl yapılandırdığı ve zihinlerinde neler olup bitiğini açıklamaya çalışan araştırmalara rastlanmıştır. Bu araştırmalar aşağıda maddeler halinde kısaca açıklanmıştır;

a) APOS Teorisi

Öğrencilerin matematik kavramları nasıl yapılandırdıklarını anlamaya çalışan araştırmacılardan biri de Ed Dubinsky'dir. Piaget tarafından küçük çocuklar için geliştirilmiş olan bilişsel yapılanma (cognitive construction) teorilerine dayanarak, Dubinsky matematiksel bilginin süreç içerisinde nasıl içselleştirilebileceğini tasvir etmek ve sonrasında bu bilgiyi daha ayrıntılı bilişsel şemalarda yer alan zihinsel nesneler olarak özetlemek için APOS teorisini önermiştir (Tall, 1999). Piaget'nin, çocukların öğrenmelerinde rol oynayan soyutlama çalışmalarından, yansıtıcı soyutlama (reflective absraction) üzerindeki çalışmasının üniversite öğrencilerinin matematik öğrenmelerine uyarlanması fikrine dayanan bu teori, öğrencinin verilen bir problemin üstesinden gelirken matematiksel bilgisini kurmasının belli aşamalarda gerçekleştiği varsayımına dayanmaktadır. APOS adı da bu aşamaların baş harflerinden gelmektedir. Bu aşamalar, *hareket-eylem* (action), *süreç* (process), *nesne* (object) ve bunların organize edildiği *şema* (shema) olarak ifade edilmektedir (Dubinsky ve McDonald; 2001).

APOS teorisi matematiksel bilginin, matematiksel durumları anlayabilmek ve problem çözmek için zihinsel eylemler, süreçler ve nesnelerin bir araya gelmesi ve düzenlenmesi ile oluşan şemalar aracılığı ile bireyin zihninde oluştuğu varsayımıyla başlamaktadır (Dubinsky ve McDonald; 2001).

Bir *eylem*, sürecin nasıl uygulanacağı üzerine adım-adım yönergelerin zorunlu ve dışsal olarak birey tarafından algılanmış nesnelere dönüşümüdür. Bir eylem tekrarlandığı zaman, birey onu kendi üzerinde yansıtır ve aynı çeşit eylemi uygularken düşünmesi bir *süreç* olarak adlandırılan bir iç zihinsel yapılanma oluşturur; fakat artık dışsal bir uyarıya gereksinimi yoktur. Bir birey uygulama sürecini, onu gerçekte uygulamaksızın düşünebilir ve böylece onu ters çevirmeyi veya onu başka süreçlerle birlikte düzenlemeyi düşünebilir. *Nesne;* birey sürecin ve onu harekete geçiren dönüşümlerin bütünüyle farkında olduğu zaman yani süreçten yapılandırılır (Dubinsky ve McDonald, 2001). Başka bir ifadeyle süreç bir nesne olarak muhafaza edilir de denilebilir (Yeşildere, 2006). Son olarak, belirli bir matematiksel kavram için *şema*, bu kavramı içeren bir problem durumuyla başa çıkabilen bireyin biriktirdiği ve düşüncesinde bir iskelet oluşturabilmek için bazı genel ilkelerle bağlanmış olan eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemalardır.

O halde APOS Teorisinin, bilginin insan zihninde nasıl yerleştiğini incelediği söylenebilir. Buna göre birey bilgi ile ilk karşılaştığında (eylem) bilgiyi özümsemek amacıyla kullanmaktadır. Bilginin gerçek anlamından habersiz olarak bir nevi onu keşfetmektedir. Süreç aşamasında ise birey herhangi bir uyarıcıya gerek kalmadan eylemi uygulayarak bilgiyi içselleştirmektedir. Daha sonra birey bu süreci nesnelere dönüştürerek akılda tutmaktadır. Birbiri ile bağlantılı olan eylemler, süreçler ve nesnelerin bireyin zihninde koordine edilmesiyle ise şemalar oluşmaktadır.

b) RBC Teorisi

Matematiksel bilginin öğrenciler tarafından nasıl oluşturulduğunu ve nasıl soyut hale getirildiğini araştıran Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001), soyutlama sürecini daha önce oluşturulmuş matematiksel bilgiler arasında yeni ilişkiler kurulmak suretiyle yeniden düzenlenerek yeni bir matematiksel yapı oluşturulması olarak tanımlamaktadırlar Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001); matematiksel soyutlama ve bilgi oluşturma sürecini açıklayan RBC teorisinin adını; *tanıma* (Recognizing), *kullanma* (Building with) ve *oluşturma* (Constructing) epistemik eylemlerinin ilk harflerinin bir araya gelmesinden aldığını belirtmişlerdir. Epistemik eylemler; bilginin kurulumu ile ilgili gözlenebilen ve tanımlanabilen zihinsel eylemlerdir (Hershkowitz, Hadas, Dreyfus veSchwarz, 2007).

Bu epistemik eylemlerden *tanıma*; kişinin, üzerinde çalıştığı problemle ilgili olarak daha önceden sahip olduğu bilgisini kullandığında meydana gelmiş olur (Hershkowitz ve diğ., 2007). Bilinen bir matematiksel yapıyı tanıma, kişinin verilen bir matematiksel durumun özünde olan bir yapının yani bilginin farkına varmasıyla gerçekleşir (Özmantar, Monaghan; 2006).

Kullanma, verilen bir problemin çözülmesi, bir gerekçenin doğrulanması gibi bir hedefi gerçekleştirmek için önceden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılmasıdır (Schwarz, Dreyfus, Hadas, Hershkowitz, 2004; Hershkowitz ve diğ, 2007). Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001)'a göre kullanma sürecinde öğrenci; problemin uygulanabilir bir çözümünü oluşturmak için mevcut yapısal bilgisini kullanır. *Kullanma* genellikle bir problem çözme, bir matematiksel durumu anlama ve bu durumu açıklama veya bir süreç üzerinde dikkatle düşünme gibi bir hedefi başarmaya odaklanıldığında gerçekleşir. Bu hedefi gerçekleştirmek için öğrenciler stratejilerin, kuralların veya teoremlerin yardımına başvurabilir. Öğrenciler bir hedefi başarmak için daha önceki aktiviteler aracılığıyla farkına vardıkları yapıları kullanırlar. *Kullanma*, öğrenciye ipucu verilmesi gibi bir kaynağın öğrenciye hatırlatılması ile de gerçekleşebilir (Akt. Yeşildere, 2006).

RBC soyutlama teorisi, *oluşturma* epistemik eyleminin, matematiksel soyutlamanın merkezi olduğunu öne sürmektedir. Bu eylem, yeni bir bilgi oluşturmak için, önceki bilgilerin bir araya getirilmesi ve birleştirilmesinden oluşmaktadır (Hershkowitz ve diğ, 2007). *Oluşturma*, nadir görülen ancak en önemli eylemdir. Öğrenene tanıdık gelen yeni bir yapı üretmek için önceki bilgilerin birleşmesiyle oluşur. Oluşturma ve kullanma eylemlerini ayıran özellikler, "yenilik" ve "güdü"'dür. Kullanma eyleminde öğrenciler sahip oldukları bilgilerin üzerine yenilerini koymazken, oluşturma eylemi ise önceden kazanılmış bilgilerin bir araya gelerek yeni yapıların ortaya çıkması ile ilgilidir. Bu süreçte etkinliğin amacı çoğunlukla yeni bir yapı oluşturmadır ve hatta yeni bir durum ortaya koymak amaca ulaşmak için zorunludur. Teori; RBC eylemlerinin iç içe olduğunu iddia eder: kullanma eylemi oluşturma eyleminin içine yuvalanmıştır ve tanıma eylemi kullanma ve oluşturma eylemlerinin içine yuvalanmıştır (Özmantar ve Monaghan; 2006).

Özetle, RBC Teorisine göre öğrenciler karşılaştıkları bir matematiksel bilgiyi tanır, daha önceki aktiviteler aracılığıyla farkına vardıkları bilgileri kullanır ve daha önce sahip oldukları bilgileri bir araya getirip bunlar arasında yeniden bir düzenleme yaparak oluşturdukları bilgiyi soyutlarlar. Bu durumda öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerini tanıma, kullanma ve oluşturma şeklinde isimlendirilen, gözlemlenebilir eylemlerle gerçekleştirdikleri söylenebilir.

c) Kavram Görüntüsü Kavram Tanımı

Araştırmacılar öğrencinin zihninde oluşan kavramların formal tanımlarıyla ilişkisini inceleyerek kavram tanımı ve kavram görüntüsü gibi iki farklı tanıma ulaşmışlardır (Tall ve Vinner,1981; Vinner, 1983). Vinner (1983) kavram tanımını, o kavramı dolambaçsız ve doğru olarak açıklayan kelimeler bütünü olarak ifade etmektedir. Kavram görüntüsü ise, o kavramla ilgili zihindeki bütün zihinsel yapılardır ki bu yapılar o kavrama ait özellikler ve oluşumlarla ilgili bütün zihinsel görüntüleri içermektedir, şeklinde tanımlanmaktadır (Tall ve Vinner,1981). Kavram görüntüsü değişken bir yapıdadır. Yıllar boyunca yaşanan çeşitli deneyimler sonrasında değişebilir, olgunlaşabilir (Tall ve Vinner,1981).

Tanımlardan da açıkça anlaşılacağı üzere, kavram tanımı; öznel olmayan, herkes tarafından kabul gören "*kitabi*" olarak niteleyebileceğimiz bilgiyi tanımlarken, kavram görüntüsü ise bireye göre farklılık gösteren, öznel bilgileri ifade etmektedir ki bu öznel bilgiler her zaman doğru olmayabilir.

Öğrenciler her zaman kavramın tanımından yola çıkarak muhakeme yapmazlar, kavram görüntüsünü kullanırlar. Öğrencilerin sahip oldukları kavram görüntülerinin her zaman tanımına uymadığı gerçeği (Akkoç, 2006), öğrencilerin kullandıkları kavram görüntülerinden hareketle, o kavramı nasıl oluşturdukları sorusuna cevap aranabileceği ihtimalini doğurmaktadır.

d) Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin zihinlerinde oluşturdukları bilgileri anlama ve modellemeye yönelik bir diğer girişim de kavram yanılgılarıdır. Kavram görüntülerinin yanlış olanları üzerine yoğunlaşan bu yaklaşım daha ziyade öğrencinin zihninde oluşan ve formal olarak doğru olmayan kalıpları ortaya çıkarmayı hedeflemektedir. Rasmussen'in (1998) belirttiği gibi, herhangi bir konuda öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri bilmek, öğrenme üzerine yapılan çalışmalar için önemli bir adımdır.

Bu bağlamda araştırmacılar, öğrencilerin kavramsallaştırma süreçlerini ortaya koymak için bu süreçte geliştirdikleri yanılgıları incelemektedirler. "bir kişinin bir konuyu veya problemi kendisine mantıklı gelecek şekilde anlaması fakat bu alandaki uzman bir kişinin kavramsal anlamasıyla çelişmesi" (Baki, 2008, s.281) "sistemli bir biçimde hata üreten algı biçimi" (Smith, diSessa ve Roschelle, 1993) (Akt, Zembat, 2008, s.42) gibi çeşitli şekillerde tanımlanan kavram yanılgılarında ortak nokta öğrencilerin algılarıdır (conception). Öğrencilerin bir kavrama ait olarak sahip oldukları algıların anlaşılmasının, öğrenmelerin nasıl gerçekleştiği hususunda araştırmacılara ışık tutacağı düşünülmektedir.

e) Kavramsal-İşlemsel Öğrenme

Öğrencilerin matematiksel kavramları anlamaları üzerine yapılan araştırmalar, bilgiyi, kavramsal ve işlemsel bilgi olarak iki anlamlı kısma ayırarak ele almışlardır. Öğrencilerin kavramsallaştırma sürecinde bu iki çeşit bilgiye sahip olma durumlarından yararlanarak zihinlerinde ne olduğu sorusuna cevap aranmıştır.

Kavramsal bilgi bireyin oluşturduğu anlamsal ilişkilerdir. Burada anlam önemlidir ve bu anlam bireyin yeni bilgiyi önceki bilgileriyle bütünleştirerek kendine mal etmesi olarak düşünülebilir (Ersoy, 2003; Olkun ve Toluk-Uçar, 2006). Kavramsal bilgisi olan öğrenci sadece kavramın adını bilmekle kalmaz, aynı zamanda kavramlar arasındaki geçişleri ve ilişkileri de görebilir (Baki, 2008). Öğrencinin karşılaştığı bir problemde hangi işlemi yapacağına karar verebilmesi de kavramsal öğrenme ile ilişkilidir. Bölme işleminin gruplama ya da paylaştırma anlamını fark edemeyen bir öğrencinin "20 litre sütü her biri 5'er litre olacak şekilde kaç şişeye paylaştırabiliriz" sorusuna anlamlı cevap vermesi beklenemez. Başka bir örnek olarak, onluk sistemle ilgili kavramsal öğrenmesi gerçekleşmiş bir bireyin, onluk sistem yerine farklı bir sistemin kullanılması durumunda hangi rakamları kullanacağına karar vermesi, o sisteme ait basamak tablosunu oluşturabilmesi ve yine o sistemde dört işlemi yapabilmesi beklenebilir.

Kavramsal öğrenme alışkanlığına sahip olan öğrenci, problem çözmede ve matematiksel bilgi üretmede kendi yaratıcılığını kullanabilen bir problem çözücü gibidir. Matematiği birbirine bağlı kavramlar ve düşünceler ağı olarak görür ve bu matematiksel kavramları dışarıdan kopya etmek yerine bizzat kendisi anlamaya çalışır (Baki, 2008).

İşlemsel bilgi; kural ve işlemlerde izlenen yolları, matematiksel bilgiyi temsil etmekte kullanılan simgeleri içerir. İşlem bilgisi matematikte sıradan problemleri ve alıştırma türü soruları çözmede kullanılır (Ersoy,2003). Ancak, kişinin işlem yapabilmesi için her zaman bu kuralların altında yatan anlamları, sembollerin temsil ettiği düşünceleri anlaması zorunluluğu yoktur (Olkun ve Toluk-Uçar, 2006). $2x-5=12$ denkleminin çözüm kümesinin bulunması işlem bilgisine yönelik bir örnek olarak verilebilir.

Kavramsal bilgi işlemsel bilginin altında yatan anlamı ortaya çıkarır ve onu destekler. Bu iki bilgi çeşidi arasındaki geçiş ve ilişkilerin kuvvetli olması önemlidir.

Özetle, kavramsal ve işlemsel öğrenme boyutunda öğrencinin zihninde olup biteni anlamaya dayalı çalışmaların, öğrencinin bilgisini; bilgiyi sahiplenmesi ve diğer konularla ilişkilendirmesi açısından ele aldıkları söylenebilir. Bazı bilgiler gerçek anlamda öğrenilip diğer bilgilerle ilişkilendirilirken (kavramsal öğrenme) bazıları ise öğrenci tarafından ezberlenmektedir (işlemsel öğrenme).

f) Zihinsel Modeller

Zihinsel modeller, genellikle bilişsel sunumlar (Van der Veer, 2000) veya dünyada meydana gelen gerçek ya da sanal olayların insan zihninde algılanması ve kavramsallaştırılması sonucunda ortaya çıkan içsel sunumlar (Franco ve Colinvaux, 2000; Örnek 2008) olarak tanımlanırlar. Ayrıca zihinsel modeller herhangi bir olguyu tanımlama, açıklama, tahmin etme vb. işlemler için kullanılırlar (Buckley ve Boulter, 2000; Örnek, 2008) ve insanlara düşüncelerini kullanırken rehberlik ederler (Norman, 1983). Bu işlevleri ile ilişkili olarak zihinsel modellerin bazı temel özellikleri bulunmaktadır: zihinsel modeller yeni bilgilerin oluşturulmasında etkindirler yani *üreticidir*ler (Vosniadou ve Brewer, 1992), *zihinsel modeller sentezdirler* (Franco ve Colinvaux, 2000), zihinsel modeller değişmez değil *geliştirilebilirler* (Franco ve Colinvaux, 2000), zihinsel modeller *sessiz bilgiler içeri*rler (Örnek, 2008), zihinsel modeller insan zekâsının ürünleri olduğu için *bireye özgüdürler* (Ünal ve Ergin, 2006; Clement, 2008).

Zihinsel modeller, bireyin akıl yürütme becerilerini ve bilgilerini yeni ve benzer durumlara taşıma yeteneklerini ortaya çıkarırken, bilginin nasıl organize edilip sınıflandırdığını, zihninde nasıl canlandırdığını ve nasıl şekillendirdiğini görmemize yardımcı olmaktadır (URL-4). Bu duruma ek olarak, bireylerin sahip olduğu zihinsel modeller hem onların nasıl öğrendiğinin bir göstergesidir (Ünal ve Ergin, 2006) hem de kalıcı öğrenmelerin temelinde yatmaktadırlar (Duit ve Glynn, 1996, Akt. Ünal ve Ergin, 2006). Buna göre etkili öğretimin, öğrenenlerin sahip olduğu zihinsel modellerin bilinmesi/tanınması ile doğrudan ilişkili olduğu düşünülmüş ve insana özgü ve insan zihninde olan bu modellerin/yapıların belirlenmesi birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Zihinsel modelleri konu alan çalışmalar incelendiğinde özellikte somut varlıklarla ilişkili kavramlara odaklanan çalışmaların olduğu (örneğin Vosniadou ve Brewer, 1992 (Dünya); Vosniadou, Skopeliti ve Ikospentaki (2004) (Dünya); Nobes ve Panagiotaki (2007) (Dünya); Samarapungavan, Vosniadou ve Brewer (1996) (Dünya, Güneş ve Ay); Shen ve Confrey (2008) (Güneş sistemi)) ve bu çalışmalarda zihinsel model belirlemek amacıyla genellikle görsel sunumlara (şekille ifade etme) veya benzetmelere odaklanıldığı görülmektedir. Ayrıca bu çalışmalardan, zihinsel model belirlemek amacıyla farklı konularda fonksiyonel olarak kullanılabilecek bir yapının bulunmadığı ve konuya özgü temel yapıların oluşturulduğu belirlenmiştir.

Bireylerin zihinsel modellerini kendilerinin yapılandırdıklari ve kullanıldıkları, ayrıca olgu ve süreçlere ilişkin algılamalarının kendi ifadeleri ve eylemlerinden hareketle ortaya çıktığı söylenebilir (Kurnaz ve Değermenci 2012). Bireyin deneyimlerini yansıtan ve birey tarafından tekrar düzenlenebilen veya yeni karşılaşılan durumlara göre yeniden oluşturulabilen zihinsel modellerden, öğrencilerin matematiksel anlamalarını açıklamak için yararlanılabileceği (English ve Halford, 1995) düşünülmektedir.

Yukarıda verilen çalışmalar incelendiğinde bu araştırmalardan APOS ve RBC Teorilerinin bireyin zihninde bilginin nasıl soyutlandığını, bilginin oluşma süreçlerini inceleyerek açıklamaya çalıştıkları söylenebilir. Ancak bu süreçler neticesinde öğrenenlerin sahip oldukları anlayışlardan ziyade, bireyin bilgiyi soyutlarken hangi süreçte olduğu ya da bu süreçlerde oluşabilecek eksiklikler üzerinde durulabileceği düşünülmektedir. Ayrıca bu teorilerin kullanıldığı araştırmaların genellikle bir kavram ya da konu ile ilgili olarak yapıldığı (Mathews ve Clark, 2007, Altun ve Yılmaz, 2008; Katrancı, Yılmaz ve Kahraman, 2009) ve böylece soyutlamaları daha net bir şekilde ortaya koyacağı söylenebilir (Dubinsky ve McDonald, 2001).

Yukarda bahsedilen araştırmalardan bazıları ise öğrencinin zihnindeki bilgi ile formal matematiksel bilgi arasındaki ilişkiyi karşılaştırarak öğrencinin kullandığı kavram görüntülerinden hareketle, o kavramı nasıl oluşturdukları sorusuna cevap aramaktadırlar (Kavram Görüntüsü - Kavram Tanımı). Bu araştırmalarında kavram odaklı olduğu (Akkoç, 2006; Gülkılık, 2008; Dede ve Soybaş, 2011) ve bizim amacımıza hizmet etmeyeceği düşünülmüştür.

Anlayış kavramı, çok eski bir geçmişi olmamasına rağmen bazı araştırmaların teorik çerçevesini oluşturmuştur (Balacheff ve Gaudin, 2003; Yazgan, 2006; Maracci 2006, Miyakawa, 2004, Mesa 2004). Yazgan (2006) öğretilen içeriğin öğrencide ne derecede yapılandığını ortaya çıkarma açısından öğrenci anlayışlarının cK¢ teorisi ile analiz edilmesinin önemli olduğunu vurgularken, bu model sayesinde öğrenci anlayışları ile ilgili olarak daha geniş bir perspektiften yorumlar yapılabileceği sonucuna ulaşmıştır.

Bunlara ek olarak öğrencilerin bilgiyi nasıl yapılandırdığı ve zihinlerinde neler olup bittiğini açıklamaya çalışan araştırmaların konu bağımlı olduğu, daha özel durumları incelediği başka bir ifadeyle öğrencilerin bir kavrama ait olarak bilgiyi zihinlerinde nasıl kurdukları, nasıl soyutladıkları veya nasıl ifade ettikleri üzerinde durdukları söylenebilir. Literatürde anlayış aşamasının da bu şekilde kullanıldığı görülmektedir. Ancak bu araştırma öğrencilerin farklı konularda sahip oldukları matematiksel anlayışları, öğrencilerin kullandıkları operatörler aracılığı ile belirlemeyi amaçlamaktadır. Bu operatörler öğrencilerin zihinlerindeki bilgileri somut bir şekilde ifade etmemizi sağlayacağından bu model sayesinde öğrencilerin sahip oldukları genel matematiksel anlayışların daha sistematik bir şekilde belirleneceği düşünülmektedir. Bu nedenle cK¢ teorisinin ilk aşaması olan anlayış aşamasının bu amaca cevap verebileceği düşünülmektedir.

1.9. İlgili Literatür

Bu bölümde literatürde tez konusu ile ilgili olduğu düşünülen çalışmalar özetlenmiş ve bu araştırma açısından çalışmalar değerlendirilmiştir. Araştırmada sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel anlayışlarını cK¢ Teorisinin anlayış aşamasına göre incelemek amaçlandığından, cK¢ Teorisinin anlayış aşamasının kullanıldığı ve öğrencilerin bilgilerinin genellendiği araştırmalara ulaşılmaya çalışılmıştır. Yapılan literartür taramasında anlayışın kullanıldığı sınırlı sayıda araştırmaya rastlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin genel matematiksel anlayışlarını belirleyen araştırmaya rastlanmamıştır. Ancak yanlış matematiksel anlayışları (kavram yanılgıları) veya yapılan yanlışları sınıflayan araştırmalar da bu konuda fikir edinmemizi sağlayacaktır. Özetle bu bölümde önce cK¢ Teorisinin anlayış aşamasına yönelik ulaşılan literatürün ardından kavram yanılgılarının ve/veya yanlışların sınıflanması ile ilgili kaynaklar değerlendirilecektir.

1.9.1. cK¢ Teorisinin Anlayış Aşamasına Yönelik Çalışmalar

cK¢ teorisinin anlayış aşamasının kullanıldığı çalışmalar aşağıda özetlenmiştir;

Öğrenenlerin matematiksel anlayışlarını belirlemek amacıyla yürütülen araştırmalardan biri ülkemizde yapılmıştır. Yazgan (2006), onuncu sınıf öğrencilerinin geometrik yer kavramı ile ilgili olarak sahip oldukları anlayışları araştırmıştır. Araştırmasını 12 öğrenci ile yürütmüştür. 2'şer olarak gruplandırdığı öğrencilere geometrik yer kavramı ile ilgili olarak 5 soru yöneltmiştir. Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevapları, cK¢ teorisine uygun olarak önceden hazırladığı analiz ile karşılaştıran ve yorumlayan Yazgan, öğrencilerin "geometrik yer" anlayışlarını iyi yapılandırmadıklarını, kavram yanılgılarına sahip olduklarını tespit etmiştir. Bu teorinin kendisine öğrenci anlayışları ile ilgili olarak daha geniş yorum yapabilme fırsatı sağladığını ifade etmiştir.

Bir diğer araştırma Maracci (2006)'nin lisans ve lisansüstü öğrencileri üzerinde yaptığı çalışmasıdır. Bu çalışmada öğrencilerin, lineer cebirin "Vektör Uzayı" konusu ile ilgili olarak karşılaştıkları zorluklar ve bu konu ile ilgili problemleri çözerken yaptıkları hataları belirlemek ve incelemek amaçlanmıştır. Maracci çalışmasında, matematik bölümündeki 8 birinci sınıf, 4 son sınıf ve 3 doktora öğrencisi ile klinik mülakatlar yapmıştır. Zaman sınırlamasının olmadığı bu mülakatlarda öğrencileri vektör uzayı ile ilgili iki ya da üç problem durumu ile karşılaştırmıştır. Araştırmacı bu çalışmasında "öğrencilerin konu ile ilgili olarak karşılaştıkları zorlukları, kullandıkları operatörler ve kontrol bilgileri açısından yorumlamak mümkün müdür?" sorusuna cevap aramıştır. Bu nedenle zorluklar ve hatalar cK¢ ile analiz edilirken anlayışın iç tutarlığını sergileyen operatör ve kontrol bilgilerine vurgu yapılmıştır. Araştırma ortaya çıkan zorlukların bazılarının operatörler ve kontrol bilgilerince yorumlanabileceğini göstermiştir.

Diğer bir araştırma Webber, Pesty ve Balacheff (2002) tarafından yapılmıştır. Öğrencilerin anlayışlarını teşhis etmek ve modellemek amacıyla anlayış aşamasını kullandıklarını ifade ettikleri çalışmalarında "yansıma" konusu ile ilgili olarak tespit ettikleri anlayışlardan bahsetmişlerdir. Öğrencilerin "eğer iki doğru parçası simetrikse, paraleldir" şeklindeki inançlarını bir yansıma anlayışı olarak nitelendiren araştırmacılar bu anlayışa “paralellik anlayışı” adını vermişlerdir. Diğer bir yansıma anlayışı olarak adlandırdıkları “merkezi simetri” anlayışına sahip bir grup öğrenci ise bir doğru parçası ile simetri doğrusunun kesişim noktasını simetri merkezi olarak düşünmüşlerdir.

Başka bir çalışma ise Miyakawa (2004) tarafından yürütülmüştür. Geometri konularından “yansıma simetrisi” ile ilgili olarak yürütülen çalışmada matematiksel bilginin ispat gerektiren sorulardaki işlevi incelenmiştir. Bu amaçla, aynı kuralı kullanmayı gerektirecek şekilde oluşturulan çizim ve ispat gerektiren problemlerin sorulduğu 25 9. sınıf öğrencisi, biri 3 kişilik olacak şekilde 11 grup haline getirilerek gözlemlenmiştir. Fransa’da yürütülen çalışmada, öğrencilerin beraber çalışmaları ve sorulan soruya bir cevap vermeleri istenmiştir. Gözlemciler her grubun sergiledikleri davranışları not almışlardır. cK¢ modelini analiz aracı olarak kullandığını belirten araştırmacı bu modelin yalnızca ispatları değil aynı zamanda öğrenci ürünlerinin ve davranışlarının da epistemik bakımdan analizinde kesin bir bakış açısı kazandırdığını belirtmiştir. Çalışma sonunda; öğrencilerin diklik ve eşit mesafenin gerekliğini bilerek simetriyi doğru olarak çizebilmelerinin, ispat yaparken kuralı uygun olarak kullanabildikleri anlamına gelmediği sonucuna ulaşılmıştır.

Diğer bir araştırma ise Mesa (2004) tarafından gerçekleştirilmiştir. “7. ve 8. sınıf örnek bir ders kitabındaki problemlerin ve alıştırmaların çözümlerinin sebep olduğu fonksiyon anlayışları nelerdir?” sorusuna cevap arayan araştırmacı; 15 ülkedeki 24 ilköğretim ikinci kademe ders kitaplarında bulunan fonksiyonlar konusu ile ilgili alıştırma ve problemleri Balacheff’in cK¢ Teorisinin anlayış aşamasına göre incelemiştir.

Yukarıda açıklanan araştırmaların bir ortak noktası, konu ya da kavrama odaklı olmalarıdır. Oysa bu çalışma farklı konularda ortaya çıkabilecek benzer genel anlayışları belirlemek amacını taşımaktadır. Bir örneklem üzerinde yapılan araştırmaların ortak yanı ise, teoride bununla ilgili herhangi destekleyici bir açıklama bulunmamakla birlikte, problemlerin öğrencilere bireysel olarak değil de grup çalışması şeklinde uygulanmış olmasıdır. Bu çalışmada, öğretmen adaylarının matematiksel anlayışları belirlenirken veriler bireysel olarak toplanmıştır. Grup çalışmalarında farklı düşünme yapılarındaki öğrenciler bir araya gelebileceğinden bu durumun kullanılabilecek operatörleri etkileyeceği düşünülmüştür. Bu nedenle öğrencilerin verilen soruları bireysel olarak cevaplamaları istenmiştir. Böylece en iyi çözümü elde etme adına yapılan grup tartışmaları sonucunda, grup elemanlarının bireysel olarak yaptıkları çözümler sırasında kullanmaları muhtemel operatörler engellenmemiş olmaktadır. Bunun sonucu olarak da operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilecek farklı bir anlayışın oluşması önündeki engelin de giderilmiş olacağı düşünülmektedir.

1.9.2. Kavram Yanılgılarının veya Yanlışların Sınıflandırıldığı Çalışmalar

Önceki bölümlerde de değinildiği üzere öğrencilerin anlayışları doğru ve yanlış anlayışlar olarak iki kategoride ele alınabilir. Bu kategorilerden "yanlış anlayışlar" literatürde yer alan kavram yanılgıları ile örtüştüğünden bu bölümde kavram yanılgılarının veya yanlışların sınıflandırıldığı çalışmalar tanıtılmıştır.

Literatür incelendiğinde kavram yanılgıları üzerine birçok çalışma yapıldığı görülmektedir. Ancak öğrencilerde meydana gelen yanılgıları veya yanlışları genel başlıklar altında toplayan araştırmaların sayısı oldukça azdır. Bu araştırmalar aşağıda açıklanmıştır:

Öğrencilerin genel olarak sahip oldukları yanılgıları sınıflandıran çalışmalar:

Öğrencilerin genel olarak ne tür yanılgılara sahip oldukları Committee of Undergraduate Science Education (1996) tarafından belirlenmiştir (Akt. Yağbasan ve Gülçiçek, 2003, s.111). Bu sınıflama sonucunda yanılgılar 5 başlık altında toplanmıştır:

1. *Deneyimsiz kanılar*: Günlük hayat tecrübelerinin sonucunda oluşan yanılgılardır. Çoğu kişinin yerin altındaki suların akış şeklinin, yeryüzündeki akarsular gibi olduğuna inanması gibi.

2. *Bilimsel olmayan inançlar*: Öğrenciler tarafından bilimsel eğitimden farklı, uydurma kaynaklardan öğrenilen bilgilerin sebep olduğu yanılgılardır.

3. *Kavramsal yanlış anlamalar*: Bilimsel bilgilerin, öğrencilerin zihinlerinde belli bir düzende yapılanamaması sonucu kendilerini gösterirler. Öğrenciler, bu karışıklıklara bir çözüm üretmek amacıyla yanlış ve zayıf modeller geliştirirler. Bunun bir sonucu olarak, öğrenciler, kavramlar hakkında kuşku duyarlar.

4. *Yanlış benimseme*: Gerçek kavram yanılgıları küçük yaşlarda öğrenilir ve yetişkinlik çağına kadar kendini muhafaza eder. Örnek olarak "aynı yere iki kere yıldırım düşmez" ifadesi açıkça yanlıştır ama bu yanlış benimseme, öğrencilerin ve öğretmenlerin bilgi birikimlerinde yer almaktadır.

5. *Kullanım dilinden kaynaklanan kavram yanılgıları:* Bir kelimenin günlük hayatta bir anlamda, fen bilimleri literatüründe başka bir anlamda kullanılması sonucu artış

gösterir. Örnek olarak öğrenciler "iş" veya "güç" kavramlarını çok sayıda ve birbirinden farklı tanımlarla ortaya koymaktadırlar.

Bu sınıflandırma herhangi bir disiplinde ortaya çıkabilecek kavram yanılgılarının olası nedenlerini de ortaya koymaktadır. Bu sınıflama her hangi bir disipline uyarlanarak, orada meydana gelen yanılgıları anlamak için kullanılabilir.

Öğrencilerin matematikteki kavram yanılgılarını veya yanlışlarını sınıflandıran çalışmalar:

Literatürde bu amaçla yapılan üç çalışmaya rastlanmıştır:

Zembat (2008), Graeber ve Johnson (1991)'ın yaptıkları araştırmalar sonunda kavram yanılgılarını dört ayrı kategoride ele aldıklarını belirtmektedir. Bu kategoriler *aşırı genelleme* (overgeneralization), *aşırı özelleme* (overspecialization), *yanlış tercüme* (mistranslation) ve *kısıtlı algılama* dır (limited conception).

1. *Aşırı genelleme*: Belli durumlarda uygulanması doğru sonuç veren kural, prensip veya kavramın diğer drumlarda da işliyormuş gibi düşünülmesi ve bu durumlara yayılmasıdır. Bu yanılgıda öğrencinin kullandığı rehber tanıma göre yaptığı analiz ve edindiği sonuç tutarlıdır. Bu nedenle öğrencinin kendisi açısından elde edilen sonuçta bir sorun yoktur. Bir öğrenci için $a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$ eşitliği doğru ise $a \div (b \pm c) = (a \div b) \pm (a \div c)$ eşitliğnini doğru olmaması için bir sebep yoktur. Ancak öğrencinin doğal sayılarda tanımlı olan "çarpma işleminin, toplama veya çarpma işlemine özgü kuralını bölme işlemi için kullanarak" aşırı genelleme yaptığı açıktır.

2. *Aşırı özelleme*: Aşırı genellemenin tersine bir durumda geçerli olan bir kural ve prensibi bu durumun daha özel alt durumu için kısıtlamaktır. Yukarıdaki durumun aksi şekilde, toplama işleminin değişme özelliği kuralını, Reel sayılar kümesi için de doğru iken, sadece doğal sayılar kümesine indirgemek bu yanılgı türüne örnek olarak verilebilir.

3. *Yanlış tercüme*: İşlem, formül, sembol, tablo, grafik ve cümle gibi değişik formlar arası geçişlerde yapılan sistemli hatalar zinciri olarak ifade edilmektedir. Bu duruma öğrencinin verilen bir sözel probleme ait cebirsel ifadeyi yanlış oluşturması örnek olarak verilebilir.

4. *Kısıtlı algılama*: Bir kavramın kısıtlı veya olması gerekenden zayıf olarak algılandığı durumlarda ortaya çıkar. Örneğin kesir kavramını "bir bütünün belli sayıdaki parçalarının bir kısmı" olarak kavrayan öğrenci, eşit paylaşım kuralını ihmal etmekte yani kesir kavramını kısıtlı olarak algılamaktadır.

Öğrencilerin matematikteki yanlışlarını sınıflandıran bir çalışma ise Santagata (2002) tarafından yürütülmüştür. Bu çalışması ile Santagata yanlışları 7 başlık altında aşağıdaki gibi sınıflandırmıştır.

1. *Kavramsal (Conceptual)*: Matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmayı gerektiren durumlarda ortaya çıkan yanlışlar bu başlıkta sınıflandırılmıştır.

2. *İşlem aşamaları (Procedural)*: Öğrencilerin cebirsel algoritmaları kullanma veya geometrik formülleri uygulama gibi işlemleri yapmalarını gerektiren durumlarda oraya çıkan yanlışlar olarak tanımlanmaktadır.

3. *Çizim (Drawing):* Öğrencilerin çizim yaparken yaptıkları yanlışlar bu kategoride ele alınmaktadır.

4. *Hesaplama yanlışları (Computational)*: Öğrencilerin yaptıkları basit hesaplama yanlışları olarak tanımlanmaktadır.

5. *Dikkatsizlik sonucu oluşan yanlışlar (Distraction)*: Öğrencilerin dikkatsizlikleri neticesinde yaptıkları yanlışlardır. Bu tarz yanlış yapan öğrencilere yanlış yaptığına dair bir işaret verildiğinde hemen doğru cevabı verdikleri belirtilmektedir.

6. *Prensip, özellik ve tanımlar (Principle, property and definition)*: Öğrencilerin matematiksel prensibi veya özelliği isminden fark edemediği ve matematiksel kavramı veya özeliği doğru olmayan bir şekilde tanımladığı durumlarda görülen yanlışlardır.

7. *Diğer (Other)*: Önceki kategorilere dahil edilemeyen yanlışlar bu başlık altında toplanmıştır.

Son olarak Türkdoğan (2011) yanlışın anatomisini ve yanlışa verilecek dönüt türlerini incelediği çalışmasında yanlışı aşağıdaki 4 sınıfta ifade etmiştir:

1. *Bilimsel dile ilişkin yanlışlar:* Bu yanlış türü genel olarak matematik bilim dalının temelini oluşturan terim, tanım, sembol ve gösterim bilgilerine ilişkin yanlışları içermektedir.

2. *İşlem ve Strateji Kullanımına İlişkin Yanlışlar*: Bilginin bir gösterim biçiminden diğerine dönüştüğü; kelimelerin kelimelere, kelimelerin sayılara, sayıların sayılara, sayıların kelimelere dönüştürmesi gibi işlemlerde yapılan yanlışlar bu sınıfta yer almaktadır.

3. *Tümevarım-Tümdengelim ile İlgili Yanlışlar*: Araştırmacı bu başlık altında iki tip yanlıştan bahsetmektedir:

Soyutlama-genelleme yanlışlarının, bir veya birkaç durumdan hareketle öğrencilerin yaptıkları, genel durumu ifade etmeyen ve bilimsel bilginin bütününde geçerli olmayan, çıkarsamaları ifade eder. Ölçütlerin gözden kaçırılması sonucu öğrencinin yaptığı, haddinden fazla genellemeler, matematiksel yanlışlar bu gruba örnek verilebilir.

Örüntülerde yapılan yanlışlar: Araştırmacı örüntülerde yapılan yanlışların -her ne kadar genelleme-soyutlama yanlışlarının özel durumunu ifade etse de- soyutlamadan farklı olarak bir dizi olayın, fikrin, problem durumunun benzerliği ve farklılıklarının neticesinde oluşturulan ilişkiler ağını ifade ettiği gerekçesiyle ayrı bir grupta incelenmesinin daha faydalı olabileceğini belirtmiştir.

4. *Sınıflandırmalara İlişkin Yanlışlar*: Örneklemeyi, öğrencilerin bir kavram veya prensiple ilgili durumu söylenmesi durumu olarak ifade eden araştırmacı örnekleme düzeyinde yapılan yanlışların; çoğu zaman, kavramın özelliği veya prensibin püf noktasını dikkate almadan örnek verilme durumunda ortaya çıktığını ifade etmektedir. Üçgenin dik üçgen olması durumunda geçerli olan Öklid Kurallarının üçgenin dik olmadığı durumlarda da uygulanması, bir üçgenin çeşidinin yanlış belirlenmesi, sayı kümelerinin birbirleri ile karıştırılması gibi durumların bu yanlış türüne ait olacağı ifade edilmektedir.

Öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin yanlışlarını sınıflandıran bir diğer çalışma Ryan ve Williams (2007) tarafından yapılmıştır. Araştırmacılar yaptıkları sınıflama sonucunda yanlışları: *modelleme* (modelling), *prototiplendirme* (prototyping), *aşırı genelleme* (overgeneralizing) başlıkları altında toplamışlardır. Ryan ve Williams (2007) öğrencilerin bir kavrama ait olarak zihinlerinde oluşturdukları modellerle, bu kavrama ait olan matematiksel modellerin birbiri ile örtüşmemesinden kaynaklanan yanlışlar yapabileceğini ifade etmektedirler. Örneğin bir kesrin bir bütünün parçalarından bir kısmını ifade ettiğini zihinlerinde resmeden öğrenciler bu parçaların eşit paylaşım sonucunda oluşacağını fark edemezlerse matematiksel olarak ifade edilen kesir kavramı ile ilgili yanlış anlayışlar geliştirebileceklerdir. Bu durum bir bakıma kavram tanımı ve kavram görüntüsü ayrımı ile örtüşmektedir. Diğer bir yanlış türü olarak prototiplendirme, bir kavramı, bu kavrama ait tipik bir örnek üzerinden geliştirme olarak ifade edilmektedir. Ryan ve Williams (2007) öğrencilerin sürekli aynı tarzda örneklerle karşılaşarak bu örnekleri o kavramla ilişkilendirdiklerini ve diğer durumları göz ardı etmeye başladıkları için hata yaptıklarını savunmaktadırlar. Öğrencilerden bir dikdörtgen hayal etmeleri istendiğinde, dikdörtgen kavramının en çok karşılaştıkları tipik örneğini düşündüklerini ve bu dikdörtgenin genellikle uzun kenarı üzerine yatık şekilde olduğunu ifade etmektedirler. Bu durumda bu öğrencilerin farklı konumlarda sunulan dikdörtgenlerle karşılaştıklarında tipik örnek dışındakileri dikdörtgen olarak seçmeyecekleri ve hata yapacakları düşünülebilir. Araştırmacıların üzerinde durduğu bir diğer yanlış türü ise aşırı genellemedir. Ryan ve Williams (2007) bu yanlış türünü Graeber ve Johnson (1991)'ın işaret ettiği aşırı genellemeye (Akt. Zembat, 2008; s.43) benzer şekilde tanımlamaktadırlar. Öğrencilerin belli durumlarda doğru sonuç veren bilgileri başka durumlara genellediklerini belirtmektedirler. Öğrencilerin bir kısmında "çarpım, çarpanlardan her zaman büyüktür ya da bölüm bölünenden her zaman küçüktür" şeklinde bir inanış olduğunu ve bu inanışın doğal sayılarda doğru sonuç verebileceğini ancak bu inanışa sahip olan öğrencilerin 120 x 0,1> 120 eşitsizliğinin doğru olduğunu düşünerek hata yapabileceklerini belirtmektedirler. Aynı inanışın öğrencileri $0{,}5^2 > 0{,}5$ şeklinde bir hataya sürükleyeceğini de belirtmektedirler.

Yukarıda ana hatlarıyla ortaya konulan çalışmalardan hareketle; farklı başlıklar altında sınıflandırılan yanlışlar veya kavram yanılgılarının içerik olarak birbirleriyle örtüştüğü durumların olduğu sonucu çıkarılabilir. Nitekim *yanlış tercüme* ile *işlem ve strateji kullanımına ilişkin yanlış* türlerinin içinde sayılabilecek yanlışların örtüştüğü görülmektedir. Benzer şekilde *aşırı genelleme* olarak sınıflandırılan kavram yanılgıları içinde *soyutlama ve genelleme* yanlışlarının yer alabileceğini tahmin etmek zor değildir. *Prensip, özellik ve tanımlar* başlığı altında sıralanacak yanlışlarla *Bilimsel dile ilişkin yanlışlar* başlığı altında sıralanacak yanlışlarda da bir birliktelik olacağı düşünebilir.

Bu araştırma sadece kavram yanılgılarını veya yanlışları sınıflama amacı taşımamasına rağmen ortaya çıkacak olan genel matematiksel anlayışların bu sınıflamalara benzer şekilde olacağı beklentisi doğmaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, araştırmanın yöntemi, verilerin toplanması ve analizinde takip edilen işlemler açıklanmıştır.

2.1. Araştırmanın Yöntemi

Problem durumunda da belirtildiği gibi araştırmacı öğrencilerin gerek ders içinde gerekse sınavlarda bir problemle karşılaştıklarında nasıl davrandıklarını gözlemleyerek, onların farklı anlayışlar geliştirdiklerini fark etmiştir. Araştırmacı bir fikir edinmek için geçmiş yıllarda öğrencilerine uygulamış olduğu sınav kağıtlarını incelemiş ve bazı hataların tek bir konuda ortaya çıkmadığını, bazı öğrencilerin benzer hataları farklı konularda da tekrarladıklarını gözlemlemiştir. Öğrencilerin bu hataları sahip oldukları anlayışlar neticesinde yaptıkları düşünülerek öğrencilerin zihinlerinde yatan anlayışların belirlenmesi üzerine çalışılmaya karar verilmiştir.

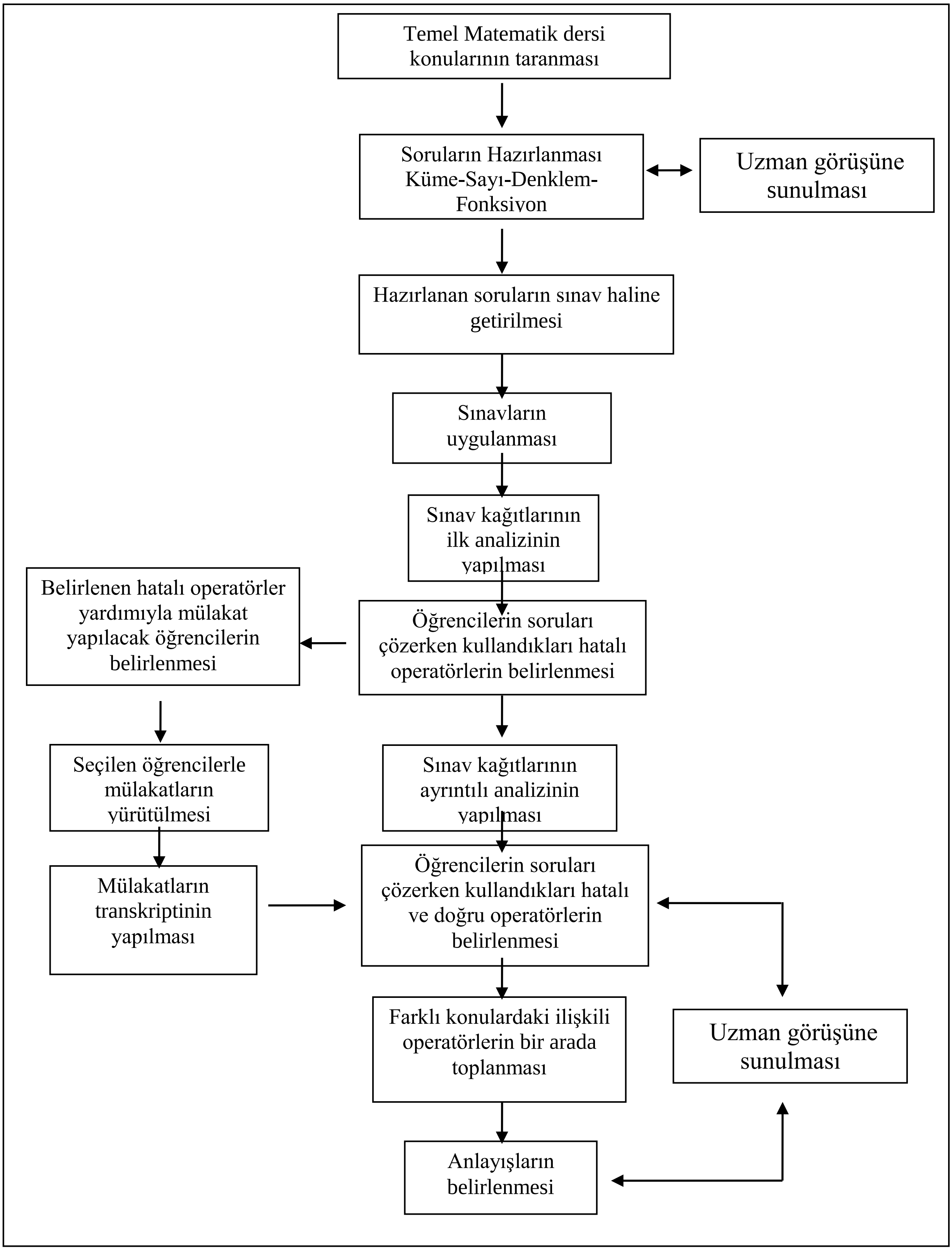
Bu bağlamda araştırmada sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel anlayışlarının belirlenmesi amacıyla, öğretmen adaylarının anlayışları doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konulmaya çalışılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu nedenle çalışma doğası gereği nitel bir çalışmadır. Çalışma ayrıca araştırılmak istenen problemin mevcut var olan durumunu kendi koşulları içerisinde ve olduğu gibi inceleme ve ilerisi için yordama şansı doğurduğu için betimsel nitelik taşımaktadır (Karasar, 2009).

2.2. Araştırmanın Tasarımı

Araştırmada öğrencilerin matematiksel anlayışları, sınavlar ve öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar yardımıyla ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda Şema 3'te görüldüğü gibi;

1. Temel Matematik dersi kapsamındaki konularla ilgili olarak sorular hazırlanmıştır (Tablo 1).
2. Hazırlanan sorular uzman görüşüne sunulmuştur.

3. Gerekli düzeltmeler yapıldıktan sonra sorular sınav haline getirilmiş ve 3 tanesi birinci dönem, 2 tanesi ikinci dönem olmak üzere toplam 5 sınav şeklinde uygulanmıştır. Öğrencilerin bu sınavlardan aldıkları notların ortalaması alınarak, ikinci ara sınav notu olarak verilmesine karar verilmiştir. Böylece öğrencilerin etkinlikleri ciddiye almaları sağlanmaya çalışılmıştır.
4. Uygulamaların ardından öğrencilerin sınav kağıtlarının ilk incelemesi yapılarak, kullandıkları hatalı operatörler belirlenmeye çalışılmıştır. İlk analizde öğrencilerin kullandıkları hatalı operatörlerin belirlenmesine öncelik verilmiştir. Çünkü kullanılan doğru operatörlerin belirleme işlemi kolaydır ve onay gerektirmemektedir. Ancak hatalı operatörlerin belirlenmesi daha karmaşık bir işlemdir ve belirlenen operatörlerin öğrencilerle yapılan mülakatlarla desteklenmesi gerekmektedir.
5. İlk analiz dikkate alınarak mülakat yapılacak öğrenciler belirlenmiştir.
6. Öğrencilerle kullandıkları hatalı operatörlerle ilgili olarak mülakatlar yürütülmüştür. Bu mülakatlarda öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar irdelenmiş, özellikle soruları çözerken kullandıkları her bir bilgi, teorem, kural konuşularak bunların doğru kullanılıp kullanılmadığı üzerinde durulmuştur.
7. Her bir sınav için bu süreç tekrarlanmıştır.
8. Bütün uygulamalar bittikten sonra her öğrencinin, her bir soruya verdiği cevap ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bütün öğrencilerin her bir soru için kullandıkları operatörler, gösterimler ve kontrol bilgileri belirlenmeye çalışılmıştır.
9. Belirlenen operatörlerden benzer olanlar sınıflandırılarak, öğrencilerin farklı konularda sahip oldukları anlayışlar oluşturulmuştur.



Şema 3. Araştırmada izlenen yol

2.3. Katılımcılar

Çalışma 2008–2009 Akademik yılında Artvin Çoruh Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Sınıf Öğretmenliği Programı birinci sınıfına kayıtlı 61 öğrenci ile yürütülmüştür.

2.4. Verilerin Toplanması

Araştırmanın verileri, çalışma kapsamında yer alan konularla (Küme, Sayı, Denklem, Fonksiyon) ilgili farklı sayılarda hazırlanan (Bkz. Tablo 1) toplam 48 soruluk 5 adet yazılı sınav ve sınavların ardından 26 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır.

2.4.1. Sınavlar

Bu bölümde araştırma konularının seçilme nedenleri ve sınavlardaki soruların hazırlanma süreci hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir.

Bu araştırmada öğrencilerin anlayışlarını belirlemek için, cK¢ teorisinin anlayış aşaması kullanılmıştır. Bu modele göre anlayışın bileşenlerinden biri olan problemler kümesinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, Brousseau (1997), Balacheff ve Gaudin (2002)'in önerileri dikkate alınarak, araştırma kapsamına alınan konularla ilgili olarak, önceki yıllarda sorulan sorulara öğrencilerin verdikleri cevapların incelenmesi ve sınıf içi informal gözlemlerin yapılması neticesinde her konu için temsili bir problemler kümesi belirlenmiştir.

Öğrencilerin öğrendiklerini zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarının anlaşılmasının bir yolu, bir problem durumuyla karşılaştıklarında nasıl davrandıklarının analiz edilmesidir. O halde öğrencilerin bir soruyu nasıl çözmeye çalıştığı anlaşılabilirse, onların matematiği daha iyi anlamalarına yardımcı olunabileceği fikri gündeme gelmektedir (Aydın, 2008). Confrey'e (1990) göre, eğer biz bir öğrencinin verdiği yanlış bir cevapta dikkatlice bir anlayış ararsak, o cevabın mantıklı tarafını keşfedebiliriz (Akt. Webber, 2004). Bu keşif bir bakıma öğrencinin sahip olduğu anlayışın belirlenmesinde rol oynayacaktır. Anlayış aşamasına göre verilen bir problemin çözümü aynı zamanda sahip olunan farklı anlayışların uygulandığı bir operatör dizisidir. Bu düşünceden hareketle, öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları her türlü bilgi, sahip oldukları anlayışlar açısından fikir sahibi olmamızı sağlayabilir (Maracci, 2006). O halde öğrencilerin sahip oldukları anlayışların çözümlerini etkileyeceği düşünüldüğünde sergiledikleri çözüm yollarından hareketle bu anlayışlarının belirlenebileceği düşünülmektedir.

Araştırmada kullanılan anlayış aşamasının bir bileşeni olması ve yukarıda açıklanan nedenlerin de etkisiyle öğrencilerin anlayışlarını belirlemek için problemlerden yararlanılmıştır. Bu aşamada sorulacak soruların hangi konuları kapsayacağı sorusu gündeme gelmiştir. Araştırmacının aynı zamanda çalıştığı kurumda Temel Matematik dersini yürütüyor olması ve bu ders sürecinde öğrencilerin anlayışlarının belirlenmesi gerektiğine karar vermiş olması nedeniyle ilk olarak bu ders içeriğindeki konuların uygulamaya dahil edilmesi fikri akla gelmiştir. Bireyin gelişmesi ve geleceğin şekillenmesinde ilk öğretmenlerden biri olacak olan Sınıf öğretmeni adaylarının anlayışlarının belirlenmesi için Temel Matematik Dersinin seçilmesi uygun görülmüştür. Bilindiği gibi eğitim fakültelerinin ilköğretim bölümü sınıf öğretmenliği programında yürütülen Temel Matematik I ve II ders içerikleri en temel matematik konularını kapsamaktadır. Bu konular arasından literatürde fazlaca araştırmaya konu olan ve diğer matematik konularının yapıtaşını oluşturdukları gerekçesiyle çok önemli oldukları düşünülen Küme, Sayı, Denklem ve Fonksiyon konuları seçilmiştir. Bu konuların diğer bir çok matematik konusunun yapıtaşı olmasına ek olarak, öğrencilerin matematiksel anlayışlarının incelenmesi adına bu konuların zengin bir içeriğe sahip olduğu ve hazırlanacak soruların kalitesini arttıracağı düşüncesi de bu seçimde etkili olmuştur.

Araştırma kapsamına alınacak konulara karar verildikten sonra soruların hazırlanması aşamasına geçilmiştir. Öncelikle geçmiş dönemlerde öğrencilere yapılan sınavlar incelenerek araştırma kapsamına alınan konularla ilgili olarak sorulan sorular ayıklanmıştır. Bu sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplar detaylı olarak incelenmiş ve bu yapılan inceleme öğrencilerin anlayışlarını ortaya çıkarabilecek soruları hazırlamada rehber olarak kullanılmıştır. Literatürün de yardımıyla araştırmada sorulabilecek sorular oluşturulmuş ve uzman görüşüne sunulmuştur. Yapılan düzeltmelerin ardından sınavlar son şeklini almıştır (Bkz. Ek 1).

Özetle sınavlar Temel Matematik I-II dersi konularından Küme, Sayı, Denklem ve Fonksiyon konularında hazırlanmıştır. Hazırlanan sınavlarda sorulan soruların içeriği, sayısı ve ne zaman uygulandığı Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Hazırlanan sınavların içeriği ve soru sayısı

Sınav No	Uygulama Dönemi	Konusu	Toplam Soru Sayısı
1	I	Kümeler Kümelerle işlemler, küme problemleri	12
2	I	Sayılar (Doğal Sayılar, Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar, Reel sayılar)	10
3	I	Sayılar (Üslü ve Köklü Sayılar)	8
4	II	Cebirsel İfadeler Çarpanlara Ayırma Birinci Dereceden Denklemler	7
5	II	Fonksiyonlar Fonksiyon olma şartları, tanım-değer kümesi, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon, parabol	11
Toplam Soru Sayısı			48

Tablo 1'de görüldüğü gibi birinci uygulama Kümeler konusunu içermektedir. Kümelerle ilgili olarak önceki yıllarda sorulan sorulara öğrencilerin verdikleri cevapların incelenmesi ve araştırmacının ders işlenişinin ardından tuttuğu günlüklerdeki notlardan öğrencilerin:

a. İspat yaparken kümelerle ilgili özellikleri hatalı kullanma, yanlış kullanma ya da bilinen kuralı kullanmak yerine kendileri kural üretme; soruda verilene göre kümelere eleman ya da eleman sayısı yükleyerek tek bir örnek üzerinden genellemelere varma; istenen ispatı sözel dille ifade etmeye çalışırken veri kaybına sebep olma,
b. Kümelerle işlemler uygulanırken parantezlere dikkat etmeme, kümelerin bazı işlemlerine özgü özellikleri (dağılma-birleşme) farklı işlemler için de kullanma, bir an önce sonuca ulaşma isteği nedeniyle bazı adımları atlama,
c. Soruda birden fazla değişken varsa (gözlüklü ve gözlüksüz erkek, bayan gibi) tablo oluşturarak çözme, ortak özellik yöntemi ile verilen bir kümenin Venn şemasını çizerken zorlanma, küme problemlerini çözerken Venn şeması oluşturma ve bu şemada yer alan her boşluğun eleman sayısını temsil eden harflerle doldurulması, bu kümelerden boş olanları göz ardı etme, birbiri içinde yer alan kümeleri yanlış çizme

gibi davranışlar sergiledikleri tespit edilmiştir. Bu nedenle literatürün de yardımıyla bu doğrultuda; kümlerle ilgili ispat, işlem ve problemleri içeren toplam 26 soru hazırlanmıştır.

Uzman görüşünün ardından, problemler kümesini temsil edeceği düşünülen 12'si seçilerek ilk sınav oluşturulmuştur.

Araştırma kapsamında ele alınan Sayılar konusu geniş bir konu olduğu için bu konu ile ilgili olarak hazırlanan 18 soru iki sınav halinde uygulanmıştır. İlk sınavda Doğal Sayılar, Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar ve Reel Sayılar konuları ile ilgili olarak hazırlanan 38 sorudan 10'u, ikinci sınavda ise üslü ve köklü sayılarla ilgili olarak hazırlanan 13 sorudan 8'i seçilmiştir. Sorular hazırlanırken önceki yıllarda yapılan sınavlardaki çözümlerden ve araştırmacının dersten sonra gözlemlerini aktardığı günlüklerden yararlanılarak aşağıdaki kriterler dikkate alınmıştır:

a. Öğrenciler bir problemi çözebilmek için verilen durumdan istenen durumu elde etmeleri gerektiğinde, verilen rasyonel sayıları düzenlerken sorun yaşamaktadırlar. Örneğin $\frac{ab}{c}=2$, $\frac{bc}{a}=4$, $\frac{ac}{b}=6$ *olduğuna göre* $a^2+b^2+c^2$ *toplamı kaçtır?* tarzında bir soru ile karşılaştıklarında verilenleri, gerkli işlemleri yaparak (çarpma, bölme, toplama, çıkarma, sadeleştirme, genişletme gibi) düzenleyip, istenen $a^2+b^2+c^2$ toplamına geçişte zorlanmaktadırlar. Ayrıca bu geçişlerde rasyonel sayıların özelliklerinden yararlanmaktadırlar.
b. Öğrenciler karşılaştıkları sorularda harfli ifadeler olduğunda bu harfli ifadeleri özel örnekler vererek özelleştirme (sayısallaştırma) ihtiyacı duymaktadırlar.
c. Öğrenciler zaman zaman önceden öğrendikleri bir durumu yeni karşılaştıkları bir duruma transfer ederek her zaman doğru olarak kullanabileceklerini düşünebilmektedirler. Örneğin tam sayılara özgü özellikleri, rasyonel sayılara uygulamakta sakınca görmemektedirler: $2 < 4$ ise $\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$ dir veya 7 ile 8 arasında başka tam sayı yoksa $\frac{1}{7}$ ile $\frac{1}{8}$ arasında da başka rasyonel sayı yerleşemez gibi bilgileri kullanmaktadırlar.
d. Öğrenciler, verilen bir önermenin doğruluğunu özel bir örnekle ispatlama eğilimindedirler.
e. Öğrencilerin zaman zaman asal bölenlerle tam bölenleri veya tam bölenlerin sayısı ile en küçük ortak katı karıştırdıkları görülmüştür.

f. Öğrencilerin sözel problemleri cebirsel ifadeye dönüştürürken gerek değişkenleri belirleme açısından gerekse denklem oluşturma açısından zorluklar yaşadıkları gözlemlenmiştir.
g. Öğrencilerin EBOB ve EKOK problemlerinde hataya düştükleri görülmüştür. Öğrencilerin bu iki kavramı karıştırdıkları hangisini nerede kullanacaklarını bilemedikleri tespit edilmiştir.
h. Öğrenciler karşılaştıkları soruları çözerken daha iyi bildikleri alanı kullanarak çözüm üretmeye çalışmaktadırlar. İyi bildikleri ve kullandıkları bir referansa giderek orada çözüme ulaşıp daha sonra istenen duruma geri dönmektedirler: Üslü sayılarla işlemleri içeren bir soruyu logaritmadan yararlanarak çözmek, farklı tabanda verilen sayıları onluk tabana çevirerek istenen işlemleri yapmak.
i. Öğrencilerin verilen konuya veya işleme özgü özellikleri ya da kuralları kullanmayı bilmemekten kaynaklanan hataları da olmaktadır.
j. Öğrenciler üslü ve köklü sayıların tanım ve özelliklerini kullanırken dikkatsiz davranabilmektedirler. Örneğin bir sayının tekrarlı çarpımının üslü gösterime dönüşümü ile, toplama işleminin çarpma ile gösterilmesini karıştırabilmekte ve bu nedenle hataya düşebilmektedirler. Benzer şekilde üslü ifadelerde bir sayının negatif kuvveti, negatif sayıların pozitif ve negatif kuvvetleri hata yapılan durumlar arasında yer almaktadır. Öte yandan köklü ifadelerde kök içinin negatif olması durumunda da bu sayıyı çeşitli şekillerde dışarı çıkarabilmektedirler.

Bu kriterler dikkate alınarak hazırlanan 51 sorudan problemler kümesini temsil edeceği düşünülen 18'i seçilmiş ve iki sınav (10+8) halinde öğretmen adaylarına uygulanmıştır.

Öğrencilerin, matematiksel anlayışlarını belirlemede yararlanılan konulardan bir diğeri Denklemlerdir. Konu ile ilgili sorular hazırlanırken önceki yıllarda öğrencilere yapılan sınavlardaki sorulara verilen cevapların analizi ve araştırmacının ders anlatımından sonra aldığı notlar ve literatürün yardımıyla dördüncü uygulama sınavının soru içeriği belirlenmiştir. Bu bağlamda:

a. Öğrencilerin özdeşliklerin geometrik anlamını fark ettiklerinde bu durumun onları heyecanlandırdığı, değişik çözüm yolu arayışına girdikleri fark edilmiştir.
b. Öğrencilerin sözel olarak verilen bir durumu cebirsel olarak yazarken değişkenleri belirleme ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri kurarken zorlandıkları gözlemlenmiştir.

c. Öğrencilerin rutin problemlerden ziyade günlük hayat problemlerini çözerken daha çok zevk aldıkları ancak bir o kadar da hataya düştükleri tespit edilmiştir. Örneğin öğrencilere her hangi iki doğruya ait denklem verildiğinde bu doğruları çok rahat bir şekilde çizerken, aynı denklemler günlük hayat problemi içine yerleştirildiğinde öğrencilerin verilen cebirsel ifadelerin belirttiği doğruları çizmek yerine farklı çizimler yaptıkları gözlemlenmiştir.
d. Öğrencilerin verilen bir grafiği yorumlarken de zorlandıkları belirlenmiştir.

Yukarıdaki kriterler göz önünde bulundurularak cebirsel ifadeler, özdeşlikler, çarpanlara ayırma, birinci dereceden bir ve iki bilinmeyenli denklemeler ve grafikler konularını içeren 32 sorudan 7'si seçilmiştir.

Son uygulama, fonksiyon konusu ile ilgili soruları içermektedir. Geçmiş yıllardaki öğrencilerin sınav kağıtlarının incelenmesi, ders işlenişi sırasında araştırmacının gözlemleri ve literatür yardımıyla öğrencilerin:

a. Fonksiyon tanımı tam olarak özümseyemedikleri, bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için sağlaması gereken iki şarttan birini yeterli gördükleri, ayrıca Venn şeması, tablo, grafik gibi farklı temsillerde verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını belirlerken zorlandıkları,
b. Bir fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini karıştırdıkları, görüntü kümesini belirlerken sıkıntı yaşadıkları,
c. Fonksiyonlar arasında tanımlı bileşke işlemine ait özellikleri kullanırken hata yaptıkları, ters fonksiyonu bulmada ve ters fonksiyonla ilgili soruları çözmede zorlandıkları,
d. Fonksiyona ait cebirsel ifadede meydana gelen bir değişikliğin (- ile çarpma gibi) fonksiyonunun grafiğine yansıtılması veya bu durumun tersi yani fonksiyona ait grafikte olabilecek bir değişimin (dönme, ötelenme gibi) fonksiyona ait cebirsel ifadede nasıl bir değişikliğe sebep olacağına dair düşünmekte zorlandıkları
e. Bir fonksiyona ait grafiği yorumlarken (özellikle fonksiyonunu grafiği verilip ters fonksiyon ile ilgili yorumlar istendiğinde) hata yaptıkları

belirlenmiş ve bu doğrultuda hazırlanan 43 sorudan 11'i seçilerek sınav haline getirilmiştir.

Tablo 1'de görüldüğü Kümeler konusu ile ilgili olarak 12, sayılar konusu ile ilgi olarak 10 ve 8, denklemler konusu ile ilgili olarak 7 ve fonksiyonlar konusu ile ilgili olarak 11 soru 5 farklı sınav olarak hazırlanmıştır. Bu 5 sınav ilgili konunun anlatımın ardından öğrencilere uygulanmıştır.

Uygulanan sınavların analizi neticesinde elde edilen bulguların daha akıcı ve anlaşılır olması için, sorular bulgular bölümünde verilirken soru kelimesinin baş harfini temsilen S harfine, ilgili konunun baş harfi alt indis olarak verilmiştir. Ayrıca sorunun numarası da belirtilmiştir. Bu durumda S_k1 gösterimi, kümeler konusu ile ilgili 1. soruyu temsil etmektedir.

2.4.2. Klinik Mülakat

Öğrencilerin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek, onların temel aktivitelerini yakalamak ve bilişsel beceriyi değerlendirmek için esnek soru sorma metodu olarak geliştirilen klinik mülakat (Karataş ve Güven 2003), matematik eğitiminde genel olarak problem çözme metodu ile öğrencilerin matematiksel davranışlarını gözlemleme, gözlemlerden öğrencilerin matematiksel anlamaları bilgi yapıları hakkında sonuç çıkarmak amacıyla yapılmaktadır (Goldin, 1998). Klinik mülakatlar öğrencilerin ne yaptığının yanında daha çok nasıl yaptıkları ve niçin yaptıkları ile ilgilenir. Klinik mülakatta yer alan sorularda, öğrencilerden cevabı nasıl bulduklarını, çözüm süreçlerini niçin seçtiklerini ve nasıl karar verdiklerini açıklamaları istenir (Güven, 2006).

Çalışma öğrencilerin sınavda verdikleri cevapları dayandırdıkları bilgi, kural ve teoremlerin neler olduğu, soruyu neden o şekilde çözümledikleri, kısaca soruyu çözerken zihinlerinde neler olduğu üzerine odaklanmıştır. Bunu ortaya çıkarabilmek için, öğrencilere sınav kağıtları verilerek verdikleri cevapları incelemeleri, bu cevapları neye ya da nelere dayandırdıkları üzerinde yoğunlaşmaları istenmiş daha sonra da düşünceleri hakkında konuşulmuştur. Yapılan görüşmeler ses kayıt cihazıyla kaydedilmiştir. Mülakat sırasında zaman zaman, çözülen soruya ilişkin farklı sorular sorularak öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar da incelenmiştir.

Hangi öğrencilerle görüşme yapılacağına karar verirken, öğrencilerin her bir etkinlikten sonra sınav kağıtlarının ilk incelemesi yapılmıştır. Öğrencilerin çözümlerini unutmamaları için ilk analiz hızlı bir şekilde yapılmıştır. Ancak bu durum, diğer yandan bazı öğrencilerin kullandıkları önemli hatalı operatörlerin gözden kaçmasına sebebiyet vermiştir. Bu durumun, veri toplama ve analiz sürecinin paralel yürütülmesinin zorluğunu ortaya koyduğu düşünülmektedir.

Mülakat yapılan öğrencilerin sınavlara göre dağılımı Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Mülakat yapılan öğrencilerin sınavlara göre dağılımı

Mülakat Yapılan Öğrenciler	Sınavlar			
	1	2-3	4	5
Ö1	X	X		
Ö7			X	X
Ö9	X	X	X	X
Ö11			X	X
Ö14			X	X
Ö21			X	X
Ö25	X	X		
Ö26	X	X	X	X
Ö29			X	X
Ö32			X	X
Ö33			X	X
Ö34	X	X		
Ö35	X	X	X	X
Ö39	X	X	X	X
Ö40	X	X		
Ö41	X	X		
Ö44	X	X		
Ö45	X	X	X	X
Ö46			X	X
Ö48	X	X		
Ö49			X	X
Ö50			X	X
Ö51			X	X
Ö53	X	X	X	X
Ö56	X	X		
Ö57			X	X

Tablo 2'de görüldüğü gibi mülakatlar 26 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Çözümlerinde doğru sonuca ulaşan öğrencilerin kullandıkları operatörleri belirlemek kolay olmuştur ve bu operatörleri doğrulatmak için mülakata gerek duyulmamıştır. Ancak soruyu yanlış çözen öğrencilerin kullandıkları düşünülen operatörlerin kesinleştirilmesi için bu öğrencilerin bir kısmı ile mülakat yapılmıştır. Bu öğrencilerden bazıları ile bütün sınavlar için mülakatlar gerçekleştirilirken (Ö9, Ö26, Ö35, Ö39, Ö45 ve Ö53) bazıları ile sadece 1., 2. ve 3. (Ö1, Ö25, Ö34, Ö40, Ö41, Ö44, Ö48 ve Ö56) veya 4. ve 5. (Ö7, Ö11, Ö14, Ö21, Ö29, Ö32, Ö33, Ö46, Ö49, Ö50, Ö51, Ö57) sınavlardan sonra mülakat yapılmıştır. Mülakatlar 30-60 dakikalık zaman diliminde tamamlanmıştır.

2.5. Verilerin Analizi

Bu bölümde araştırmada elde edilen verilerin nasıl analiz edildiği açıklanmıştır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları anlayışları belirleyebilmek için öncelikli olarak sınav kağıtları incelenmiştir. Her bir öğrencinin her bir soruya verdiği cevabın detaylı analizi yapılarak, çözüm sırasında kullanılan operatörler belirlenmiş, elde edilen operatörler öğrencilerle yapılan mülakat verileri ile desteklenerek ilgili konuda sorulan soruların analizi boyunca sıralanmıştır. Her bir konuya ait olarak anlatılan şekilde belirlenen operatörlerden benzer olanlar sınıflandırılarak üst bir başlık altında kodlanmıştır. Bu üst başlıklar aynı zamanda öğrencilerin sahip oldukları anlayışlar olarak belirlenmiştir. Bu süreç aşağıdaki alt bölümlerde detaylı olarak açıklanmıştır.

2.5.1. Yazılı Sınavların Analizi

Verilerin analizi sürecinde öğretmen adaylarının sınavlarda verdikleri cevaplar neticesinde konuyla ilgili olarak sahip oldukları bilgiler, cK¢ teorisinin bileşenlerine göre incelenmiştir. Bu bileşenlerden operatörler kümesi R, soruda kullanılabilecek operatörlerle sınırlandırılarak verilmiştir. Bilindiği gibi operatör, çözümü gerçekleştirmek için kullanılan her türlü işlem, kural, teorem vs olarak ifade edilmişti. Ancak öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları operatörler belirlenirken, çözümü doğru ya da hatalı olarak gerçekleştirmelerine neden olanlar seçilmiştir. Bu şekilde olası veri kalabalığının önüne geçmek hedeflenmiştir.

Uygulanan her sınavın ardından Ö1, Ö2, …şeklinde kodlanan öğrencilerin verdikleri cevaplar tek tek ele alınarak kullandıkları operatörler belirlenmiştir. Öğrenci cevaplarından çıkarılan operatörler için, modeldeki orijinal simgesi korunarak R harfi kullanılmış, ilgili olduğu konunun baş harfi ise alt indis olarak verilmiştir. Ayrıca konunun kaçıncı operatörü olduğu yanına verilen sayı ile ifade edilmiştir. Aynı zamanda üst indis olarak kullanılan – işareti operatörün hatalı olduğunu belirtmektedir. Çalışmada operatörlerle ilgili iki adet simge kullanılmıştır. Birincisi öğrencilerin kullandıkları doğru operatörü gösteren R_k1 şeklindedir ki alt indis olarak verilen “k” ilgili konunun baş harfini, 1 ise operatörün numarasını ifade etmektedir. İkinci kullanım ise R^-_k1 şeklindedir. Bu gösterimi diğerinden ayıran üst indis ise bu operatörün her zaman hatalı bir operatör olduğunu göstermektedir. Ancak bazı durumlarda öğrencilerin doğru olan operatörleri de hatalı kullanabildikleri görülmüştür. Bulguların daha yalın ve anlaşılır olması için doğru olduğu halde hatalı olarak kullanılabilen bu gibi operatörler için ayrıca bir gösterim belirlenmemiş, bu durum; operatörün hatalı kullanıldığı belirtilerek vurgulanmıştır. Bu anlatılanları örnekler üzerinde açıklayacak olursak,

R_s41: Karekökten kurtarmak için kare alma

operatörü simgesinden de görüldüğü gibi sayılar konusunda belirlenen 41. operatör olduğu, aksi belirtilmedikçe doğru olarak kullanıldığı anlaşılmaktadır. Eğer öğrenciler bu operatörü hatalı olarak kullanırlarsa, yani kareköklü bir ifadeyi kökten kurtarmak için karesini alırken hata yaparlarsa bu durum metin içinde operatör *hatalı* kullanılmıştır şeklinde belirtilmiştir.

R^-_d10: ax+b=y cebirsel ifadesi düzlemde bir dörtgen belirtir,

operatörü ise simgesine bakıldığında denklemler konusuna ait onuncu operatörü temsil ettiği ve her zaman hatalı olarak kullanılan bir operatör olduğu anlaşılmaktadır.

Operatörleri yazarken dikkat edilen bir husus da, bir operatörün aynı konunun farklı sorularında ortaya çıkması veya aynı operatörün farklı konularda görülmesi durumlarıdır. İlk duruma aynı konuda rastlandığı için operatörlerin indisleri uyuştuğundan bu operatör için aynı gösterim tercih edilmiştir. Bu durumda R_k5 operatörüne aynı konunun birden fazla sorusunda rastlamak mümkündür. İkinci durumda ise konular farklı olduğundan operatörlerin alt indisleri farklı olacağından karışıklık olabileceği düşüncesiyle, operatör bulunduğu konuya göre indislenmiş ancak operatörün açıklaması (ifadesi) mümkün olduğunca korunmaya çalışılmıştır.

R^-_d23: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme

R^-_k4: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme

operatörlerinde görüldüğü gibi simgeleri farklı olsa da içerik korunmuştur.

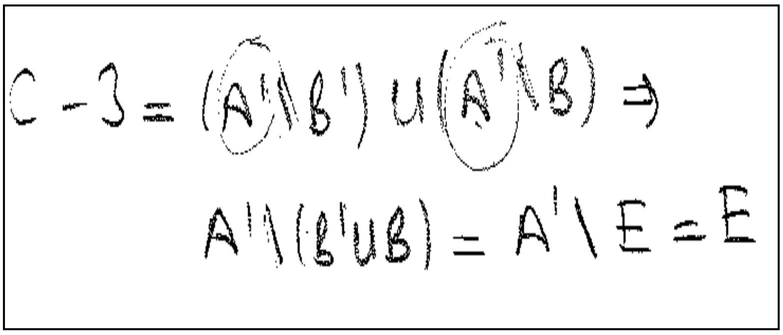
Diğer bileşen olan L, öğrencilerin tercih ettikleri gösterimler incelenerek ortaya koyulmuştur. Gösterimler konuya özgü olduklarından her bir soru için ayrı ayrı vermek yerine konu ile ilgili tüm soruların analizleri bittikten sonra gösterimlerin genel bir analizi yapılmıştır.

Öğrencilerin sorulara cevap verirken kullandıkları bilgilerini dayandırdıkları kontrol bilgileri ise mümkün olduğunca belirlenmeye çalışılmıştır. Ancak problemi çözmek için kullanılacak işlemlerin uygun olup olmadığına, verilen problemin çözülüp çözülemeyeceğine karar vermeyi ya da bir matematiksel kavramın anlaşılmasında rol oynayan en can alıcı öğelerin farkına varmayı sağlayan bu bileşeni ortaya koymak oldukça zordur. Çünkü kontrol bilgileri, öğrencilerin çözümlerinde gizli olmakla beraber öğrenciler de bu bilgileri çoğu zaman farkında olmadan kullanmaktadırlar. Yapılan mülakatlarda öğrencilerin kullandıkları bir bilgiyi neden kullandıkları, hangi bilgiden ürettikleri, çözümü gerçekleştirirken attıkları adımı hangi bilgilerle kontrol ettiklerinin farkında olmadıklarının gözlemlenmesi, kontrol bilgilerinin fark edilmeden kullanıldığı ve net olarak ortaya çıkarılmasının zor olduğu fikrini doğrular niteliktedir.

Bütün konular için aynı süreç tekrarlanarak öğrencilerin konu bağımlı olarak kullandıkları operatörler belirlenmiştir. Farklı konularda belirlenen operatörlerden benzer olanlar bir araya getirilmek suretiyle öğrencilerin konu bağımlı olmaksızın sahip oldukları "anlayışlar" belirlenmeye çalışılmıştır. Anlayışlar belirlenirken gösterimler ve kontrol bilgileri konudan bağımsız hale getirilemediği için sadece operatörlerden yararlanılmıştır.

Bu süreç, daha anlaşılır olabilmesi için kümeler konusunda sorulan 3. soru, Ö34 kodlu öğrencinin bu soruya verdiği cevap ve kendisi ile yapılan mülakat verilerinden yararlanarak aşağıdaki gibi örneklenebilir:

S_k3: A ve B iki küme olduğuna göre $(A^{'} \setminus B^{'}) \cup (A^{'} \setminus B)$ *kümesini en kısa şekilde ifade ediniz.*



Şekil 3. Ö34'ün S_k3'e verdiği cevap

Öncelikle öğrencinin yapmış olduğu her adım incelenmiş ve $A^{'}$ kümesinin her iki ifadede ortak olduğunu fark edip, bu kümenin parantezine aldığı yani fark işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği olduğu bilgisini kullanarak soruyu çözdüğü düşünülmüştür. Öğrenci ile sınavdan sonra çözümü ile ilgili olarak yapılan ve aşağıda verilen mülakat verileri de bu durumu destekler nitelikte olduğundan, öğrencinin *R^{-}_{k}9: A, B ve C kümeleri için (A\B)$\cup$(A\C)= A\(B$\cup$C) dir,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.

A: Peki, $(A' \setminus B') \cup (A' \setminus B)$ ifadesinden $A' \setminus (B' \cup B)$ ifadesine geçişi anlatır mısın?
Ö34:Dağılma özelliğini kullandım.

A: Dağılma özelliğini kullandın? Neyin ne üzerine dağılma özelliğini kullandın?
Ö34: O zaman farkın birleşim üzerine dağılma özelliğini.

Ö34 ile yapılan mülakata devam edildiğinde öğrencinin bu bilgiyi kullanma nedenini aşağıdaki şekilde ifade ettiği görülmektedir:

A: Peki, sana fark işleminin birleşim ya da kesişim üzerine dağılma özelliği olduğunu hissettiren şey nedir, böyle bir özellik olduğunu nerden çıkardın?
[…]
Ö34: Çarpmada falan var ya hocam oradan olabilir.
A: Sayılardaki dağılma özelliğini mi düşündün?
Ö34:Evet

Bu durumda öğrencinin zihninde yerleşen "*kümelerle fark işleminin dağılma özelliği vardır*" bilgisini, doğal sayılarda çarpma işlemi için doğru olan "*doğal sayılarda çarpma işleminin toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır*" bilgisinden esinlenerek, bu bilgiden destek alarak kullandığı söylenebilir. Bu durumda "*doğal sayılarda çarpma işleminin toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır*" bilgisi $R^{-}_{k}9$*: A, B ve C kümeleri için* $(A\backslash B)\cup(A\backslash C)= A\backslash(B\cup C)$ *dir,* operatörünün kontrol bilgisi olarak belirlenmiş ve ilgili bölümde belirtilmiştir.

Gerek öğrencilerin çözümlerinden ve onlarla yapılan klinik mülakat verilerinden hareketle kullandıkları belirlenen operatörler, gösterimler ve kontrol bilgileri gerekse farklı konulardaki benzer operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilen anlayışlar bir uzman ile etraflıca tartışılarak belirlenmiştir. Öğrencilerin anlayışlarını belirleyene kadar geçen veri analizi süreci oldukça zaman alıcı ve yorucu bir süreç olduğundan diğer 2 uzmandan anlayışlar oluşturulduktan sonra görüş (onay) alınmıştır. Ayrıca veri analizi sürecinde zaman çeşitlemesi yapılmıştır. Elde edilen veriler araştırmacı tarafında belli zaman aralıklarında tekrar tekrar incelenerek son haline getirilmiş ve bulgularda sunulmuştur.

2.5.2. Klinik Mülakatların Analizi

Sınavların sonunda gerçekleştirilen klinik mülakatlar transkript haline getirilerek öğrenci cevaplarını desteklemek için kullanılmıştır. Her bir mülakat öncelikle yazıya dökülmüş, daha sonra öğrencilerin sınav kağıtlarının incelenmesi ile kullandıkları belirlenen operatörleri destekleyecek ifadeler ayıklanmıştır. Bu doğrudan alıntılara bulgular kısmında, ilgili operatörü desteklemek, okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunmak, kendi yorumlarını yapma ve bazı çıkarımlarda bulunabilme fırsatı vermesi bakımından (Yıldırım ve Şimşek, 2009) yer verilmiştir.

Örneğin Ö56 kodlu öğrenci ile kümeler konusunun 5. sorusu ile ilgili olarak yapılan klinik mülakat verilerinin tamamı aşağıdaki şekildedir;

A: 5. soruya gelelim. Bak şimdi şurada aynı şekilde B/A'yı bulmuşsun, burayı da B/A ya çevirmişsin. Bir yere kadar gelinmiş tamam burada bir hata yok ondan sonra birden bire şu A kaybolmuş ortadan, burası da A birleşim B olmuş şu aşamadan şu aşamaya geçiş nasıl oldu? Şuradan şuraya geçerken A nereye gitti?
Ö56: Orada $B' \setminus A$ parantezinde düşündüm. Sonra da B yi birleştirdim.
A: Hıım, farkın dağılma özelliği var gibi mi düşündün?
Ö56:Evet
A:Değil mi sonuçta şu birleşim arada da fark var. Peki sana bunun olduğunu düşündüren neydi. Böyle bir özellik olduğunu?
Ö56: O anda yapacak başka bir şey bulamadım. Herhalde ondandır diye düşündüm.
A: Evet, $B' \setminus A$ iki ifadede de ortak olması ve fark işleminin ortak olması mı bunu sana böyle düşündürdü?
Ö56: Evet
A: Ya da başka bir yerden mi bunu transfer ettin? Var mı farkın birleşme üzerine dağılma özelliği olduğunu düşünüyor musun?
Ö56: düşünmüyorum.
A: O an niye düşündün.
Ö56: Sınav psikolojisi diyebiliriz.
A:Sınav anında şu ortakları görünce hemen o an, farkın birleşim üzerine dağılma özelliği yapılmış dedin mi içinden?
Ö56: Bu dağılmış toplayayım diye düşündüm işte, o anda o geldi aklıma
A: O anlık bir şey mi öyle bir genellemen yok farkın birleşme üzerine dağılma özelliği yok tekrar böyle bir şey karşına ve biz bu konuşmayı yapmasaydık yine böyle bir şey yapar mıydın acaba, dürüst ol.
Ö56: Dürüst olayım işlemi devam ettirebilseydim ettirirdim ettiremeseydim gene böyle yapardım. Ortakları kullanarak işlemi birleştirebileceğimi düşündüm.
A: İşlemleri birleştirebileceğini düşündün tamam.

Bu veriler, öğrencinin kullandığı R^{-}_{k}*9: A, B ve C kümeleri için* $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ *dir,* operatörü doğrultusunda kısaltılarak aşağıdaki şekilde bulgularda yer almıştır.

A: 5. soruya gelelim, şu okla gösterdiğin aşamaya geçiş nasıl oldu? A nereye gitti?
Ö56: $B' \setminus A$ parantezinde düşündüm. Sonra da B yi birleştirdim.
A: Hıım, farkın dağılma özelliği var gibi mi düşündün?
Ö56:Evet
[…]
A: Evet, $B' \setminus A$ iki ifadede de ortak olması ve fark işleminin ortak olması mı bunu sana böyle düşündürdü.
Ö56: Evet

Veriler bu şekilde kısaltılarak akıcılık sağlanmaya çalışılmış ve bu şekilde okuyucunun operatörü daha net fark edeceği düşünülmüştür.

3. BULGULAR

Bu bölümde yapılan uygulamaların cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre analizinden elde edilen bulgular, öğrencilerle yapılan mülakatlarla desteklenerek verilmiştir. Öğrencilerin cevaplarından çıkarılan operatörler (R), öğrencilerin kullandıkları gösterimler (L) ve öğrencilerin çözümlerini dayandırdıkları tahmin edilen kontrol bilgileri (∑) örnek öğrenci cevapları ile birlikte sunulmuştur.

3.1. Kümeler

Bu bölümde ilk olarak kümler konusu ile ilgili olarak sorulan her bir soruya öğrencilerin verdikleri cevaplardan hareketle belirlenen operatörler verilmiştir. Operatörlerle ilgili bulguların ardından gösterim ve kontrol bilgileriyle ilgili bulgular ayrı başlıklar halinde sunulmuştur.

3.1.1. Kümeler Konusu ile İlgili Operatörler

Kümeler konusu ile ilgili olarak 12 sorudan oluşan bir uygulama yapılmıştır. Bu uygulama sonrasında her soru için belirlenen operatörler aşağıda sunulmuştur.

3.1.1.1. Birinci Soru

S_k1: $A \cap B \subset A \cap C \Rightarrow B \subset C$ *olup olmadığını Venn şemasıyla ve tanımları kullanarak gösteriniz.*

Birinci soruya 1 öğrenci doğru olarak cevap verirken, 7 öğrenci hiç cevap vermemiştir. Kalan 53 öğrenciden 39'u soruyu eksik çözerken 14 öğrenci ise yanlış cevap vermiştir.

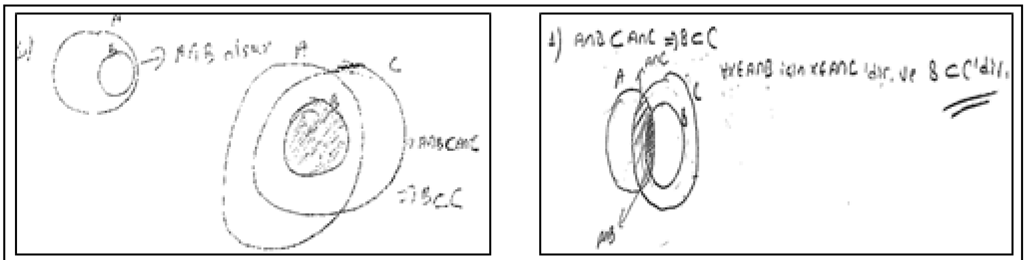
Bu soruda öğrenciler, istenen durumu tanımı kullanmadan Venn şeması ile gösterme eğiliminde olmuşlardır. Öğrencilerin benzer çizimleri, sınıflandırılarak verilmiştir.

$A \cap B \subset A \cap C$ durumunun özel bir halini ($B \subset A \cap C$, $B \subset C$ veya C kümesi içinde kesişen A ve B kümeleri alma) dikkate alarak yapılan bazı çizimler öğrencileri hatalı sonuca götürmüştür (Bkz. Şekil 4). Öğrencilerle yapılan mülakatlar incelendiğinde verilen önermenin doğru olma durumunu göstermeye odaklandıkları için bu çizimleri yaptıkları görülmüştür. Örneğin Ö1, Ö2, Ö27, Ö34, Ö35, Ö59, Ö60 kodlu öğrenciler, çizimleri yaparken $B \subset A \cap C$ özel durumunu dikkate alarak çizim yapmışlardır (Bkz. Şekil 4a). Bu öğrencilerden Ö35 önermenin doğru olduğunu göstermenin daha kolay olduğunu düşündüğü için bu şekilde çizim yaptığını kendisi ile yapılan klinik mülakatta şu şekilde ifade etmiştir:

A: Peki 1.soruda neden kümeleri bu şekilde çizdin? Dikkat et $B \subset A$ dememiş ama sen B'yi A' nın alt kümesi olarak düşündün neden?
Ö35: Neden mi? O an için herhalde bunu sağlayacağını düşündüm. Herhalde önce zihnimde çözdüm. Bunu sağlayacağını düşünmüşümdür.
A: […] Olup olmadığını gösterin diyor ya olduğunu göstermek daha mı kolaydı?
Ö35: Olduğunu göstermek daha kolaydı herhalde. Hani olup olmadığını derken ikisini de düşüneceğim ama olduğunu derken sadece bir tanesini düşüneceğim.

Diğer bir grup öğrenci (Ö3, Ö4, Ö9, Ö10, Ö12, Ö18, Ö28, Ö47, Ö51, Ö56) soruyu çözmek için $B \subset C$ özel halini dikkate almışlardır (Bkz. Şekil 4b). Ö9 kendisi ile yapılan mülakatta bu şekilde çizim yapma nedenini önermenin olduğunu kabul etmesi ile ilişkilendirmiştir.

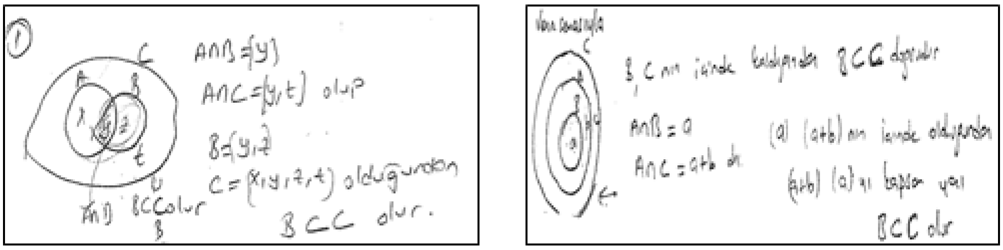
A:Bu soruda olup olmadığını diyor. Acaba olmaması durumunu düşünmedin mi hiç?
Ö9:Olamaması?
A:[…] Sen olduğunu göstermeyi tercih ettin. Bunun nedeni ne olabilir?
Ö9:Ya genelde zaten hani şey olur. Öğrenciler olan şeyler üzerine giderler. Olmayan şeyler üzerine düşünmezler.



a.Ö35'in cevabı b. Ö9'un cevabı

Şekil 4. Öğrencilerin S_k1'e verdikleri cevaplar

Şekil 4'ün devamı



c. Ö26'nın cevabı

d. Ö53'ün cevabı

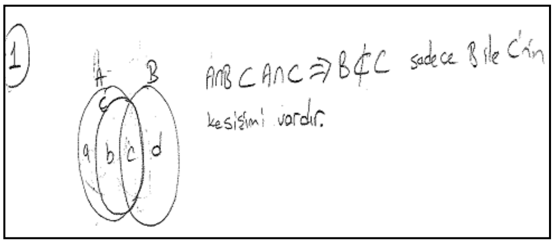
$A \cap B \subset A \cap C$ durumunun diğer bir özel halini dikkate alarak C kümesi içinde kesişen A ve B kümeleri çizen öğrenciler (Ö11, Ö13, Ö21, Ö22, Ö26, Ö30, Ö32, Ö33, Ö38, Ö43, Ö45, Ö48, Ö58) de doğru sonuca ulaşamamışlardır (Bkz. Şekil 4c).

Ö24, Ö40, Ö41, Ö53 ve Ö61'in oluşturdukları çizimlerin, istenen şartı yani $A \cap B \subset A \cap C$ sağlamasına rağmen onları doğru sonuca götürmeye yetmediği görülmektedir (Bkz. Şekil 4d). Bu öğrencilerden Ö53 $A \cap B \subset A \cap C$ olması için bu kümelerin iç içe çizilmesi gerektiğini düşündüğünü belirtirken, Ö41 ise çözümünü "*Eğer* $A \cap C$ *nin altında* $A \cap B$ *varsa, A büyük küme ki içinde B ve C yi barındırıyor. Öyle düşündüm. Ve de sonucunu da bu veriyorsa demek ki A, B' yi kapsıyor. A hem B yi hem C yi kapsıyor. B de C yi kapsıyordur diye düşündüm"* şeklinde açıklamıştır.

Ö14, Ö16, Ö39 ve Ö50 kodlu öğrenciler, kümelere verilen şartı sağlayacak şekilde elemanlar vermişlerdir. Ancak B kümesine, C kümesinden farklı elmanlar vermedikleri için önermenin doğru olduğunu yani $B \subset C$ olduğunu ifade etmişlerdir. Yine bu öğrencilerin C kümesinin B kümesinden farklı elemanı olacağını düşünmemeleri önermeyi doğrulayacak şekilde eleman verdiklerini göstermektedir.

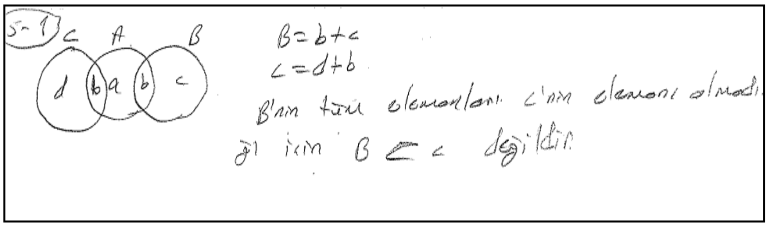
Yukarıda incelenen ve çözümleri bir bakıma benzer olan toplam 39 öğrencinin çözümlerindeki ortak amaçlardan biri; soruda verilen genel durumu sağlayabilen özel durumlardan hareketle genel durumun doğruluğunu ispatlamaktır. Bu nedenle kullanılan operatör; *$R^{-}_{k}1$: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur,* şeklinde ifade edilebilir. Yukarıda da belirtildiği gibi ikinci amaç ise önermenin doğruluğunu göstermektedir. Bu durumda kullandıkları diğer operatör; *$R^{-}_{k}2$: Doğru olup olmadığı sorulan bir önermenin, doğru olduğu kabul edilerek ispatı yapılır,* olarak belirlenmiştir.

Diğer yönden soruyu doğru çözen Ö7 şartı sağlayacak şekilde Venn şemasını çizerek (Bkz. Şekil 5) sonuca ulaşmayı başarmıştır. Çözümden de anlaşıldığı gibi öğrenci B kümesini C kümesinin alt kümesi olarak çizmeden de istenilen şartı gerçekleştirmiştir. Başka bir ifadeyle şartı sağlamayan bir örnek bularak önermenin her zaman doğru olmadığını göstermeyi başarmıştır. Bu nedenle kullanılan operatör; *R_k3: Bir önerme bir özel durum için doğru değilse, her zaman doğru değildir,* şeklinde belirlenmiştir.



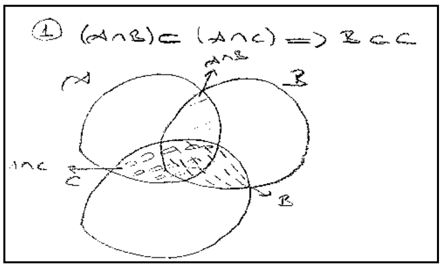
Şekil 5. Ö7'nin S_k1'e verdiği cevap

Ö8 çiziminde, A kümesi ile kesişen ancak birbirleriyle kesişmeyen B ve C kümelerine yer vermiştir (Bkz. Şekil 6). Öğrencinin bu çizimi yaparken $A \cap B \subset A \cap C$ şartını dikkate almadığı görülmektedir. Bu nedenle *R^-_k4: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 6. Ö8'in S_k1'e verdiği cevap

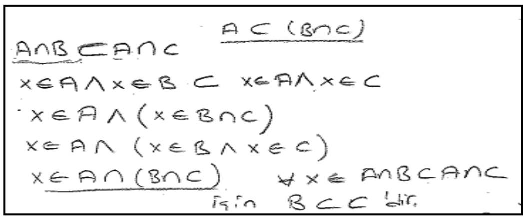
Ö15, Ö36, Ö37, Ö44, Ö49, Ö52, Ö54, Ö55 kodlu öğrenciler kesişen üç kümeyi Venn şemasıyla göstererek ispat yapmışlardır (Bkz. Şekil 7). Çözümlerden de anlaşıldığı gibi, öğrencilerin hepsinde, "verilen kümeler birbirleriyle ikişer ikişer kesişecek şekilde standart çizim yapılır" düşüncesinin hâkim olduğu görülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin kullandığı operatör *R_k5: Venn şemasını standart bir şekilde (yani her küme diğerleri ile kesişecek şekilde) çizme* olarak belirlenmiştir. Ancak çoğu zaman doğru olan bu operatör bu soruda verilen bilgilerden bağımsız olarak kullanıldığı için hatalı durumda karşımıza çıkmaktadır. Yine bu öğrencilerin önermede verilen bilgiyi dikkate almadan çizim yaptıkları için $R^{-}_{k}4$ operatörünü kullandıkları görülmektedir.



Şekil 7. Ö55'in S_k1'e verdiği cevap

Diğer benzer çözümler Ö42, Ö45 (ikinci çözüm yolu olarak seçmiştir) ve Ö46 kodlu öğrenciler tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu yolu seçen öğrencilerin, kesişim işleminin, alt küme üzerine dağılma özeliği olduğunu düşünerek $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ ifadesini $A \cap (B \subset C)$ haline getirdikleri görülmektedir (Bkz. Şekil 8). Bu duruma uygun operatör ise; *$R^{-}_{k}6$: A, B ve C kümeleri için $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir,* olarak belirlenmiştir. Ö45'in klinik mülakat verileri, kullandıkları operatörü doğrular niteliktedir:

> Ö45: Bunları; $A \cap B$ ifadesini açtım. Ayrı ayrı $A \cap$ B şeklinde açtım. Bunu da A $\cap$ C şeklinde açtım. Zaten burada alt kümesi falan demiş ya
> A: Evet.
> Ö45: Sonra bunları hepsinde $x \in A$ ortak olduğu için o şekilde yazdım.
> A: O zaman sen $x \in A$ parantezine aldın. Ama sonra bu birden bire $B \cap C$ mi oldu yoksa $B \subset C$ mi yazacaktın?
> Ö45: Aslında $B \cap C$ olmaz. Çünkü $x \in A$ yı ortak alırsam burayı $B \subset C$ yapmam gerekiyordu.
> A: Yani sonuç olarak diyorsun ki kesişimin alt küme üzerinde dağılma özelliği var.
> Ö45: Evet.



Şekil 8. Ö45'in S_k1'e verdiği cevap

Birinci soruyla ilgili olarak, Ö5, Ö6, Ö17, Ö19, Ö23, Ö31 ve Ö57 soruya cevap vermediklerinden; Ö20 ve Ö25 soruda verilen şartı tanımları kullanarak veya şema çizerek açıklamakla yetindiklerinden; Ö29 $B \subset A$ ve $C \subset A$ olacak şekilde iki ayrı şema çizerek çizdiği bu şema ile ilgisi olmadığı halde $B \subset C$ olması gerektiğini belirttiğinden bu öğrencilerin kullandıkları operatör belirlenememiştir.

Öğrencilerin birinci soruyla ilgili çözümlerinden 6 tane operatör belirlenmiştir.

3.1.1.2. İkinci Soru

S_k2:

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

olduğunu gösteriniz.

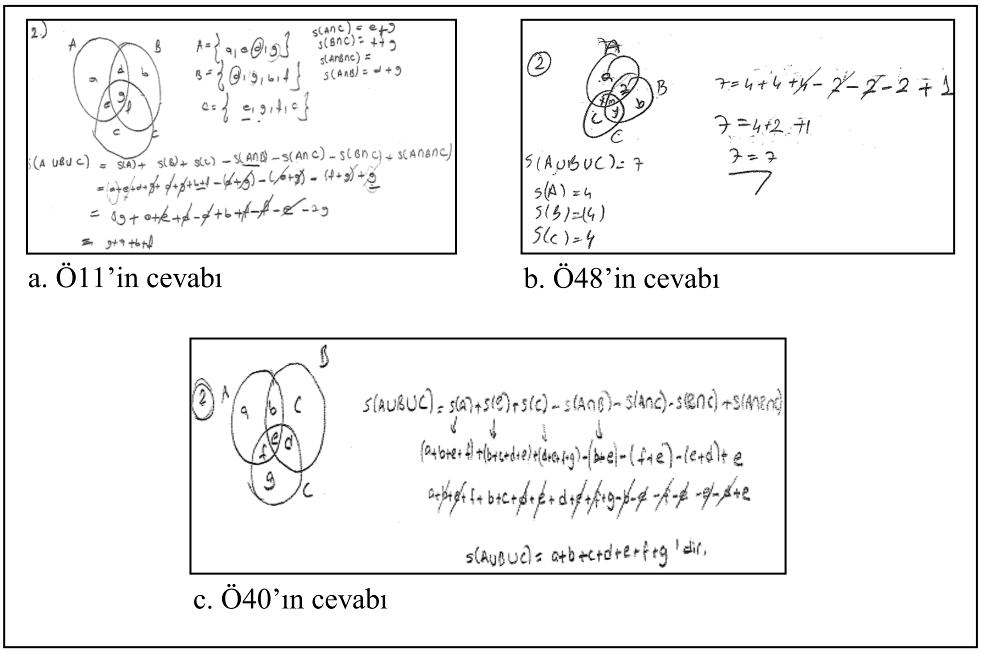
Soruya üç öğrenci (Ö5, Ö17, Ö55) cevap vermezken 51 öğrenci doğru cevap vermiştir. Kalan 7 öğrenci ise soruyu eksik olarak cevaplamışlardır.

Diğer öğrencilerden bazıları (Ö1-Ö4[3], Ö6-Ö16, Ö18-Ö41, Ö43-Ö54, Ö56-Ö61) soru çözerken verilen üç kümeyi standart olarak birbiri ile kesişecek şekilde çizmiş, oluşan kümelere eleman sayılarını temsil eden harfler vererek sonuca ulaşmaya çalışmışlardır (Bkz. Şekil 9). Bu nedenle kullandıkları operatör *R_k5* olarak belirlenmiştir. Bu soruda kümeleri standart bir şekilde çizmeleri Ö1-Ö4, Ö6-Ö10, Ö12-Ö16, Ö18-Ö34, Ö36-Ö41, Ö43,Ö44, Ö47, Ö49-Ö54, Ö56-Ö60 kodlu öğrencilerin soruyu doğru olarak çözmelerine yardımcı olmuştur.

Kalan 7 öğrencinin (Ö11, Ö35, Ö42, Ö45, Ö46, Ö48 ve Ö61) çözümleri incelendiğinde bu öğrencilerin ayrıca önermeyi sağlayan özel bir durumdan yararlandıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 9a, Şekil 9b). Bu nedenle *R^-_k1* operatörünü de kullandıkları belirlenmiştir. Ö11 klinik mülakatta araştırmacının: "*Bu elemanları vererek; a,b,c,d,e,x,y,z,1,2,3 ne olduğu önemli değil, soruyu bir örnekle çözmüş oluyorsun. O an için bir örnek bu ispatı doğrulamak için yeterli mi yani?*" şeklindeki sorusuna "*evet*" cevabını vermiştir.

---

[3] "-" işareti; ilk numaralı öğrenciden ikinci numaralı öğrenciye kadar olan bütün öğrencileri ifade etmek için kullanılan kısaltmadır. (Ö1-Ö4=Ö1,Ö2,Ö3,Ö4)



a. Ö11’in cevabı

b. Ö48’in cevabı

c. Ö40’ın cevabı

Şekil 9. Öğrencilerin S_k2’ye verdikleri cevaplar

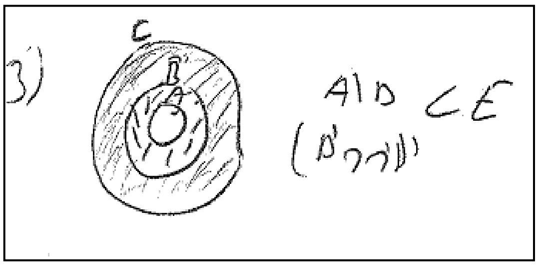
Bu soru ile ilgili olarak yeni bir operatör belirlenmezken, birinci soruda ortaya çıkan R_k5 ve $R^{-}_{k}1$ operatörlerinin tekrar kullanıldığı görülmektedir.

3.1.1.3. Üçüncü Soru

S_k3: A ve B iki küme olduğuna göre $(A' \setminus B') \cup (A' \setminus B)$ *kümesini en kısa şekilde ifade ediniz.*

Bu soruya 7 öğrenci cevap vermezken, 10 öğrenci doğru cevap vermiştir. Geri kalan 44 öğrenci ise soruya yanlış cevap vermiştir.

Ö17, Ö20, Ö23, Ö31, Ö42, Ö50, Ö51 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Venn Şemasından yararlanan öğrencilerden Ö7, Ö8, Ö9, Ö11, Ö14, Ö16, Ö21, Ö22, Ö29, Ö35, Ö36, Ö40, Ö45, Ö48, Ö49, Ö57, Ö59, Ö60 ve Ö61 kodlu olanlar kümeleri standart olarak birbiri ile kesişecek şekilde çizmişlerdir (Bkz. Şekil 11). Bu nedenle bu öğrencilerin *R_k5* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö46 kodlu öğrencinin çözümü incelendiğinde verilen kümeleri standart olarak çizmediği için soruyu hatalı çözdüğü görülmektedir (Bkz. Şekil 10). Bu nedenle öğrencinin *R_k5* operatörünü *hatalı* olarak kullandığı belirlenmiştir. Bu öğrencinin aynı zamanda Venn şemasını verilen bilgilere uygun olarak çizmediği için *$R^{-}_{k}4$* operatörünü kullandığı görülmektedir.

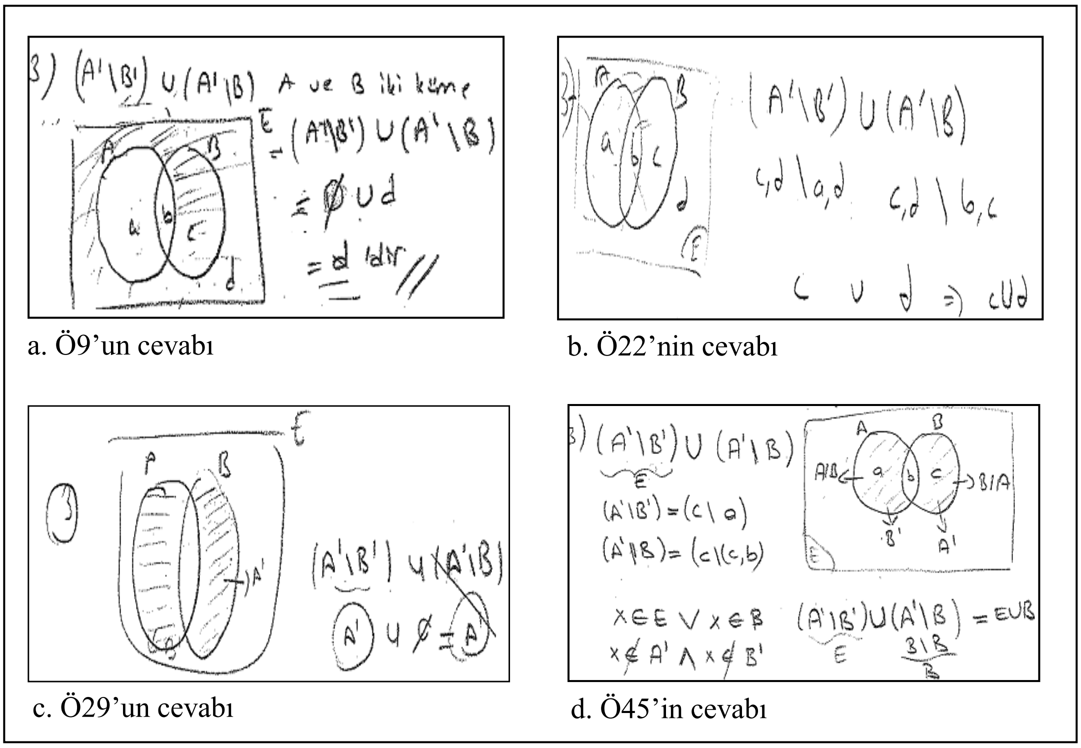


Şekil 10. Ö46’nın S_k3’e verdiği cevap

R_k5 operatörünü kullandıkları belirlenen yukarıdaki öğrencilerden Ö29 ve Ö36 dışındakiler kümelerin kesişimi sonucunda oluşan bölgelere harfler vermiş ve bu harfler yardımıyla istenen kümeyi bulmaya çalışmışlardır (Bkz. Şekil 11a, Şekil 11b, Şekil 11d). Bu nedenle $R_k^{-}1$ operatörünü kullandıkları görülmektedir. Ö9, Ö22, Ö48, Ö49 ve Ö57 kodlu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde kümelerde eleman sayısı ve eleman kavramlarının gösterimiyle ilgili sorun yaşadıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 11a, Şekil 11b). Yaşanan bu sorun bir bakıma gösterimlerle de ilgili olduğu için, 3.1.2. numaralı bölümde detaylandırılacaktır.

Ö8, Ö11, Ö21, Ö29, Ö35, Ö36 ve Ö45 kodlu öğrencilerin çizimleri incelendiğinde aynı zamanda $A' = B \setminus A$ ve $B' = A \setminus B$ olarak düşündükleri ve bu nedenle hata yaptıkları görülmüştür (Bkz. Şekil 11c, Şekil 11d). Ö45 kodlu öğrenci ile yapılan klinik mülakatta, öğrencilerin böyle düşünmelerine sebebiyet veren bilginin $A \cup B = E$ bilgisi olduğu ortaya çıkmıştır:

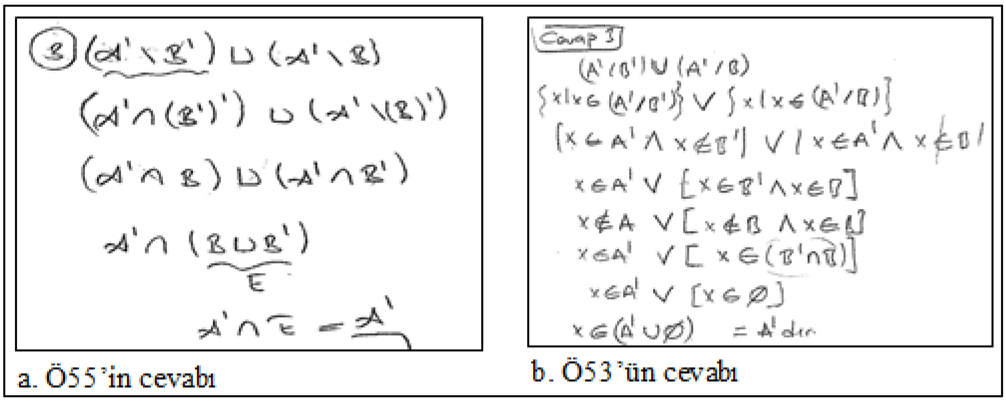
A: Şurada 3. soruda neden böyle düşündün?
A: Şimdi A’nın tümleyeni B\A, B’nin tümleyeni de A\B dir öyle mi?
Ö45: Evet.
[…]
Ö45: Ya ben burada evrensel kümeyi alsaydım bu şekilde yaptığım doğru olabilirdi. Ama evrensel kümeyi almadığım için hata yaptım.
A: Yani sen $A \cup B$ kümesinin dışındaki elemanları düşünmedin. O yüzden hata yaptın.
Ö45: Evet



a. Ö9'un cevabı b. Ö22'nin cevabı c. Ö29'un cevabı d. Ö45'in cevabı

Şekil 11. Öğrencilerin S_k3'e verdikleri cevaplar

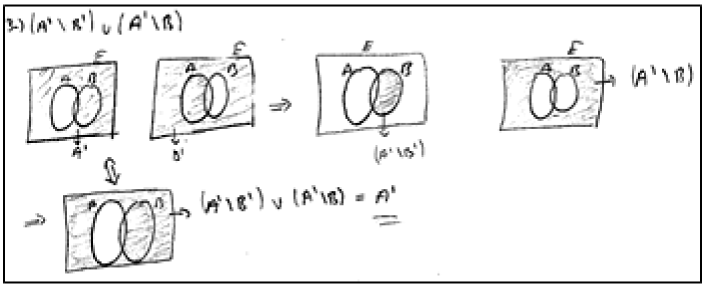
Benzer şekilde Ö25, $A'\backslash B$ kümesini $A'\cap B'$ şekline dönüştürdükten sonra $A'\cap B'=\phi$ eşitliğini yazarak, Ö38 ise $A'\backslash B=\phi$ eşitliğini doğrudan kabul ederek A veya B kümesinin elemanları dışında eleman düşünmedikleri söylenebilir. Bu durumda tüm bu öğrencilerin çözümlerde kullanılan operatör; $R^{-}_{k}7$: *A ve B herhangi iki küme ve E evrensel küme ise* $A\cup B=E$ *dir*, olarak belirlenmiştir.



a. Ö55'in cevabı b. Ö53'ün cevabı

Şekil 12. Öğrencilerin S_k3'e verdikleri cevaplar

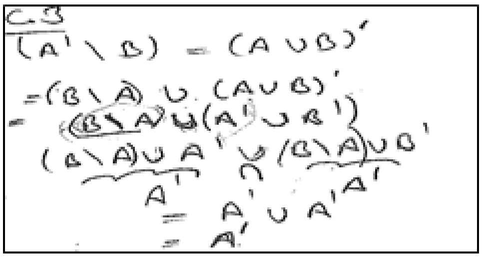
Şekil 12'nin devamı



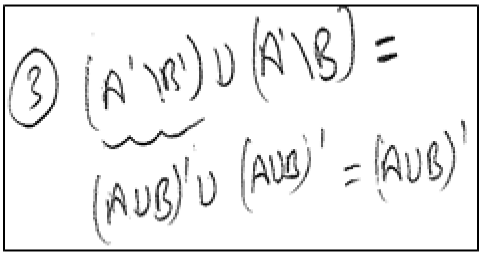
c. Ö33'ün cevabı

Üçüncü soruyu kümelerle işlemleri, tanımları kullanarak veya Venn şemasından yararlanarak çözmeyi tercih eden öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö13, Ö19, Ö26, Ö43, Ö55 ve Ö58 (Bkz. Şekil 12a) işlemlerin özelliklerini, Ö53 (Bkz. Şekil 12b) tanımları, Ö33 (Bkz. Şekil 12c) ise Venn şemasını doğru kullanarak sonuca ulaşmayı başarmışlardır. Bu nedenle çözümlerde öğrencilerin *R_k8: Kümelerde işlemlerle ilgili özellikler ve tanımlar* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

R_k8 operatörünü *hatalı* kullandıkları için doğru sonuca ulaşamayan öğrencilerden Ö3; $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (Bkz. Şekil 13a), Ö4, Ö6 ve Ö30 $(A' \setminus B) = E$ (Bkz. Şekil 13b); Ö5 $(A' \setminus B') = (AUB)'$ (Bkz. Şekil 13c), Ö27 ve Ö56 $A' \setminus B' = A \setminus B$ (Bkz. Şekil 13d), Ö32 $(A' \setminus B') = A \setminus \mathrm{B} \cup B \setminus \mathrm{A}$, Ö41 ve Ö47 kodlu öğrencilerden Ö41 $(A' \setminus B') = B$ ve $(A' \setminus B) = A$ Ö47 ise $(A' \setminus B') = A \cup B$ eşitliklerini kullanmışlardır.



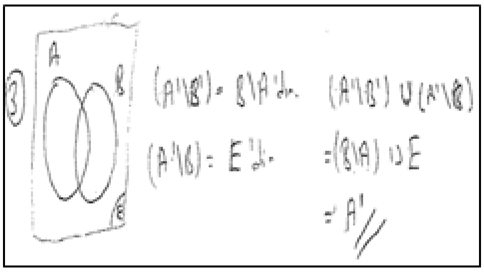
a.Ö3'ün cevabı



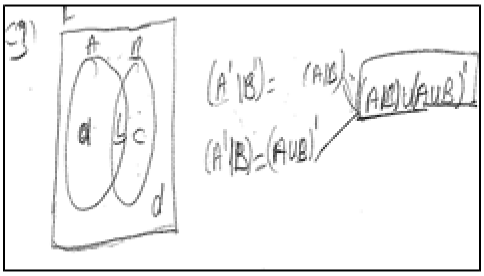
b. Ö5'in cevabı

Şekil 13. Öğrencilerin S_k3'e verdikleri cevaplar

Şekil 13'ün devamı

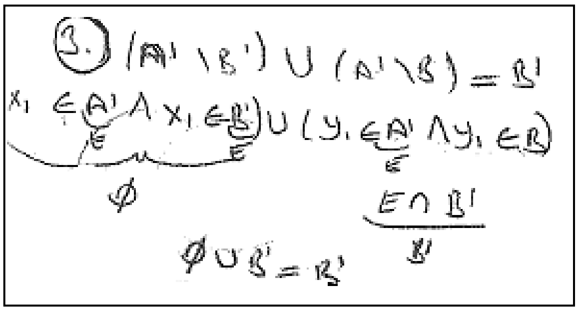


c.Ö4'ün cevabı



d. Ö27'nin cevabı

Soruyu kümelerle fark işleminin tanımını kullanarak çözen öğrencilerden Ö18'in ve Ö24'ün fark işleminin tanımı yanlış kullandıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 14). Bu nedenle R_k8 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 14. Ö18'in S_k3'e verdiği cevap

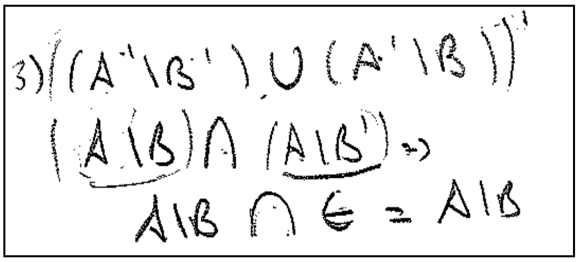
Ö10, Ö12, Ö15, Ö34, Ö37, Ö52 ve Ö54 kodlu öğrenciler $(A^{'} \setminus B^{'}) \cup (A^{'} \setminus \mathrm{B}) = \mathrm{A}^{'} \setminus (\mathrm{B}^{'} \cup \mathrm{B})$ şeklinde bir ifade kullanarak fark işleminin birleşme işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu düşünmüşlerdir (Bkz Şekil 4). Bu nedenle kullandıkları operatör $R^{-}_{k}9$*: A, B ve C kümeleri için* $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ *dir,* olarak belirlenmiştir. Ö34'ün mülakat verileri operatörü doğrular niteliktedir:

A: Peki, $(A' \setminus B') \cup (A' \setminus B)$ ifadesinden $A' \setminus (B' \cup B)$ ifadesine geçişi anlatır mısın?
Ö34:Dağılma özelliğini kullandım.
A: Dağılma özelliğini kullandın? Neyin ne üzerine dağılma özelliğini kullandın?
Ö34:Farkın birleşim üzerine dağılma özelliğini

Ö39 ve Ö44’ün benzer çözümleri incelendiğinde öğrencilerin “bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisidir” özelliğinden hareketle kümeleri tümleyenden kurtarmak için tekrar tümleyen aldıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 15). Ö39 yapılan klinik mülakatta;

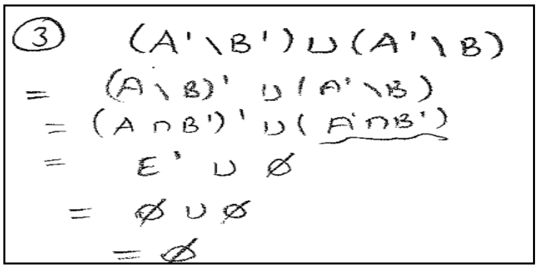
> A: Neden burada bütün ifadenin tümleyenini alma gereği duymuşsun? Bak dıştaki parantezi sen çizmişsin tümleyen yazmışsın.
> Ö39: Şöyle hani siz yapıyordunuz ya, A’nın tümleyenin tümleyeni alınca A kalıyor, B’nin tümleyeninin tümleyeni B oluyor.

şeklinde ifadelerde bulunmuştur. Bu çözümlerden ve mülakattan hareketle öğrencilerin kullandıkları operatör; *$R^{-}_{k}10$: Tümleyeni olan bir ifadeyi, tekrar tümleyenini alarak tümleyenden kurtarma,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 15. Ö39’un S_k3’e verdiği cevap

Ö28 ise $(A'\backslash B')$ ifadesindeki tümleyen işlemini parantezin dışına alarak hatalı sonuca ulaşmıştır (Şekil 16). Bu çözümde kullanılan operatör, *$R^{-}_{k}11$: A ve B kümeleri için $(A'/B')=(A/B)'$ dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 16. Ö28’in S_k3’e verdiği cevap

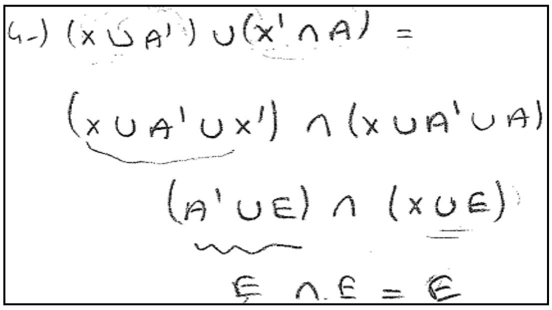
Üçüncü soruda belirlenen operatörlere bakıldığında önceki sorularda ortaya çıkan $R^{-}_{k}1$, $R^{-}_{k}4$ ve R_k5 operatörlerinin tekrarlarının yanı sıra 5 yeni operatör belirlenmiştir.

3.1.1.4. Dördüncü Soru

S_k4: $(X \cup A')\bigcup(X \cup A')'$ *kümesini en sade şekilde ifade ediniz.*

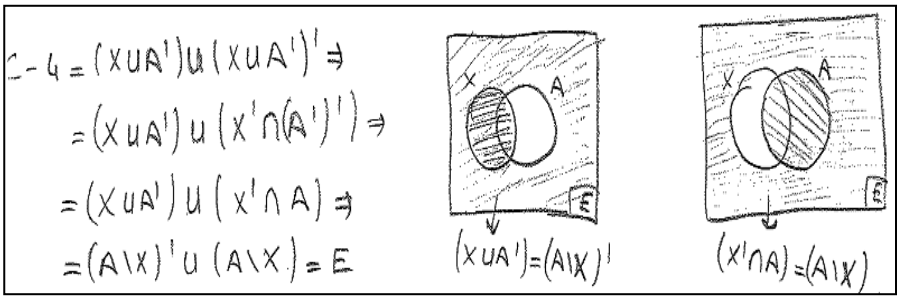
Bu soruya 4 öğrenci cevap vermemiştir. Kalan öğrencilerden 19'u soruyu doğru cevaplarken, 11'i ise soruya eksik, 27'si ise yanlış cevap vermişlerdir.

Soruya doğru cevap veren öğrenciler arasında yer alan Ö3, Ö21 ve Ö58 kodlu öğrenciler $(X \cup A')$ ifadesini bir küme olarak düşünerek birleşim işleminin kesişim üzerine dağılma özelliğini kullanmışladır (Bkz. Şekil 17). Bu bağlamda kullandıkları operatör *R_k12: A, B ve C kümeleri için* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$ *dir,* şeklinde belirlenmiştir.



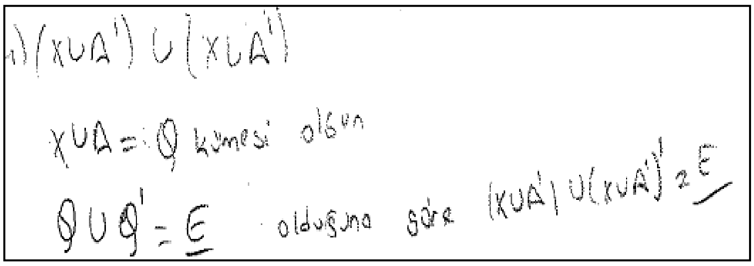
Şekil 17. Ö21'in S_k4'e verdiği cevap

Kümelerle işlem özelliklerini (*R_k8)* kullanıp, Venn Şemasından yararlanan (*R_k5)* Ö34 ve Ö51 doğru sonuca ulaşmayı başarmışlardır (Bkz. Şekil 18).



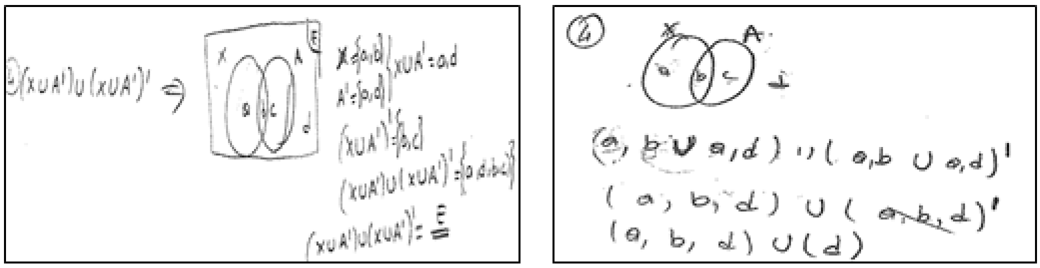
Şekil 18. Ö34'n S_k4'e verdiği cevap

Soruya doğru cevap veren öğrencilerden Ö5, Ö6, Ö10, Ö26, Ö43'ün benzer ifadeleri farklı bir sembol ile göstererek (XUA=Q diyerek) soruyu sadeleştirdikleri tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 19). Bu öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları operatör *R_k13: Bir ifadede yer alan karmaşık terimleri bir sembolle göstererek ifadeyi sade şekilde yazma,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 19. Ö6'nın S_k4'e verdiği cevap

Soruyu farklı bir çözüm yolu takip ederek çözen Ö7, Ö8, Ö14, Ö32, Ö40, Ö48, Ö53, Ö57, Ö59, Ö60 ve Ö61, kesişen iki küme çizerek bu kesişim sonucunda oluşan kümelere harfler vermişlerdir. Bu öğrencilerden Ö48 ve Ö61 dışındakiler bu harfler yardımıyla istenen kümeyi belirlemişlerdir (Bkz. Şekil 20a). Ö48 ve Ö61 ise istenen kümeyi hatalı bulmuşlardır (Bkz. Şekil 20b). Bu çözümlerde ortak olan öğrencilerin verilen kümeleri standart olarak çizmiş olmalarıdır. Bu nedenle öğrencilerin *R_k5* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

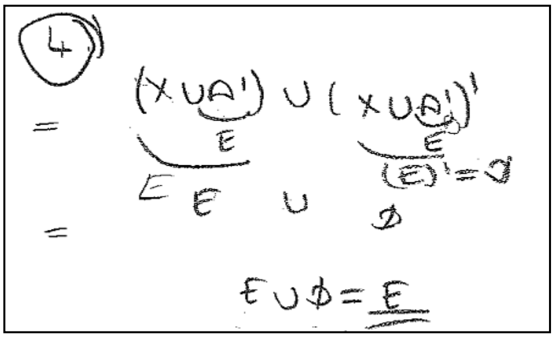


a. Ö40'ın cevabı b.Ö48'in cevabı

Şekil 20. Öğrencilerin S_k4'e verdikleri cevaplar

R_k8 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenen Ö1, Ö4, Ö16, $X \cup A' = A \setminus X$; Ö2, $X \cup A' = E$; Ö30, Ö46, Ö47, $X \cup A' = X \setminus A$; Ö33, $X \cup A' = A'$, Ö56, $X \cup A' = X' \cup A$ eşitliklerini doğru kabul etmişlerdir.

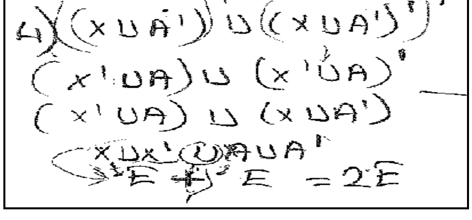
Ö18 ve Ö39 kodlu öğrencilerin çözümlerinde $A' = E$ olarak düşündükleri için sonucu doğru olarak bulmalarına rağmen hatalı bir yol izledikleri göze çarpmıştır (Bkz. Şekil 21). Bu nedenle kullandıkları operatör *R^-_k14: E evrensel küme olmak üzere herhangi bir A kümesi için $A' = E$ dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 21. Ö18'in S_k4'e verdiği cevap

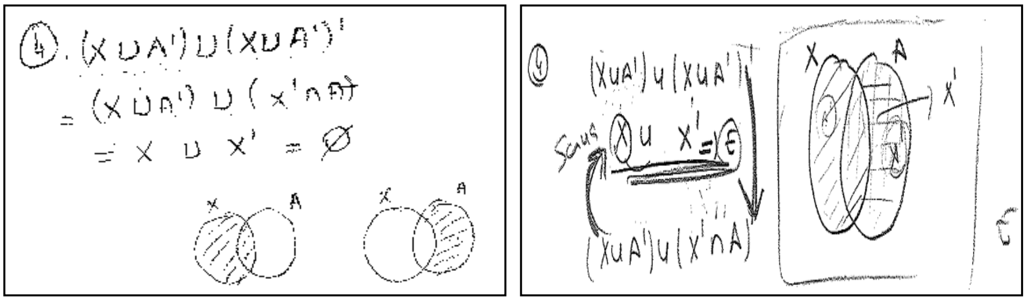
Ö44 verilen ifadedeki tümleyenden kurtulmak için tüm ifadenin tümleyenini almaya çalışmıştır (Bkz. Şekil 22). Ö45 ise Ö44'den farklı olarak, bütün ifadenin değil de tümleyeni istenmeyen ilk ifadenin tümleyenini almıştır. Bu nedenle kullanılan operatör; *R^-_k10* olarak belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Ö44 çözümünü aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

A: Dördüncü soruda neden bütün ifadenin tümleyenini almışsın […]
Ö44: O tümleyenlerden kurtulup, sade şeklini istemişsiniz ya hani o yüzden.
A: O halde bir tümleyeni alınan bir ifadenin sade şekli istenirse, tekrar tümleyen alarak ifadeyi tümleyenden kurtarabileceğin gibi bir genellememi var kafanda?
Ö44: Evet öyle bir şey varmış demek ki.



Şekil 22. Ö44'ün S_k4'e verdiği cevap

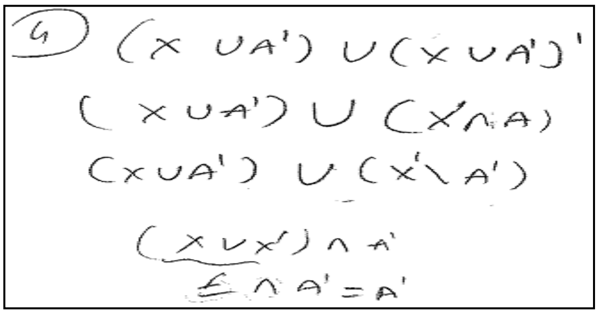
Ö20, Ö23, Ö25, Ö28, Ö29, Ö31, Ö35, Ö36, Ö37, Ö54 $X \cup A'$=X olarak düşünmüşlerdir. Bu hatanın altında yatan nedenin, öğrencilerin $X \cup A$ kümesini evrensel küme olarak düşünmeleri ve evrensel kümenin bu iki kümenin elemanları dışında elemanı olmadığını kabul etmeleri olduğu görülmektedir (Bkz. Şekil 23). Ö23, Ö25, Ö35 ve Ö36 sonucu $X \cup A$ olarak bırakmışlardır. Ö29 koldu öğrenci ise bulduğu sonucun E olduğu belirtmiştir (Bkz. Şekil 23b). Öğrencilerin çözümlerinden hareketle R_k5 ve R^-_k7 operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö28'in cevabı b.Ö29'un cevabı

Şekil 23. Öğrencilerin S_k4'e verdikleri cevaplar

Ö19'un çözümü incelendiğinde, kümelerin maruz kaldığı işlemlerin farklı olmasına dikkat etmeden küme ile tümleyenini bir araya getirmeye çalıştığı görülmektedir (Bkz. Şekil 24). Bu nedenle R^-_k15*: Aynı ifadede yer alan bir küme ile tümleyeni aralarındaki işlemlere dikkat etmeksizin yan yana getirilerek sadeleştirilir,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 24. Ö19'un S_k4'e verdiği cevap

4 öğrenci (Ö17, Ö27, Ö50, Ö52) bu soruya cevap vermediğinden, Ö46 kodlu öğrenci sorunun cevabını hiçbir açıklama yapmadan doğrudan yazdığından, Ö38 ve Ö52 kodlu öğrencilerin çözümleri anlaşılamadığından bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir. Ayrıca çözümü tamamlayamayan Ö9, Ö11, Ö12, Ö13, Ö15, Ö22, Ö24, Ö41, Ö49, Ö55 koldu öğrenciler ikinci ifadenin tümleyenini alırken sadece De Morgan kuralını doğru kullanmışlardır. Bu öğrenciler için de herhangi bir operatör belirlenememiştir.

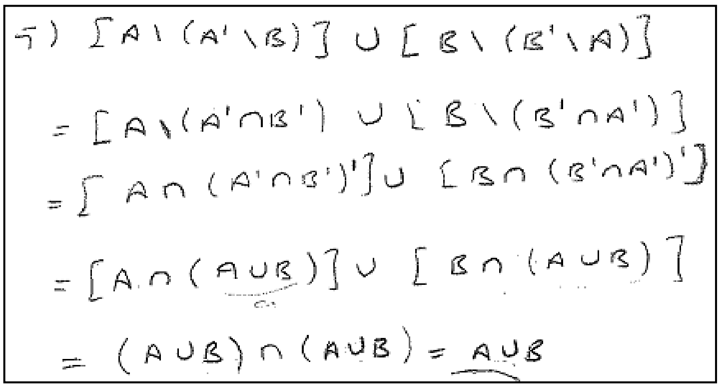
Dördüncü soruda incelenen öğrenci cevaplarından 4 yeni operatör belirlenirken, önceki sorularda ortaya çıkan R_k5, $R^{-}_{k}7$, R_k8 ve $R^{-}_{k}10$ operatörlerinin tekrarı söz konusu olmuştur.

3.1.1.5. Beşinci Soru

S_k5: $[A\setminus(A'\setminus B)]\cup[B\setminus(B'\setminus A)]$ *kümesinin en sade şeklini bulunuz.*

Soruya 9 öğrenci cevap vermezken, 16 öğrenci doğru, 35 öğrenci yanlış, 1 öğrenci ise eksik cevap vermiştir.

Bu soruya işlemlere ait kuralları ve işlem özelliklerini (*R_k8*) kullanarak cevap veren öğrencilerden Ö1, Ö4, Ö13, Ö43, Ö54, Ö55 ve Ö58 kodlu olanlar doğru cevap vermişlerdir (Bkz. Şekil 25).



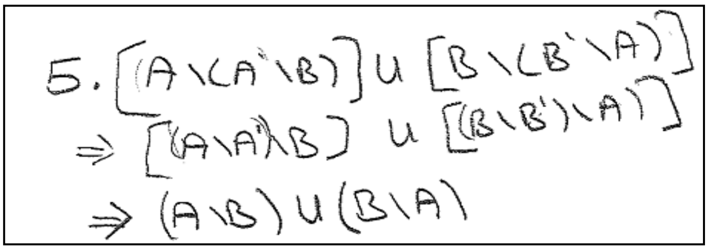
Şekil 25. Ö54'ün S_k5'e verdiği cevap

R_k8 operatörünü kullanarak soruyu çözmeye çalışan her öğrenci özellikleri ve kuralları doğru kullanamamaktadır. Bu bağlamda *R_k8*'in yanlış kullanımı birçok şekilde

ortaya çıkmıştır: $A'\backslash B$=E (Ö6, Ö7, Ö15 ve Ö30), $A'\backslash B$=B veya $A'\backslash B = A$ (Ö2, Ö5, Ö33 ve Ö45, Ö12 ve Ö47), $A'\backslash B = (A \backslash B)'$ (Ö51), $A'\backslash B = B'$ ve $B'\backslash A = A'$ (Ö16).

Bazı öğrenciler (Ö12, Ö26, Ö32) fark işleminin dağılma özelliğine (Bkz. Şekil 26a), bazıları da (Ö34 ve Ö56) birleşme özelliğine (Bkz. Şekil 26b) sahip olduğunu düşünerek çözümlerini gerçekleştirmişlerdir. Bu öğrencilerden Ö12, Ö26 ve Ö32 kodlu olanlar R^{-}_{k}*16: A, B ve C kümeleri için* $(A \backslash B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$ *'dir,* operatörünü kullanırken Ö34 ve Ö56 kodlu öğrencilerin ise R^{-}_{k}*9* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö56 öğrencisi yaptığı çözümü (Bkz. Şekil 26b) aşağıdaki ifadelerle anlatmıştır:

A: 5. soruya gelelim, şu okla gösterdiğin aşamaya geçiş nasıl oldu? A nereye gitti?
Ö56: $B' \backslash A$ parantezinde düşündüm. Sonra da B yi birleştirdim.
A: Hıım, farkın dağılma özelliği var gibi mi düşündün?
Ö56:Evet
[…]
A: Evet, $B' \backslash A$ iki ifadede de ortak olması ve fark işleminin ortak olması mı bunu sana böyle düşündürdü?
Ö56: Evet

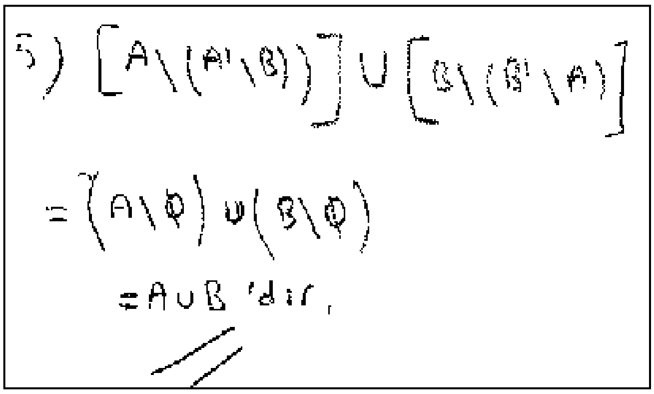


a. Ö12'nin cevabı

b. Ö56'nın cevabı

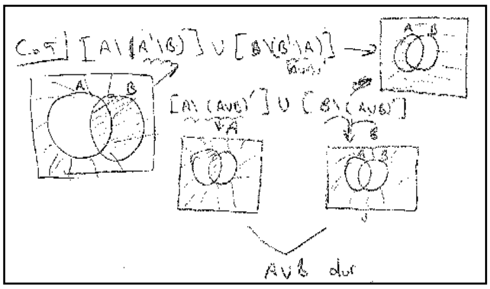
Şekil 26. Öğrencilerin S_k5'e verdikleri cevaplar

Ö9, Ö11, Ö19, Ö20, Ö25, Ö28, Ö29, Ö36 ve Ö38 kodlu öğrenciler sonucu doğru bulsalar da çözümlerinde $A'\backslash B = \phi, B'\backslash A = \phi; A' \cap B' = \phi$ (Bkz. Şekil 27) gibi ifadeler kullanmışlardır. Bunun nedeni $A \cup B$=E olarak kabul edilmesi, diğer bir ifade ile R^{-}_{k}*7* operatörünün kullanılmasıdır. Ö9 kendisi ile yapılan klinik mülakatta A kümesinin tümleyeninin, sadece B\A'ya ait olan elemanlarını düşündüğünü, A'ya ait olmayan ama Evrensel kümeye ait olan elemanları düşünmediğini ifade etmiştir.

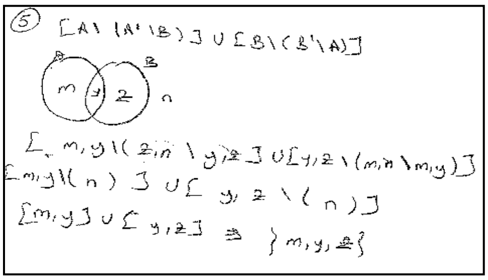


Şekil 27. Ö9'un S_k5'e verdiği cevap

Diğer bir çözüm yolu olarak, kümeleri kesişecek şekilde standart olarak çizen 19 öğrenciden Ö3 ve Ö53, oluşturdukları standart Venn şeması yardımıyla, doğru tarama yaparak istenen kümeyi bulmuş ve bu kümeyi matematiksel olarak ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 28a). Ö14, Ö21, Ö27, Ö40, Ö41, Ö59 ve Ö60 ise standart olarak çizdikleri kümelere eleman vererek istenen kümeyi bu elemanlar (eleman sayıları) cinsinden bulduktan sonra matematiksel olarak ifade ederek doğru sonuca ulaşırken, Ö8, Ö18, Ö22, Ö35, Ö37, Ö44, Ö48, Ö49, Ö57 ve Ö61 ise istenen kümeyi matematiksel olarak ifade edememişlerdir (Bkz. Şekil 28b). Bu nedenle öğrencilerin *R_k5* operatörünü kullandıkları görülmektedir.



a.Ö3'ün cevabı



b. Ö48'in cevabı

Şekil 28. Öğrencilerin S_k5'e verdikleri cevaplar

Ö10, Ö17, Ö23, Ö24, Ö31, Ö39, Ö42, Ö46, Ö50 kodlu öğrenciler soruya cevap vermedikleri, Ö52 kodlu öğrenci ise sonucu işlem yapmadan doğrudan yazdığı için, kullandıkları operatör belirlenememiştir.

Soru ile ilgili olarak ortaya çıkan operatörlere bakılacak olursa, 1 tane yeni operatörün belirlenmiş olmasının yanı sıra R_k5, R^-_k7, R_k8 ve R^-_k9 operatörlerinin tekrarlandığı göze çarpmaktadır.

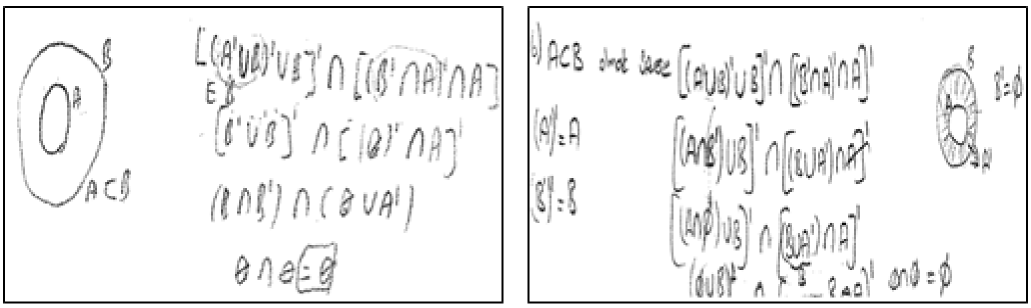
3.1.1.6. Altıncı Soru

S_k6: *$A \subset B$ olmak üzere $[(A' \cup B)' \bigcup B]' \cap [(B' \cap A)' \cap A]'$ kümesinin en sade şeklini bulunuz.*

Bu soruya 9 öğrenci cevap vermemiştir. 3 öğrencinin ise eksik cevap verdiği tespit edilmiştir. Diğer öğrencilerden 7 si doğru sonuca ulaşmayı başarırken, 42 öğrenci ise yanlış çözüm yapmıştır.

Ö1, Ö3, Ö33, Ö43 ve Ö54 kodlu öğrenciler kümelerle işlemlerin özelliklerini (*R_k8*) kullanarak soruyu doğru çözmüşlerdir. *R_k8* operatörünü *hatalı* kullandıkları için doğru sonuca ulaşamayan öğrenciler; $A \cap B' = B \setminus A$ (Ö2), $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (Ö5, Ö11, Ö34 ve Ö44), $A' \cap A = E$ (Ö15 ve Ö47), $A' \cup B' = B \setminus A$ (Ö21), $A' \cap E = E$ (Ö25), $B \cap B' = B$ (Ö51) ve; $A' \cup B = B \setminus A$ (Ö53) eşitliklerini kullanmışlardır.

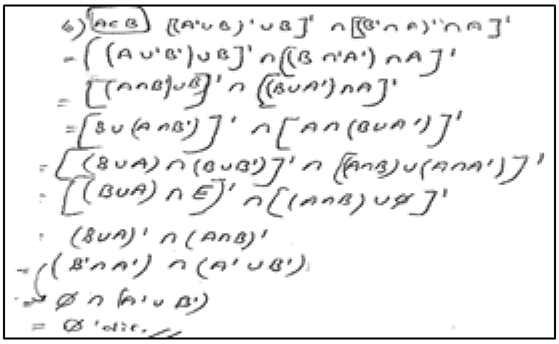
Ö18 ve Ö39 ise bir kümenin tümleyenini evrensel küme olarak düşünmüşlerdir. Nitekim Ö18 çözümünde $B' = E$ olarak alırken Ö39 ise $A' = E$ olarak düşünmüştür. Bu bağlamda öğrencilerin kullandıkları operatör; *R^-_k14* olarak belirlenmiştir.



a. Ö20'nin cevabı b. Ö45'in cevabı

Şekil 29. Öğrencilerin S_k6'ya verdikleri cevaplar

Şekil 29’un devamı

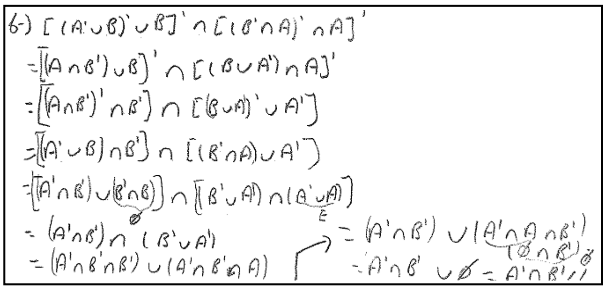


c. Ö9’un cevabı

Ö7, Ö20, Ö36, Ö38 ve Ö45 kodlu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde $A \subset B$ olacak şekilde Venn şeması oluşturdukları ve B’yi evrensel küme olarak kabul ettikleri tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 29). Ö20 ve Ö45 çözümlerinde $A' \cup B = B$ olarak düşünmeleri, “$A \subset B$ ise B evrensel kümedir” şeklinde düşündüklerini (Bkz. Şekil 29a), yine Ö9 ve Ö28 kodlu öğrencilerin $A' \cap B' = \phi$ olarak düşünmeleri (Bkz. Şekil 29c) de $A \cup B$ kümesini evrensel küme olarak aldıklarını göstermektedir. Bu düşüncelerin altında yatan operatör $R^{-}_{k}7$ olarak belirlenmiştir. Ö9 mülakat sırasında A ve B kümelerinin dışında başka eleman olduğunu düşünmediği için $A' \cap B' = \phi$ eşitliğini yazdığını ifade ederken, Ö45 ise mülakatta B kümesinin dışında başka eleman olmadığını düşündüğünü aşağıdaki şekilde dile getirmiştir:

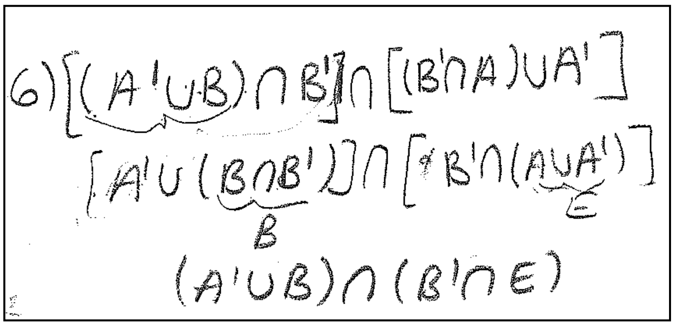
A: B' neden boş küme oldu?
Ö45: A, B nin alt kümesi ise zaten iki tane küme varsa boş kümedir.
A: Ama dikkat et B nin dışında başka eleman yok mu? Yine evrensel kümeyi hatalı düşündün gördün mü?
Ö45: Evet.

Ö19, Ö29, Ö42, Ö58 ve Ö59’un ise verilen şartı göz ardı ettikleri ve bu nedenle sonucu $A' \cap B'$ şeklinde buldukları görülmektedir (Bkz. Şekil 30). Burada $R^{-}_{k}4$ operatörünün kullanımı söz konusudur.



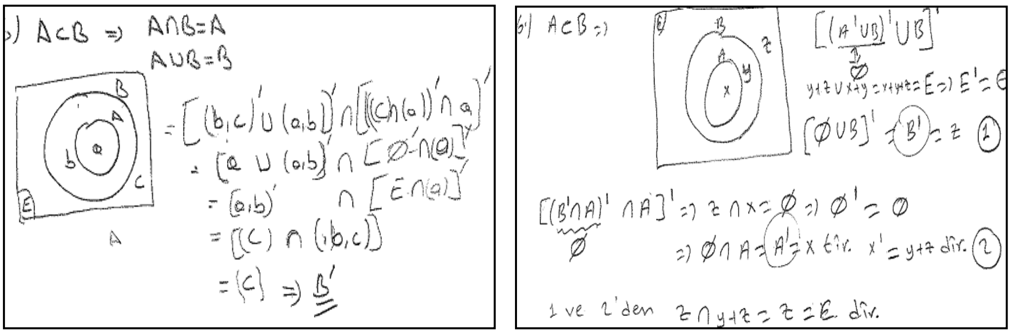
Şekil 30. Ö58'in S_k6'ya verdiği cevap

Ö13, Ö22, Ö24, Ö26, Ö27, Ö41, Ö48, Ö56 ve Ö60 çözümü kolaylaştırmak adına, işlemler arasında uyum olmasa da birleşme özelliğini kullanarak bir küme ile tümleyenini yan yana getirmeye çalıştıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 31). Bu nedenle öğrencilerin $R^{-}_{k}15$ operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 31. Ö41'in S_k6'ya verdiği cevap

Altıncı soruyu farklı bir yol izleyerek çözen Ö6, Ö8, Ö14, Ö16, Ö35 ve Ö57 şartı sağlayacak şekilde kümeleri çizerek bu kümelere elemanlarını (eleman sayısını) temsilen harfler vermişlerdir. Daha sonra istenen kümeyi bu harfler cinsinden bulmaya çalışmışlardır. Ö14 ve Ö16 bu yolla doğru çözüme ulaşmış ve istenilen kümeyi matematiksel olarak ifade edebilmişlerdir (Bkz. Şekil 32a). Ö6, Ö8 ve Ö35 hatalı sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 32b).



a. Ö14’ün cevabı b. Ö35’in cevabı

Şekil 32. Öğrencilerin S_k6’ya verdikleri cevaplar

Bu öğrencilerin özel bir örnek üzerinden çözüm yaptıkları için $R_k^{-}1$ operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Altıncı soruya Ö4, Ö17, Ö23, Ö31, Ö37, Ö46, Ö49, Ö50 ve Ö61 kodlu öğrenciler cevap vermezken, Ö40, Ö55 ve Ö12 kodlu öğrenciler sorunun belli bir kısmını doğru olarak cevaplamalarına rağmen çözümü tamamlayamamışlardır. Bu nedenle bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir. Ö10 ve Ö32 kodlu öğrenciler ise soruyu cevap kağıdına geçirirken hata yaptıkları için farklı bir soruya cevap verdikleri düşünülerek değerlendirmeye alınmamışlardır.

Altıncı soru ile ilgili olarak bulgular incelendiğinde yeni bir operatörün belirlenmediği görülmektedir. Önceki sorularda belirlenen $R^{-}_{k}1$, $R^{-}_{k}4$, $R^{-}_{k}7$, R_k8, $R^{-}_{k}14$ ve $R^{-}_{k}15$ numaralı operatörlerin tekrar ettikleri göze çarpmaktadır.

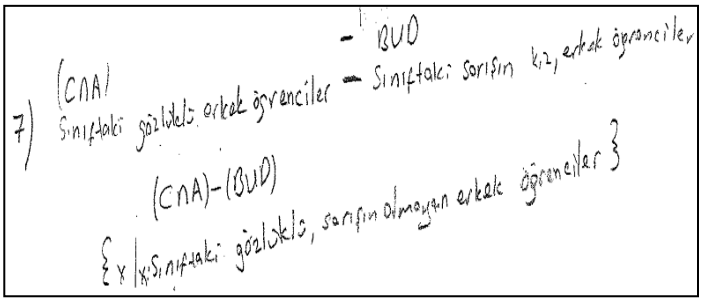
3.1.1.7. Yedinci Soru

S_k7: A={Sınıftaki gözlüklü öğrenciler}, B={Sınıftaki sarışın öğrenciler},C={Sınıftaki erkek öğrenciler},D={Sınıftaki kız öğrenciler} olduğuna göre, $(C \cap A) \setminus (B \cup D)$ *kümesini ortak özellik yöntemi ile yazınız.*

Yedinci soruya 4 öğrenci cevap vermezken, 11 öğrenci doğru, 25 öğrenci yanlış, 21 öğrenci ise eksik cevap vermiştir.

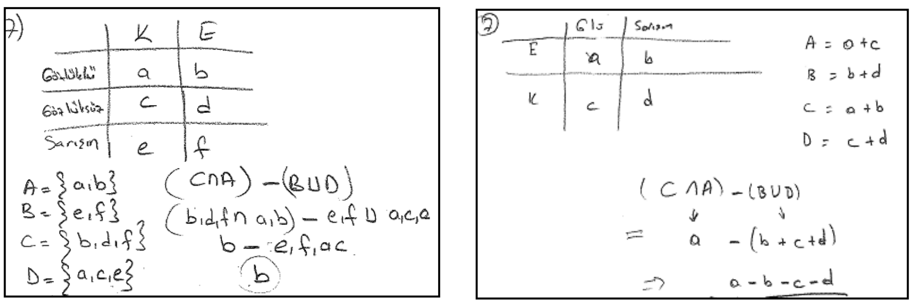
Bu soruya doğru cevap veren öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö4, Ö12, Ö13, Ö16, Ö34, Ö35, Ö37, Ö38 ve Ö60, istenen kümeyi bularak sözel olarak ifade etmeyi başarmışlardır (Bkz.

Şekil 33). Bu nedenle kullandıkları operatör *R_k17: Bir kümeyi ortak özellik yöntemi ile sözel olarak ifade etme* olarak belirlenmiştir.



Şekil 33. Ö2'nin S_k7'ye verdiği cevap

Bu soruda çözüme ulaşmak için *R^-_k18: Tablodan faydalanma* operatörünü kullandıkları belirlenen Ö8, Ö9, Ö10, Ö17, Ö22, Ö24, Ö29, Ö33, Ö36, Ö40, Ö44, Ö49, Ö50, Ö51, Ö53, Ö56, Ö57 ve Ö59 oluşturdukları tabloda kümelerin eleman sayılarını temsil eden harfler kullanarak istenen kümeyi bu harfler cinsinden bulmuşlar ancak sözel olarak ifade edememişlerdir (Bkz. Şekil 34a). Bu öğrencilerin aynı zamanda *R_k17* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Ö36, Ö49 ve Ö56 kodlu olanlar ayrıca kümelerde tanımlı fark işlemini, tam sayılarda tanımlı çıkarma işlemi gibi düşündükleri görülmüştür (Bkz. Şekil 34b). Bu nedenle *R^-_k19: Kümelerle fark işlemini, tam sayılarla çıkarma işlemi olarak düşünme,* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



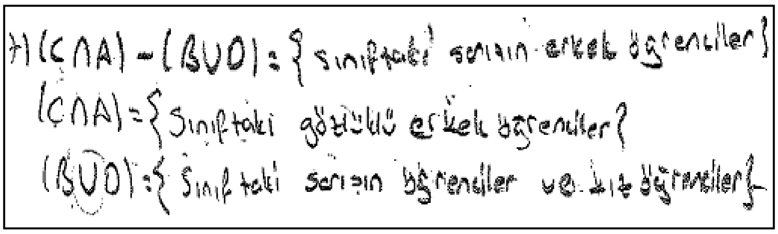
a. Ö44'ün S_k7'ye verdiği cevap

b. Ö49'un S_k7'ye verdiği cevap

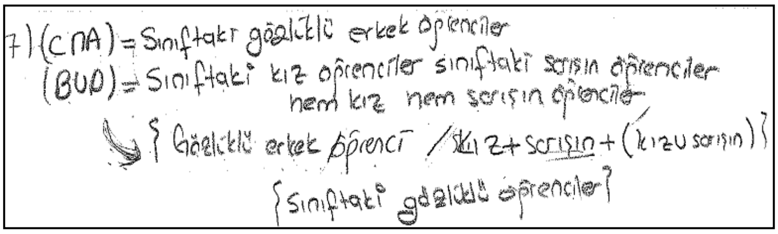
Şekil 34. Öğrencilerin S_k7'ye verdikleri cevaplar

İstenen kümeyi sözel olarak ifade ederken Ö3, Ö5-Ö7, Ö11, Ö14, Ö15, Ö18-Ö21, Ö25, Ö28, Ö30-Ö32, Ö39, Ö41, Ö43, Ö45, Ö48, Ö54, Ö55, Ö61 kodlu öğrencilerden bazılarının "veya" bağlacı ile $(B \cup D)$ kümesini ifade etmek yerine "ve" bağlacını kullanarak $(B \cap D)$ kümesini ifade ettikleri (Bkz. Şekil 35), bazılarının ise "+, virgül" kullanarak istenen kümeyi tam olarak ifade edemedikleri görülmektedir (Bkz. Şekil 35b) Ö41 kodlu öğrenci çözümünde yaptıklarını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

A: Çok karışık bir ifade yazmışşın sen, açıklar mısın ne kastettin?
Ö41: Burada şey diyecektim herhalde "sınıftaki sarışın kız öğrenciler."
A: "Sarışın kız öğrenciler" ifadesi bu iki kümenin birleşimini ifade ediyor mu? Sarışın kız öğrenci demekle, gözlüklü erkek öğrenci demek arasında ne fark var?
Ö41: Birleşimde, hem kız olacak hem sarışın olacak.
[…]
A: Acaba kümeleri sözel olarak ifade ederken sorun mu yaşıyorsun?
Ö41: Evet.



a. Ö39'un cevabı

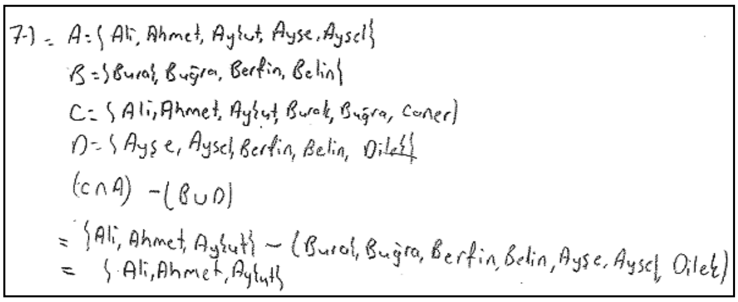


b. Ö41'in cevabı

Şekil 35. Öğrencilerin S_k7'ye verdikleri cevaplar

Bu öğrencilerin, kümeleri ortak özellik yöntemiyle sözel olarak ifade ederken kullanmaları gereken bağlaçları yerinde ve doğru kullanmadıkları görülmektedir. Bu nedenle çözümlerinde *R_k17* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.

Bir başka öğrenci (Ö58) ise kümelere özel elemanlar vererek, istenen kümeyi bu verdiği elemanlar cinsinden bulmuştur (Bkz. Şekil 36). Özel bir örnekten yararlanarak soruyu çözmeye çalışan bu öğrencinin *R^-_k20: Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşılır,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 36. Ö58'in Sk7'ye verdiği cevap

Ö23, Ö27, Ö46, Ö47 kodlu dört öğrenci yedinci soruya cevap vermezken, Ö42 ve Ö52 sonucu doğrudan yazdıkları, Ö26 kodlu öğrenci ise eksik çözüm yaptığı için bu öğrencilerin kullandıkları operatör belirlenememiştir.

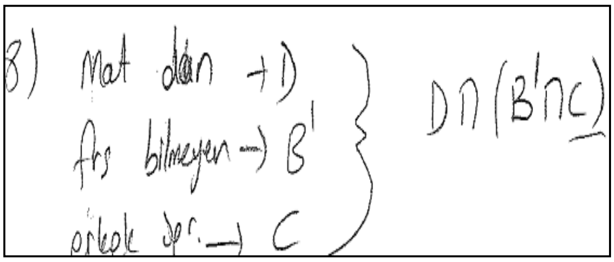
7. soru ile ilgili olarak yapılan analizden elde edilen bulgulara bakıldığında 3 tane yeni operatör belirlendiği görülmektedir.

3.1.1.8. Sekizinci Soru

S_k8: *A={Sınıfta İngilizce bilen öğrenciler}, B={Sınıfta Fransızca bilen öğrenciler}, C={Sınıftaki erkek öğrenciler}, D={Sınıfta Matematik dersi alan öğrenciler} kümeleri veriliyor. {Sınıfta matematik dersi alıp, Fransızca bilmeyen erkek öğrenciler} kümesini yazınız.*

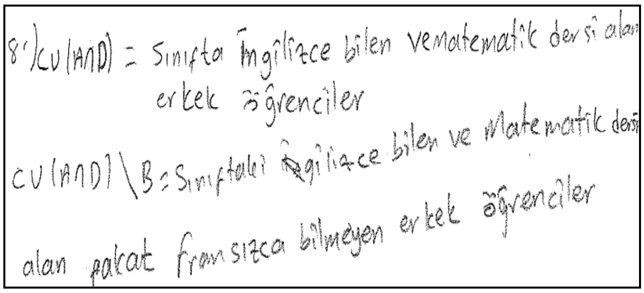
Sekizinci soruya 16 öğrenci cevap vermemiştir. Diğer öğrencilerin 7 si soruyu doğru olarak yanıtlamayı başarırken kalan 18 öğrenci yanlış çözüm yapmıştır.

Soruya doğru cevap veren öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö6, Ö10 ve Ö38 sözel olarak verilen kümeyi, işlemleri kullanarak matematiksel biçimde göstermişlerdir (Bkz. Şekil 37). Bu öğrencilerin çözümlerinde de görüldüğü gibi, *R_k21: Sözel olarak verilen bir kümeyi matematiksel olarak ifade etme* ve *R_k22: Kümelerde kesişim işlemini "ve", birleşim işlemi "veya" ile ifade etme* operatörleri kullanılmıştır.



Şekil 37. Ö1'in S_k8'e verdiği cevap

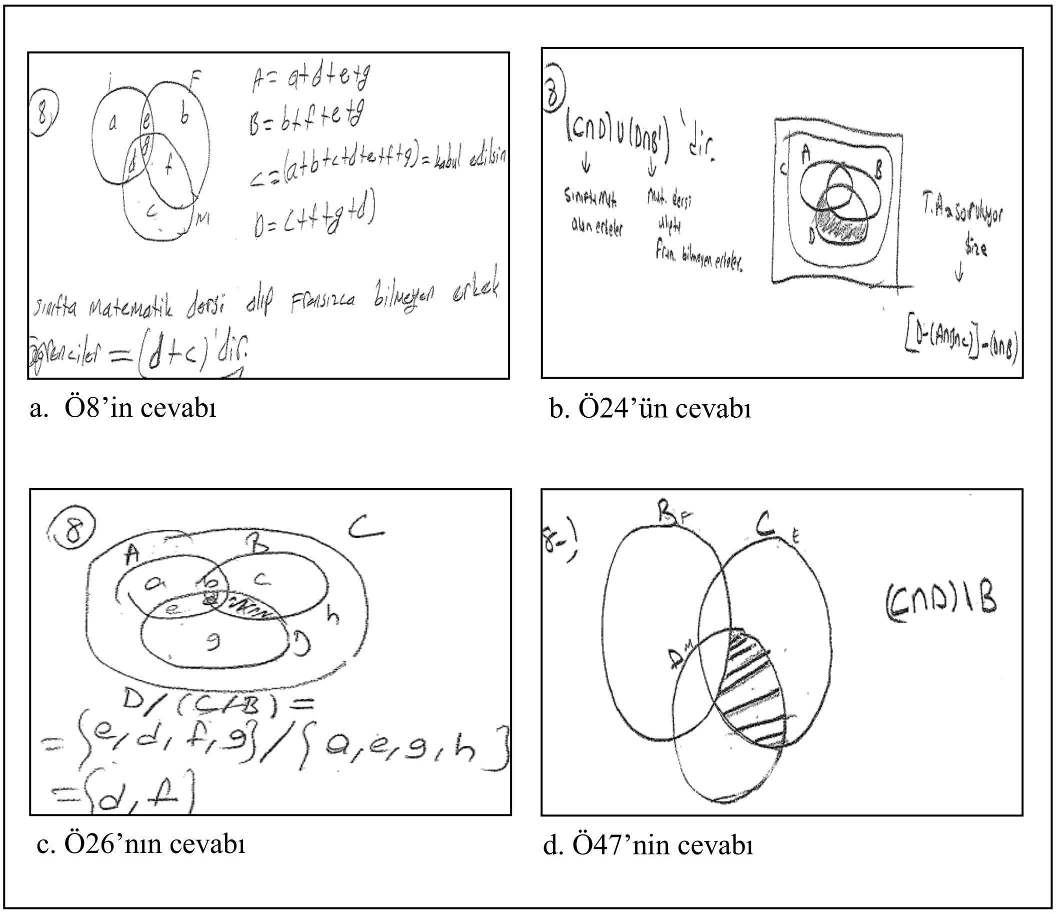
Ö4, Ö7, Ö14, Ö16, Ö19, Ö21, Ö25, Ö32, Ö35, Ö37, Ö39, Ö41, Ö42, Ö43, Ö48, Ö52, Ö54, Ö60 ve Ö61 kodlu öğrenciler ise istenen kümeyi işlemleri kullanarak matematiksel olarak ifade edememişlerdir (Bkz. Şekil 38). Bağlaçları yanlış algıladıkları için yanlış sonuca ulaşan bu öğrencilerin R_k21 ve R_k22 operatörlerini *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir. Ö35 kendisi ile yapılan mülakatta bağlaçları karıştırdığını şu şekilde ifade etmiştir:



Şekil 38. Ö35'in S_k8'e verdiği cevap

A: Sınıfta matematik dersi alıp Fransızca bilmeyen erkek öğrencileri $C \cup (A \cap D)$ diye düşündün. Neden birleşim düşündün burada? Sonuçta C kümesi erkek öğrenci olması durumu, bunlar kesinlikle erkek öğrenci mi?
Ö35:Doğrudur orada hata var.
A: Neden "veya" düşündürdü seni orada? Dönüşüm yaparken neden "veya" sembolünü kullandın?
Ö35:Orada hata yapıyorum hocam. Ben terimlerin anlamlarını unutmuşum karıştırmışım daha doğrusu. "Ve" ile " veya" yı karıştırmışım.

Venn Şeması çizerek çözümü yapan öğrencilerden Ö8, Ö27 ve Ö28 kodlu olanlar kümelere eleman sayılarını temsilen harfler vererek çözüme gitmeye çalışmışlardır. (Bkz. Şekil 39a). Ö26'nın ise, çizdiği kümelerin içine yerleştirdiği harfleri eleman olarak düşünüp işlem yaptığı görülmektedir (Bkz. Şekil 39c). Kümeleri standart bir şekilde çizip istenen kümeyi tarayarak bulmaya çalışan öğrencilerden Ö24 ve Ö59 taramayı hatalı yaptıkları için doğru sonuca ulaşamazken, Ö47 ve Ö56 kodlu olanlar ise doğru sonuca ulaşmayı başarmışlardır (Bkz. Şekil 39d). Tüm bu öğrencilerin R_k5 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö8'in cevabı

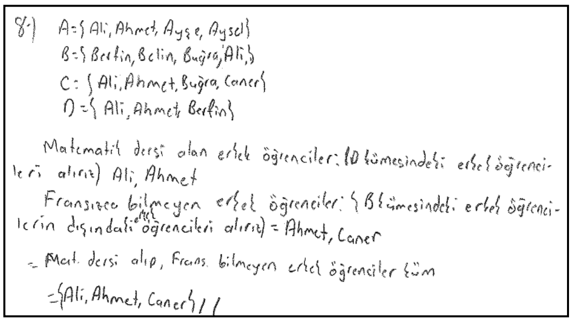
b. Ö24'ün cevabı

c. Ö26'nın cevabı

d. Ö47'nin cevabı

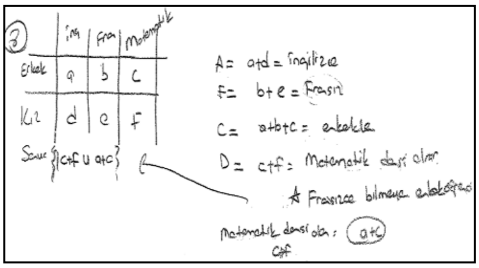
Şekil 39. Öğrencilerin S_k8'e verdikleri cevaplar

Ö26'nın yanı sıra Ö58'in de bir örnek üzerinden istenen kümeyi bulmaya çalıştığı görülmüştür (Bkz. Şekil 40). Bu öğrencilerin $R^{-}_{k}20$ operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

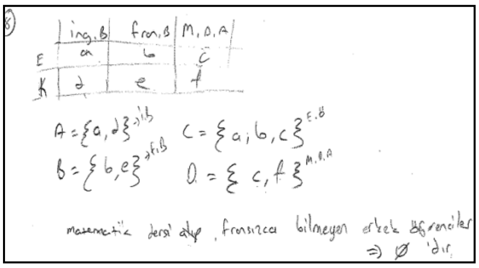


Şekil 40. Ö58'in S_k8'e verdiği cevap

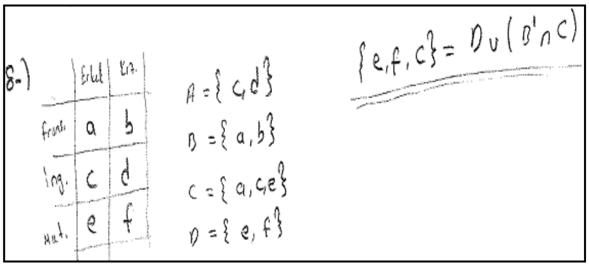
Ö9, Ö18, Ö22, Ö26, Ö29, Ö33, Ö49, Ö50 ve Ö57 kodlu öğrenciler ise tablo oluşturmuşlar, oluşturdukları tabloda kümelerin eleman sayılarını temsil eden harfler kullanmışlardır (Bkz. Şekil 41). Bu öğrencilerden Ö22 ve Ö33 dışındakiler istenen kümeyi bu harfler cinsinden bulurken, Ö22 ve Ö33 ise istenen kümenin elemanlarını yanlış belirledikleri için, bu kümeyi matematiksel olarak hatalı ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 41b, Şekil 41c). Tüm bu öğrencilerin çözüme ulaşmak için tablo oluşturmayı seçtikleri görülmüştür. Bu nedenle *R_k18* operatörünü kullandıkları görülmektedir.



a. Ö29'un cevabı



b. Ö22'nin cevabı



c. Ö33'ün cevabı

Şekil 41. Öğrencilerin S_k8'e verdikleri cevaplar

Sekizinci soruya Ö3, Ö5, Ö11, Ö12, Ö13, Ö15, Ö17, Ö23, Ö30, Ö31, Ö34, Ö36, Ö40, Ö44, Ö51 ve Ö55 kodlu öğrenciler cevap vermezken, Ö17'nin istenilen kümeyi hiçbir açıklama yapmadan doğrudan sözel olarak hatalı ifade etmesi, Ö20 kodlu öğrencinin kümelerin ayrık olduğunu belirterek istenilen kümenin boş küme olduğunu ifade etmesi ve Ö45'in çözümünün anlamsız olması nedeniyle bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Soru ile ilgili olarak 3 yeni operatör ortaya çıkarken, önceki sorularda belirlenen R_k5 ve R^-_k20 operatörlerinin bu soruda tekrarlandığı görülmektedir.

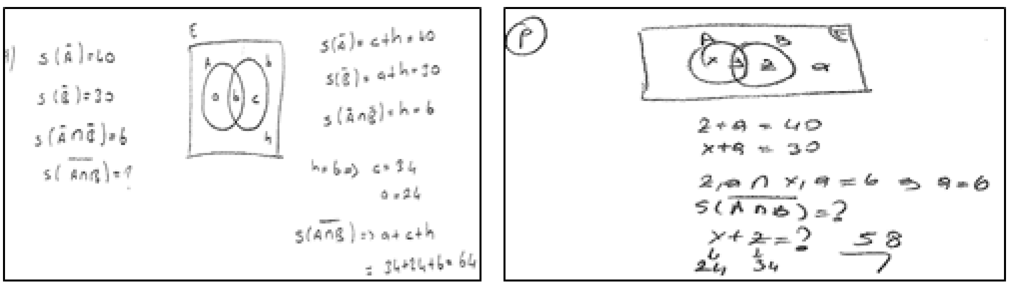
3.1.1.9. Dokuzuncu Soru

S_k9*: A ve B, E evrensel kümenin iki alt kümesidir.*

$s(A') = 40$, $s(B') = 30$, $s(A' \cap B') = 6$ *ise* $s(A \cap B)'$ *kaçtır?*

Öğrencilerin dokuzuncu soruya verdikleri cevapların analizinden elde edilen verilere genel olarak bakacak olursak, 48 öğrencinin soruyu doğru olarak, 10 öğrencinin ise yanlış olarak cevaplandırdığını, diğer 3 öğrencinin ise soruya cevap vermediğini görmekteyiz.

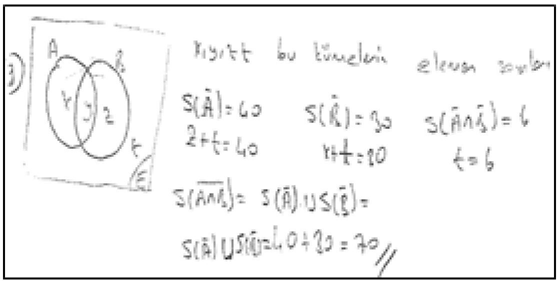
Soruya cevap vermeyen 3 öğrenci Ö31, Ö49 ve Ö61 şeklinde sıralanırken, kalan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (Ö1-Ö3, Ö5-Ö7, Ö9-Ö13, Ö16-Ö27, Ö29, Ö30, Ö32-Ö37, Ö39-Ö42, Ö44, Ö47, Ö50- Ö60) Venn şeması yardımıyla soruyu doğru çözmüşlerdir (Bkz. Şekil 42).



a.Ö54'ün cevabı   b. Ö48'in cevabı

Şekil 42. Öğrencilerin S_k9'a verdikleri cevaplar

Şekil 42'nin devamı



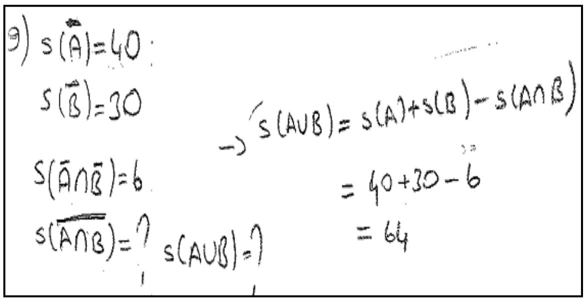
c. Ö4'ün cevabı

Venn şemasından yararlanarak oluşturdukları cebirsel ifadeleri doğru olarak çözen öğrencilerin *R_k5'*in yanı sıra *R_k23: Cebirsel çözümden faydalanma* operatörünü de kullandıkları belirlenmiştir.

Soruyu benzer şekilde Venn şemasından yararlanarak çözen Ö4, Ö15 ve Ö38 kodlu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde, istenen kümenin eleman sayısını hatalı olarak buldukları görülmektedir. Bu hatalı sonuca neden olan ise $s(A \cap B)' = s(A' \cup B') = s(A') \cup (B') = s(A') + s(B')$ eşitliğini kullanmalarıdır (Bkz. Şekil 42c). Bu öğrencilerin R_k5 operatörünün dışında kullandıkları operatör; *R^-_k24: A ve B herhangi iki küme ise $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$ dir* şeklinde belirlenmiştir.

Ö8, Ö46 ve Ö48 koldu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde; bu 3 öğrencinin de Venn şemasından yararlandıkları *(R_k5)* görülmektedir. Ancak kesişen kümeleri bir evrensel küme içine çizerek bu kümelere ait olmayan ancak evrensel kümeye ait olan elemanların sayısını temsilen harf verseler dahi, $s(A \cap B)'$ kümesinde yer alması gereken bu harfi bu kümenin dışında tutmuşlardır. Bu nedenle istenilen kümenin eleman sayısını hatalı belirlemişlerdir (Bkz. Şekil 42b).

Dokuzuncu soruyu işlem özelliklerini kullanarak çözmeye çalışan öğrencilerden (Ö14, Ö28, Ö43 ve Ö45) Ö45'in çözümünden (Bkz. Şekil 43) ve aşağıda verilen mülakat verilerinden anlaşılacağı gibi öğrencilerin $A' = B$ ve $B' = A$ olarak düşündüğü görülmektedir. Bu düşüncenin altında yatan ve öğrencinin hata yapmasına neden olan operatör ise *R^-_k7* operatörüdür.



Şekil 43. Ö45’in S_k9’a verdiği cevap

A: 9. soruda da mı aynı şeyi düşündük? $A' = 40$ ise, $A' =$ B diye mi düşündün?
Ö45: Evet.
A: $B' = A$ olunca; A yerine 30, B yerine 40 yazarsak diye mi düşündün? Peki devamında ne düşündün, ben burayı çözemedim?
Ö45: Hani bir formül vardı ya birleşimi bulmak için; A nın elemanının sayısı B nin elemanının sayısı fark kesişim o şekilde düşündüm.
[…]
A: Yani bu soruda A’ nın tümleyeni B, B’ nin tümleyenini A kümesi olarak düşündün.
Ö45: Evet.

Soru ile ilgili olarak yukarıdaki bulgular incelendiğinde önceki sorularda kullanılan R_k5 ve $R^{-}_{k}7$ operatörlerinin yanı sıra iki yeni operatör belirlendiği görülmektedir.

3.1.1.10. Onuncu Soru

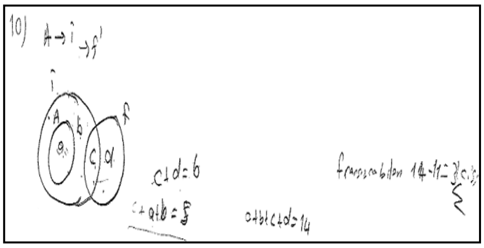
S_k10: *En az bir yabancı dil bilenlerin bulunduğu 14 kişilik bir grupta Almanca bilen herkes İngilizceyi de bilmekte, fakat Fransızcayı bilmemektedir. Fransızca bilenlerin sayısı 6, İngilizce ve Almanca bilenlerin sayısı 5 olduğuna göre sadece İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?*

Onuncu soruya öğrencilerin 5’i cevap vermezken, 11’inin yanlış ve 45’inin doğru çözüm yaptıkları belirlenmiştir.

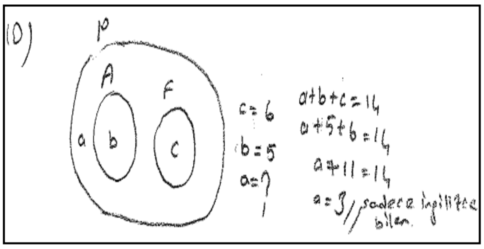
Soruya cevap vermeyen öğrenciler Ö6, Ö17, Ö35, Ö45 ve Ö49 şeklinde sıralanırken, Ö2, Ö3, Ö5, Ö7, Ö8, Ö10, Ö13, Ö14, Ö16, Ö18, Ö21, Ö25, Ö29, Ö32, Ö37, Ö38, Ö40, Ö43, Ö47, Ö48, Ö50, Ö51, Ö54, Ö58 ve Ö60 verilen şarta uygun Venn şeması çizerek, oluşan kümelerin eleman sayılarını temsil eden harflerin yardımıyla oluşturdukları cebirsel ifadelerden yararlanarak doğru sonuca ulaşmayı başarmışlardır (Bkz. Şekil 44a). Bu öğrencilerin *R_k23* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Şemaları verilen şartı sağlayacak şekilde ancak verilmeyen özel durumları da dikkate alarak çizen Ö9 ve Ö28 kodlu öğrenciler de sonuca ulaşmayı başarmışlardır (Bkz. Şekil

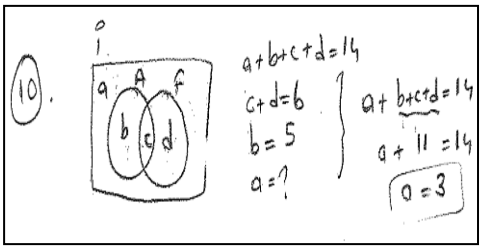
44b, Şekil 44c). Yine farklı şemalar çizerek doğru çözümü gerçekleştiren Ö4, Ö11, Ö22, Ö27, Ö30, Ö39, Ö59 Almanca bilenleri kapsayan İngilizce bilenler kümesini ve bunlardan ayrık olan Fransızca bilenler kümesini çizmiş ve bu kümelerin eleman sayısını temsil eden harflerle oluşturdukları cebirsel ifadeler yardımıyla doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 44d). Bu öğrencilerin cebirsel çözüm yaptıkları için R_k23 operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.



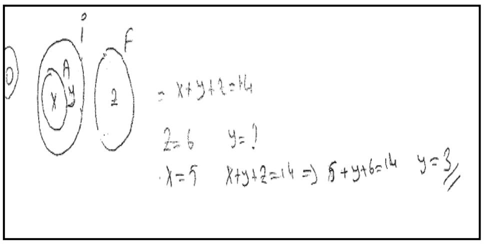
a. Ö2'nin cevabı



b. Ö9'un cevabı



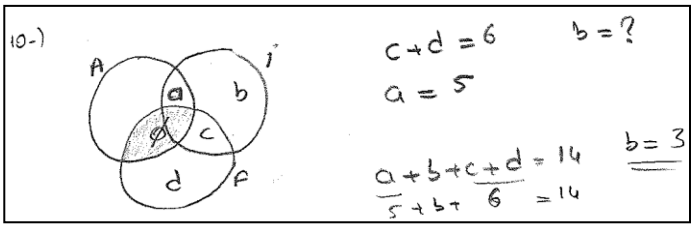
c. Ö28'in cevabı



d. Ö4'ün cevabı

Şekil 44. Öğrencilerin S_k10'a verdikleri cevaplar

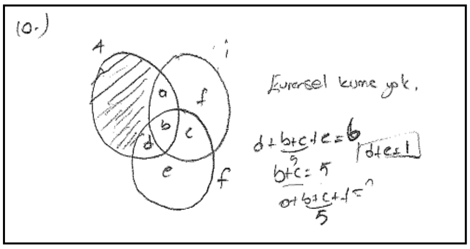
Doğru sonuca kesişen üç küme çizmek suretiyle ulaşan 11 öğrencinin (Ö12, Ö20, Ö23, Ö33, Ö34, Ö41, Ö42, Ö46, Ö52, Ö55 ve Ö61) çözümleri incelendiğinde söz konusu üç kümeyi standart olarak çizerek eleman sayısını temsil eden harflerden yararlandıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 45). Bu harfler yardımıyla doğru cebirsel ifadeler oluşturarak çözümü gerçekleştirdikleri için tüm bu öğrencilerin R_k5 ve R_k23 operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.



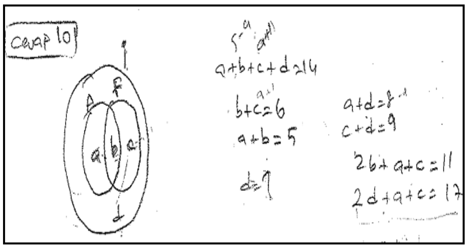
Şekil 45. Ö33'ün S_k10'a verdikleri cevaplar

Ö36, Ö53 ve Ö56'nın istenen kümeyi bulmak için çizdikleri şemaları hatalı oluşturdukları görülmüştür (Bkz. Şekil 46a, Şekil 46b, Şekil 46c). Bu çözümler incelendiğinde Ö36, Ö53 ve Ö56 ile bu öğrencilere benzer çözüm yapan Ö1, Ö15, Ö19, Ö24, Ö26, Ö31, Ö44 ve Ö57'nin soruda belirtilen "Almanca bilenlerin Fransızca bilmemesi" şartını göz ardı ettikleri için doğru çözüme ulaşamadıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 46d). Yaptığı çözümü savunan Ö44, aşağıdaki ifadeleri kullanmıştır;

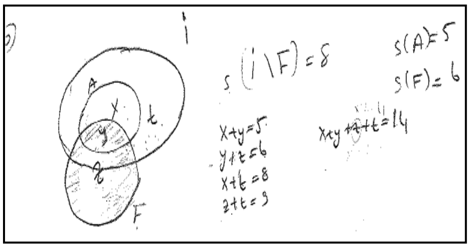
A: Sen şimdi burada ne düşündün böyle yaparken?
Ö44: Şimdi demişim ki Almanca bilenler kesinlikle İngilizce biliyorsa alt kümesi demişim.
A: İngilizce bilen Almanca bilenin alt kümesidir.
Ö44: İngilizce bilenler ile Almanca bilenler arasına sıfır koymuşum. Çünkü sadece Almanca bilen yok. Hepsi İngilizce de biliyor Almanca da biliyor.
A: Yani bu durumda bunları eşit kümeler gibi düşündün.
Ö44: Eşit demişim.



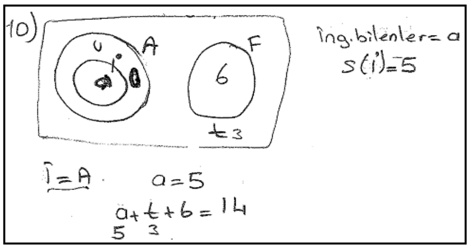
a. Ö36'nın cevabı



b. Ö53'ün cevabı



c.Ö56'nın cevabı



d. Ö44'ün cevabı

Şekil 46. Öğrencilerin S_k10'a verdikleri cevaplar

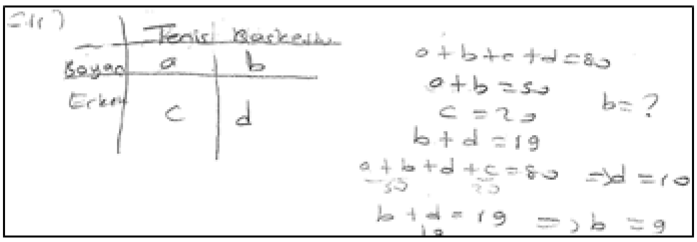
Oluşturdukları şemalar farklı olsa da, çözümlerden ve mülakattan tüm bu öğrencilerin şartı sağlayan doğru şekli çizemedikleri görülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin çözümlerinde *$R^{-}_{k}4$* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Onuncu sorunun analizinden elde edilen bulgularda da görüldüğü gibi, öğrenciler soruya, önceki çözümlerinde kullandıkları $R^{-}_{k}4$, R_k5 ve R_k23 operatörlerini kullanarak cevap vermiş, herhangi yeni bir operatör ortaya çıkmamıştır.

3.1.1.11. On Birinci Soru

S_k11: Tenis veya basketbol oynayanların bulunduğu 80 kişilik sınıfın 50'si bayandır. Tenis oynayan erkekler 20 kişi olup 19 kişi ise basketbol oynadığına göre basketbol oynayan bayan sayısı kaçtır?

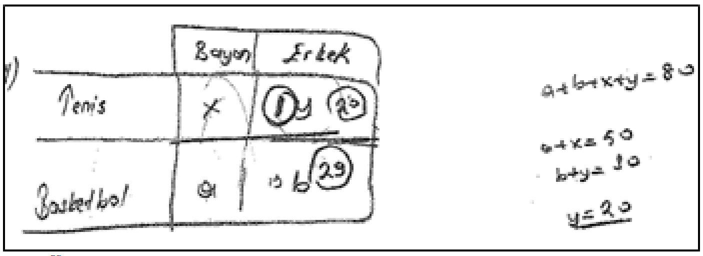
On birinci soruya 58 öğrenci doğru cevap verirken, kalan 3 öğrenci soruyu yanlış cevaplamıştır. Doğru cevap veren 54 öğrencinin (Ö1-Ö13, Ö16-Ö24, Ö26-Ö33, Ö35-Ö41,Ö43-Ö45, Ö47, Ö49-Ö61) çözümleri incelendiğinde bu öğrencilerden cinsiyet ve spor değişkenlerinin yer aldığı bir tablo oluşturarak (*R_k18),* bu tablodaki her hücreye oluşturdukları kümenin eleman sayısını temsilen harfler verdikleri görülmüştür. Bu nedenle *R_k23* operatörünün yanı sıra *R_k25: Değişkenleri belirleme* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 47). Bu öğrencilerden Ö10, Ö31, Ö41, Ö61 dışındakiler eleman sayılarını temsilen verdikleri harfler yardımıyla uygun cebirsel ifadeler oluşturarak istenen kümenin eleman sayısını bulurken başka bir ifadeyle *R_k23*'ü kullanırken (Bkz. Şekil 47a), Ö10, Ö31, Ö41, Ö61 kodlu öğrenciler ise bu tablodan hareketle uygun cebirsel ifadeleri belirleyemedikleri için çözümü gerçekleştirememişlerdir (Bkz. Şekil 47b). Bu nedenle *R_k23* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö13'ün cevabı

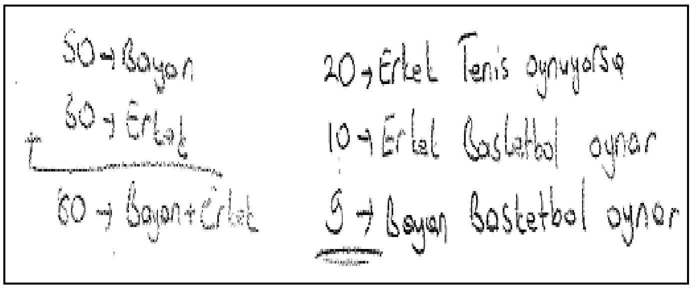
Şekil 47. Öğrencilerin S_k11'e verdikleri cevaplar

Şekil 47’nin devamı



b. Ö31’in cevabı

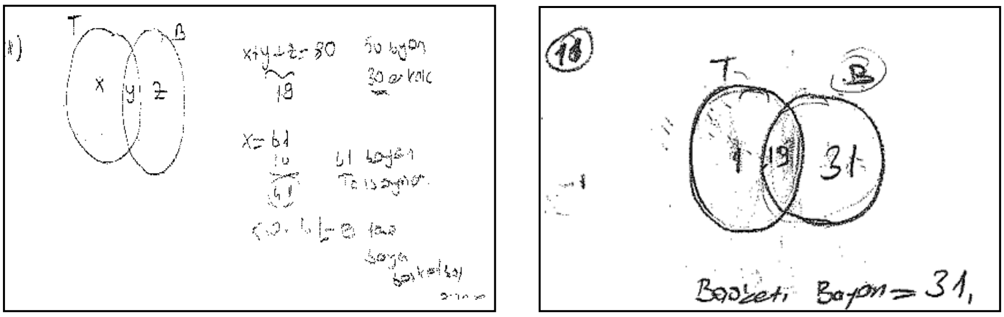
On birinci soruyu farklı bir yolla çözen Ö14, Ö25 ve Ö42’nin çözümleri incelendiğinde, bu üç öğrencinin cebirsel ifadeye başvurmadan sözel ifadeleri kullanarak çözüm yaptıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 48).



Şekil 48. Ö14’ün S_k11’e verdiği cevap

Bu öğrencilerin *R_k26: Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Diğer bir çözüm yolu olarak verilen kümeleri Venn şemasında gösteren başka bir ifadeyle *R_k5* operatörünü kullanan öğrencilerden Ö15, doğru sonuca ulaşmıştır (Bkz. Şekil 49a). Ö34, Ö46, Ö48 ise verilen kümelerin eleman sayılarını Venn şemasında doğru olarak yerleştirememişlerdir (Bkz. Şekil 49b). Tenis ve basketbol sporunun yanı sıra bu sporları yapan öğrencilerin cinsiyetleri dikkate alınmadığı için öğrencilerin *R_k25* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö15’in cevabı b. Ö46’nın cevabı

Şekil 49. Öğrencilerin S_k11’e verdikleri cevaplar

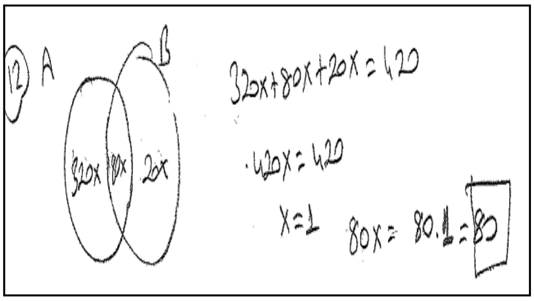
Soruyla ilgili olarak iki yeni operatör belirlenirken, önceki sorularda ortaya R_k5, R_k18 ve R_k23 operatörleri de tekrar kullanılmıştır.

3.1.1.12. On İkinci Soru

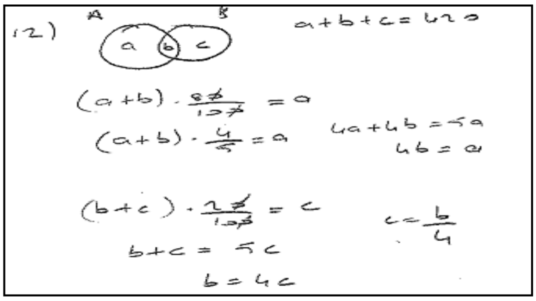
S_k12: Bir A kümesinin elemanlarından % 80 i B kümesinin elemanı değildir. B kümesinin elemanlarından % 20 si A kümesinin elemanı değildir. s (A $\cup$B) = 420 ise s (A $\cap$ B) kaçtır?

Öğrencilerin on ikinci soruya verdikleri cevaplara bakıldığında 11 öğrencinin soruya cevap vermediği belirlenmiştir. Diğer öğrencilerden 31’i soruyu doğru olarak cevaplamayı başarırken, kalan öğrencilerden 11’i yanlış, 8’i ise eksik olarak cevaplamışlardır.

Soruya cevap vermeyen öğrenciler Ö8, Ö17, Ö27, Ö30, Ö31, Ö36, Ö40, Ö48, Ö49, Ö58, Ö59 şeklinde sıralanırken, soruya cevap veren öğrencilerin 39’u (Ö1-Ö7, Ö11, Ö13, Ö15, Ö16, Ö18-Ö24, Ö28, Ö32-Ö34, Ö37-Ö39, Ö41-Ö43, Ö46, Ö50-Ö57, Ö60 ve Ö61) kesişen iki küme çizerek, oluşan yalnız A, yalnız B ve A ve B kümelerinin eleman sayıları arasındaki cebirsel ilişkiyi doğru olarak belirlemişlerdir (Bkz. Şekil 50). Bu nedenle öğrencilerin kullandıkları operatör; *R_k27: Değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi bulma* olarak belirlenmiştir.



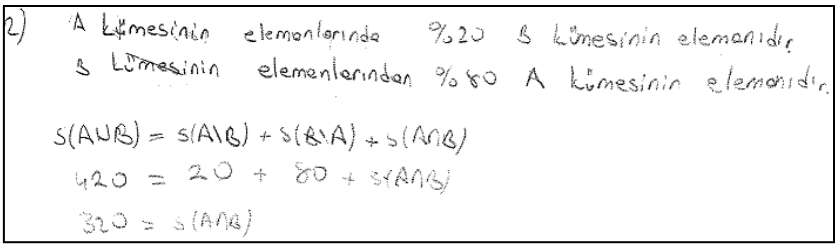
a. Ö5'in S_k12'ye verdiği cevap



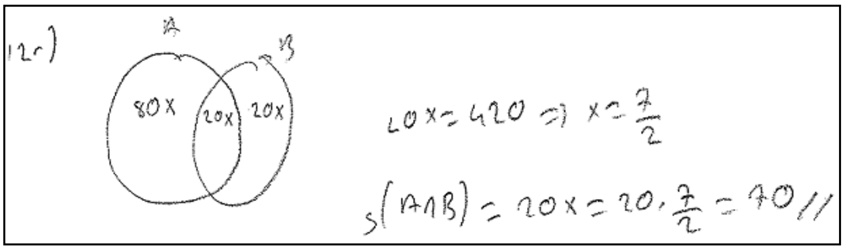
b. Ö54'ün S_k12'ye verdiği cevap

Şekil 50. Öğrencilerin S_k12'ye verdikleri cevaplar

Bu öğrencilerden Ö13, Ö15, Ö28, Ö32, Ö38, Ö43, Ö54, Ö60 koldu olanlar değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi doğu belirlemelerine rağmen cebirsel çözümü gerçekleştirememişlerdir (Bkz. Şekil 50b). Bu nedenle *R_k23* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir. Diğer öğrenciler ise aynı operatörü doğru olarak kullanarak çözümü gerçekleştirmişlerdir (Bkz. Şekil 50a).



a. Ö14'ün cevabı



b. Ö35'in cevabı

Şekil 51. Öğrencilerin S_k12'ye verdikleri cevaplar

Diğer bir çözüm yolunu takip eden Ö4, Ö9, Ö12, Ö14, Ö25, Ö26, Ö29, Ö35, Ö44, Ö45 ve Ö47 kodlu öğrenciler iki kümenin eleman sayılarını eşit ve 100x olarak düşünmüşlerdir (Bkz. Şekil 51). Bu öğrencilerin *R_k24* operatörünü *hatalı* olarak kullandıkları belirlenmiştir. Ö35, çözümü anlatırken (Bkz. Şekil 51b), iki kümenin eleman sayısını da x cinsinden düşündüğü için hata yaptığını kabul etmiştir:

A: Kesişime neden 20x verme gereği duydun?
Ö35: $A \cap B$ sıfır olabilir aslında ama soruda $A \cap B$'yi istiyor.
A: O zaman oraya niye 20 verdin, başka bir sayı değil de neden 20x?
Ö35: […]A kümesinin hani yüzde 100 olacak ya, yüzde 80 i burasıysa geriye yüzde 20 si kalmıştır demiştim. Burası 80 ise, A yüzde 100 olacaksa buraya 20 kalmıştır.
A: […]Acaba hepsini x cinsinden düşündüğün için mi böyle yaptın?
Ö35: Evet. Buraya x dediysem buraya y deseydim, x ile y arasında bir bağıntı olurdu. O zaman bulurdum.

Öğrencilerin çözümlerinden elde edilen operatörlere bakıldığında önceki sorularda belirlenen R_k23 operatörünün yanı sıra bir yeni operatör ortaya çıkmıştır.
Kümeler konusu ile ilgili olarak uygulanan sınav sorularının analizi neticesinde öğrencilerin 27 operatör kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Ek 2).

Bu bölümde; kümeler konusu ile ilgili olarak yapılan uygulamada yer alan soruların cK¢ modeline göre analizi ile elde edilen operatörler, öğrencilerle yapılan klinik mülakatlarla desteklenerek verilmiştir. Aşağıdaki bölümde ise cK¢ modelinin diğer bileşenleri olan gösterimler ve kontrol bilgilerine yer verilmiştir.

3.1.2. Kümeler Konusu ile İlgili Olarak Belirlenen Gösterimler

Öğrencilerin çözümleri incelendiğinde, kümeler konusu ile ilgili olarak aşağıda verilen gösterimleri kullandıkları belirlenmiştir:

- Soruda verilen kümeyi/kümeleri Venn şeması ile çizme
- Kümeleri büyük harflerle adlandırma
- Kesişen kümelere eleman/eleman sayılarını temsil eden harfler yerleştirme
- Kümelerin eleman sayılarını s harfi ile belirtme-belirtmeme
- Kümelerle işlemler için uygun sembolü ($\cap, \cup$, \) kullanma
- Liste yöntemi ile kümenin elemanlarını yazarken küme parantezi ({}) kullanma/kullanmama
- Liste yöntemi ile kümenin elemanlarını yazarken virgül kullanma/kullanmama
- Kümenin elemanı olma durumunu $\in$ sembolü ile gösterme
- Kümeler arasındaki alt küme ilişkisini belirtirken $\subset, \supset$ sembollerini kullanma

- Bir kümenin tümleyenini ifade ederken $'$ sembolünü kullanma
- Boş küme için ϕ sembolünü kullanma
- Bir kümenin elemanları birden fazla değişkene bağlı olduğunda tablodan yararlanma

Sorular incelendiğinde öğrencilerin kümelerle ilgili olarak cebirsel gösterimin yanı sıra liste yöntemi, “Venn şeması” ve “tablo” gösterimlerini genelde doğru olarak kullandıkları, işaret ve simgelere dikkat ettikleri görülmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin Venn şeması kullanımı esnasında harflerden faydalandıkları (Şekil 32a) ancak bu harflerle bazen kümenin elemanlarını bazen de eleman sayılarını temsil ettikleri ve bir karmaşa yaşadıkları görülmüştür (Bkz. Şekil 6, Şekil 9a, Şekil 9c, Şekil 11a, Şekil 11b, Şekil 11d, Bkz. Şekil 20b, Şekil 28b,). Ö11 kodlu öğrenci üçüncü soruya verdiği cevabında kümelere verdiği elemanları eleman sayısı olarak düşündüğünü (Bkz. Şekil 9a) mülakatta aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

A: Şurada kullandığın a, b, c, d nedir? Eleman mıdır? Eleman sayısı mıdır?
Ö11: Eleman sayısı
A: Eleman sayısı. Peki, bu soruda eleman sayısı ile ilgili herhangi bir belirti var mı?
Ö11:Yok
[…]
A: Peki bu eleman ve eleman sayısını karıştırdığını fark ettin mi? Bak! Başta eleman sayısı olarak aldığını söylemiştin, şimdi sonucu d olarak bulmuşsun.
Ö11: Evet hocam.

Ayrıca kümeler liste yöntemi ile ifade edilirken elemanlar arasına virgül konmadığı tespit edilmiştir. Öte yandan, eğer bu harfler bulundukları kümelerin eleman sayısını ifade ediyorsa o zaman da kümenin eleman sayısını belirten “S” simgesini kullanmaları gerekirdi ki öğrencilerin bu gösterimi de kullanmadıkları görülmektedir.

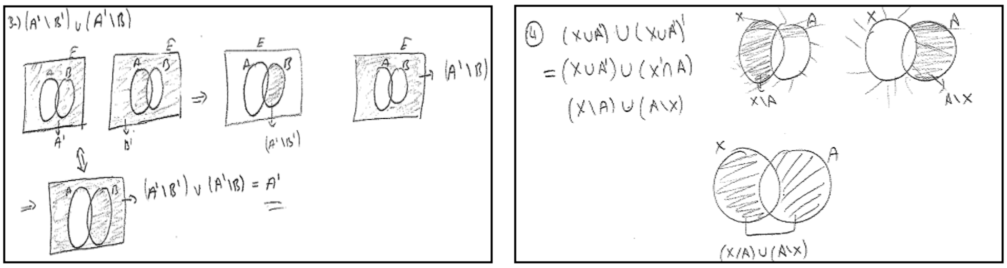
Bazı öğrenciler kümelere harfler vererek istenen kümeyi bu harfler yardımı ile bulmalarına rağmen, bu harflerin ait oldukları kümeleri ifade edememişlerdir. Örneğin Ö22 üçüncü sorunun çözümünde kesişen iki küme çizerek bu kümelere elemanlar vermiş ve en sade şekli istenen $(A' \setminus B') \cup (A' \setminus B)$ kümesini verdiği elemanlar cinsinden yani $c \cup d$ olarak bulmuş, bu elemanların belirttiği kümeyi (A') bulamamıştır (Bkz. Şekil 11b). Benzer şekilde Ö48 dördüncü soruda çizdiği Venn şemasında oluşan kümelere elemanlar vermek suretiyle bu elemanlarla gerekli işlemleri yapmış ve E (Evrensel küme) olarak bulması gereken sonucu $(a,b,c) \cup (d)$ olarak bulmuştur (Bkz. Şekil 20b). Bu durum öğrencilerin küme ile kümenin elemanı olma gösterimlerini hatalı kullandıklarını göstermektedir.

Öte yandan, öğrenciler kümeler arasındaki işlemleri (birleşim, kesişim, fark) kümelerin elemanlarına genelleme yoluna gitmişlerdir. Örneğin Şekil 11b ve Şekil 20b'de görüldüğü gibi öğrenciler iki elemanının birleşimini alma, ya da bir küme ile bir elemana birleşim işlemi uygulamada bir sakınca görmemişlerdir. Öğrencilerin bu alanda yaşadıkları zorluklar Ö9 ile yapılan mülakatta şu şekilde belirlenmiştir:

> A: […]Bir de bak dikkat et, "boş küme" bir küme belirtir. Ama "d" ise bir elemandır. Küme ile elemanı nasıl birleşim işlemine sokarsın? Böyle bir gösterim hiç gördün mü?
> Ö9: Hayır […]
> A: Semboller neden karışıyor?
> Ö9: Yaa demek ki çok bilgim yok benim yani bu konuda biraz daha zayıfım o yüzden diye düşünüyorum.

Bir diğer hatalı gösterim kullanan bir öğrenci ise iki küme arasındaki birleşim işlemini tam sayılardaki toplama işlemine dönüştürerek işlemin sonucunu EUE=E bulacağı yerde, E+E=2E olarak bulmuştur (Bkz. Şekil 22). Öğrenci burada kümelerle birleşim işleminin gösterimini sayılarla toplama işleminin gösterimi gibi kullanabileceğini düşünmüştür.

Venn şeması kullanırken öğrencilerin kümeleri eleman ya da eleman sayılarını temsil eden harfler yardımıyla belirlemenin yanında bazı öğrenciler ise tarama modelinden yararlanmışlardır (Bkz. Şekil 52a, Şekil 52b).



a. Ö33'ün cevabı   b. Ö30'un cevabı

Şekil 52. Öğrencilerin S_k3'e verdikleri cevaplar

3.1.3. Kümeler Konusu ile İlgili Olarak Belirlenen Kontrol Bilgileri

Anlayışın son boyutu olan kontrol bilgileri, problemi çözmek için kullanılacak işlemlerin uygun olup olmadığına, verilen problemin çözülüp çözülemeyeceğine karar vermeyi ya da bir matematiksel kavramın anlaşılmasında rol oynayan en can alıcı öğelerin farkına varmayı sağlayan kriterlerin uygulandığı bir boyut olmasına karşın çoğu zaman üstü kapalı bırakılmıştır (Balacheff ve Gaudin; 2002). Bu duruma neden olarak, kontrol bilgilerinin öğrencilerin çözümlerinde gizli olduğu ve öğrencilerin de bunları çoğu zaman farkında olmadan kullandıkları düşüncesi gösterilebilir. Bu nedenle yapılan analizde öğrencilerin kullandıkları operatörlerin hepsinin dayandığı temelleri(temel bilgileri) belirlemek mümkün olmamıştır. Ancak öğrencilerin yaptığı benzer çözümler incelendiğinde yaptıkları hatanın genellikle, farklı durumlarda doğru sonuç veren bir bilgiyi kullanmaktan kaynaklandığı görülmektedir. Bu durum yer yer mülakatlarda da desteklenmiştir.

Kesişim ($\cap$) işleminin, alt küme ($\subset$) üzerine dağılma özeliği olduğu bilgisinden hareketle öğrencilerin $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ ifadesini $A \cap (B \subset C)$ (R^-_k6) halinde, yine benzer olarak $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ifadesini $A \setminus (B \cup C)$ (R^-_k9) şeklinde düzenledikleri görülmüştür. Öğrencilerin bu operatörleri kullanmasına; *kümelerle kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine ve birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine dağılma özelliği olduğu veya doğal sayılarla çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinin* olduğu bilgisi sebep olarak gösterilebilir. Bir öğrenci kendisi ile yapılan mülakatta kümelerle fark işleminin kesişim veya birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği olduğu ona düşündüren bilgi için aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

A: Ben sadece merak ediyorum acaba sana farkın kesişim veya birleşim üzerine dağılma özelliği olduğunu hissettiren bilgi nedir?
Ö34: Çarpma da falan var ya hocam oradan olabilir.
A: Sayılardaki dağılma özelliğini mi düşündün?
Ö34: Evet

Yukarıdaki duruma benzer olarak, öğrencilerin fark işleminin birleşme özelliği olduğunu düşündükleri, kullandıkları R^-_k15 operatörüyle belirlenmiştir. Bu öğrencilere bu hatayı yaptıran nedenin; kümelerle kesişim ve birleşim işlemlerinin birleşme özelliği olması bilgisi olduğu düşünülmektedir.

Yine bulgularda öğrencilerin $(A'/B') = (A/B)'$ (R^-_k11) eşitliğin kullandıkları görülmektedir. Tümleyen işlemini bu şekilde parantezin dışına almış olmaları, üslü sayılarda kullanılan $a^n.b^n = (a.b)^n$ özelliğini çağrıştırmaktadır. Öğrenciler, üslü sayılarda doğru sonuç veren bu özelliği, kümelerin tümleyen işlemi için bir kontrol önermesi olarak kullanmış olabilirler.

Yine öğrencilerin alıştıkları standartları karşılaştıkları bütün problemlere uygulamaya çalıştıkları görülmektedir. Öğrenciler için küme problemi çözmek demek, verilen kümelerin birbirleriyle kesişecek şekilde Venn şeması ile gösterilmesi demektir. Öğrenciler birçok soruyu bu temel bilgi üzerinden çözmeye çalışmışlardır. Küme problemlerinde kullanılan "her kümenin diğerleri ile kesişeceği şekilde çizilen" Venn şeması soruların çözümünü kolaylaştırdığı için öğrenciler bu tarz bir soru ile karşılaştıklarında tereddüt etmeden bu çizimi yapmaktadırlar. Ancak bazı soruların çözümünü kolaylaştırmak yerine karmaşıklaştıran bu durum öğrencilerin hata yapmasına neden olmuştur (R_k5). Bu nedenle, öğrencilerin zihinlerine yerleşmiş olan bu standart şema, bir kontrol önermesi olarak düşünülebilir.

Öğrencilerin kümeler konusu ile ilgili olarak yaptıkları diğer bir hata ise $(A^{'} \setminus B^{'}) = B$ eşitliğini doğru kabul etmeleridir. Bu bilginin A ve B kümeleri ayrık olarak düşünüldüğünde doğru sonuç verdiği bilinmektedir. Öğrencilerin de özel bir durumda doğru sonuç veren bu bilgiyi her zaman kullanmaları hata yapmalarına sebep olmuştur. O halde verilen kümelerin ayrık olabileceğini düşünmek gibi problemde verilmeyen özel durumları dikkate almak da bir kontrol önermesi olarak sınıflanabilir.

Diğer bir kontrol önermesi "bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisine eşittir" bilgisi olarak karşımıza çıkmaktadır. Öğrenciler zihinlerinde yerleşen bu bilgiyi, gördükleri her tümleyen işlemine uygulayarak hata yapmaktadırlar (R^{-}_{k}10).

Benzer şekilde öğrencilerin zihinlerine yerleşmiş olan ve herkes tarafından kabul gören diğer bir bilgi ise evrensel kümenin bütün kümeleri kapsayan küme oluşudur. Ancak bazı durumlarda öğrenciler bu bilgiden hareketle sadece verilen kümelerin birleşimini evrensel küme olarak düşünmekte ve hata yapmaktadırlar (R^{-}_{k}7). O halde bu bilgi de bir kontrol önermesi olarak kabul edilebilir.

3.2. Sayılar

Sayılar konusu ile ilgili olarak iki uygulama yürütülmüştür. İlk uygulamada tam sayılar, reel sayılar gibi konularda 10 soruya yer verilirken ikinci uygulamada üslü ve köklü sayılar konuları ile ilgili 8 soru sorulmuştur. Verilerin bölünmemesi açısından bu iki uygulama birleştirilerek verilmiştir.

İlk olarak öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları belirlenen operatörler verilmiş, ardından gösterim ve kontrol bilgileriyle ilgili bulgular ayrı başlıklar halinde sunulmuştur.

Ö52 kodlu öğrenci 1. ve 2. uygulamaya, Ö31 ise 2. uygulamaya katılmadıkları için bulgularda yer almamışlardır.

3.2.1. Sayılar Konusu ile İlgili Operatörler

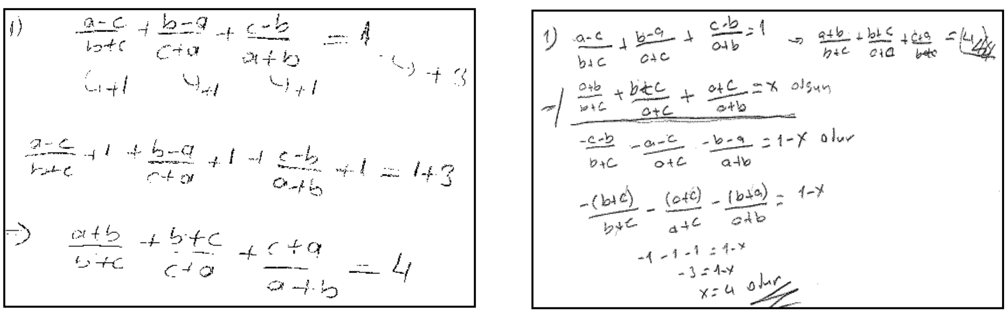
İki uygulamada sorulan toplam 18 sorunun analizinden elde edilen operatörler aşağıda verilmiştir.

3.2.1.1. Birinci Soru

S_s1: a, b, c $\in \Re$ *ve* $\dfrac{a-c}{b+c}+\dfrac{b-a}{c+a}+\dfrac{c-b}{a+b}=1$ *ise* $\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{c+a}+\dfrac{c+a}{a+b}$ *değeri kaçtır?*

Bu soruya 11 öğrenci cevap vermemiştir. Kalan öğrencilerden 27'si soruyu doğru çözmeyi başarırken, 11 öğrencinin yanlış, 11 öğrencinin eksik çözüm yaptığı tespit edilmiştir.

Soruya doğru cevap veren 27 öğrenciden Ö1, Ö6, Ö20, Ö23, Ö24, Ö28, Ö33, Ö37 ve Ö61 koldu olanlar verilen ifadeye sayı ekleyip çıkararak veya eşitliğin her iki tarafına aynı sayıyı ekleyerek gerekli düzenlemeleri yapmak suretiyle sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 53a). Ö2, Ö35, Ö41, Ö43, Ö45, Ö49 ve Ö56 ise yine eşitliğin özelliklerini kullanarak verilen iki ifadeyi taraf tarafa çıkarıp gerekli düzenlemeleri yaparak çözümü tamamlamışlardır (Bkz. Şekil 53b). Tüm bu öğrencilerin, eşitliğin özelliklerinden faydalanarak çözüm yaptıkları için *R_s1: Eşitliğin korunumunu dikkate alma,* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

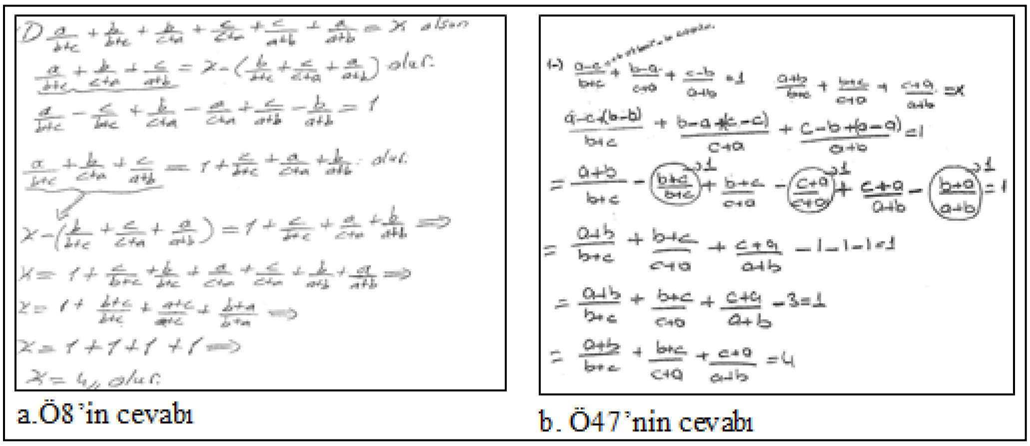


a. Ö1'in cevabı *b. Ö2'nin cevabı*

Şekil 53. Öğrencilerin S_s1'e verdikleri cevaplar

Ö8, Ö9, Ö15, Ö12, Ö16, Ö21, Ö22, Ö25 ve Ö51 ise rasyonel sayılarla toplama işleminin sahip olduğu $\frac{a+b}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$ şeklindeki özelliği kullanarak çözüm yapmışlardır (Bkz. Şekil 54a). Ö18 ve Ö47 ise rasyonel sayıları, payına sayı ekleme çıkarma yaparak yeniden düzenleyerek sonuca ulaşmışlardır. Bu öğrencilerden Ö18 istenen ifadeyi verilen ifadeye benzetmeye çalışırken Ö47 ise verilen ifadeden istenen ifadeye ulaşmayı başarmıştır (Bkz. Şekil 54b). Bu nedenle kullandıkları operatör; *R_s2: Rasyonel sayılarla işlemler,* olarak belirlenmiştir. *R_s2* operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenen Ö46 ise ifadeleri taraf tarafa çıkarmış $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=a-c$ olacak şekilde paydayı hesaba katmadan sadece paylar arasında işlem yapmıştır.

Öğrencilerden Ö5, Ö26, Ö29 ve Ö31 verilen ve istenen ifadeleri taraf tarafa toplarken $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ olacak şekilde yani payları toplayıp paya, paydaları toplayıp paydaya yazmışlardır (Bkz. Şekil 54c). Bu nedenle kullandıkları operatör *$R^{-}_{s}3$: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ dir,* olarak belirlenmiştir.

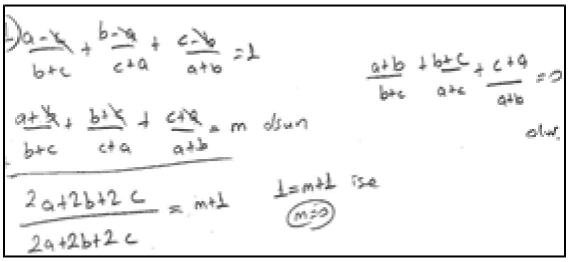


a.Ö8'in cevabı

b. Ö47'nin cevabı

Şekil 54. Öğrencilerin S_s1'e verdikleri cevaplar

Şekil 54'ün devamı

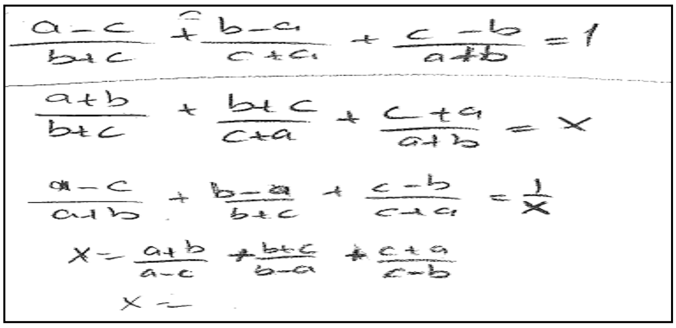


c. Ö5'in cevabı

Ö44 kodlu öğrencinin çözümü incelendiğinde verilen ve istenen ifadeleri taraf tarafa böldüğü ancak bölme işlemini gerçekleştirirken hata yaptığı görülmektedir (Bkz. Şekil 55) Ö44 kendisi ile yapılan klinik mülakatta çözümünü aşağıdaki ifadelerle savunmaktadır:

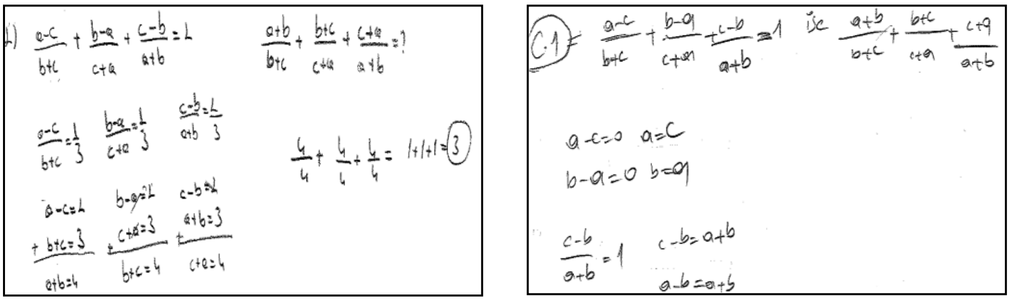
A: 1.soruda verilen ve istenen ifadeleri oranlamışsın. Nasıl düşündüğünü anlatır mısın?
Ö44: $\frac{1}{x}$ şeklinde yapmışım. Paydalar aynı ya şunlarda, dedim ki şunlar ve şunlar giderler.
A:Yani sen şimdi diyorsun ki $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=x$ diğer taraftan, $\frac{z}{b}+\frac{p}{d}+\frac{k}{f}=y$ olsun. O zaman $\frac{a}{z}+\frac{c}{p}+\frac{e}{k}=\frac{x}{y}$; dir, öyle mi?
Ö44:Evet.
[…]
A: Yani toplam durumundaki rasyonel sayıları böldüğün zaman sadeleştirme yapabilirsin. O halde çarpım durumundaymış gibi düşünmüş olmuyor musun?
Ö44:Öyle oluyor

Öğrencinin çözümünden ve mülakatından hareketle kullandığı operatör $R^{-}_{s}4$: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x$ *ve* $\frac{e}{f}+\frac{k}{l}=y$ *ise* $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}+\frac{k}{d}}=\frac{a}{e}+\frac{c}{k}=\frac{x}{y}$ *dir*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 55. Ö44'ün S_s1'e verdiği cevap

Bazı öğrenciler soruda verilen ifadedeki terimlere özel değerler vererek çözüm gerçekleştirmeye çalışmışlardır. Bu bağlamda Ö7, Ö14, Ö40 ve Ö57 her bir terime $\frac{1}{3}$ değerini atfederken (Bkz. Şekil 56a), Ö17 ise ilk iki terimi sıfır, üçüncüsünü 1 olarak düşünmüştür (Bkz. Şekil 56b). Bu nedenle R_s5: *Verilen ifadedeki terimlere eşitliği sağlayacak şekilde özel değerler verme*, operatörünü *hatalı* olarak kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö14'ün cevabı

b. Ö17'nin cevabı

Şekil 56**.** Öğrencilerin S_s1'e verdikleri cevaplar

Birinci soru ile ilgili olarak Ö3, Ö10, Ö27, Ö30, Ö34, Ö36, Ö39, Ö48, Ö55 Ö58 ve Ö59 kodlu öğrenciler soruya cevap vermemişlerdir. Ö4, Ö11, Ö32, Ö38, Ö42, Ö50, Ö53, Ö54, Ö60 ise payda eşitlemekle; Ö13 ve Ö19 ise ifadedeki rasyonel sayıları genişletmekle yetinmişlerdir.

Birinci soru ile ilgili olarak 5 operatör belirlenmiştir. R_s5 operatörü kümelerde belirlenen $R^{-}_{k}19$ operatörü ile benzerlik göstermektedir.

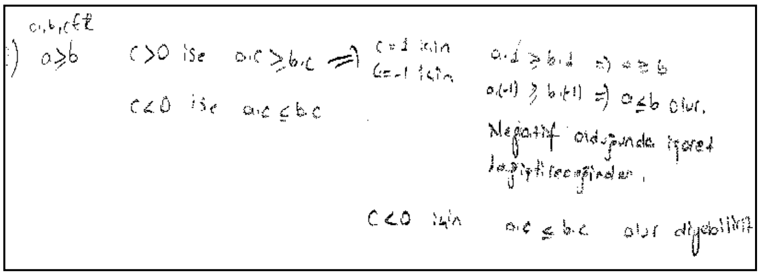
3.2.1.2. İkinci Soru

S_s2: $a,b,c,\in \Re$ $a \geq b$ ve $c > 0$ ise $a.c \geq b.c$, $c < 0$ ise $a.c \leq b.c$ olduğunu gösteriniz.

İkinci soru ile ilgili veriler incelendiğinde 9 öğrencinin soruya cevap vermediği görülmektedir. Diğer öğrencilerden soruyu doğru cevaplayan olmadığı için kalan 51 öğrenci soruya yanlış cevap vermişlerdir.

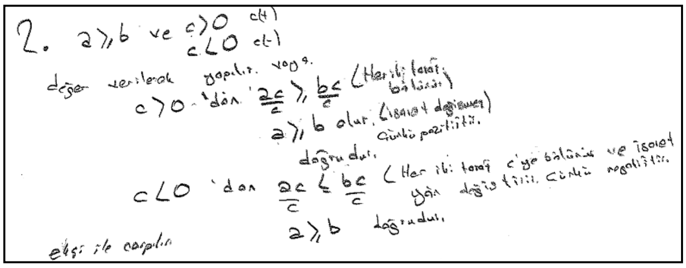
Ö1, Ö9-Ö11, Ö13, Ö15, Ö16, Ö19, Ö22-Ö24, Ö26, Ö27, Ö32, Ö34-Ö37, Ö39, Ö41, Ö45, Ö50, Ö53, Ö54 ve Ö60 kodlu öğrenciler verilen ifadeyi özel değerler vererek doğrulamaya çalıştıklarından (Bkz. Şekil 57) kullandıkları operatör $R^{-}_{s}6$*: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur,* olarak belirlenmiştir. Ö9 çözümünü kendisi ile yapılan klinik mülakatta aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

A: Yine c' ye 1 ve -1 değerini vermişsin.
Ö9: Evet. Değer vererek sağlayıp sağlamayacağını kontrol etmek için.
A: Hıhı.
Ö9:O yüzden verdim değerleri ama burada ben yine genelleme yapmışım.



Şekil 57. Ö9'un S_s2'ye verdiği cevap

Ö2, Ö12, Ö17, Ö18, Ö20, Ö21, Ö28, Ö29, Ö31, Ö38, Ö40, Ö42, Ö47, Ö51, Ö58, Ö59 verilenlerden yararlanmak yerine, istenilen ifadeden hareketle verilene ulaştıklarından (Bkz. Şekil 58) kullandıkları operatör; $R^{-}_{s}7$*: İspatlanması gereken durumu doğru kabul ederek çözümde kullanma,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 58**.** Ö12'nin S_s2'ye verdiği cevap

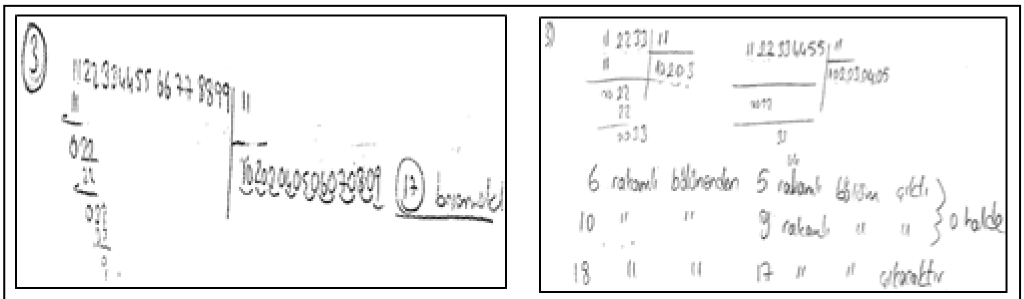
Bazı öğrencilerin kullandıkları operatörler çeşitli nedenlerle belirlenememiştir: soruya cevap vermeme (Ö3, Ö4, Ö5, Ö8, Ö25, Ö30, Ö49, Ö55 ve Ö61), önermeyi sözel olarak ifade etmekle yetinme (Ö6, Ö7, Ö33, Ö44, Ö48, Ö56 ve Ö57), istenen ifadeyi c parantezine alma (Ö46), soruyu bölünebilme ile ilişkilendirme(Ö14), c < 0 ve c > 0 olması durumlarında a ve b sayılarının işaretlerini bulmaya çalışma (Ö43).

İkinci soru ile ilgili bulgulara bakıldığında iki yeni operatör belirlendiği görülmektedir. Kümeler konusunun ilk operatörü olarak belirlenen $R^{-}_{k}1$'in, sayılar konusunun ikinci sorusunda $R^{-}_{s}6$ olarak tekrarlandığı belirlenmiştir.

3.2.1.3. Üçüncü Soru

S_s3: 1'den 9'a kadar olan rakamlar ikişer kez sırayla ve yan yana yazılarak 18 basamaklı A=11223344.....99 sayısı oluşturuluyor. Buna göre A sayısı 11'e bölündüğünde elde edilen bölüm kaç basamaklıdır?

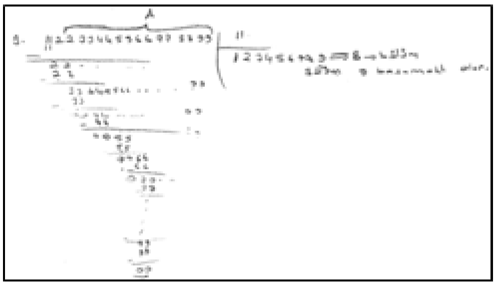
Bu soruya 1 öğrencinin cevap vermediği belirlenmiştir. Diğer öğrencilerden 40'ı soruyu doğru olarak cevaplandırırken, 1 öğrenci ise soruya yanlış cevap vermiştir. Soruya doğru cevap veren 40 öğrencinin çoğu (Ö1, Ö2, Ö4, Ö7-Ö10, Ö12-Ö16, Ö20-Ö26, Ö29, Ö30, Ö32-Ö35, Ö37-Ö39, Ö41, Ö43, Ö44, Ö47, Ö48, Ö50, Ö53, Ö56-Ö60) sayıyı yazıp bölme işlemini yaparak bölümün basamak sayısını belirlemişlerdir (Bkz. Şekil 59a). Ö1, Ö2, Ö21, Ö25, Ö34, Ö35, Ö37 ve Ö47 ise verilen sayıyı uzun uzun yazmadan ilk birkaç adım için deneyerek buldukları kuralı kullanmışlardır (Bkz. Şekil 59b). Bu öğrenciler sonuca ulaşmak için bölme işlemi yaptığından kullandıkları operatör *R_s8: Bölme işlemi* olarak belirlenmiştir.



a. Ö29'un cevabı b. Ö1'in cevabı

Şekil 59. Öğrencilerin S_s3'e verdikleri cevaplar

Şekil 59'un devamı



c. Ö11'in cevabı

R_s8 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenen Ö5, Ö11, Ö17, Ö28, Ö31, Ö36 ve Ö54 bölümün 9 basamaklı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerin bölme işlemi yaparken, 11 sayısını bulundurmayan basamak için bölüme 0 yazmadıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 59c).

Ö3, Ö6, Ö18, Ö27, Ö42, Ö46 ve Ö55 bölümün basamak sayısını bulmak yerine, verilen sayının 11'e bölümünden kalanı bulmuşlardır. Soruyu hatalı anladıkları için kullandıkları operatörün bu soruya uygun olmadığına karar verilmiştir. Ö3 kodlu öğrenci çözümünde 11'e bölünebilme kuralını kullanarak "*A sayısı 11 ile bölünürse elde edilen bölüm olmayacağından veya sıfır olacağından basamaktan söz edilemez*" şeklinde açıklama yapmıştır. Bu öğrencinin bölüm ile kalanı karıştırdığı düşünülmektedir.

Ö19 bölme işlemini gerçekleştirerek bölümü 101010…..1 şeklinde ifade etmiştir. Bu öğrencinin dikkatsizlikten kaynaklı hata yaptığı düşünüldüğünden çözümü için bir operatör belirlenmemiştir.

Ö40, Ö45 ve Ö51 anlamsız çözüm yaptıkları, Ö49 herhangi bir çözüm yapmadan doğrudan bölümün 17 basamaklı olduğunu belirttiği, Ö61 ise soruya cevap vermediği için bu öğrencilerin de kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

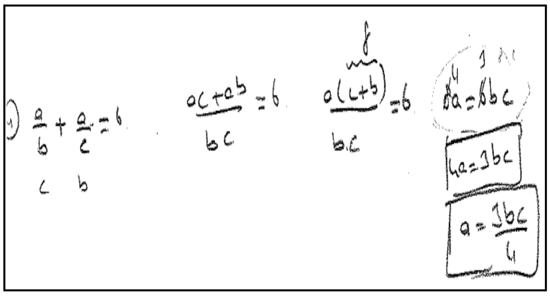
Üçüncü soruya ait bulgular incelendiğinde bir yeni operatörün belirlendiği görülmektedir. Bu operatör aynı soruda hem doğru hem de hatalı olarak kullanılmıştır.

3.2.1.4. Dördüncü Soru

S_s4: (a:b)+(a:c)=6 ve b+c=8 ise a=?

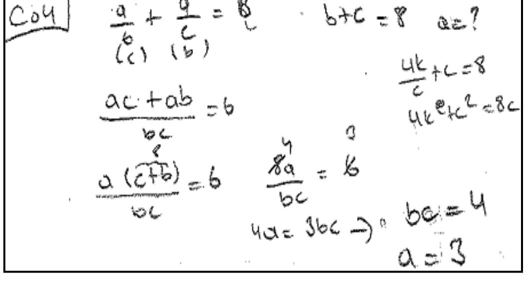
Dördüncü soru ile ilgili olarak elde edilen veriler incelendiğinde 1 öğrencinin soruya cevap vermediği belirlenmiştir. 42 öğrenci soruyu doğru olarak cevaplandırırken 17 öğrenci ise yanlış sonuca ulaşmıştır.

Ö2, Ö8, Ö12, Ö17, Ö19-Ö21, Ö28, Ö36, Ö40, Ö42, Ö46, Ö47, Ö50, Ö57, Ö60 ve Ö61 kodlu öğrenciler gerekli düzenlemeleri yaparak doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 60). Bu öğrencilerin *R_s2* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 60. Ö21'ün S_s4'e verdiği cevap

Diğer bir öğrenci grubu (Ö3-Ö7, Ö9, Ö11, Ö13, Ö15, Ö22, Ö24, Ö25, Ö26, Ö30, Ö32, Ö33, Ö38, Ö41, Ö43, Ö44, Ö48, Ö49, Ö51, Ö53, Ö54, Ö55, Ö58 ve Ö59), a sayısını b ve c değişkenleri cinsinden değil de sayısal değer olarak bulmaları gerektiğini düşünmüşlerdir. Öğrencilerin çözümleri incelendiğinde *R_s2* operatörünün yanı sıra verilen ifadeyi gerekli işlemleri kullanarak 4.a=3.b.c durumuna getirdikten sonra a değerini bulmak için, b ve c ye şartı sağlayacak şekilde özel değerler verdikleri görülmektedir (Bkz. Şekil 61). Bu nedenle öğrencilerin *R_s5* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

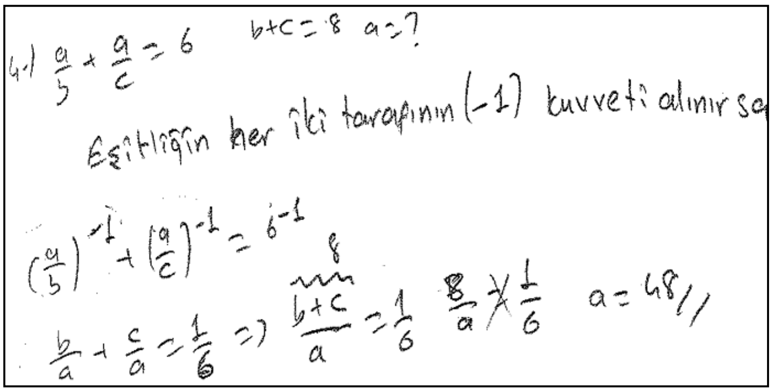


Şekil 61. Ö3'ün S_s4'e verdiği cevap

Ö10, Ö27, Ö34, Ö35 ve Ö56 kodlu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde, verilen ifadeleri rasyonel olarak yazdıktan sonra $\frac{x}{y}=a \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{a}$ özelliğini $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=6 \Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{1}{6}$ şeklinde kullanarak toplama işlemine genellemeye çalıştıkları tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 62). Ö35 yapılan klinik mülakatta "$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x$ *ise, bunların ayrı ayrı çarpmaya göre terslerinin toplamı* $\frac{1}{x}$ *'e eşittir*" gibi bir kuralı kabul ettiğini ifade ederken Ö56 ise çözümünü aşağıdaki şekilde açıklamıştır;

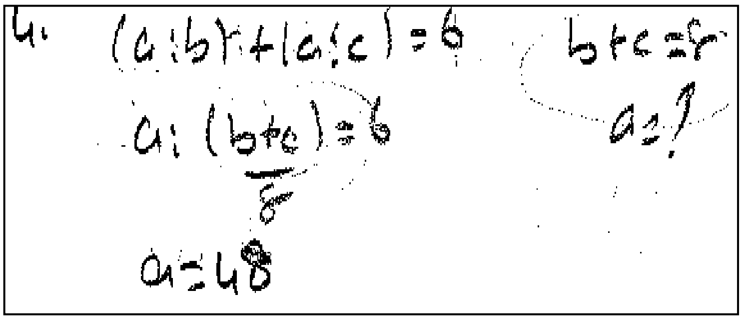
A: […] Ne yaptın bunu bana sözel olarak ifade et.
Ö56: İfadenin tamamını ters çevirebilmem için tek ifade yaptım.
A: Yani şunun tamamını ters çevirdin. Sonra üssü toplama dağıtmış mı oldun?
Ö56: Evet
A: Yani sen şöyle bir bilgiyi kabul etmiş oluyorsun. $(a+b)^n=a^n+b^n$, değil mi?
Ö56: Evet

Öğrencilerin çözümlerinden ve mülakat verilerinden hareketle kullanılan operatör $R^{-}_{s}9$: $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=t \Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{1}{t}$ *dir* ve $R^{-}_{s}10$: *$(a+b)^n=a^n+b^n$ dir,* olarak belirlenmiştir.



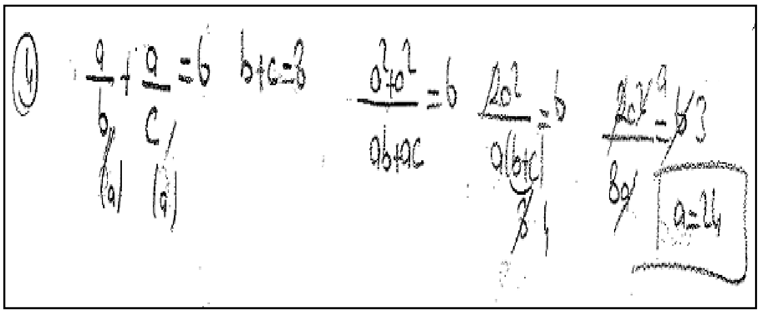
Şekil 62. Ö35'in S_s4'e verdiği cevap

Ö18 ve Ö39'un (a:b)+(a:c)=6 ifadesini a:(b+c)=6 şeklinde düzenlemeleri, bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği olduğu bilgisini kullandıklarını göstermektedir (Bkz. Şekil 63). Ö39, araştırmacının "*verilenleri neden bu şekilde düzenledin*?" sorusuna "*en kolay yoldan nasıl bulurum diye düşündüm, onun için bu şekilde yazdım*" şeklinde cevap vermiştir. Bu bağlamda öğrencilerin; $R^{-}_{s}11$*:Tam sayılarla* *bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır, yani* $x,y,z \in \mathbb{Z}$ *ise* $(x:y)+(x:z)=t$ *ise* $x:(y+z)=t$ *dir* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



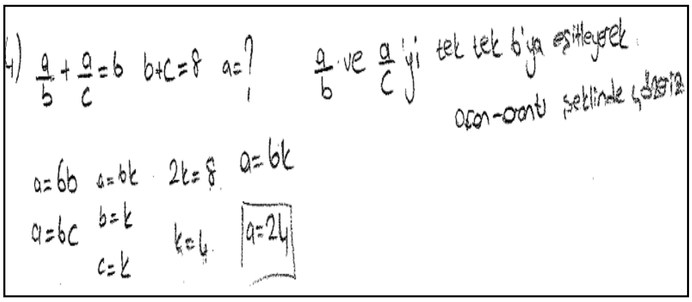
Şekil 63. Ö39'un S_s4'e verdiği cevap

R^-_s3 operatörünü kullanan Ö29, birinci soruda yapmış olduğu hatayı yineleyerek; rasyonel sayılarla toplama işlemi yaparken payları toplayıp paya, paydaları toplayıp paydaya yazmıştır (Bkz. Şekil 64).



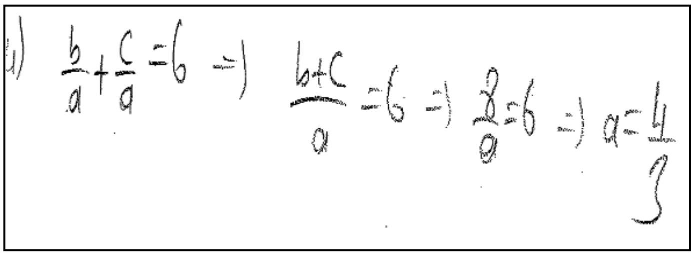
Şekil 64. Ö29'un S_s4'e verdiği cevap

Ö45 ise soruyu $\frac{a}{b}$ ve $\frac{a}{c}$ terimlerinin her birini 6 ya eşitleyerek çözdüğü için (Bkz. Şekil 65) R_s5 operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 65. Ö45'in S_s4'e verdiği cevap

Ö1, Ö14 ve Ö31 kodlu öğrenciler verilen ifadeyi $(a:b)+(a:c)=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}=\frac{8}{a}=6$ şeklinde düzenlemişlerdir (Bkz. Şekil 66). Öğrencilerin istenen ifadeye, verilen ifadeyi kullanarak ulaşmaya çalıştıkları yapılan mülakatlar neticesinde ortaya çıkmıştır. Nitekim araştırmacının "*neden ifadeleri ters çevirip 6'ya eşitledin*?" sorusuna Ö1; "*verilenler hocam tersi ile uyuşuyordu. Hani çünkü b+c'yi vermiştiniz*" şeklinde cevap vermiştir. *R_s12: Verilen ve istenen ifadeleri (değerleri değişmeyecek şekilde) yeniden düzenlenerek birbirlerine benzetme* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 66. Ö1'in S_s4'e verdiği cevap

Diğer öğrencilerden Ö23 soruya cevap vermezken, verilen ifadeyi rasyonel olarak yazarak payda eşitlemekle yetinen Ö16 ve Ö37 kodlu öğrenciler için operatör belirlenememiştir.

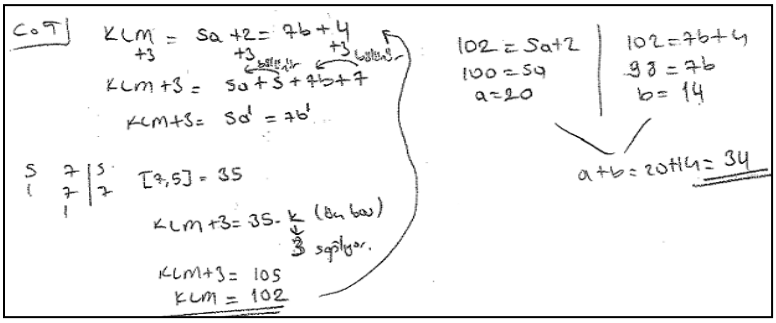
Dördüncü soruya ait bulgulara bakıldığında 4 yeni operatörün ortaya çıktığı, aynı zamanda önceki sorularda kullanılan R_s2, $R^{-}_{s}3$ ve R_s5 operatörlerinin tekrar ettiği görülmektedir.

3.2.1.5. Beşinci Soru

S_s5: a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, KLM = 5a + 2 = 7b + 4 eşitliğini sağlayan üç basamaklı en küçük KLM sayısı için a+b kaçtır?

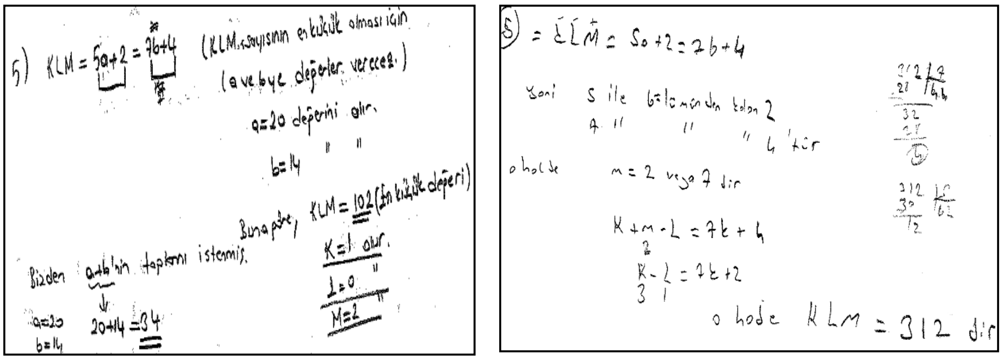
Beşinci soruyu 40 öğrenci doğru olarak cevaplarken, kalan öğrencilerden 10'u soruya yanlış, 10'u ise eksik cevap vermiştir.

Bu soruya doğru cevap veren 40 öğrenciden Ö1, Ö3, Ö4, Ö7-Ö9, Ö12, Ö13, Ö15, Ö19, Ö20, Ö23, Ö24, Ö28, Ö33, Ö37, Ö39-Ö41, Ö44, Ö45, Ö47, Ö48, Ö50, Ö56, Ö58 ve Ö60 verilen ifadede eşitliğin her iki tarafına 3 sayısını ekleyerek KLM+3 sayısının 5 ve 7 ye tam bölünebileceğini belirterek [5,7]=35 olarak bulduktan sonra KLM=102 olması gerektiğini ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 67). Bu öğrencilerin *R_s13: A=ax+b=cy+d olsun. k=a-b=c-d olmak üzere A+k, a ile c nin ekokunun katıdır,* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 67. Ö3'ün S_s5'e verdiği cevap

Ö2, Ö5, Ö10, Ö14, Ö17, Ö18, Ö26, Ö27, Ö31, Ö35, Ö36, Ö44 ve Ö59 verilen ifadedeki değişkenlere değer vererek isteneni doğru olarak bulmayı başarırken (Bkz. Şekil 68a), Ö6, Ö32, Ö46, Ö49 ve Ö53 başarılı olamamışlardır (Bkz. Şekil 68b). Bu nedenle başarılı olanların *R_s5* operatörünü doğru, başarısız olanların ise *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö31'in S_s5'e verdiği cevap *b. Ö32'in S_s5'e verdiği cevap*

Şekil 68. Öğrencilerin S_s5'e verdikleri cevaplar

Ö22 kodlu öğrenci ise hatalı çözümünde KLM sayısını hem 102 hem de 144 alarak eşitlik kavramının anlamını hatalı kullandığı görülmektedir. Bu nedenle R_s1 operatörünü hatalı kullandığı belirlenmiştir.

Çeşitli nedenlerden dolayı kullandıkları operatör belirlenmeyen öğrenciler şu şekilde sınıflanmıştır: Dikkatsizlikten kaynaklanan hatalar yaptıkları belirlenen öğrencilerden Ö11, KLM sayısının üç basamaklı bir sayı olması gerektiğini göz ardı ederken, Ö21, Ö34, Ö43 ve Ö57 ise soruda KLM sayısının sorulduğunu düşünerek a+b değerini bulmamışlardır. Ö51 çözümünde KLM+3=5a+5+7b+7=5(a+1)+7(b+1) eşitliğini kullanırken, Ö61 ise KLM sayısının en küçük olması gerektiğini göz ardı etmiştir. Gösterim karışıklığından kaynaklanan hata yapan Ö30 kodlu öğrencinin 5.a ve 7.b çarpımlarını iki basamaklı doğal sayı olarak düşünüp çözümlediği tespit edilmiştir. Ö16, Ö25, Ö29, Ö38, Ö54 ve Ö55 kodlu öğrenciler ise hiçbir açıklama yapmadan KLM sayısının 102 olduğunu belirtmişlerdir.

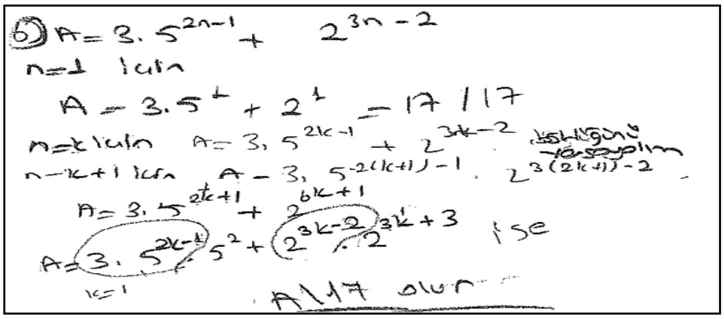
Soru ile ilgili bulgular ışığında, bir yeni operatörün yanı sıra önceki sorularda karşımıza çıkan R_s5 ve R_s1 operatörlerinin tekrar kullanıldığı belirlenmiştir.

3.2.1.6. Altıncı Soru

S_s6: $A = 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ sayısının 17 ile bölünebileceğini gösteriniz.

Bu soruya tam olarak doğru cevap veren öğrenci yoktur. 3 öğrenci soruyu cevapsız bırakırken, 43 öğrencinin yanlış, 14 öğrencinin ise eksik çözüm yaptığı belirlenmiştir.

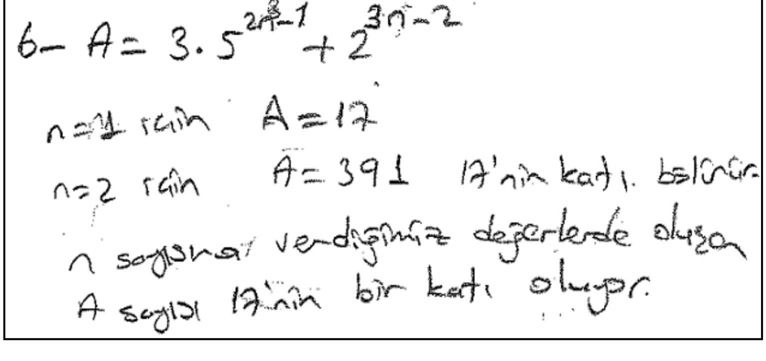
Ö14, Ö15, Ö28 ve Ö47 kodlu öğrenciler tam olarak sonuca ulaşamamış olsalar da tümevarım yöntemini kullanarak doğru cevaba giden yolu buldukları için (Bkz. Şekil 69) kullandıkları operatör *R*$_s$*14: Tümevarım yöntemi* olarak belirlenmiştir. Ö2, Ö5, Ö10, Ö11, Ö33, Ö39 ise tümevarımı yanlış kullanmışlardır: n=1 ve/veya n=2 için A'nın 17 ile bölüneceğini göstermiş, n=k veya n=k+1 için önermenin doğru olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu nedenle *R*$_s$*14* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.


6) $A = 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$
n=1 için
$A = 3.5^1 + 2^1 = 17 \mid 17$
n=k için $A = 3.5^{2k-1} + 2^{3k-2}$ doğru kabul edelim
n=k+1 için $A = 3.5^{2(k+1)-1} + 2^{3(2k+1)-2}$
$A = 3.5^{2k+1} + 2^{6k+1}$
A∖17 olur

Şekil 69. Ö15'in S$_s$6'ya verdiği cevap

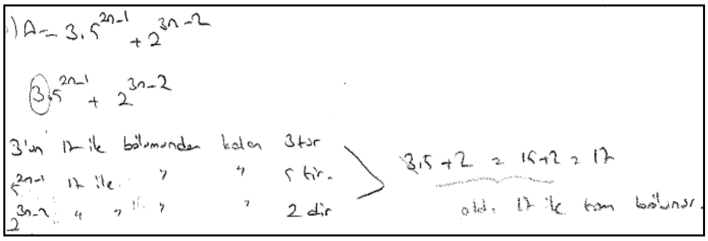
Ö3, Ö7, Ö9, Ö12, Ö13, Ö16, Ö17, Ö19, Ö21, Ö23, Ö24, Ö25, Ö26, Ö27, Ö31, Ö32, Ö34, Ö35, Ö42, Ö44, Ö45, Ö48, Ö50, Ö54, Ö56, Ö57ve Ö59 n'ye değer vererek önermenin doğru olduğunu göstermişlerdir (Bkz. Şekil 70). Bu nedenle *R*^-_s*6* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö45 çözümünü aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

A: Burada da yine 1 değerini vermişsin, sağlamış. 17 ye bölünmüş. Bu soru için 1 değerini vermek sana yetti yine, diğer sorudaki gibi. […]
Ö45: Evet.
A: Yani burada sınırlı örnekle genelleme yapmış olmuyor musun?
Ö45: Evet.


6- $A = 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$
n=1 için A=17
n=2 için A=391 17'nin katı. bölünür.
n sayısına verdiğimiz değerlerde oluşan
A sayısı 17'nin bir katı oluyor.

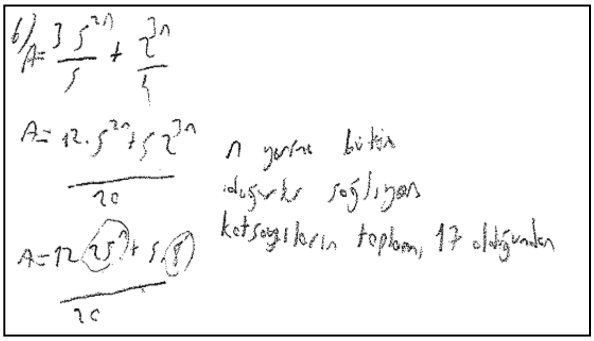
Şekil 70. Ö45'in S$_s$6'ya verdiği cevap

Ö6 koldu öğrenci A'nın her bir teriminin 17 ile bölümünden kalanları hesaplayarak, A sayısının 17 ile bölüneceğini göstermiştir (Bkz. Şekil 71). Çözüm incelendiğinde öğrencinin her bir terimin 17 ile bölümünden kalanı bulurken kullandığı operatörün $R^{-}_{s}15$*: a<b olmak üzere* a^n*'nin b'ye bölümünden kalan a'dır,* olarak belirlenmiştir. Ayrıca çözümün devamı incelendiğinde R_s16: *B≡ x(mod M) ve C≡y (mod M) iken x+y≡ 0 (mod M)ise o zaman* $M|B+C$ *dir,* operatörünü de kullandığı görülmektedir.



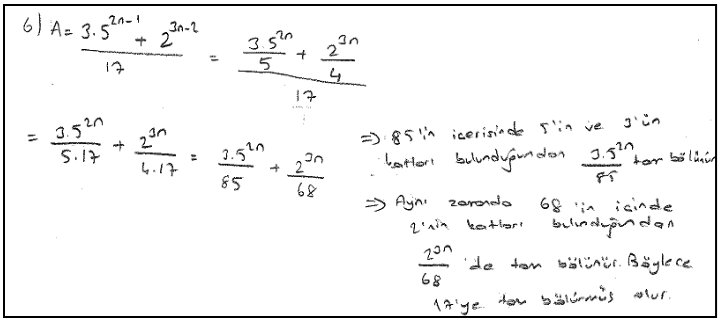
Şekil 71. Ö6'nın S_s6'ya verdiği cevap

Ö20 ise A sayısındaki terimlerin katsayıları toplamı 17 olduğu için bu sayının her zaman 17 ile bölüneceğini belirtmiştir (Bkz. Şekil 72). Bu nedenle öğrencinin kullandığı operatör $R^{-}_{s}17$*:* $c|a+b$ *ise* $c|a.x+b.y$ *dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 72. Ö20'nin S_s6'ya verdiği cevap

Diğer bir hatalı çözüm; Ö22 ve Ö43 tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu öğrencilerin, 17 sayısının A'yı bölebilmesi için 3.5^{2n-1} ve 2^{3n-2} sayılarını bölmesi gerektiğini belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 73). Bu nedenle $R^{-}_{s}18$*:* $m|a+b \Rightarrow m|a$ *ve* $m|b$ *dir,* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö22 çözümünü devam ettiremezken, Ö43'ün çözümünün devamında 3.5^{2n-1} sayısının 85 ile bölünmüş olmasının 17 ile bölünebileceği anlamına geldiğini düşündüğünden; *R⁻ₛ19:* $\frac{A}{m.n}$ *verildiğinde* $m|A$ *ise* $n|A$ *dır,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.


6) $A = \dfrac{3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}}{17} = \dfrac{\frac{3.5^{2n}}{5} + \frac{2^{3n}}{4}}{17}$

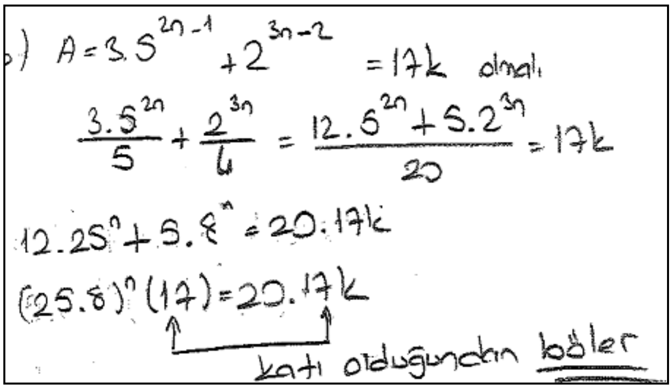
$= \dfrac{3.5^{2n}}{5.17} + \dfrac{2^{3n}}{4.17} = \dfrac{3.5^{2n}}{85} + \dfrac{2^{3n}}{68}$

⇒ 85'in içerisinde 5'in ve 3'ün katları bulunduğundan $\frac{3.5^{2n}}{85}$ tam bölünür

⇒ Aynı zamanda 68'in içinde 2'nin katları bulunduğundan $\frac{2^{3n}}{68}$'de tam bölünür. Böylece 17'ye tam bölünmüş olur.

Şekil 73. Ö43'ün S_s6'ya verdiği cevap

Ö38 kodlu öğrencinin çözümü incelendiğinde üslü ifadelerle toplama işleminin kuralını hatalı kullandığı görülmektedir (Bkz. Şekil 74). Bu nedenle kullandığı operatör; *R⁻ₛ20:* $a.x^n+b.y^n=(x.y)^n.(a+b)$*dir,* olarak belirlenmiştir.


6) $A = 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$ olmalı

$\dfrac{3.5^{2n}}{5} + \dfrac{2^{3n}}{4} = \dfrac{12.5^{2n} + 5.2^{3n}}{20} = 17k$

$12.25^n + 5.8^n = 20.17k$

$(25.8)^n (17) = 20.17k$

katı olduğundan böler

Şekil 74. Ö38'in S_s6'ya verdiği cevap

Ö18, Ö30 ve Ö49 koldu öğrenciler altıncı soruya cevap vermezken, Ö1, Ö4, Ö8, Ö29, Ö36, Ö37, Ö40, Ö41, Ö46, Ö51, Ö53, Ö55, Ö58 ve 60; $A = 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ ifadesini $A = \frac{3.5^{2n}}{5} + \frac{2^{3n}}{4}$ şeklinde düzenleyerek paydaları eşitlemiş, devamını getirememişlerdir. Ö61 ise ifadeyi $A = \dfrac{12.25^n + 5.8^n}{20}$ şekline getirdikten sonra $25^n = 8^n$ eşitliğini kullanarak ve $A = \dfrac{12.8^n + 5.8^n}{20} = \dfrac{17.8^n}{20}$ olarak bulmuştur. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

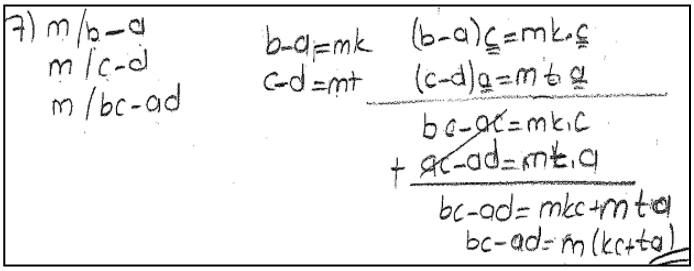
Altıncı sorunun analizinden elde edilen bulgular, 7 yeni operatör belirlendiğini ve önceki sorularda belirlenen R^-_s6 operatörünün tekrarlandığını göstermektedir.

3.2.1.7. Yedinci Soru

S_s7: $m \mid b - a$ ve $m \mid c - d$ ise $m \mid bc - ad$ olduğunu gösteriniz.

Yedinci soru ile ilgili olarak elde edilen veriler incelendiğinde 17 öğrencinin soruya cevap vermediği belirlenmiştir. Diğer öğrencilerden 8'i doğru sonuca ulaşırken, 35 öğrencinin sonucu hatalı bulduğu görülmektedir.

Ö6, Ö8, Ö9, Ö29, Ö32, Ö41, Ö43 ve Ö51 kodlu öğrencilerin bölünebilme kurallarından yararlanıp doğru adımları kullanarak, doğru sonuca ulaştıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 75). Bu çözümlerden hareketle öğrencilerin kullandıkları operatör *R_s21: Bölünebilme ile ilgili kural, özellik ve tanımlar,* olarak belirlenmiştir.

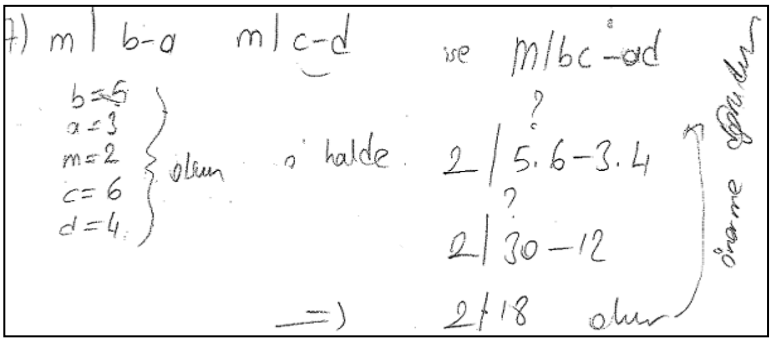


Şekil 75. Ö41'in S_s7'ye verdiği cevap

Ö1, Ö10, Ö12, Ö17, Ö22, Ö24 ve Ö54 kodlu öğrenciler sorudaki a, b, c, d ve m değişkenlerine değerler vererek istenen ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. (Bkz. Şekil 76). Bu nedenle öğrencilerin *R^-_s6* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö1 çözümünü aşağıdaki gibi savunmuştur;

A: 7. soruda neden değer vererek çözme ihtiyacı duydun?
Ö1: Çünkü ispat hani, ispatı yapamayacaktım.

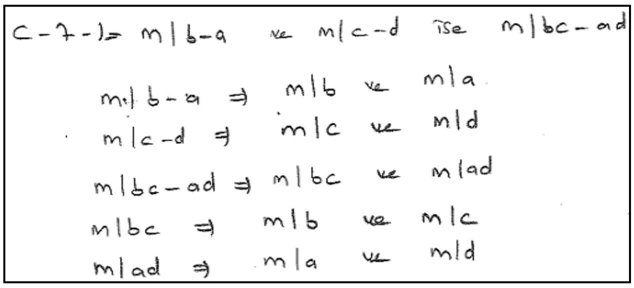
A: Şu değerleri vermek sana yetti mi? Önerme doğrudur demişsin bunları sağladığı için.
Ö1: Aslında yetmiyor biliyorum da ama hani…
A: O an için yetti.
Ö1: Evet.



Şekil 76. Ö1’in S_s7’ye verdiği cevap

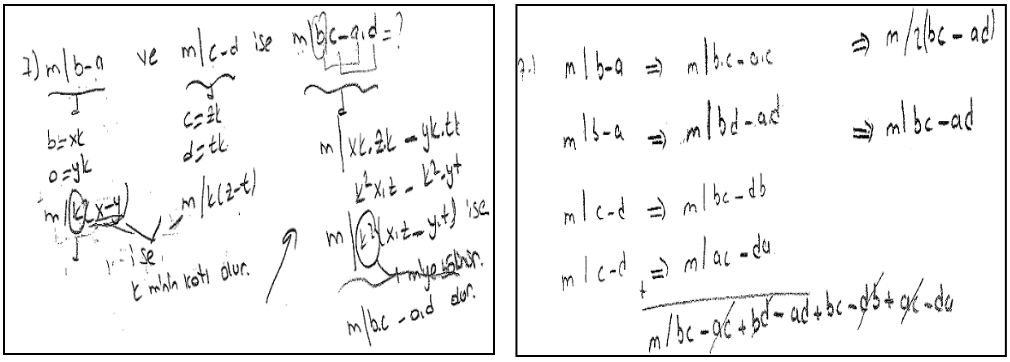
Diğer bir çözüm yolunu takip eden öğrenciler (Ö2, Ö4, Ö13, Ö18, Ö25, Ö28, Ö31, Ö34, Ö38, Ö39 ve Ö56) $m|a$ ve $m|b \Rightarrow m|a \pm b$ önermesinin tersi durumda da doğru olduğunu düşünerek çözümü o şekilde gerçekleştirmişlerdir (Bkz. Şekil 77). $R^{-}_{s}18$'i kullandıkları belirlenen bu öğrencilerden Ö34, yaptıklarını mülakatta şu şekilde ifade etmiştir;

A: 7. soruya bakalım. m│a ve m│b ise m│a±b demiştik. Peki, bu önerme tek tarflı mıdır, yoksa iki taraftan da doğru mudur?
Ö34: İki taraftan da doğrudur.



Şekil 77. Ö34’ün S_s7’ye verdiği cevap

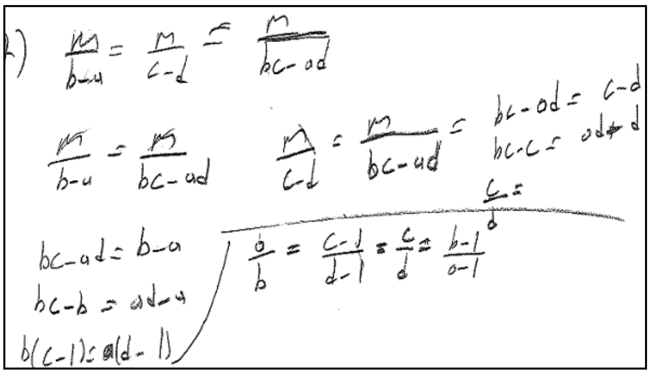
Ö15 ve Ö33 kodlu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde ilk adımları doğru olarak gerçekleştirseler de son adımda m sayısı çarpım durumundaki sayıları bölüyorsa bu sayıların her birini böler bilgisini kullanarak hata yaptıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 78). Bu nedenlerle kullandıkları operatör, $R^{-}_{s}22$: $m|a.b \Rightarrow m|a$ *ve* $m|b$ *dir,* olarak belirlenmiştir.



a. Ö15'in cevabı   b. Ö33'ün cevabı

Şekil 78. Öğrencilerin S_s7'ye verdikleri cevaplar

Ö46'nın $m|b-a=\dfrac{m}{b-a}$ eşitliğini kullanarak çözümünü gerçekleştirmesi bölünebilmenin tanımını hatalı kullandığını göstermektedir (Bkz. Şekil 79). Bu nedenle R_s21 operatörünü hatalı olarak kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 79. Ö46'nın S_s7'ye verdiği cevap

Ö23, Ö40, Ö45, Ö48, Ö49, Ö53 ve Ö57 kodlu öğrenciler taraf tarafa çarpma, Ö7, Ö14, Ö44, Ö58 ve Ö59 ise taraf tarafa toplama işlemlerini hatalı yapmışlardır. Bu öğrencilerin R_s1 operatörünü hatalı olarak kullandıkları belirlenmiştir.

Yedinci soru ile ilgili olarak Ö3, Ö5, Ö11, Ö16, Ö19, Ö20, Ö21, Ö27, Ö30, Ö35-Ö37, Ö42, Ö47, Ö50, Ö55 ve Ö61 soruya cevap vermezken, Ö26; b-a=m.k=b.c ve c-d=m.t=a.d olarak düşünerek anlamsız çözüm yaptığından, Ö60 ise ifadedeki b.c çarpımını bc iki basamaklı sayısı olarak aldığından bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

Öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları operatörler incelendiğinde, yedinci soruda belirlenen iki operatörün yanı sıra önceki sorularda karşılaştığımız R_s1, $R^{-}_{s}6$ ve R_s18 operatörlerinin tekrarlandığı göze çarpmaktadır.

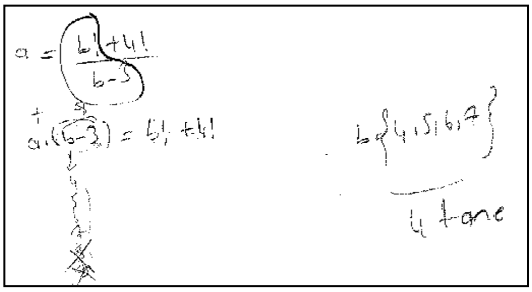
3.2.1.8. Sekizinci Soru

S_s8: a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $a = \dfrac{b!+4!}{b-3}$ *eşitliğini sağlayan kaç tane b sayısı vardır?*

Sekizinci soruya öğrencilerden 4'ü cevap vermemiştir. Diğer öğrencilerden 14'ü sorunun tam doğru cevabına ulaşmayı başarırken, 38 öğrenci ise istenen b değerlerini eksik bulmuşlardır. Kalan 4 öğrenci ise soruya yanlış cevap vermişlerdir.

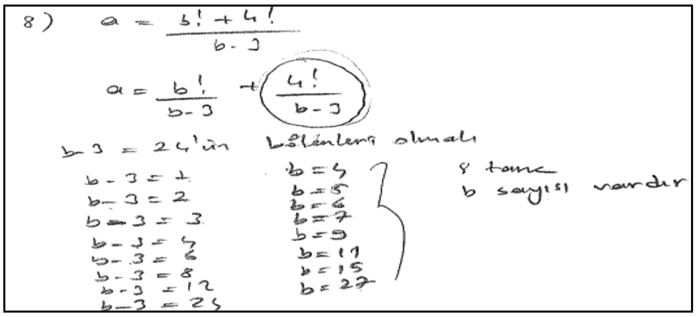
Ö1, Ö3, Ö4, Ö6-Ö8, Ö11-Ö15, Ö18-Ö20, Ö22-Ö24, Ö26, Ö29, Ö31, Ö32, Ö34, Ö37, Ö38, Ö40, Ö43, Ö44, Ö46-Ö48, Ö50, Ö51, Ö54, Ö56, Ö58 ve Ö59 verilen ifadedeki b'ye rastgele değerler verdikleri için çözüm kümesindeki elemanları eksik olarak bulmuşlardır (Bkz. Şekil 80). Bu öğrencilerin eşitliği sağlayan b sayısını bulmak için değer verme yolunu seçmeleri *R_s5* operatörünü kullandıklarını göstermektedir. Ö56 kendisi ile yapılan mülakatta çözümünü aşağıdaki şekilde ifade etmiştir;

A: Burada değer vererek mi çözdün? b'ye değerler verdin, zor olmadı mı?
Ö56: Çok zor oldu.
A: Peki bunun başka bir yolu var mıdır diye düşünmedin mi?
Ö56: Düşündüm; ama o anda aklıma bir şey gelmedi.



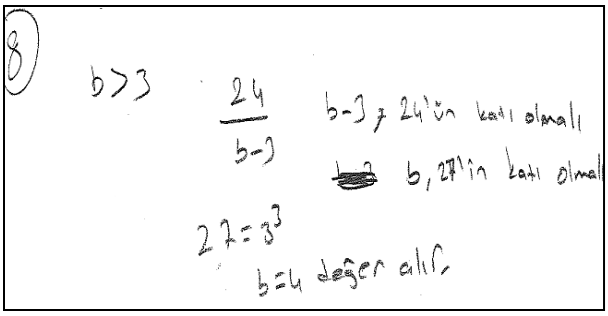
Şekil 80. Ö56'nın S_s8'e verdiği cevap

Bu soruya doğru cevap veren Ö2, Ö9, Ö10, Ö16, Ö17, Ö21, Ö33, Ö35, Ö41, Ö45, Ö49, Ö53, Ö57 ve Ö60 verilen ifadeyi çözümü kolaylaştıracak şekilde parçalayarak a sayısının tam sayı olma şartını $\frac{4!}{b-3}$ ifadesine indirgemiş ve b değerlerine ulaşmayı başarmışlardır (Bkz. Şekil 81). Çözümde de görüldüğü gibi öğrencilerin R_s2 operatörünün yanı sıra R_s21 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 81. Ö57'nin S_s8'e verdiği cevap

Diğer bir çözüm Ö42 kodlu öğrenci tarafından gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 82). Çözümde de görüldüğü gibi R_s21 operatörünü *hatalı* kullanan öğrencinin son adımda b-3, 24'ü bölüyorsa b'nin 27'nin katı olması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak $27=3^3$ eşitliğinden hareketle b sayısının 4 değer alacağını belirtmiş olması aslında 27 nin pozitif bölenlerinin sayısını bulduğunu göstermektedir. Bu nedenle aynı zamanda R^-_s23: $x, y, a \in Z,\ x-a|y \Rightarrow x|y+a$ *dır,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 82. Ö42'nin S_s8'e verdiği cevap

Sekizinci soruyla ilgili olarak Ö25, Ö30, Ö36 ve Ö55 soruya cevap vermezken, a>0 olması durumunu düşünen öğrencilerden Ö5 ve Ö39 ifadeyi eşitsizlik haline dönüştürerek işaret incelemesi yapmış Ö61 ise doğrudan b-3>0 b≥4 olarak bulmuştur. Bu öğrenciler için bir operatör belirlenmemiştir.

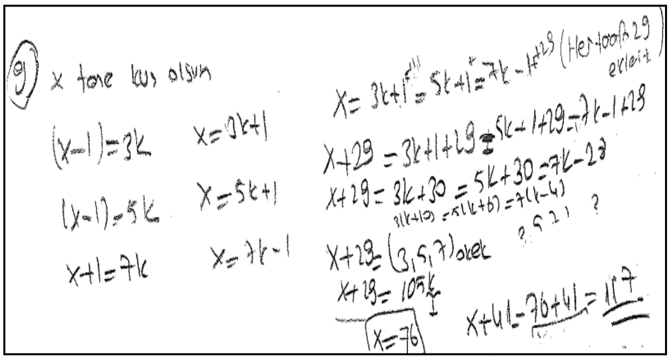
Soru ile ilgili bulgulara bakıldığında, bir yeni operatörün belirlendiği görülmektedir. Ayrıca önceki sorularda kullanılan R_s2, R_s5 ve R_s21 operatörlerinin tekrarı söz konusudur.

3.2.1.9. Dokuzuncu Soru

S_s9: Elektrik tellerinde sıralanmış bir grup kuşun liderine sormuşlar;"Kaç tanesiniz? O da cevap vermiş:"Ben olmasaydım kalan kuşların sayısı 3 ve 5 sayılarına bölünecek, bizimle beraber bir kuş daha olsaydı sayımız 7 ile bölünecekti. 100 den de çok değiliz." Bu bilgiler ışığında, 41 kuş daha olsaydı acaba telde kaç kuş olacaktı?

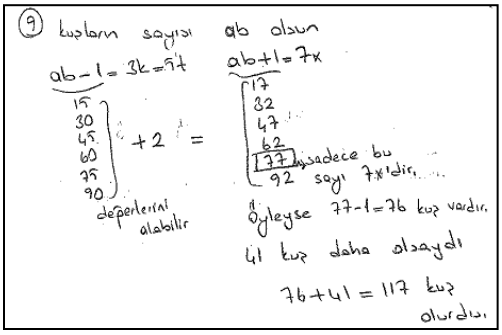
Dokuzuncu soruya 40 öğrenci doğru cevap verirken, 18 öğrenci hatalı cevap vermiştir. Kalan 2 öğrenci ise soruya cevap vermemiştir.

Ö1, Ö15, Ö23 ve Ö25 cebirsel ilişkileri doğru kurarak, doğru çözüme ulaştıkları için (Bkz. Şekil 83) kullandıkları operatör; *R_s13* olarak belirlenmiştir.

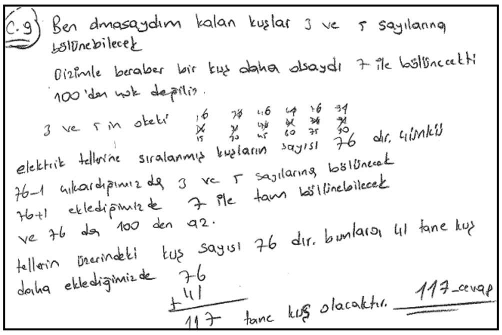


Şekil 83. Ö15'in S_s9'a verdiği cevap

Ö2, Ö3, Ö6, Ö9-Ö12, Ö16, Ö19, Ö20, Ö22, Ö24, Ö27, Ö28, Ö32, Ö33, Ö35-Ö43, Ö47, Ö49, Ö51, Ö53, Ö55, Ö57, Ö60, Ö61 uygun cebirsel ifadeler oluşturmuşlar ancak cebirsel çözüm yapmak yerine, belirledikleri değişkenlere değer vererek sonuca ulaşmaya çalışmışlardır (Bkz. Şekil 84a). Ö6, Ö16, Ö28, Ö39, Ö43 ve Ö44 uygun cebirsel ifadeleri kurmalarına rağmen değişkenlere yanlış değerler vererek hatalı sonuca ulaşmışlardır. Ö5, Ö8, Ö13, Ö17, Ö18, Ö21, Ö26, Ö34 ise soruda verilenlerden hareketle cebirsel ifadeler oluşturmadan doğrudan istenilen sayıyı bulmaya yönelik değerleri düşünmüşlerdir (Bkz. Şekil 84b). Bu nedenle tüm bu öğrencilerin R_s5 operatörünü kullandıkları; ancak Ö6, Ö16, Ö28, Ö39, Ö43 ve Ö44'ün bu operatörü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö55'in cevabı



b. Ö17'nin cevabı

Şekil 84. Ö55'in S_s9'a verdikleri cevaplar

Dokuzuncu soru ile ilgili olarak Ö30 ve Ö31 soruya cevap vermezken, Ö7, Ö14, Ö45, Ö46, Ö48, Ö56 ve Ö58 verilenleri kullanarak cebirsel ifadeleri oluşturmaya çalışsalar da başarılı olamamışlardır. Ö4, Ö29, Ö50, Ö54, Ö59 ise verilenleri cebirsel olarak yazarak, bu şekilde bırakmışlardır. Bu nedenle bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

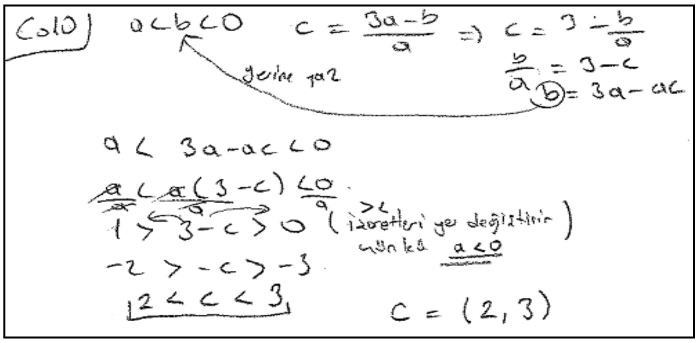
Bu soruda yeni bir operatörün kullanılmadığı, önceki operatörlerden R_s5 ve R_s13'ün tekrar ettiği belirlenen operatörlerden görülmektedir.

3.2.1.10. Onuncu Soru

S_s10: a<b<0 olsun. $c = \dfrac{3a-b}{a}$ *olduğuna göre c hangi aralıkta değer alır?*

İlk uygulamanın son sorusu olan onuncu soruya 18 öğrenci doğru cevap verirken, 42 öğrenci hatalı cevap vermişlerdir.

Bu soruya doğru cevap veren öğrencilerden Ö3, Ö7, Ö8, Ö12, Ö17, Ö18, Ö21, Ö26, Ö28, Ö33, Ö38, Ö42, Ö54, Ö58 ve Ö61 $c = \dfrac{3a-b}{a}$ ifadesindeki b değişkenini a ve c cinsinden bulmuşlar ve a<b<0 ifadesinde yerine yazarak gerekli işlemleri yapıp doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 85). Eşitsizlik kurallarını doğru uygulayan bu öğrencilerin kullandıkları operatör R_s*24: Eşitsizliğe özgü kural ve özellikler***,** olarak belirlenmiştir.

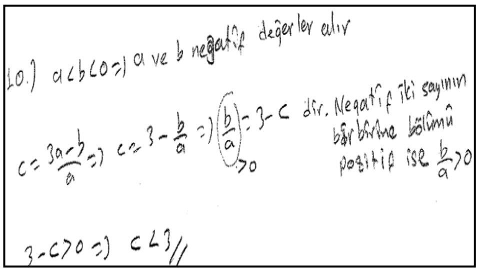


Şekil 85. Ö3'ün S_s10'a verdiği cevap

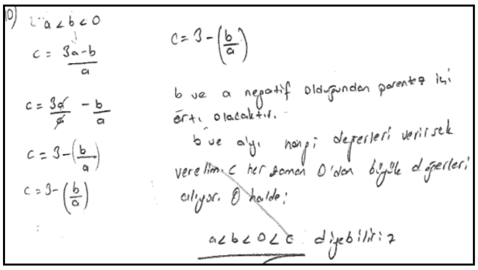
R_s24 operatörünü *hatalı* kullanan öğrencilerden Ö1, Ö10, Ö11, Ö14, Ö29, Ö35, Ö41, Ö53, Ö56 ve Ö60 kodlu öğrencilerin çözümleri incelendiğinde c değerinin sadece üst sınırını bularak 3'ten küçük olması gerektiğini belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 86a). Ö4, Ö9, Ö24, Ö32 ve Ö48 kodlu öğrenciler ise yukarıdaki öğrencilerden farklı olarak c değerinin 0'dan büyük olması gerektiğini bulmuşlardır (Bkz. Şekil 86b). Ö9 çözümünü aşağıdaki gibi açıklamıştır:

A: 10. soruda c'nin aralığını sormuşum. Burada nasıl düşündün? İfadeyi parçalamışsın.
Ö9: Evet parçaladım. b ve a negatif olduğundan parantez içi artı olacaktır.
A: Dolayısıyla c, 3'ten küçük olmalı değil mi?
Ö9: Evet. 3'ten küçük olmalı.
A: Ama sen bu durumla ilgili hiç bir şey bahsetmemişsin.
Ö9: Evet dememişim. Şuraya 3 yazabilirdim.
A: 3 yazabilirdin ama sıfırdan küçük her değer için sağlar mıydı? Birde bunun diğer tarafı var. Tek taraflı düşündün
Ö9: Evet, tek taraflı.

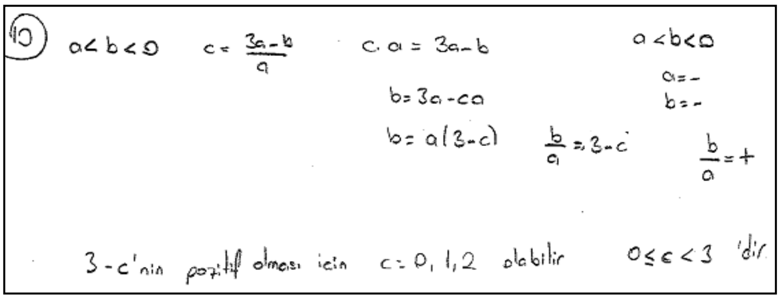
R_s23 operatörünü *hatalı* kullanan diğer öğrencilerden Ö19, Ö25, Ö45 ve Ö60 ise ifadeyi $\frac{b}{a} = 3 - c$ durumuna getirdikten sonra 3-c>0 olması için c sayısının 0 ile 3 arasında olması gerektiğini (Ö19, Ö60) (Bkz. Şekil 86c) veya c<3 ve 0<c<1 olması gerektiğini (Ö25, Ö45) belirtmişlerdir.



a. Ö35'in cevabı



b. Ö9'un cevabı



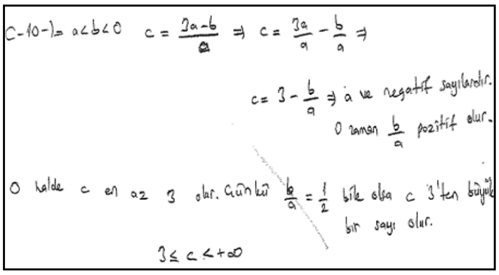
c. Ö60'ın cevabı

Şekil 86. Öğrencilerin S_s10'a verdikleri cevaplar

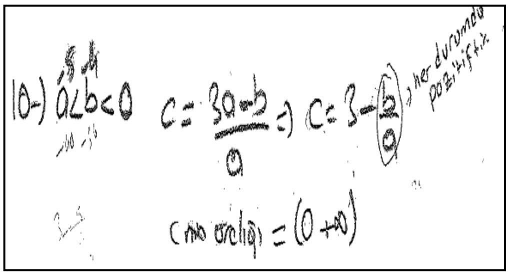
Ö34 ve Ö47 verilen ifadeyi $c = 3 - \frac{b}{a}$ şekline getirdikten sonra ilk öğrenci $\frac{b}{a}>0$ olduğundan 3≤c<∞ olarak bulurken (Bkz. Şekil 87a), ikinci öğrenci ise (Bkz. Şekil 87b) $\frac{b}{a}$ nın her durumda pozitif olacağını belirterek c nin (0, -∞) aralığında olacağını bulmuştur. Ö51 ise ifadeyi $c + \frac{b}{a} = 3$ şekline getirdikten sonra $\frac{b}{a}$=k>0 olduğunu varsayarak c+k=3'den c=3-k ve c≤2 olarak bulmuştur. Ö57 ifadeyi b=a(3-c) şekline getirerek a>0 olduğunu düşündüğü için c>3 olarak bulmuştur. Ö5, Ö20, Ö22, Ö30, Ö36, Ö37, Ö39, Ö43, Ö44, Ö55 ve Ö59 ise eşitsizliğin negatif sayı ile bölündüğünde yön değiştireceği kuralını ihlal ettikleri için hatalı sonuçlar bulmuşlardır (Bkz. Şekil 87c). Ö39 kodlu öğrenci, kendisi ile yapılan klinik mülakatta;

> A: 10.soruda a<0 olduğunu düşünmedin herhalde.
> Ö39: a sıfırdan küçük.
> A: Peki, a' ya bölüyorsun her tarafı neden eşitsizlik yön değiştirmiyor?
> Ö39: Dikkatsizlik.

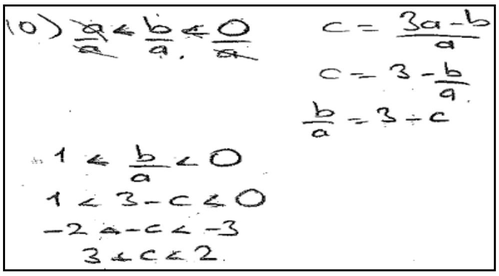
şeklindeki ifadelerle kendini savunmuştur.



a. Ö34’ün cevabı



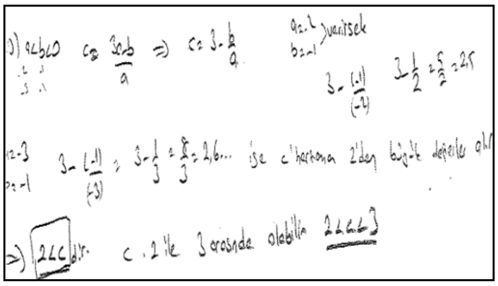
b. Ö47’nin cevabı



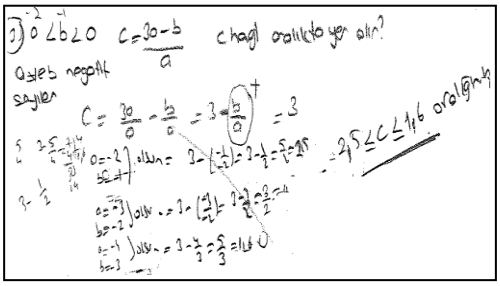
c. Ö44’ün cevabı

Şekil 87. Öğrencilerin S_s10’a verdikleri cevaplar

Ö6, Ö13, Ö15, Ö16, Ö23, Ö27, Ö31, Ö40, Ö49, Ö50 ise a ve b değişkenlerine değerler vererek sonuca ulaşmaya çalışmışlardır (Bkz. Şekil 88). Bu öğrencilerden doğru sonuca ulaşmayı başaran Ö6, Ö16 ve Ö40’ın (Bkz. Şekil 88a) R_s***5*** operatörünü doğru kullandıkları, diğer öğrencilerin (Bkz. Şekil 88b) ise *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



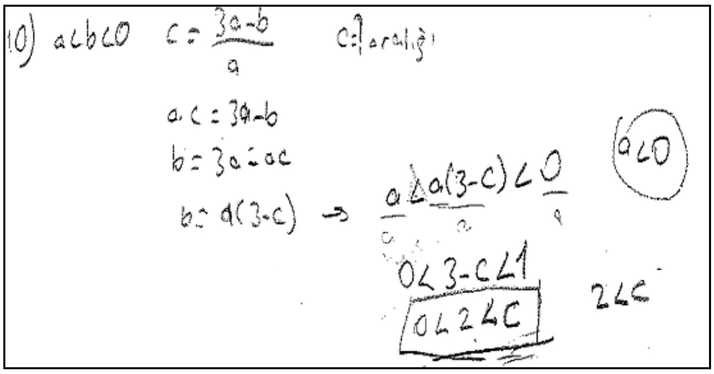
a. Ö6’nın cevabı



b. Ö15’in cevabı

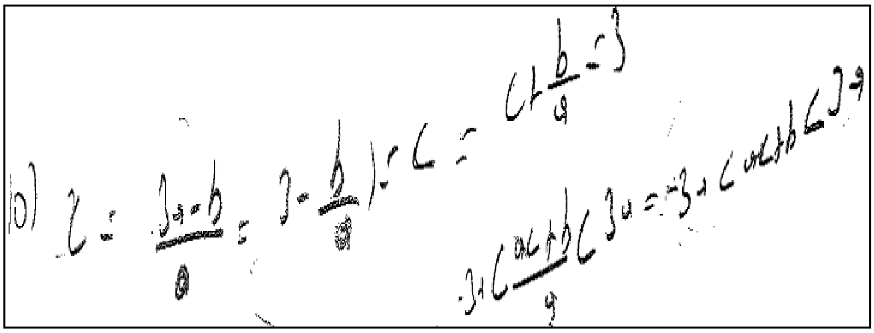
Şekil 88. Öğrencilerin S_s10’a verdikleri cevaplar

Ö2’nin çözümü incelendiğinde gerekli düzenlemeleri yaparak ifadeyi 0<3-c<1 şekline getirdiği; ancak eşitsizliğin çözümünü denklem çözer gibi yaparak, 1 sayısını eşitsizliğin soluna, c sayısını da sağına geçirerek 0<2<c eşitsizliğine ulaştığı tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 89). Bu nedenle $R^{-}_{s}25$: *$a,b,x \in \Re$, $a < b-x < c$ ise $a < b-c < x$ dir,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 89. Ö2'nin S_s10'a verdiği cevap

Ö46 kodlu öğrenci ise Ö2'nin tersine bulduğu eşitliği eşitsizlik gibi düşünerek, eşitsizlik kurallarını kullanarak çözümüne devam etmiştir (Bkz. Şekil 90). Bu nedenle kullanılan operatör; $R^{-}_{s}26$: *$\frac{a}{b} = c$ ise $-c < \frac{a}{b} < c$ dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 90. Ö46'nın S_s10'a verdiği cevap

Bulgular incelendiğinde onuncu soruda 3 yeni operatörün ortaya çıktığı aynı zamanda önceden karşımıza çıkan R_s5 ve R_s23 operatörlerinin tekrar kullanıldığı görülmektedir.

3.2.1.11. On Birinci Soru

S_s11: $\dfrac{a+a+a+a+a}{a.a.a.a}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

İkinci uygulamaya katılan 59 öğrenciden 54'ü, uygulamanın ilk sorusu olan on birinci soruya doğru cevap verirken kalan 5 öğrenci soruyu hatalı cevaplamışlardır.

Soruya doğru cevap 54 öğrenci (Ö1-Ö26, Ö28-Ö30, Ö32-Ö35, Ö37-Ö44, Ö47-Ö51, Ö53-Ö57, Ö59-Ö61) gerekli sadeleştirmeleri yaparak sonucu $\dfrac{5}{a^3}$ olarak bulmuşlardır. Bu öğrencilerden Ö4, Ö7, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12, Ö15, Ö21, Ö23, Ö26, Ö32, Ö34, Ö37, Ö40, Ö42, Ö48, Ö53 ve Ö59 ayrıca bulduğu sonucu rasyonel olarak bırakmak yerine paydadaki üslü ifadeyi paya çıkararak $5.a^{-3}$ olarak düzenlemiştir. Bu nedenle öğrencilerin *R_s2*'nin yanı sıra *R_s27:Üslü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler***,** operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Paydada yer alan (a.a.a.a) çarpımını $4.a^2$ olarak aldığı için hata yaptığı tespit edilen Ö58'in ise *R_s27* operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenmiştir.

Payda yer alan a'ları hatalı sayarak dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülen hata yaptığı tespit edilen öğrenciler (Ö27, Ö45, Ö36, Ö46) için operatör belirlenememiştir.

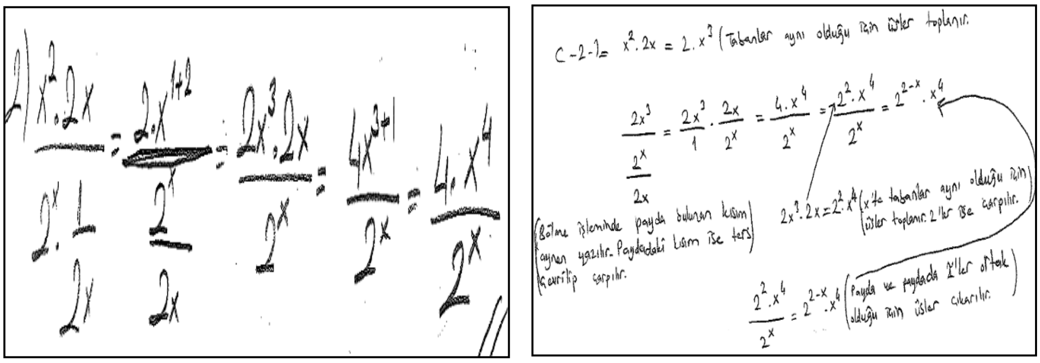
Öğrencilerin çözümlerinden hareketle 11. soruda 1 yeni operatör belirlenmiş, ayrıca önceden kullanılan R_s2 operatörünün tekrarı göze çarpmıştır.

3.2.1.12. On İkinci Soru

S_s12: $\dfrac{x^2.2x}{2^x.\dfrac{1}{2x}}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

On ikinci soruya cevap veren öğrencilerin 53'ü doğru sonuca ulaşmayı başarırken, diğer 6 öğrenci hatalı sonuç bulmuşlardır.

Bu soruya doğru cevap veren 53 öğrencinin bir kısmı (Ö11-Ö16, Ö18-Ö29, Ö41, Ö58-Ö61) ifadeyi rasyonel olarak bırakırken (Bkz. Şekil 91a), diğer kısmı (Ö1-Ö9, Ö32-Ö40, 42-45, Ö47-Ö51, Ö53-Ö55) ise paydadaki üslü sayıyı paya çıkarmayı tercih etmişlerdir (Bkz. Şekil 91b). Bu öğrencilerin *R_s27* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

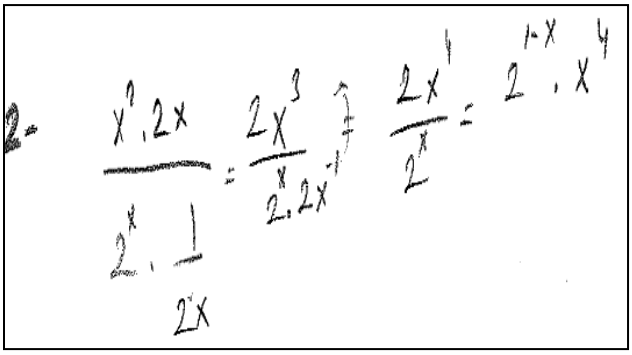


a. Ö41’in cevabı

b. Ö34’ün cevabı

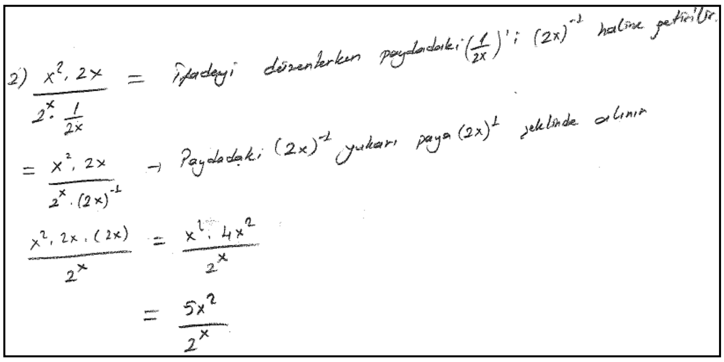
Şekil 91. Öğrencilerin S_s12’ye verdikleri cevaplar

Ö56 kodlu öğrenci paydada yer alan 2.x ifadesini paya çıkarırken $2.x^{-1}$ olarak değiştirmiştir (Bkz. Şekil 92). Sadece üslü ifadede değişiklik yaptığı, kat sayıyı doğrudan paya çıkardığı görülmektedir. Bu öğrencinin *R_s27* operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenmiştir.



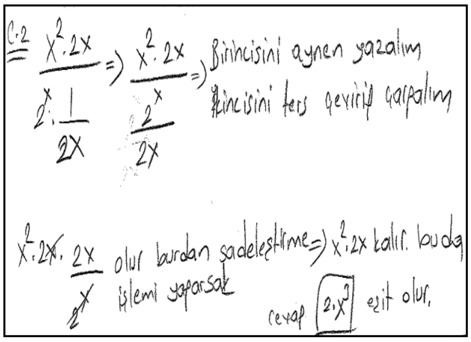
Şekil 92. Ö56’nın S_s12’ye verdiği cevap

Soruya hatalı cevap veren öğrencilerden bir diğeri ise (Ö57) $4.x^2.\ x^2$ ifadesini $5\ x^2$ olarak düzenlemiştir (Bkz. Şekil 93). Bu öğrencinin üslü sayılarla toplama işleminin kuralını, üslü sayılarla çarpma işleminde kullandığı görülmektedir. Bu nedenle kullandığı operatör; *R^-_s28: $a.x^n.b.x^n=(a+b).x^n$ dir*, olarak belirlenmiştir.

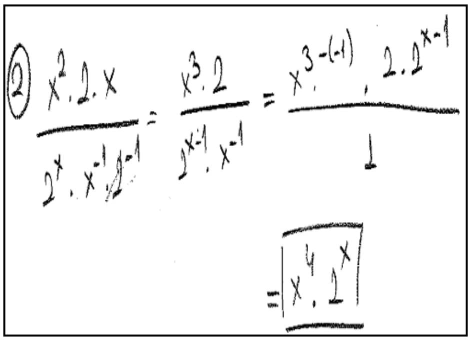


Şekil 93. Ö57’nin S_s12’ye verdiği cevap

On ikinci soruyla ilgili olarak $\frac{2x^4}{2^{x-1}} = 2^{5-x}$ olarak yazan Ö10 kodlu öğrencinin $2x^4$ ü 2^4 olarak algıladığı düşünülmektedir. Ö17; 2.x çarpımı ile 2^x üslü ifadesini sadeleştirdiği için hata yaparken (Bkz. Şekil 94a), Ö30 ise ifadede paydada yer alan x^{-1} üslü sayısını paya çıkarırken üssü – ile çarpmış ancak, 2^{x-1} ifadesini paya çıkarırken üssü – ile çarpmamıştır (Bkz. Şekil 94b). Bu hataların dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünüldüğü için öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.



a. Ö17’nin cevabı



b. Ö30’un cevabı

Şekil 94. Öğrencilerin S_s12’ye verdikleri cevaplar

On ikinci soru ile ilgili olarak anlamsız çözüm yapan Ö46 için bir operatör belirlenmemiştir.

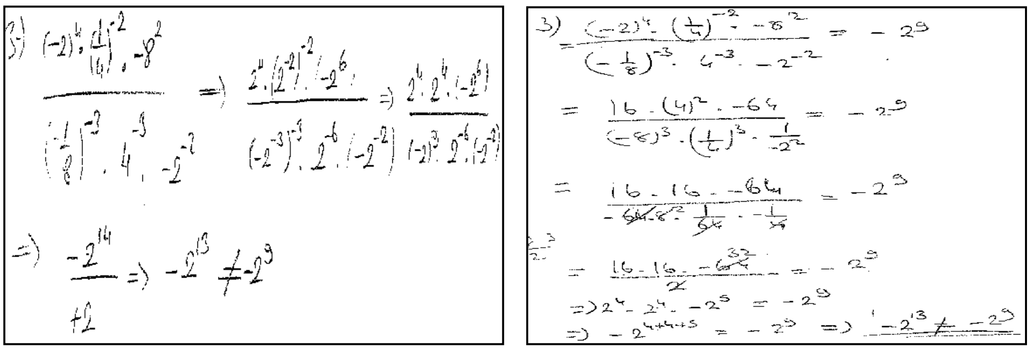
Sorunun çözümünde bir yeni operatörün kullanılmadığı belirlenirken, önceden kullanılan R_s27 operatörünün tekrarı da söz konusu olmuştur.

3.2.1.13. On Üçüncü Soru

S_s13: $\dfrac{(-2)^4.(\frac{1}{4})^{-2}.-8^2}{(-\frac{1}{8})^{-3}.4^{-3}.-2^{-2}} = -2^9$ *olup olmadığını araştırınız.*

On üçüncü soruyu 39 öğrenci doğru olarak cevaplandırırken, 20 öğrenci soruya hatalı cevap vermişlerdir.

Bu soruya doğru cevap veren öğrencilerden bazıları (Ö1-Ö3, Ö7, Ö9, Ö17, Ö18, Ö20-Ö22, Ö28-Ö30, Ö35-Ö39, Ö47, Ö48, Ö53) üslü ifadeleri ortak tabanda yazarak sadeleştirme yapmayı tercih ederken (Bkz. Şekil 95a), bazıları ise (Ö11, Ö12, Ö14, Ö24, Ö26, Ö41, Ö43-Ö45, Ö50, Ö51, Ö54, Ö56-Ö61) verilen üslü ifadelerin karşılık geldiği doğal sayıları bulup daha sonra gerekli sadeleştirmeleri yapmışlardır (Bkz. Şekil 95b).



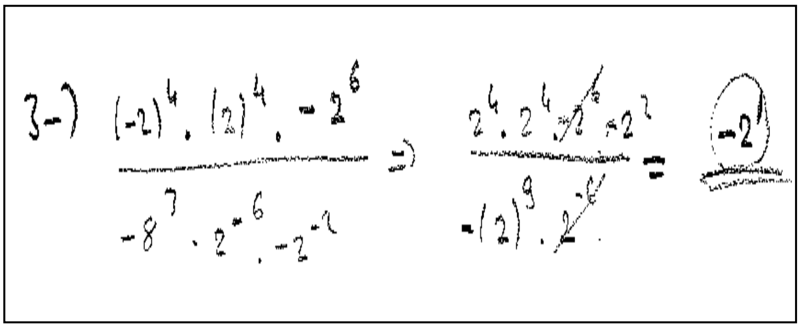
a. Ö1'in cevabı

b. Ö14'ün cevabı

Şekil 95. Öğrencilerin S_s13'e verdikleri cevaplar

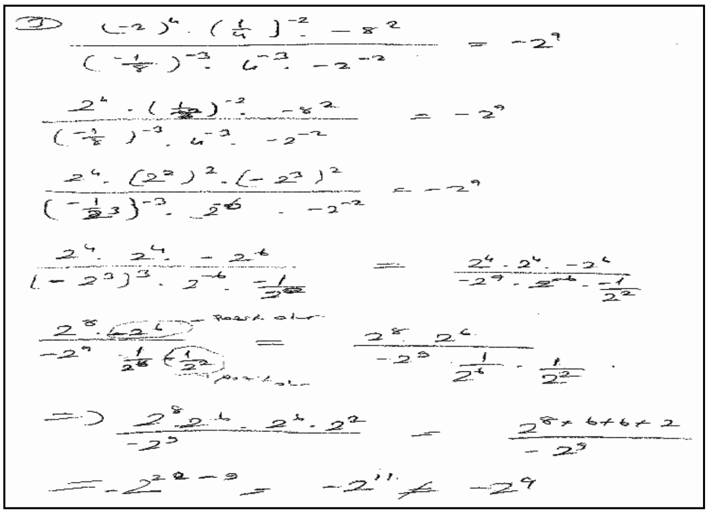
Bu öğrencilerin *R_s27* operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.

Ö4 ve Ö33 ise üslü sayılarda, üssün negatif olması durumu ile tabanın negatif olması durumunu aynı olarak değerlendirdikleri için hatalı sadeleştirme yapmışlardır (Bkz. Şekil 96). Öğrencilerin kullandıkları operatörün; *R^-_s29:* $-a^n = a^{-n}$ $(a, n \in Z^+)$ *dir,* olduğu açık olarak görülmektedir.



Şekil 96. Ö33’ün S_s13’e verdiği cevap

Hatalı çözüm yapan diğer bir öğrenci Ö19’un -2^6 ve $-\frac{1}{2^2}$ ifadelerini pozitif olarak aldığı görülmektedir (Bkz. Şekil 97). Bu durumda öğrencinin kullandığı operatör *$R^{-}_{s}30$:* $-(a)^{2n} = a^{2n}$ *dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 97. Ö19’un S_s13’e verdiği cevap

Dikkatsizlikleri neticesinde çözümü hatalı gerçekleştiren ve bu nedenle kullandıkları operatör belirlenmeyen öğrencilerden; Ö6, Ö32, Ö49 üsleri toplarken, Ö8 ve Ö23 ise üslü sayılarla bölme işlemini yaparken hata yapmışlardır. Ö5, Ö15, Ö27, Ö34, Ö46 ve Ö55 kodlu öğrenciler süslü sayıların belirttiği sayıları hatalı hesaplarken, Ö10 ve Ö16 ise rasyonel sayıların üslerini alırken paydadaki sayıların üslerini almamışlardır. Ö25, Ö40, Ö42 ise bazı sayıları bir sonraki adıma hatalı taşımışlardır. Son olarak Ö13 öğrencisinin doğru sonuca gitmesine engel olan hatası; payda bulunan ifadeleri çarpacağına toplaması olmuştur.

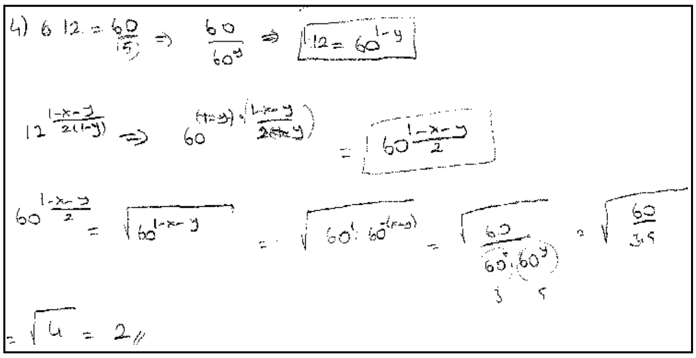
Soruya ait bulgular incelendiğinde, iki yeni operatörün yanı sıra önceden kullanılan R_s27 operatörünün tekrarı göze çarpmaktadır.

3.2.1.14. On Dördüncü Soru

S_s14: $60^x=3$, $60^y=5$ ise $12^{[\frac{1-x-y}{2(1-y)}]}$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

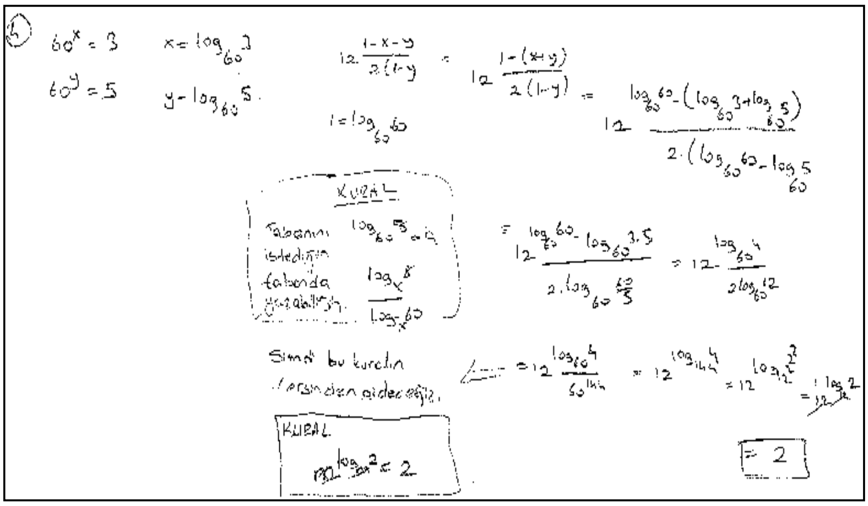
On dördüncü soru ile ilgili olarak elde edilen veriler incelendiğinde, 10 öğrencinin soruya cevap vermediği belirlenmiştir. Diğer öğrencilerden 13'ü soruyu doğru olarak cevaplamayı başarırken, 36 öğrenci ise hatalı olarak cevaplamışlardır.

Ö3, Ö10, Ö12, Ö34, Ö35, Ö46, Ö49, Ö51, Ö57, Ö61 soruya cevap vermezken, Ö6, Ö32, Ö39, Ö43-Ö45, Ö47, Ö48, Ö58 ve Ö59 kodlu olanlar $12=\frac{60}{5}=\frac{60}{60^y}=60^{1-y}$ eşitliğinden yararlanarak verilenleri istenen ifadeye benzeterek yerine yazmak suretiyle *(R_s12)* köklü işlemlerin özelliklerinden faydalanarak doğru sonuca ulaştıkları için *R_s31: Köklü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 98).



Şekil 98. Ö6'nın S_s14'e verdiği cevap

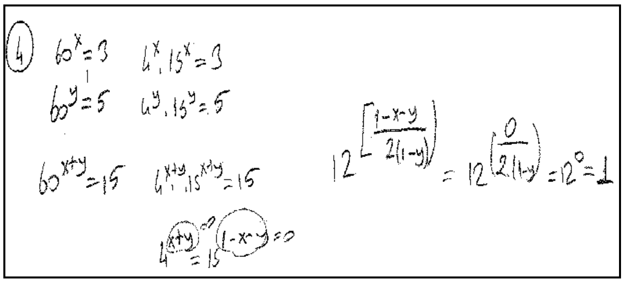
Ö22, Ö33 ve Ö37 ise bu soruyu çözmek için logaritmanın özelliklerini kullanmışlardır. $60^x=3$ ise $\log_{60}3=x$; $60^y=5$ ise $\log_{60}5=y$ şeklinde düzenleyerek $\frac{1-x-y}{2(1-y)}$ ifadesinde bu değerleri kullanarak doğru sonuca varmışlardır (Bkz. Şekil 99). Bu nedenle kullandıkları operatör; *R_s32:Logaritmadan faydalanma* olarak belirlenmiştir.



Şekil 99. Ö33'ün S_s14'e verdiği cevap

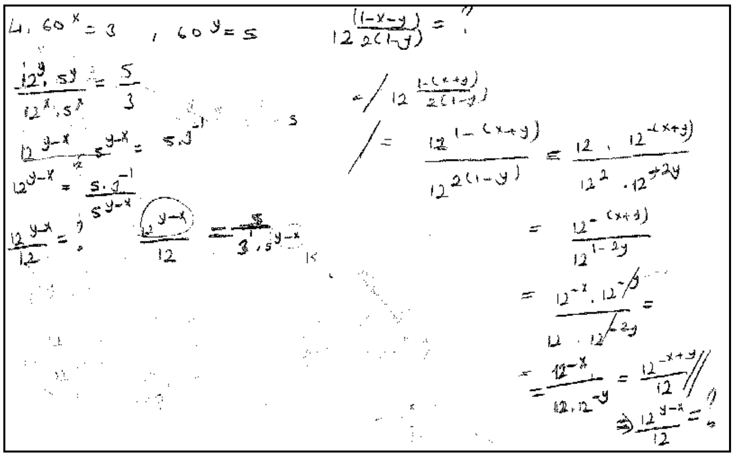
R_s32 operatörünü *hatalı* kullanan öğrencilerden Ö9 son adımda $\dfrac{\log_{60}4}{\log_{60}12}$ ifadesini $\log_{\frac{12}{4}}60=\log_3 60$ olarak bulurken, Ö18 ise yine aynı adımda hata yaparak $\dfrac{\log_{60}4}{\log_{60}12}$ ifadesini $\log_{60}(-16)$ olarak bulmuştur.

Ö5'in çözümü incelendiğinde, verilenleri kullanarak $4^{x+y}=5^{1-x-y}$ eşitliğine ulaştığı ve soruda verilmediği halde x+y=1-x-y=0 özel durumundan faydalandığı görülmektedir (Bkz. Şekil 100). Bu nedenle *R_s5*'i *hatalı* olarak kullandığı belirlenmiştir.



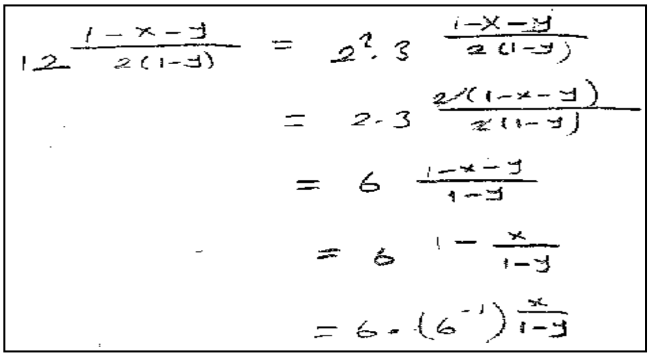
Şekil 100. Ö5'in S_s14'e verdiği cevap

İstenen ifadeyi $12^{[\frac{1-x-y}{2(1-y)}]}=\dfrac{12^{1-(x+y)}}{12^{2-2y}}$ şeklinde parçalayan Ö11, Ö24 ve Ö56 üslü ifadelere ait kural ve özellikleri hatalı kullanarak rasyonel olarak verilen üssü, tabana dağıtmışlardır (Bkz. Şekil 101). Bu nedenle kullandıkları operatör; $R^{-}_{s}33$: $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^{b}}{a^{c}}$ *dir*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 101. Ö11'in S_s14'e verdiği cevap

Üslü sayılara ait kuralları hatalı kullandığı tespit edilen Ö54 (Bkz. Şekil 102) için belirlenen operatör; $R^{-}_{s}34$: $(a^{n}.b)^{m} = (a.b^{n})^{m} = a.b^{n.m}$ *dir*, şeklindedir.



Şekil 102. Ö54'ün S_s14'e verdiği cevap

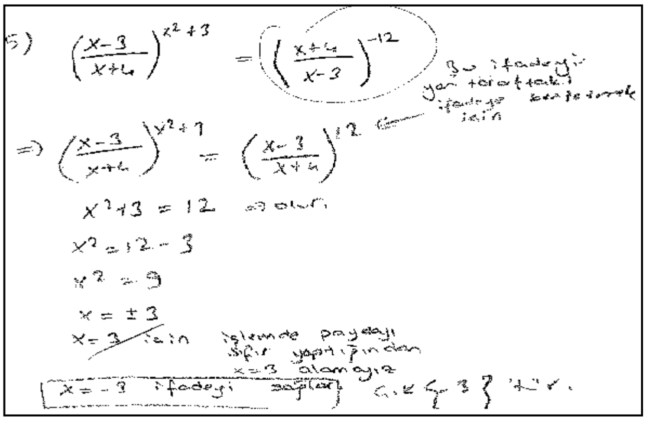
Ö1, Ö2, Ö4, Ö7 Ö8, Ö13-Ö17, Ö19-Ö21, Ö23, Ö25- Ö30, Ö36, Ö38, Ö40-Ö42, Ö50, Ö53, Ö55, Ö60'ın ise R_s27 operatörünü kullanmaları çözümlerini tamamlamalarına yetmemiştir.

Öğrencilerin çözümlerinden hareketle belirlenen operatörlere bakıldığında, 14. soruda 4 yeni operatörün yanı sıra önceki sorularda kullanılan R_s5, R_s12 ve R_s27 operatörlerinin tekrar kullanıldıkları görülmektedir.

3.2.1.15. On Beşinci Soru

S_s15: $(\frac{x-3}{x+4})^{x^2+3} = (\frac{x+4}{x-3})^{-12}$ *eşitliğinin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?*

Bu Soruya 50 öğrenci doğru cevap verirken, 9 öğrenci yanlış cevap vermiştir. Soruya doğru cevap veren 50 öğrencinin (Ö2-Ö13, Ö15, Ö16, Ö18-Ö24, Ö26-Ö30, Ö32-Ö38, Ö40-Ö44, Ö46-Ö50, Ö53-Ö57, Ö59 ve Ö60) *R_s12'yi* kullanarak eşitliğin her iki tarafını işlemi kolaylaştıracak şekilde birbirine benzettikleri ve üslü ifadelerin özelliklerinden faydalanarak (*R_s27)* çözüme ulaştıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 103).

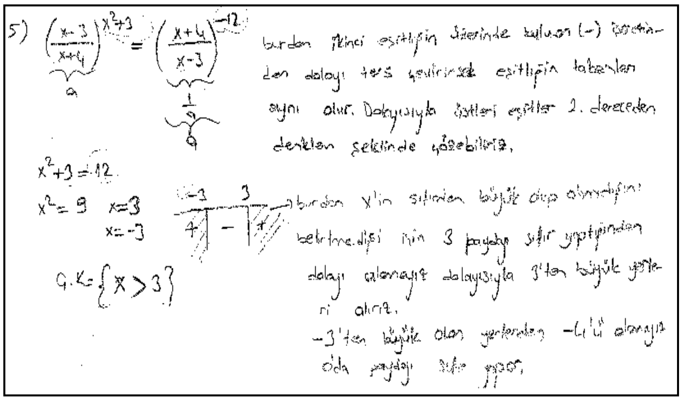


Şekil 103. Ö9'un S_s15'e verdiği cevap

Ö14, Ö39 ve Ö45 kodlu öğrenciler ise ilk adımları doğru gerçekleştirmelerine rağmen buldukları denklemi eşitlik olarak düşünmek yerine eşitsizlik olarak düşünerek çözüm kümesini işaret incelemesi yapıp aralık olarak bulmuşlardır (Bkz. Şekil 104). Bu nedenle öğrencilerin kullandıkları operatör; *R^-_s35: İkinci dereceden denklemlerin çözüm kümesi bir aralık belirtir,* olarak belirlenmiştir. Ö45, işaret incelemesi yapma nedenini aşağıdaki şekilde açıklamıştır;

A: Burada, 5. soruda çözüm kümesini bulurken bir aralık bulma ihtiyacı duymuşsun niye?
Ö45: 2.dereceden denklem olduğu için hani yerlerini daha kolay bulabilirim diye.
A: Peki aralığı ne zaman kullanırız biz? Aralık olması için ifadenin ne olması gerekir?
Ö45: 2.dereceden denklemde aralık olmuyor mu?

A: Kullanırız ama ne zaman?
(Sessizlik) Peki seni aralık bulmaya iten sadece 2.derece denklem olduğunu görmek miydi?
Ö45: Evet.



Şekil 104. Ö45'in S_s15'e verdiği cevap

Ö1, Ö51 ve Ö61 kodlu öğrenciler $a^n=a^m$ eşitliğinin gerçekleşebilmesi için gereken şartları bu soru için de uygulamışlardır. Ö58 ise $\frac{x-3}{x+4}$ ifadesinin pay ve paydasının yeri değiştiği için bu ifadenin -1 değerine eşit olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin *R_s27* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.

Ö17 ve Ö25 kodlu öğrenciler eşitliği oluşturan ifadeleri birbirine benzettikten sonra üsleri eşitlemiş, ancak $x^2+3=12$ ifadesini $x^2+3x=12$ ikinci derece denklemi olarak düşündükleri için bu denklemin köklerini bulmaya çalışmışlardır. Ö17 ifadenin köklerini hatalı olarak bulurken, Ö25 ise bu ikinci derece denklemin çözümünün olmadığını belirtmiştir. Bu öğrencilerin dikkatsizlikten kaynaklanan hata yaptıkları düşünüldüğü için kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

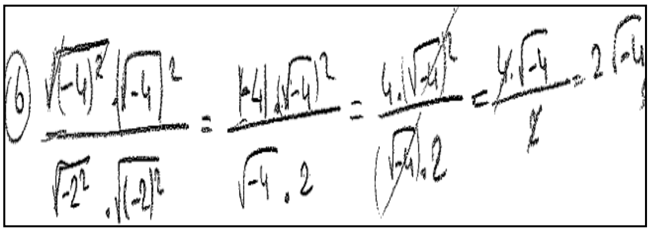
Bu soru ile öğrencilerin kullandıkları operatörlere bir yenisi eklenirken, önceki sorularda belirlenen R_s12 ve R_s27 operatörleri tekrar kullanılmıştır.

3.2.1.16. On Altıncı Soru

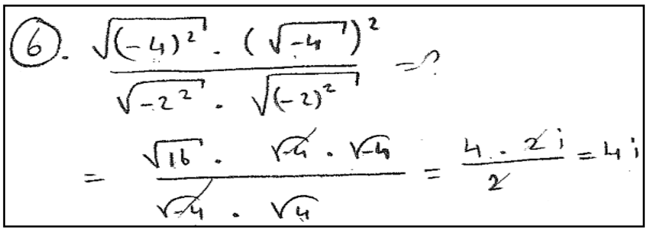
S_s16: $\dfrac{\sqrt{(-4)^2}.(\sqrt{-4})^2}{\sqrt{-2^2}.\sqrt{(-2)^2}}$ *işleminin sonucu kaçtır?*

On altıncı soruya 16 öğrenci doğru cevap vermeyi başarırken, 43 öğrenci soruyu hatalı olarak cevaplamışlardır. Soruya doğru cevap vermeyi başaran 16 öğrenciden (Ö1,

Ö3, Ö9, Ö12, Ö14, Ö17, Ö20, Ö22, Ö24, Ö25, Ö28, Ö33, Ö42, Ö49, Ö59 ve Ö61) Ö9, Ö33 ve Ö59 kodlu olanlar sonucu köklü olarak bulurken (Bkz. Şekil 105a), diğer öğrenciler ise sonucu karmaşık sayı olarak ifade etmeyi tercih etmişlerdir (Bkz. Şekil 105b). Bu nedenle öğrencilerin kullandıkları operatörler sırasıyla; *R_s31* ve *R_s36:* $i^2 = -1$ *olmak üzere* $\sqrt{-a^2} = a.i$ *dir,* olarak belirlenmiştir.



a. Ö59'un cevabı



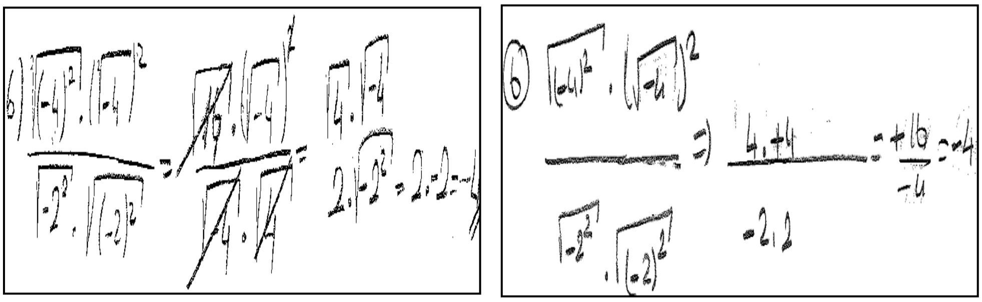
b. Ö28'in cevabı

Şekil 105. Öğrencilerin S_s16'ya verdikleri cevaplar

Ö4, Ö5, Ö8, Ö11, Ö13, Ö15, Ö21, Ö23, Ö30, Ö34, Ö35, Ö38, Ö39, Ö40, Ö41, Ö44, Ö47, Ö51, Ö55, Ö56, Ö58 ve Ö60 kök içindeki negatif sayıyı köklü sayılarla işlemleri kullanarak doğrudan dışarıya çıkarmışlar ve hatalı sonuç bulmuşlardır (Bkz. Şekil 106a). Ö41 kendisi ile yapılan klinik mülakatta, yaptığı hatayı aşağıdaki şekilde açıklamıştır;

A: $\sqrt{-2^2} = -2$ olarak nasıl çıkardın? Niye öyle düşündün.
Ö41: Parantez içinde olsaydı 2 diye çıkaracaktım. Şu eksi tamamının eksisidir diye düşündüm.
[…]
A: […] Pozitif olsaydı +2 çıkacaktı, sayı negatif olunca doğrudan -2 olarak çıkar. Senin düşüncen bu, değil mi?
Ö41: Evet. Direk -2 olarak çıkar.
A: Yani şöyle genellersem,. $\sqrt{-a^2} = -a$ olarak düşündün diyebilir miyim?
Ö41: Evet.

Çözümlerden ve mülakat verilerinden hareketle, bu öğrencilerin hepsinin kullandıkları operatör; *R^-_s37:* $\sqrt{-a^2} = -a$ *dir* ($a \in Z^+$), olarak belirlenmiştir.



a. Ö41'in cevabı b. Ö47'nin cevabı

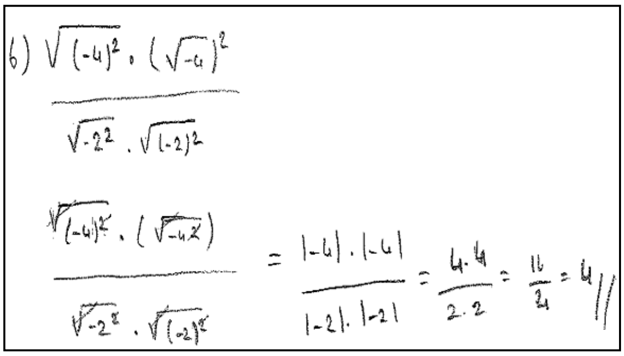
Şekil 106. Öğrencilerin S_s16'ya verdikleri cevaplar

Bu öğrencilerden Ö4, Ö8, Ö11, Ö13, Ö21, Ö23, Ö30, Ö34, Ö38, Ö39, Ö40, Ö41, Ö44, Ö51, Ö55 ve Ö56 kodlu olanlar ayrıca, içinde negatif sayı bulunan kareköklü ifadenin karesinin bu negatif sayıya eşit olduğunu düşünmüşlerdir (Bkz. Şekil 106a). Bu nedenle bu öğrencilerin ayrıca $R^{-}_{s}38$: $(\sqrt{-a})^2 = -a$ *dır* ($a \in Z^{+}$), operatörünü ikinci bir operatör olarak kullandıkları belirlenmiştir.

Ö5, Ö35, Ö47, Ö56 ve Ö58 ise ikinci bir operatör olarak $R^{-}_{s}39$: $(\sqrt{-a})^2 = a$ *dır* ($a \in Z^{+}$), operatörünü kullanmışlardır (Bkz. Şekil 106b).

Soruyu hatalı çözen diğer öğrencilerin (Ö6, Ö7, Ö10, Ö18, Ö19, Ö26, Ö27, Ö29, Ö32, Ö36, Ö37, Ö43, Ö45, Ö46, Ö48, Ö50, Ö53, Ö54 ve Ö57) $R^{-}_{s}39$ operatörünün yanı sıra $R^{-}_{s}40$: $\sqrt{-a^2} = |-a| = a$ *dır* ($a \in Z^{+}$), operatörünü de kullandıkları tespit edilmiştir. Öyle ki, öğrencilerin çözümleri incelendiğinde $\sqrt{-2^2} = |-2| = 2$ olarak kök dışına çıkardıkları görülmüştür (Bkz. Şekil 107). Ö45 kodlu öğrenci, çözümünü aşağıdaki şekilde açıklamıştır;

A: Peki burada bu nasıl -4 olarak çıktı? Bu sadeleştirmeleri nasıl yaptın?
Ö45: Karekök ile kare birbirini götürür -4 olarak çıkar.
A: Diğeri
Ö45: Bu da yine derece çift karesini alırsak -4, mutlak değer olarak çıkar yine.



Şekil 107. Ö4'ün S_s16'ya verdiği cevap

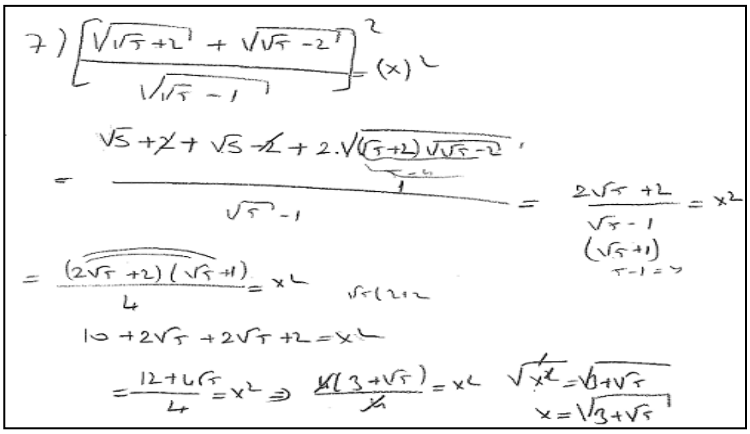
On altıncı soruyla ilgili olarak Ö2 kodlu öğrenci "köklü ifadenin değeri çift sayı iken içindeki sayı negatif olamaz." şeklinde bir ifade yazmakla yetindiğinden kullandığı operatör belirlenmezken, Ö16 ise çözümü $\frac{\sqrt{(-4)^2}.(\sqrt{-4})^2}{\sqrt{-2^2}.\sqrt{(-2)^2}} = \frac{\sqrt{16}.|-4|}{\sqrt{-4}.\sqrt{4}} = \frac{4.4}{\sqrt{-1}.4.2} = \frac{16}{4i}$ şeklinde gerçekleştirmiştir. Bu çözüm incelendiğinde öğrencinin paydada kök içindeki bulunan negatif sayı ile doğru olarak işlem yaparken aynı şekilde payda yer alan sayı ile hatalı işlem yapmıştır. Bu durumun dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünüldüğü için bu öğrenci için de herhangi bir operatör belirlenememiştir.

Soruda kullanılan operatörlere bakıldığında, yeni operatörlerin (R_s36, $R^{-}_{s}37$, $R^{-}_{s}38$, $R^{-}_{s}39$, $R^{-}_{s}40$) yanı sıra R_s31 operatörünün de tekrar kullanıldığı görülmektedir.

3.2.1.17. On Yedinci Soru

S_s17: $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$ *işleminin sonucu kaçtır?*

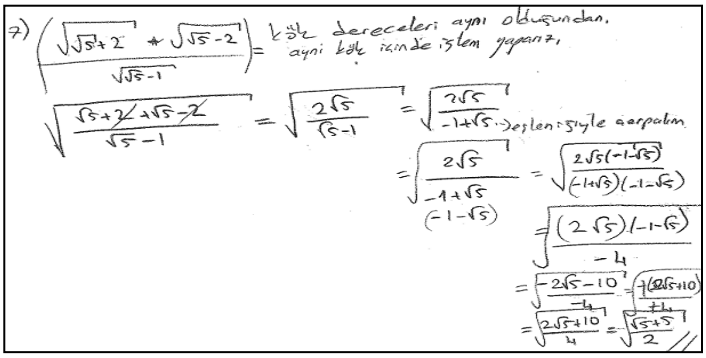
Bu soruya 33 öğrencinin doğru, 26 öğrencinin hatalı cevap verdiği belirlenmiştir. Doğru cevap veren 33 öğrenci (Ö1, Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö11, Ö12, Ö18, Ö20-Ö25, Ö27, Ö28, Ö30, Ö36, Ö37, Ö39, Ö40, Ö43, Ö45, Ö47, Ö49, Ö50, Ö51, Ö53, Ö54, Ö57-Ö60) ifadeyi x'e eşitleyip, eşitliğin her iki tarafının karesini alarak doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 108). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör *R_s41: Karekökten kurtarmak için kare alma* ve *R_s42: Rasyonel bir ifadenin paydasını kökten kurtarmak için ifadeyi paydanın eşleniği ile genişletme,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 108. Ö18'in S_s17'ye verdiği cevap

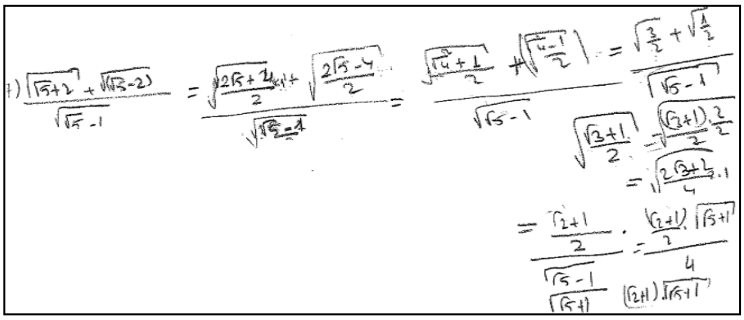
Soruyu çözerken hatalı davranan Ö33 ve Ö34 karekökün içindeki toplanan ifadeleri iki karekökün toplamı şeklinde yazarken, Ö14 ve Ö44 ise tersine düşünerek dereceleri aynı olan toplam durumundaki köklü ifadeleri aynı kök içine almışlardır. Bu 4 öğrenci köklü sayılarla çarpma işlemi için geçerli olan kuralı toplama işlemi için kullanabileceklerini düşünerek hata yapmışlardır (Bkz. Şekil 109). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; *$R^{-}_{s}43$: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ dir,* olarak belirlenmiştir. Ö44 ile yapılan mülakat verileri de, kök dereceleri eşit olduğunda, köklü sayıların arasındaki işleme dikkat etmeksizin aynı kök içinde işlem yapılır bilgisini kullandığını doğrulamaktadır:

A: Peki şu 7. soruda kök dereceleri aynı olduğundan aynı kök içinde işlem yaparız, demişsin.
Ö44: Evet
A: Burada arada toplama mı var?
Ö44: Evet toplam zaten
A: Bu durumda $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ eşitliği doğrudur diyorsun
Ö44: Evet öyle olmuş.



Şekil 109. Ö44'ün S_s17'ye verdiği cevap

Ö13, Ö15 ve Ö19 kodlu öğrenciler; köklü ifadelerle ilgi olan; “$0<y<x$ olmak üzere $\sqrt{(x+y)\pm 2\sqrt{x.y}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ olur.” özelliğini $\sqrt{x.y \pm 2\sqrt{x+y}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ şeklinde kullandıkları için hata yapmışlardır (Bkz. Şekil 110). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; *$R^{-}_{s}44$: $0<y<x$ olmak üzere,* $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x.y \pm 2\sqrt{x+y}$ *dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 110. Ö15’in S_s17’ye verdiği cevap

On yedinci soru ile ilgili olarak Ö26 ve Ö61 soruya cevap vermezken, bazı öğrenciler ise soruyu belli bir yere kadar çözmüşlerdir. Bu öğrencilerden; Ö8, Ö9, Ö29, Ö32 ifadenin paydasını kökten kurtarmak için, paydadaki köklü sayının eşleniği ile rasyonel ifadeyi genişletmeye çalışmış ancak işlemin sonunu getirememişlerdir. Ö16, Ö17 ve Ö42 ise ifadeyi kökten kurtarmak için karesini almışlar ve sonucu $\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1}$ şeklinde bırakmışlardır. Ö2 ise sadece verilen ifadenin payının karesini almakla yetinmiştir. Ö35 kodlu öğrenci ise ifadenin payını ve paydasını $\frac{1}{\sqrt{5}}$ sayısı ile çarparak en sade şeklini bulmaya çalışmış ancak sonuca ulaşamamıştır. Bir grup öğrenci ise dikkatsizlik neticesinde sonuca ulaşamamışlardır. Bu öğrencilerden; Ö5 ifadeyi kökten kurtarmak için karesini alırken hata yapmıştır. Ö10, Ö38 ve Ö55 kodlu öğrenciler ise verilen ifadeyi $\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1}$ şekline getirdikten sonra $\sqrt{5}+1$ ve $\sqrt{5}-1$ sayılarını sadeleştirerek sonucu $\sqrt{2}$ olarak bulmuşlardır. Ö48 ise paydaki toplama işlemini çarpma işlemi olarak aldığı için hatalı sonuç bulmuştur. Bu hatası karşısındaki şaşkınlığı mülakat kayıtlarında şu şekilde karşımıza çıkmaktadır;

A: Peki 7. Soruda ne yaptın bana bir anlat. Çözemedim ben orda ne yaptığını.
Ö48: Aynı kök içine almışım muhtemelen, aaaa çarpma yapmışım, toplama, yok canım!
A: Benim düşündüğüm gibi mi düşünüyorsun? Yanlış mı aldın, yoksa o toplamayı bilerek mi çarptın?
Ö48: Kesinlikle yanlış aldım. Nasıl bilerek, kesinlikle yanlış aldım.

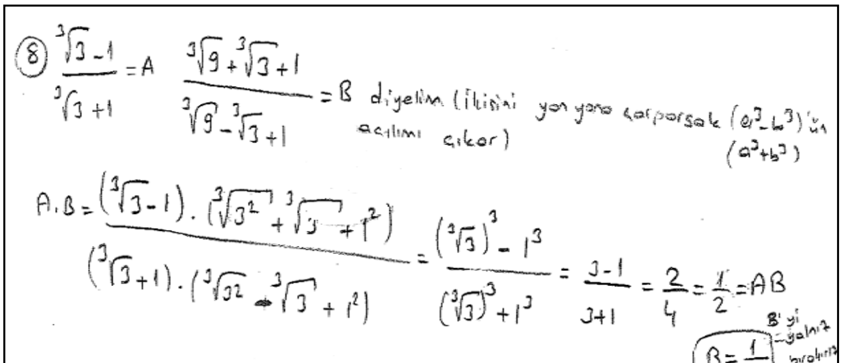
Ö41 verilen rasyonel ifadeyi payın eşleniği ile genişletmiş ancak paydadaki köklü ifadeyi bu eşlenik ile çarparken en dıştaki kökü almadığı için sonucu hatalı bulmuştur. Ö46 ise pay ve paydadaki köklü sayıları kökten kurtarmak için genişletmeler yapmış ancak daha sonra $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ ifadesini $\sqrt{\sqrt{5}}+2$ olarak aldığı için sonucu hatalı bulmuştur. Ö56 kodlu öğrenci ise verilen rasyonel ifadeyi paydanın eşleniği ile genişletirken sadece payı eşlenik ile çarpmış, paydayı çarpmayı unutmuştur. Bu öğrenciler için de herhangi bir operatör belirlenememiştir.

Öğrencilerin soruya verdikleri cevaplardan 4 yeni operatör belirlenmiştir.

3.2.1.18. On Sekizinci Soru

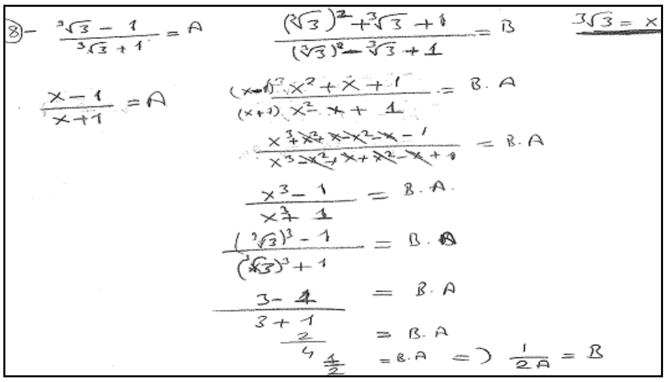
S_s18: $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}=A$ *ise* $\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ *ifadesinin A türünden değeri nedir?*

Sayılar konusu ile ilgili uygulamaların son sorusuna 7 öğrenci cevap vermezken, 11 doğru, 17 yanlış ve 24 eksik cevap verildiği belirlenmiştir. Bu soruya doğru cevap veren Ö10, Ö12, Ö28, Ö35, Ö36, Ö40, Ö43, Ö45, Ö47 ve Ö59 kodlu öğrenciler istenen ifadeye B diyerek, A ve B'yi kullanarak iki küp farkı ve iki küp toplamı özdeşliklerine ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 111). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör: *R_s45: a^3-b^3 = (a-b).(a^2+a.b+b^2) ve a^3+b^3=(a+b). (a^2-a.b+b^2)dir,* olarak belirlenmiştir.



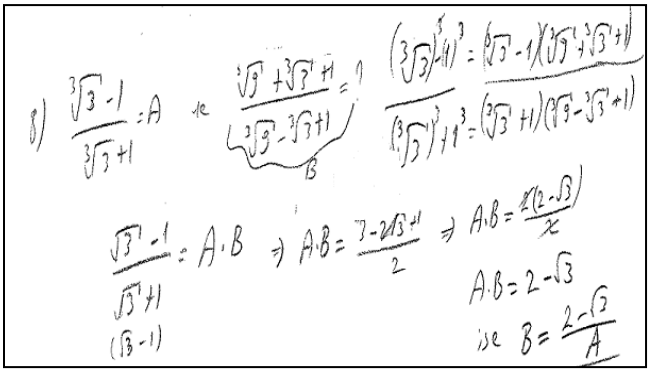
Şekil 111. Ö40'ın S_s18'e verdiği cevap

Ö11, Ö18, Ö23, Ö24, Ö26, Ö34, Ö38, Ö53, Ö54, Ö55, Ö57, Ö60 ve Ö61 kodlu öğrenciler verilen ifadedeki $\sqrt[3]{3}$ sayısına başka bir sembol vererek işlem kolaylığı sağlamışlardır. Ancak bu öğrencilerden sadece Ö23, R_s45 operatörünü kullanarak sonucu doğru olarak bulabilmiştir (Bkz. Şekil 112). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör *R_s46: Bir matematiksel ifadede yer alan karmaşık terimleri sembolle göstererek ifadeyi sade şekilde yazma,* olarak belirlemiştir.



Şekil 112. Ö23'ün S_s18'e verdiği cevap

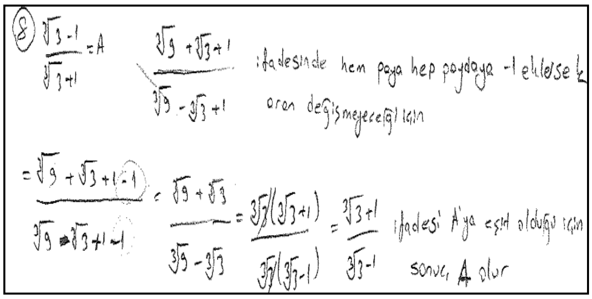
Ö51 kodlu öğrenci ise ifadeleri çarparak aralarındaki ilişkiyi bulmaya çalışmıştır. Ancak $(\sqrt[3]{3})^3$ ifadesinde kökün derecesi ile üssü sadeleştirerek 3 bulması gerekirken $\sqrt{3}$ olarak bulmuştur (Bkz. Şekil 113). Bu öğrencinin *R_s31* operatörünü *hatalı* olarak kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 113. Ö51'in S_s18'e verdiği cevap

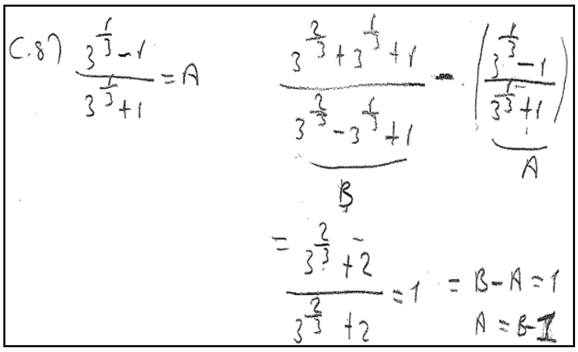
Ö2, Ö37 ve Ö48 kodlu öğrenciler verilen ifadenin pay ve paydasına -1 sayısını eklemenin ifadenin değerini değiştirmeyeceğini belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 114). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; *$R^{-}_{S}47$: $c \in Z$ olmak üzere* $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$ *dir,* olarak belirlenmiştir. Ö48 çözümünü aşağıdaki şekilde savunmuştur;

A: Verilen rasyonel sayının payından da paydasından da 1 çıkarıyoruz. Değeri değişmiyor?
Ö48: Evet
A: Yani genellersek $\frac{a-1}{b-1}=\frac{a}{b}$ diyebiliriz, öyle mi? Rasyonel sayının payından ve paydasından aynı sayı toplar ya da çıkarırsak o sayının değeri değişmez diyorsun ve burada ikisinde de 1 i çıkarıyorsun. Pay ve paydadan biri çıkarırsam diyorsun
Ö48: Evet.



Şekil 114. Ö37'nin S_s18'e verdiği cevap

Ö13 kodlu öğrenci verilen ve istenen ifadelerdeki köklü sayıları üslü şekilde yazdıktan sonra bu ifadeleri taraf tarafa çıkarmıştır; ancak rasyonel sayılarla çıkarma işlemini hatalı yapmıştır (Bkz. Şekil 115). Bu öğrencinin *R_s2* operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 115. Ö13'ün S_s18'e verdiği cevap

Ö15, Ö27, Ö33, Ö42, Ö44, Ö46, Ö49 kodlu öğrenciler on sekizinci soruya cevap vermezken, Ö3, Ö5, Ö20, Ö30, Ö41 sadece verilen ifadenin karesini almışlardır. Ö4, Ö7, Ö8, Ö9, Ö14, Ö16, Ö17, Ö19, Ö22, Ö25, Ö29, Ö32, Ö39, Ö50, Ö56 kodlu öğrenciler verilen rasyonel ifadeyi paydasının eşleniği ile genişletmiş ancak gerisini getirememiştir. Ö1, Ö6, Ö21 ise verilen ifadeden $\sqrt[3]{3}$ ifadesini çekerek A cinsinden bulmuş ve istenen ifadede yerine yazmışlardır. Ancak işlemin devamını yapamamışlardır. Ö58 kodlu öğrenci ise verilen ifade ile istenen ifadeyi çarparak aralarındaki ilişkiyi bulmaya çalışsa da sonucu getirememiştir. Bu şekilde eksik çözüm yapan öğrenciler için herhangi bir operatör belirlenememiştir.

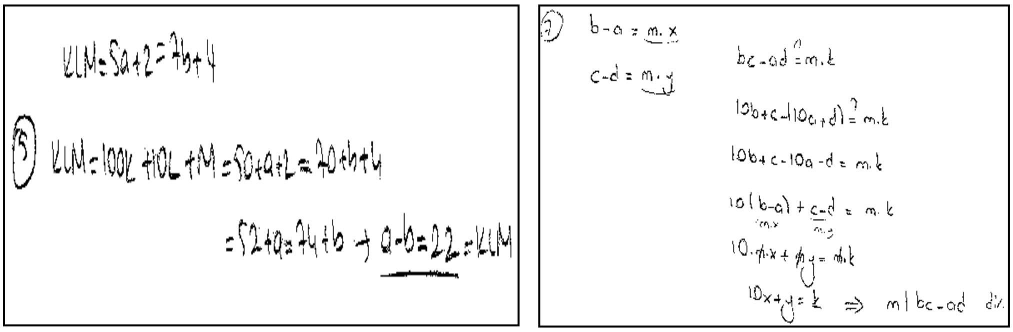
On sekizinci sorunun analizinin ardından üç yeni operatör belirlenirken R_s2 ve $R_s31$operatörlerinin bu soruda da kullanıldığı göze çarpmaktadır.

Yukarıdaki bölümde; sayılar konusu ile ilgili olarak yapılan uygulamalarda yer alan soruların cK¢ modeline göre analizi ile elde elden operatörler, öğrencilerle yapılan klinik mülakatlarla desteklenerek verilmiştir. Aşağıdaki bölümde ise cK¢ modelinin diğer bileşenleri olan gösterimler ve kontrol bilgilerine yer verilmiştir.

3.2.2. Sayılar Konusu ile İlgili Olarak Belirlenen Gösterimler

Öğrenciler, sayılar konusunda sorulan soruların büyük çoğunluğunda gösterimleri doğru kullanmışlardır. Öğrencilerin ciddi hata yapmasını, sıkıntı yaşamalarını sağlayan gösterim, bölünebilme konusunun simgesi olmuştur. m sayınısın a sayısını böldüğünü ifade eden “$m|a$” gösterimi bazı öğrenciler tarafından $\frac{m}{a}$ rasyonel sayısı olarak algılandığı için bu öğrencilerin soruyu hatalı çözmelerine sebep olmuştur (Bkz. Şekil 79).

Öğrencilerin hata yapmasına sebep olan diğer bir gösterim ise iki basamaklı bir sayıyı ya da iki sayının çarpımını ifade etmek için kullanılan “ab” gösterimidir. Sorularda iki sayının çarpımı için kullanılan bu gösterim, öğrenciler tarafından iki basamaklı bir sayıyının temsili olarak kullanıldığı şeklinde algılandığı için onların doğru sonuca ulaşmalarını engellemiştir (Bkz. Şekil 116) Bu iki gösterimin karıştırılma nedeninin çoğu zaman iki sayının çarpımını ifade ederken, bu iki sayı arasına çarpma sembolünün koyulmaması olarak düşünülmektedir.



a.Ö30'un cevabı b.Ö60'ın cevabı

Şekil 116. Gösterim Karışıklığı

3.2.3. Sayılar Konusunda Belirlenen Kontrol Bilgileri

Öğrencilerin hatalı çözümlerinin hepsini, hangi bilgiye dayandırarak yaptıklarını ortaya koymak her operatör için mümkün olamamaktadır. Öğrencilerin neredeyse hepsi kendi yaptıkları hataları neden yaptıklarının farkında değilken, dışarıdan bakarak bu hataların dayandığı kontrol bilgilerini bulmak oldukça zor olmuştur. Ortaya koyulabilen kontrol bilgilerinden biri $R^{-}_{s}3$: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$ operatöründe kullanılan eşitliğin gerçekleştiği $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ eşitliğidir. Öğrencilerin bu hatalı operatörü kullanırken, iki rasyonel sayının çarpımının kuralını, iki rasyonel sayının toplamı için de kullandıkları belirlenmiştir. Bu tespitle çarpma işleminde doğru sonuç veren eşitlik bir kontrol önermesi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Öğrencilerin hatalı olarak kullandıkları "$R^{-}_{s}4$: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = x$ *ve* $\frac{e}{b} + \frac{k}{d} = y$ *ise* $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{e}{b} + \frac{k}{d}} = \frac{a}{e} + \frac{c}{k} = \frac{x}{y}$ *dir*" operatörü toplama işleminde sadeleştirme yapılabileceği düşüncesinden kaynaklanan hatalı bir operatördür. Öğrencilerin bu şekilde düşünmesine sebep olan kontrol önermesi ise $\dfrac{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}\cdot\frac{k}{d}}=\dfrac{a.c}{e.k}=\dfrac{x}{y}$ olarak düşünülmüştür. Yine çarpma işlemi için doğru sonuç veren bir özellik toplama işleminde kullanılmıştır.

Öğrencilerin hatalı olarak kullandıkları *$R^{-}_{s}9$: $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=t \Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{1}{t}$ dir,* operatörü $\frac{x}{z}=t$ ise $\frac{z}{x}=\frac{1}{t}$ dir, olarak bilinen doğru bilginin hatalı bir yansıması olarak görülmektedir. Bu nedenle bu doğru bilgi bir kontrol önermesi olarak belirlenmiştir.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği bilgisinin bölme işlemi için de kullanılabileceğini düşünen zihinler, *$R^{-}_{s}11$:Tam sayılarla bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır, yani $x,y,z \in \mathbb{Z}$ ise(x:y)+(x:z)=t ise x:(y+z)=t dir* eşitliğini kullanarak hata yapmışlardır. Ancak bu hatanın dayandığı doğru bilgi olan; "*Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği vardır.*" düşüncesi bir diğer kontrol önermesi olarak belirlenmiştir.

$R_{s}2$ operatörünü hatalı kullanarak doğru sonuca ulaşamayan öğrencilerden birinin $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=z$ *ise* $\frac{a}{x}=z$ *ve* $\frac{a}{y}=z$ *dir* bilgisini kullandığı belirlenmiştir. Bu öğrencinin düşüncesinin altında yatan doğru bilginin $\frac{a}{x}=\frac{a}{y}=z$ *ise* $\frac{a}{x}=z$ *ve* $\frac{a}{y}=z$ *dir,* olduğu düşünülmektedir. Bu durumda öğrenci eşitliğin kuralını toplama işlemine uygulamıştır, denilebilir. Benzer şekilde eşitliğe ait kuralları bölünebilme konusuna uyarlayarak hata yapan öğrencilerin *$R^{-}_{s}23$: $x-a|y \Rightarrow x|y+a$ dır,* operatörünü, $x-a=y \Rightarrow x=y+a$ dır bilgisinden yola çıkarak kullandıkları düşünülmektedir. Aynı durum *$R^{-}_{s}25$: a < b-x < c ise a <b-c < x dir,* operatöründe de gözlenmiştir. Bu operatörün kullanılmasını sağlayan doğru bilgi, *b-x= c ise b-c= x dir,* olup eşitliğin bir özelliğidir. Öğrenci bu özelliği eşitsizlik için kullanarak hata yapmıştır. Bu durumun tersi bir durum ise *$R^{-}_{s}26$: $\frac{a}{b}=c$ ise $-c<\frac{a}{b}<c$ dir,* operatöründe karşımıza çıkmaktadır. Burada ise öğrenci eşitsizliğe ait olan "*$\frac{a}{b}<c$ ise $-c<\frac{a}{b}<c$ dir*" özelliğini, eşitlik için kullanarak hata yapmıştır.

$R^{-}_{S}43$: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ dir, operatörünün dayandığı bilginin $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$ kuralı olduğu düşünülmektedir. Burada öğrenci çarpma işlemine ait olan bir kuralın, toplama işlemi için de geçerli olabileceğini düşünerek hata yapmıştır. Bu durumda $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$ eşitliği diğer bir kontrol önermesi olarak belirlenmiştir.

Sayılar konusu ile ilgili olarak belirlenen son kontrol önermesi, *$R^{-}_{S}47$: $c \in Z$ olmak üzere $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$ dir,* operatörünün doğru sonuç verdiği *"$c \in Z$ olmak üzere $\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}$ dir",* eşitliğidir. Burada öğrenci, rasyonel sayıların genişletme kuralında, pay ve paydanın aynı sayı ile çarpılması durumunu; pay ve paydanın aynı sayı ile toplanması durumuna uyarlayarak, bu uyarlama sonucunda da eşitliğin sağlanacağını düşünerek hata yapmıştır.

Sayılar konusunda kullanılan kontrol bilgilerinin, farklı durumlarda doğru sonuç veren bilgiler olduğu görülmektedir. Öğrencilerin zihinlerinde, bir işlem için gerçeklenen bir eşitliğin başka bir işlem için de gerçekleşebileceği düşüncesi olduğu söylenebilir.

3.3. Denklemler

Bu bölümde ilk olarak denklemler konusu ile ilgili olarak sorulan her bir soruya öğrencilerin verdikleri cevaplardan hareketle belirlenen operatörler verilmiştir. Operatörlerle ilgili bulguların ardından gösterim ve kontrol bilgileriyle ilgili bulgular ayrı başlıklar halinde sunulmuştur.

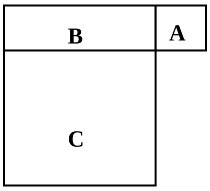
Ö60 ve Ö61 uygulamaya katılmadıkları için bulgularda bu öğrencilere yer verilmemiştir.

3.3.1. Denklemler Konusu ile İlgili Operatörler

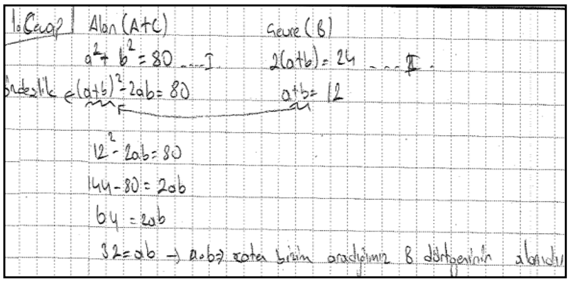
Uygulamada konu ile ilgili olarak 7 soru yer almaktadır. Aşağıda, öğrencilerin her soru için kullandıkları operatörler belirlenmiştir. Bu bölümde ayrıca, öğrencilerin denklemler konusunda kullandıkları gösterimler ve çözümlerini dayandırdıkları kontrol bilgilerine yer verilmiştir.

3.3.1.1. Birinci Soru

S_d1: Şekildeki A ve C karelerinin alanları toplamı 80 br^2, B dikdörtgeninin çevresi 24 br ise, B dikdörtgeninin alanını bulunuz.

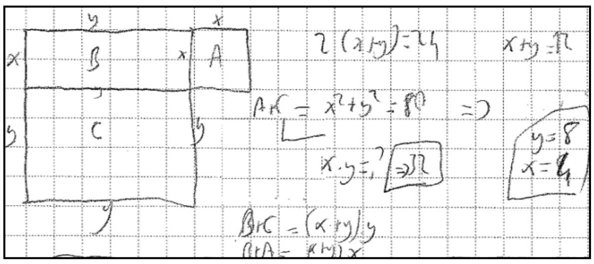


Bu soruya 55 öğrenci doğru, 4 öğrenci hatalı cevap vermiştir. Soruya doğru cevap veren 55 öğrenciden (Ö1-Ö9, Ö11-Ö32, Ö34-Ö48, Ö50-Ö53, Ö55-Ö59) Ö20, Ö31, Ö50 un dışındakiler iki terimin kareleri toplamı özdeşliğini kullanarak sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 117). Bu nedenle kullanılan operatör; *R_d1:* $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, olarak belirlenmiştir.



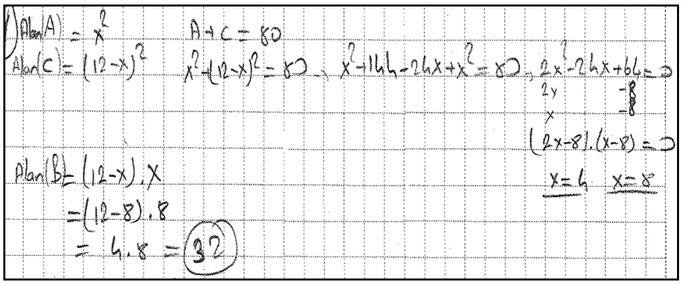
Şekil 117. Ö3'ün S_d1'e verdiği cevap

Soruyu değer vererek çözmeyi tercih eden Ö20 ve Ö31; toplamları 12, kareleri toplamı 80 olan sayıları 8 ve 4 olarak bulmuşlardır (Bkz. Şekil 118). Bu öğrencilerin kullandığı operatör; *R_d2: Bir cebirsel ifadedeki değişkenlere özel değerler vererek çözüm yapma*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 118. Ö20'nin S_d1'e verdiği cevap

Diğer taraftan dörtgenlerin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi doğru olarak kuran Ö50'nin (Bkz. Şekil 119) kullandığı operatör; *R_d3:Değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etme*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 119. Ö50'nin S_d1'e verdiği cevap

Öğrencilerden bazılarının çözümleri çeşitli nedenlerden dolayı operatör belirlenmesi için yeterli bulunmamıştır. Bu öğrencilerden; Ö10 ve Ö33 kodlu olanlar soruda verilen "A ve C karelerinin alanları toplamı 80 br^2 ifadesini "A, B ve C dörtgenlerinin alanları toplamı" olarak aldıkları için hatalı sonuç bulmuşlardır. Ö33 yaptığı hatanın farkında olduğunu, "*A ve C kareleri demiş soruda ama ben A ve C karelerinin yanı sıra B dikdörtgeninin alanını da eşitlemişim."* şeklinde ifade etmiştir.

Benzer olarak Ö49 soruda verilen "A ve C karelerinin alanları toplamı 80 br^2" ifadesini "A ve B karelerinin alanları toplamı" olarak aldığı için hatalı sonuç bulmuştur. Bu öğrenci ise hatasını mülakat sırasında: "*C'yi değil de B'yi almışım, ondan yanlış yapmışım.*" cümlesiyle belirtmiştir.

Ö54 ise C karesini dikdörtgen olarak aldığı için sonucu hatalı bulmuştur. Bu nedenle bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

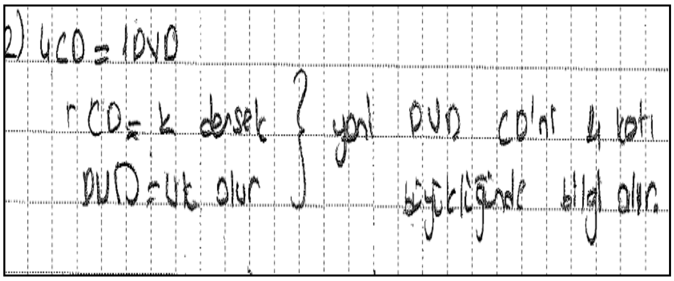
Bulgulara bakıldığında denklemler konusu ile ilgili ilk soruda R_d1, R_d2 ve R_d3 operatörlerinin kullanıldıkları belirlenmiştir.

3.3.1.2. İkinci Soru

S_d2: 4 CD deki filmi bir DVD de toplayabilirsiniz. Bu durumda CD ve DVD arasındaki kapasite ilişkisini cebirsel olarak ifade ediniz.

Bu soruya 47 öğrenci doğru cevap verirken, 12 öğrenci soruyu hatalı olarak cevaplamışlardır.

R_d3 operatörünü kullanarak soruya doğru cevap veren 47 öğrenci (Ö1-Ö3, Ö5, Ö9-Ö21, Ö23-Ö34, Ö36-Ö40, Ö43, Ö44, Ö46-Ö49, Ö51-Ö53, Ö55, Ö56, Ö58 ve Ö59) CD ve DVD değişkenleri arasındaki ilişkiyi doğru olarak ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 120).



Şekil 120. Ö15'in S_d2'ye verdiği cevap

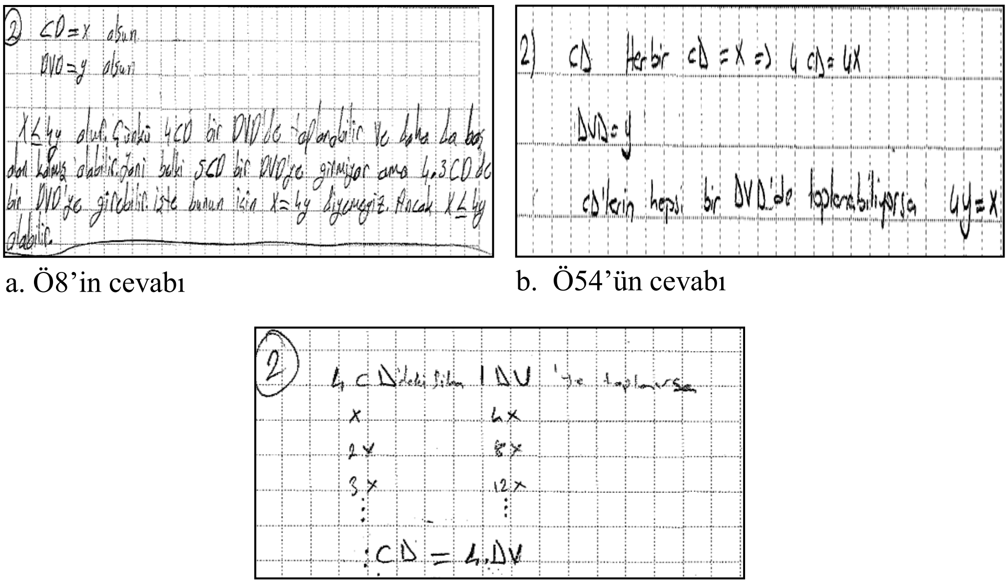
Ö4, Ö8 ve Ö45'in çözümlerinde öğrencilerin, CD ve DVD değişkenleri arasındaki bağıntıyı eşitlik yerine eşitsizlik kullanarak oluşturdukları göze çarpmaktadır (Bkz. Şekil 121a).

Diğer cevaplara bakıldığında Ö6, Ö22, Ö35, Ö42 ve Ö54 değişkenler arasındaki ilişkiyi ters kurmuşlardır (Bkz. Şekil 121b).

Soruyu hatalı çözen öğrencilerden Ö41, Ö50 ve Ö57'nin CD ve DVD değişkenleri arasındaki ilişkiyi bulabilmek için genelleme yönteminden yararlandığı görülmektedir (Bkz. Şekil 121c). Ö50'nin aşağıdaki çözümü üzerine yapılan klinik mülakat verileri, öğrencinin CD ve DVD değişkenleri arasındaki kapasite ilişkisini ters oluşturduğunu doğrulamaktadır:

A: Şurada 2.soruda sen CD=4DVD demişsin. Bu sonuca nasıl ulaştın? Ne düşündün?
Ö50: 4 tane CD miz var elimizde. Ama ben 1 DVD de toplayabiliyorum. 4CD dekini 1 DVD ye toplarsak; ıııııııı…x'e 4x; eee 2x'e de 8x olur, birbirini katlıyor. Ondan sonra, ıııııı…Buradan, ıııııı..?
A: Genellemeye vardın.
Ö50: Genellemeye vardım. Katlıyor kendisini. CD=4DVD. Burada 3x'e, 12x. Sürekli 4 katı olarak devam ediyor. DVD, CD'nin dört katı.
A: Peki bu ilişkiyi CD ve DVD nin adedi olarak mı kurdun, yoksa kapasiteye göre mi yaptın?
Ö50: Kapasite.

Tüm bu öğrencilerin değişkenler arasındaki ilişkiyi doğru belirleyemedikleri için R_d3 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö8'in cevabı

b. Ö54'ün cevabı

c. Ö50'nin cevabı

Şekil 121. Öğrencilerin S_d2'ye verdikleri cevaplar

Son olarak Ö7, CD ve DVD arasındaki ilişkiyi herhangi bir açıklama yapmadan yazdığı için (Bkz. Şekil 121d) bu öğrencinin kullandığı operatör belirlenmemiştir.

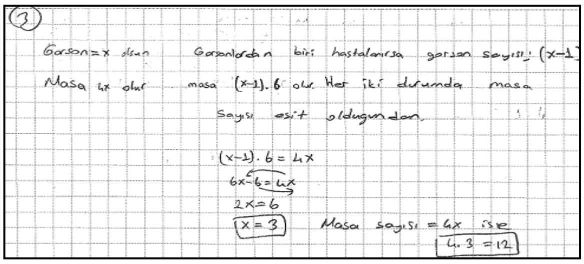
İkinci soru ile ilgili olarak kullanılan operatörlere bakıldığında yeni bir operatörün belirlenmediği, R_d3'ün tekrar edildiği görülmektedir.

3.3.1.3. Üçüncü Soru

S_d3: Bir lokantada her dört masa için bir garson görevlendirilmiştir. Bir garson hastalandığında diğerlerinin 6'şar masa ile ilgilenmeleri gerektiğine göre bu lokantada kaç tane masa vardır?

48 öğrencinin doğru, 8 öğrencinin hatalı cevap verdiği üçüncü soruya 3 öğrenci ise cevap vermemiştir.

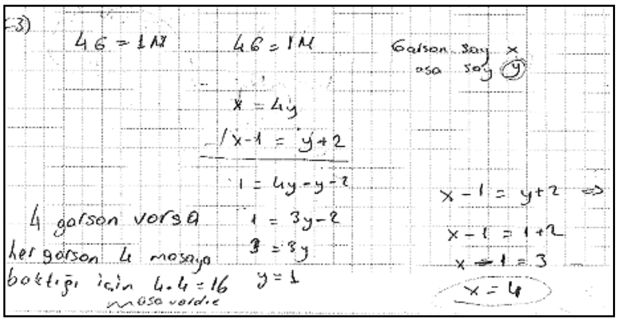
Soruya verilen cevaplar incelendiğinde *R_d3* operatörünü kullanan 34 öğrenci (Ö1-Ö8, Ö10, Ö12, Ö14-Ö16, Ö18, Ö19, Ö21-Ö23, Ö26, Ö27, Ö32-Ö37, Ö39, Ö41, Ö42, Ö43, Ö45, Ö46, Ö48, Ö50-Ö52, Ö54, Ö56, Ö57) değişkenler arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde kurarak sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 122).



Şekil 122. Ö5’in S_d3’e verdiği cevap

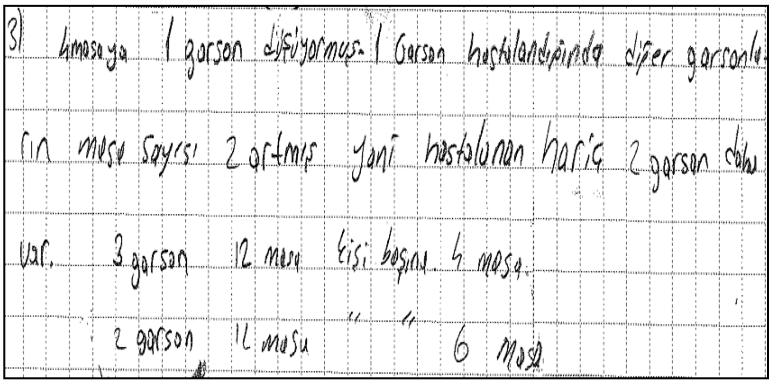
R_d3’ü *hatalı* kullanarak doğru sonuca ulaşamayan Ö28, Ö29, Ö47, Ö49 kodlu öğrencilerden Ö49 ile Şekil 123’ deki çözümü ile ilgili olarak yapılan mülakat verileri öğrencinin masa sayısının arttığını düşündüğünü göstermektedir.

A: Garson sayısına x, masa sayısına y demişsin ve x=4y bağıntısını oluşturmuşsun. Sonra x’ten 1 çıkarmış, y’ye 2 eklemişsin.
Ö49: Şimdi hocam garson bir eksildi ya…
A: Ama masa sayısını nasıl değiştiriyorsun? Masa sayısı değişir mi? Garson başına düşen masa sayısı değişiyor.
Ö49: Evet.
A: Ama bu y senin normalde toplam masa sayın. Masa sayısına y demişsin. Yani toplamda sanki masa sayısı 2 artıyormuş gibi olmuş. Garsonlar azaldığı için garsonların tek birine düşen masa sayısında artış oluyor.
[…]
Ö49: Sanki masa sayısı artıyor gibi oluyor hocam.



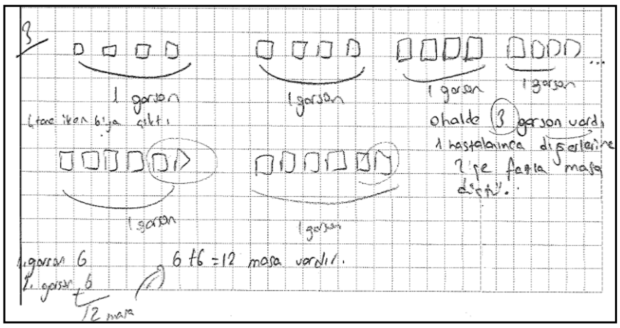
Şekil 123. Ö49’un S_d3’e verdiği cevap

Cevaplar incelendiğinde 4 öğrencinin (Ö20, Ö24, Ö38 ve Ö53) değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak bulmak yerine, soruyu mantık yürüterek sözel olarak çözdükleri görülmüştür (Bkz. Şekil 124). Bu nedenle kullandıkları operatör; *R_d4: Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme,* şeklinde belirlenmiştir.



Şekil 124. Ö24'ün S_d3'e verdiği cevap

Başka bir çözüm yolu olarak bazı öğrencilerin (Ö9, Ö11, Ö13, Ö17, Ö31, Ö44, Ö55, Ö58, Ö59) masa sayısına veya garson sayısına değer vermeyi tercih ederek (Bkz. Şekil 125) R_d2 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 125. Ö9'un S_d3'e verdiği cevap

Elde edilen bulgulara bakıldığında, R_d2 ve R_d3 operatörlerinin tekrar etmesinin yanı sıra bir yeni operatör belirlenmiştir.

3.3.1.4. Dördüncü Soru

S_d4: Oturduğunuz sitede yönetici olduğunuzu düşünün. Yapılan son yönetim kurulu toplantısında en önemli sorunu, çocukların oynayabileceği bir parkın olmayışı olarak belirlediniz. Bu durumda site sakinlerinin beklentilerini karşılamak için belediyeye başvurdunuz. Belediye görevlileri sitenizdeki imar planına bakarak 2x+y=10, 2y-3x=6 ve y=0 doğruları arasında kalan bölgeyi çocuk parkı olarak değerlendirebileceğinizi

söylediler. Bu durumda size gösterilen bölgenin geometrik yerini bularak alanını hesaplayınız.

Bu soruya öğrencilerin 20'si doğru, 36'sı hatalı cevap verirken, 3 öğrenci ise cevap vermemiştir.

20 öğrencinin (Ö1, Ö3, Ö5, Ö7, Ö11, Ö15, Ö16, Ö26, Ö30-Ö32, Ö41-Ö43, Ö50-Ö52, Ö54-Ö56) soruyu doğru olarak çözdüğü tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden Ö16 dışındakilerin istenen bölgenin sınırlarını oluşturan doğruları hatasız çizdikleri ve bu doğruların kesişim noktası ile doğruların denklemleri arasındaki ilişkiyi doğru kullandıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 126a). Bu bağlamda bu çözümde aşağıdaki dört operatörün kullanıldığı belirlenmiştir:

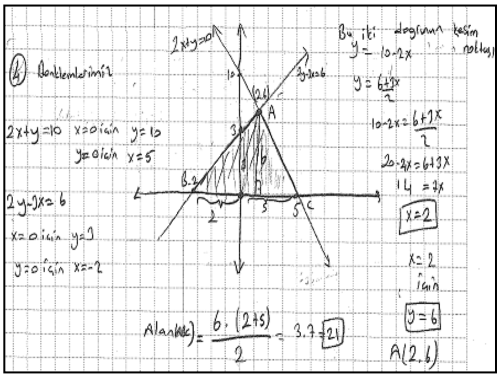
R_d 5: Verilen cebirsel ifadeye uygun grafiği çizme,

R_d6: Düzlemde 3 veya daha çok doğrunun tanımladığı bölgeyi belirleme,

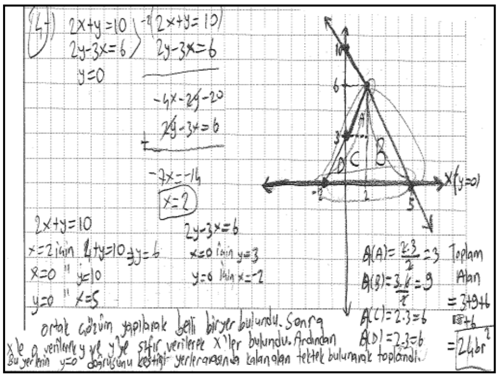
R_d7: İki doğrunun kesişim noktalarını, doğru denklemlerinin ortak çözümü ile bulma,

R_d8: Alan hesaplama.

Ö16 ise istenen bölgeyi ayırdığı parçaların alanları toplamından bulmuştur (Bkz. Şekil 126b). Bu bağlamda yukarıdaki operatörlere ek olarak *R_d9: Bir bölgenin alanı bu bölgeyi oluşturan alt bölgelerin alanları toplamıdır,* operatörüne ulaşılmaktadır.



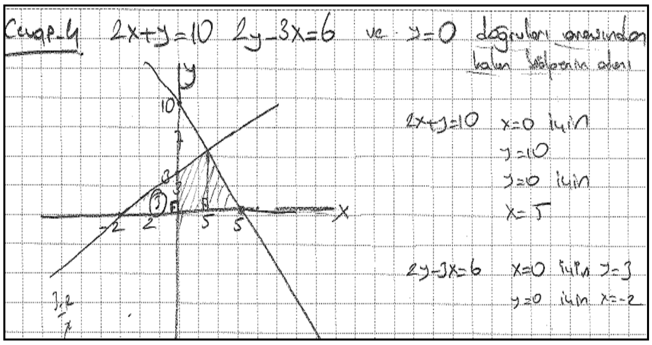
a. Ö5'in cevabı



b. Ö16'nın cevabı

Şekil 126. Öğrencilerin S_d4'e verdikleri cevaplar

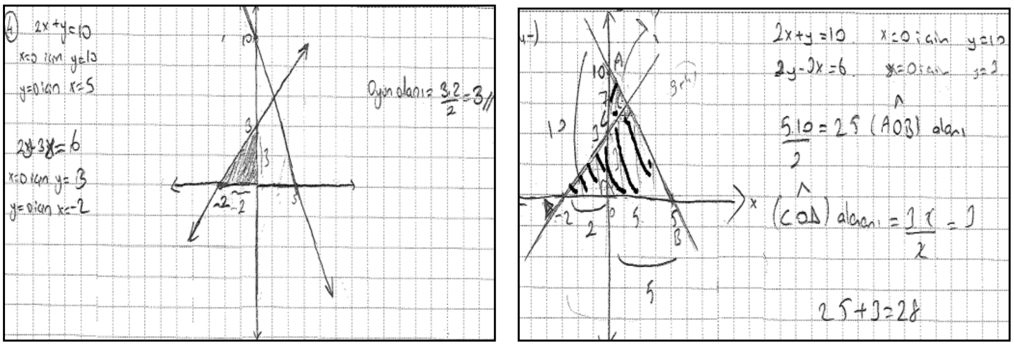
Ö17 ve Ö58 ise istenen bölgeyi sınırlayan doğruları çizmiş ancak alanı hesaplayamamışlardır (Bkz. Şekil 127). Bu nedenle *R_d5, R_d6 ve R_d7*operatörlerini *doğru*, *R_d8* operatörünü ise *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 127. Ö17'nin S_d4'e verdiği cevap

Doğruları doğru çizmelerine rağmen istenen bölgenin y ekseni ile sınırlandığı yere kadar olan bölümünü tarayan, bu eksenden ötesine geçmeyen Ö6 ve Ö37'nin, y eksenini yeni bir sınır değeri olarak düşündükleri görülmektedir (Bkz. Şekil 128a). Bu durumun tersi bir çözüm yolu kullanan Ö10, Ö21 ve Ö23 ise doğruların arasında kalan bölgeden ziyade, sınırları eksenlerdeki noktalarla belirlenen en geniş bölgenin alanını bulmaya çalışmışlardır (Şekil 128b). Bu sebeple, öğrencilerin *R_d6* operatörünü hatalı kullandıkları belirlenmiştir. Ö21 çözümünü aşağıdaki şekilde anlatmıştır:

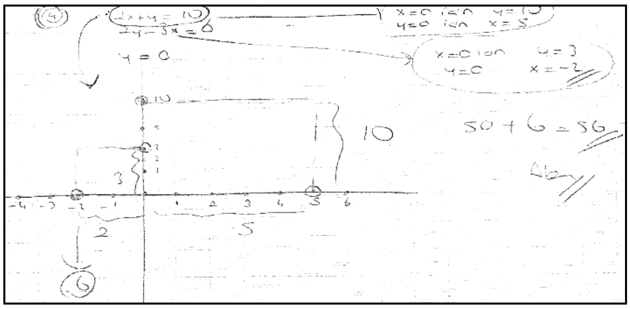
A: Şurada 4. soruda […] y=0 doğrusu neresi
Ö21: Şu x ekseni olmuyor mu?
A: x ekseni. Peki, o zaman dikkat et şu doğru, şu doğru ve x eksenin arasında kalan alan neresi?
Ö21: Şurası (alanı doğru gösterir)
A: Peki, şurayı neden bulmaya çalışmışsın tarayıp (yukarıdaki küçük alan için sorulur)
[…]
Ö21:bu noktalar arasında kalan yeri yapmışım.
A: Yani dedin ki sen bu (0,-2) ve (0,5) noktaları x ekseninde
Ö21: hıhı
A: (10,0) noktası da y ekseninde, bu 3 noktanın oluşturduğu en büyük alanı bulurum.
Ö21: Evet



a. Ö37’nin cevabı b. Ö21’in cevabı

Şekil 128. Öğrencilerin S_d4’e verdikleri cevaplar

Doğru çizimi ile ilgili sorun yaşayan ve doğruları birer dörtgen gibi düşündüğü tespit edilen (Bkz. Şekil 129) Ö29’un *R_d6* operatörünü *hatalı* kullanmanın yanı sıra; *R^{-}_{d}10: y=ax+b cebirsel ifadesi düzlemde bir dörtgen belirtir,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.

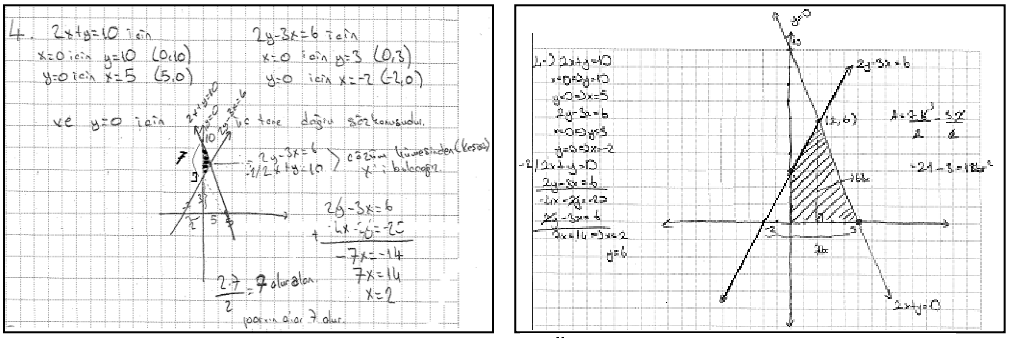


Şekil 129. Ö29’un S_d4’e verdiği cevap

Soruyu yanlış çözen diğer öğrencilerden Ö9, Ö12, Ö22, Ö25, Ö27, Ö34, Ö38, Ö39 ve Ö49’un istenen bölgeyi doğru olarak belirlemelerine engel olan durum y=0 doğrusunun y ekseni olarak düşünülmesidir (Bkz Şekil 130). Bu sebeple öğrencilerin *R^{-}_{d}11: y ekseni y=0 doğrusudur*, operatörünü kullandıkları görülmektedir. Ö49 ile yapılan mülakattan elde edilen veriler bu operatörü doğrular niteliktedir:

A: Bana y eşit sıfır doğrusunu gösterir misin?
Ö49: Şu hocam x şu da y, y eşit sıfır doğrusu x olmaz mı?
A: x olur, evet. Peki, burada 4. soruda niye y aldın?
Ö49: Çünkü ben bugüne kadar bilmiyordum. Akşam çalışıyordum. O zaman fark ettim. Daha dün akşam öğrendim.

A: Yani şurada soruyu çözerken y=0 doğrusunu y ekseni gibi mi düşündün?
Ö49: Evet, ben y olarak almışım hocam.

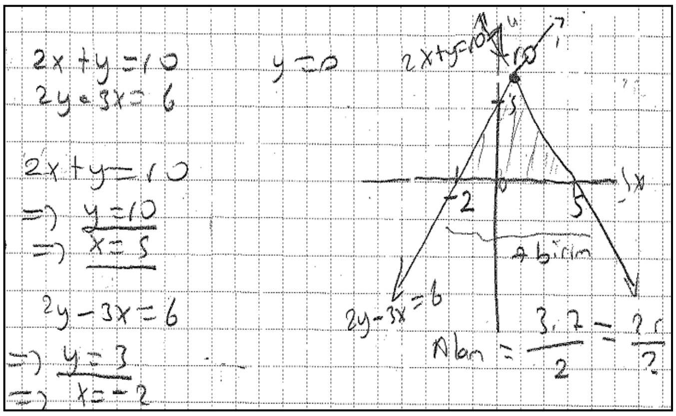


a. Ö12'nin cevabı

b. Ö38'in cevabı

Şekil 130. Öğrencilerin S_d4'e verdikleri cevaplar

Ö13 soruda istenen bölgeyi üçgen ve bu üçgenin yüksekliğini, 2y-3x=6 doğrusunun y eksenini kestiği nokta olarak belirlediğinden (Bkz. Şekil 131) öğrencinin *R^{-}_{d}12: Düzlemde bir geometrik şeklin yüksekliği, bu şeklin y eksenini kestiği noktadır*, operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 131. Ö13'ün S_d4'e verdiği cevap

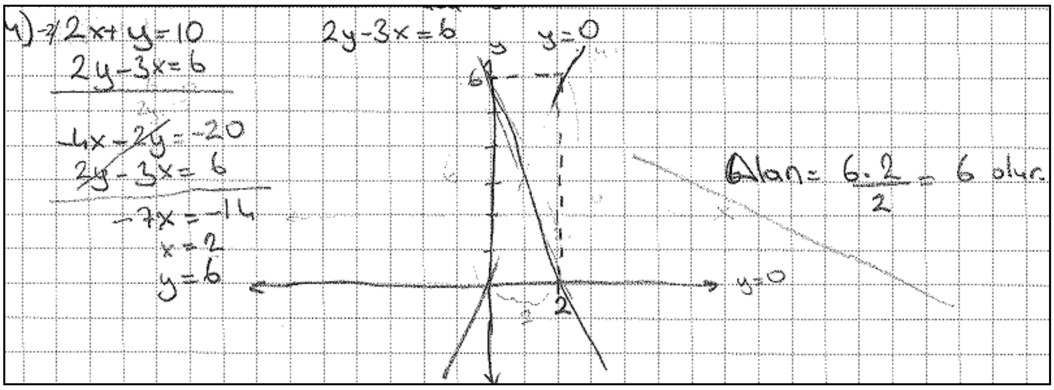
Ö14, Ö35 ve Ö45'in bir noktayı; ilk bileşeni x, ikinci bileşeni y ekseni üzerinde olan iki ayrı nokta şeklinde düşündükleri görülmektedir (Bkz. Şekil 132). Bu nedenle çözümde kullanılan operatör; *R^{-}_{d}13: (x,y) noktası (x,0) ve (0,y) şeklinde iki bileşenden oluşur*, şeklinde belirlenmiştir. Ö14'ün belirlenen operatörü doğrular nitelikteki açıklamaları aşağıdaki gibidir:

A: […]Peki bu bulduğun nedir (2,6) ?

Ö14: Biri x ekseninde biri y ekseninde koordinatların birleşimi

A: Peki (2,6) bir nokta mıdır? İki nokta mıdır?

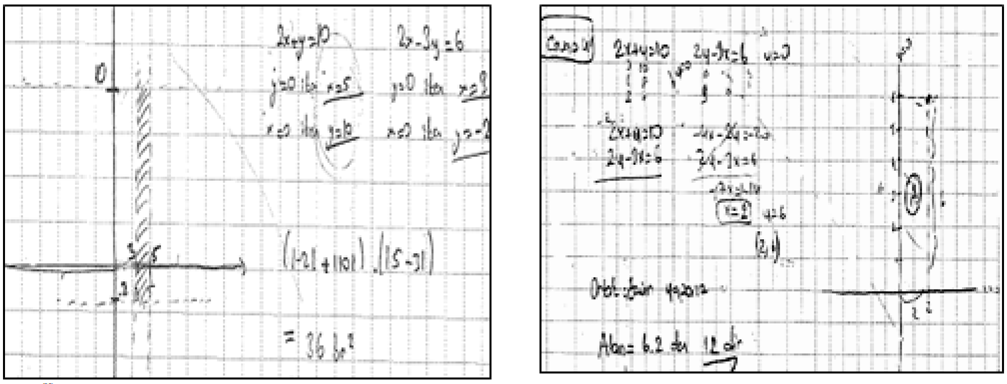
Ö14: İki noktadır.



Şekil 132. Ö14'ün S_d4'e verdiği cevap

Soruyu hatalı çözen öğrencilerden Ö20 ve Ö33 y=0 değerleri için buldukları x değerlerinden geçen doğruları çizerek, istenen bölgenin bu doğruların arasında kalan bölge olduğunu belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 133a). Diğer bir çözümde öğrencilerin (Ö4, Ö8, Ö19, Ö28, Ö40, Ö47, Ö48, Ö53, Ö57) istenen bölgeyi, kendisini sınırlayan doğruların kesim noktasının x ve y eksenlerindeki izdüşümlerinin birleştirilmesiyle elde edilen dörtgenin alanı olarak buldukları görülmektedir (Bkz. Şekil 133b). Ö33 yapılan klinik mülakatta y=0 için bulduğun x değerini, x=a doğrusu gibi düşündüğünü doğrularken, Ö57'nin klinik mülakat verileri, öğrencinin kapalı bir alan bulmak için ortak çözümde elde ettiği noktadan bir alan oluşturduğunu doğrular niteliktedir:

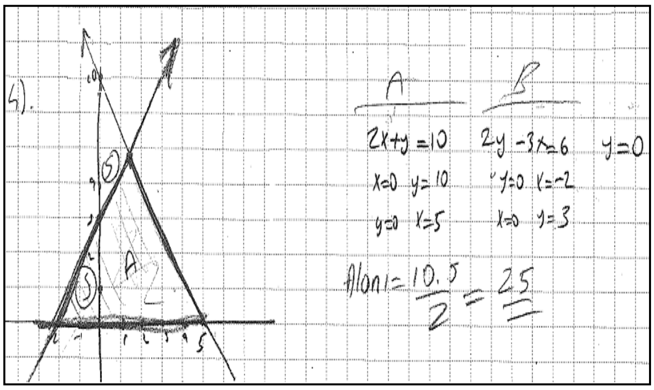
A: […]Diyelim eşitledin; x =2 değerini buldun.
Ö57: Evet, bu x=2 buldum, x'i yerine koydum, y değerini buldum
A: Tamam. Peki, şu nokta (2, 6) noktası mı oldu bu durumda
Ö57: evet
A: Hıh, (2, 6). Peki, bu doğru ne doğrusu?
Ö57: Hocam ben onu alanı bulmak için öyle çizdim.
A: Hangi alan?
(Sessizlik)
A: Şimdi diyor ya geometrik yerini bularak alanını hesaplayınız. Sonuçta senin için toplam alan şu dikdörtgenin alanı mıdır?
Ö57: Evet. Ben öyle düşündüm, diyorum ya.



a. Ö33'ün cevabı b. Ö53'ün cevabı

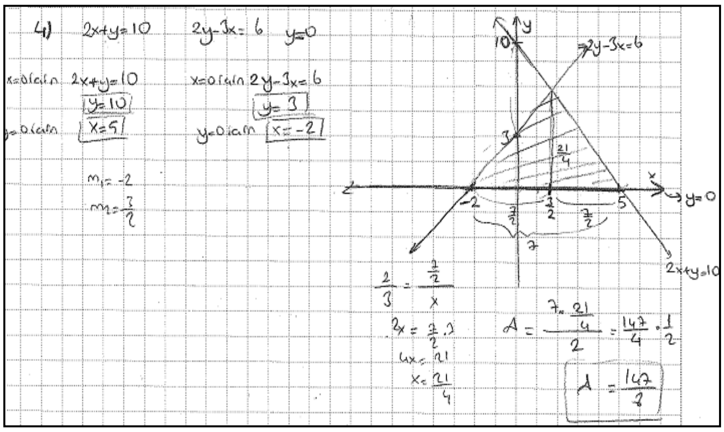
Şekil 133. Öğrencilerin S_d4'e verdikleri cevaplar

İstenen alanı parçalayarak hesaplamaya çalışan Ö24'ün "açıları eş olan üçgenlerin alanları da eş olur" bilgisini kullandığı fark edilmiştir (Bkz. Şekil 134). Bu nedenle $R^{-}_{d}14$*: Bir açıları eş olan üçgenlerin alanları da eştir*, operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 134. Ö24'ün S_d4'e verdiği cevap

İki doğrunun kesişim noktasının apsisini bu doğruların x eksenini kestiği noktaların orta noktası olarak alan Ö59'un R_d7 operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 135).



Şekil 135. Ö59'un S_d4'e verdiği cevap

Dördüncü soru ile ilgili olarak Ö36, Ö44 ve Ö46 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Ö2 dikkatsizlik nedeniyle x ekseni ile y eksenini karıştırmıştır. Ö18 ikinci denklemin belirttiği doğrunun x eksenini kestiği noktayı işlem hatası yaparak hatalı olarak bulmuştur. Bu öğrenciler için herhangi bir operatör belirlenmemiştir.

Bu soruda belirlenen operatörler incelendiğinde, 10 tane yeni operatörün kullanıldığı göze çarpmaktadır.

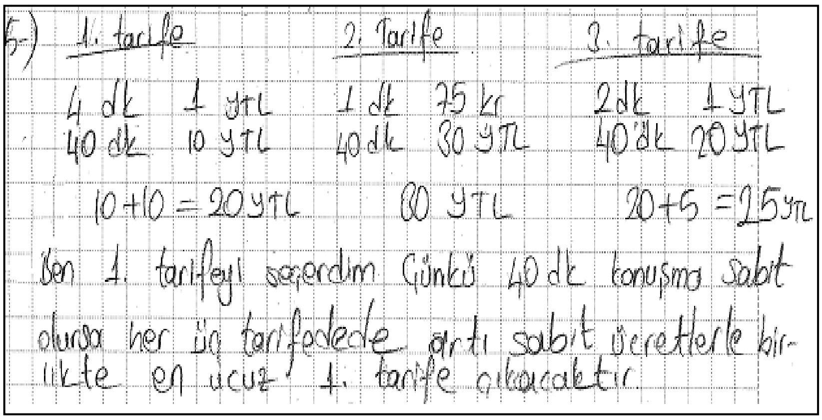
3.3.1.5. Beşinci Soru

S_d5: Bir cep telefonu firması üç farklı tarife uygulamaktadır. İlk tarifede 10 TL sabit ücret almakta ve her yöne dakikasına 25 kuruş yazmaktadır. İkinci tarifede sabit ücret almamakta ancak her yöne dakikasına 75 kuruş yazmaktadır. Üçüncü tarifede ise 5 TL sabit ücret almakta ve konuşma ücreti olarak her yöne dakikasına 50 kuruş yazmaktadır. Bu üç tarifeden birini seçmeniz gerekirse hangi tarifeyi neden tercih edersiniz? Cevabınızı grafiksel olarak savunun.

Bu soruya 5 öğrenci cevap vermemiştir. Soruya cevap veren öğrencilerin bir kısmı verilen değişkenler arasında cebirsel ifadeler oluşturmadan, aritmetiksel çözüm yaparken bir kısmı ise cebirsel çözüm yapmayı tercih etmişlerdir. Her iki durumda da çözümlerini grafikle savunan öğrenciler mevcuttur. Bu nedenle öncelikle aritmetiksel ve cebirsel çözüm yapan öğrencilere değinilmiş, aynı öğrencilerin grafiksel çözümleri ayrıca incelenmiştir.

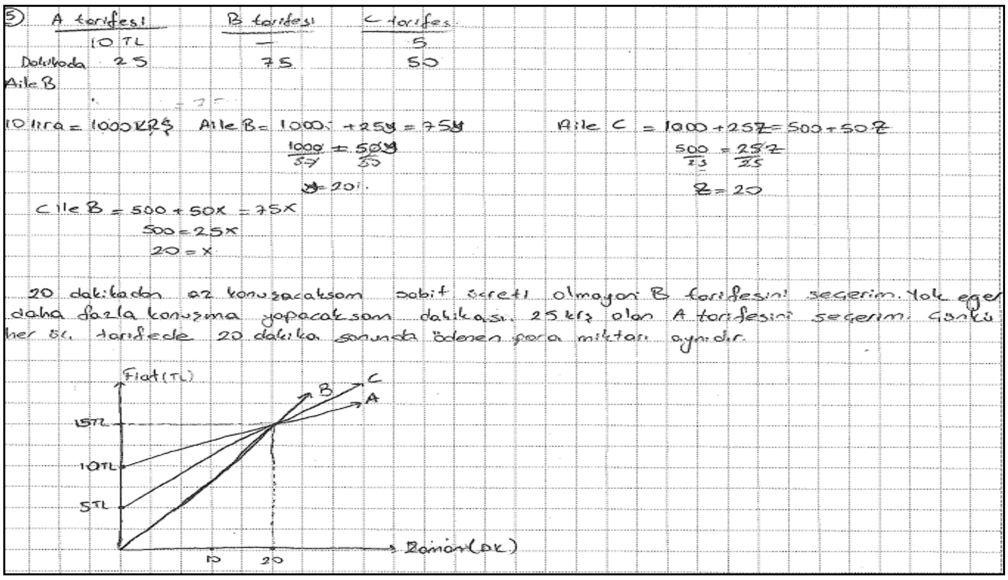
Ö1, Ö3, Ö8, Ö9, Ö11, Ö13-Ö16, Ö19-Ö22, Ö26, Ö27, Ö29, Ö34, Ö48, Ö49, Ö56, Ö58 ve Ö59 cebirsel ifade belirlemeden, değer vererek çözümlerini gerçekleştirmişlerdir (Bkz. Şekil 136). Bu nedenle R_d2 ve R_d4 operatörlerini kullanmışlardır. Ö29 yapılan klinik mülakatta, verdiği değere göre tarife seçimi yaptığını kabul etmiştir;

A: Burada 4 dakika mı verdin hepsine?
Ö29: Evet 4 dakika vermişim
A: Ona göre de 4 dakika için 3.tarifeyi daha şanslı bulmuşsun.
Ö29: Evet.



Şekil 136. Ö3'ün S_d5'e verdiği cevap

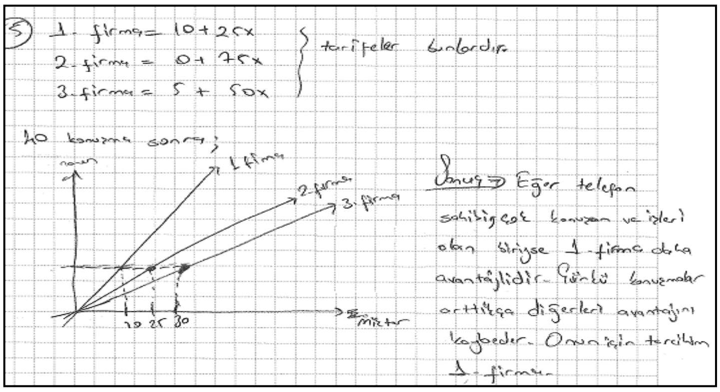
Diğer öğrencilerden Ö2, Ö4, Ö10, Ö18, Ö23, Ö24, Ö30, Ö32-Ö34, Ö37-Ö47, Ö50-Ö54 ve Ö57 ise sorudaki değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmeyi başarmışlardır (Bkz. Şekil 137). Bu nedenle kullandıkları operatör R_d3 olarak belirlenmiştir.



Şekil 137. Ö37'nin S_d5'e verdiği cevap

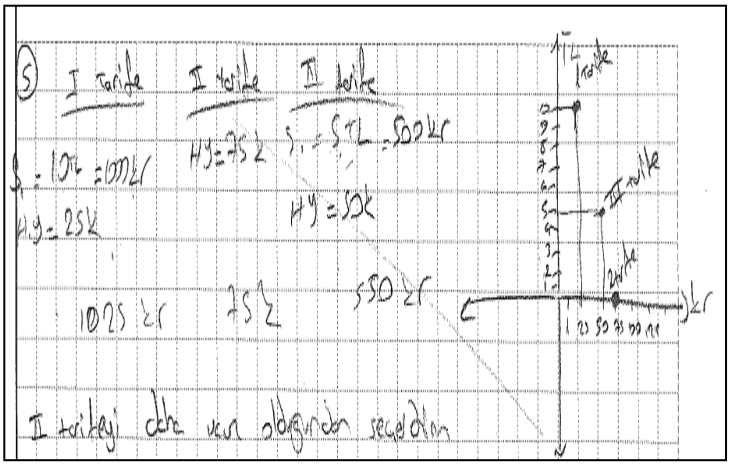
Yukarıda incelenen öğrencilerden Ö2, Ö4, Ö8, Ö20, Ö21 Ö37, Ö38, Ö42, Ö51, Ö53 ve Ö59'un çözümlerini grafikle doğru olarak savundukları görülmektedir (Bkz. Şekil 137). Bu öğrencilerin *R_d5* operatörünün yanı sıra *R_d15: Grafik yorumlama* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Ö10, Ö16, Ö21, Ö23, Ö34, Ö43, Ö48, Ö49 ve Ö58 kodlu öğrencilerin çizdikleri doğruların hepsini, orijinden başlattıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 138). Bu nedenle kullandıkları operatör; *R^-_d16: Günlük hayat problemlerini modelleyen doğruların başlangıç noktası daima orijindir*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 138. Ö10'un S_d5'e verdiği cevap

y=ax+b denkleminin belirttiği grafiğini çizmek için düzlemde (a, b) noktalarını işaretleyen (Bkz. Şekil 139) Ö6, Ö7, Ö12, Ö22 ve Ö29'un kullandıkları operatör $R^{-}_{d}17$*: y=ax+b formunda verilen bir cebirsel ifade düzlemde (a,b) noktasını ifade eder*, olarak belirlenmiştir.

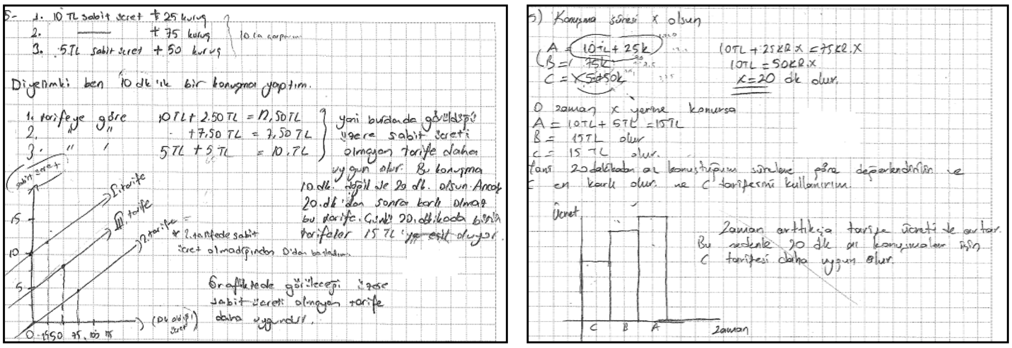


Şekil 139**.** Ö22'nin S_d5'e verdiği cevap

Ö9 ve Ö56 ise verilen doğruları paralel olarak çizmişlerdir. Bu öğrencilerin cebirsel ifadeleri belirlemeden doğrudan çizim yapmaları, bu doğruların kesişim noktalarının olabileceğini düşünmelerini engellemiş olabilir (Bkz. Şekil 140a). Ö19, Ö45, Ö47 ve Ö57 kodlu öğrenciler ise, çözümlerini sütun grafiği çizerek savunmuşlardır (Bkz. Şekil 140b). Ö9 ile yapılan mülakatta grafiği hatalı çizme nedeni olarak verilen cebirsel ifadelere ait doğruların kesişebileceğini düşünmediğini belirtirken, Ö57 ise neden sütün grafiği tercih ettiğini aşağıdaki gibi açıklamıştır:

A: Peki, bu 3 tarifenin belirttiği grafik bu mudur? Bu C tarifesi, bu B tarifesi, bu A tarifesi. Ücret-zaman grafiği böyle mi çizilir?
Ö57: Yok, hocam bu grafiği zaten yanlış yaptığımın farkındayım.
A: Bu nedir? Bunlar?
Ö57: Yaa ben hocam, ben şey. Konuşma- ücret grafiği olarak anlamadım. Hangisinin grafiğini daha büyük olabileceği mantığıyla…
A: Neden sütun seçtin? Sonuçta bunlar birer doğru belirtir. Neden sütun grafiği?
Ö57: İşte diyorum ben x,y'li olarak düşünmedim.
A: Düşünmedin!
Ö57: işte ben hani hangisinin daha karlı olduğunu anlamak için…
A: Karşılaştırma yapayım dedin.
Ö57: Evet. Karşılaştırma mantığıyla hangisinin uzun süre yani bu verebileceğim ücret anlamında, grafik çizmişim. Ben sınavdan sonra bunu fark ettim yani bunun böyle yapılmayacağını fark ettim ama, ben buradaki ücret olarak, hani konuşma grafiği anlamında değil. Yani kendimce sıralama yaptım.

Bu öğrencilerin çözümlerinde verilen cebirsel ifadelere ait grafikleri hatalı çizdikleri görülmektedir. Bu nedenle R_d5 operatörünü *hatalı* olarak kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö9'un cevabı　　b. Ö57'nin cevabı

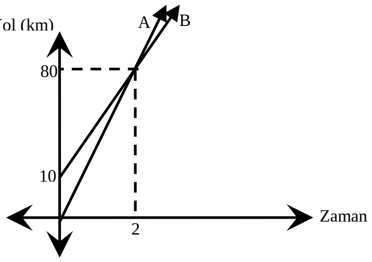
Şekil 140. Öğrencilerin S_d5'e verdikleri cevaplar

Bu öğrencilerin dışında, soruya cevap vermeyen (Ö5, Ö17, Ö25, Ö36 ve Ö55), anlamsız grafik çizen (Ö14 ve Ö27), işlem hatası yaptıkları için üç tarife için de aynı ücretin ödeneceği konuşma süresini belirleyemeyen (Ö15, Ö33) veya grafikte gösteremeyen (Ö52), değişkenleri eksenlere hatalı yerleştiren (Ö46) ve herhangi bir çizim yapmadan doğrudan sonucu yazan (Ö28, Ö31 ve Ö35) öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Öğrencilerin kullandıkları operatörler incelendiğinde, 3 yeni operatörün yanı sıra R_d2, R_d3, R_d4 ve R_d5 operatörlerinin tekrar ettiği belirlenmiştir.

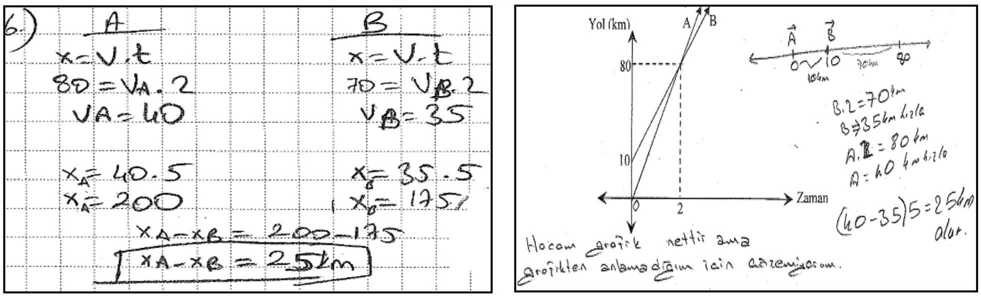
3.3.1.6. Altıncı Soru

S_d6: A ve B araçlarının zamana bağlı olarak aldıkları yollar grafikte verilmiştir. Araçların karşılaşmasından 5 saat sonra aralarındaki uzaklık kaç km olur?



Altıncı soruyu 32 öğrenci doğru olarak yanıtlarken, 19 öğrenci ise soruya hatalı cevap vermiştir. Ayrıca 8 öğrencinin soruya yanıt vermediği belirlenmiştir.

Soruya *R_d3* operatörünü kullanarak doğru cevap veren öğrencilerden 29'u (Ö2, Ö7-Ö10, Ö12, Ö15, Ö18-Ö20, Ö22-Ö25, Ö28, Ö31, Ö33-Ö37, Ö41, Ö42, Ö45, Ö46, Ö48, Ö49, Ö51, Ö52, Ö55, Ö57) çözümü gerçekleştirmek için yol, hız ve zaman değişkenleri arasındaki ilişkiyi doğru olarak belirlemişlerdir (Bkz. Şekil 141). Bu öğrencilerden Ö2, Ö7-Ö10, Ö15, Ö18-Ö20, Ö22, Ö25, Ö28, Ö33-Ö37, Ö41, Ö45, Ö46, Ö48, Ö49, Ö51, Ö52, Ö55, Ö57 kodlu olanların ayrıca, aynı yöne hareket eden araçlar arasındaki yolun hesaplanmasını, bu araçların o zamana kadar aldıkları yolların farkından (Bkz. Şekil 141a) buldukları için *R_d18: Aynı yönde hareket eden iki aracın belli bir t anından sonra aldıkları yol sırasıyla X_1 ve X_2 ise aralarında kalan yol X_1-X_2 dir.* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



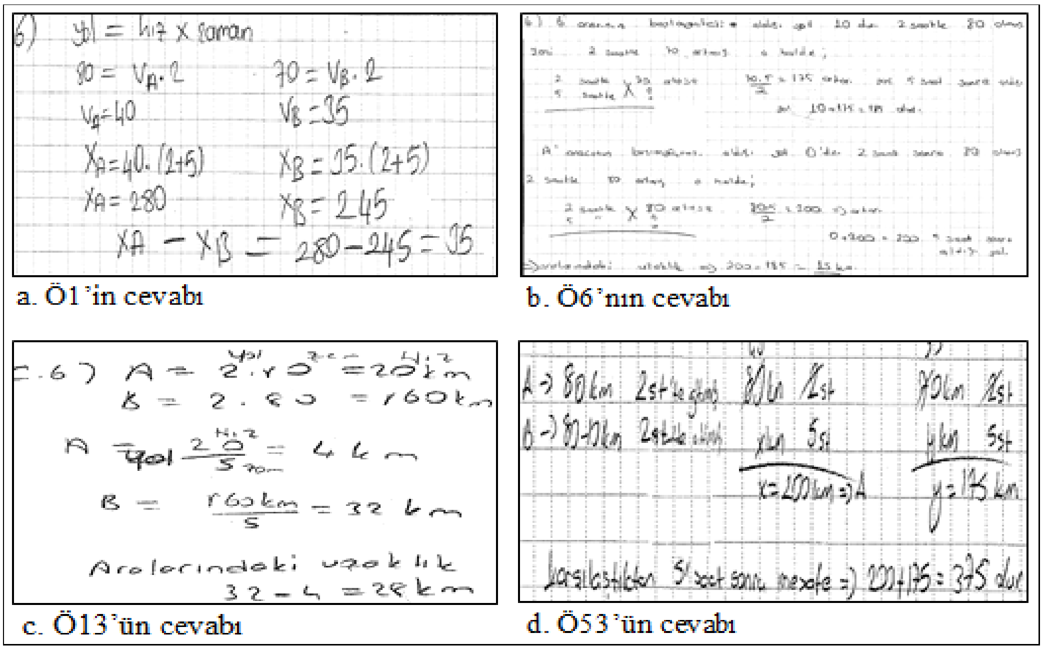
a. Ö7'nin cevabı

b. Ö12'nin cevabı

Şekil 141. Öğrencilerin S_d6'ya verdikleri cevaplar

Ö12, Ö23, Ö24, Ö31 ve Ö42 ise araçlar arasındaki mesafeyi, hızlar arasındaki farktan yararlanarak hesaplamışlardır (Bkz. Şekil 141b). Bu nedenle kullandıkları operatör; *R_d19: Aynı yönde hareket eden iki aracın hızları sırasıyla V_1 ve V_2 ise belli bir t anından sonra aralarında kalan yol (V_1-V_2)t dir,* olarak belirlenmiştir.

Ö1, Ö3, Ö4, Ö16, Ö50, Ö54 ve Ö56 grafikte araçların karşılaştıkları anda aralarındaki mesafenin sıfır olacağını hesaba katmayıp, 2. saatte karşılaştıkları bilgisini kullanarak, karşılaşma anından 5 saat sonra aralarındaki mesafeyi hesaplarken doğrudan 7 saat süreyle aldıkları yolların farkını hesaplamışlardır (Bkz. Şekil 142a). Diğer yandan Ö6 ve Ö32 orantı kullanarak, arabaların 2 saatte aldıkları yollardaki artışlarını temel alarak, 7 saatteki artışı hesaplamışlardır (Bkz. Şekil 142b). Bir başka çözüm yolunu izleyen Ö13 ise hız, yol ve zaman arasındaki ilişkiyi ters kurmuştur (Bkz. Şekil 142c). Ö38 ve Ö53 kodlu öğrenciler arabaların zıt yönde hareket ettiklerini düşündüklerinden çözümü farklı bir şekilde gerçekleştirmişlerdir (Bkz. Şekil 142d). Tüm bu öğrencilerin hız, zaman ve yol değişkenleri arasındaki ilişkiyi hatalı belirlemekten kaynaklanan hata yaptıkları görülmektedir. Bu nedenle *R_d3* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö1'in cevabı

b. Ö6'nın cevabı

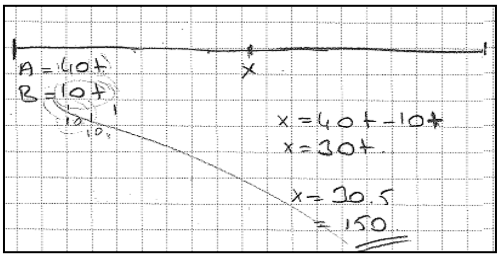
c. Ö13'ün cevabı

d. Ö53'ün cevabı

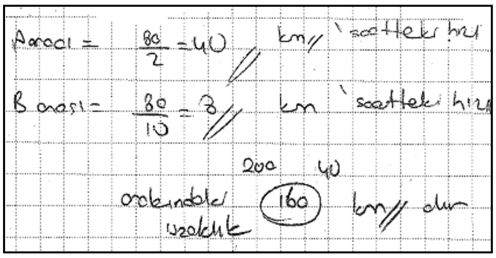
Şekil 142. Öğrencilerin S_d6'ya verdikleri cevaplar

Grafiği hatalı yorumladıkları için doğru sonuca ulaşamayan öğrencilerden Ö21, A aracının hızının 40t, B aracının hızının ise 10t olduğu yorumunu çıkararak araçların hızları farkından sonuca ulaşmaya çalışmıştır (Bkz. Şekil 143a). Ö21 mülakatta yaptıklarını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

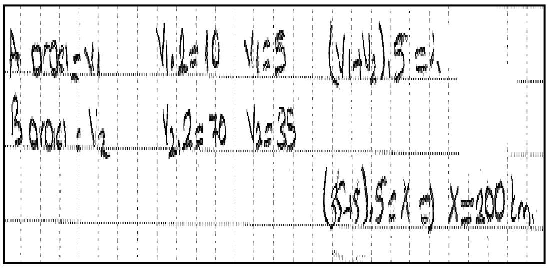
A: Ne düşündün burada mesela 40t, 10t? Aldıkları yol mudur o nedir?
Ö21: Hımm. Mesela şey demişim. Ne demişim.
A: A; 40t, B; 10t demişsin, aradaki fark 30t demişsin. 5 saatte de muhtemelen 150 km lik mesafe olur aralarında demişsin.
Ö21: Evet. B yi herhalde şöyle düşündüm. B ilk başladığında 10 ile başlıyor ya 10t diye düşündüm.
A: Bu 10t nedir senin için?
Ö21: Onu işte ben hız olarak,
A: Hız olarak. 10t hıza sahip
Ö21: t'yi zaman diye değil mesela bilinmeyen olarak x gibi, y gibi düşündüm ben orada. 2 saatte bu hani 80t ise herhalde 1 saatte 40t diye oradan buldum.



a. Ö21'in cevabı



b. Ö29'un cevabı



c. Ö47'nin cevabı

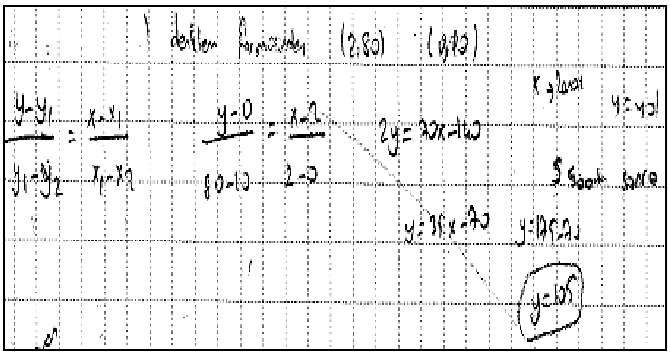
Şekil 143. Öğrencilerin S_d6'ya verdikleri cevaplar

Ö29 ise çözümünde (Bkz. Şekil 143b) verilen grafiği yanlış yorumladığını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

A: 6. Soruda B aracının hızı 80/10 demişsin? 10 nerden geldi?
Ö29: Şurada km diyor. 10 km dediği için sonra zamana bölmüşüm, yolu.
A: Bunun için 80'i 10'a mı bölmen gerekir? B aracının aldığı yol nedir yani kaç km dir?
Ö29: 5 değil mi hocam? İşte 10/2 yani.
A: B aracı 10 km lik mi yol almış? Dikkat et, 10.km'den 80 e kadar yol almış, yani 70 km. Kaç saatte almış?
Ö29: 2 saatte.
A: O zaman ortalama hızı ne olur
Ö29: saatte 35km
A: Peki sen niye 80 i 10 a böldün ben onu anlamadım.
Ö29: Ben bunu B grafiğinde ki gibi düşündüm. Yol bölü zaman yaptım.
A: Tamam 80/2 A aracı için doğru. A; 80 km yolu 2 saatte almış
Ö29: Ben böyle okumadım işte.
A: Nasıl okudun o zaman onu anlat bana?
Ö29: 10 km bölü 2 yaptım.
A: 10 bölü 2 yapmamışsın, öyle yapsan anlayacağım. 80 bölü 2 yapmışsın. Sanki 10 saatte gitmişsin 80 metre yolu gibi. Yani şurada ki 10 u birden bire zaman olarak düşünmüşsün.
Ö29: Onu yanlış almışım hocam.
A: Grafiği mi yanlış yorumladın?
Ö29: Öyle olmuş ben şimdi bakıyorum niye öle yapmamışım ben ya.

Benzer şekilde Ö47, B aracının aldığı yolu 10 km alarak hızını hatalı hesapladığı için doğru sonuca ulaşamamıştır (Bkz. Şekil 143c). Çözümler ve mülakat verileri incelendiğinde bu öğrencilerin *R_d15* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.

Ö11, Ö26 ve Ö43 soruyu analitik geometri bilgilerini kullanarak çözmeye çalışmışlardır (Bkz. Şekil 144). Öğrenciler çözümlerinde tam olarak doğru sonuca ulaşamasalar da kullandıkları operatörün doğru olduğu kabul edilmiş ve *R_d20: (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) gibi iki noktası bilinen doğrunun denklemi* $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ *dir*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 144. Ö43’ün S_d6’ya verdiği cevap

Altıncı soru ile ilgili olarak Ö5, Ö14, Ö17, Ö27, Ö30, Ö39, Ö44 ve Ö58 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Ö40 kodlu öğrenci sadece A aracının 7 saatte aldığı yolu hesaplamıştır. Bu nedenle bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

Soru ile ilgili olarak 3 yeni operatör belirlenirken, önceki sorularda kullanılan R_d3 ve R_d15 operatörlerinin tekrar ettiği görülmektedir.

3.3.1.7. Yedinci Soru

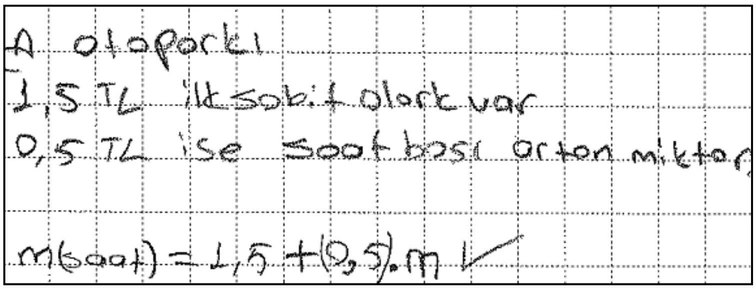
S_d7: Aşağıdaki tabloda A otoparkının zamana bağlı olarak kazandığı para verilmiştir. B otoparkının zamana bağlı olarak kazandığı para ise y=x bağıntısıyla bulunabilmektedir.

A		B	
Zaman (saat)	Ücret (TL)	Zaman (saat)	Ücret (TL)
1	2		
2	2,5		
3	3		
4	3.5		
5	4		

a. A otoparkının zaman-para ilişkisini veren cebirsel ifadesini yazarak arabanızı hangi otoparka bırakacağınızı belirleyiniz.
b. Tablodaki, B otoparkıyla ilgili olarak bırakılan boş kısımları doldurarak, bu tablodan hareketle arabanızı hangi otoparka bırakacağınızı belirleyiniz.
c. A ve B otoparklarını grafiksel olarak karşılaştırınız. Elde ettiğiniz grafiği yorumlayınız.

Sorunun a seçeneğine 12 öğrenci doğru, 25 öğrenci yanlış cevap verirken, 22 öğrenci ise cevap vermemiştir.

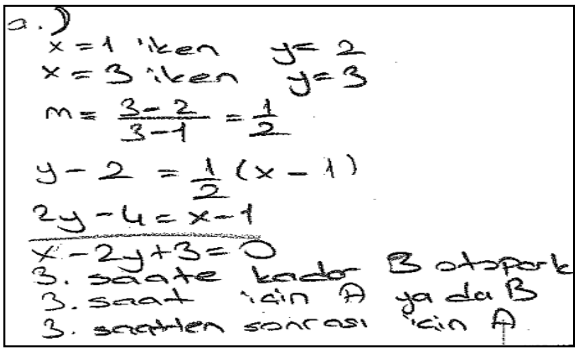
İstenilen cebirsel ifadeye ulaşarak doğru cevabı bulan öğrenciler; Ö6, Ö8, Ö18, Ö20, Ö23, Ö33, Ö35, Ö38, Ö48, Ö51-Ö53 şeklinde sıralanmaktadırlar. Bu öğrenciler A otoparkı ile ilgili olarak tablodaki verileri kullanarak, istenen cebirsel ilişkiyi doğru olarak kurmuşlardır (Bkz. Şekil 145). Bu öğrencilerden Ö38 dışındakiler cebirsel ilişkiyi doğrudan bulmuşlardır.



Şekil 145. Ö52'nin S_d7.a'ya verdiği cevap

Bu öğrencilerin değişkenler asındaki ilişkiyi cebirsel olarak doğru ifade ettikleri görülmektedir. Bu nedenle kullandıkları operatör; *R_d3* olarak belirlenmiştir.

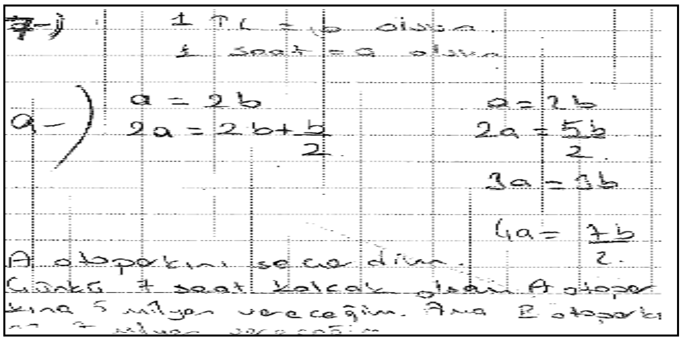
Ö38 ise istenen cebirsel ilişkiyi bulmak için eğimi ve bir noktası belli doğru denkleminin yazılması bilgisinden yararlanmıştır (Bkz. Şekil 146). Bu öğrencinin *R_d3* operatörünün yanı sıra *R_d21: (x_1, y_1) şeklinde bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi* $y - y_1 = m(x - x_1)$ *dir,* olarak belirlenmiştir. Aynı yolu takip eden Ö1 kodlu öğrenci ise eğimi hatalı bulduğu için doğru sonuca ulaşamamıştır.


a.)
$x=1$ iken $y=2$
$x=3$ iken $y=3$
$m=\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$
$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$
$2y-4=x-1$
$x-2y+3=0$
3. saate kadar B otopark
3. saat için A ya da B
3. saatten sonrası için A

Şekil 146. Ö38'in S_d7.a'ya verdiği cevap

Diğer öğrencilerin uygun cebirsel ifade bulma girişimleri doğru şekilde sonuçlanmamıştır. Ö12, Ö14, Ö16, Ö21, Ö24, Ö28, Ö29, Ö40, Ö43 verilen tablodaki her bir değer için ayrı bir cebirsel ifadeye ulaşmış, bütün değerleri sağlayan tek bir cebirsel ifade bulamamışlardır (Bkz. Şekil 147). Bu nedenle R_d3 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir. Ö21 ile yapılan mülakattan elde edilen veriler aşağıda verilmiştir;

A:7. Soruya bakalım, tablodaki her bir satır için ayrı bir denklem kurmuşsun. Nasıl düşündün?
Ö21: Hımm. Yazmışım üzerine 1tl b olsun, 1saat a olsun. Mesela 1 saat olunca ücret ne olur, 2b olur yani 2tl. 2 saat kalınca 2a ne olur? Şey 2.5b yani $b+\frac{b}{2}$
A: Hıhı
Ö21: O şekilde ben devam ettirmişim. Daha sonra ne demişim A otoparkını seçerdim. Çünkü 7 saat olsa A otoparkına 5 lira vereceğim ama B otoparkına 7 lira vereceğim.
A: Nerden biliyorsun 7 saat kaldığında 5 milyon vereceğini hangi bağıntıya göre buldun onu?
Ö21: Şey de mesela 6 saat 4.5, 7 saat 5 TL yani 5 milyon
A: Ha 0.5 artırarak mı buldun?
Ö21: Evet. 0.5 artırarak buldum
A: Yani tek bir cebirsel ifade bulmadın
Ö21: Yok, ayrı ayrı buldum


7-) 1 TL = b olsun.
1 saat = a olsun.
a-) $a=2b$ $\quad$ $2a=2b+\frac{b}{2}$
$a=2b$ $\quad$ $2a=\frac{5b}{2}$ $\quad$ $3a=3b$ $\quad$ $4a=\frac{7b}{2}$
A otoparkını seçerdim. Çünkü 7 saat kalacak olsam A otoparkına 5 milyon vereceğim. Ama B otoparkı

Şekil 147. Ö21'in S_d7.a'ya verdiği cevap

Öğrencilerden Ö3, Ö13, Ö15, Ö26, Ö32, Ö37, Ö45, Ö47, Ö41 ve Ö59 kodlu olanlar değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak hatalı ifade ettikleri için *R_d3* operatörünü *hatalı* olarak kullandıkları belirlenmiştir.

Sorunun a seçeneğine kalan öğrencilerden Ö1, Ö4, Ö5, Ö11, Ö17, Ö19, Ö22, Ö27, Ö30, Ö31, Ö34, Ö39, Ö42, Ö44, Ö46, Ö49, Ö50, Ö54-Ö58 cevap vermezken, Ö2, Ö7, Ö9, Ö10 ve Ö36 kodlu öğrenciler değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi belirlemek yerine sözel olarak açıklamışlardır. Bu nedenle *R_d4* operatörünü kullandıkları belirlenememiştir.

Sorunun b seçeneğinde öğrencilerden şartlara uygun olarak verilen tabloyu doldurmaları istenmiştir. Soruya cevap vermeyen 7, hatalı tablo oluşturan 3 ve kullandığı operatör belirlenemeyen 8 öğrenci dışındaki öğrenciler soruyu doğru olarak cevaplamayı başarmışlardır. Doğru cevap veren öğrencilerin kullandıkları operatör; *R_d22: Bir cebirsel ifadedeki değişkenlere değerler vererek tablo oluşturma*, olarak belirlenmiştir.

Tabloyu hatalı oluşturan öğrencilerden Ö13 ve Ö42 zamana bağlı olarak değişen ücretleri belirlerken, yeni ücreti eskisinin üzerine 1TL (Ö13) veya 0.75 (Ö42) kuruş ekleyerek bulmuşlardır (Bkz. Şekil 148a, Şekil 148b).

Ö40 kodlu öğrencinin oluşturduğu tablo incelendiğinde (Şekil 148c), B otoparkındaki zaman-ücret ilişkisini, A otoparkındaki ilişki ile aynı olarak aldığı görülmüştür. Bu öğrencilerin, değişkenler arasında verilen ilişkiyi dikkate almadan tabloyu rastgele bir kurala göre doldurduğu düşünülmektedir. Bu nedenle kullandıkları operatör; *R^-_d23: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme*, olarak belirlenmiştir.

A		B	
Zaman (saat)	Ücret (TL)	Zaman (saat)	Ücret (TL)
1	2	1	1
2	2,5	2	3
3	3	3	5
4	3.5	4	7
5	4	5	9

a. Ö13'ün cevabı

A		B	
Zaman (saat)	Ücret (TL)	Zaman (saat)	Ücret (TL)
1	2	1	1,75
2	2,5	2	2,50
3	3	3	3,25
4	3.5	4	4,00
5	4	5	4,75

b. Ö42'nin cevabı

A		B	
Zaman (saat)	Ücret (TL)	Zaman (saat)	Ücret (TL)
1	2	x	2y
2	2,5	2x	2,5y
3	3	3x	3y
4	3.5	4x	3,5y
5	4	5x	4y

c. Ö40'ın cevabı

Şekil 148. Öğrencilerin S_d7.b'ye verdikleri cevaplar

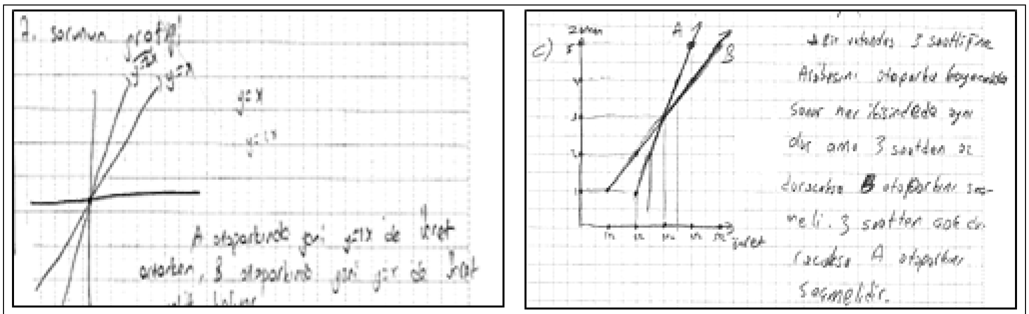
Sorunun b seçeneğine Ö5, Ö11, Ö17, Ö31, Ö46, Ö51 ve Ö54 cevap vermezken, Ö36 ise tabloyu doldurmak yerine sözel olarak açıklama yapmıştır.

Sorunun c seçeneğinde, öğrencilerin verilen problem durumunu grafik çizerek yorumlamaları istenmiştir. Soruya cevap vermeyen 14 ve grafik çizmeyen 2 öğrenci dışındakiler grafik çizerek çözümlerini savunmak için çaba sarf etmişlerdir. Bu öğrencilerden 24'ü doğru sonuca ulaşırken, 19'u soruyu hatalı çözmüşlerdir. Ö1, Ö26, Ö28 ve Ö42 a seçeneğindeki çözümlerini kullanarak grafiği çizmeye çalışmışlardır. Sorunun a seçeneğinde oluşturdukları hatalı cebirsel ifadeler nedeniyle hatalı çizimler yapmışlardır (Bkz. Şekil 149a). Bu nedenle öğrencilerin R_d5 operatörünü doğru kullanmalarına rağmen R_d3 operatörünü *hatalı* kullandıkları için çözümü hatalı tamamladıkları belirlenmiştir.

Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12, Ö15, Ö18, Ö20, Ö22, Ö24, Ö25, Ö27, Ö32, Ö33, Ö37, Ö38, Ö44, Ö45, Ö52, Ö53, Ö56 ve Ö58 kodlu öğrenciler doğru grafik çizmiş ve çizdikleri grafikleri doğru bir şekilde yorumlamayı başarmışlardır (Bkz. Şekil 149b). Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler R_d5 ve R_d15 olarak belirlenmiştir.

Ö8, Ö14, Ö29, Ö41, Ö47 ve Ö48'in çizdikleri grafikler incelendiğinde, çizilmesi gereken doğrulara ait noktaları belirledikleri ancak bu noktaları birleştirmedikleri görülmüştür (Bkz. Şekil 149c). Ö35 ise istenen grafiği sütun grafiği olarak çizmiştir. Verilenlere uygun grafik çizemedikleri tespit edilen bu öğrencilerin R_d5 operatörünü hatalı kullandıkları belirlenmiştir.

Ö10, Ö16, Ö19, Ö21, Ö23, Ö30, Ö34 ve Ö43 ise her iki otoparka ait zaman-ücret ilişkisini veren doğru grafiğini orijinden başlatmak için uğraşmışlardır (Bkz. Şekil 149d). Bu nedenle kullandıkları operatör R^-_d16 olarak belirlenmiştir.

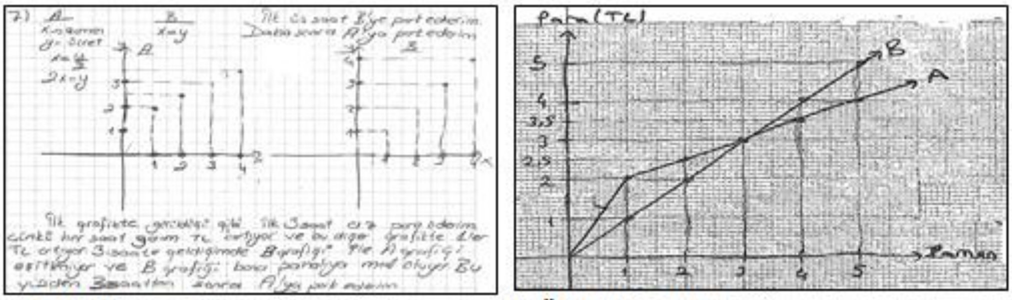


a. Ö26'nın cevabı

b. Ö24'ün cevabı

Şekil 149. Öğrencilerin S_d7.c'ye verdikleri cevaplar

Şekil 149'un devamı



c. Ö41'in cevabı d. Ö34'ün cevabı

Sorunun c seçeneği ile ilgili olarak, Ö5, Ö11, Ö13, Ö17, Ö31, Ö39, Ö40, Ö46, Ö49, Ö50, Ö51, Ö54, Ö55 ve Ö59 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Ö36 ve Ö57 ise istenen grafiği çizmek yerine sözel olarak açıklama yapmışlardır.

Yedinci soru ile ilgili olarak belirlenen operatörlere genel olarak bakıldığında önceki sorularda kullanılan R_d3, R_d4, R_d5, R_d15 ve $R^{-}_{d}16$ operatörlerinin yanı sıra 3 yeni operatör belirlenmiştir.

3.3.2. Denklemler Konusunda Belirlenen Gösterimler

Öğrencilerin denklemler konusunda kullandıkları gösterimlerin cebirsel, tablo ve grafiksel boyutlarda olduğu görülmüştür. Öğrencilerin kullandıkları Cebirsel gösterimler incelenmiş ve herhangi bir yanlış kullanıma rastlanmamıştır. Tablo gösteriminde de bir sorun yaşamayan öğrencilerin grafikle ilgili olarak bazı hatalı gösterimler kullandıkları tespit edilmiştir. Bu hatalı gösterimler nokta ve doğru kavramlarında karşımıza çıkmıştır.

Nokta ile ilgili olarak öğrencilerin, hem sıralı ikili olarak gösterimi hem de düzlemdeki gösteriminde hata yaptıkları gözlemlenmiştir. Öğrenciler noktanın gösterimini sıralı ikili olarak yapmak yerine o noktayı bileşenlerinden biri ile ifade etmektedirler. Yine koordinat sisteminde (a, b) noktasını belirlerken (a, 0) ve (0, b) noktalarını işaretlemektedirler (Bkz. Şekil 132). Bazı öğrenciler ise $y = ax+b$ cebirsel ifadesinin, bu ifadedeki x li terimin katsayısı olan a ve sabit sayı olan b'den oluşan (a, b) noktasını belirttiğini düşünmektedirler (Şekil 139).

Doğru kavramıyla ilgili olarak yaşanan sorunlardan biri; öğrencilerin $ax+by+c=0$ doğrusunu y=0 için elde edilen $x = -\frac{c}{a}$ doğrusu olarak göstermeleridir (Şekil 133a).

Doğru kavramıyla ilgili olarak öğrencilerin grafiksel gösterimde yaptıkları bir diğer hata ise verilen doğruların hepsini orijinden başlatmalarıdır (Bkz. Şekil 149d). Bazı öğrencilerin ise $ax+by+c=0$ doğrusunun grafiğini çizmek yerine, sütun grafiği çizdikleri tespit edilmiştir.

3.3.3. Denklemler Konusunda Belirlenen Kontrol Bilgileri

Diğer konularda olduğu gibi denklemler konusunda da öğrencilerin hatalı çözümlerinin hangi bilgiye dayandırarak yaptıklarını ortaya koyan kontrol bilgilerini bulmak, her operatör için mümkün olamamıştır. Belirlenen kontrol bilgilerinden biri; *Açı Açı Benzerlik Kuralıdır.* Öğrenciler bu kuralı hem tek açıya ve eşliğe uyarlayarak, R_d^-14*: Bir açıları eş olan üçgenlerin alanları eştir,* operatörünü kullanmış olabilirler.

Bir diğer kontrol önermesi ise R_d7 operatörünü "*iki doğrunun kesim noktasının apsisi, bu doğruların x ekseni kestiği noktaların orta noktasıdır*" bilgisini kabul ederek hatalı kullanan öğrencilerin çözümlerinde belirlenmiştir. Öğrencilerin bu operatörü *"bir parabolün x eksenini kestiği noktalar tepe noktasına göre simetriktir"* bilgisinin bir yansıması olarak kullandıkları söylenebilir.

3.4. Fonksiyonlar

Bu bölümde ilk olarak fonksiyon konusu ile ilgili olarak sorulan her bir soruya öğrencilerin verdikleri cevaplardan hareketle belirlenen operatörler verilmiştir. Operatörlerle ilgili bulguların ardından gösterim ve kontrol bilgileriyle ilgili bulgular ayrı başlıklar halinde sunulmuştur.

Ö15, Ö16, Ö18 ve Ö31 bu uygulamaya katılmadıkları için, bulgular 57 öğrencinin sorulara verdikleri cevaplardan elde edilmiştir.

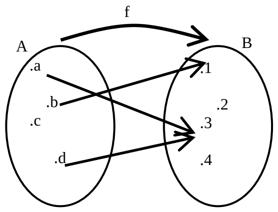
3.4.1. Fonksiyon Konusu ile İlgili Operatörler

Konu ile ilgili olarak yürütülen uygulamada sorulan 11 soruya öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen operatörler aşağıda verilmiştir.

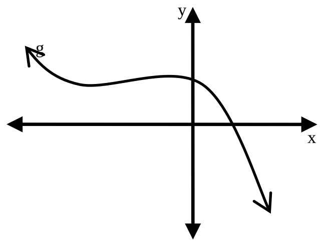
3.4.1.1. Birinci Soru

S_f1:Aşağıdaki bağıntıları inceleyerek fonksiyon olma durumlarını araştırınız.

a)



b)



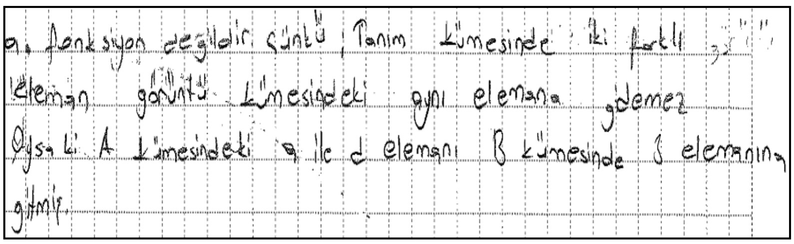
c)

x	1	1	2	2	3	3
t(x)	3	-3	5	-5	8	-8

Son uygulamanın ilk sorusunun a seçeneğine 49 öğrenci doğru cevap verirken, 1 öğrenci eksik, 6 öğrenci ise hatalı cevap vermiştir. Diğer 1 öğrenci ise soruya cevap vermemiştir.

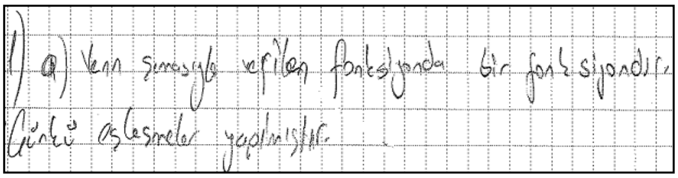
Sorunun a seçeneğine doğru cevap veren 49 öğrenci (Ö1-Ö9, Ö12, Ö14, Ö19-Ö26, Ö28, Ö29, Ö32-Ö51, Ö53-Ö60) verilen bağıntının tanım kümesindeki c elemanının değer kümesinde bir karşılığı olmadığını belirtmiş ve bu nedenle bağıntının fonksiyon olmadığını ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; *R_f1: f:$A \rightarrow B$'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek şart $\forall a \in A$ için $f(a) \in B$'nin mevcut olmasıdır*, olarak belirlenmiştir.

Soruya hatalı cevap veren Ö11, *R_f2: f:$A \rightarrow B$'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek şart; $x \in A$ için $f(x)=y_1$ ve $f(x)=y_2$ iken $y_1 = y_2 \in B$ olmasıdır*, operatörünü yersiz kullandığından doğru sonuca ulaşamamıştır (Bkz. Şekil 150).

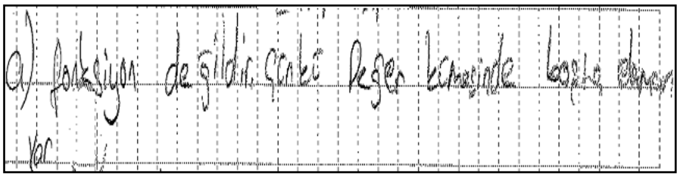

a) fonksiyon değildir çünkü ; Tanım kümesinde iki farklı
eleman görüntü kümesindeki aynı elemana gidemez
Oysaki A kümesindeki a ile d elemanı B kümesinde 3 elemanına
gitmiş.

Şekil 150. Ö11'in S_f1.a'ya verdiği cevap

R_f1 operatörünü *hatalı* kullanan öğrencilerden Ö10 ve Ö52, verilen f bağıntısının fonksiyon olduğunu, eşlemenin yapılması ile ilişkilendirirken (Bkz. Şekil 151a), Ö30 ise değer kümesinde açıkta eleman kaldığı için f'nin içine fonksiyon olduğunu belirtse de bu öğrencilerin, A kümesindeki (tanım kümesindeki) c elemanının görüntüsü olmaması durumunu göz ardı ettiği görülmektedir. Yine R_f1 operatörünü *hatalı* kullandıkları için doğru sonuca ulaşamayan Ö27 ve Ö61 değer kümesinde açıkta eleman kaldığı için bağıntının fonksiyon olamayacağını belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 151b).



a. Ö10'nun cevabı



b. Ö27'nin cevabı

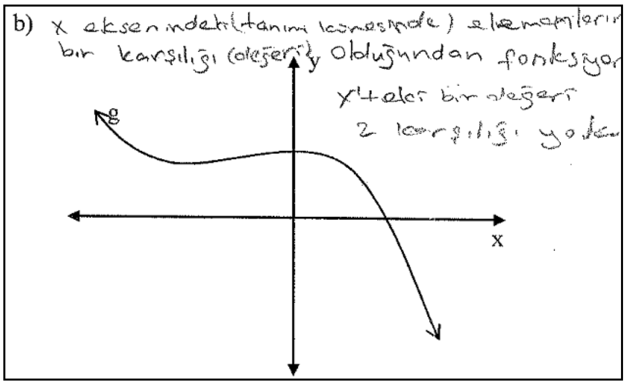
Şekil 151. Öğrencilerin S_f1.a'ya verdikleri cevaplar

Sorunun a seçeneğine cevap vermeyen Ö17 ve hiçbir açıklama yapmadan f bağıntısının fonksiyon olduğunu belirtmekle yetinen Ö13 kodlu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Sorunun be seçeneğine 4 öğrenci cevap vermemiş, diğer öğrencilerden 6'su soruyu eksik cevaplarken, 11 öğrenci hatalı, 36 öğrenci ise doğru cevaplamıştır.

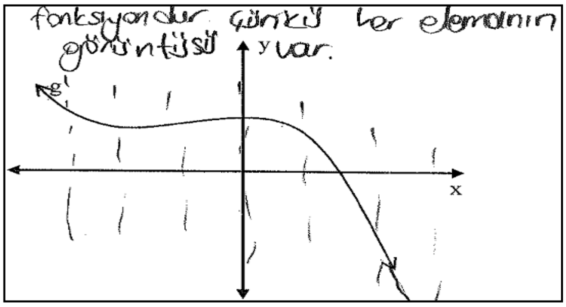
Sorunun b seçeneğine doğru cevap veren 36 öğrenci (Ö2-Ö8, Ö21-Ö29, Ö32, Ö39-Ö41, Ö43-Ö46, Ö48-Ö51, Ö53, Ö56-Ö61), verilen grafikte her x değerine karşılık bir y değeri olduğu için g'nin fonksiyon olduğunu belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 152). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; R_f1 ve R_f2 operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir. Ö26'nin klinik mülakat verileri kullandığı operatörleri doğrular niteliktedir:

A: Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için kaç tane şartı sağlaması gerekiyor.
Ö26: Hocam her bir değerin bir taneye gitmesi gerekiyor, mesela şu grafikte hani 2 değere gitmemesi, 2 tane kesmemesi hani ona göre değerlendirdim.
A: y eksenine paraleller çizildiğinde eğer grafiği 2 noktada kesiyorsa diyorsun ki fonksiyon değildir.
Ö26: Evet, ama burada her değer için tek noktada kestiği için fonksiyondur.



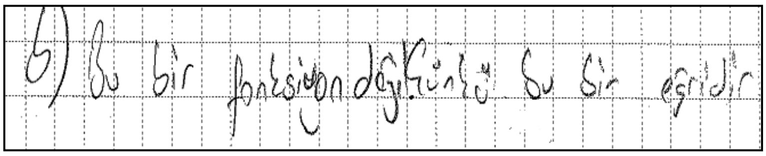
Şekil 152. Ö2'nin S_f1.b'ye verdiği cevap

R_f1 operatörünü kullanarak soruyu çözen Ö1, Ö30 ve Ö37 kodlu öğrenciler; g'nin fonksiyon olmasını her x değerinin karşılığı olmasına bağlamışlardır (Bkz. Şekil 153). Ancak bu x değerlerine karşılık gelen değerlerin tek olması ile ilgili bir yorumda bulunmadıkları için *R_f2* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.



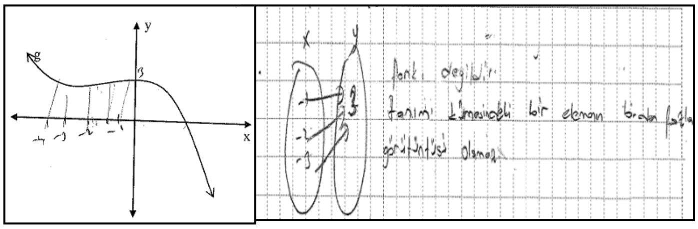
Şekil 153. Ö1'in S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö10 kodlu öğrencinin çözümünde (Bkz Şekil 154) bir bağıntının grafiğinin eğri olması durumu ile bu bağıntının fonksiyon olması arasında ilişki kurmuştur. Bu öğrenci doğru sonuca ulaşmış olmasına rağmen hatalı düşündüğü için *R^-_f3: Bir f bağıntısının grafiği eğri ise bu bağıntı bir fonksiyon belirtir*, operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



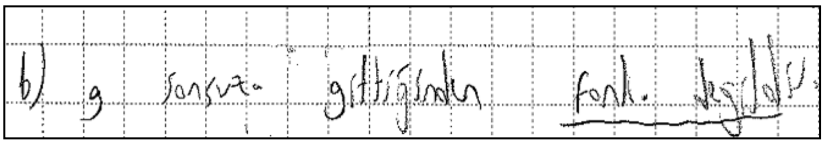
Şekil 154. Ö10'un S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö11 kodlu öğrenci ise tanım kümesindeki elemanların aynı görüntüye sahip olduklarını belirterek, grafiği Venn şemasına dönüştürmüş ve g'nin fonksiyon olmadığını ifade etmiştir (Bkz. Şekil 155). Bu öğrencinin görüntü ve tanım kümelerini karıştırdığı görülmektedir. Bu nedenle kullandığı operatör; *R^-_f4: Koordinat düzleminde eğrisi verilen bir fonksiyonun görüntü kümesi x ekseni, tanım kümesi y eksenidir*, olarak belirlenmiştir.



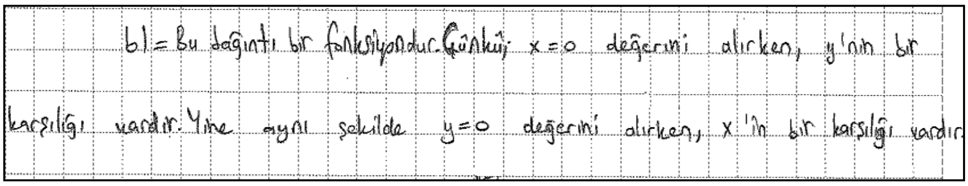
Şekil 155. Ö11'in S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö20, yaptığı çözümde g'nin fonksiyon olmayışını sonsuza gitmesi ile ilişkilendirdiğinden (Bkz. Şekil 156) kullandığı operatör; *R^-_f5: Bir f bağıntısının grafiği sonsuza gidiyorsa, bu bağıntı fonksiyon belirtmez*, olarak belirlenmiştir.



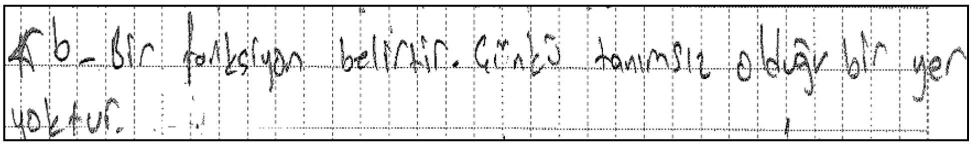
Şekil 156. Ö20'nin S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö34 ise grafiği verilen bağıntının fonksiyon olmasının x=0 için y değerinin ve y=0 için x değerinin bulunmasına bağlamıştır (Bkz. Şekil 157). Bu öğrencinin kullandığı operatör; *R^-_f6: Bir g bağıntısının grafiği x ve y eksenlerini kesiyorsa o bağıntı fonksiyon belirtir*, olarak belirlenmiştir.


b1= Bu bağıntı bir fonksiyondur. Çünkü; x=o değerini alırken, y'nin bir karşılığı vardır. Yine aynı şekilde y=o değerini alırken, x'in bir karşılığı vardır

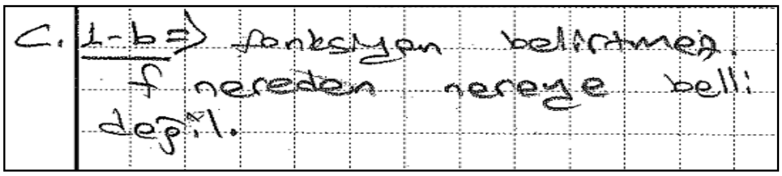
Şekil 157. Ö34'ün S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö42 ise $R^{-}_{f}7$*: Bir g bağıntısının tanımsız olduğu değer yoksa bu bağıntı fonksiyon belirtir*, operatörü yardımıyla soruya cevap vermeye çalışmıştır (Bkz. Şekil 158).


1b- bir fonksiyon belirtir. Çünkü tanımsız olduğu bir yer yoktur.

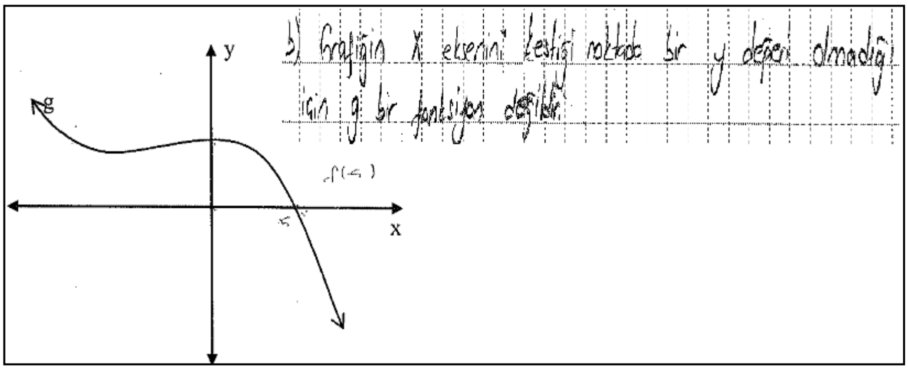
Şekil 158. Ö42'nin S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö52 çözümünde görüldüğü gibi, grafiğin tanım aralığı belli olmadığı için, bir fonksiyona ait olamayacağını ifade etmiştir (Bkz. Şekil 159). Bu nedenle kullandığı operatör ise $R^{-}_{f}8$*: Verilen bir grafiğin fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinin sınırlı olması gerekir,* olarak belirlenmiştir.


c. 1-b ⇒ fonksiyon belirtmez.
f nereden nereye belli
değil.

Şekil 159. Ö52'nin S_f1.b'ye verdiği cevap

Ö54 kodlu öğrenci grafiğin bir fonksiyon belirtmediğini, grafiğin x eksenini kestiği noktada bir y değerinin olmamasına bağlamıştır. Bu hatanın, bir grafiğin x eksenini kestiği noktanın ikinci bileşeninin her zaman sıfır olması durumunun göz ardı edilmesinden kaynaklandığı görülmüştür (Bkz. Şekil 160). Bu öğrenciye hata yaptıran operatör fonksiyon olma şartlarından çok, nokta kavramı ile ilgilidir. Bu nedenle kullandığı operatör; $R^{-}_{f}9$*: Bir grafiğin x eksenini kestiği noktanın ikinci bileşeni yoktur,* olarak belirlenmiştir.

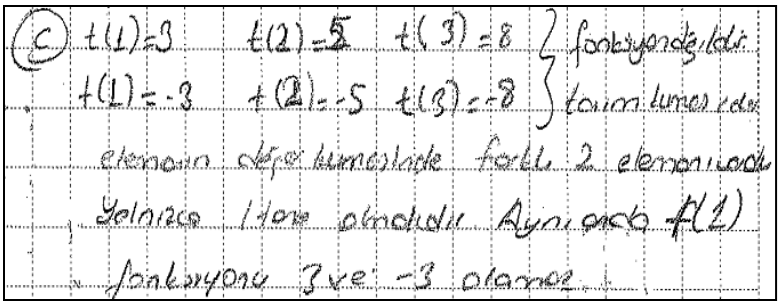


Şekil 160. Ö54’ün S_f1.b’ye verdiği cevap

Sorunun b seçeneğine; Ö9, Ö17, Ö36, Ö38 kodlu öğrenciler cevap vermezken, Ö12, Ö14, Ö19, Ö33, Ö47 ve Ö55 hiçbir açıklama yapmadan doğrudan g’nin fonksiyon olduğunu ifade etmişlerdir. Ö13 ise “*fonksiyon değil, x tüm y değerlerine gidiyor*” şeklinde bir açıklama yapmakla yetinmiştir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

Aynı sorunun c seçeneğine 34 öğrenci doğru, 12 öğrenci hatalı, 4 öğrenci ise eksik cevap vermişlerdir. Soruya 7 öğrenci cevap vermemiştir.

Soruyu doğru cevaplayan öğrenciler (Ö1-Ö4, Ö7, Ö8, Ö10, Ö13, Ö21, Ö23, Ö25-Ö29, Ö33, Ö37, Ö39-Ö41, Ö43, Ö44, Ö46, Ö47, Ö50, Ö51, Ö53-Ö55, Ö57-Ö61) tanım kümesindeki elemanların birden fazla görüntüsü olamayacağını belirleyerek verilen t bağıntısının fonksiyon olmadığını ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 161). Bu nedenle öğrencilerin R_f2 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

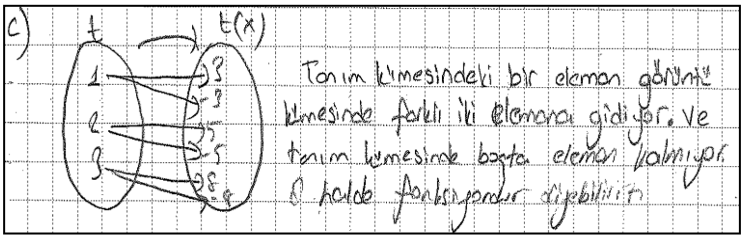


Şekil 161. Ö40’ın S_f1.c’ye verdiği cevap

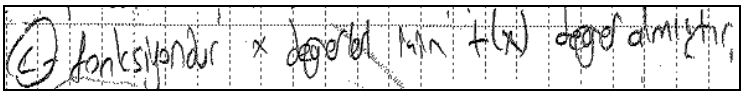
Ö9, Ö11 ve Ö42 tanım kümesindeki bir elemanın iki görüntüsü olmasının fonksiyon olma şartına uygun olduğunu düşünerek, t bağıntısının fonksiyon olacağını ifade etmişlerdir. (Bkz. Şekil 162a). Ö9 ile yapılan mülakatta fonksiyon olma şartlarından birini hatalı olarak kurduğu anlaşılmaktadır. Bu nedenle R_f2 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir

A: Senin için fonksiyon olma şartı nedir?
Ö9: Tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak
A: O birincisi, ikinci ne olmayacak?
Ö9: Görüntü kümesindeki bir eleman tanım kümesindeki farklı iki eleman ile eşleşmeyecek.

R_f1 operatörünü kullanarak, tabloda verilen t bağıntısının, her x değerine karşılık bir y değeri olduğu için fonksiyon olduğunu belirten Ö20, Ö22, Ö24, Ö34 ve Ö45 kodlu öğrencilerin tanım kümesindeki bir elemanın birden fazla görüntüsü olamayacağı şartını dikkate almadıkları için R_f2 operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 162b).



a. Ö9'un cevabı



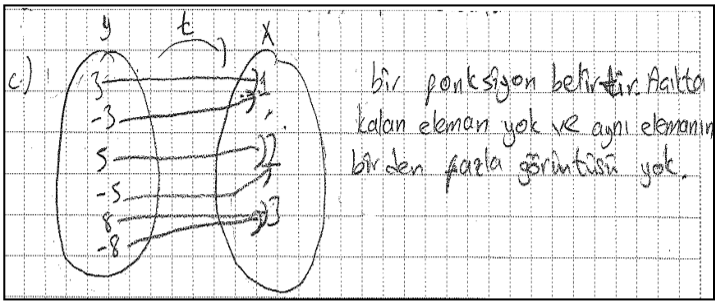
b. Ö22'nin cevabı

Şekil 162. Öğrencilerin S_f1.c'ye verdikleri cevaplar

Ö32, Ö35, Ö48, Ö52 bir bağıntının fonksiyon olma şartlarını doğru olarak ifade etseler dahi tablo olarak verilen t bağıntısında x değerlerini değer kümesi, t(x)=y değerlerini ise tanım kümesi olarak düşündükleri için (Bkz. Şekil 163) $R^{-}_{f}4$ operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö35 çözümünü aşağıdaki gibi savunmuştur;

A: Bu fonksiyonda tanım kümesi ile değer kümesini bana söyler misin? Şu sütunlardan hangisi değer kümesi? Hangisi tanım kümesi?
Ö35: t(x) tanım kümesi, x de değer kümesi.
A: Neden?
Ö35: t(x) bir fonksiyon belirtiyor. Şimdi tanım kümesi hocam t(x) bir fonksiyon belirtiyor. x ise değer kümesi t(x) e bağlı olarak aldığı değerler.

[…]
A: Yani fonksiyonda x yerine 1 yazdığında sonuç 3 mü çıkar?
Ö35: Hayır, 3 yazdığımda 1 çıkar.



Şekil 163. Ö35'in S_f1.c'ye verdiği cevap

Sorunun c seçeneği ile ilgili olarak, Ö5, Ö17, Ö30, Ö36, Ö38, Ö49, Ö56 soruya cevap vermediğinden, Ö6, Ö12, Ö14 ve Ö19 hiçbir açıklama yapmadan doğrudan t'nin fonksiyon olduğunu ifade ettiklerinden bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Birinci soru ile ilgili olarak edinilen bulgular incelendiğinde 9 yeni operatörün belirlendiği göze çarpmaktadır.

3.4.1.2. İkinci Soru

S_f2: *R-{2}* $\rightarrow$ *R-{3} de tanımlı f fonksiyonu* $f(x) = \dfrac{ax-4}{3x-b}$ *şeklinde veriliyor. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğu bilindiğine göre (a, b) sıralı ikilisini bulunuz.*

Bu soruya 34 öğrenci doğru, 15 öğrenci hatalı, 2 öğrenci eksik yanıtlamışlardır. Diğer 6 öğrenci ise soruya cevap vermemişlerdir.

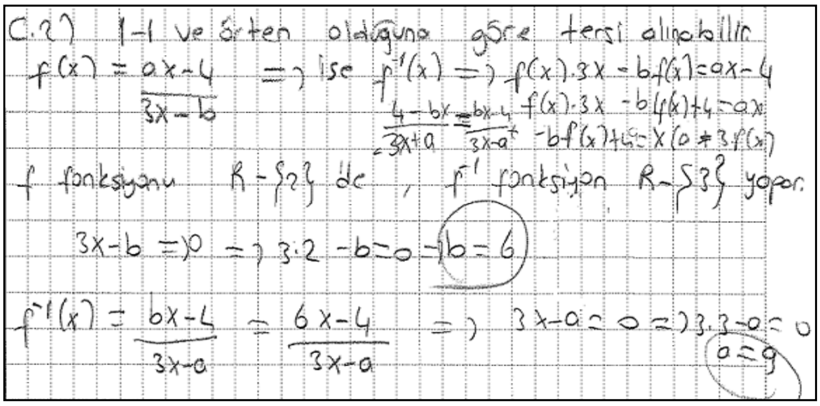
Soruya doğru cevap veren 34 öğrenci (Ö2, Ö3, Ö4, Ö6, Ö8, Ö9, Ö11-Ö14, Ö19, Ö21, Ö23, Ö25, Ö26, Ö28-Ö30, Ö32, Ö35, Ö38-Ö49, Ö54, Ö57 ve Ö58) f fonksiyonunun birer bir ve örten olması nedeniyle tersinin olacağını belirtmişlerdir. Ayrıca rasyonel bir fonksiyon olduğundan tanım kümesi dışında tutulan sayının fonksiyonu, değer kümesi dışında tutulan sayının ise fonksiyonun tersini tanımsız yapacağı bilgisinden hareketle a ve b değerlerini bulmuşlardır (Bkz. Şekil 164). Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler;

R_f10: Bir fonksiyonun tersi olabilmesi için gerek ve yeter şart birebir ve örten olmasıdır,

R_f11: Rasyonel bir fonksiyonun tersini bulma,

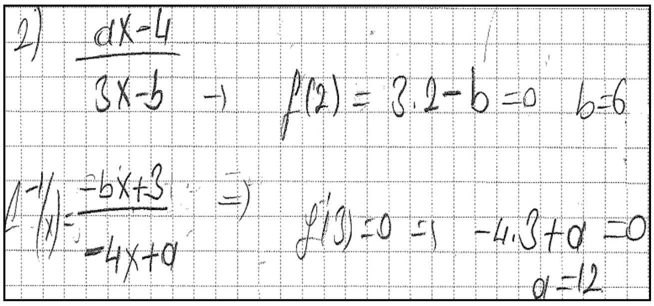
R_f12: f: R\{a}$\rightarrow$ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise a değeri fonksiyonun kendisini, b değeri ise fonksiyonun tersini tanımsız yapar,

R_f13: $\dfrac{x+a}{x+b}$ ifadesini, paydayı sıfır yapan x=-b değeri tanımsız yapar, olarak belirlenmiştir.



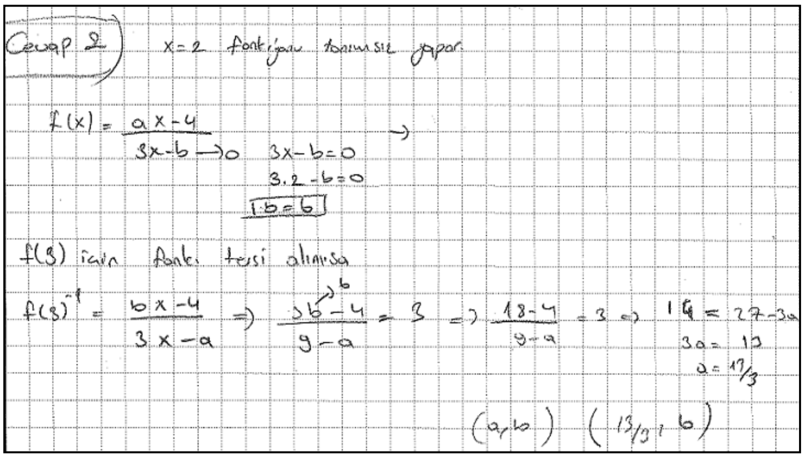
Şekil 164. Ö13’ün S_f2’ye verdiği cevap

R_f12, *R_f13* operatörlerini kullanan Ö1 ve Ö36, *R_f11* numaralı operatörü *hatalı* kullanarak fonksiyonun tersini yanlış bulmuş ve bu nedenle doğru sonuca ulaşamamışlardır (Bkz. Şekil 165).



Şekil 165. Ö1’in S_f2’ye verdiği cevap

Ö3 ise x=2 değerinin fonksiyonu tanımsız yapması gerektiğini düşünerek b değerini doğru olarak bulmuştur. R_f11 operatörünü kullanarak fonksiyonun tersini yazmayı başaran öğrenci $f^{-1}(3)$ ifadesinde b yerine bulduğu değeri yazarak ifadeyi 3'e eşitleyip a değerini bulmuştur (Bkz. Şekil 166). Bu nedenle kullandığı operatör; $R^{-}_{f}14$*: f:* $R\backslash\{-\frac{d}{c}\} \rightarrow R\backslash\{-\frac{a}{c}\}$ *olmak üzere* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *ise* $f^{-1}(-\frac{a}{c}) = -\frac{a}{c}$ *dir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 166. Ö3'ün S_f2'ye verdiği cevap

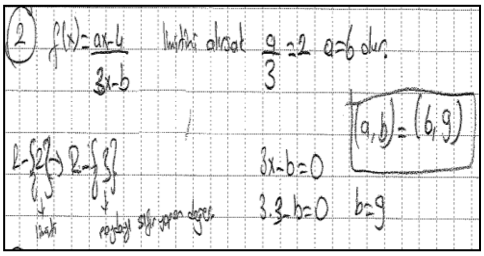
Ö7 ise, tanım kümesi dışında tutulan sayının fonksiyonun limiti, görüntü kümesi dışında tutulan sayının ise fonksiyonun paydasını sıfır yapan değer olduğunu belirtmiştir (Bkz. Şekil 167a). Bu nedenle öğrencinin $R^{-}_{f}15$*: f: R\{a}→ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise limf(x)=a dır ve b fonksiyonun paydasını sıfır yapar,* operatörünü kullandığı belirlenmiştir. Nitekim Ö7 kendisi ile yapılan mülakatta bu operatörü kullandığını doğrulamaktadır;

A: Bu limit nerden geldi?
Ö7: limit? (Sessizlik)
A: Nasıl bir bilgi var aklında, anlatır mısın?
Ö7: Nasıl bir bilgi. Şimdi dershanedeki hocamız bize şey demişti verilen 1. şey, reel ifade limitidir diye hatırlıyorum ben 2.si de paydayı sıfır yapan değerdir.
A: Yani demek istiyorsun ki tanım kümesi dışında tutulan eleman fonksiyonun limitine
Ö7: evet. 2.'si ise paydayı sıfır yapan değerdir.
A: Görüntü kümesinden hariç tutulan eleman ise fonksiyonun paydasını sıfır yapan değerdir.
Ö7: evet

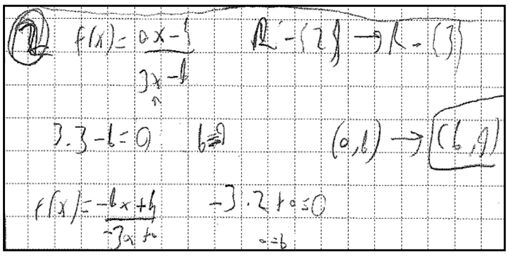
R_f11 ve R_f13 operatörlerini de kullanan Ö20 kodlu öğrenci, fonksiyonun tanım kümesi dışında tutulan sayının fonksiyonun tersini, görüntü kümesi dışında tutulan sayının ise fonksiyonu tanımsız yaptığı bilgisinden hareketle *R_f12* operatörünü *hatalı* kullandığı için doğru sonuca ulaşamamıştır (Bkz. Şekil 167b).

Benzer şekilde Ö51, Ö52 ve Ö56, tanım kümesi dışında tutulan sayının rasyonel olarak verilen fonksiyonun payını, görüntü kümesi dışında tutulan sayının ise paydasını sıfır yapacağını ifade ederek gerekli işlemleri yapmışlar ve hatalı sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 167c). Bu nedenle *R_f12* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir. Ö51 ile yapılan mülakat verileri aşağıda verilmiştir;

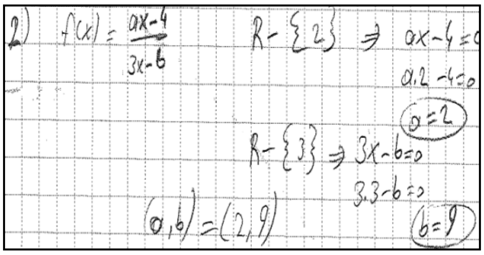
A: 2. soruda fonksiyonun R-{2} → R-{3} de tanımlı olması ne demektir?
Ö51: Bunlar tanımsız yapan değer değil mi?
A: Nereyi tanımsız yaparlar?
Ö51: İşte 1.si payı sıfır yapar. 2. si de paydayı sıfır yapar.



a. Ö7'nin cevabı



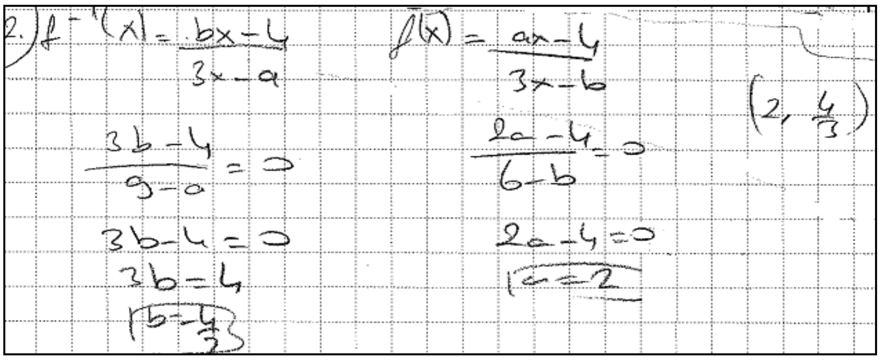
b. Ö20'nin cevabı



c. Ö51'in cevabı

Şekil 167. Öğrencilerin S_f2'ye verdikleri cevaplar

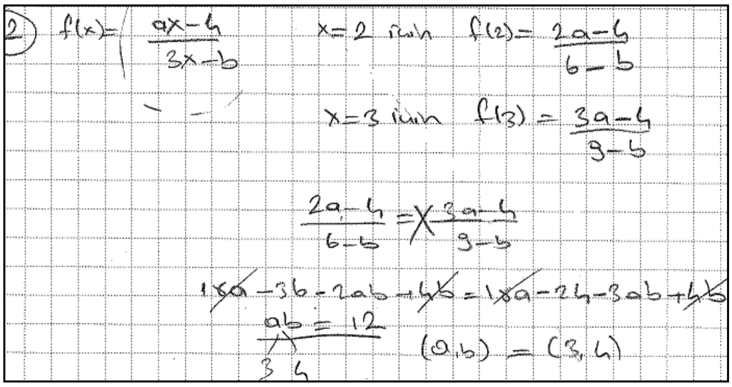
Ö22 ve Ö59'un ise *R_f11* ve *R_f12* operatörlerini kullandıkları ancak, a değerini bulmak için rasyonel olarak verilen fonksiyonun payını, b değerini bulmak için ise ters fonksiyonun payını sıfıra eşitledikleri için *R_f13* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir (Bkz. Şekil 168).



Şekil 168. Ö22’nin S_f2’ye verdiği cevap

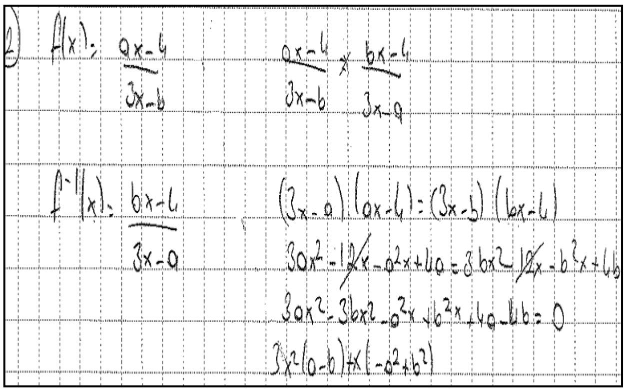
Ö50 kodlu öğrenci tanım kümesi dışında tutulan sayı ile görüntü kümesi dışında tutulan sayıyı fonksiyonda yerine yazarak birbirine eşitlerken (Bkz. Şekil 169), $R^{-}_{f}16$*: f: R\{ a }*$\rightarrow$*R\{ b } olmak a ve b fonksiyonu tanımsız yapar* ve $R^{-}_{f}17$*: Bir f fonksiyonunda a ve b fonksiyonu tanımsız yapan iki değer ise f(a)=f(b) dir*, operatörlerini kullandığı belirlenmiştir. Öğrenci yaptıklarını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

A: Neden bu değerleri fonksiyonda yerine yazıp eşitledin?
Ö50: İfade tanımsız oluyor.
A: Ne zaman tanımsız oluyor?
Ö50: 2 koyarsak paydayı sıfır yapıyor. O zaman tanımsız oluyor.
A: Evet.
Ö50: Birde 3 koyarsam tanımsız yapıyor.



Şekil 169. Ö50’nin S_f2’ye verdiği cevap

Ö60 kodlu öğrenci ilginç bir çözüm yolunu takip ederek, bir fonksiyonun birebir ve örten olmasının, fonksiyon ile tersinin eşit olması sonucunu doğurduğu bilgisini kabul ederek hatalı çözüm yapmıştır (Bkz. Şekil 170).



Şekil 170. Ö60'ın S_f2'ye verdiği cevap

Çözümden de görüldüğü gibi öğrencinin kullandığı operatör; *$R^{-}_{f}18$: Bir f fonksiyonu birebir ve örten ise $f = f^{-1}$ dir,* olarak belirlenmiştir.

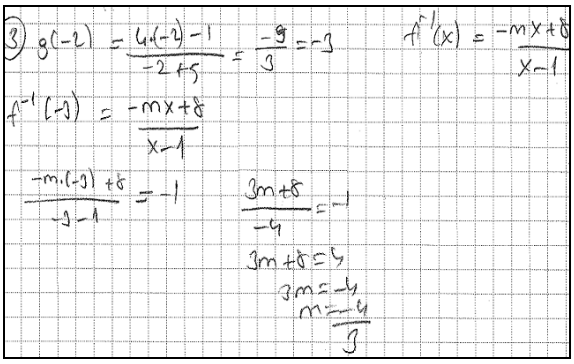
İkinci soruyla ilgili olarak Ö5, Ö27, Ö34, Ö37, Ö53 ve Ö55 kodlu öğrenciler soruya cevap vermedikleri, eksik çözüm yapan Ö17 ve Ö33 sadece a değerini buldukları, Ö10, Ö24 ve Ö61 ise anlamsız çözüm yaptıkları için kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Üçüncü soru ile ilgili olarak düzenlenen bulgulara bakıldığında 8 yeni operatör belirlendiği görülmektedir.

3.4.1.3. Üçüncü Soru

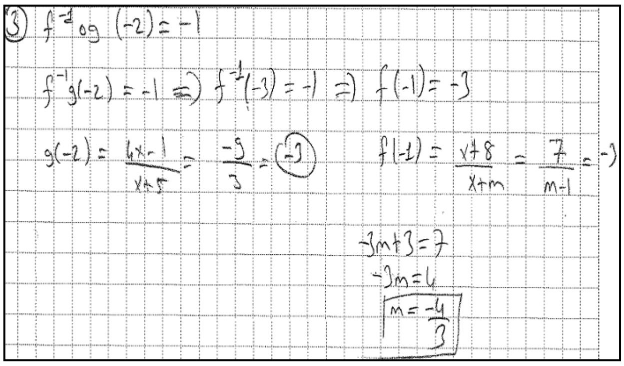
S_f3: $f(x) = \dfrac{x+8}{x+m}$, $g(x) = \dfrac{4x-1}{x+5}$ *iki fonksiyon ve* $(f^{-1} \circ g)(-2) = -1$ *ise m değeri kaçtır?*

Ö17 kodlu öğrenci soruya cevap vermezken, soruyu 48 öğrenci doğru, 8 öğrenci hatalı cevaplamışlardır. Soruyu doğru çözen öğrencilerden 20'si (Ö2, Ö3, Ö6, Ö8, Ö19, Ö25, Ö26, Ö28, Ö35, Ö39, Ö45, Ö48, Ö52-Ö56, Ö58, Ö60, Ö61) *R_f11* operatörünü kullanarak f fonksiyonunun tersini bulduktan sonra $f \circ g(x) = f(g(x))$ eşitliğinden yararlanarak doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 171). Bu nedenle *R_f19: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere,* $f \circ g(x) = f(g(x))$ *dir,* operatörünü de kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 171. Ö26'nın S_f3'e verdiği cevap

Soruya doğru cevap veren diğer 28 öğrenci (Ö1, Ö5, Ö7, Ö9-Ö12, Ö14, Ö21-Ö24, Ö29, Ö30, Ö32-Ö34, Ö37, Ö38, Ö40-Ö43, Ö46, Ö47, Ö49, Ö50, Ö59) ise yukarıdaki öğrencilerin kullandıkları operatörlere ek olarak *R_f20: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere,* $f^{-1}(x)=a$ ise $f(a)=x$ *dir*, operatörünü kullanmışlardır (Bkz. Şekil 172).

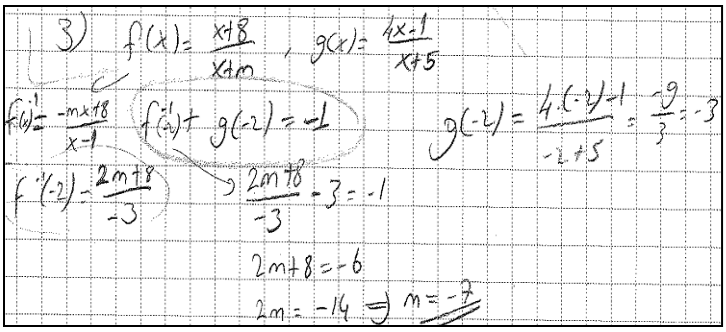


Şekil 172. Ö42'nin S_f3'e verdiği cevap

Ö4, Ö13, Ö20, Ö27, Ö36, Ö44 ve Ö57 kodlu öğrencilerin hata yapmasına f fonksiyonunun tersini yanlış bulmaları neden olmuştur. Bu nedenle *R_f11* operatörünü hatalı kullandıkları belirlenmiştir.

Soruyu hatalı çözen diğer öğrenci Ö51 ise $f^{-1}\circ g(-2)=f^{-1}(-2)+g(-2)$ şeklinde yani iki fonksiyonun bileşke işlemini bu fonksiyonların toplamı olarak yazdığı için yanlış sonuç bulmuştur (Bkz. Şekil 173). Bu nedenle kullandığı operatör; *R^-_f21: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere* $f\circ g$ *, f ve g arasında aritmetik işlemler yardımıyla tanımlanır,* olarak belirlenmiştir. Öğrenci mülakatta kullandığı operatörü aşağıdaki şekilde savunmuştur:

A: Burada bileşke işlemini toplam olarak mı parçaladın?
Ö51: Evet hocam.
A: Peki bu toplam olarak mı parçalanır?
Ö51: Hocam normalde bir örnekte böyle gördüm.
[…]
A: Yani senin için *(fog)(x) =f(x)+ g(x)* midir?
Ö51: Evet. Bileşke normalde toplam değil midir hocam.



Şekil 173. Ö51'in S_f3'e verdiği cevap

Öğrencilerin üçüncü soruda kullandıkları operatörlere bakıldığında 3 yeni operatörün belirlendiği ve R_f11 operatörünün tekrar kullanıldığı göze çarpmaktadır.

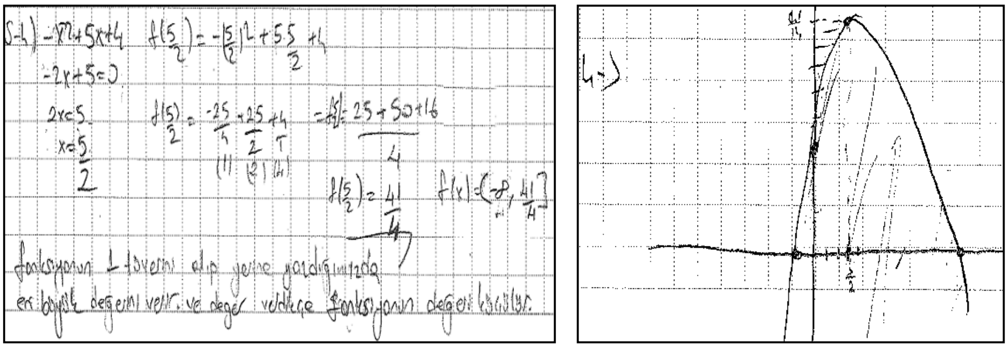
3.4.1.4. Dördüncü Soru

S_f4: $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ *fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.*

13 öğrencinin cevap vermediği dördüncü soru, 2 öğrenci tarafından doğru, 15 öğrenci tarafından hatalı ve 27 öğrenci tarafından eksik olarak cevaplanmıştır.

Soruyu doğru olarak cevaplayan öğrencilerden Ö37, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde verilen fonksiyon için f'(x_0)=0 olmak üzere (x_0, f '(x_0)) noktasının fonksiyonun maksimum noktası olacağını belirtmiştir (Bkz. Şekil 174a). Bu öğrencinin kullandığı operatörler; *R_f22: f: R→R, fonksiyonu için f'(x_0)=0 olmak üzere (x_0, f '(x_0)) fonksiyonun maksimum noktası dır* ve *R_f23: f: R→R,* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *fonksiyonunun görüntü kümesi* $[-\infty, f(-\frac{b}{2a})]$ *dır,* olarak belirlenmiştir.

Ö32 kodlu öğrenci ise fonksiyonun belirttiği grafiği çizerek, grafiğin tepe noktası altında kalan bölgeyi taramıştır (Bkz. Şekil 174b). Bu öğrencinin *R_f23* operatörünü kullandığı görülmektedir.



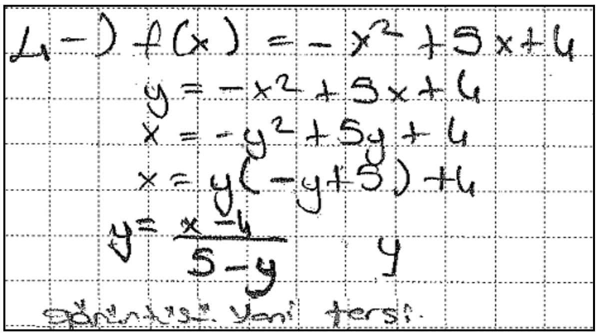
a. Ö37'nin cevabı b. Ö32'nin cevabı

Şekil 174. Öğrencilerin S_f4'e verdikleri cevaplar

Soruya eksik cevap veren 26 öğrenci (Ö1, Ö4, Ö6, Ö7, Ö11-Ö14, Ö19-Ö21, Ö23, Ö24, Ö26, Ö28-Ö30, Ö34, Ö41, Ö45, Ö50, Ö52, Ö54, Ö56, Ö59 ve Ö60) f(x) fonksiyonunda x'e çeşitli değerler vererek y değerlerini bulmuşlardır. Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; *R_f24:Bir f(x) fonksiyonun değer kümesi x değişkenine değerler verilerek bulunur,* olarak belirlenmiştir. Ö26 x'e neden değerler verdiğini aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

Ö26: Dedim ki hani x değerine hani bir doğru çizer gibi değerler verip bir değeri y buluyoruz ya
A: Hıhı
Ö26: hani onun gibi değerler bulmayı düşündüm.
A: Hımm
Ö26: Sonra düşündüm. Kaça kadar verebilirim dedim sonra hani birkaç tane verdim.
A: Sonuçta sen x değerine karşılık y'leri bulmaya çalışmışsın
Ö26: Evet. Onu aradım. Görüntü kümesini istiyor ya.

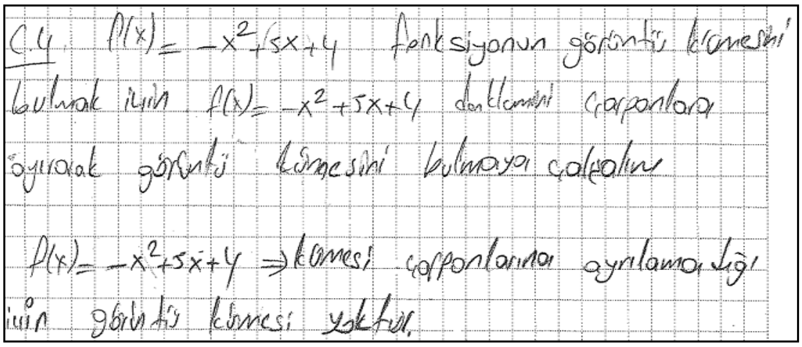
Soruyu hatalı çözen öğrencilerden Ö9 ve Ö38 bir fonksiyonun görüntü kümesini bulmanın aslında fonksiyonun tersini bulmak olduğunu ifade ettiklerinden (Bkz Şekil 175) kullandıkları operatör; *R^{-}_{f}25: Bir fonksiyonun görüntü kümesi tersidir,* şeklinde belirlenmiştir.



$$4-)\ f(x) = -x^2+5x+4$$
$$y = -x^2+5x+4$$
$$x = -y^2+5y+4$$
$$x = y(-y+5)+4$$
$$y = \frac{x-4}{5-y} \qquad y$$
görüntüsü. Yani tersi.

Şekil 175. Ö38'in S_f4'e verdiği cevap

Ö17, Ö35, Ö42, Ö46, Ö48, Ö49 ve Ö55 görüntü kümesi ile fonksiyonun köklerini ilişkilendirdikleri için hata yapmışlardır (Bkz. Şekil 176). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör R^{-}_{f}*26: Bir fonksiyonun kökleri görüntü kümesini oluşturur*, olarak belirlenmiştir. Ö35, mülakatta araştırmacının "*görüntü kümesi demek, ifadenin kökleri mi demek*" sorusuna "*evet, x'i sağlayan değerler*" şeklinde cevap verirken Ö46 ise "*bir fonksiyon çarpanlarına ayrılmıyorsa görüntü kümesi yok mudur*?" sorusuna "*yoktur*" şeklinde cevap vererek kullandıkları operatörü doğrulamışlardır.



C.4 $f(x) = -x^2+5x+4$ fonksiyonun görüntü kümesini bulmak için $f(x) = -x^2+5x+4$ denklemini çarpanlara ayırarak görüntü kümesini bulmaya çalışırım

$f(x) = -x^2+5x+4 \Rightarrow$ kümesi çarpanlarına ayrılamadığı için görüntü kümesi yoktur.

Şekil 176. Ö17'nin S_f4'e verdiği cevap

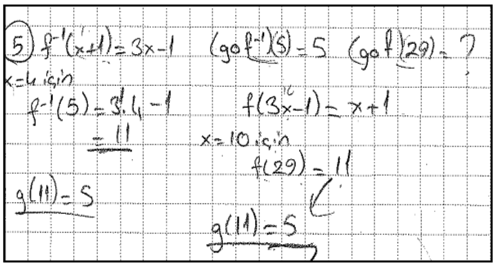
Dördüncü soruyla ilgili olarak Ö5, Ö8, Ö10, Ö22, Ö25, Ö27, Ö33, Ö36, Ö47, Ö51, Ö53, Ö58 ve Ö61 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Ö2, Ö3, Ö39, Ö40, Ö43 ve Ö44 kodlu fonksiyonun belirttiği grafiğin tepe noktasının ve x eksenini kestiği noktaların koordinatlarını bulmuşlar, başka bir işlem yapmamışlardır. Ö57 ise, "fonksiyonun x değerleri bulunur ve yerine yazılarak y değerleri bulunur" şeklinde bir açıklama yaparak çözümü eksik şekilde bırakmıştır. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

Öğrencilerin soruya verdikleri cevaplardan elde edilen operatörler incelendiğinde 5 yeni operatörün kullanıldığı görülmektedir.

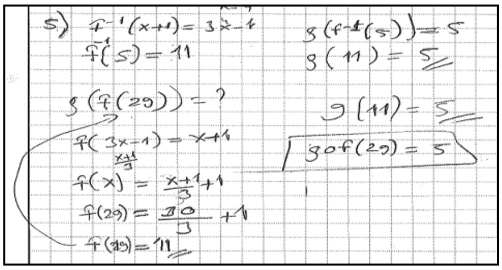
3.4.1.5. Beşinci Soru

S_f5: $f^{-1}(x+1)=3x-1$ *ve* $(gof^{-1})(5)=5$ *ise* $(gof)(29)$ *değeri kaçtır?*

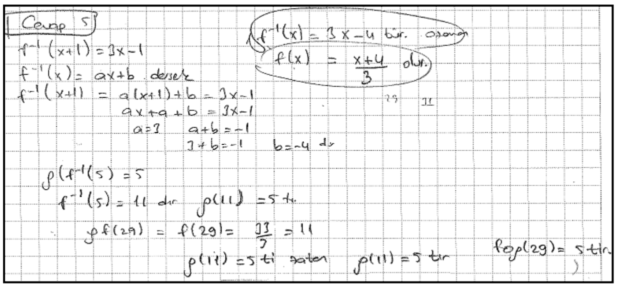
Bu soruya 55 öğrenci doğru, 2 öğrenci hatalı cevap vermişlerdir. Soruya doğru cevap veren 55 öğrenciden 41'i (Ö2, Ö4, Ö6-Ö14, Ö20, Ö22, Ö24-Ö27, Ö29, Ö30, Ö32-Ö35, Ö38-Ö46, Ö48-Ö50, Ö52, Ö55, Ö57-Ö60) g ve f fonksiyonlarına ait cebirsel ifadeleri bulmadan, x'e uygun sayı değerleri vererek doğrudan sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 177a). Bu öğrenciler *R_f19* ve *R_f20* operatörlerinin yanı sıra *R_f27: $f(ax+b)=cx+d$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu için $ax_0+b=e$ olmak üzere $f(e)=f(x_0)$ dır,* operatörünü de kullanmışlardır.



a. 25'in cevabı



b. Ö23'ün cevabı



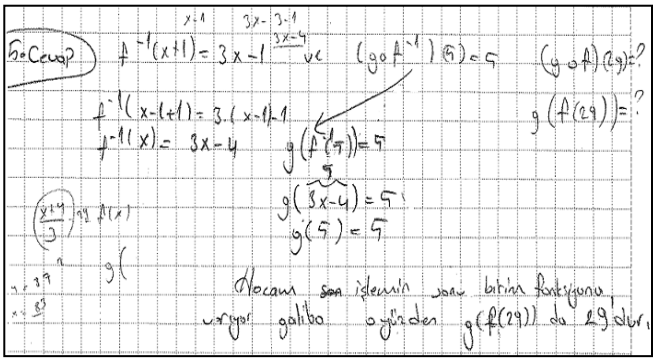
c. Ö53'ün cevabı

Şekil 177. Öğrencilerin S_f5'e verdikleri cevaplar

Soruya doğru cevap veren diğer 14 öğrenci (Ö1, Ö5, Ö19, Ö21, Ö23, Ö28, Ö36, Ö37, Ö47, Ö51, Ö53, Ö54, Ö56 ve Ö61) ise f fonksiyonuna ait olan cebirsel ifadeyi bularak, *gof* fonksiyonunda yerine yazmak suretiyle istenen ifadeyi bulmuşlardır (Bkz.

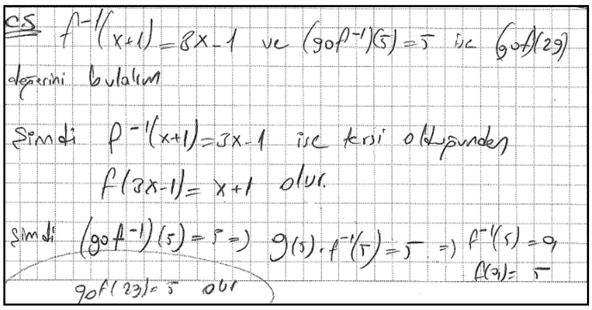
Şekil 177b). Bu öğrencilerin de *R_f19* ve *R_f20* operatörlerinin yanı sıra *R_f11* operatörünü kullandıkları tespit edilmiştir. Ö53 ayrıca f(x) fonksiyonunu doğrusal fonksiyon olmasından yola çıkmış ve *f(x)=ax+b* formundan yararlanarak ters fonksiyonu bulmuştur. (Bkz. Şekil 177c). Bu nedenle farklı olarak *R_f28:Bir fonksiyon doğrusal ise tersi de doğrusaldır*, operatöründen de yararlandığı görülmektedir.

Soruya hatalı cevap veren Ö3 kodlu öğrenci g(5) değerini 5 olarak bulduğu için bu fonksiyonun birim fonksiyon olduğunu belirtmiştir (Bkz. Şekil 178). Bu nedenle kullandığı operatör; *R^-_f29: Herhangi bir a değeri için f(a)=a ise f birim fonksiyondur,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 178. Ö3'ün S_f5'e verdiği cevap

Ö17'nin *R_f20* operatörünün yanı sıra $f \circ g(x) = f(x).g(x)$ olarak aldığı görülmektedir (Bkz. Şekil 179). Bu nedenle *R^-_f21* operatörünü kullandığı belirlenmiştir.



Şekil 179. Ö17'nin S_f5'e verdiği cevap

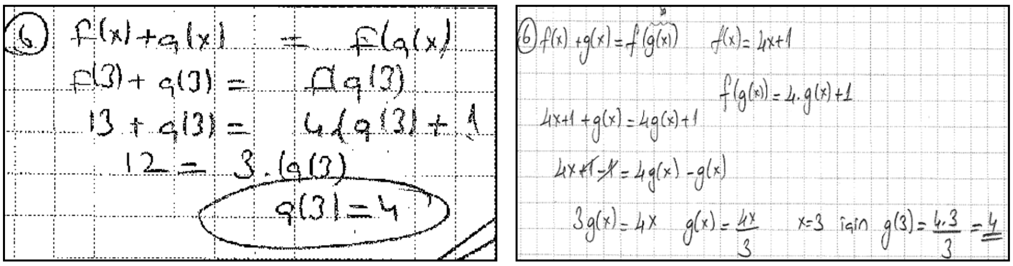
4. soru ile ilgili olarak öğrencilerin 3 yeni operatörün yanı sıra, R_f11, R_f19, R_f20 ve R^-_f21 operatörlerini tekrar kullandıkları görülmektedir.

3.4.1.6. Altıncı Soru

S$_f$6: $f(x) + g(x) = f \circ g(x)$ *ve* $f(x) = 4x + 1$ *olduğuna göre g(3) kaçtır?*

Altıncı soruya 52 öğrenci doğru olarak cevap verirken, 4 öğrenci ise hatalı cevap vermişlerdir. Diğer 1 öğrenci ise soruyu yanıtlamamıştır.

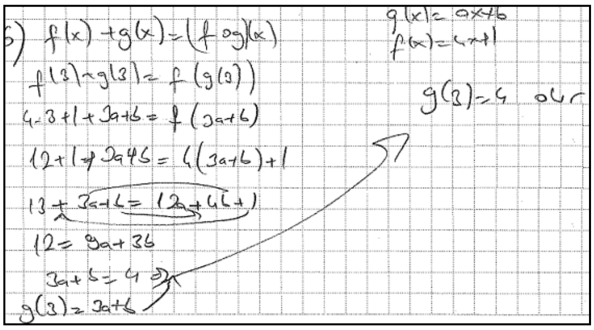
Soruya doğru cevap veren öğrencilerden 32'si (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö13, Ö14, Ö24-Ö27, Ö29, Ö32, Ö34, Ö35, Ö37, Ö41, Ö42, Ö44-Ö49, Ö51, Ö52, Ö54, Ö56, Ö58-Ö60) x'in uygun değerini yerine yazarak istenen değeri bulmuşlardır (Bkz. Şekil 180a). Bu öğrencilerin, *R$_f$19* ve *R$_f$27* operatörlerinin yanı sıra *R$_f$30:* $f(x) = ax + b$ *ise* $f \circ g(x) = f(g(x)) = a.g(x) + b$ *dir,* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



a. Ö29'un cevabı
b. Ö30'un cevabı

Şekil 180. Öğrencilerin S$_f$6'ya verdikleri cevaplar

Soruyu doğru olarak çözen öğrencilerden 20'si (Ö3, Ö6, Ö9, Ö10, Ö11, Ö19-Ö23, Ö28, Ö30, Ö33, Ö38, Ö39, Ö40, Ö43, Ö50, Ö53 ve Ö61) ise yukarıdaki öğrencilerden farklı olarak verilen ifadede f(x) fonksiyonunu yerine yazıp g(x) fonksiyonunun kuralını bulduktan sonra g(3) değerine ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 180b). Ö10, Ö19 ve Ö53 ayrıca g(x) fonksiyonunu doğrusal fonksiyon olarak düşünerek, doğrusal fonksiyonun genel formundan yararlanmışlardır (Bkz. Şekil 181). Bu nedenle *R$_f$30* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

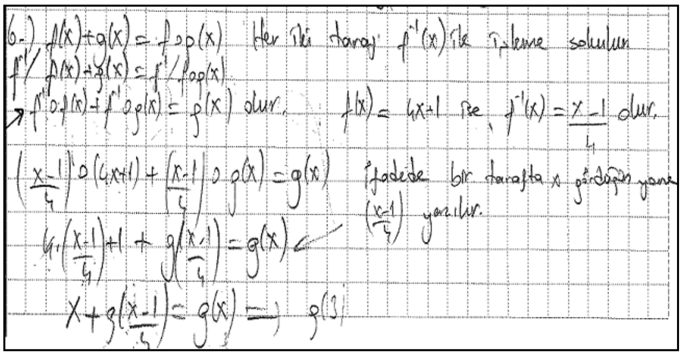


Şekil 181. Ö10'un S_f6'ya verdiği cevap

Ö17 kodlu öğrenci ise $f(x)+g(x)=f\circ g(x)$ ise *f(x)=g(x)* olacağını kabul ederek çözümü gerçekleştirmiştir. Bu öğrencinin, fonksiyonların özel durumunu dikkate aldığı için *R_f31: Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşılır,* operatörünü *hatalı* kullandığı belirlenmiştir.

Ö57 ise g(x) fonksiyonunu bulmak için $f^{-1}(x)$ fonksiyonu ile eşitliğin her iki tarafını soldan bileşke işlemine sokmuştur. Bileşke işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu düşündüğü için hata yapmıştır (Bkz. Şekil 182). Bu öğrencinin kullandığı operatör; *R^-_f32:* $f^{-1}\circ(f(x)+g(x))=f^{-1}\circ f(x)+f^{-1}\circ g(x)$ *dir,* olarak belirlenmiştir. Öğrenci çözümünü aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

A: Bunu acaba şundan mı düşündün? Bileşkenin toplama üzerine dağılma özelliği
Ö57: ya öyle düşündüm, ben zaten tek tek dağıtmışım yani dikkatinizi çekerim



Şekil 182. Ö57'nin S_f6'ya verdiği cevap

Altıncı soruyla ilgili olarak Ö36 kodlu öğrenci soruya cevap vermezken, ilgisiz çözüm yapan öğrencilerden Ö12 ve Ö55 kodlu öğrenciler g(x) fonksiyonu istendiği halde f(x) fonksiyonunu bulmuşlardır. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

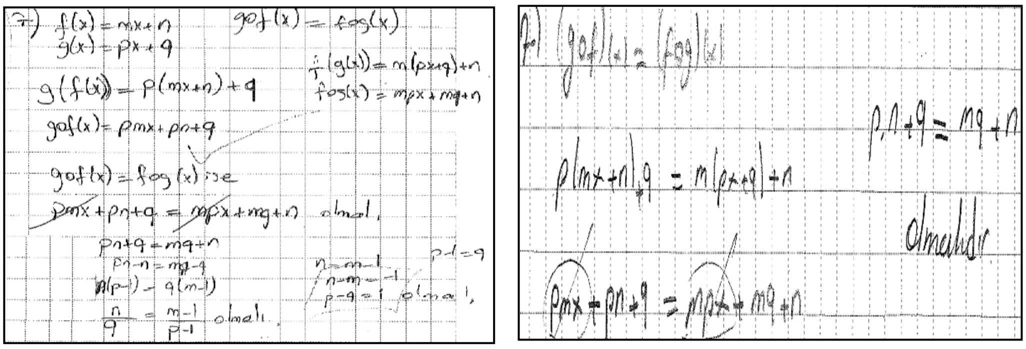
Soru ile ilgili bulgular, öğrencilerin 3 yeni operatörün yanı sıra *R_f19 ve R_f27* operatörlerini kullandıklarını göstermektedir.

3.4.1.7. Yedinci Soru

S_f7: *m, n, p ve q* $\in R$, $f(x) = mx + n$ *ve* $g(x) = px + q$ *ise* $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ *denkleminin bir çözümünün olabilmesi için m, n, p ve q arasında nasıl bir ilişki olmalıdır?*

Bu soruya 29 öğrenci doğru, 15 öğrenci hatalı, 7 öğrenci eksik cevap verirken, 6 öğrenci soruya cevap vermemişlerdir.

Soruya *R_f19 ve R_f30* operatörlerini kullanarak doğru cevap veren öğrencilerden (Ö1-Ö4, Ö6, Ö10, Ö12-Ö14, Ö19, Ö26-Ö28, Ö30, Ö32, Ö33, Ö34, Ö35, Ö40-Ö42, Ö44, Ö50, Ö52, Ö53, Ö56, Ö59, Ö60 ve Ö61) bazıları istenen ilişkiyi en sade şekilde bulurken (Bkz. Şekil 183a) bazıları ise pn+q=mq+n eşitliğini yazmakla yetinmişlerdir (Bkz. Şekil 183b).

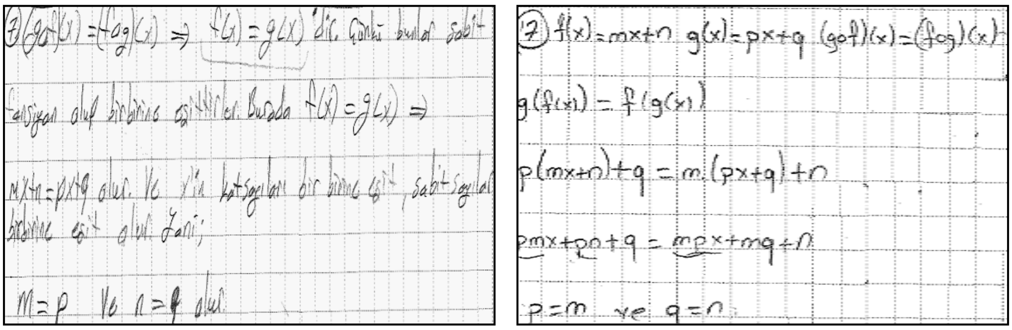


a. Ö44'ün cevabı　　b. Ö33'ün cevabı

Şekil 183. Öğrencilerin S_f7'ye verdikleri cevaplar

Bazı öğrenciler istenen ilişkiyi genel olarak ifade etmek yerine, eşitliği sağlayan özel bir durumdan yararlanarak çözümü gerçekleştirmişledir. Bu öğrencilerden Ö8, Ö9, Ö11, Ö23, Ö43, Ö46, Ö49 ve Ö58 kodlu olanlar, iki fonksiyonun bileşke işleminin değişme özelliği olabilmesi için fonksiyonların eşit olmaları gerektiğini düşünerek çözümü gerçekleştirmişlerdir (Bkz. Şekil 184a). Ö20, Ö22, Ö25, Ö36, Ö37, Ö38 ve Ö47 eşitliği daha özel bir duruma indirgeyerek $pn + q = qm + n$ ise $m = p$ ve $n = q$ olması gerektiğini belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 184b). Bu öğrencilerin *R_f31* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir. Ö11 çözümünde fonksiyonları birbirine eşit olarak aldığını şu cümlelerle ifade etmiştir:

> A: 7.soruda demişsin ki g(f(x)) = f(g(x)) e olabilmesi için f(x) deki ve g(x) de ki n ve q sıfır olmalı ancak m ve p aynı olmalıdır. Ne düşündün?
> Ö11: Orada hocam ben f fonksiyonu ile g fonksiyonunu eşitlemeye çalıştım.
> A: Yani f(x)=g(x) midir?
> Ö11: O şekilde yapmışım ve sağlamasını yapmamışım.



a. Ö8'in cevabı b. Ö25'in cevabı

Şekil 184. Öğrencilerin S_f7'ye verdikleri cevaplar

Dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülen hataları nedeniyle Ö7, Ö29 ve Ö57 hatalı sonuca ulaşmışlardır. Bu öğrenciler fonksiyonlardaki x değerlerini yerine yazarken asıl fonksiyondaki sabit sayıyı almamışlar ya da almayı unutmuşlardır.

Ö5, Ö17, Ö39, Ö48, Ö51 ve Ö55 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken bazı anlamsız çözümler; hiçbir açıklama yapmadan doğrudan p=m=q=n olması gerektiğini ifade etme (Ö21), p≠m olması gerektiğini belirtme (Ö54), f(x) ve g(x) in birbirlerine hangi noktada eşit oldukları bilinemediği için bu ilişkinin bulunamayacağını ifade etme (Ö24) ve soruda verilmesine rağmen $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ eşitliğinin olamayacağını ifade etme (Ö45) şeklinde belirlenmişlerdir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

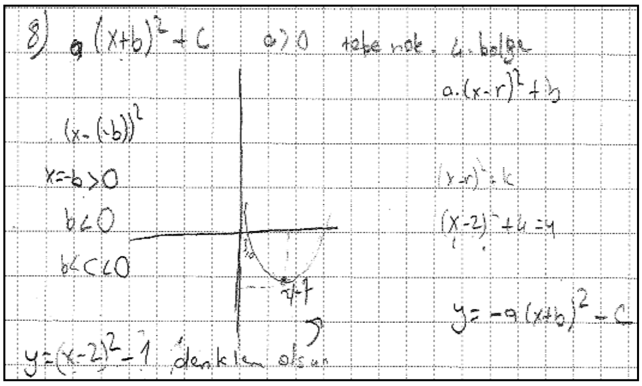
Yedinci soru ile ilgili olarak öğrencilerin önceki sorularda kullanılan R_f19, R_f30 ve R_f31 operatörlerini tekrar kullandıkları görülmektedir.

3.4.1.8. Sekizinci Soru

S_f8: $y = a(x+b)^2 + c$ *için* $a, b, c \in R$ *ve a>0 dır. Bu parabolün tepe noktası IV. bölgede ise* $y = -a(x+b)^2 - c$ *parabolünün tepe noktası hangi bölgededir? Neden?*

4 öğrencinin cevap vermediği, 25 öğrencinin doğru ve 25 öğrencinin hatalı olarak cevapladıkları sekizinci soru, 3 öğrenci tarafından eksik olarak yanıtlanmıştır.

Öğrencilerin cevapları incelendiğinde Ö2 ve Ö40 verilen genel durumu sağlayan özel değerleri kullanarak doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 185). Bu *R_f31* operatöründen yararlandıkları belirlenmiştir.



Şekil 185. Ö2'nin S_f8'e verdiği cevap

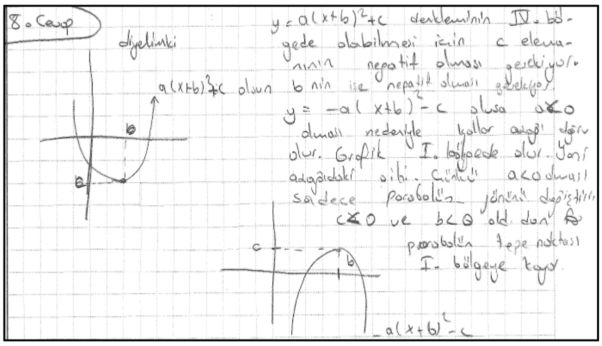
Ö3, Ö5, Ö6, Ö12, Ö20, Ö33, Ö38, Ö42, Ö43, Ö52, Ö60 ve Ö61 kodlu öğrenciler öncelikle verilen fonksiyonun belirttiği parabolü analiz ederek; a, b ve c değerlerinin işaretlerini belirlemişlerdir. İkinci durumda ise birinci durumda elde ettikleri verileri kullanarak sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 186). Çözümde de görüldüğü gibi öğrencilerin kullandıkları operatörler;

R_f33: $y = a(x+b)^2 + c$ *denklemli parabolün tepe noktası (-b, c) dir,*

R_f34: (a, b) noktası IV. bölgede ise a>0 ve b<0 dır,

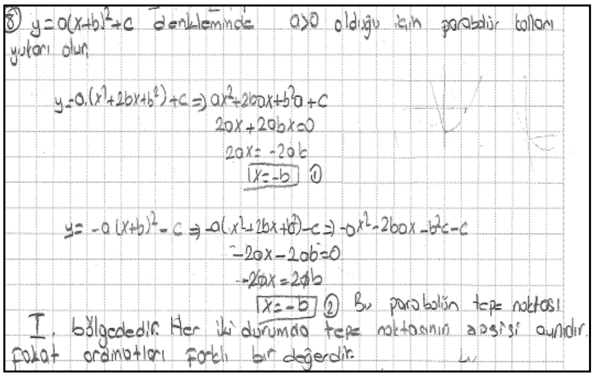
R_f35: $y = a(x+b)^2 + c$ *parabolün tepe noktası IV. bölgede ise* $y = -a(x+b)^2 - c$ *parabolünün tepe noktası I. Bölgededir,*

olarak belirlenmiştir.



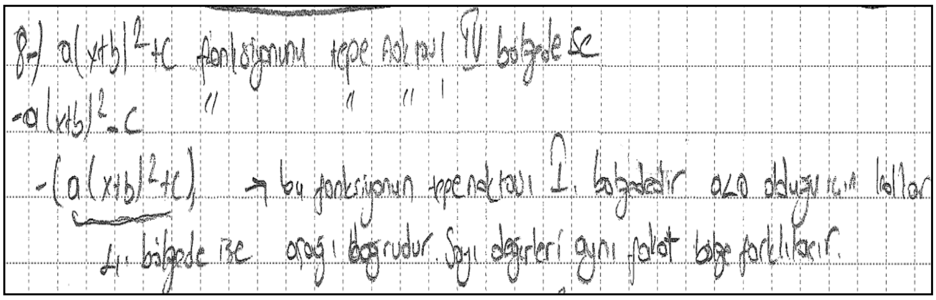
Şekil 186. Ö3'ün S_f8'e verdiği cevap

Soruya doğru cevap veren öğrencilerden Ö27, Ö32 ve Ö47 $y = a(x-r)^2 + k$ formunda verilen fonksiyonu $y = ax^2 + bx + c$ formuna getirdikten sonra b ve c değerlerini analiz etmişlerdir (Bkz. Şekil 187). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör *R_f36: $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktasının apsisi $-\dfrac{b}{2a}$ dır*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 187. Ö47'nin S_f8'e verdiği cevap

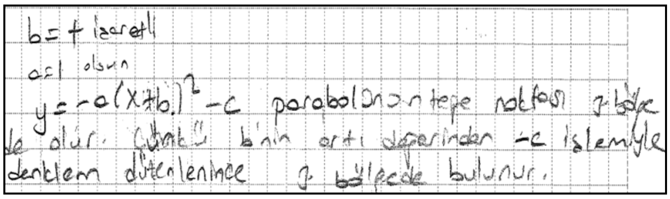
Ö10, Ö34, Ö36, Ö46, Ö51, Ö54, Ö56 ve Ö57 ise fonksiyonların denklemlerini inceleyerek, ilk parabolün ikinci parabole dönüşebilmesi için bu parabole ait denklemin – ile çarpılması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu nedenle yeni parabolün tepe noktasının birinci bölgeye geçeceğini ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 188). Bu nedenle öğrencilerin *R_f33* ve *R_f34* operatörlerini kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 188. Ö36'nın S_f8'e verdiği cevap

Soruya yanlış cevap veren öğrencilerden Ö1, Ö4, Ö14, Ö22, Ö25, Ö26, Ö28, Ö29, Ö44, Ö45, Ö48, Ö53 ve Ö58; $y = a(x+b)^2 + c$ parabolünün tepe noktasının 4. bölgede olması bilgisini kullanmadan doğrudan $y = -a(x+b)^2 - c$ parabolünün tepe noktasının hangi bölgede olduğunu bulmuşlardır (Bkz. Şekil 189). Verilen durumu dikkate almadan, doğrudan istenen durumu bulmaya çalışan bu öğrencilerin; *R^-_f37: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme,* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir. Ö26 mülakatta verilen durumu dikkate almadığını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

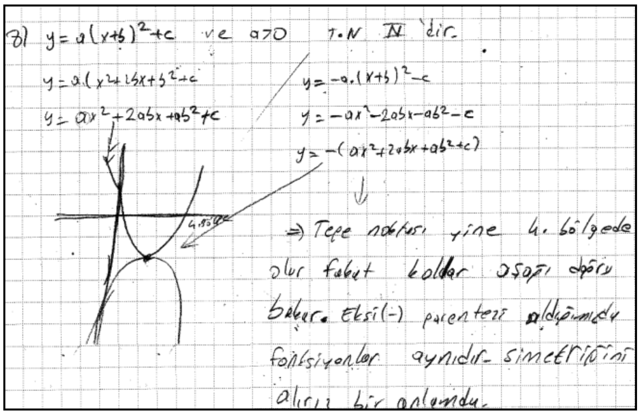
A: Parabolün tepe noktasının 3. Bölgede olduğunu nerden buldun?
Ö26: $y = -a(x+b)^2 - c$ vermiş, hani şu artı b den dolayı direk 3. Bölge.
A: (x+b) den birinci bileşen –b, ve ikinci bileşen de –c olunca, tepe noktası 3. bölgede olur dedin
Ö26: Evet direk ondan 3. bölgede olur diye düşündüm.
A: Yani ilk verilen fonksiyondan bağımsız düşündün o zaman
Ö26: Evet



Şekil 189. Ö26'nın S_f8'e verdiği cevap

Ö19, Ö24 ve Ö59 ise ilk cebirsel ifadenin eksi ile çarpılarak ikinci cebirsel ifadeye ulaşılacağını görmelerine rağmen, bu değişimin ilk parabolün kollarının yönünü değiştireceğini ve tepe noktasında herhangi bir değişme olmayacağını ifade etmişlerdir (Bkz. Şekil 190). Bu nedenle kullandıkları operatör; *R^-_f38:* $y = a(x+b)^2 + c$ *ile*

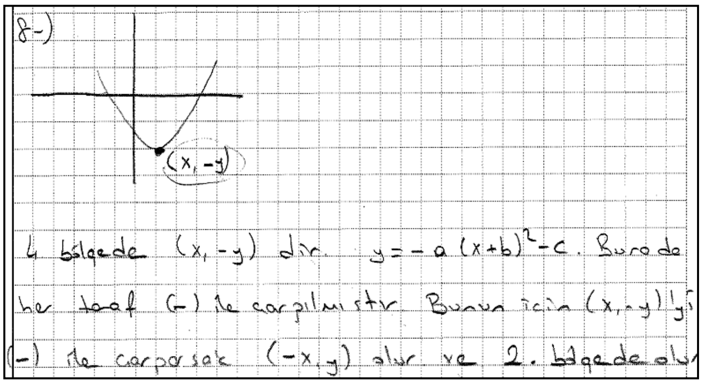
$y = -a(x+b)^2 - c$ *parabollerinin tepe noktaları aynı kolları zıt yönlüdür,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 190. Ö24'ün S_f8'e verdiği cevap

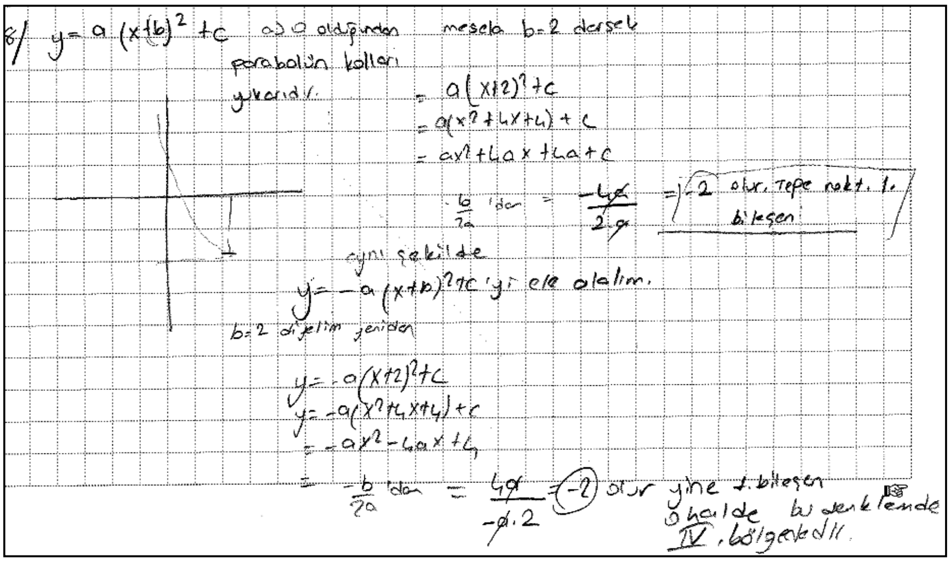
Ö7, Ö21, Ö23 ve Ö30 yukarıdaki öğrenciler gibi cebirsel ifadeler arasındaki ilişkiyi belirlemiş ancak bir parabole ait cebirsel ifade eksi ile çarpılırsa, bu parabolün tepe noktasının koordinatlarının da eksi ile çarpılacağı bilgisini kullanarak hatalı sonuç bulmuşlardır (Bkz. Şekil 191). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; $R^-_f 39$*: y=f(x) parabolün tepe noktası (b, c) ise y = -f(x) parabolününki (-b, -c) dir,* olarak belirlenmiştir. Ö7 kullandığı belirlenen operatörü aşağıdaki ifadelerle doğrulamaktadır:

A: Demişşin ki 2. Bölge işaret bakımından 4. Bölgenin tam tersidir. Verdiğimiz paraboller işaret bakımından birbirinin tersidir. Şöyle anladım ben y şurada eksi ile çarpıldığı için
Ö7: Evet
A: Tepe noktası da 4. Bölgeden koordinatların eksi ile çarparım 2. Bölgeye taşırım tamamen tersi.
Ö7: Hıhı öyle geldi zaten aklıma, öyle yaptım ben de.
A: Yani parabolün denklemini eksi ile çarparsam tepe noktasının koordinatları da aynı şekilde eksi ile çarpılır. Tamamen zıt olurlar, şeklinde bir bilgi kullanmış mı oldun?
Ö7: Evet.



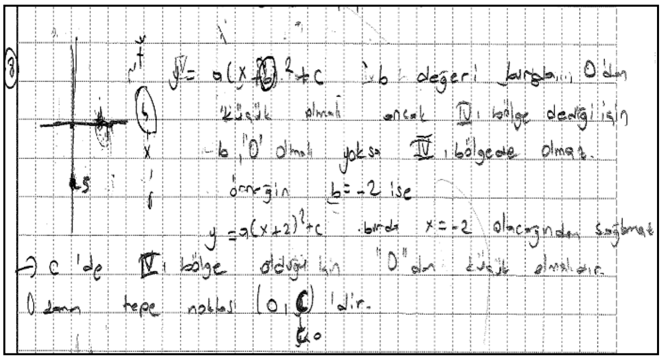
Şekil 191. Ö21'in S_f8'e verdiği cevap

Ö9 koldu öğrenci ise $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna ait parabolün tepe noktasının yerinin, bu noktanın apsisi yani $-\dfrac{b}{2a}$ değerine bağlı olduğunu ve apsis değişmediği için tepe noktasının da değişmeyeceğini ifade etmiştir (Bkz. Şekil 192). O halde kullandığı operatör; $R^{-}_{f}40$: *(b, c) noktasının koordinat düzlemimdeki yerini apsisi belirler*, olarak belirlenmiştir.



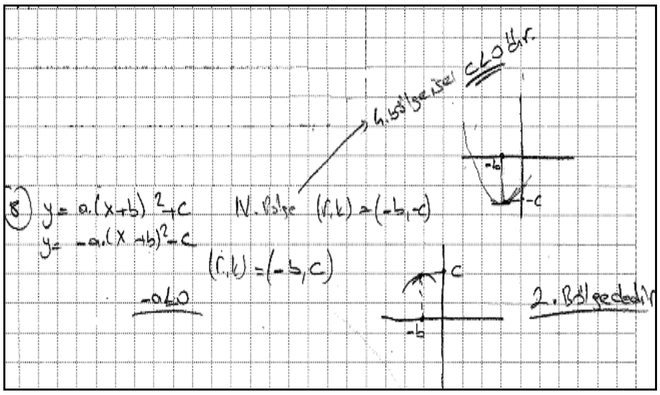
Şekil 192. Ö9'un S_f8'e verdiği cevap

Ö11 kodlu öğrenci ise soruyu doğru çözmesine rağmen *bir noktanın dördüncü bölgede olması için birinci bileşeninin sıfır olması gerektiği* bilgisini kullanmıştır. Nitekim çözümde de (Bkz. Şekil 193) görüldüğü gibi $y = a(x+b)^2 + c$ fonksiyonuna ait parabolü dördüncü bölgede olması için b değerinin 0 olması gerektiğini savunmuştur. Aynı mantıkla (0, c) c>0, noktasının da birinci bölgede olacağını belirtmiştir. Bu öğrencinin R^{-}_{f}*41: Koordinat sisteminde (0,a) noktası birinci bölgede, (0,-a) noktası dördüncü bölgededir,* operatörünü kullandığı söylenebilir.



Şekil 193. Ö11'in S_f8'e verdiği cevap

Ö13 ve Ö50 çizimi doğru yapmalarına rağmen, Ö13, I. ve II. bölgeyi karıştırdığı, Ö50 ise 4. bölgede olması gereken parabolü 3. bölgede göstererek bu duruma göre çözüm yaptığı için hatalı sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 194). Bu nedenle kullandıkları operatör; R^{-}_{f}*42: Koordinat sisteminin düzlemde ayırdığı bölgeleri karıştırma,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 194. Ö50'nin S_f8'e verdiği cevap

Sekizinci soruyla ilgili olarak Ö17, Ö35, Ö49,Ö55 koldu olan öğrenciler soruya cevap vermezken, eksik çözüm yapan Ö8 ve Ö37 kodlu öğrenciler verilen ilk durumu açıklamakla yetinmişlerdir. Ö41 verilen ve istenen parabolün grafiğini çizmekle yetinirken, Ö39 ise $y = -a(x+b)^2 - c$; c<0 olduğu için kökler çarpımı negatif, köklerden biri (-), diğeri (+) ve kollar da aşağı doğru olacağından tepe noktasının 2. bölgede olacağını ifade etmiştir. Burada öğrencinin neye dayanarak kökler çarpımının negatif olduğunu bulduğu anlaşılamamıştır. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

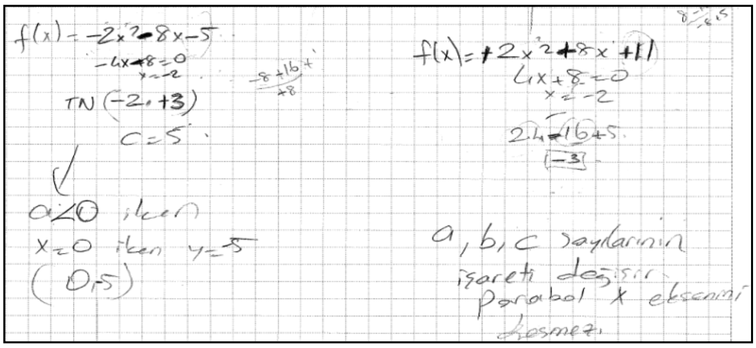
Öğrencilerin sekizinci soruda 10 yeni operatörün yanı sıra önceki sorularda da kullanılan R_f31 operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

3.4.1.9. Dokuzuncu Soru

S_f9: *Tepe noktası ikinci bölgede olan ve x eksenini iki noktada kesen bir parabolü tepe noktası üzerinde 180 derece döndürdüğümüz zaman oluşacak parabole ait cebirsel ifadeyi* $f(x)=ax^2+bx+c$ *formunda yazdığınızda a, b ve c sayılarındaki değişim için ne söyleyebilirsiniz.*

Öğrencilerin doğru cevabı bulmakta zorlandığı sorular arasında yer alan bu soruya tam olarak doğru cevap veren öğrenci bulunmamaktadır. İlk parabolün tepe noktası üzerinde 180 derece döndüğünde tepe noktasının yerinin değişmeyeceğini belirten ya da bu şekilde çizim yapan Ö2, Ö3, Ö5, Ö22, Ö28, Ö30, Ö32, Ö33, Ö38, Ö44, Ö50, Ö52, Ö55, Ö56 ve Ö61 kodlu öğrencilerin cevapları doğru olarak kabul edilmiştir. Bu öğrencilerin hepsinin ortak olarak kullandıkları operatör; *R_f43: Bir parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse tepe noktasının yeri değişmez*, olarak belirlenmiştir.

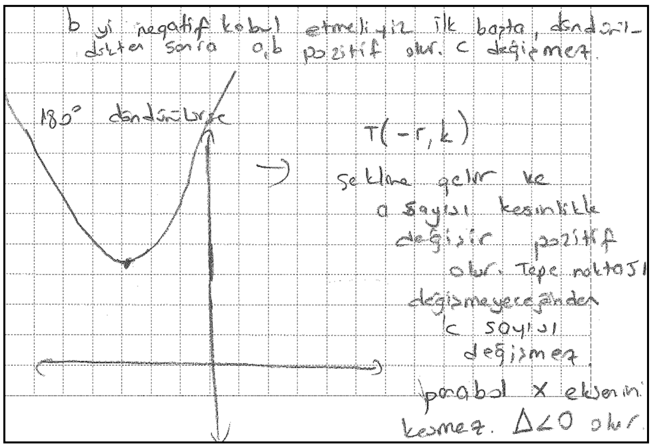
Bu öğrencilerden bazıları ayrıca incelendiklerinde; Ö2, Ö5 ve Ö44'ün verilen şartı sağlayan bir fonksiyon belirleyerek, bu fonksiyon üzerinden işlem yaptıkları, başka bir ifadeyle verilen cebirsel ifadedeki a, b ve c'ye uygun değer vererek oluşturdukları fonksiyonu kullandıkları görülmektedir (Bkz. Şekil 195). Bu nedenle *R_f32* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 195. Ö44’ün S_f9’a verdiği cevap

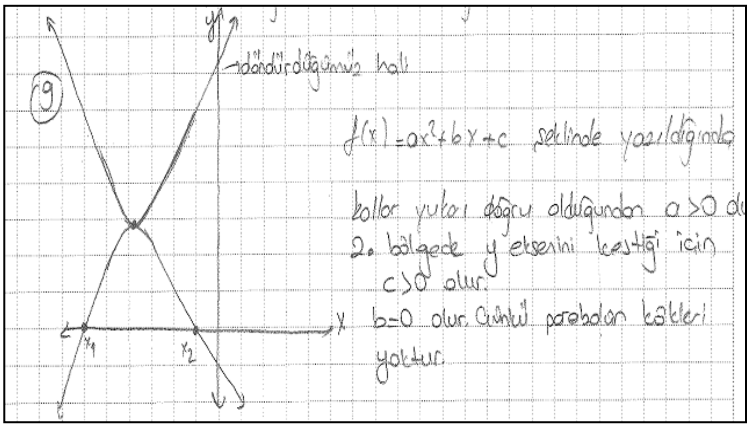
Ö2, Ö5 ve Ö44’ün yanı sıra Ö32, Ö33 ve Ö50 dönüşüm sonunda yeni parabole ait cebirsel ifadede a, b ve c sayılarının işaret değiştireceklerini ifade etmişlerdir. Yeni parabole ait cebirsel ifadede a ve b değerlerinin sadece işaretlerinin değişeceği doğrudur ancak c değerinin işaretinden ziyade değerinde de bir değişim söz konusudur. Bu nedenle öğrencilerin kullandıkları operatör *R^-_f44: f(x)= ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)= $-ax^2-bx-c$ şeklindedir*, olarak belirlenmiştir.

Ö5 ve Ö28 ve Ö38 ise sadece a ve b sayılarının işaret değiştireceğini, parabolün tepe noktasının değişmemesinin bir sonucu olarak, bu parabole ait cebirsel ifadedeki c değerinin de değişmeyeceğini belirtmişlerdir (Bkz. Şekil 196). Bu öğrencilerin kullandığı operatör; *R^-_f45: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=$-ax^2-bx+c$ şeklindedir*, olarak belirlenmiştir.



Şekil 196. Ö28’in S_f9’a verdiği cevap

Ö30, Ö52 ve Ö55 ise dönüşümden sonra oluşacak yeni parabole ait cebirsel ifadede a ve c değerlerinin işaretinin değişeceğini ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatör *R^-_f46: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=-ax^2+bx-c şeklindedir,* olarak belirlenmiştir. Ö30 ve Ö56 parabolün 180 derece döndükten sonra x eksenini kesmemesinin sonucu olarak başka bir ifadeyle kökleri olmadığı için x'e bağlı değerlerin sıfır olacağını ifade etmişlerdir. Ö56 Ayrıca c değerinin de iki katına çıkacağını belirtmiştir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler (Bkz. Şekil 197). Bu öğrencinin kullandığı diğer operatör ise *R^-_f47: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonu köklerine ayrılamıyorsa a ve/veya b sıfıra eşittir* ve *R^-_f48: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=ax^2+bx+2c şeklindedir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 197. Ö30'un S_f9'a verdiği cevap

Soruya cevap veren diğer öğrencilerden Ö1, Ö9, Ö10, Ö14, Ö21, Ö24, Ö26, Ö29, Ö37, Ö41, Ö43, Ö53, Ö54, Ö59 ve Ö60 yeni parabolün tepe noktasının 3. bölgede, Ö23, Ö25, Ö39 ve Ö58 kodlu öğrenciler ise yeni parabolün tepe noktasının 4. bölgede olacağını ifade etmişlerdir. Bu nedenle öğrencilerin *R_f43* operatörünü *hatalı* kullandıkları belirlenmiştir.

Ö11, Ö46 ve Ö48 kodlu öğrencilerin, soruda verilen şartları dikkate almadan çözüm yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden önceki soruda *R^-_f42* operatörünü kullanan Ö11; bu soruda da benzer bir hata yaparak parabolün tepe noktasını ikinci bölgede almak yerine x ekseninin (negatif tarafında) üzerinde almıştır. Yine Ö46 ve Ö48 kodlu öğrenciler ilk parabolü, tepe noktası 3. bölgede ve kollarının yönü yukarıda olacak şekilde çizmişlerdir. Bu hataların ortak yanı öğrencilerin soruda verileni dikkate almamaları olduğu için, kullanılan operatör, $R^{-}_{f}37$ olarak belirlenmiştir.

Ö13 ise 8. soruda olduğu gibi bu soruda da bölgeleri hatalı isimlendirdiği için, soruyu yanlış çözmüştür. Bu öğrencinin I. ve II. bölgeyi karıştırdığı görülmektedir. Bu nedenle 8. soruda kullandığı $R^{-}_{f}42$ operatörünün tekrarı söz konusudur.

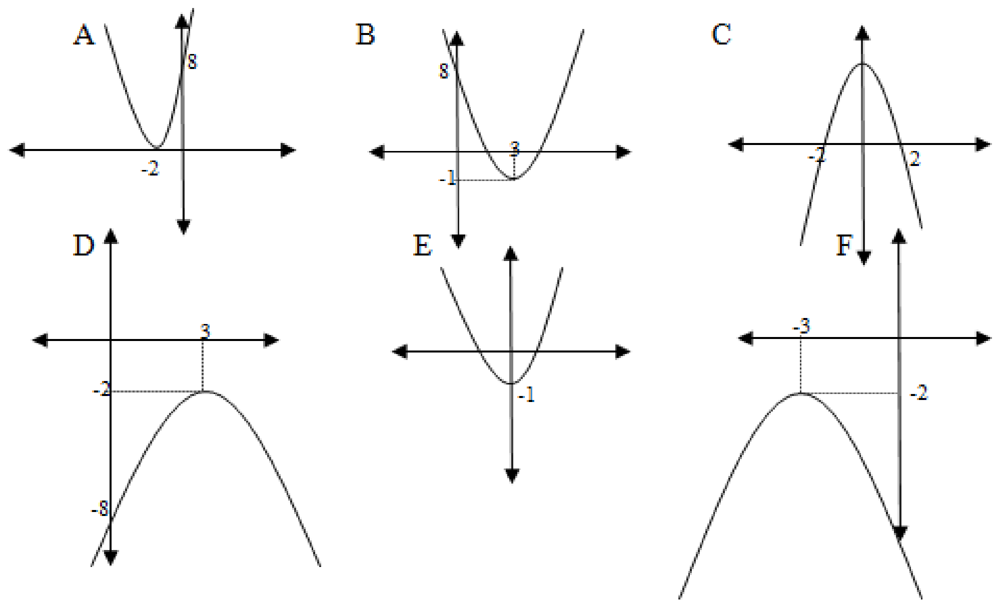
Son olarak, çözümlerinde verilen ve istenen parabolleri grafikte göstermiş olmaları nedeniyle Ö2, Ö3, Ö5, Ö22, Ö28, Ö30, Ö32, Ö44, Ö50, Ö52, Ö55, Ö56 ve Ö61 kodlu öğrencilerin *R_f49: Bir cebirsel ifadenin grafiğini çizme*, operatörünü doğru olarak, Ö1, Ö7, Ö9, Ö10, Ö11, Ö13, Ö14, Ö21, Ö24-Ö26, Ö29, Ö37, Ö39, Ö41, Ö45-Ö46, Ö48, Ö51, Ö53, Ö54, Ö58 ve Ö60 kodlu öğrencilerin ise *hatalı* olarak kullandıkları tespit edilmiştir.

Ö6, Ö8, Ö12, Ö17, Ö20, Ö27, Ö34-Ö36, Ö40, Ö47, Ö49, Ö57 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Ö4, Ö19 ve Ö42 kodlu öğrenciler herhangi bir açıklama yapmadan a, b ve c değerleri ile ilgili sonucu doğrudan ifade ettiklerinden, Ö45'in ise parabolü 90 derece döndürerek fonksiyon olmayan bir grafik elde etmesine rağmen bu grafiğin, fonksiyon olduğunu kabul ederek grafiğe ait cebirsel ifadeyi bulmaya çalışarak anlamsız bir çözüm gerçekleştirdiğinden bu öğrencilerin kullandıkları operatör belirlenmemiştir.

Dokuzuncu soru ile ilgili olarak ortaya çıkan operatörlere bakıldığında, öğrencilerin yedi yeni operatör kullandıkları aynı zamanda önceki sorularda ortaya çıkan R_f32, $R^{-}_{f}37$ ve $R^{-}_{f}42$ operatörlerini kullandıkları görülmektedir.

3.4.1.10. Onuncu Soru

S_f10: *Aşağıda 6 adet parabol ve bu parabollere ait olabilecek (her parabolün karşılığı olmayabilir) 10 adet denklem bulunmaktadır. Bu parabollerle denklemleri eşleştiriniz. Yaptığınız eşleştirmeyi nasıl savunursunuz? Nedenleriyle açıklayınız.*



I. $y = 2x^2 + 2$ II. $y = -3(x+3)^2 - 2$ III. $y = 2(x+2)^2$

IV. $y = -x^2 + 4x - 8$ V. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ VI. $y = 2(x-3)^2 + 8$

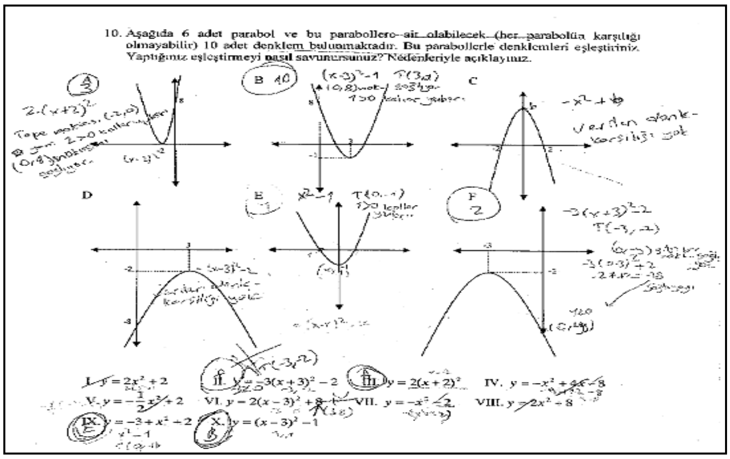
VII. $y = -x^2 - 2$ VIII. $y = 2x^2 + 8$ IX. $y = -3 + x^2 + 2$

X. $y = (x-3)^2 - 1$

Öğrencilerin her bir paabolü, cebirsel ifadelerle eşleştirirken izeledikleri yol aynı olduğu için tekrara düşmemek açısından, her bir seçeneği ayrı ayrı incelemek yerine, öğrencilerin bu eşleştirmeleri yaparken kullandıkları temel bilgiler araştırılmıştır.

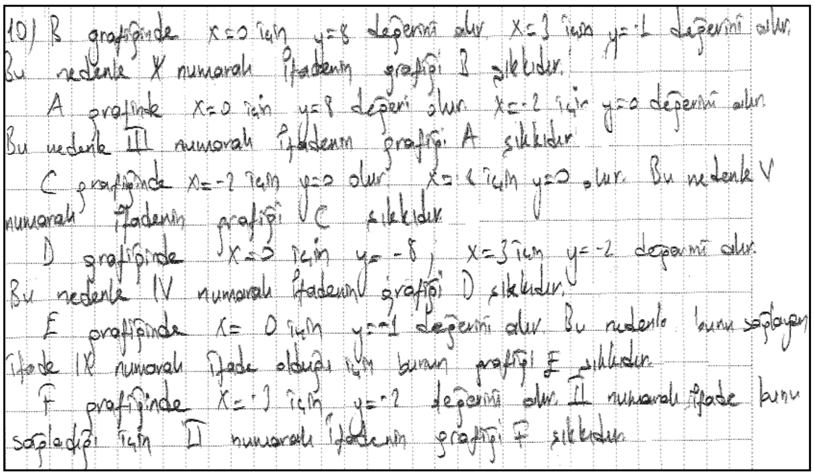
Bu bağlamda Ö2-Ö4, Ö25-Ö27, Ö29, Ö32, Ö35-Ö40, Ö42-Ö44, Ö49, Ö50, Ö54, Ö58 ve Ö60 parabollerle, bu parabollere ait olabilecek cebirsel ifadeleri eşleştirirken a katsayısının işareti ve parabollün kollarının yönünün uyumunu kontrol ettikleri için *R_f50: Bir parabolün kolları yukarı doğru ise bu parabolün denklemindeki x^2li terimin katsayısı pozitiftir*, operatörünü kullanmışlardır. Bu öğrenciler parabolün eksenleri kestiği noktaların cebirsel ifadede sağlanıp sağlanmadığını ise *R_f51: x ekseni üzerindeki bir noktanın koordinatları (a,0), y eksenini üzerindeki bir noktanın koordinatları (0,b) dir*, operatörünü kullanarak kontrol etmişlerdir Bu öğrenciler ayrıca parabollere ait olabilecek cebirsel ifadelerden hareketle, tepe noktalarının koordinatlarını da bulmuşlardır. Ancak bazıları (Ö27, Ö29, Ö32, Ö35, Ö49 ve Ö60) $y = a(x-r)^2 + k$ formunda verilen cebirsel ifadeleri $y = ax^2 + bx + c$ formuna dönüştürerek *R_f36* operatörünü kullanarak parabolün tepe noktasının koordinatlarını bulurken, diğerlerinin ise *R_f52: y= a(x-r)^2+k formundaki cebirsel ifadeye ait olan parabolün tepe noktasının koordinatları (r,k)'dır*, operatöründen yararlandıkları tespit edilmiştir (Bkz. Şekil 198). Ö50 çözümde izlediği yolu şu şekilde anlatmıştır:

> A: Bu 10. soruda eşleştirmeyi yaparken nasıl yaptın, nasıl bir yol izledin?
> Ö50: Nasıl yaptım; genelde, şu $(x\text{-}r)^2$ var ya, hepsinde ondan yola çıkmaya çalıştım. Burada r'nin değerine baktım, tepe noktasında, kolların durumuna baktım, oradan eledim. Hani fonksiyona bakıyorsam kolları yukarı doğru, önce şıkka göre ayırdım onları yukarı olanları aldım göz önüne. Ondan sonra tepe noktası, r ve k sına baktım. Tepe noktasına göre orda yerine koydum. Mesela y=-1 var bunu orda yerine koydum sağlıyor mu diye baktım? O şekilde baktım. Bayağı yorucu olmuştu.



Şekil 198. Ö2'nin S_f10'a verdiği cevap

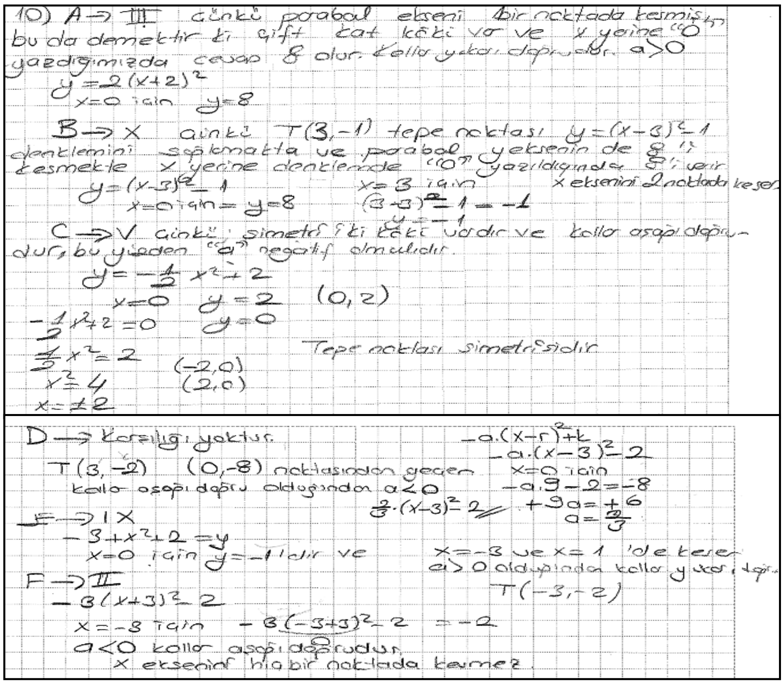
Öğrencilerden bazıları (Ö6, Ö8, Ö10, Ö13, Ö14, Ö19-Ö21, Ö24, Ö34, Ö45, Ö48, Ö51, Ö55, Ö57 ve Ö61) verilen parabollerle cebirsel ifadeleri eşleştirirken, parabolün üzerindeki noktaların cebirsel ifadelerde sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmişlerdir. Bu değerlerin bir ya da bir kaçının birbiri ile örtüşmesi öğrenciler için yeterli olmuştur (Bkz.Şekil 199). Bu nedenle öğrencilerin kullandıkları operatör *R^-_f53: Bir parabolün üzerindeki noktaların biri herhangi bir denklemi sağlıyorsa bu denklem o parabole aittir,* olarak belirlenmiştir.



10) B grafiğinde x=0 için y=8 değerini alır x=3 için y=-1 değerini alır. Bu nedenle X numaralı ifadenin grafiği B şıkkıdır.
A grafiğinde x=0 için y=8 değeri alır x=-2 için y=0 değerini alır. Bu nedenle III numaralı ifadenin grafiği A şıkkıdır.
C grafiğinde x=-2 için y=0 olur x=2 için y=0 olur. Bu nedenle V numaralı ifadenin grafiği C şıkkıdır.
D grafiğinde x=0 için y=-8, x=3 için y=-2 değerini alır. Bu nedenle IV numaralı ifadenin grafiği D şıkkıdır.
E grafiğinde x=0 için y=-1 değerini alır. Bu nedenle bunu sağlayan ifade IX numaralı ifade olduğu için bunun grafiği E şıkkıdır.
F grafiğinde x=-3 için y=-2 değerini alır. II numaralı ifade bunu sağladığı için II numaralı ifadenin grafiği F şıkkıdır.

Şekil 199. Ö57'nin S_f10'a verdiği cevap

Ö1, Ö5, Ö11, Ö12, Ö23, Ö41, Ö47, Ö52, Ö53 ve Ö59 kodlu öğrenciler eşleştirmeyi yaparken, parabollere ait olarak verilen bilgileri $y=a(x-r)^2+k$ formunda yerine yazarak, verilmeyenleri bulmaya çalışmışlardır. Böylece istenen cebirsel ifadeye ulaşmışlardır. Bu öğrencilerin *R_f52* operatörünün yanı sıra; *R_f54: Paraboldeki bilgiler $y=a(x-r)^2+k$ formunda yerine yazılarak a, r, k belirlenmek suretiyle o parabolün denklemi bulunur*, operatörünü de kullandıkları belirlenmiştir.



10) A → III çünkü parabol ekseni bir noktada kesmiş, bu da demektir ki çift katlı kökü var ve x yerine "0" yazdığımızda cevap 8 olur. Kollar yukarı doğrudur. a>0
$y=2(x+2)^2$
x=0 için y=8
B → X çünkü T(3,-1) tepe noktası $y=(x-3)^2-1$ denklemini sağlamakta ve parabol y eksenini de 8'i kesmekte x yerine denklemde "0" yazıldığında 8'i verir
$y=(x-3)^2-1$ x eksenini 2 noktada keser
x=0 için y=8
x=3 için $(3-3)^2-1=-1$
y=-1
C → V çünkü simetrik iki kökü vardır ve kollar aşağı doğrudur, bu yüzden "a" negatif olmalıdır.
$y=-\frac{1}{2}x^2+2$
x=0 y=2 (0,2)
$-\frac{1}{2}x^2+2=0$ y=0
$\frac{1}{2}x^2=2$
$x^2=4$ (-2,0) (2,0)
x=±2
Tepe noktası simetrisidir.

D → karşılığı yoktur.
$a.(x-r)^2+k$
T(3,-2) (0,-8) noktasından geçen
$a.(x-3)^2-2$
kollar aşağı doğru olduğundan a<0
x=0 için
$a.9-2=-8$
$\frac{2}{3}.(x-3)^2-2$
$+9a=+6$
$a=\frac{2}{3}$
E → IX
$-3+x^2+2=y$
x=0 için y=-1'dir ve
x=-3 ve x=1'de keser
a>0 olduğundan kollar yukarı doğru.
F → II
$-3(x+3)^2-2$
T(-3,-2)
x=-3 için $-3(-3+3)^2-2=-2$
a<0 kollar aşağı doğrudur.
x eksenini hiçbir noktada kesmez.

Şekil 200. Ö41'in S_f10'a verdiği cevap

Bu öğrencilerden Ö41 ayrıca parabolün x eksenini bir noktada kesmesi ile çift katlı kökü olması ve T(r, k) tepe noktasından geçen x=r doğrusunun, parabolü simetrik iki parçaya ayırması bilgilerini kullanmıştır (Bkz. Şekil 200). Bu öğrencinin kullandığı operatörler; *R_f55: Bir parabol x eksenini bir noktada kesiyorsa, Bu parabolün ait olduğu fonksiyon çift katlı köke sahiptir* ve *R_f56: Bir parabol tepe noktasından geçen düşey doğruya göre simetriktir,* olarak belirlenmiştir.

Ö7, Ö9, Ö22, Ö28, Ö30, Ö33 ve Ö56 kodlu öğrenciler verilen parabollere ait cebirsel ifadeleri bulmaktansa, her cebirsel ifadeye karşılık gelen parabolü bulmaya çalışmışlardır. Ö7, Ö9, Ö22, Ö30 ve Ö56 kodlu olanlar $y=a(x-r)^2+k$ formunda verilen ifadeleri $y=ax^2+bx+c$ formuna dönüştürerek tepe noktasının koordinatlarını; $T(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ formülünden bulmuşlardır. Bu öğrencilerin *R_f36* operatörünü kullandıkları tespit edilmiştir.

Dokuzuncu soruya Ö17 kodlu öğrenci cevap vermezken, soruyu hatalı anladığı düşünülen Ö46 ise verilen cebirsel ifadelerin, sırasıyla verilen parabollere ait olup olmadığını kontrol etmiştir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Öğrencilerin soruya verdikleri cevaplarda kullandıkları operatörler incelendiğinde, onuncu soru ile ilgili olarak yedi yeni operatörün yanı sıra, önceki sorularda kullanılan R_f36 operatörünün de tekrar edildiği belirlenmiştir.

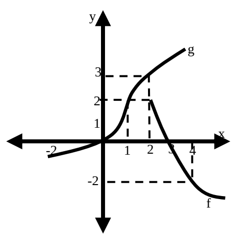
3.4.1.11. On Birinci Soru

S_f11: *Yandaki şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu araştırınız.*

a) $\frac{g(1)+fog(2)}{f(4)} = -1$

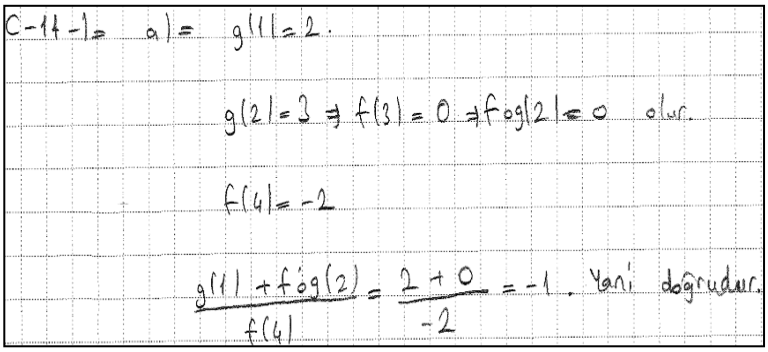
b) g fonksiyonunun tersi yoktur.

c)g-1(2)=2



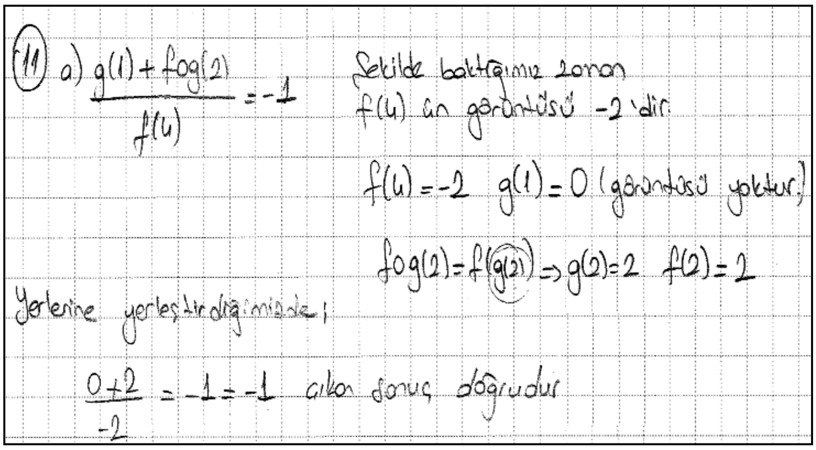
Son uygulamanın son sorusunun a seçeneğine öğrencilerin 47'si doğru, 7'si hatalı cevap verirken, 3 öğrenci soruya cevap vermemiştir.

Sorunun a seçeneğine doğru cevap veren öğrenciler (Ö1-Ö12, Ö14, Ö20-Ö28, Ö32-Ö36, Ö39-Ö44, Ö46-Ö54, Ö56, Ö58-Ö61) grafiği yorumlayarak istenen değerleri doğru olarak bulmuş ve yerine koyarak doğru sonuca ulaşmışlardır (Bkz. Şekil 201). *R_f19* operatörünün yanı sıra *R_f57: Bir fonksiyona ait grafik üzerinde herhangi bir noktanın apsisi a ise ordinatı f(a) dır*, operatörünü de kullandıkları belirlenmiştir.



Şekil 201. Ö34'ün S_f11_a'ya verdiği cevap

Diğer öğrencilerden Ö30, g(1) değerinin görüntüsü olmadığı için sıfır olduğunu belirtmiştir (Bkz. Şekil 202). Bu öğrencinin soruyu hatalı olarak çözmesine neden olan operatör *R^-_f58: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyonun grafiği üzerinde f(a) değeri mevcut değilse f(a)=0 kabul edilir,* olarak belirlenmiştir.



Şekil 202. Ö30'un S_f11_a'ya verdiği cevap

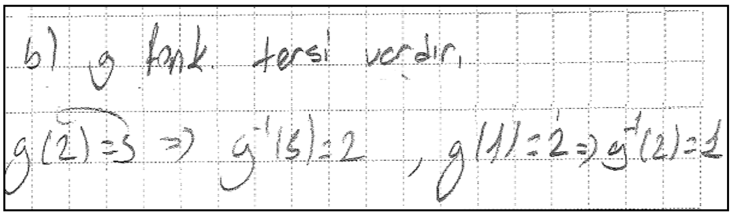
Sorunun a seçeneği için, Ö17, Ö38 ve Ö55 kodlu öğrenciler cevapsız kalırken, Ö13, Ö19, Ö29, Ö45 ve Ö57 kodlu olan öğrenciler, dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülen basit işlem hataları yapmışlardır. Ö37 ise *g(1) değerinin tam olarak bilinemediği için çözüm yapılamayacağını* ifade etmiştir. Bu öğrenciler için operatör belirlenmemiştir.

Sorunun b seçeneğini 16 öğrenci doğru olarak cevaplandırırken, soruya 8 öğrenci hatalı, 23 öğrenci eksik cevap vermiştir. 10 öğrenci ise soruya cevap vermemiştir.

Verilen grafiği inceleyerek fonksiyonun birebir ve örten olduğu için tersinin olduğunu ifade eden Ö1-Ö3, Ö7, Ö11, Ö21, Ö28-Ö30, Ö32, Ö33, Ö35, Ö37, Ö40, Ö42, Ö43 ve Ö45 'in *R_f10* operatörünü kullandıkları belirlenmiştir.

Diğer öğrencilerden Ö8, Ö10, Ö14, Ö22, Ö27, Ö25, Ö39, Ö41, Ö44, Ö48, Ö52-Ö54, Ö57 ve Ö60 kodlu olanlar fonksiyonun grafiğine ait bir/birkaç noktanın tersleri olup olmadığını kontrol etmişler ve g fonksiyonunu tersi olduğunu iddia etmişlerdir (Bkz. Şekil 203). Bu öğrencilerin kullandıkları operatör; *$R^{-}_{f}59$: Bir f fonksiyonu için $f(x)=y$ iken $f^{-1}(y)=x$ şartını sağlayan bir/birkaç değer bulunabilirse bu fonksiyonun tersi vardır,* olarak belirlenmiştir. Ö39 soruyu değer vererek çözdüğünü aşağıdaki cümlelerle ifade etmiştir:

> A: Şurada da demişsin ki g fonksiyonunun tersi vardır. g(2)= -3 ise $g^{-1}(-3)$= 2 dir. g(1) =2 ise $g^{-1}(2)$ =1 dir.
> Ö39: Evet
> A: Peki, sadece bu iki nokta ile karar verebilir miyiz, fonksiyonun tersi olup olmadığına? g(2) ve g(1) değerlerine bakarak karar verebilir miyiz?
> Ö39: g(0) 'a da bakabiliriz. O da sağlar
> A: Yani 0,1,2 değerlerini vermek yetiyor sana.
> Ö39: Evet, başka ne yapabilirim ki?



Şekil 203. Ö39'un S_f11_b'ye verdiği cevap

Ö4 çözümünde g fonksiyonunun tersi olmadığını "*eğer olsaydı g(1)=2 ise g(2)=1 olurdu ancak g(2)=3*" ifadesi ile savunmuştur. Bu öğrencinin *R_f20* operatörünü *hatalı* kullandığı ve fonksiyonun tersinin olabilmesi için tanım kümesinden alınan her a,b elemanları için g(a)=b ise g(b)=a şartının sağlanması gerektiğini düşündüğü belirlenmiştir.

On birinci sorunun b seçeneği ile ilgili olarak Ö36, Ö38, Ö46, Ö47, Ö49, Ö50, Ö51, Ö55, Ö58 ve Ö61 kodlu öğrenciler soruya cevap vermezken, Ö9, Ö12, Ö13, Ö19, Ö23, Ö24, Ö34 ve Ö56 kodlu öğrenciler açıklama yapmaksızın fonksiyonun tersi olduğunu, Ö17, Ö20 ve Ö26 koldu olanlar ise tersi olmadığını ifade etmişlerdir. Ö6 ve Ö59 kodlu öğrencilerin dikkatsizlikten dolayı hata yaptıkları düşünülmektedir. Nitekim, Ö6; "*g* *fonksiyonunun tersi yoktur; örneğin, g(1)=2 iken $g^{-1}(2)\neq1$ dir.*" şeklinde bir açıklama yapmış olsa dahi bir sonraki soruya doğru cevap vermiştir. Ö59 kodlu öğrencinin; "*g(1)= 2, $g^{-1}(2)=1$; g(0)= 0, $g^{-1}(0)=0$; g(2)=3, $g^{-1}(2)=1\neq 3$ olduğundan tersi yoktur"* şeklindeki açıklamasında da görüldüğü gibi ilk iki örneği doğru olarak verirken son örnekte $g^{-1}(2)$ yerine g(2) değerini bulmuştur. Ö5 ve Ö33 kodlu öğrencilerin çözümleri anlaşılamamıştır. Ö5; *g fonksiyonunun tersi yoktur. Tersi olabilmesi için hem birebir hem de örten olması gerekir. Ancak fonksiyonda g(1)=2 ve g(2)=3 tersleri düşünülemez."* şeklinde bir açıklama yaparken Ö33 ise "*g fonksiyonu x eksenini 2 farklı noktada kesiği için tersi fonksiyon olmaz.*" ifadesini kullanmıştır. Bu açıklamaları neye dayanarak yaptıkları belirlenememiştir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenememiştir.

Sorunun c seçeneğine verilen cevaplar incelendiğinde, soruya 28 öğrenci doğru, 5 öğrenci eksik, 22 öğrenci hatalı cevap verirken, 2 öğrenci cevap vermemiştir.

Ö1-Ö3, Ö5-Ö7, Ö9, Ö11, Ö14, Ö20-Ö26, Ö28, Ö34, Ö36, Ö37, Ö39, Ö40, Ö41, Ö43, Ö44, Ö49 ve Ö50 kodlu öğrencilerin doğru çözüm yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Ö2, Ö3 ve Ö43; "*g(1)=2 iken g-1(2)=1 dir"* açıklaması ile soruyu çözerken diğer öğrenciler ise çözümlerine "*g-1(2)=2, g(2)=2 olmalıdır ancak g(2)=3 olduğundan doğru değildir"* şeklinde açıklama getirmişlerdir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatör R_f20 olarak belirlenmiştir.

Soruyu doğru çözen öğrencilerden bir diğeri olan Ö17 ise, g fonksiyonunun tersi olmadığı için $g^{-1}(2)$ değerinden de bahsedilemeyeceğini belirtmiştir. Bu öğrencinin kullandığı operatör; *R_f60: Bir f fonksiyonun tersi yoksa $f^{-1}(x)=y$ olacak şekilde bir y değeri yoktur,* olarak belirlenmiştir.

Ö38 ve Ö55 soruya cevap vermezken, Ö8, Ö10, Ö13, Ö27, Ö29, Ö30, Ö32, Ö35, Ö42, Ö45, Ö46, Ö48, Ö51-Ö54, Ö56-Ö61 kodlu öğrenciler çözümlerinde g simgesini kullansalar da f fonksiyonunun grafiğine göre çözüm yapmışlardır. Ö4, Ö12, Ö33 ve Ö47 hiçbir açıklama yapmadan ifadenin yanlış olduğunu belirtirken, Ö19 ise doğru olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrencilerin kullandıkları operatörler belirlenmemiştir.

On birinci soru ile ilgili olarak öğrencilerin kullandıkları operatörlere bakıldığında 4 yeni operatör belirlendiği görülmektedir. Aynı zamanda önceki sorularda ortaya çıkan R_f19, R_f10, R_f20 operatörlerinin de tekrarı göze çarpmaktadır.

3.4.2. Fonksiyonlar Konusundan Elde Edilen Gösterimler

Öğrencilerin fonksiyon konusu ile ilgili olarak kullandıkları gösterimler incelendiğinde, verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığı sorulduğunda öğrencilerin bu bağıntı hangi formda verilirse verilsin, bu bağıntıyı Venn şemasında göstererek, fonksiyon olup olmadığına karar verdikleri görülmüştür. Bu durum öğrencilerin, bir bağıntının fonksiyon olduğuna Venn şeması kullanarak daha rahat karar vermelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir. O halde öğrencilerin fonksiyonların Venn şeması ile gösterimi tercih ettikleri söylenebilir. Öte yandan bu gösterimde de tanım ve görüntü kümesini karıştırmaktan kaynaklı olarak hata yaptıkları görülmüştür. Aynı duruma grafik gösteriminde de rastlanmıştır. Öğrencilerin koordinat sisteminde x eksenini değer, y eksenini tanım kümesi olarak isimlendirdikleri için hata yapmışlardır.

Öğrencilerin bir parabol denkleminin $y = a(x-r)^2 + k$ gösteriminden ziyade $y = ax^2 + bx + c$ gösterimini tercih ettikleri ve genellikle $y = a(x-r)^2 + k$ şeklindeki ifadeleri $y = ax^2 + bx + c$ formuna dönüştürerek kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin lise yıllarından beri $y = ax^2 + bx + c$ gösterimi ile işlem yapabilme becerilerine sahip oldukları düşünüldüğünde, istenen parabolün cebirsel ifadesinin $y = a(x-r)^2 + k$ formunda verildiğinde çok daha rahat çizilmesine rağmen bu dönüşüme ihtiyaç duymaları anlamlı olmaktadır.

Öğrencilerin bir fonksiyona ait cebirsel ifadenin grafiğini çizmeyi, grafiği verilen bir fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazmaya oranla daha rahat gerçekleştirdikleri görülmüştür. Buradan hareketle öğrencilerin cebir-grafik dönüşümünü daha çok tercih ettikleri söylenebilir.

3.4.3. Fonksiyonlar Konusunda Belirlenen Kontrol Bilgileri

Diğer konularda olduğu gibi fonksiyonlar konusunda da öğrencilerin hatalı çözümlerinin hangi bilgiye dayandırarak yaptıklarını ortaya koyan kontrol bilgilerini bulmak, her operatör için mümkün olamamıştır. Belirlenen kontrol bilgilerinden biri; R^-_f18: *Bir f fonksiyonu birebir ve örten ise* $f(x)=f^{-1}(x)$*dir*, operatörünü kullanarak soruya cevap veren öğrencilerin "*Bir f fonksiyonu birebir ve örten ise tersi mevcuttur*" bilgisinden hareketle böyle bir yaklaşım sergiledikleri kabul edilebilir.

Diğer bir kontrol önermesi diğer konularda da sık olarak rastladığımız bir durumdur. Fonksiyonlar konusunda $R^{-}_{f}32$: $f^{-1} \circ (f(x)+g(x)) = f^{-1} \circ f(x) + f^{-1} \circ g(x)$ *dir,* operatörü ile karşılaştığımız bu durum için belirlenen kontrol önermesi "dağılma özelliği"dir.

Bu bölümde, sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel anlayışların belirlenmesi amacıyla; kümeler, sayılar, denklemler ve fonksiyonlar konularını içeren uygulamalarda yer alan sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplarda kullandıkları operatörler, gösterimler ve kontrol bilgileri belirlenmiştir. Bu aşamayı belirlenen operatörlerden benzer olanlarının bir araya getirilmesiyle oluşturulan anlayışların oluşturulması aşaması takip etmiştir. Bu aşama aşağıdaki bölümde detaylandırılmıştır.

3.5. Belirlenen Anlayışlar ve Operatörleri

Önceki bölümlerde de belirtildiği gibi anlayış (conception) kendini oluşturan dört bileşenle ifade edilmektedir. Ancak literatürde cK¢ teorisi üzerine kurulmuş olan çalışmalara bakıldığında bu çalışmaların konu temelli oldukları görülmektedir (Yazgan, 2006; Maracci, 2006; Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Konu temelli olmaları sebebiyle belirlenen anlayışların dört bileşeninin de mevcut olması olağandır. Çünkü belirlenen operatörlerin yanı sıra kullanılan gösterimler ve kontrol bilgilerinin de konuya özgü olduğu görülmektedir. Ancak bu araştırmada öğrencilerin her hangi bir konuya ait olan anlayışları değil de genel matematiksel anlayışlarını belirlemek amaçlandığı için, öğrencilerin sahip oldukları anlayışlara ait olan gösterim ve kontrol bilgileri bileşenlerinin net olarak belirlenmesi mümkün olmamıştır. Başka bir ifadeyle, bütün temel matematik konularında kullanılan gösterimler ve kontrol bilgilerini, bir anlayışı oluşturan bileşenler olarak ifade etmek mümkün olmamıştır. Bu nedenle öğrencilerin sahip olduğu anlayışların, belirlenen operatörlerin sınıflanması sonucunda elde edilmesi fikri üzerinde düşünülmüş ve çalışmada kullanılan sorulardan elde edilen operatörler sınıflanarak 10 tane anlayış belirlenmiştir. Bu anlayışlar ve anlayışları oluşturan operatörler aşağıda sunulmuştur.

3.5.1. Mantık Kuralları Anlayışını Oluşturan Operatörler

Öğrencilerin mantık kuralları ile ilgili olarak sahip olduğu bilgilerin yansıdığı operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilen bu anlayış daha çok ispatlanması gerek ya da içinde önerme geçen sorularda görülmüştür. Bu anlayışı oluşturan operatörler aşağıdaki şekilde sıralanmaktadır.

$R^{-}_{k}1$: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur,

$R^{-}_{k}2$: Bir önermenin doğru olup olmadığı sorulduğunda doğruluğunu gösterecek şekilde ispat yapılır,

$R_{k}3$:Bir önerme bir özel durum için sağlanmıyorsa bu önerme her zaman doğru değildir,

$R^{-}_{k}4$: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme,

$R_{k}5$: Venn şemasını standart bir şekilde (örneğin her küme diğerleri ile kesişecek şekilde) çizme

$R^{-}_{s}6$: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur,

$R^{-}_{s}7$: İspatlanması gereken durumu doğru kabul ederek çözümde kullanma,

$R_{s}14$: Tümevarım yöntemi

$R^{-}_{s}18$: $m|a+b \Rightarrow m|a$ ve $m|b$ dir

$R^{-}_{s}22$: $m|a.b \Rightarrow m|a$ ve $m|b$ dir,

$R^{-}_{d}11$: y eksenini y=0 doğrusudur

$R^{-}_{d}23$: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme

$R^{-}_{f}37$: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme.

3.5.2. Pragmatik Düşünme Anlayışını Oluşturan Operatörler

Bu anlayışı öğrencilerin, sorunun çözümüne ulaşabilmek için, gerek verilenleri dikkatte almadan, gerekse bulması gereken durumu kullanarak yaptıkları çözümlerden belirlenen benzer operatörlerin sınıflanması ile elde edilmiştir. Anlayışı oluşturan operatörler aşağıda verilmiştir.

$R^{-}_{k}1$: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur,

$R^{-}_{k}2$: Bir önermenin doğru olup olmadığı sorulduğunda, doğruluğunu gösterecek şekilde ispat yapma,

$R_{k}5$: Venn şemasını standart bir şekilde (örneğin her küme diğerleri ile kesişecek şekilde) çizme,

R^{-}_{k}15: Aynı matematiksel ifadede yer alan bir küme ile bu kümenin tümleyenini, ifadeyi sadeleştirmek adına aralarındaki işlemlere dikkat etmeksizin yan yana getirme

R^{-}_{s}7: İspatlanması gereken durumu doğru kabul ederek çözümde kullanma,

R_s12: Verilen ve istenen ifadeleri (değerleri değişmeyecek şekilde) yeniden düzenlenerek birbirlerine benzetme,

R_s46: Karmaşık ifadeleri sembol kullanarak daha sade şekilde yazma,

R_d^{-}11: y eksenini y=0 doğrusudur,

R_d^{-}23: İstenene ulaşırken için verilenlerden bazılarını ihmal etme,

R_f24:Bir fonksiyonun değer kümesi verilen ifadedeki değişkene değerler verilerek bulunur,

R^{-}_{f}26: Bir fonksiyonun kökleri görüntü kümesini oluşturur,

R^{-}_{f}29: Herhangi bir a değeri için f(a)=a ise f birim fonksiyondur,

R_f31:Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşma,

R^{-}_{f}37:İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme,

R^{-}_{f}53: Bir parabolün üzerindeki noktaların biri bir denklemi sağlıyorsa bu denklem o parabole aittir,

3.5.3. Doğru Genelleme Anlayışını Oluşturan Operatörler

Bu anlayış öğrencilerin çözümlerinde edindikleri bilgileri doğru olarak genellediklerini gösterdikleri operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilmiştir. Bu operatörler aşağıdaki şekilde sıralanmaktadır.

R_k3: Bir önerme bir özel durum için doğru değilse, her zaman doğru değildir.

R_k12: A, B ve C kümeleri için $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$ dir.

R_s13: A=ax+b=cy+d olsun. k=a-b=c-d olmak üzere A+k, a ile c nin ekokunun katıdır.

R_s14: Tümevarım yöntemi

R_s16: B≡ x(mod M) ve C≡y (mod M) iken x+y≡ 0 (mod M) ise o zaman $M \mid \mathrm{B}+\mathrm{C}$ dir.

R_d9: Bir bölgenin alanı bu bölgeyi oluşturan alt bölgelerin alanları toplamıdır.

R_d18: Aynı yönde hareket eden iki aracın belli bir t anından sonra aldıkları yol sırasıyla X1 ve X2 ise aralarında kalan yol X1-X2 dir.

R_d19: Aynı yönde hareket eden iki aracın hızları sırasıyla V1 ve V2 ise belli bir t anından sonra aralarında kalan yol (V1-V2)t dir.

R_f1: f:A $\rightarrow$ B'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek şart $\forall a \in A$ için $f(a) \in B$'nin mevcut olmasıdır.

R_f2: f:A $\rightarrow$ B'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek şart; $x \in A$ için $f(x)=y_1$ ve $f(x)=y_2$ iken $y_1= y_2 \in B$ olmasıdır.

R_f28:Bir fonksiyon doğrusal ise tersi de doğrusaldır.

3.5.4. Hatalı Genelleme Anlayışını Oluşturan Operatörler

Öğrencilerin sahip oldukları bilgileri tamamen hatalı olarak genelledikleri belirlenen operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilen bu anlayış aşağıdaki operatörleri içermektedir.

R^-_k6: A, B ve C, herhangi üç küme ise $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir.

R^-_k7: A ve B herhangi iki küme ve E evrensel küme ise $A \cup B = E$ dir.

R^-_k9: A, B ve C, herhangi üç küme ise $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$dir.

R^-_k10: Tümleyeni olan bir ifadeyi, tekrar tümleyenini alarak tümleyenden kurtarma.

R^-_k11: A ve B kümeleri için $(A'/B') = (A/B)'$ dir.

R^-_k14: E evrensel küme olmak üzere herhangi bir A kümesi için $A' = E$ dir.

R^-_k15: Aynı ifadede yer alan bir küme ile tümleyeni aralarındaki işlemlere dikkat etmeksizin yan yana getirilerek sadeleştirilir.

R^-_k16: A, B ve C kümeleri için $(A \backslash B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$ 'dir.

R^-_k24: A ve B herhangi iki küme ise $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$ dir.

R^-_s15: a<b olmak üzere a^n'nin b'ye bölümünden kalan a'dır.

R^-_s35: İkinci dereceden ifadelerin çözüm kümesi bir aralık belirtir.

R^-_d12: Düzlemde bir geometrik şeklin yüksekliği, bu şeklin y eksenini kestiği noktadır.

R^-_d13: (x,y) noktası (x,0) ve (0,y) şeklinde iki bileşenden oluşur.

R^-_d14: Bir açıları eş olan üçgenlerin alanları da eştir.

R^-_d16: Günlük hayat problemlerini modelleyen doğruların başlangıç noktası daima orijindir.

R^-_d17: y=ax+b formunda verilen bir cebirsel ifade düzlemde (a,b) noktasını ifade eder.

$R^{-}_{f}3$: Bir f bağıntısının grafiği eğri ise bu bağıntı bir fonksiyon belirtir.

$R^{-}_{f}5$: Bir f bağıntısının grafiği sonsuza gidiyorsa, bu bağıntı fonksiyon belirtmez.

$R^{-}_{f}6$: Bir g bağıntısının grafiği x ve y eksenlerini kesiyorsa o bağıntı fonksiyon belirtir.

$R^{-}_{f}7$: Bir g bağıntısının tanımsız olduğu değer yoksa bu bağıntı fonksiyon belirtir.

$R^{-}_{f}8$: Verilen bir grafiğin fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinin sınırlı olması gerekir.

$R^{-}_{f}25$: Bir fonksiyonun görüntü kümesi tersidir.

3.5.5. Kısmi Genelleme Anlayışını Oluşturan Operatörler

Öğrencilerin istenen ifadeye bir ya da birkaç örnek vererek ulaşmaya çalıştıkları çözümlerde kullanılan operatörlerin sınıflanmasıyla kısmi genelleme anlayışı elde edilmiştir. Bu anlayış aşağıdaki operatörlerden oluşmuştur.

$R^{-}_{k}1$: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur.

$R^{-}_{s}6$: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur.

$R^{-}_{s}17$: $c|a+b$ ise $c|\mathrm{a.x}+\mathrm{b.y}$ dir.

$R^{-}_{s}19$: $\dfrac{A}{m.n}$ verildiğinde $m|A$ ise $n|A$ dır.

$R^{-}_{f}26$: Bir fonksiyonun kökleri görüntü kümesini oluşturur.

$R^{-}_{f}29$: Herhangi bir a değeri için f(a)=a ise f birim fonksiyondur.

$R^{-}_{f}53$: Bir parabolün üzerindeki noktaların biri herhangi bir denklemi sağlıyorsa bu denklem o parabole aittir.

$R^{-}_{f}59$: Bir f fonksiyonu için f(x)=y iken $f^{-1}(y)=x$ şartını sağlayan bir/birkaç değer bulunabilirse bu fonksiyonun tersi vardır.

3.5.6. Özel Değer Verme Anlayışını Oluşturan Operatörler

Bu anlayış, cebirsel bir ifadedeki bilinmeyen ya da değişkenlere özel değerler vererek sonuca gidildiği çözümlerde belirlenen benzer operatörlerin bir araya gelmesi ile ortaya çıkmıştır. Bu operatörler aşağıdaki şekilde sıralanmaktadır.

$R^{-}_{k}20$: Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşılır.

R^-_s5: Verilen ifadedeki terimlere eşitliği sağlayacak şekilde özel değerler verme.

R_d2: Bir cebirsel ifadedeki değişkenlere özel değerler vererek çözüm yapma.

R_f24:Bir f(x) fonksiyonun değer kümesi x değişkenine değerler verilerek bulunur.

R^-_f31: Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşılır.

3.5.7. Bilgi Transferi Anlayışını Oluşturan Operatörler

Bir problem durumunda doğru olarak sonuç veren bir bilginin başka bir problem durumunda kullanılmasını içeren operatörlerin sınıflanmasıyla oluşturulan anlayışa bilgi transferi anlayışı adı verilmiştir. Bu anlayışı oluşturan operatörler aşağıda verilmiştir;

R^-_k6: A, B ve C, herhangi üç küme ise $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir.

R^-_k9: A, B ve C, herhangi üç küme ise (A\B) $\cup$ (A\C)= A\(B $\cup$ C)dir.

R^-_k11: A ve B herhangi iki küme ise $(A'/B') = (A/B)'$ dir.

R^-_k16: A, B ve C, herhangi üç küme ise $(A \setminus B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ dir.

R^-_k19: Kümelerle fark işlemini, tam sayılarla çıkarma işlemi olarak düşünme.

R^-_k24: A ve B, herhangi iki küme ise $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$ dir.

R^-_s3: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ dir.

R^-_s4: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = x$ ve $\frac{e}{f} + \frac{k}{l} = y$ ise $\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{e}{b} + \frac{k}{d}} = \frac{a}{e} + \frac{c}{k} = \frac{x}{y}$ dir.

R^-_s9: $\frac{x}{y} + \frac{x}{z} = t \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \frac{1}{t}$ dir.

R^-_s10: $(a+b)^n = a^n + b^n$ dir.

R^-_s11:Tam sayılarla bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır, yani x,y,z $\in$ Z ise(x:y)+(x:z)=t ise x:(y+z)=t dir.

R^-_s20: $a.x^n + b.y^n = (x.y)^n.(a+b)$dir.

R^-_s23: x, y,a $\in$ Z, $x - a | y \Rightarrow x | y + a$ dır.

R^-_s25: a,b,x $\in \Re$, a < b-x < c ise a <b-c < x dir.

R^-_s26: $\frac{a}{b} = c$ ise –c < $\frac{a}{b}$ <c dir.

R^-_s28: $a.x^n.b.x^n = (a+b).x^n$ dir.

R_s32:Logaritmadan faydalanma.

R^-_s33: $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$ dir.

R^-_s34: $(a^n.b)^m = (a.b^n)^m = a.b^{n.m}$ dir.

R^-_s43: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ dir.

R^-_s47: $c \in Z$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-c}$ dir.

R_d20: (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) gibi iki noktası bilinen doğrunun denklemi $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ dir.

R_d21: (x_1, y_1) şeklinde bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ dir.

R^-_f6: Bir g bağıntısının grafiği x ve y eksenlerini kesiyorsa o bağıntı fonksiyon belirtir.

R^-_f15: f: R\{a}$\rightarrow$ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise limf(x)=a dır ve b fonksiyonun paydasını sıfır yapar.

R^-_f18: Bir f fonksiyonu birebir ve örten ise f=f^{-1} dir.

R^-_f21: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere $f \circ g$, f ve g arasında aritmetik işlemler yardımıyla tanımlanır.

R_f22: f: R$\rightarrow$R, fonksiyonu için f'(x_0)=0 olmak üzere (x_0, f '(x_0)) fonksiyonun maksimum noktasıdır.

R^-_f32: $f^{-1} \circ (f(x) + g(x)) = f^{-1} \circ f(x) + f^{-1} \circ g(x)$ dir.

3.5.8. Değişkenler Arası İlişkiler Anlayışını Oluşturan Operatörler

Öğrencilerin değişkenler ve aralarındaki ilişkileri belirlerken kullandıkları bilgilerden elde edilen operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilen bu anlayışı oluşturan operatörler aşağıda verilmiştir;

R_k13: Karmaşık ifadeleri sembol kullanarak daha sade şekilde yazma.

R_k23: Cebirsel çözümden faydalanma.

R_k25:Değişkenleri belirleme.

R_k26: Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme.

R_k27: Değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi bulma.

R_d3: Değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etme.

R_d4: Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme.

3.5.9. Gösterimsel Anlayışı Oluşturan Operatörler

Gösterimsel anlayış gösterimlerle ilgili olan operatörlerin sınıflanmasıyla oluşmuştur. Öğrencilerin soruyu çözerken kullandıkları gösterimler ve verilen gösterimden başka bir gösterime dönüşüm yaptığı durumlarda karşılaşılan aşağıdaki operatörler gösterimsel anlayış başlığı altında toplanmıştır;

R_k17: Bir kümeyi ortak özellik yöntemi ile sözel olarak ifade etme.

R_k21: Sözel olarak verilen bir kümeyi matematiksel olarak ifade etme .

R_k22: Kümelerde kesişim işlemini “ve”, birleşim işlemi “veya” ile ifade etme .

R_k18: Tablodan faydalanma.

R_d 5:Verilen cebirsel ifadeye uygun grafiği çizme.

R_d6: Düzlemde 3 veya daha çok doğrunun tanımladığı bölgeyi belirme.

R^-_d10: y=ax+b cebirsel ifadesi düzlemde bir dörtgen belirtir.

R_d15: Grafik yorumlama.

R_d22: Bir cebirsel ifadedeki değişkenlere değerler vererek tablo oluşturma.

R^-_f4: Koordinat düzleminde eğrisi verilen bir fonksiyonun görüntü kümesi x ekseni, tanım kümesi y eksenidir.

R_f34: (a, b) noktası IV. bölgede ise a>0 ve b<0 dır.

R_f35: $y = a(x+b)^2 + c$ parabolün tepe noktası IV. bölgede ise $y = -a(x+b)^2 - c$ parabolünün tepe noktası I. Bölgededir.

R_f36: $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktasının apsisi $-\dfrac{b}{2a}$ dır.

R^-_f38: $y = a(x+b)^2 + c$ ile $y = -a(x+b)^2 - c$ parabollerinin tepe noktaları aynı kolları zıt yönlüdür.

R^-_f39: y=f(x) parabolün tepe noktası (b, c) ise y=f(x) parabolününki (-b, -c) dir.

R^-_f40: (b, c) noktasının koordinat düzlemindeki yerini apsisi belirler.

R^-_f41: Koordinat sisteminde (0,a) noktası birinci bölgede, (0,-a) noktası dördüncü bölgededir.

R^-_f42: Koordinat sisteminin düzlemde ayırdığı bölgeleri karıştırma.

R_f43: Bir parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse tepe noktasının yeri değişmez.

R^-_f44: f(x)= ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)= -ax^2-bx-c şeklindedir.

R^-_f45: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=-ax^2-bx+c şeklindedir.

R^-_f46: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=-ax^2+bx-c şeklindedir.

R^-_f47: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonu köklerine ayrılamıyorsa a ve/veya b sıfıra eşittir.

R^-_f48: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=ax^2+bx+2c şeklindedir.

R_f49: Bir cebirsel ifadenin grafiğini çizme.

R_f50: Bir parabolün kolları yukarı doğru ise bu parabolün denklemindeki x^2li terimin katsayısı pozitiftir.

R_f51: x ekseni üzerindeki bir noktanın koordinatları (a,0), y eksenini üzerindeki bir noktanın koordinatları (0,b) dir.

R_f52: y= a$(x-r)^2$+k formundaki cebirsel ifadeye ait olan parabolün tepe noktasının koordinatları (r,k)’dır.

R_f55: Bir parabol x eksenini bir noktada kesiyorsa, bu parabolün ait olduğu fonksiyon çift katlı köke sahiptir.

R_f56: Bir parabol tepe noktasından geçen düşey doğruya göre simetriktir.

R_f57: Bir fonksiyona ait grafik üzerinde herhangi bir noktanın apsisi a ise ordinatı f(a) dır.

3.5.10. Bilgi Anlayışını Oluşturan Operatörler

Bu anlayışı öğrencilerin ilgili konu ya da kavramla ilgili bilgileri, tanımları, işlemleri ve/veya özellikleri kullandıkları aşağıdaki operatörler oluşturmaktadır:

R_k8: Kümelerle işlemlerle ilgili özellikler ve tanımlar.

R_s1: Eşitliğin korunumunu dikkate alma.

R_s2: Rasyonel sayılarla işlemler.

R_s8:Bölme işlemi.

R_s21: Bölünebilme ile ilgili kural, özellik ve tanımlar.

R_s24: Eşitsizliğe özgü kural ve özellikler.

R_s27:Üslü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler.

R^-_s29: $a, n \in Z$ ve $a, n > 0$ olmak üzere $-a^n = a^{-n}$ dir.

R^-_s30: $-(a)^{2n} = a^{2n}$ dir.

R_s31: Köklü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler.

R_s36: $i^2 = -1$ olmak üzere $\sqrt{-a^2} = a.i$ dir.

R^-_s37: $\sqrt{-a^2} = -a$ dir (a$\in Z^+$).

R^-_s38: $(\sqrt{-a})^2 = -a$ dır (a$\in Z^+$).

R^-_s39: $(\sqrt{-a})^2 = a$ dır (a$\in Z^+$).

R^-_s40: $\sqrt{-a^2} = |-a| = a$ dır (a$\in Z^+$).

R_s41: Karekökten kurtarmak için kare alma.

R_s42: Rasyonel bir ifadenin paydasını kökten kurtarmak için ifadeyi paydanın eşleniği ile genişletme.

R^-_s44: 0<y<x olmak üzere, $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$^$2 = x.y \pm 2\sqrt{x+y}$ dir.

R_s45: a^3-b^3 = (a-b).(a^2+a.b+b^2) ve a^3+b^3=(a+b). (a^2-a.b+b^2) dir.

R_d7: İki doğrunun kesişim noktalarını, doğru denklemlerinin ortak çözümü ile bulma.

R_d8: Alan hesaplama.

R_f10: Bir fonksiyonun tersi olabilmesi için gerek ve yeter şart birebir ve örten olmasıdır.

R_f11: Rasyonel bir fonksiyonun tersini bulma.

R_f12: f: R\{a}$\rightarrow$ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise a değeri fonksiyonun kendisini, b değeri ise fonksiyonun tersini tanımsız yapar.

R_f13: $\dfrac{x+a}{x+b}$ ifadesini, paydayı sıfır yapan x=-b değeri tanımsız yapar.

R^-_f14: f: R\{$-\dfrac{d}{c}$}$\rightarrow$R\{$-\dfrac{a}{c}$} olmak üzere $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(-\dfrac{a}{c}) = -\dfrac{a}{c}$ dir.

R^-_f16: f: R\{ a }$\rightarrow$R\{ b } olmak a ve b fonksiyonu tanımsız yapar.

R^-_f17: Bir f fonksiyonunda a ve b fonksiyonu tanımsız yapan iki değer ise f(a)=f(b) dir.

R_f19: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere, $f \circ g(x) = f(g(x))$ dir.

R_f20: f:A $\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere, $f^{-1}(x)=a$ ise $f(a)=x$ dir.

R_f23: f: R $\rightarrow$R, $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun görüntü kümesi $(-\infty, f(-\frac{b}{2a})]$ dır.

R_f27: $f(ax+b)=cx+d$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu için $ax_0+b=e$ olmak üzere $f(e)=f(x_0)$ dır.

R_f30: $f(x)=ax+b$ ise $f\circ g(x)=f(g(x))=a.g(x)+b$ dir.

R_f33: $y=a(x+b)^2+c$ denklemli parabolün tepe noktası (-b, c) dir.

R_f50: Bir parabolün kolları yukarı doğru ise bu parabolün denklemindeki x^2li terimin katsayısı pozitiftir.

R_f51: x ekseni üzerindeki bir noktanın koordinatları (a,0), y eksenini üzerindeki bir noktanın koordinatları (0,b) dir.

R_f52: y= $a(x-r)^2+k$ formundaki cebirsel ifadeye ait olan parabolün tepe noktasının koordinatları (r,k)'dır.

R_f54: Paraboldeki bilgiler $y=a(x-r)^2+k$ formunda yerine yazılarak a, r, k belirlenmek suretiyle o parabolün denklemi bulunur.

R_f55: Bir parabol x eksenini bir noktada kesiyorsa, bu parabolün ait olduğu fonksiyon çift katlı köke sahiptir.

R_f56: Bir parabol tepe noktasından geçen düşey doğruya göre simetriktir.

R^-_f59: Bir f fonksiyonu için f(x)=y iken $f^{-1}(y)=x$ şartını sağlayan bir/birkaç değer bulunabilirse bu fonksiyonun tersi vardır.

R_f60: Bir f fonksiyonun tersi yoksa $f^{-1}(x)=y$ olacak şekilde bir y değeri yoktur.

Bu bölümde öğrencilerin sınavlarda sorulan 48 soruya verdikleri cevaplar ve onlarla yapılan klinik mülakatlardan elde edilen veriler sunulmuştur. Öğrencilerin çözümleri teker teker incelenerek kullandıkları operatörler, gösterimler ve kontrol bilgileri belirlenmiştir. Belirlenen operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilen anlayışlar sayesinde öğrencilerin matematiksel anlayışları belirlenmiştir.

Diğer bölümde ise elde edilen anlayışlar tartışılarak, yorumlanacaktır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu araştırma kapsamında sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel anlayışlarının cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda önceki bölümde; çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarının, kendilerine 5 sınav halinde uygulanan 48 soruya verdikleri cevapların cK¢ teorisinin anlayış aşamasına göre analizinden ve kendileri ile yapılan klinik mülakatlardan hareketle belirlenen operatörlere yer verilmiştir. Ayrıca, bu operatörlerin sınıflandırılmasıyla öğretmen adaylarının sahip olukları genel matematiksel anlayışlar belirlenmiştir. Bu bölümde ise bulgulardan hareketle öğretmen adaylarının sahip oldukları belirlenen ve 10 başlık altından toplanan anlayışlar tartışılmıştır.

4.1. Sınıf Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Anlayışlarının cK¢ Teorisine Göre İncelenmesine Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

Çalışmada, cK¢ teorisine göre öğrencilerin sahip olduğu anlayışlar (C), onların bu sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen operatörlerin (R) sınıflanmasıyla elde edilmiştir. Bu bağlamda, farklı konular kapsamında sorulan sorularda ortaya çıkmış dahi olsa, birbiriyle ilişkili olduğu düşünülen ve aynı çatı altında yer alabilecek farklı operatörler bir araya getirilerek anlayışlara ulaşılmıştır. Belirlenen anlayışların her konuda ortaya çıkabilecekleri düşünüldüğünde her türlü matematiksel gösterimi ihtiva edecekleri söylenebilir. Diğer yandan, kontrol bilgilerinin belirlenmesinde yaşanabilecek zorluklardan daha önce bahsedilmişti. Bu nedenle belirlenen anlayışların operatör haricindeki diğer bileşenleri olan Gösterimler (L) ve Kontrol Bilgileri (∑)her anlayış için belirlenememiştir.

Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının sahip oldukları 10 tane anlayış belirlenmiştir. Bu anlayışlar aşağıda sırasıyla ele alınmıştır.

4.1.1. Mantık Kuralları Anlayışı

Çalışmada elde edilen verilerin analizi neticesinde sınıf öğretmeni adaylarının sahip oldukları belirlenen anlayışlardan biri *mantık kuralları anlayışı*dır. Bu anlayış, öğrencilerin mantık kuraları ile ilgili olarak sahip oldukları bilgilerin yansıdığı operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilmiştir. Bu anlayışa sahip olan öğrenciler, mantık kurallarını, kendi zihinleri doğrultusunda, karşılaştıkları probleme cevap verecek şekilde, irdelemeden kullanabildikleri gibi doğru bir şekilde kullanarak çözümü gerçekleştirebilmektedirler. Bu anlayışın problemler kümesini genellikle ispatlanması gereken durumların veya içinde önermelerin bulunduğu sorular (S_k1-S_k11, S_s6, S_s2, S_s6, S_s7, S_d7, S_f8, S_f9) oluşturmaktadır.

Tablo 3. Mantık kuralları anlayışının bileşenleri

MANTIK KURALARI ANLAYIŞI				
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)			
S_k1	R^-_k1	R^-_k2	R_k3	R^-_k4
S_k2, S_k4	R_k5			
S_k3	R^-_k4	R_k5		
S_k5	R_k5			
S_k6	R^-_k4			
S_k7	R^-_k1			
S_k8	R^-_k1	R_k5		
S_k9	R_k5			
S_k10	R^-_k4	R_k5		
S_k11	R_k5			
S_s2	R^-_s6	R^-_s7		
S_s6	R^-_s6	R_s14	R^-_s18	
S_s7	R^-_s6	R^-_s18	R^-_s22	
S_d7	R^-_d23			
S_f8, S_f9	R^-_f37			

Mantık kurallarının kullanımları ile ilgili olarak benzer olan operatörlerin bir araya gelmesi ile oluşturulan bu anlayışın; Küme, Sayı, Denklem ve Fonksiyon konularının hepsinde görülmesinin (Bkz. Tablo 3) araştırmada kullanılan problemler kümesi ile olan ilgisinin yanında matematiğin mantık kurallarının ön planda tutulduğu bir disiplin olmasının neticesi olduğu söylenebilir.

Öğrencilerin mantık kurallarını, kendi zihinleri doğrultusunda, karşılaştıkları probleme cevap verecek şekilde, irdelemeden kullandıklarını, bu anlayışı oluşturan hatalı operatörlerden (R^-_k1, R^-_k4, R^-_s6, R^-_s7, R^-_s18, R^-_s22, R^-_d23, R^-_f37) çıkarabiliriz. Yine bu operatörler sayesinde öğrencilerin mantık kurallarını, bu kuralların gerektirdiği şekilde değil de kendilerini herhangi bir sonuca götürecek şekilde kullandıklarını görebilmekteyiz. Benzer bir durum Miyakava (2004) tarafından da ortaya çıkarılmıştır. Araştırmacı geometri konularından "yansıma simetrisi" ile ilgili olarak yaptığı çalışmasının sonunda; öğrencilerin diklik ve eşit mesafenin gerekliğini bilerek simetriyi doğru olarak çizebilmelerinin, ispat yaparken kuralı uygun olarak kullanabildikleri anlamına gelmediği sonucuna ulaşmıştır.

Bu anlayışın en belirgin operatörleri verilen bir önermenin doğruluğunun gösterilebilmesi için bir özel durumun yeterli olduğunu düşünme ve sonuca ulaşırken problemde verilen ve kullanılması gereken bazı bilgileri ihmal etmedir. Bu durumda öğrencilerin, bilimsel anlamda yanlış davranmalarına rağmen, kendi içselleştirdikleri bilgi bütünlüğünü bozmayan ve onların soruya bir şekilde çözüm getirmelerini sağlayan bu davranışlarını *mantıklı* olarak kullandıkları söylenebilir. Nitekim Ö9 kendisi ile yapılan mülakatta, ifadeyi sağlayıp sağlamadığını kontrol amaçlı olarak değişkene değerler verdiğini belirtirken, seçtiği bu yolun onu sonuca ulaştıracağı düşüncesini taşımaktadır.

Lise döneminden itibaren öğrencilerin bir kaç örnek ile herhangi bir varsayımın doğrulanmadığını fakat karşıt bir örneğin bir varsayımın yanlışlığını gösterdiğini öğrenmeleri beklenmektedir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Ancak, bu çalışmada mantık kuralları anlayışına sahip olan bazı sınıf öğretmeni adaylarının bu anlayışın yanlış operatörlerinden biri olan "verilen bir önermenin doğruluğunun gösterilebilmesi için bir özel durumun yeterli olduğu" düşüncesinde olduğu belirlenmiştir. Flores (2006) yaptığı çalışmasında bu durumu "problemlerin doğruluğunu bir örnekle göstermenin öğretmen adayları için yeterli olduğu" şeklinde ifade etmiştir.

Öğrencilerin bir problemin sonucuna ulaşırken verilen bilgilerden bazılarını ihmal etmiş olmaları bir bakıma "bir önermede ***ise***den öncesini dikkate almadıklarını" göstermektedir. Bu nedenle öğrencilerin mantık kurallarına aykırı davrandıkları söylenebilir. Bu operatör kümeler (R_k4), denklemeler (R^-_d23) ve fonksiyonlar (R^-_f37) konularında doğrudan karşımıza çıkarken sayılar konusunda ise R^-_s7: İspatlanması gereken durumu doğru kabul ederek çözümde kullanma, operatörüyle kendini göstermektedir. Burada da öğrenciler verilen bilgiyi kullanarak istenene ulaşmak yerine verileni ihmal ederek istenen durumun doğruluğundan verilene ulaşmaya çalışmışlardır. Bu durumda öğrencilerin "verilenlerden bazıları ihmal edilerek çözüme ulaşılabilir" bilgisini mantık kurallarına uygun kabul ederek kullandıkları söylenebilir. Benzer bir durum Kocaoğlu ve Yenilmez (2010)'in beşinci sınıf öğrencileriyle kesirler konusunda yapmış oldukları çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Araştırmacılar çalışma sonucunda öğrencilerin problemlerde verilenleri ve istenenleri göz ardı ettiklerini böylece problemi anlamada ve dolayısıyla işlemlerin sırasının belirlenmesinde güçlük yaşadıklarını tespit etmişlerdir.

Aydın ve Özmen (2012) ise 8. sınıf öğrencilerinin sözel problemlerde verilenler ile istenilenler arasındaki ilişkiyi belirleyebilme becerilerini araştırdıkları çalışmalarının sonucunda, öğrencilerin genel anlamda çözüme ulaşmalarını sağlayacak bilgileri ayırt etmede sorunlar yaşadıklarını belirtmişlerdir. Benzer şekilde Soylu ve Aydın (2006) sekizinci sınıf öğrencileriyle yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin problemlerde yer alan eksik veya gereksiz bilgiyi göremediklerini ifade etmişlerdir. Yeşildere ve Türnüklü (2007) ise sekizinci sınıftan yeni mezun olmuş öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini inceledikleri çalışmalarında, öğrencilerin tahmin becerilerini ölçen bir soruya cevap verirken kişisel görüşlerine göre fikir belirttikleri ve problemdeki verileri kullanmadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Araştırmacılar, öğrencilerin gerekli bilgileri kullanarak problemi doğru çözmede ve çözümlerini açıklamada sıkıntı çektiklerini ifade etmişlerdir. Farklı sınıf seviyelerinde ortaya çıkan bu durum, öğrencilerin sahip oldukları bu anlayışı ileriki yaşantılarında da devam ettirdikleri sonucuna götürebilir.

Tersi doğru olmayan önermeleri de doğruymuş gibi kullanan öğrencilerin de bu anlayışa sahip oldukları söylenebilir. $R^{-}_{s}18$ operatörünü kullanarak soruyu çözen öğrencilerin $m|a+b \Rightarrow m|a \ \ ve \ \ m|b$ önermesini kullanarak soruyu çözmelerinden yola çıkarak $m|a \ \ ve \ \ m|b \Rightarrow \ m|a+b$ önermesinin tersinin doğru olduğunu düşünerek mantık kurallarına aykırı davrandıklarını söyleyebiliriz.

Bu anlayışı oluşturan operatörlerden "*doğru olup olmadığı sorulan bir önermenin, doğru olduğu kabul edilerek ispatı yapılır"* şeklinde ifade edilen $R^{-}_{k}2$'nin kullanılması ile "*bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur"* olarak belirlenen $R^{-}_{k}1$'in kullanılması yakından ilişkilidir. Şöyle ki, öğrencilerin özel bir durumda sağlanan bir önermenin her zaman doğru olacağı bilgisini kabul etmeleri neticesinde, doğru olup olmadığı sorulan bir önerme ile karşılaştıklarında bu önermeyi gerçekleştiren bir örnek bularak önermenin doğruluğunu ispatlama yoluna gitmeleri beklenen bir davranıştır. Bu durumda öğrencinin; "*özel bir durum için sağlanan bir önerme her zaman doğrudur*" bilgisini kabul ettiği ve çözümlerde kullandığı söylenebilir. Bu duruma paralel sonuçlar bulan birçok araştırmaya rastlamak mümkündür (Baker, 1996; Özer ve Arıkan, 2002; Flores, 2006; İskenderoğlu 2010; Köğce 2012).

Bu anlayışı oluşturan operatörler arasında doğru kullanımlar da söz konusudur. Öğrencilerin n. adımın sorulduğu bir soruyu çözerken tümevarım yöntemini kullanması (R_s14) veya Altıparmak ve Öziş (2005)'in de öğrencilerden beklediği, özel bir durum için sağlanmayan bir önermenin doğru olmayacağı bilgisinin (R_k3) kullanılması bu anlayışı oluşturan ve doğru olarak kullanılan operatörlerdir. Bu anlayış içinde yer alan ve hem doğru hem de yanlış olarak kullanılabilen bir operatör R_k5'tir. Bilindiği gibi öğrencilerin kümelerle ilgili sorularda veya problemlerde en çok kullandıkları şema verilen kümelerin birbirleriyle kesişimleri ile oluşturulan şemadır. Soruların çözümünde öğrencilere yardım eden ve "tipik küme şeması" olarak da ifade edebileceğimiz bu çizimi öğrencilerin mantık kuralları dahilinde kullandıkları düşünülmektedir. Nitekim birden fazla kümeyi içeren bir soru ile karşılaşıldığında verilen kümeleri kesişecek şekilde çizme mantığının, birçok öğrenci tarafından kullanıldığı söylenebilir. Bu mantık öğrencileri genellikle doğru sonuca götürse de bu şema özellikle verilenlerden bağımsız olarak bu kullanıldığında (Bkz. Şekil 7) öğrencilerin hata yapmalarına sebep olmaktadır.

Bu çalışma kapsamında matematiksel anlayışları incelenen sınıf öğretmeni adaylarının, ispatlanması gereken ya da içinde önermelerin bulunduğu sorularla karşılaştıklarında mantık kurallarını doğru olarak kullanıp sonuca ulaşabildikleri gibi bu kuralları bilimsel anlamda yanlış kullandıkları da söylenebilir. Öğretmen adaylarının sergiledikleri bu davranışlar neticesinde mantık kuralları anlayışına sahip oldukları belirlenmiştir. Yukarıda tartışıldığı üzere, bu anlayışı oluşturan operatörlere farklı çalışmalarda rastlanmış olması çalışmanın sonuçlarını destekler niteliktedir.

4.1.2. Pragmatik Düşünme Anlayışı

Bu anlayışa sahip öğrencilerin faydacı düşünerek, en kısa şekilde sonuca ulaşma eğiliminde oldukları söylenebilir. Mantık kuralları anlayışı ile ortak operatörlerin de (R^-_k1, R^-_k2, R_k5, R^-_s7, R^-_d23, R^-_f31, R^-_f37) içinde bulunduğu bu anlayış, öğrencilerin sorunun çözümüne ulaşabilmek için, verilenleri dikkatte almadan, bulunması istenen durumu verilen bir bilgiymiş gibi kullanarak ya da soruya uygun olarak verdikleri örnek(ler) yardımıyla yaptıkları çözümlerden belirlenen benzer operatörlerin sınıflanması ile elde edilmiştir.

Tablo 4. Pragmatik düşünme anlayışının bileşenleri

C2: PRAGMATİK DÜŞÜNME ANLAYIŞI		
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)	
S_k1	$R^{-}_{k}1$	$R^{-}_{k}2$
S_k2, S_k3, S_k4, S_k5 S_k9, S_k8, S_k10, S_k11	R_k5	
S_k4	$R^{-}_{k}15$	
S_k7, S_k8	$R^{-}_{k}1$	
S_s2	$R^{-}_{s}7$	
S_s4, S_s14, S_s15	R_s12	
S_s18	R_s46	
S_d4	$R^{-}_{d}11$	
S_d7	$R^{-}d23$	
Sf 4	$Rf24$	$R^{-}f26$
Sf 5	$R\text{-}f29$	
Sf 8, Sf 9	$Rf31$	$R^{-}f37$
Sf 10	$R^{-}f53$	
Sf 11	$R^{-}f59$	

Tablo 4'te görüldüğü gibi bu anlayışı oluşturan operatörler uygulama dahilindeki tüm konularda ortaya çıkmıştır. Bu durum şaşırtıcı olmamakla birlikte, öğrencilerin genel manada bir soruyu çözerken kolaycı düşündükleri ve en kısa zamanda, en kısa yoldan çözüme ulaşma eğiliminde oldukları söylenebilir. Bu nedenle araştırmada yer verilmeyen başka herhangi bir konuda da bu anlayışın yansımalarını görmenin mümkün olacağı düşünülmektedir.

Bu anlayışa sahip öğrencilerin verilen sorunun en kısa yoldan çözümüne ulaşmak için kolaycı düşündükleri, anlayışı oluşturan $R^{-}_{k}1$, $R^{-}_{k}2$, $R^{-}_{s}7$, $R^{-}_{k}15$, $R^{-}_{f}26$, $R^{-}_{f}29$, $R^{-}_{f}37$, $R^{-}_{f}53$, $R^{-}_{f}59$ operatörlerinden de anlaşılmaktadır. $R^{-}_{f}37$ operatörünü kullanan Ö26 koldu öğrenci, istenen fonksiyona ulaşmak için verilen fonksiyonu analiz etmesi gerekirken, soruda verilen bilgiyi ihmal ederek, istenene doğrudan ulaşmaya çalışmıştır.

Öğrenciler herhangi bir küme sorusu ile karşılaştıklarında kümeleri birbiri ile kesişecek şekilde çizmektedirler (R_k5). Bu durumu kolaycı düşünme ile ilişkilendirmek ilk başta zordur; ancak öğrencilerin soruda ne verildiğine bakmaksızın, sadece kümeleri içerdiği için bu şekilde çizim yapmaları onların sadece soruya bir şekilde çözüm getirmeye odaklandıklarını, kullandıkları şemanın soruyu yansıtıp yansıtmadığı ile ilgilenmediklerini göstermektedir. Öğrencilerin herhangi bir küme sorusu ile karşılaştıklarında kümeleri birbiri ile kesişecek şekilde çizmelerinin bir nedeni de, bu çizim şeklinin öğrencilerin ilk ve en sık karşılaştıkları örnek olmasından kaynaklanıyor olabilir. Her iki durumda da öğrencilerin hiç düşünmeden bu çizim şeklini kullanmış olmaları onların kolaycı düşündüklerinin bir göstergesi olarak kabul edilerek araştırmacı ve danışmanının vardığı fikir birliği neticesinde R_k5 operatörü bu anlayışı oluşturan operatörler arasına alınmıştır.

Bu anlayışı oluşturan diğer operatörler incelendiğinde (R^-_k1, R^-_k2, R^-_f29, R^-_f31, R^-_f53, R^-_f59) öğrencilerin verilen bir önermenin doğruluğunu ispatlamak yerine bu önermeyi sağlayan bir veya birkaç değer ile çözümü gerçekleştirdikleri görülmektedir. Öğrenciler yine sonuca ulaşmak için kolaycı düşünerek, ispatı sağlayan örnekleri bulmayı tercih etmişlerdir.

Bu anlayışa sahip öğrencilerin değer(ler) vererek soruya cevap verme eğiliminde oldukları da anlayışı oluşturan operatörlerden (R_f24 ve R^-_f31) hareketle söylenebilir. Bu öğrenciler değişkenlere değerler vererek ya da verilen duruma uygun örnekleri kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Burada da faydacı düşünerek kısa yoldan sonuca ulaşma düşüncesinde oldukları söylenebilir. Bu durum Ö26 kodlu öğrencinin mülakat verilerinde de dikkat çekmektedir.

Ö26: Dedim ki hani x değerine hani bir doğru çizer gibi değerler verip bir y değeri buluyoruz ya.
A: Hıhı
Ö26: hani onun gibi değerler bulmayı düşündüm.
A: Hımm
Ö26: Sonra düşündüm. Kaça kadar verebilirim dedim sonra hani birkaç tane verdim.

Burada öğrencinin "kaça kadar verebilirim dedim sonra hani birkaç tane verdim" şeklindeki son cümlesinden de anlaşıldığı gibi sonuca bir şekilde ulaşabilmek için birkaç değer vermeye karar verdiği söylenebilir.

Öğrencilerin soruda verilen veya istenen ifadeleri birbirine benzetme (R_s12) ve karmaşık ifadeleri sadeleştirme (R_s46) davranışlarını yine çözümü kolaylaştırmak adına sergiledikleri düşünüldüğünden ilgili operatörler bu anlayış başlığında sınıflanmıştır. Ancak bu kategoride ele alınacak hatalı bir operatörde R^-_k15'tir. Öğrencilerin bu operatörü ifadeyi sadeleştirmek amacıyla kullanırken aralarındaki işlemlere dikkat etmeksizin, aynı ifadede yer alan bir küme ve bu kümenin tümleyeni kümesini yan yana getirmeye çalışmışlardır. Öğrenciler faydacı düşünerek ifadeyi sadeleştirmek adına yanlış kurdukları bilgi sonucunda yanlış sonuca ulaşmışlardır.

y ekseni denildiğinde öğrencilerin zihinlerinde y=0 doğrusunun canlanması muhtemel bir durumdur (R_d^-11). Öğrencilerin y ekseni olarak y=0 doğrusunu düşünerek kolaycı davrandıkları ve basit bir yorumla böyle bir ilişki kurdukları söylenebilir.

Mantık kuralları anlayışının oluşmasını sağlayan “sonuca ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme” operatörü aynı zamanda Pragmatik düşünme anlayışı içinde de yer almaktadır. Öğrencilerin kendi zihinleri doğrultusunda verilenleri dikkate almadan çözüm yapma nedenleri arasında bir şekilde sonuca ulaşma amacı olduğu ve bu nedenle kolaycı düşünerek verilenleri dikkate almadan bazı işlemler yaparak sonuca ulaşma eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Bu durum literatürdeki araştırmalarla paralellik göstermektedir. Soylu ve Aydın (2006) matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesi üzerine yaptıkları çalışmalarında, öğrencilerin problemler içerisinde yer alan kavramlardan çok aritmetik işlemleri yapmaya yöneldikleri sonucuna ulaşmışlardır. Benzer şekilde Bal (2006) 5. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmasının sonucunda matematik dersinde öğrencilerin işleme daha ağırlık verdikleri ve konuların tam anlaşılmadan çözüme ulaşılmak istendiği saptamıştır. Bu çalışmalarda da öğrencilerin kolaycı davranarak verilen sayılar arasında aritmetik işlemlere yönelerek sonuca odaklı davrandıkları, sadece çözüme ulaşma amacını taşıdıkları söylenebilir.

Akbaba-Dağ (2009), çalışmasında sınıf öğretmeni kesirler konusundaki kavram yanılgılarını belirlemeye çalışmıştır. Bu çalışmada öğretmen adaylarına sorduğu sorulardan birinde, adayların bir bütünün belli bir kesir kadarını bulurken yapacakları işlemi çarpma işlemi olarak matematik cümlesi ile ifade edip edemeyeceklerini ve bu işlemi verilen model üzerinde gösterirken izleyecekleri yolu incelemiştir. Elde ettiği verilere göre öğretmen adaylarının verilen ifadeyi çarpma işlemi olarak ifade edebildikleri fakat bazı öğretmen adaylarının isteneni değil de kolaya kaçıp işlemin sonucunu şekil üzerinde gösterdiklerini belirlemiştir. Bu durumda bu şekilde davranan öğretmen adaylarının sadece sonuca ulaşmak amacıyla pragmatik düşünme anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

Kandemir (2007)’in sınıf öğretmeni adayları ile yaptığı çalışma, bazı öğretmen adaylarının sadece sonuca odaklandıklarını doğrular niteliktedir. Öğretmen adaylarının temel matematik dersine ilişkin tutumları ve kavram öğrenim düzeylerini araştırdığı çalışmasında, Araştırmacı öğretmen adaylarından temel kavramlara ilişkin, uygun olan seçeneği işaretlemelerini istediği çoktan seçmeli sorular yöneltilmiştir. Sınıf öğretmeni adaylarının sorulardan birinde %43.2 oranında “denklemdeki bilinmeyen veya bilinmeyenlerin neyi ifade ettiği değil de denklemin çözümü önemlidir ” şeklindeki seçeneği işaretlenmiş olmaları, onların problemin nasıl çözülebileceği ile değil sonucunun ne olacağı ile ilgilendiklerini göstermektedir.

Özetle, sonuca en kısa yoldan, kolaycı bir şekilde ulaşmak amacıyla yapıldığı düşünülen çözümlerden belirlenen operatörler bu anlayışı ortaya çıkarmıştır.

4.1.3. Doğru Genelleme Anlayışı

Bu anlayış, öğrencilerin edindikleri bilgilerden hareketle oluşturdukları doğru genellemeleri kullandıkları ya da bu genellemelerden hareketle yeni genellemelere ulaştıkları çözümlerde belirlenen operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilmiştir. Başka bir ifadeyle, öğrencilerin matematiksel kuralları kullanarak, doğru çıkarımlarda bulundukları operatörler bu anlayışı oluşturmaktadır.

Tablo 5. Doğru genelleme anlayışı bileşenleri

C3:DOĞRU GENELLEME ANLAYIŞI				
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)			
S_k1	R_k3			
S_k4	R_k12			
S_s5	R_s13			
S_s6	R_s14	R_s16		
S_d4	R_d9			
S_d6	R_d18	R_d19		
S_f1	R_f1	R_f2		
S_f5	R_f28			

Tablo 5'te görüldüğü gibi, yapılan bütün uygulamalarda bu anlayışa rastlanmıştır. Bu anlayışın ortaya çıktığı sorulara bakıldığında (S_k1, S_k4, S_s5, S_s6, S_d4, S_d6, S_f1, S_f5) daha karmaşık ve irdeleme gerektiren tarzda sorular oldukları görülmektedir. Anlayış, kendisine verilen isimden de anlaşılacağı gibi, sadece doğru kullanılan operatörlerden oluşmaktadır.

Bu anlayışa sahip öğrencilerin bir soru ile karşılaştıklarında etraflıca düşündükleri, soruda verilen çeldirici durumlardan etkilenmedikleri belirlenmiştir. Bir önerme bir özel durum için doğru değilse, her zaman doğru değildir (R_k3) operatörünü kullanarak soruya çözüm getirebilmek, bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur (R^-_k1) operatörünü kullanmaktan zordur. Burada öğrencinin soruyu iyi bir şekilde analiz ederek, önermeyi sağlamayan bir örneği bulma arayışına girmesi matematiksel ispat yöntemlerini de bildiği şeklinde yorumlanabilir.

4.1.4. Hatalı Genelleme Anlayışı

Bu anlayış öğrencilerin sahip oldukları bilgileri hatalı olarak genellediklerinin belirlendiği operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilmiştir. O halde bu anlayışa sahip öğrencilerin, soruyu çözerken sahip oldukları hatalı genellemeleri kullandıkları söylenebilir.

Tablo 6. Hatalı genelleme anlayışı bileşenleri

C4:HATLI GENELLEME ANLAYIŞI					
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)				
S_k3	R^-_k7	R^-_k10	R^-_k11		
S_k4	R^-_k7	R^-_k10	R^-_k14	R^-_k15	
S_k5	R^-_k7	R^-_k16			
S_k6	R^-_k7	R^-_k14	R^-_k15		
S_k9	R^-_k7	R^-_k24			
S_s6	R^-_s15				
S_s15	R^-_s35				
S_d4	R^-_d12	R^-_d13	R^-_d14		
S_d5	R^-_d16	R^-_d17			
S_f1	R^-_f3	R^-_f5	R^-_f6	R^-_f7	R^-_f8
S_f4	R^-_f25	R^-_f26			
S_f5	R^-_f29				
S_f10	R^-_f53				
S_f11	R^-_f59				

Tablo 6'da görüldüğü gibi bu anlayışı oluşturan operatörler, araştırma kapsamındaki her konu için belirlenebilmiştir. Bu anlayışı oluşturan operatörlerden bazılarının (R^-_k7, R^-_k10, R^-_k14, R^-_k15) farklı sorularda ortaya çıkması öğrencilerin bu hatalı bilgiye sahip olduklarını ve farklı durumlarda bu bilgiyi kullanma eğiliminde olduklarını göstermektedir. Benzer şekilde aynı soru ile ilgili olarak farklı öğrencilerin farklı genellemelere sahip oldukları da yine bir problem durumunda bu anlayışı oluşturan farklı operatörlerin kullanılmasıyla açıklanabilir.

Öğrencilerin herhangi iki kümenin birleşimi kümesini evrensel küme olarak düşünmeleri (R^-_k7), bu iki kümenin tümleyeni kümesinin olabileceği bilgisini ihmal ettiklerini göstermektedir. Birçok soruda (S_k3, S_k4, S_k5, S_k6, S_k9) karşımıza çıkan bu bilgi sorularda doğrudan kullanılmamıştır. Ancak öğrenciler üçüncü soruda $A' = B \setminus A$, $B' = A \setminus B$, $(A' \setminus B) = \phi$, dördüncü soruda $X \cup A' = X$, beşinci soruda $A' \setminus B = \phi, B' \setminus A = \phi$;

$A' \cap B' = \phi$, altıncı soruda $A' \cap B' = \phi$ ve dokuzuncu soruda ise $A' = B$ ve $B' = A$ eşitliklerini kullanarak $A \cup B = E$ genellemesine sahip olduklarını göstermişlerdir.

$A' = B \setminus A$ ve $B' = A \setminus B$ eşitliklerini doğru kabul ederek soruyu hatalı çözen öğrencilerden Ö45 kodlu öğrencinin aşağıda yer alan ifadeleri, bu eşitlikleri; iki kümenin birleşimi kümesi dışında eleman olmadığı bilgisinden hareketle doğru kabul ettiklerini göstermektedir:

> A: Şurada 3. soruda neden böyle düşündün? […] A: Şimdi A'nın tümleyeni B\A, B'nin tümleyeni de A\B dir öyle mi?
> Ö45:Evet.[…] Ya ben burada evrensel kümeyi alsaydım bu şekilde yaptığım doğru olabilirdi. Ama evrensel kümeyi almadığım için hata yaptım.
> A: Yani sen A $\cup$ B kümesinin dışındaki elemanları düşünmedin. O yüzden hata yaptın.
> Ö45:Evet

Öğrencilerin sahip oldukları hatalı genellemelerden bir diğeri tümleyen işlemi ile ilgili olarak karşımıza çıkmıştır (R^-_k10, R^-_k11, R^-_k14, R^-_k15). Öğrencilerin bu işlemle ilgili olarak zihinlerinde oluşturdukları genellemelerden biri "tümleyeni olan bir ifade tekrar tümleyeni alınarak tümleyenden kurtarılır" şeklindedir (R^-_k10). Bu bilgiyi kullanarak çözüme ulaşmaya çalışan öğrenciler işlemi basitleştirmek adına böyle bir genellemeye gittikleri Ö39 kodlu öğrencinin "*A'nın tümleyenin tümleyeni alınca A kalıyor, B'nin tümleyeninin tümleyeni B oluyor, o halde bir ifadeyi tümleyenden kurtarmak için tekrar tümleyen almalıyız"* ve Ö44 kodlu öğrencinin "*O tümleyenlerden kurtulup, sade şeklini istemişsiniz ya hani o yüzden tekrar tümleyen aldım"* şeklindeki açıklamalarından da çıkarılabilir. Tümleyenden kurtulmak adına istedikleri şekilde tekrar tümleyen alabileceklerini düşünen bu öğrenciler bu genellemeleri neticesinde yanlış sonuca ulaşmışlardır. Tümleyen işlemi ile ilgili olarak öğrencilerin sahip oldukları diğer bir hatalı bilgi ise "iki kümenin tümleyeninin farkı kümesinin, aynı zamanda bu kümelerinin farkının tümleyenine eşit olduğu $(A'/B') = (A/B)'$" bilgisidir (R^-_k11). Öğrenciler burada tümleyen işlemini bütün ifadeye taşıyabileceklerini düşünerek hatalı sonuca ulaşmışlardır. Bazı öğrenciler ise herhangi bir kümenin tümleyeninin evrensel kümeye eşit olduğu genellemesini kullanmışlardır (R^-_k14). Kümelerle ilgili uygulamanın dördüncü ve altıncı sorularında bu operatörü kullanan öğrenciler sorulara hatalı cevap vermişlerdir. Diğer bir operatör ise, öğrencilerin bir ifadede bulunan küme ile bu kümenin tümleyeni kümesini bir araya getirme çabalarının sonucunda belirlenmiştir. Bilindiği gibi bir küme ve tümleyeni arasında $A \cup A' = E$ ve $A \cap A' = \phi$ bağıntıları mevcuttur. Ancak öğrenciler bu bağıntıları elde edebilmek adına, daha karmaşık ifadelerde ve birbirinden ayrı duran küme ve tümleyenini yan yana getirebilmek adına bu kümelerin aralarındaki işlemlere dikkat etmemektedirler (R^-_k15). Pragmatik düşünme anlayışı içinde de yer alan bu operatörün kullanılma amaçları arasında, kolay yoldan hızlı bir şekilde sonuca ulaşmak olabileceği gibi öğrencilerin "bir soruda bir küme ve bu kümenin tümleyeni kümesi varsa bu kümeler yan yana getirilir" şeklinde bir genellemeye sahip olmaları düşüncesinin de yer aldığı söylenebilir. Bu nedenle bu operatörü kullanan öğrencilerin hatalı genelleme anlayışına da sahip oldukları düşünülmektedir.

Bu anlayış içinde yer alan diğer bir operatör ise kümelerde fark işleminin birleşme özelliği olduğu bilgisidir (R^-_k16). Öğrencilerin fark işleminin birleşme özelliği olduğu genellemesine sahip olmaları, bu özelliğin farklı işlemlerde kullanılabilir olması ile ilişkili olduğu düşünülmektedir. Bilgi transferi anlayışı ile ilgili bölümde daha detaylı olarak tartışılacak olan bu durum kısaca öğrencilerin herhangi bir durumda doğru sonuç veren bir bilginin, sonucun ne olacağı düşünülmeden başka bir durumda da kullanılması şeklinde ifade edilebilir.

Bu anlayışa sahip öğrencilerin kullandıkları diğer bir bilgi ise "ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümesi bir aralık belirtir" şeklindedir (R^-_s35). Burada öğrencilerin eşitlik kavramını eşitsizlik gibi düşünerek böyle bir genellemeye vardıkları söylenebilir.

Öğrencilerin hatalı olarak genelledikleri başka bir bilgi ise, *(x,y) noktası (x,0) ve (0,y) şeklinde iki bileşenden oluşur*, operatörü (R_d^-13) ile karşımıza çıkmaktadır. Bu öğrencilerin, *2x+y=10 ve 2y-3x=6* doğrularının kesim noktasının koordinatlarını ortak çözüm sonucunda x=2 ve y=6 olarak buldukları ve bu noktayı düzlemde (2,0) ve (0,6) noktaları olarak gösterdikleri tespit edilmiştir. Bu şekilde çözüm yapan bir öğrencinin

> A: […]Peki bu bulduğun nedir (2,6) ?
> Ö14: Biri x ekseninde biri y ekseninde koordinatların birleşimi
> A: Peki (2,6) bir nokta mıdır? İki nokta mıdır?
> Ö14: İki noktadır.

şeklindeki ifadeleri kendisi gibi çözüm yapan diğer öğrencilerin de sahip oldukları bu hatalı genellemeyi ortaya koymaktadır. Türkdoğan (2006) sınıf öğretmeni adaylarının denklemler ve grafikleri konusundaki öğrenme ürünlerini BDMÖ materyali yardımıyla incelediği çalışmasında öğrencilerin (x,y) noktasının (x,0) ve (0,y) gibi düşünülmesi yanılgılarının olduğunu tespit etmiştir. Bu bağlamda elde edilen bulgular Türkdoğan'ın (2006) bulgularıyla örtüşmektedir.

Bu anlayışı oluşturan operatörlerden bir diğeri; *bir açıları eş olan üçgenlerin alanlarını da eş olacağı* (R_d^-14) bilgisidir. Öğrencilerin iki üçgenin alanlarının aynı olabilmesi için birer açılarının eş olmasını yeterli görmeleri, zihinlerinde böyle bir genellemeyi oluşturduklarını gözler önüne sermektedir.

Uygulama sorularında yer verilen günlük hayat problemleri, öğrencilerin daha farklı davranmalarına yol açmıştır. Şöyle ki, herhangi bir denkleme ait grafiği çizerken zorlanmayan öğrenciler, günlük hayat problemleri ile karşılaştıklarında oluşturdukları grafiğin orijinden geçmesi gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu düşünceleri neticesinde ortaya orijinden başlatılan doğru çizimleri çıkmıştır (Bkz. Şekil 138, Şekil 149d). Özellikle Şekil 149d'de verilen çizim, doğruyu orijinden başlatabilmek adına doğrultunun değiştirilebileceğini kanıtlar niteliktedir.

Bu durum farklı çalışmaların soncunda da ortaya çıkmıştır. Çelik ve Sağlam-Arslan (2012) sınıf öğretmeni adaylarının sözel, tablo, şekilsel gösterimler ve grafikler arasında geçiş yapabilme becerilerini tespit etmek amacıyla yaptıkları çalışmalarında, tablodan grafiğe geçişle ilgili sorulara verilen cevaplarından hareketle, öğretmen adaylarının her grafiğin orjinden geçmesi gerektiğine inandıklarını belirtmişlerdir. Benzer şekilde Yıldırım (2003)'ın lise birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyon konusu ile ilgili olarak sahip oldukları kavram yanılgılarını tespit etmeye yönelik çalışmasının sonuçlarından biri ortaya çıkan bu durumu destekler niteliktedir. Araştırmacı çalışmasında, öğrencilerin fonksiyon grafiklerinin orijinden geçmesi gerektiğini düşündüklerini belirlemiştir. Bu durum Leinhardt, Zaslavsky ve Stein tarafından, "öğrencilerin orijini grafiğin vazgeçilmez bir parçası olarak algıladıkları ve bu durumun çizdikleri bütün grafiklerin orijinden geçmesine sebep olduğu" şeklinde ifade edilmektedir (Akt. Hadjidemetriou ve Williams, 2002, s. 72.)

Öğrencilerin bir bağıntının grafiğine bakarak fonksiyon olup olmadığına karar vermeleri istendiğinde verdikleri cevaplardan hareketle hatalı bilgiler kurdukları söylenebilir. Bu hatalı bilgilerden biri, bir bağıntının grafiğinin x ve y eksenlerini kesmesi durumunda fonksiyon belirteceği şeklindedir. Bayazıt (2008), Markovists vd (1986) çalışmasından hareketle, öğrenciler arasında bir fonksiyon grafiğinin x ve y eksenlerinin her ikisini kesen bir doğru olması gerektiği gibi bir yanlış algılamaya sıkça rastlandığını belirtmiştir (s. 97).

Öğrencilerin sahip olduğu diğer hatalı genellemeler ise bir bağıntının grafiğinin eğri olması gerektiği veya bağıntının grafiğinin sonsuza gitmesi durumlarında fonksiyon belirtmeyeceği, bir bağıntının tanımsız olduğu değerlerin olmaması veya tanım kümesinin sınırlı olması durumunda fonksiyon belirteceği şeklinde sıralanabilir. Literatürde öğrencilerin fonksiyonların grafik gösterimlerini sadece düzgün doğru veya eğri şeklindeki grafiklerle kısıtladıkları sonucuna ulaşan çalışmalara rastlamak mümkündür (Vinner, 1983; Tall ve Bakar, 1991; Janvier, 1998; Yıldırım 2003; Carlson ve Oehrtman 2005; Çelik, Sağlam-Arslan 2012, Özgün-Koca, 2008,). Baki (2008) bu durumu öğrencilerin zihinlerinde prototip örnekler geliştirmelerine bağlamaktadır. Buna neden olarak da kitaplarda ve ders işlenişi sırasında belirli fonksiyon örnekleri üzerinde etkinliklerin yapılması ve bu etkinliklerin öğrencileri, yalnız bu örneklerin fonksiyon olabileceği düşüncesini geliştirmeye yönlendirdiğini belirtmektedir.

Öğrencilerin bu bilgileri karşılaştıkları herhangi bir bağıntı veya bağıntının grafiği için kullanacakları düşünüldüğünde, bu öğrencilerin hatalı genelleme anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

4.1.5. Kısmi Genelleme Anlayışı

Genelleme ile ilgili anlayışlardan diğeri, kısmi genelleme anlayışı olarak belirlenmiştir. Bu anlayışı oluşturan operatörlerin ortak noktası; öğrencilerin istenen ifadeye bir ya da birkaç örnek vererek ulaşabileceklerini düşünmeleridir. Türkdoğan (2011) yanlışlarla ilgili sınıflamasında *Soyutlama-genelleme yanlışlar*ını*;* bir veya birkaç durumdan hareketle öğrencilerin yaptıkları haddinden fazla genellemeler olarak ifade etmektedir. Bu durumda *soyutlama-genelleme yanlışları*, *kısmi genelleme anlayışı* içinde incelenebilir.

Tablo 7. Kısmi genelleme anlayışı bileşenleri

C5:KISMİ GENELLEME ANLAYIŞI			
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)		
S_k1, S_k7, S_k8	$R^{-}_{k}1$		
S_s2, S_s7	$R^{-}_{s}6$		
S_s6	$R^{-}_{s}6$	$R^{-}_{k}17$	$R^{-}_{k}19$
S_f4	$R^{-}_{f}26$		
S_f5	$R^{-}_{f}29$		
S_f10	$R^{-}_{f}53$		
S_f11	$R^{-}_{f}59$		

Tablo 7'de görüldüğü gibi denklemler konusunda bu anlayışı oluşturan herhangi bir operatör belirlenememiştir. Bu anlayışı oluşturan bileşenlerden problemler kümesini; öğrencilerin değer verebileceği değişkenlerin yer aldığı soruların oluşturduğu söylenebilir

(S_k1, S_k7, S_k8, S_s2, S_s6, S_s7, S_f5, S_f10, S_f11). Bu anlayışa sahip öğrenciler, soruda yer alan değişkene ya da bilinmeyen terime mümkünse bir veya birkaç değer vererek genellemelere ulaşmaya çalışmışlardır. Eğer soruda ispatlanması gereken bir durum varsa, verdikleri değer(ler)in sonucunda önermenin doğru olup olmadığını göstermişlerdir. Bu durum Baker (1996)'in çalışmasının sonucuyla paralellik göstermektedir. Araştırmacı lise ve üniversite öğrencilerinin, ispat tekniklerinden biri olan matematiksel tümevarım ile ispat yapma becerilerini araştırdığı çalışmasında öğrencilerin önermelerin doğru olup olmadığına belli örnekler vererek karar verdikleri sonucuna ulaşmıştır. Bu öğrencilerin tümevarımsal ispatı yaparken kısmi genelleme anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

Benzer şekilde Özer ve Arıkan (2002), lise öğrencilerinin ispat yapabilme düzeylerini araştırdıkları çalışmalarında öğrencilerin, verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için özel sayısal değerler verdikleri ve böylece bu ifadenin doğruluğunu gösterdiklerine inandıkları ortaya çıkmıştır.

Benzer bir durum İskenderoğlu (2010)'nun çalışmasından da ortaya çıkmıştır. Araştırmacı, ilköğretim Matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemalarını incelediği araştırmasında, bazı öğretmen adaylarının örnekler yardımıyla problemde verilen ifadenin doğru olduğunu göstermenin daha kolay ve somut bir yol olduğunu dile getirdiklerini belirtmişlerdir.

Köğce (2012) ise ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile ispat yapmanın matematik öğretimine katkısıyla ilgili görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemek amacıyla yaptığı çalışmasının bir sonucu olarak öğretmen adaylarının önemli kısmının verilen ifadeyi sayısal değerler vererek doğrulanmanın bir ifadeyi ispatlamak için yeterli olduğuna inandıklarını belirlemiştir.

Bu çalışmalara katılan öğretmen adaylarının da sınırlı sayıda örnekten yola çıkarak genellemelere ulaşabileceklerini düşündükleri başka bir ifadeyle kısmi genelleme anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin kısıtlı sayıdaki örneği kullanarak doğru sonuca ulaşmak için kullandıkları operatörlerden biri *bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğru olduğu* (R^-_k1) bilgisidir. Bu operatörü kullanan öğrencilerin verilen önermenin doğruluğunu gösterebilmek için özel bir durum seçtikleri ve bu özel durum üzerinden bir genellemeye ulaştıkları söylenebilir. Ancak bu özel durum dışındaki durumlarda önermenin doğruluğunun araştırılmamış olması öğrencilerin eksik çözüm yaptıklarını göstermektedir. Örneğin; $A=a.x^n+b.y^n$, $c|a+b$ ise $c|A$ dır önermesi, n=0 için doğrudur.

Ancak bu önermenin her zaman doğru olabilmesi için bu n=0 özel durumunun önermeyi doğrulaması yeterli değildir. Sıfır değerinin dışındaki sayılar için de önermenin sağlanması gerekmektedir. Bu durumda sadece n=0 özel durumundan hareketle $A=a.x^n+b.y^n$, $c|a+b$ ise $c|A$ dır önermesinin doru olduğunu kabul eden öğrencilerin kısmi genelleme anlayışını benimsedikleri söylenebilir.

Benzer şekilde bir parabolün üzerindeki noktalardan birinin sağladığı herhangi bir denklemin bu parabole ait olduğu bilgisini kullanan öğrenciler, parabolün üzerindeki her noktanın bu denklemi sağlaması gerektiği bilgisini ihmal ederek sadece bir noktanın durumundan hareketle genel durum için karar vermişlerdir. Bu nedenle bu öğrencilerin kısmi genelleme anlayışına sahip oldukları söylenebilir. Aynı mantıkla, bir f fonksiyonu için f(x)=y iken $f^{-1}(y)=x$ şartını sağlayan bir/birkaç değer bulunduğunda bu fonksiyonun tersi olduğunu düşünen öğrencilerin bu anlayışa sahip oldukları düşünülebilir.

Özetle bu anlayışa sahip öğrenciler, sınırlı sayıdaki örnekle genel bir ifadenin doğru olup olmadığını araştırma eğiliminde olmaktadırlar. Bu durum anlayışı oluşturan operatörlerde de açıkça görülmektedir.

4.1.6. Özel Değer Verme Anlayışı

Bu anlayış, cebirsel bir ifadedeki bilinmeyen ya da değişkenlere özel değerler vererek sonuca gidildiği çözümlerde belirlenen benzer operatörlerin bir araya gelmesi ile ortaya çıkmıştır.

Tablo 8. Özel değer verme anlayışının bileşenleri

C6: ÖZEL DEĞER VERME ANLAYIŞI	
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)
S_k7, S_k8	R^-_k20
S_s1, S_s4, S_s14	R^-_s5
S_d1, S_d3, S_d5	R_d2
S_f5	R_f24
S_f8, S_f9	R_f31

Bu anlayışı kısmi genelleme anlayışından ayıran özellik, genelleme durumunun olmamasıdır. Örneklerle ifade etmek gerekirse bu anlayışa sahip öğrenciler verilen bir cebirsel ifadede eşitliği sağlamak için değişkenlere belli değerler vererek ya da bir kümeye rastgele elemanlar vererek bu elemanlar cinsinden sonuca ulaşmaya çalışırken, kısmi genelleme anlayışı olan öğrenciler ise sınırlı sayıda değer veya örnek üzerinden genel bir ifadenin doğruluğunu gösterme eğimlindedirler.

Tablo 8'de görüldüğü gibi bu anlayışı oluşturan operatörlere araştırma kapsamındaki bütün konularda rastlanmıştır. Tabloda dikkati çeken bir durum ise bu anlayışa sahip öğrencilerin, özel değerler verip deneme yaparak istenilen doğru sonuca ulaşabilecekleri gerçeğidir. Bu durum anlayışı oluşturan operatörlerde de görülmektedir. Öğrencilerin özellikle verilen ifadedeki değişkenlere ya da terimlere değerler vererek doğru çözüme ulaşabildikleri söylenebilir (Bkz. Şekil 185).

Dede (2005), eğitim fakültesi birinci sınıf öğrencilerinin, 1. dereceden denklemleri nasıl yorumladıklarını araştırdığı çalışmasında, öğretmen adaylarının 1. dereceden denklemleri yorumlarken, doğru betimleme, ters anlama, sayı ilişkisi, mekanik denklem kullanımı, doğrudan ilişki, fiyat-ağırlık vs. ilişkisi ekleme, özelleştirme ve direkt yazma stratejilerini kullandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin, bu stratejiler arasında yer alan "özelleştirme (sayısal veri yazma)" stratejisi başlığı altında sergiledikleri davranışlar, bu anlayış içinde yer alan operatörlerle örtüşmektedir. Dede (2005)'nin çalışmasında öğretmen adaylarının denklemlerde verilen harflerin yerine keyfi olarak yazılmış sayılar aracılığıyla denklemleri açıklamaya çalıştıklarını ifade etmektedir.

Bu araştırmanın sonucunda da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının, bir eşitliği yorumlarken ya da çözerken bu eşitliği sağlayan değerleri bulma eğiliminde başka bir ifadeyle özel değer verme anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

4.1.7. Bilgi Transferi Anlayışı

Bu anlayış, bir problem durumunda doğru olarak sonuç veren bir bilginin başka bir problem durumunda kullanılmasını içeren operatörlerin sınıflanmasıyla oluşturulmuştur. Bu açıdan bakıldığında Graeber ve Johnson (1991) (Akt. Zembat 2008, s. 43) ve Ryan ve Williams (2007) tarafından tanımlanan *aşırı genellemeden* farkı yokmuş gibi görünse de bu anlayış sadece yanlış operatörleri değil doğru operatörleri de içermektedir.

Bu anlayışa sahip olan öğrenciler, herhangi bir durumda onları doğru sonuca götüren bir bilginin başka durumlarda da doğru sonuç vereceğini düşünmektedirler. Tablo 9 incelendiğinde bu anlayışı oluşturan operatörlerin çoğunlukla hatalı olduğu görülmektedir.

Bu durum bize öğrencilerin, bir bilgiyi kullanırken bu bilginin kullanılabildiği her koşulda onları doğru sonuca götüreceğini düşünerek hata yaptıklarını göstermektedir.

Tablo 9. Bilgi transferi anlayışının bileşenleri

C7: BİLGİ TRANSFERİ ANLAYIŞI				
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)			
S_k1	R^-_k6			
S_k3	R^-_k9	R^-_k11		
S_k5	R^-_k9	R^-_k16		
S_k7	R^-_k18			
S_k9	R^-_k24			
S_s1	R^-_s3	R^-_s4		
S_s4	R^-_s3	R^-_s9	R^-_s10	R^-_s11
S_s6	R^-_s20			
S_s8	R^-_s23			
S_s10	R^-_s25	R^-_s26		
S_s12	R^-_s28			
S_s14	R_s32	R^-_s33	R^-_s34	
S_s17	R^-_s43			
S_s18	R^-_s47			
S_d6	R_d20			
S_d7	R_d21			
S_f1	R^-_f6			
S_f2	R^-_f15	R^-_f18		
S_f3, S_f5	R^-_f21			
S_f4	R_f22			
S_f6	R^-_f32			

Anlayışı oluşturan operatörlere bakıldığında öğrencilerin “kümelerle kesişim ve birleşim işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özelliği veya birleşme özelliği olduğu” bilgisini kümelerle fark işlemi için kullanarak (R^-_k9, R^-_k16), yapmış oldukları bilgi transferi ile “kümelerle fark işleminin birleşme işlemi üzerine dağılma özelliği vardır veya kümelerle fark işleminin birleşme özelliği vardır” bilgilerini kullandıkları söylenebilir. Yine aynı doğru bilgiyi kullanarak “kesişim işleminin alt küme üzerine dağılma özelliği vardır (R^-_k6)” bilgisine ulaştıkları görülmektedir. Benzer şekilde tam sayılarla çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğu bilinmektedir. Öğrencilerin bu bilgiyi bölme işlemine transfer ettiği ve “tam sayılarla bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır (R^-_s11)” bilgisini kullanarak x, y, $z \in Z$ ise $(x:y)+(x:z)=t$ ise $x:(y+z)=t$ eşitliğini doğru kabul ettikleri görülmektedir. Aynı durum fonksiyonlar konusundaki bileşke işleminde de karşımıza çıkmıştır. Öğrenciler bileşke işlemini toplama işlemi üzerine dağıtarak $f^{-1} \circ (f(x) + g(x)) = f^{-1} \circ f(x) + f^{-1} \circ g(x)$ ($R^{-}_{f}32$) eşitliğini kullanmışlardır. Burada öğrencilerin bileşke işleminin soldan dağılma özelliğini fonksiyonlar arasında toplamı işlemi varken de uygulamış olmaları bilgiyi transfer ederken hata yaptıklarını göstermektedir. Tüm bu hatalı transferler öğrencilerin yanlış sonuç bulmalarına neden olmuştur.

Diğer bir bilgi transferi örneği ise üslü sayıların bilinen bir özelliği kullanılarak yapılmıştır. Şöyle ki; üslü sayılarla çarpma işlemi yapılırken, çarpımın üssünün çarpanlara dağıtabileceği bilgisi ($(a.b)^n=a^n.b^n$) doğru sonuç veren ve kullanılan bir bilgidir. Öğrencilerin bu bilgiyi üslü sayılarla toplama ve bölme işlemleri için de kullandıkları, $R^{-}_{s}10$: $(a+b)^n=a^n+b^n$ *dir* ve $R^{-}_{s}33$: $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$ *dir,* operatörleri ile belirlenmiştir. Burada öğrencilerin çarpma işlemi için doğru sonuç veren bu bilgiyi toplama ve bölme işlemlerine transfer ederek hata yaptıkları düşünülmektedir. Cengiz (2006), çalışmasının örneklemini oluşturan 9. sınıf öğrencilerinin bazılarının $(a+b)^2=a^2+b^2$ eşitliğini kullandıklarını belirtmiştir. Benzer şekilde öğrencilerin kümeler konusunda $(A'/B') = (A/B)'$ ve $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$ ($R^{-}_{k}11$, $R^{-}_{k}24$) eşitliklerini kullanmış olmaları bu bilgiyi kümeler konusunda bazı durumlara da transfer ettikleri izlenimini bırakmaktadır. Özetle öğrencilerin üslü sayılarla çarpma işleminde kullandıkları üssü dağıtma bilgisini başka durumlarda da kullanabilecekleri düşüncesine sahip oldukları söylenebilir.

Yine üslü sayıların toplanması ve çarpılması ile ilgili olarak öğrencilerin kullandıkları operatörler ($R^{-}_{s}20$, $R^{-}_{s}28$, $R^{-}_{s}34$) göstermektedir ki, öğrenciler üslü sayıların toplanması ve çarpılması kurallarını birbirlerinin yerine kullanarak, hatalı transfer yapmaktadırlar.

Öğrencilerin farklı durumlara transfer ettiği diğer bir bilgi çarpma işlemi ile ilgilidir. Rasyonel sayılarla çarpma işleminin kuralı ilköğretim ilk kademeden itibaren öğrenciler tarafından kullanılmaktadır. Payda bulunan sayıların çarpılarak, çarpımın payına; paydada bulunan sayıların çarpılarak çarpımın paydasına yazılması şeklinde ifade edilen bu kural öğrenciler tarafından toplama işlemi için de kullanılabilmektedir. Bu durumda öğrencilerin $\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{a\,x\,c}{b\,x\,d}$ şeklindeki kuralı $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ eşitliği için de doğru kabul ederek soruların çözümlerinde kullanmış olmaları yaptıkları bilgi transferini gözler önüne sermektedir.

Yujing ve Zhou (2005) çalışmalarında bazı öğrencilerin $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ toplamını $\frac{2}{5}$ olarak yazdıklarını, dolayısıyla yukarıda verilen kuralı doğru kabul ettiklerini ifade etmişlerdir. Wu (1999) ise bazı üniversite öğrencileri ile ilgili olarak tekrarlanan raporlarda, öğrencilerin gerek ödevlerinde, gerekse sınav kağıtlarında $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b+c}$ ve $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ gibi çözümlere rastlanıldığının iddia edildiğini belirtmiştir. Kerslake (1986) İngiltere'de ikinci kademe (12-14 yaş) öğrencileri ile kesirler konusunda yapmış olduğu çalışmanın raporunda öğrencilerde böyle bir yanılgı olduğuna değinmiştir. Yine bu durum Özçiftci'nin (2007), yedinci sınıf öğrencilerinin, rasyonel sayılarla ilgili olarak geliştirdikleri hataları belirlediği araştırmasının sonuçları ile de örtüşmektedir. Aynı zamanda Cengiz (2006) de 9. sınıf öğrencileriyle yürüttüğü çalışmasında bazı öğrencilerin rasyonel sayılarla toplama ve çıkarma işlemi yaparken payları ve paydaları toplayıp çıkarma yanılgısına sahip olduklarını belirlemiştir. Farklı olarak Soylu ve Soylu (2005) 5. sınıf öğrencileri ile kesirlerle işlemler üzerine yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin önceden öğrendikleri toplama işleminin kuralını çarpma işleminde kullandıklarını belirlemişlerdir. Bu durumda, bu öğrencilerin de bilgi transferi anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

Benzer olarak, öğrencilerin çarpma işleminin sadeleşme kuralını toplama işlemi için kullanarak (R^-_s4), toplam durumundaki rasyonel ifadeleri sadeleştirdikleri belirlenmiştir. Çarpma işlemi ile doğrudan ilgili olmasa da, bir rasyonel sayının genişletilmesi için pay ve paydasının bir sayı ile çarpılabileceği bilgisinin, çıkarma işlemi için de kullanılmış olması bu kategoride incelenebilir. Öğrencilerin, kullandıkları R^-_s47 operatörü; bir rasyonel ifadenin pay ve paydasından aynı sayıyı çıkararak bu sayının değerinde bir değişme olmamış gibi davrandıklarını göstermektedir. Böylece öğrencilerin yine çarpma işlemi için geçerli olan bir kuralı, çıkarma işlemi için kullandıklarını söyleyebilmekteyiz. Çarpma işleminin transferi ile ilgili olarak belirlenen diğer bir durum köklü sayılarda ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin kök dereceleri aynı olan iki sayının çarpılması kuralını toplama işlemi için de kullanarak $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$ bilgisinin hatalı transferi sonucunda $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ (R^-_s43) eşitliğini doğru kabul ettikleri görülmektedir. Bagni (2000) çalışmasında bu durumun öğrencilerde var olan genel yanılgılar arasında yer aldığını belirtirken, Cengiz (2006)'in 9. sınıf, Gelici (2012)'nin ise 8. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmaların sonucunda da öğrencilerin $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu durumda, öğrencilerin sahip oldukları anlayışlarını daha sonraki yıllara da taşıdıkları söylenebilir.

Bir rasyonel sayı için $(\frac{a}{b})^{-1}=\frac{b}{a}$ eşitliğinin doğru olduğu bilinmektedir. Ancak öğrencilerin bu doğru bilgiyi; *herhangi iki rasyonel sayının çarpmaya göre terslerinin (-1. kuvvetleri) toplamı, bu sayıların toplamının çarpmaya göre tersine (-1. kuvvetine) eşittir,* durumunda kullanarak hatalı transfer yapmışlardır (Bkz. Şekil 62). Bu durumda $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=t \Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{1}{t}$ ($R^{-}_{s}9$) eşitliğini kullanarak hatalı sonuca ulaşmaları kaçınılmaz olmuştur. Bu hatalı davranışı sergileyen öğrencilerden biri; "$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x$ *ise, bunların ayrı ayrı çarpmaya göre terslerinin toplamı* $\frac{1}{x}$ *'e eşittir"* bilgisini kullandığını ifade ederken, diğer bir öğrenci ise toplamın -1. kuvvetini aldığını ve üssü toplananlara dağıttığını kabul etmiştir. Bu durumda öğrencinin $(a+b)^n=a^n+b^n$ eşitliğini de doğru kabul ederek ikinci bir hatalı bilgi transferi yaptığı söylenebilir.

Özçiftci (2007), 7. sınıf öğrencileri ile yürüttüğü çalışmasında, "öğrencilerin ardışık iki tam sayı arasına başka bir tam sayı yazılamayacağı" düşüncesinden hareketle $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{5}$ sayılarını ardışık olarak düşünerek, bu iki sayı arasına başka bir sayı yazılamayacağını düşündüklerini belirlemiştir (Özçiftci, 2007). "Ardışık iki tam sayı arasına başka bir tam sayı yazılamaz" şeklinde bir düşüncede olan öğrencilerin, bilgi transferi anlayışına sahip oldukları ve tam sayılarda geçerli olan bu durumun, rasyonel sayılar için de kullanılabileceği söylenebilir. Öte yandan öğrencilerin $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{5}$ sayılarını arasına başka bir rasyonel sayı yazılamayacağını "Ardışık iki tam sayı arasına başka bir tam sayı yazılamaz" bilgisinden hareketle söylemeleri, bu bilginin kontrol bilgisi olarak kullanıldığı anlamını da taşımaktadır. Bu durumun tersi de mümkün olmaktadır. Öğrenciler, toplama işleminin kuralını çarpma işlemi için kullanabilmektedirler. Soylu ve Soylu (2005) beşinci sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmasının bir sonucu olarak, öğrencilerin kesirlerle ilgili daha önce öğrenmiş oldukları kuralları daha sonraki kurallara uyguladıklarını; örneğin toplama işleminin kuralını çarpma işlemine uyarlayarak sorulan soruyu cevapladıklarını belirtmiştir. Benzer bir sonuca Cengiz (2006)'in çalışmasında da rastlanmaktadır.

Bu anlayışa sahip olan öğrencilerin sergilediği diğer bir davranış, eşitlik kurallarını hatalı kullanma veya eşitlik ve eşitsizlik kurallarını birbirlerinin yerine kullanma şeklinde karşımıza çıkmıştır. İlk duruma örnek olarak öğrencilerin, harfli ifadelerin ve işlemlerin olduğu bir matematiksel ifadeyi denklem gibi düşünerek çözüm yapmaya çalışma eğiliminde oldukları söylenebilir. Bölünebilme ile ilgili olarak belirlenen $R^{-}_{s}23$ operatörünü kullanan öğrenciler; $x, y, a \in Z$, $x-a|y \Rightarrow x|y+a$ önermesini kullanarak, *(x-a)*'nın *y*' yi böldüğü anlamına gelen $x-a|y$ ifadesini *x-a=y* gibi düşünerek *x=y+a* eşitliğini $x|y+a$ şeklinde ifade etmiştir. Bu durumda böler çizgisini (|), eşittir simgesi (=) gibi düşünerek yaptıkları işlemler onları hatalı sonuca götürmüştür. İkinci duruma örnek olarak, $R^{-}_{s}25{:}\, a,b,x \in \Re$, $a < b-x < c$ *ise* $a < b-c < x$ *dir*, ve $R^{-}_{s}26{:}\, \frac{a}{b} = c$ *ise* $-c < \frac{a}{b} < c$ *dir*, operatörleri verilebilir. Bu operatörlerden de görüldüğü gibi öğrenciler eşitsizlik durumunda eşitlik veya eşitlik durumunda eşitsizlik kurallarını uygulayarak hatalı sonuca ulaşmışlardır. Bu durumda eşitlik ve eşitsizlik kurallarının, hatalı transfer sonucunda birbirlerinin yerine kullandıkları söylenebilir.

Öğrencilerin bilgilerini hatalı olarak transfer ettikleri başka bir operatör $R^{-}_{f}6$ dır. Bir bağıntının fonksiyon belirtmesi için bu bağıntıya ait olan grafiğin x ve y eksenlerini kesmesi gerektiği bilgisine dayanan bu operatör, Markovists vd. (1986)'nin çalışmasında öğrencilerde sıkça rastlanılan bir yanlış algılama olarak ifade edilmektedir (Akt, Bayazıt; 2008, s. 97). Bu durumun sebebini öğrencilerin geçmişten gelen bilgilerinde aramak gerektiğini belirten Bayazıt (2008), öğrencilerin ilköğretim yıllarında doğru grafikleri ile ilgili olarak edinmiş oldukları bilgilerini adapte etmeden fonksiyonlar konusuna aktarmış olabileceklerini belirtmektedir. Bu durumda öğrencilerin doğru grafikleri ile ilgili edindikleri bilgilerini fonksiyon grafiklerine transfer ettikleri başka bir ifadeyle bilgi transferi anlayışına sahip oldukları söylenebilir. Yine Yenilmez ve Avcu, (2009), altıncı sınıf öğrencilerinin cebir başarı düzeylerini araştırdıkları çalışmalarının bir sonucu olarak, önceki konularda yaşanan problemlerin cebirsel ifadeler konusuna da taşındığı, bu olumsuz transferden dolayı başarının biraz daha düştüğü gözlemlemişlerdir.

Şuana kadar öğrencilerin önceden edindikleri bilgilerini yeni karşılaştıkları durumlara çözüm getirebilmek adına hatalı olarak transfer ettikleri durumlarla ilgili olarak örneklendirmeler yapılmıştır. Bu durumda akla şu sorular gelebilir; "Peki bu durumların aksi mümkün olamaz mı?" "Öğrenciler bilgiyi doğru transfer ederek, doğru çözüm gerçekleştiremezler mi?" Bu sorulara "*evet*" cevabını verebildiğimizi söyleyebiliriz. Şöyle ki; bu anlayışa sahip olan öğrenciler bilgiyi transfer etme eğiliminde oldukları için karşılaştıkları problemde çıkmaza düştükleri zaman bu transferi doğru olarak gerçekleştirerek bu çıkmazdan kurtulabilmektedirler. Örneğin; bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralığı bulurken tepe noktasının birinci bileşenini, "*ikinci dereceden bir f fonksiyonu için* f'$(x_0)=0$ *olmak üzere* $(x_0, f'(x_0))$ *fonksiyonun maksimum noktasıdır*" bilgisini (R_f22) kullanan öğrenci türev bilgisini kullanarak çıkmazdan kendini kurtarabilmektedir.

İlk bakışta bilgi transferi anlayışını oluşturan operatörler içinde yer alması çok da anlamlı görünmeyen R_d20 ve R_d21, kullanıldıkları soruya bağlı olarak düşünüldüklerinde bu anlayış içinde yer almaları anlam kazanmaktadır. Nitekim, öğrencilerin hız yol grafiği verilen iki aracın karşılaşmalarından iki saat sonra aralarındaki mesafeyi bulmak için verilen grafiklerin denklemlerini yazmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. R_d20 operatörünü kullanan bu öğrencilerin (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) şeklinde iki noktası bilinen doğrunun denklemine $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ eşitliğinden ulaşarak soruyu çözmeye çalışmaları doğru bilgi transferi yaptıkları anlamı taşıyabilir. Benzer şekilde R_d21 operatörünü kullanarak bu kez de eğimi bilinen doğru denkleminden hareketle iki değişken arasındaki (ücret, zaman) ilişkiyi bulabilmeleri, doğru bilgi transferine örnek olarak verilebilir.

Bu doğru operatörlerin varlığı, *bilgi transferi anlayışı*nı, Graeber ve Johnson (1991) (Akt, Zembat 2008; s. 43) ve Ryan ve Williams (2007) tarafından kategorilendirilen kavram yanılgısı türlerinden biri olan ve "*aşırı genelleme*"den ayıran en önemli husustur.

Özetle öğrencilerin, yukarıda da örneklendirildiği üzere, bir durumda doğru sonuç verebilecek; kural veya özellikleri başka durumlar için de kullanma eğiliminde oldukları söylenebilir. Bu eğilimi gösteren öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları operatörlerin sınıflanmasıyla bilgi transferi anlayışı ortaya çıkmıştır. Bu anlayışın öğrencileri bazen doğru sonuca götürdüğü ancak genelde yapmış oldukları bilgi transferleri neticesinde bir kuralın bir durumda doğru sonuç vermesinin başka herhangi bir durumda da onları doğru sonuca götüreceğini düşünerek hata yaptıkları söylenebilir.

4.1.8. Değişkenler Arası İlişkiler Anlayışı

Bu anlayış öğrencilerin değişkenler ve aralarındaki ilişkileri belirlerken kullandıkları bilgilerden elde edilen operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilmiştir. Bu anlayışın küme ve denklem konularında ortaya çıkmasının sebebi olarak; küme problemlerinde ve denklemlerde cebirsel ifadelerin yoğun olarak kullanılması gösterilebilir. Yine araştırma kapsamında sorulan soruların da bu duruma sebep olduğu düşünülmektedir.

Graeber ve Johnson (1991) kavram yanılgılarını sınıflamaları sonucunda bir kısım yanılgıları *yanlış tercüme* başlığı altında toplamışlardır. Yanlış tercümeden kasıt, gösterim dönüşümleri sırasında yapılan hatalardır (Akt, Zemmbat, 2008, s. 49). O halde isim olarak örtüşmeseler de yanlış tercüme başlığı altında sayılabilecek yanılgıların bazıları aynı zamanda değişkenler arası ilişkiler anlayışını oluşturan operatörler olarak karşımıza çıkabilirler.

Tablo 10. Değişkenler arası ilişkiler anlayışı bileşenleri

C8: DEĞİŞKENLER ARASI İLİŞKİLER ANLAYIŞI		
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)	
S_k4	R_k13	
S_k9, S_k10, S_k11	R_k23	
S_k11	R_k25	R_k26
S_k12	R_k27	
S_d1, S_d2, S_d6	R_d3	
S_d3, S_d5, S_d7	R_d3	R_d4

Bu anlayışı oluşturan operatörlere bakıldığında; değişkenleri belirleme (R_k25), değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme (R_k26, R_d4) ve değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi bulma (R_k27, R_d3) gibi becerileri ihtiva ettiği görülmektedir. Ayrıca bu anlayışa sahip öğrencilerin, değişkenleri ve aralarındaki ilişkileri doğru olarak belirleyebilmelerinin yanı sıra değişkenleri eksik belirledikleri, değişkenler arasındaki ilişkileri ters kurdukları veya hatalı kurdukları söylenebilir. Bu sayılan zorluklar, Tall (1993) tarafından matematikte karşılaşılan öğrenme güçlüklerini sınıflandırdığı çalışmasındaki "günlük hayat problemlerinin matematiksel olarak ifade edilme zorlukları" başlığındaki sınıfı içinde yer alabilir.

Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme (R_k26, R_d4) operatörünü kullanan öğrencilerin değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak bulmak yerine soruyu mantık yürüterek sözel olarak çözdükleri görülmüştür. Benzer olarak Didiş ve Erbaş (2012), 10. sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemleri çözme başarılarını araştırdıkları çalışmalarında, lise öğrencilerinin denklem kurmakta zorlandıkları problemlerde değer verme, deneme yanılma, bildikleri başka benzer bir problem durumuna benzetme gibi çok fazla işlem gerektirmeyen ve işlemsel olarak uğraşmadıkları çözüm yollarına başvurmayı tercih ettiklerini ortaya çıkarmışlardır.

Değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi bulma (R_k27, R_d3) operatörlerini hatalı kullanan öğrencilerin çözümlerine baktığımızda, soruda verilen değişkenler arasındaki ilişkiyi hiç kuramadıkları gibi ters kurdukları da gözlemlenmiştir. Denklemlerle ilgili 2. ve 3. soruda gözlemlenen bu durum öğrencilerin değişkenler arasındaki cebirsel ilişkileri ifade ederken zorlandıklarını göstermektedir. Benzer şekilde Clement (1982) ve Clement, Lochhead ve Monk (1981) çalışmalarında öğrencilere "bir üniversitede profesörlerin 6 katı kadar öğrenci vardır. Öğrenciler için S ve profesörler için P değişkenlerini kullanarak aralarındaki ilişkiyi eşitlikle ifade edin" örneğindeki gibi sorular yönelttiklerinde yanlış cevap veren öğrencilerin %68'nin 6S=P eşitliğini yazdıklarını belirlemişlerdir. Dede (2004, 2005), 1. dereceden denklemlerin yorumlanması ile ilgili olarak öğretmen adayları ile yürüttüğü çalışmasının bir sonucu olarak, öğretmen adaylarının, denklemlerin ifade ettiği anlamı anlamalarına rağmen yorumu ters bir şekilde yaptıklarını ifade etmektedir. Çalışmada araştırmacı, öğrencilere "Ali, *a* tane muz ve *b* tane çileğe sahiptir. Buna göre, $a = 5b$ ifadesinden ne anladığınızı yazınız" şeklinde yöneltilen soruya, öğrencilerin "Çilekler, muzların 5 katı kadardır" şeklinde cevaplar verdiğini belirtmiştir.

Bu bağlamda değişkenler arası ilişkiler anlayışını oluşturan operatörlerin literatürde farklı araştırmalarda da belirlendiği görülmektedir. Bu durum aynı zamanda böyle bir anlayışın ortaya koyulmasının gerekliğini de göstermektedir.

4.1.9. Gösterimsel Anlayış

Gösterim, matematiksel bir kavramın ya da ilişkinin bazı formlarda sunulmasıdır (NCTM, 2000). Bu sunum bazen bir tablo, bazen bir eşitlik, bazen somut bir materyal bazen bir işaret ya da simge, bazen bir formül, bazen de bir resim şeklinde olabilir (Gagatis ve Elia, 2004; Post, Crammer, 1989; Cohen,2003; Confrey ve Smith, 1991; Lesh,Post, Behr, 1987). Gösterimler zihinde olan kavramları çeşitli şekillerde somutlaştırılmasını sağlarken aslında gerçek dünya ile matematiksel dünya arasındaki geçişi de kolaylaştırmaktadırlar (Post ve Cramer, 1989).

Dönüşüm ise, bir denklemi grafiğe taşıma örneğinde olduğu gibi bir gösterim sisteminden başka bir gösterim sistemine geçiş olarak tanımlanabilir (Janvier, 1987). Dönüşüm iki gösterim tipi arasında olmaktadır, bunlar başlangıç gösterimi ve hedef gösterimdir. Dönüşüm başlangıçta kullanılan gösterim sisteminden ulaşılmak istenen yani hedef(varış) gösterim sistemine yapılmaktadır (Duval, 1993,2000; Janvier, 1987). Bu nedenle denklem ve grafik gösterimleri arasında iki tane dönüşümden söz edilmektedir. Biri denklemden grafiğe olan dönüşüm diğeri ise grafikten denkleme olan dönüşümdür. Matematik öğrenme ve problem çözme süreci için gösterim değişimin önemli olduğu bilinirken (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Even, 1998; Janvier, 1987; Lesh, Behr & Post, 1987a, 1987b) öğrencilerin bu dönüşümleri gerçekleştirirken çeşitli sıkıntılar yaşadıkları da ortaya konulmuştur. Bu bağlamda, bu çalışmada açıklanan gösterimsel anlayış, öğrencilerin soruyu, verilen gösterimden başka bir gösterime dönüşüm yaparak çözdükleri durumlarda karşılaşılan operatörlerin sınıflanmasıyla oluşturulmuştur.

Tablo 11'de görüldüğü gibi bu anlayış, çoklu gösterime sahip olan Küme, Denklem ve Fonksiyon konularında ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin sözel ifadeden şema veya denkleme, denklemlerden grafiğe ya da tabloya, grafik, şema veya tablodan sözel ifadelere dönüşüm yaparken kullandıkları operatörler bu anlayışın oluşmasını sağlamışlardır. Bu anlayışı oluşturan operatörler incelendiğinde; öğrencilerin sözel ifadeye dönüşümü gerçekleştirirken; bir kümeyi ortak özellik yöntemiyle ifade etme (R_k17), bu ifade sırasında "ve", "veya" bağlaçlarını doğru kullanma (R^-_k19, R_k21), değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme (R_k26, R_d4), verilen ya da çizdikleri bir grafiği yorumlama (R_d15) gibi davranışlar sergiledikleri söylenebilir. Tersinir olarak öğrencilerin sözel problemlerdeki verilenleri kullanarak cebirsel ifadeler, tablo veya şemalar oluşturdukları da saptanmıştır. Örneğin öğrencilerin küme problemlerini daha basite indirgemek için Venn şeması çizerek çözüme gitme davranışına oldukça sık rastlanılmıştır (R_k5). Öğrenciler ortak özellik yöntemi ile sözel olarak verilen bir kümeyi matematiksel olarak ifade etme davranışını da sergilemişlerdir (R_k20). Yine soruda sözel olarak verilen duruma uygun cebirsel ifadeler oluşturdukları (R_k27, R_d3) belirlenmiştir. Bu durum Ulu (2008)'nun çalışmasıyla örtüşmektedir. Ulu (2008), sınıf öğretmenleri, sınıf öğretmeni adayları ve 5. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmasında sınıf öğretmeni adaylarının dört işlem problemlerini çözerken genelde denklem kurma stratejisini kullandıklarını belirlemiştir. Bu durum öğretmen adaylarının sözel problemleri cebirsel olarak ifade etme yani sözel ifadeden-cebirsel ifadeye dönüştürme eğiliminde olduklarını göstermektedir.

Tablo 11. Gösterimsel anlayışın bileşenleri

C9: GÖSTERİMSEL ANLAYIŞ								
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)							
S_k2, S_k3, S_k4, S_k5, S_k9, S_k10	R_k5							
S_k7	R_k17	R_k18						
S_k8	R_k5	R_k21	R_k22					
S_k11	R_k5	R_k26						
S_k12	R_k27							
S_d1, S_d2	R_d3							
S_d3	R_d3	R_d4						
S_d4	R_d5	R_d6	$R^{-}_{d}10$					
S_d5	R_d3	R_d4	R_d5	R_d15				
S_d6	R_d3	R_d15						
S_d7	R_d3	R_d4	R_d5	R_d15	R_d22			
S_f8	R_f34	R_f35	R_f36	$R^{-}_{f}38$	$R^{-}_{f}39$	$R^{-}_{f}40$	$R^{-}_{f}41$	$R^{-}_{f}42$
S_f9	$R^{-}_{f}42$	R_f43	$R^{-}_{f}44$	$R^{-}_{f}45$	$R^{-}_{f}46$	$R^{-}_{f}47$	$R^{-}_{f}48$	R_f49
S_f10	R_f36	R_f50	R_f51	R_f52	R_f54	R_f55	R_f56	
S_f11	R_f57							

Bu anlayışa sahip öğrencilerin yaptıkları dönüşümlerden diğeri cebir-grafik dönüşümüdür. Öğrenciler verilen bir cebirsel ifadenin grafiğini çizmek (R_d5,) ya da verilen cebirsel ifadelere ait doğruların düzlemde belirttiği bölgeyi belirlemek (R_d6, $R^{-}_{d}10$, R_d $^{-}17$) için bu dönüşüme başvurmuşlardır. Yine bir parabolün denkleminde yapılan değişikliğin, grafiğe nasıl yansıdığını göstermek için (R_f35, $R^{-}_{f}38$, $R^{-}_{f}39$) cebir-grafik dönüşümünü kullanmışlardır. Bu durumun tersi de yani grafik-cebir dönüşümü de öğrenciler tarafından kullanılmıştır. R_f43, $R^{-}_{f}44$, $R^{-}_{f}45$, $R^{-}_{f}46$, $R^{-}_{f}48$, R_f50 operatörlerinde görüldüğü gibi öğrenciler bir parabolde oluşan değişikliğin parabol denklemine yansımasını ifade ederken bu dönüşümden yararlanmıştır. Aynı zamanda verilen bir parabolün denklemine ulaşmak için paraboldeki bilgileri $y = a(x-r)^2 + k$ formunda yerine yazarak a, r, k değerlerini belirlemeye çalışmaları da (R_f54) bu dönüşüme başka bir örnek olarak verilebilir.

Bu anlayışın oluşmasını sağlayan operatörlerden biri de öğrencilerin bir fonksiyonun grafiğini çizerken ya da bir fonksiyonun grafiğini yorumlarken x eksenini görüntü, y eksenini tanım kümesi olarak ifade etmeleridir. Grafikleri, fonksiyon kavramının koordinat düzlemindeki görsel yansımaları olarak ifade eden Bayazıt (2008)'a göre bu durum öğrencilere fonksiyon grafikleri öğretilirken geleneksel olarak x eksenini tanım ve y ekseni de değer kümesi olarak adlandırmamız sonucunda öğrencilerin bu duruma kendilerini şartlamaları gösterilebilir. Bu şartlama neticesinde öğrencilerin x'in mi y'nin, yoksa y'nin mi x'in fonksiyonu olduğunu araştırmaksızın eksenleri tanım ve değer kümeleri ile ilişkilendirme çabası içine girmeleri ve bunun sonucunda tanım ve değer kümelerini temsil eden eksenleri karıştırmaları kaçınılmaz olmaktadır.

Öğrencilerin bir cebirsel ifadedeki değişkenlere değerler vererek tablo oluşturmaları, cebir-tablo dönüşümünü de kullandıklarını göstermektedir.

4.1.10. Bilgi Anlayışı

Bilgi anlayışı bir konu ya da kavrama ait tanımları, özellikleri, işlemleri, kuralları içeren operatörlerin sınıflanmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu anlayışa ait operatörler daha spesifik ve konuya özgü olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum anlayışı oluşturan operatörlerden de görülmektedir (R_k8, R_s2, R_s8, R_s21, R_s24, R_s27, R_s31).

Bu anlayış Santagata'nın (2002) yanlışa dair sınıflamalarından *prensip, özellik ve tanımlar*, Türkdoğan'ın (2011) sınıflamasında ise bilimsel dile ilişkin yanlışlar kategorisi ile uyuşmaktadır. Her iki sınıflamada da ortak olan terimler, tanımlar, işlemler, kurallar ve özelliklere yönelik olarak yapılan hataları içermektedir. Ancak bu çalışmada ifade edilen bilgi anlayışı sadece yanlış değil doğru anlayışları da ihtiva etmektedir.

Tablo 12. Bilgi anlayışının bileşenleri

C10: BİLGİ ANLAYIŞI				
Problemler Kümesi (P)	Operatörler (R)			
S_k3	R_k8			
S_s1	R_s1	R_s2		
S_s3	R_s8			
S_s7	R_s21			
S_s10, S_s11	R_s24			
S_s14, S_s16, S_s18	R_s31			
S_s17	R_s41	R_s42	R^-_s44	R^-_s45
S_d4	R_d7	R_d8		

Tablo 12’nin devamı

S_f2	R_f11	R^-_f14	R^-_f16	R^-_f17
S_f3	R_f11	R_f19	R_f20	
S_f5	R_f11	R_f20		
S_f2, S_f3	R_f11			
S_f5, S_f6	R_f27			
S_f6	R_f30			
S_f10	R_f54			
S_f11	R_f20			

Bu anlayışta incelenen konu ile ilgili özellik, kural ve tanımlar doğru kullanıldığında bu durumu ifade etmek için daha genel bir operatör belirlenmiştir. Örneğin bir öğrenci üslü sayılarla ilgili özellik, kural ya da tanımları doğru kullanarak sonuca ulaşmayı başardıysa bu durumda kullandığı operatör “R_s27: Üslü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler” olarak belirlenmiştir. Bu operatörler hatalı kullanıldığında ise, öğrencilerin bu hatalı kullanımları için yeni bir operatör belirlenmemiş, bu durum ilgili bölümünde metin içinde ifade edilmiştir. Bu durumda öğrencilerin belli kavram ya da konularla ilgili özellik, tanım, kural ya da işlemleri hatalı kullanmaları neticesinde belirlenen operatörler de bu anlayışın oluşmasına neden olmuştur. Bir kavram ya da konu ile ilgili olarak kuralların yanlış kullanılmasına Ersoy ve Ardahan (2003)’ın çalışmalarında da değinilmektedir. Araştırmacılar öğrencilerin bir takım testlere verdikleri cevaplar incelendiğinde yanlış kurallar kullanmalarının bu testlerdeki ortak yanlışlardan biri olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu anlayışı oluşturan yanlış operatörlerden en belirgin olanları üslü ve köklü sayılarla ilgili olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürdeki bazı araştırma sonuçları ile örtüşen bu operatörlerin ilki “R^-_s29: $a, n \in Z$ ve $a, n > 0$ olmak üzere $-a^n = a^{-n}$ dir” ve R^-_s30: $-(a)^{2n} = a^{2n}$ dir, operatörleridir. Öğrencilerin kullandıkları bu operatörler, üslü sayılarla ilgili tanımların ve özelliklerin hatalı kullanımıyla kendini göstermiştir. Benzer olarak Orhun (1998) 8. ve 9. sınıf öğrencileri, Cengiz (2006) ise 9. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmalarında $-x^2$ ile $(-x)^2$ arasındaki farkın öğrenciler tarafından algılanamadığını belirlemişlerdir. Köklü sayılarla ilgili olarak bazı öğrencilerin kullandıkları R^-_s37: $\sqrt{-a^2} = -a$ dir ($a \in Z^+$), R^-_s38: $(\sqrt{-a})^2 = -a$ dır ($a \in Z^+$), R^-_s39: $(\sqrt{-a})^2 = a$ dır ($a \in Z^+$) ve R^-_s40: $\sqrt{-a^2} = |-a| = a$ dır ($a \in Z^+$) operatörlerinden köklü sayı tanımını anlamadıkları söylenebilir. Benzer olarak Orhun (1998) ve Cengiz (2006) çalışmalarında öğrencilerin $\sqrt{(-a)^2} = -a$ eşitliğini doğru olarak kabul ettiklerini ifade etmektedirler.

Baki (1998), ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin cebirle işlem yapma ve akıl yürütme yanılgılarını belirlemek amacıyla yürüttüğü çalışmasında bu iki gruptaki öğrencilerin de kazanmaları beklenen bazı işlem becerilerine sahip olmadıklarını belirlemiştir. Özellikle çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini, değişkenlerden oluşan rasyonel ifadenin sadeleştirilmesini içeren sorularda öğrencilerin yüksek oranda hata yaptıklarını tespit etmiştir.

Pırasa ve Birinci-Konur (2010), sınıf öğretmeni adaylarının mol kavramı ile ilgili işlem becerilerini tespit etmek amacıyla yürüttükleri çalışmalarında, öğrencilerin matematik bilgi eksikliğinden kaynaklanan yanlış cevap sayısının, kimya bilgi eksikliğinden kaynaklanan yanlış cevap sayısına oranla daha fazla olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencilerin üslü sayılar, ondalık kesirler ve orantı kurma bilgilerinin de incelendiği çalışmada, bu konularla ilgili işlemlerde hatalı davrandıklarını belirlemişlerdir. Bazı öğretmen adaylarının kurdukları orantıda üslü sayılarla, ondalık kesirlerle ve bilinmeyenle doğru işlem yapamadıklarını, bu işlemlerde özellikle, ondalık kesirlerde sadeleştirmede ve üslü sayılarda basamak kaydırmada hata yaptıklarını ifade etmişlerdir. Bu sonuçlar sınıf öğretmeni adaylarının sahip oldukları bilgi anlayışının diğer derslerdeki davranışlarını da etkilediğini göstermektedir.

Varol ve Kubanç (2012) öğrencilerin matematikte dört işlem konusunda yaşadıkları yaygın aritmetik güçlükleri ortaya çıkarmak için alanyazın taraması yaptıkları çalışmalarında, öğrencilerin bu alanda zorluk yaşamalarının en büyük nedenlerinden birinin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine ait kuralları birbirine karıştırmaları veya bu kuralları yanlış ezberlemeleri olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmada da öğrencilerin sahip oldukları bilgi anlayışının, işlem ve kural kullanımına yönelik olarak zorlanmalarına neden olduğu görülmektedir.

Sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel anlayışlarını cK¢ Teorisinin anlayış aşamasına göre incelemeyi amaçlayan bu çalışmada, öğrencilerin matematiksel bilgilerini modellemek amacıyla 48 sorudan oluşan 5 sınav öğrencilere uygulanmış aynı zamanda öğrencilerle çözümleri ile ilgili olarak klinik mülakatlar yürütülmüştür. Öğrencilerin bu sınavlarda yer alan sorulara verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. Analizler neticesinde belirlenen ve öğrencilerle yapılan mülakatlarla desteklenen operatörlerin sınıflanmasıyla *mantık kuralları, pragmatik düşünme, doğru genelleme, hatalı genelleme, kısmi genelleme,* *özel değer verme, bilgi transferi, değişkenler arası ilişkiler, gösterimsel* ve *bilgi* olarak isimlendirilen 10 tane anlayışa ulaşılmıştır. Bu bölümde çalışmada elde edilen bulguların yorumlanması ve tartışılmasıyla elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Sonraki bölümde ise araştırma sonuçlarından ve süreçte edinilen tecrübelerden hareketle, öğretenlere ve araştırmacılara önerilerde bulunulmuştur.

4.2. cK¢ Teorisinin Anlayış Aşamasının Kullanımına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

cK¢ Teorisi anlayış (conception), bilme (knowing) ve kavram (concept) şeklinde isimlendirilen hiyerarşik üç aşamadan oluşmaktadır. Bu çalışma, öğrenenlerin sahip oldukları genel matematiksel anlayışları belirlemeyi amaçladığından bu aşamalardan anlayışa odaklanmıştır. Anlayış ise problemler kümesi, operatörler kümesi, gösterim sistemi ve kontrol bilgileri olmak üzere dört bileşenle ifade edilmektedir. Bu tez kapsamında öğrencilerin sahip oldukları matematiksel anlayışlar, onların problemleri çözerken kullandıkları belirlenen operatörlerin sınıflanmasıyla ortaya çıkarılmıştır. Bu bağlamda, araştırma sonucunda ortaya çıkan 10 anlayışın belirlenmesine, araştırmada kullanılan cK¢ Teorisinin anlayış aşamasının diğer üç bileşeninin işlevsel olarak katkı sağlamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun nedenleri aşağıda sıralanmıştır:

1. Anlayış aşamasının ilk bileşeni olan problemler kümesi bilindiği gibi söz konusu anlayışın uygulama alanıdır. Ancak bu araştırmada belirlenen anlayışlar öğrenenlerin sahip oldukları genel matematiksel anlayışlar olduğundan, bu anlayışların uygulanabildiği problemler kümesini, belli konu ya da kavramlara ait olan sorularla sınırlandırmak doğru olmayacaktır. O halde, matematikte karşılaşılabilecek her türlü problem bu anlayışların her biri için uygulama alanı olabilir.
2. Anlayışın diğer bileşeni olan gösterim sistemini, problemlerin ifade edilmesinde ve çözülmesinde kullanılan her türlü sembol, simge, geometrik çizim, cebirsel dil, sözel dil, grafik gibi gösterimler olarak ifade edilmişti. Bu çalışmada belirlenen genel matematiksel anlayışlar düşünüldüğünde, bu anlayışlara özgü problemleri, operatörleri ve kontrol önermelerini ifade etmek için kullanılabilecek gösterimleri sınırlamak mümkün görünmemektedir. Bu durumda tüm matematiksel gösterimler bu bileşeni oluşturmaktadır.

3. cK¢ Teorisi anlayış aşamasının diğer bir bileşeni işlemlerin doğruluğunu denetleyen kontrol bilgileri olarak ifade edilebilir. Balacheff ve Gaudin; (2002), Arslan (2005) problemi çözmek için kullanılacak işlemlerin uygun olup olmadığına, verilen problemin çözülüp çözülemeyeceğine karar vermeyi ya da bir matematiksel kavramın anlaşılmasında rol oynayan en can alıcı öğelerin farkına varmayı sağlayan kriterlerin uygulandığı bir bileşen olmasına karşın, kontrol bilgilerinin belirlemenin zor olduğunu, çoğu zaman üstü kapalı bırakıldığını belirtmişlerdir. Öğrencilerle yapılan mülakatlar neticesinde bu duruma neden olarak, kontrol bilgilerinin öğrencilerin çözümlerinde gizli olduğu ve öğrencilerin de bunları çoğu zaman farkında olmadan kullandıkları düşünceleri gösterilebilir (Arslan, 2005). Bu nedenle öğrencilerin kullandıkları her bir operatör için kontrol bilgilerinin belirlenmesi mümkün olmamıştır.
4. Anlayış aşamasının bir bileşeni de kısaca öğrencilerin bir problemi çözerken kullandıkları her türlü bilgi olarak tanımlanan operatörlerdir. Bu çalışmada farklı konularda sorulan sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplarda belirlenen operatörler sınıflanarak anlayışlara ulaşılmıştır. Amacı öğrencilerin genel anlayışlarını belirlemek olan bu çalışmada öğrencilerin çözümlerinden elde edilen operatörler incelendiğinde iki çeşit operatör belirlenebildiği görülmektedir. Bu operatörlerden bazıları R_s43: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$, R_f20: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olmak üzere, $f^{-1}(x)=a$ ise $f(a)=x$ dir, örneklerinde olduğu gibi belirlendiği konuya özgü matematiksel bilgiyi içerirken, bazıları ise daha genel matematiksel ifadeleri içerecek şekilde belirlenmiştir; R^{-}_{k}1: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur, R^{-}_{f}37: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme gibi. Aslında bu durum ilk bakışta bir sorun gibi görünmese de bu operatörleri bir araya getirerek anlayışlara ulaşırken sorun yaşanmasına sebep olmuştur. Bu durumda, tamamıyla konuya özgü, çok spesifik olan operatörler bilgi anlayışının oluşmasını sağlarken, konuya özgü olan ancak bu operatörü kullanma nedenleri yani kontrol bilgileri ortak olabilen operatörler ise diğer anlayışların ortaya çıkmasını sağlamışlardır.

5. ÖNERİLER

Bu bölümde, çalışmanın ışığında eğitimcilere ve araştırmacılara faydalı olacağı düşünülen önerilere yer verilmiştir.

5.1. Eğitimcilere Yönelik Öneriler

Bu çalışmada sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel anlayışları, cK¢ Teorisinin anlayış aşamasına göre incelenmiş ve sonuç olarak 10 anlayışa ulaşılmıştır. Bu anlayışlara ulaşılırken problem durumlarından yararlanılmıştır. Öğretmenler de araştırmacının izlediği yola benzer bir yol izleyerek, öğrencilerini, yaptıkları çözümleri sadece not vermek için okumak yerine, çözümü gerçekleştirirken kullandıkları bilgilerin anlamlı bir yönünü bulmaya çalışarak değerlendirebilirler. Araştırma sonucunda belirlenen anlayışları oluşturan operatörlerin listesi öğretenlere çok uzun gelebilir; ancak burada önemli olan bu operatörlerin oluşturduğu anlayışların ne ifade ettiğinin anlaşılmasıdır. Öte yandan öğretmenler bu operatörlerden farklı operatörler bulabilir ve bu operatörlerin bu anlayışlardan hangisi ya da hangileri içinde yer alacağına karar verebilirler Bu sayede bu operatörleri kullanan öğrencilerinin ortaya çıkarılan bu anlayışlardan hangisi ya da hangilerini geliştirdiklerini belirleyebilirler. Böylece derslerini planlarken veya öğrenme ortamlarını tasarlarken bu çalışmada ortaya çıkan ve kendi öğrencilerinde de oluşması muhtemel anlayışlardan yararlanarak, daha anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesine fırsat verebilirler. Ayrıca öğretmenler ölçme-değerlendirme sürecini belirlenen bu anlayışlar yardımıyla daha etkili bir şekilde tamamlayabilirler. Anlayışlar hakkında düşünmek matematik eğitimi araştırmacılarına öğrencilerin bilgilerini biçimlendirmede yardımcı olurken, öğrencilere ne tür sorular sormaları gerektiğine dair bakış açısı kazanmalarında rehber olmaktadır (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Bu düşünceyle öğrencilerini ölçmek için bu anlayışlar doğrultusunda hazırlayacakları sınavları yine bu anlayışlar doğrultusunda değerlendirerek öğrencilerinde oluşan yanlış anlayışları belirleyebilirler.

Belirlenen bu anlayışların, sınıf öğretmenliği programında yürütülen temel matematik dersi için tasarlanacak öğrenme ortamlarına da ışık tutacağı düşünülmektedir. Bu anlayışların bilincinde olarak tasarlanacak ortamlar, daha nitelikli ve kaliteli öğrenmelerin gerçekleşmesini sağlayacaktır. Bu nedenle Temel Matematik dersini yürüten öğretim elemanlarının bu anlayışları dikkate almaları ve hizmet öncesinde öğretmen adaylarının anlayışlarını belirlemeleri önerilmektedir.

5.2. Araştırmacılara Yönelik Öneriler

Araştırmanın sonucunda belirlenen anlayışlar çalışmaya katılan 61 öğretmen adayı ile sınırlı olsa da diğer öğretmen adayları ve öğrencilerde de benzer anlayışların ortaya çıkabileceği düşünülmektedir. Bu nedenle farklı öğrenim seviyelerinde benzer araştırmalar yapılarak belirlenen anlayışlara yeni anlayışlar eklenebilir. Ayrıca farklı seviyelerde belirlenen anlayışlar karşılaştırılarak, öğrencilerin yaşlarındaki değişimle geliştirdikleri anlayışların değişimi incelenebilir. Benzer şekilde hizmet içinde çalışan sınıf öğretmenlerinin matematiksel anlayışları belirlenerek, hizmet öncesinden hizmet içine taşınan anlayışlar incelenebilir. Ayrıca hizmet içinde çalışmakta olan öğretmenlerin anlayışları ile matematiksel bilgilerini kurmalarında rehberlik ettikleri öğrencilerinin anlayışları ile karşılaştırmalı çalışmaların yapılması, anlayışların öğretmenden öğrencilere geçişi ile ilgili önemli bir ipucu verebilir.

Hizmet içinde farklı seviyelerde çalışan öğretmenlere belirlenen anlayışlar tanıtılarak, onların bu anlayışlara bakış açıları incelenebilir. Türkdoğan (2011) yanlış türlerini sınıfladığı çalışmasında aynı zamanda öğretmenlerin bu yanlışlara verdikleri dönütleri de kategorilere ayırmıştır. Bu çalışmaya paralel olarak, öğretmenlerin edindikleri bakış açısından hareketle, bu anlayışlara sahip öğrencileri olduklarında nasıl davranacakları araştırılabilir.

Öğrencilerin zihinlerinde neler olduğu, bilgiyi nasıl oluşturdukları ve nasıl kullandıkları sorularına cevap bulmaya çalışan araştırmacılar, Türk literatürünün çok fazla aşina olmadığı ancak öğrencilerin anlayışlarının belirlenmesinde sistematik yapıya sahip olan cK¢ Teorisinin anlayış aşamasını kullanarak, literatürün zenginleşmesine katkı sağlayabilirler.

Araştırmacılar bu çalışmaya nicel bir yön katarak, bu anlayışların öğrencilerde ortaya çıkma sıklıklarını belirleyebilirler. Böylece örneklem olarak belirledikleri öğrencilerinin sahip oldukları anlayışlarından hareketle matematiksel bilgilerini modelleyebilirler.

Bu araştırmada belirlenen anlayışlar; doğru, yanlış veya hem doğru hem de yanlış olabilen operatörleri içermektedirler. Bu bağlamda sadece yanlış olan anlayışlara odaklanarak ülkemizde son yıllarda sıkça rastlanana kavram yanılgılarının belirlenmesi çalışmalarına yeni bir boyut kazandırılabilir. Hatta bu çalışmalar bir adım daha ileri taşınarak belirlenen yanlış anlayışların doğrultusunda bu yanlış anlayışları giderici ders içerikleri hazırlanabilir.

Anlayış aşamasını oluşturan bileşenlerden sonuncusu kontrol bilgileridir. Bu araştırmada öğrencilerin genel matematiksel anlayışları belirlenmeye çalışıldığından, anlayışın bu boyutu ile ilgili olarak istenen seviyede bir belirleme yapılamasa da çalışmada, öğrencilerin kullandıkları kontrol bilgilerinin çözümlerini etkiledikleri söylenebilir. Öğrencilerin önceden oluşturdukları bilgilerden hareketle yeni kavram, kural ya da ilişkilere ulaştıkları savı yapılandırmacı öğrenme kuramlarının özünü oluşturmaktadır (Baki, 2008). Öğrencilerin önceden sahip oldukları ve bazı durumlarda doğru sonuç veren bilgileri, karşılaştıkları yeni durumlara uyarlama eğilimleri onların hata yapmalarına neden olmaktadır. Bu durum anlayış aşaması ile ilişkilendirildiğinde öğrencilerin hata yapmalarına neden olan önceki bilgilerinin bir bakıma onların kontrol bilgileri olduğu söylenebilir. Bu durumda araştırmacılara –zor olsa da- öğrencilerin belirli bir konu ya da kavramla ilgili belirlenen problemler kümesi üzerinde çalışırlarken kullandıkları kontrol bilgileri üzerine yoğunlaşarak, bu bilgileri belirlemeleri önerilmektedir.

Bu araştırmada elde edilen bulgular öğrencilerin sahip oldukları gösterimsel anlayışlarının onların hata yapmasına sebep olduğunu göstermektedir. Bu nedenle bir kavram ya da konu ile ilgili olarak öğrencilerin kullandıkları gösterimler ve bu gösterimler arası dönüşümler incelenebilir. Öğrencilerin gösterim dönüşümü yapmalarına fırsat veren problem durumlarının yardımıyla gösterimsel anlayışlarına odaklanarak, dönüşüm becerileri ortaya konulabilir.

Bu çalışma öğrencilerin genel matematiksel anlayışlarını ortaya çıkarmayı hedeflemiştir. Bu doğrultuda ulaşılan 10 anlayışın farklı disiplinlerde de ortaya çıkabileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda, öğrencilerin farklı derslerde sahip oldukları genel anlayışların belirlenmesine yönelik araştırmaların yapılması önerilmektedir.

Yeşildere (2006), farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçlerini ortaya koymaya çalışmıştır. Öğrencilerin belli anlayışları oluşturmaları bir bakıma bilgiyi oluşturmaları ile ilgili olduğundan, farklı anlayışa sahip öğrencilerin matematiksel güçlerinin ne düzeyde olduğu veya farklı düzeyde matematiksel güçleri olan öğrencilerin sahip oldukları anlayışlar üzerine çalışmalar yapılabilir.

Yapacakları araştırmalarda cK¢ Teorisinin anlayış aşamasını kullanacak araştırmacılara, elde edilen verilerin analizinin çok zor, yorucu ve zaman alıcı olması nedeniyle, az sayıda örneklemle çalışmaları önerilmektedir.

Araştırmanın veri toplama sürecinde hangi öğrencilerle görüşme yapılacağına karar verirken, öğrencilerin her bir etkinlikten sonra sınav kağıtlarının ilk incelemesi yapılmıştır. Ancak bu analiz öğrencilerin çözümlerini unutmamaları için hızlı bir şekilde yapılmıştır. Bu durum, bazı öğrencilerin kullandıkları önemli hatalı operatörlerin gözden kaçmasına sebebiyet vermiştir. Veri toplama ve analiz sürecinin paralel yürütülmesinin zorluğunu ortaya koyduğu düşünülen bu durum, hazırlanan sınavların öğrencilere doğrudan klinik mülakatlar sırasında sorulması ve yapılan görüşmelerin video kaydı ile çekilmesi suretiyle giderilebilir.

Bu araştırmanın, araştırmada kullanılan cK¢ Teorisinin anlayış aşamasının, yapılan araştırma için uygun olup olmadığını belirlemeye yönelik bir amacı yoktur. Ancak, uzun bir veri analizi tecrübesinin ardından, çalışmalarında bu teoriyi kullanacak olan araştırmacılara, bu teoriyi belirli konulardaki anlayışları belirlemek adına kullanmaları önerilmektedir. Çünkü anlayışın esnekliği nedeniyle genel anlayışlar belirlenirken hangi operatörlerin hangi anlayışı oluşturacağının belirlenmesi süreci oldukça zor olmuştur. Ancak bir konu ya da kavrama özgü olan anlayışların ortaya çıkarılmasının, hem operatörlerin sınıflanma sürecinin netliği hem de gösterim ve kontrol bilgileri bileşenlerinin belirlenmesi açısından daha iyi olacağı düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Akbaba Dağ, S., 2009. Sınıf Öğretmeni Adaylarının Temel Matematik I-II Derslerine İlişkin Kavram Yanılgılarının İncelenmesi. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Akkan, Y., 2010. İlköğretim Öğrencilerinin Aritmetikten Cebire Geçiş Süreçlerinin İncelenmesi, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Akkoç, H., 2006. Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi: Grafik Analiz Yaklaşımı: İlköğretim İkinci Kademe ve Liseler için (CD Ekli Öğretmen ve Öğrenci Çalışma Kitapları). Toroslu Kitaplığı: İstanbul.

Altıparmak, K. ve Öziş, T., 2005. Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, Ege Eğitim Dergisi, 6(1), 25–37.

Altun, M ve Yılmaz, A., 2008. Lise Öğrencilerinin Tam Değer Fonksiyonu Bilgisini Oluşturma Süreci, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 41 (2), 237-271.

Altun, M., 2006. Matematik Öğretimi. Bursa: Alfa Akademi Basın Yayın Dağıtım.

Arslan S., 2005. L'approche qualitative des équations différentirelles en classe de TS : est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences? Doktora tezi. Sarrebruck: Editions universitaires europeennes, Almanya.

Aydın, B., Peker, M., 2003. Öğretmen Adaylarının İlköğretim Sertifika Programında Okutulan Matematik Öğretim Dersine Yönelik Tutumları, Kastamonu Eğitim Dergisi, 11 (1). 21–30.

Aydın, H. (2008). İngiltere'de Öğrenim Gören Öğrencilerin ve Öğretmenlerin Matematiksel Modelleme Kullanımına Yönelik Fenomenografik Bir Çalışma. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aydın, M. ve Köğce, D., 2008. Öğretmen Adaylarının "Denklem ve Fonksiyon" Kavramlarına İlişkin Algıları, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi, 5 (1), 46-58.

Bagni, G., 2000. "Simple" Rules and General Rules in Some High School Student's Mistakes. Journal Für Mathematik Didaktik. 21(2), 124–138.

Baker, J. D., 1996. Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction, The Annual Meeting of American Educational Research Association, New York.

Baki, A., 1998. Cebirle ilgili işlem yanılgılarının değerlendirilmesi, III. Ulusal Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu, K.T.Ü., 23-25 Eylül, Trabzon.

Baki, A., 2008. Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi, Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Bal, A. P., 2006. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Kavrama ve İşlem Becerileri Arasındaki Farkın Bazı Değişkenler Açısından Değerlendirilmesi, Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 2(32), 13-23.

Balacheff N. 1995. Conception, Connaissance Et Concept". In: Denise Grenier (Ed.) Séminaire Didactique Et Technologies Cognitives En Mathématiques. 219-244. Grenoble: IMAG.

Balacheff, N. and Gaudin, N. 2003. Baghera assessment Project, in S. Soury-Lavergne (ed.), Baghera Assessment Project: Designing an Hybrid and Emergent Educational Society. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, # 81, Grenoble, Laboratorie Leibniz-IMAG.

Balacheff N., Gaudin N. (2002) Students conceptions: an introduction to a formal characterization. Cahier Leibniz 65. http://telearn.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/04/25/PDF/Balacheff2002cKc.pdf 25 Eylül 2008

Balacheff, N., 2000. A Modelling Challenge : Untangling Learner Knowledge. Publié Dans: L'apprentissage, Une Approche Transdisciplinaire. (JIOSC 2000, Pp. 7-16). Orsay: Insitut Des Sciences Cognitives Et De La Communication.

Barak, B., 2007. Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Baykul, Y., 2002. İlköğretimde Matematik Öğretimi 1-5. Sınıflar İçin. Ankara: Pegema Yayıncılık, 6. Baskı,

Buckley, B. C. ve Boulter, C. J., 2000. Investigating the Role of Representations and Expressed Models in Building Mental Models, J.K.Gilbert ve C.J. Boulter, Developing Models in Science Education, Kluwer Academic Publishers, İngiltere.

Carlson, M. P. ve Oehrtman, M., 2005. Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. *MAA* Online Research Sampler, 9. http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html son erişim 15 Ağustos 2011

Cengiz, Ö. M., 2006. Reel Sayıların Öğretiminde Bir Kısım Ortaöğretim Öğrencilerinin Yanılgıları Ve Yanlışları Üzerine Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Clement, J. J., 1982. Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception. Journal for Resarch in Mathematics Education 13(1), 16-30.

Clement, J. J., Lochhead, J ve Monk, G. 1981. Translation Difficulties in Learning Mathematics, American Mathematical Monthly, 88 (4), 286-290.

Clement, J., 2008. Creative model construction in scientists and students: The role of imagery, analogy, and mental simulation. Dordrecht: Springer.

Confrey, J. ve Smith, E., 1991. A Framework For Function: Prototype, Multiple Representations and Transformations. 13th North American Chapter of the International Group for The Psychology of Mathematic Education, proceedings of Annual Meetings.1(2)

Çelik, D., 2007. Öğretmen Adaylarının Cebirsel Düşünme Becerilerinin Analitik İncelenmesi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çelik, D., Sağlam-Arslan, A., 2012. Öğretmen Adaylarının Çoklu Gösterimleri Kullanma Becerilerinin Analizi, İlköğretim Online, 11(1), 239-250

Dede, Y., 2004. Öğrencilerin Cebirsel Sözel Problemleri Denklem Olarak Yazarken Kullandıkları Çözüm Stratejilerinin Belirlenmesi, Eğitim bilimleri ve Uygulama, 3(6), 175-192.

Dede, Y., 2005. I. Dereceden Denklemlerin Yorumlanması: Eğitim Fakültesi 1. Sınıf Öğrencileri Üzerine Bir Çalışma, C.Ü. Sosyal Bilimler Dergisi, 29(2), 197-205.

Dede, Y., Soybaş, D., 2011. Preservice mathematics teachers' concept images of polynomials, Quality & Quantity, 45(2), 391-402.

Dede, Y., Yalın, H. İ, & Argün, Z. 2002. İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Değişken Kavramının Öğrenimindeki Hataları Ve Kavram Yanılgıları. V. Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiriler Kitabı, S. 221, Ankara: ODTÜ.

Doğan, M., Yeniterzi, B., 2011. İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 31, 217-237.

Dubinsky, E., McDonald, M. 2001. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Hilton et. (Ed.) The teaching and learning of mathematics at University level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. ve Belanger, M., 1987. Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics, 109-123.

Duval, R., (1993). Register de Representations Semiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pense. Annoles de Didactique et de Sciences Cognitizes, 37-65.

Duval, R., 2000. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) (24th, Hiroshima, Japan, July 23-27, 2000), Volume 1

Duval, R., 1993. Register de Representations Semiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pense. Annoles de Didactique et de Sciences Cognitizes. 37-65.

English, L. D., & Halford, G. S., 1995. Mathematics Education: Models and Processes. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. ve Ersoy, Y. 2009. Öğrencilerin Basit Doğrusal Denklemlerin Çözümünde Karşılaştıkları Güçlükler ve Kavram Yanılgıları, Eğitim ve Bilim, 34(152), 44–59

Ercan, B., 2010. İlköğretim Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayı Kavramı İle İlgili Bilgilerinin Değerlendirilmesi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Erden, M. 2005. Öğretmenlik Mesleğine Giriş, İstanbul: Epsilon Yayınevi.

Ersoy, Y., 2003. Matematik Okur Yazarlığı-II: Hedefler, Geliştirilecek Yetiler ve Beceriler, http://www.matder.org.tr7/bilim/moy2hgyvb.asp?ID48. 5 Ocak 2007

Even, R., 1998. Factors Involved in Linking Representations of Functions. Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 105-121.

Flores, A., 2006. How Do Students Know What They Learn in Middle SchoolMathematics is True?, School Science and Mathematics, 106(3), 124-132.

Franco, C. & Colinvaux, D., 2000. Grasping Mental Models, J.K.Gilbert & C.J. Boulter (Eds.), Developing Models İn Science Education, Kluwer Academic Publishers, İngiltere.

Gagatsis, A., Elia, I., 2004. The Effects Of Dıfferent Modes Of Representatıon On Mathematıcal Problem Solvıng, The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

Gelici, Ö., 2012. 8. Sınıf Öğrencilerinin Kareköklü Sayılar Konusundaki Kavram Yanılgıları ve Ortak Hataları, X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Semozyumu, Niğde.

Goldin, G., A. 1998. Observing Mathematical Problem Solving Through Task-Based Interviews. (Ed. A. R. Teppo) Qualitative Research Methods İn Mathematics Education, NCTM.

Gökçek, T., Güneş G., 2011. Öğretmen Adaylarının Temel Matematik Kavramlarını Öğrenme Düzeyleri İle Matematik Dersine Yönelik Tutumlarının Belirlenmesi. Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, 19 (3), 849-858.

Gülkılık, H., 2008. Öğretmen Adaylarının Bazı Geometrik Kavramlarla İlgili Sahip Oldukları Kavram İmajlarının Ve İmaj Gelişiminin İncelenmesi Üzerine Fenomenografik Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Gürleyük, G. C., 2008, Sınıf Öğretmeni Adaylarının Çeşitli Değişkenler Açısından Eleştirel Düşünme Eğilimleri, Problem Çözme Becerileri ve Akademik Başarı Düzeylerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Karaelmas Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Zonguldak.

Güven B., 2006. Öğretmen Adaylarının Küresel Geometri Anlama Düzeylerinin Karakterize Edilmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Estitüsü, Trabzon.

Hadjidemetriou, C., & Williams, J.S. 2002. Children's Graphical Conceptions. Research in Mathematics Education, *4*, 69-87.

Halat, E., 2008. Webquest-Temelli Matematik Öğretiminin Sınıf Öğretmeni Adaylarının Geometrik Düşünme Düzeylerine Etkisi. Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 25, 115-130.

Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., Schwarz, B., 2007. Abstracting Processes, from Individuals' Constructing of Knowledge to a Group's "Shared Knowledge", Mathematics Education Research Journal, 19(2), 41-68.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T., 2001. Abstraction in Context: Epistemic Actions. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2) 195-222.

Işık, A., Çiltaş A. ve Bekdemir, M., (2008). Matematik Eğitiminin Gerekliliği ve Önemi. Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 17, 174-184.

İpek, A. S., Albayrak, M. ve Işık, C., 2009. Sınıf Öğretmeni Adaylarının Küme Kavramıyla İlgili Algıları, Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi, 11(1), 221-230.

İskenderoğlu, T., 2010. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıtlamayla İlgili Görüşleri ve Kullandıkları Kanıt Şemaları, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

İşgüden, E., 2008. 7. ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılar Konusunda Karsılaştıkları Güçlükler, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Janvier, C., 1987. Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (67-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Janvier, C., 1998. The Notion of Chronicles as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behaviour, 17(1), 79-103.

Kabael, T., 2010. Fonksiyon Kavramı: Tarihi Gelişimi, Öğrenilme Süreci, Öğrenci Yanılgıları ve Öğretim Stratejileri, TÜBAV Bilim Dergisi, 3(1), 128-136.

Kandemir, M. 2006 Sınıf Öğretmeni Adaylarının Temel Matematik Dersine İlişkin Görüşleri ve Kavramların Öğrenim Düzeyi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19, 29-36.

Kandemir, M., (2004) Matematikte Kavram Kalıcılığı, Kastamonu Eğitim Dergisi, 12(2), 397-416.

Kaplan, A., İşleyen T. ve Öztürk, M., 2011. 6. Sınıf Oran Orantı Konusundaki Kavram Yanılgıları, Kastamonu Eğitim Dergisi, 19(3), 953-968.

Kar, Çiltaş ve Işık, 2011; Cebirdeki Kavramlara Yönelik Öğrenme Güçlükleri Üzerine Bir Çalışma. Kastamonu Eğitim Dergisi, 19(3) 939-952

Karasar, N., (2009). Bilimsel Araştırma Yöntemi. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 20. Baskı.

Karataş, İ., Güven, B., (2003), Problem Çözme Davranışlarının Değerlendirilmesinde Kullanılan Yöntemler: Klinik Mülakatın Potansiyeli, İlköğretim-Online, 2 (2), 2-9.

Katrancı, Y., Yılmaz, A. ve Kahraman, S., 2009. Fonksiyon Bilgisinin Oluşturulması sürecinde Gözlenen Kısmi Doğru Bilgi Yapıları, I. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi bildiriler kitabı, http://www.eab.org.tr/eab/oc/egtconf/pdfkitap/pdf/436.pdf, 18.05.2012

Kerslake, D., 1986. Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.

Kocaoğlu, Yenilmez, 2010, Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kesir Problemlerinde Yaptıkları Hatalar ve Kavram Yanılgıları. Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 14, 71-85.

Köğce, D., 2012. İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspatın Öğrenmeye Katkısı İle İlgili Görüşleri Ve İspat Düzeyleri, X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Niğde.

Kurnaz, A. ve Değermenci, A., (2012). 7. Sınıf Öğrencilerinin Güneş, Dünya Ve Ay İle İlgili Zihinsel Modelleri, İlköğretim Online, 11(1), 137-150.

Küçük, A. ve Demir, B., 2009. İlköğretim 6–8. Sınıflarda Matematik Öğretiminde Karşılaşılan Bazı Kavram Yanılgıları Üzerine Bir Çalışma, Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 13, 97-112.

Lesh, R., Post, T. ve Behr, M., 1987a. Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. In I. Wirsup & R. Streit (Eds.), Development in School Mathematics Education Around the World (pp. 647-680). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Post, T. ve Behr, M., 1987b. Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvie (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 33-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Linchevski, L., Vinner, Sh. 1988. The naive concept of sets in elementary teachers, Proceedings of the 12th International Conference, Psychology of Mathematics Education, Vol 11, Vezprem, Hungary, 471-478.

Mandacı Şahin, S., 2007. 8. sınıf Öğrencilerinin Matematik Gücünün Belirlenmesi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Maracci, M., 2006. On Students’ Conceptions In Vector Space Theory. In Proceedings of The 30th PME Conference, Prague, Czech Republic, 4, 129–136.

Mathews, D. ve Clark, J., 2003. Successful Students’ Conceptions of Mean, Standard Deviation and the Central Limit Theorem. Unpublished paper. http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stats1.pdf. 13 Ocak 2010

MEB, 2005, İlköğretim 1-5. Sınıf Programları Kılavuz Kitabı Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Mesa, V., 2004. Characterızıng Practıces Assocıated Wıth Functıons In Mıddle School Textbooks: An Empırıcal Approach. Educational Studies İn Mathematics, 56, 255–286.

Mevarech, Z., Kramarsky, B., 1997. From Verbal Descrıptıons To Graphıc Representatıons: Stabılıty And Change In Students' Alternatıve Conceptıons. Educational Studies İn Mathematics 32, 229–263.

Miyakava, T., 2004. Reflectıve Symmetry In Constructıon And Provıng Proceedings Of The 28th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 3, 337–344.

NCTM, 2000. Principles and Standards for School Mathematics, Reston.

Niss, M., 1999. Aspects of the nature and state of research in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 40, 1–24.

Nobes, G. ve Panagiotaki, G., 2007. Adults' Representations of the Earth: Implications for Children's Acquisition of Scientific Concepts, British Journal of Psychology, 98, 645-665.

Norman, D. A. 1983. Some observations on mental models. In D. Gentner & A. L. Stevens, Mental models (s. 7-14). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Norman, D., 1983. Some Observations on Mental Models, D. Gentner ve A. L. Stevens (Eds.), Mental Models, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, İngiltere.

Olkun, S., Toluk-Uçar, Z., 2006. İlköğretim Matematik Öğretimine Çağdaş Yaklaşımlar, Ankara: Ekinoks Yayıncılık.

Orhun, N., 1998. Cebir Öğretiminde Aritmetik İşlemlerdeki Üslü ve Köklü Çokluklardaki Yanılgıların Tesbiti. Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu, 20-22 Mayıs, Erzurum.

Örnek, F., 2008. Models in Science Education: Applications of Models in Learning and Teaching Science, International Journal of Environmental & Science Education, 3(2), 35-45.

Özçifçi, R., 2007. Rasyonel Sayıların Öğretimindeki Hatalar ve Alınması Gereken Tedbirler, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). "Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri" V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18 Eylül, Ankara, Bildiriler Kitabı Cilt II, 1083-1089.

Özgün-Koca, S. A., 2008. Öğrencilerin Grafik Okuma, Yorumlama ve Oluşturma Hakkındaki Kavram Yanılgıları. M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Akkoç, (Eds), Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri *(s.61-89)*, Ankara: Pegem Akedemi.

Özmantar, M. ve Monoghan, J., 2006. Abstraction, Scaffolding and Emergent Goals, In Novotna, J., Moraova, M. Ve Stehlikova, N. (Eds). Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 305-312, Prague.

Pesen, C., 2007. Öğrencilerin Kesirlerle İlgili Kavram Yanılgıları, Eğitim ve Bilim, 32, (143), 79-88

Pesen, C., 2008. Kesirlerin Sayı Doğrusu Üzerindeki Gösteriminde Öğrencilerin Öğrenme Güçlükleri Ve Kavram Yanılgıları, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9(15) , 157-168.

Pırasa, N. ve Birinci-Konur, K., 2010. Sınıf Öğretmeni Adaylarının Mol Kavramındaki İşlem Becerilerinin Belirlenmesi, Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 3(38), 150-161.

Post, T., & Cramer, K., 1989. Knowledge, Representation and Quantitative Thinking. In M. Reynolds (Ed.) Knowledge Base for the Beginning Teacher - Special publication of the AACTE (s. 221-231), Oxford: Pergamon Press.

Rasmussen, C. L., 1998. Reform in Differential Equations: A Case Study of Students' Understandings and Difficulties. The Annual Meeting of American Educational Research Association, San Diego, CA.

Russell, M., O'dwyer, L.M. ve Miranda, H., 2009. Diagnosing Students' Misconceptions İn Algebra: Results From An Experimental Pilot Study. Behavior Research Method, 41(2), 414-424

Ryan, J. ve Williams, J., 2007.Children's Mathematics 4-15 Learning From Errors and Misconception, Berkshire: Open University Press, İngiltere.

Samarapungavan, A., Vosniadou, S. ve Brewer, W.F., 1996. Mental Models of the Earth, Sun, and Moon: Indian Children's Cosmologies, Cognitive Development, 11, 491-521.

Santagata, R., 2002. When Student Make Mistake: Socialization Practices in Italy and the United States, Doctoral Dissertation, Los Angeles: University of California, Philosophy in Psychology

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R., 2004. Teacher Guıdance of Knowledge Constructıon, Proceedings of The 28th Conference of The International Group For The Psychology of Mathematics Education, 4, 169-176.

Sertöz, S., 1998. Matematiğin Aydınlık Dünyası. Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitapları 36, 8. Basım.

Shen, J. ve Confrey, J., 2008. Justifying Alternative Models in Learning Astronomy : A Study of K-8 Science Teachers' Understanding of Frames of Reference, International Journal of Science Education, 32 (1)1- 29.

Smith, A., 2003. UK Government's Post-14 Mathematics Inquiry - The Report - Chapter1, http://www.mathsinquiry.org.uk/report/chapter-1.html, 4 Mart 2007

Soylu, Y. ve Aydın, S., 2006. Matematik Derslerinde Kavramsal ve İşlemsel Öğrenmenin Dengelenmesinin Önemi Üzerine Bir Çalışma. Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi, 8(2), 83-95.

Soylu, Y. ve Soylu, C. 2005. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusundaki Öğrenme Güçlükleri: Kesirlerde Sıralama, Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Kesirlerle İlgili Problemler. Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi. 7(2), 101-117.

Şişman, M. ve Acat, M-B., 2003. Öğretmenlik Uygulaması Çalışmalarının Öğretmenlik Mesleğinin Algılanmasındaki Etkisi, Fırat Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 13(1), 235-250.

Tall, D., 1993. Students' Difficulties in Calculus, Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus. ICME-7, Quebec, Canada, 13– 28.

Tall, D., 1999. Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, 1, 111-118

Tall, D., Bakar, M., 1991. Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 23(1),39-50.

Tall, D. ve Vinner, S., 1981: 'Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity', Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Toluk Uçar, Z., 2011. Öğretmen Adaylarının Pedagojik İçerik Bilgisi: Öğretimsel Açıklamalar, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2 (2), 87-102.

Türkdoğan, A., 2006. Yanlışın Anatomisi: İlköğretim Matematik Sınıflarında Öğrencilerin Yaptıkları Yanlışlar ve Öğretmenlerin Dönütlerinin Analitik İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Uğurel, Moralı, 2010; Ortaöğretim Öğrencilerinin Kümeler Konusundaki Öğrenmelerinin Değerlendirilmesi-I, Akademik Bakış Dergisi, 22.

Ulu, M., 2008. Sınıf Öğretmeni, Sınıf Öğretmeni Adayı ve 5. Sınıf Öğrencilerinin Dört İşlem Problemlerini Çözmede Kullandıkları Stratejilerin Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Kocatepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Afyon.

Umay, A., 1996. Matematik Eğitimi ve Ölçülmesi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12, 145-149.

URL-1. http://spaces.telearn.org/balacheff/blog/start-0_cat-46_read-99 10 Mart 2012

URL-2. http://spaces.telearn.org/balacheff/blog/start-0_cat-46_read-101 10 Mart 2012

URL-3 http://tdkterim.gov.tr/bts/ 8 Mayıs 2012

URL-4. http://www.sabanciuniv.edu/bagem/emm/tr/ son erişim 14 Mayıs 2012

Ünal, G. ve Ergin, Ö., 2006. Fen Eğitimi ve Modeller, Milli Eğitim Dergisi, 171, 188-196.

Van der Veer, G., 2000. Mental models of incidental human-machine interaction. Faculty of Sciences, Vrije Universiteit, Amsterdam, The Netherlands. http://www.cs.vu.nl/~gerrit/mmi9910-report1.doc. 14 Mayıs 2012.

Varol, F., Kubanç, Y., 2012. Öğrencilerin Dört İşlemde Yaşadıkları Yaygın Aritmetik Güçlükler, Turkish Studies-International Periodical For the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic, 7(1), 2067-2074.

Vinner, S., 1983. Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Educational in Science Technology, 14(3),293–305.

Vosniadou, S. & Brewer, W. F., 1992. Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. Cognitive Psychology, 24, 535-585.

Vosniadou, S., Skopeliti, I. ve Ikospentaki, K., 2004. Modes Of Knowing And Ways Of Reasoning İn Elementary Astronomy. Cognitive Development, 19, 203–222.

Webber C., Pesty, S., 2002 Emergent Diagnosis Via Coalition Formation. F.J. Garijo, J.C. Riquelme, And M. Toro (Ed.): IBERAMIA 2002, LNAI 2527, 755–764.

Webber C., Pesty S., Balacheff, N., 2002. A multi-agent and emergent approach to learner modelling. In : F. van Harmelen (Ed.), Proceedings of the 15th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 2002). (pp.98-102). Amsterdam: IOS Press

Webber, C., 2004. From errors to conceptions—an approach to student diagnosis. In J. C. Lester, R. M. Vicari, & F. Paraguacu (Ed.), Intelligent tutoring systems, lecture notes in computer science. 3220, 710–719.

Wu, H., 1999. Some Remarks on The Teaching of Fractions In Elementary School. http://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf , 25 Mayıs 2012

Yağbasan, R. ve Gülçiçek, Ç., 2003. Fen Öğretiminde Kavram Yanılgılarının Karakteristiklerinin Tanımlanması, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1 (13), 102-120.

Yazgan, G., 2006. cK¢ Modeline Göre 10. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Yer Kavramına İlişkin Kavramaları Üzerine Bir Araştırma, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yenilmez, K., Avcu, T., 2009. Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Alanındaki Başarı Düzeyleri, Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10(2), 37-45.

Yenilmez, K., Uysal, E., 2007. İlköğretim Öğrencilerinin Matematiksel Kavram Ve Sembolleri Günlük Hayatla İlişkilendirebilme Düzeyi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 89-98.

Yeşildere, S., Türnüklü E., 2008. İlköğretim Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Bilgi Oluşturma Süreçlerinin Matematiksel Güçlerine Göre İncelenmesi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21, 2, 485-510.

Yeşildere, S., 2006. Farklı Matematiksel Güce Sahip İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yıldırım A., Şimşek, H., 2008. Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A.F., 2003. Lise öğrencilerinin lise -1 fonksiyonlar konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Yujing, N. ve Zhou., Y. 2005. Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias, Educational Psychologist, 40(1), 27-52.

Yürekli, Ü. B., 2008. Sınıf Öğretmeni Adaylarının Matematiğe Yönelik Öz-Yeterlik Algıları ve Tutumları Arasındaki İlişki, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Denizli.

Zembat, İ. Ö., 2008. Kavram Yanılgısı Nedir?, (Ed. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç) Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri, Ankara: Pegem Akademi Yayınevi, 1-8.

EKLER

Ek 1. Sınavlar

AÇÜ Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Programı 2008-2009 Eğitim Öğretim Yılı Güz Yarıyılı Temel Matematik I Dersi Birinci Uygulama Sınavı

1. $A \cap B \subset A \cap C \Rightarrow B \subset C$ olup olmadığını Venn şemasıyla ve tanımları kullanarak gösteriniz.

2. $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ olduğunu gösteriniz.

3. A ve B iki küme olduğuna göre $(A' \setminus B') \cup (A' \setminus B)$ kümesini en kısa şekilde ifade ediniz.

4. $(X \cup A') \bigcup (X \cup A')'$ kümesini en sade şekilde ifade ediniz.

5. $[A \setminus (A' \setminus B)] \bigcup [B \setminus (B' \setminus A)]$ kümesinin en sade şeklini bulunuz.

6. $A \subset B$ olmak üzere $[(A' \cup B)' \bigcup B]' \cap [(B' \cap A)' \cap A]'$ kümesinin en sade şeklini bulunuz.

7. A={Sınıftaki gözlüklü öğrenciler}
   B={Sınıftaki sarışın öğrenciler}
   C={Sınıftaki erkek öğrenciler}
   D={Sınıftaki kız öğrenciler}
   olduğuna göre, $(C \cap A) - (B \cup D)$ kümesini ortak özellik yöntemi ile yazınız.

8. A={Sınıfta İngilizce bilen öğrenciler}
   B={Sınıfta Fransızca bilen öğrenciler}
   C={Sınıftaki erkek öğrenciler}
   D={Sınıfta Matematik dersi alan öğrenciler}
   Kümeleri veriliyor. {Sınıfta matematik dersi alıp, Fransızca bilmeyen erkek öğrenciler} kümesini yazınız.

9. A ve B, E evrensel kümenin iki alt kümesidir.

   $s(A') = 40$, $s(B') = 30$, $s(A' \cap B') = 6$ *ise* $s(A \cap B)'$ *kaçtır?*

10. En az bir yabancı dil bilenlerin bulunduğu 14 kişilik bir grupta Almanca bilen herkes İngilizce'yi de bilmekte, fakat Fransızca'yı bilmemektedir. Fransızca bilenlerin sayısı 6, İngilizce ve Almanca bilenlerin sayısı 5 olduğuna göre sadece İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?

Ek 1'in devamı

11. Tenis veya basketbol oynayanların bulunduğu 80 kişilik sınıfın 50si bayandır. Tenis oynayan erkekler 20 kişi olup 19 kişi ise basketbol oynadığına göre basketbol oynayan bayan sayısı kaçtır?

12. Bir A kümesinin elemanlarından % 80 i B kümesinin elemanı değildir. B kümesinin elemanlarından % 20 si A kümesinin elemanı değildir. s (A u B) = 420 ise s (A n B) kaçtır?

Ek 1'in devamı

AÇÜ Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Programı 2008-2009 Eğitim Öğretim Yılı Güz Yarıyılı Temel Matematik I Dersi İkinci Uygulama Sınavı

1. a, b, c $\in \Re$ ve $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1$ ise $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$ değeri kaçtır?

2. $a,b,c,\in \Re$ $a \geq b$ ve $c>0$ ise $a.c \geq bc$
$c<0$ ise $a.c \leq bc$ olduğunu gösteriniz.

3. 1'den 9'a kadar olan rakamlar ikişer kez sırayla ve yan yana yazılarak 18 basamaklı A=11223344…..99 sayısı oluşturuluyor. Buna göre A sayısı 11'e bölündüğünde elde edilen bölüm kaç basamaklıdır?

4. (a:b)+(a:c)=6 ve b+c=8 ise a=?

5. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,
KLM = 5a + 2 = 7b + 4 eşitliğini sağlayan üç basamaklı en küçük KLM sayısı için a+b kaçtır?

6. $A=3.5^{2n-1}+2^{3n-2}$ sayısının 17 ile bölünebileceğini gösteriniz.

7. m | b – a ve m | c – d ise m | bc – ad olduğunu gösteriniz.

8. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $a=\frac{b!+4!}{b-3}$ eşitliğini sağlayan kaç tane b sayısı vardır?

9. Elektrik tellerinde sıralanmış bir grup kuşun liderine sormuşlar;
"Kaç tanesiniz? O da cevap vermiş:
"Ben olmasaydım kalan kuşların sayısı 3 ve 5 sayılarına bölünecek, bizimle beraber bir kuş daha olsaydı sayımız 7 ile bölünecekti. 100 den de çok değiliz." 41 kuş daha olsaydı acaba telde kaç kuş olacaktı?

10. a<b<0 $c=\frac{3a-b}{a}$ olduğuna göre c hangi aralıkta değer alır?

Ek 1'in devamı

AÇÜ Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Programı 2008-2009 Eğitim Öğretim Yılı Güz Yarıyılı Temel Matematik I Dersi Üçüncü Uygulama Sınavı

1. $\dfrac{a+a+a+a+a}{a.a.a.a}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

2. $\dfrac{x^2.2x}{2^x.\frac{1}{2x}}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

3. $\dfrac{(-2)^4.(\frac{1}{4})^{-2}.-8^2}{(-\frac{1}{8})^{-3}.4^{-3}.-2^{-2}} = -2^9$ olup olmadığını araştırınız.

4. $60^x = 3$, $60^y = 5$ ise $12^{[\frac{1-x-y}{2(1-y)}]}$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $(\dfrac{x-3}{x+4})^{x^2+3} = (\dfrac{x+4}{x-3})^{-12}$ eşitliğinin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

6. $\dfrac{\sqrt{(-4)^2}.(\sqrt{-4})^2}{\sqrt{-2^2}.\sqrt{(-2)^2}}$ işleminin sonucu kaçtır?

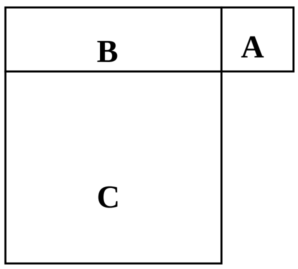
7. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$ işleminin sonucu kaçtır?

8. $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1} = A$ ise $\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ ifadesinin A türünden değeri nedir?

Ek 1’in devamı

Artvin Çoruh Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Sınıf Öğretmenliği Programı 2008–2009 Akademik Yılı Bahar Yarıyılı Temel Matematik II Dersi I. Uygulama Sınavı Soruları

1.



Şekildeki A ve C karelerinin alanları toplamı 80 br^2, B dikdörtgeninin çevresi 24 br ise, B dikdörtgeninin alanını bulunuz.

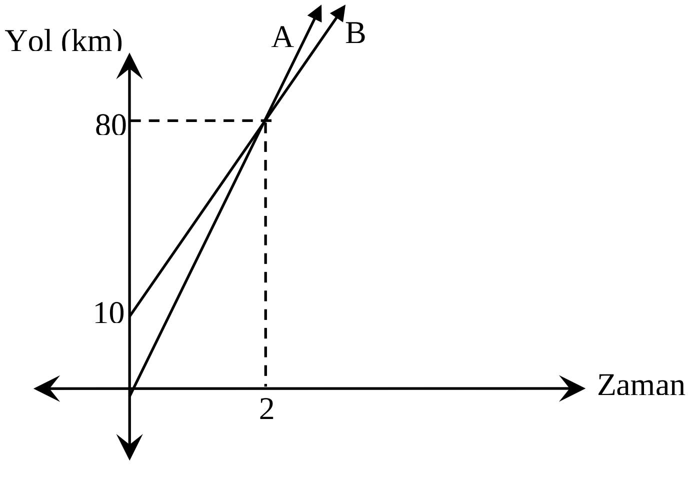
2. 4 CD deki filmi bir DVD de toplayabilirsiniz. Bu durumda CD ve DVD arasındaki kapasite ilişkisini cebirsel olarak belirtiniz.

3. Bir lokantada her dört masa için bir garson görevlendirilmiştir. Ancak bir garson hastalandığı için diğerlerinin 6’şar masa ile ilgilenmeleri gerektiğine göre bu lokantada kaç tane masa vardır?

4. Oturduğunuz sitede yönetici olduğunuzu düşünün. Yapılan son yönetim kurulu toplantısında en önemli sorunu, çocukların oynayabileceği bir parkın olmayışı olarak belirlediniz. Bu durumda site sakinlerinin beklentilerini karşılamak için Belediye’ye başvurdunuz. Belediye görevlileri sitenizdeki imar planına bakarak $2x+y=10$, $2y-3x=6$ ve $y=0$ doğruları arasında kalan bölgeyi çocuk parkı olarak değerlendirebileceğinizi söylediler. Bu durumda size gösterilen bölgenin geometrik yerini bularak alanını hesaplayınız.

5. Bir cep telefonu firması üç farklı tarife uygulamaktadır. İlk tarifede 10 TL sabit ücret almakta ve her yöne dakikasına 25 kuruş yazmaktadır. İkinci tarifede sabit ücret almamakta ancak her yöne dakikasına 75 kuruş yazmaktadır. Üçüncü tarifede ise 5 TL sabit ücret almakta ve konuşma ücreti olarak her yöne dakikasına 50 kuruş yazmaktadır. Bu üç tarifeden birini seçmeniz gerekirse hangi tarifeyi neden tercih edersiniz? Cevabınızı grafiksel olarak savunun.

6. A ve B araçlarının zamana bağlı olarak aldıkları yollar grafikte verilmiştir. Araçların karşılaşmasından 5 saat sonra aralarındaki uzaklık kaç km olur?



Ek 1'in devamı

7. Aşağıdaki tabloda A otoparkının zamana bağlı olarak kazandığı para verilmiştir. B otoparkının zaman bağlı olarak kazandığı para ise y=x bağıntısıyla bulunabilmektedir.

a. A otoparkının zaman-para ilişkisini veren cebirsel ifadesinin yazarak arabanızı hangi otoparka bırakacağınızı belirleyiniz.
b. Tablodaki, B otoparkıyla ilgili olarak bırakılan boş kısımları doldurarak, bu tablodan yhareketle arabanızı hangi otoparka bırakacağınızı belirleyiniz.
c. A ve B otoparklarının grafiksel olarak karşılaştırınız. Elde ettiğiniz grafiği yorumlayınız.

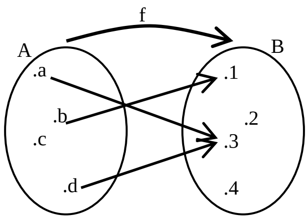
A		**B**	
Zaman (saat)	**Ücret (TL)**	**Zaman (saat)**	**Ücret (TL)**
1	2		
2	2,5		
3	3		
4	3.5		
5	4		

Ek 1'in devamı

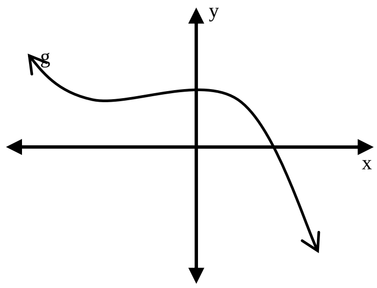
Artvin Çoruh Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Sınıf Öğretmenliği Programı 2008 – 2009
Eğitim Öğretim Yılı Temel Matematik II Dersi II. Uygulama Sınavı Soruları

1. Aşağıdaki bağıntıları inceleyerek fonksiyon olma durumlarını araştırınız.

a)



b)



x	1	1	2	2	3	3
t(x)	3	-3	5	-5	8	-8

c)

2. R-{2} $\rightarrow$ R-{3} de tanımlı f fonksiyonu $f(x) = \dfrac{ax-4}{3x-b}$ şeklinde veriliyor. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğu bilindiğine göre (a,b) sıralı ikilisini bulunuz.

3. $f(x) = \dfrac{x+8}{x+m}$, $g(x) = \dfrac{4x-1}{x+5}$ iki fonksiyon ve $(f^{-1} \circ g)(-2) = -1$ ise m değeri kaçtır?

4. $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

5. $f^{-1}(x+1) = 3x-1$ ve $(gof^{-1})(5) = 5$ ise $(gof)(29)$ değeri kaçtır?

6. $f(x) + g(x) = f \circ g(x)$ ve $f(x) = 4x+1$ olduğuna göre g(3) kaçtır?

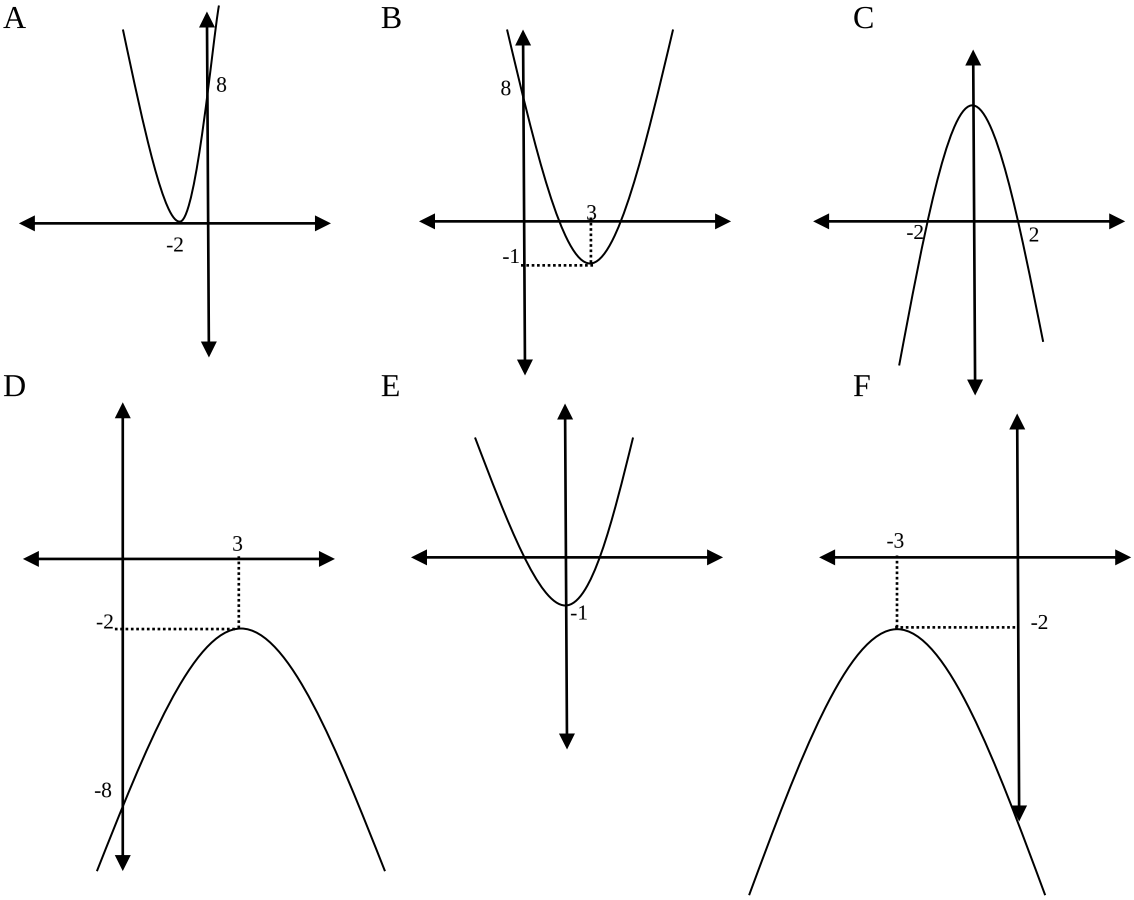
7. m, n, p ve q $\in R$, $f(x) = mx + n$ ve $g(x) = px + q$ ise $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ denkleminin bir çözümü olabilmesi için m,n,p ve q arasında nasıl bir ilişki olmalıdır?

8. $y = a(x+b)^2 + c$ için $a, b, c \in$R ve a>0 dır. Bu parabolün tepe noktası IV. Bölgede ise $y = -a(x+b)^2 - c$ parabolünün tepe noktası hangi bölgededir? Neden?

9. Tepe noktası ikinci bölgede olan ve x eksenini iki noktada kesen bir parabolü tepe noktası üzerinde 180 derece döndürdüğümüz zaman oluşacak parabole ait cebirsel ifadeyi *f(x)=ax²+bx+c* formunda yazdığınızda a, b ve c sayıları için ne söyleyebilirsiniz.

Ek 1'in devamı

10. Aşağıda 6 adet parabol ve bu parabollere ait olabilecek (her parabolün karşılığı olmayabilir) 10 adet denklem bulunmaktadır. Bu parabollerle denklemleri eşleştiriniz. Yaptığınız eşleştirmeyi nasıl savunursunuz? Nedenleriyle açıklayınız.



I. $y = 2x^2 + 2$ II. $y = -3(x+3)^2 - 2$ III. $y = 2(x+2)^2$ IV. $y = -x^2 + 4x - 8$

V. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ VI. $y = 2(x-3)^2 + 8$ VII. $y = -x^2 - 2$ VIII. $y = 2x^2 + 8$ IX. $y = -3 + x^2 + 2$ X. $y = (x-3)^2 - 1$

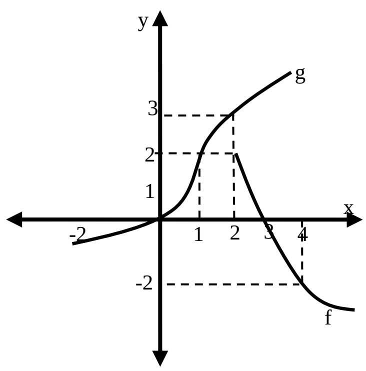
11. Yandaki şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu araştırınız.

a) $\dfrac{g(1) + fog(2)}{f(4)} = -1$

b) g fonksiyonunun tersi yoktur.

c) $g^{-1}(2) = 2$

d) f(-2) = 4



Ek 2. Çalışma Verilerinin Analizi ile Ulaşılan Operatörlerin Listesi

KÜMELER KONUSU İLE İLGİLİ OLARAK BELİRLENEN OPERATÖRLER

R^-_k1: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur.
R^-_k2: Doğru olup olmadığı sorulan bir önermenin, doğru olduğu kabul edilerek ispatı yapılır.
R_k3: Bir önerme bir özel durum için doğru değilse, her zaman doğru değildir.
R^-_k4: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme.
R_k5: Venn şemasını standart bir şekilde (yani her küme diğerleri ile kesişecek şekilde) çizme.
R^-_k6: A, B ve C kümeleri için $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir.
R^-_k7: A ve B herhangi iki küme ve E evrensel küme ise $A \cup B = E$ dir.
R_k8: Kümelerle işlemlerle ilgili özellikler ve tanımlar
R^-_k9: A, B ve C kümeleri için (A\B)$\cup$(A\C)= A\(B$\cup$C) dir.
R^-_k10: Tümleyeni olan bir ifadeyi, tekrar tümleyenini alarak tümleyenden kurtarma.
R^-_k11: A ve B kümeleri için $(A'/B') = (A/B)'$ dir.
R_k12: A, B ve C kümeleri için $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$ dir.
R_k13: Bir ifadede yer alan karmaşık terimleri bir sembolle göstererek ifadeyi sade şekilde yazma.
R^-_k14: E evrensel küme olmak üzere herhangi bir A kümesi için $A' = E$ dir.
R^-_k15: Aynı ifadede yer alan bir küme ile tümleyeni aralarındaki işlemlere dikkat etmeksizin yan yana getirilerek sadeleştirilir.
R^-_k16: A, B ve C kümeleri için $(A \setminus B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ 'dir.
R_k17: Bir kümeyi ortak özellik yöntemi ile sözel olarak ifade etme.
R^-_k18: Kümelerle fark işlemini, tam sayılarla çıkarma işlemi olarak düşünme.
R^-_k19: Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşılır.
R_k20: Sözel olarak verilen bir kümeyi matematiksel olarak ifade etme.
R_k21: Kümelerde kesişim işlemini "ve", birleşim işlemi "veya" ile ifade etme.
R_k22:Tablodan faydalanma.
R_k23: Cebirsel çözümden faydalanma.
R^-_k24: A ve B herhangi iki küme ise $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$ dir.
R_k25: Değişkenleri belirleme.
R_k26: Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme.
R_k27: Değişkenler arasındaki cebirsel ilişkiyi bulma.

Ek 2'nin devamı

SAYILAR KONUSU İLE İLGİLİ OLARAK BELİRLENEN OPERATÖRLER

R_s1: Eşitliğin korunumunu dikkate alma.
R_s2: Rasyonel sayılarla işlemler.
R^-_s3: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ dir.
R^-_s4: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x$ ve $\frac{e}{f}+\frac{k}{l}=y$ ise $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}+\frac{k}{d}}=\frac{a}{e}+\frac{c}{k}=\frac{x}{y}$ dir.
R_s5: Verilen ifadedeki terimlere eşitliği sağlayacak şekilde özel değerler verme.
R^-_s6: Bir önerme bir özel durum için doğru ise her zaman doğrudur.
R^-_s7: İspatlanması gereken durumu doğru kabul ederek çözümde kullanma.
R_s8:Bölme işlemi
R^-_s9: $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=t \Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{1}{t}$ dir.
R^-_s10: $(a+b)^n=a^n+b^n$ dir.
R^-_s11:Tam sayılarla bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır, yani x,y,z$\in Z$ ise(x:y)+(x:z)=t ise x:(y+z)=t dir.
R_s12: Verilen ve istenen ifadeleri (değerleri değişmeyecek şekilde) yeniden düzenlenerek birbirlerine benzetme.
R_s13: A=ax+b=cy+d olsun. k=a-b=c-d olmak üzere A+k, a ile c nin ekokunun katıdır.
R_s14: Tümevarım yöntemi
R^-_s15: a<b olmak üzere a^n'nin b'ye bölümünden kalan a'dır.
R_s16: B≡ x(mod M) ve C≡y (mod M) iken x+y≡ 0 (mod M)ise o zaman $M|\mathrm{B}+\mathrm{C}$ dir.
R^-_s17: $c|a+b$ ise $c|\mathrm{a.x}+\mathrm{b.y}$ dir.
R^-_s18: $m|a+b \Rightarrow m|a$ ve $m|b$ dir.
R^-_s19: $\frac{A}{m.n}$ verildiğinde $m|A$ ise $n|A$ dır.
R^-_s20: $a.x^n+b.y^n=(x.y)^n.(a+b)$dir.
R_s21: Bölünebilme ile ilgili kural, özellik ve tanımlar
R^-_s22: $m|a.b \Rightarrow m|a$ ve $m|b$ dir.
R^-_s23: $\mathrm{x, y, a} \in \mathrm{Z}$, $x-a|y \Rightarrow x|y+a$ dır.
R_s24: Eşitsizliğe özgü kural ve özellikler
R^-_s25: a,b,x$\in \Re$, a < b-x < c ise a <b-c < x dir.
R^-_s26: $\frac{a}{b}=c$ ise $-c<\frac{a}{b}<c$ dir.
R_s27:Üslü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler
R^-_s28: $a.x^n.b.x^n=(a+b).x^n$ dir.
R^-_s29: $-a^n=a^{-n}$ $(a,n\in \mathrm{Z}^+)$ dir.
R^-_s30: $-(a)^{2n}=a^{2n}$ dir.
R_s31: Köklü sayılarla ilgili tanım, özellik, kural ve işlemler
R_s32:Logaritmadan faydalanma

Ek 2'nin devamı

$R^{-}_{s}33$: $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$ dir.

$R^{-}_{s}34$: $(a^n.b)^m = (a.b^n)^m = a.b^{n.m}$ dir.

$R^{-}_{s}35$: İkinci dereceden denklemlerin çözüm kümesi bir aralık belirtir.

$R_{s}36$: $i^2 = -1$ olmak üzere $\sqrt{-a^2} = a.i$ dir.

$R^{-}_{s}37$: $\sqrt{-a^2} = -a$ ($a \in Z^+$) dir.

$R^{-}_{s}38$: $(\sqrt{-a})^2 = -a$ ($a \in Z^+$) dır.

$R^{-}_{s}39$: $(\sqrt{-a})^2 = a$ ($a \in Z^+$) dır.

$R^{-}_{s}40$: $\sqrt{-a^2} = |-a| = a$ ($a \in Z^+$) dır.

$R_{s}41$: Karekökten kurtarmak için kare alma.

$R_{s}42$: Rasyonel bir ifadenin paydasını kökten kurtarmak için ifadeyi paydanın eşleniği ile genişletme.

$R^{-}_{s}43$: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ dir.

$R^{-}_{s}44$: 0<y<x olmak üzere, $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$^2 $= x.y \pm 2\sqrt{x+y}$ dir.

$R_{s}45$: a^3-b^3 = (a-b).(a^2+a.b+b^2) ve a^3+b^3=(a+b). (a^2-a.b+b^2)dir.

$R_{s}46$: Bir matematiksel ifadede yer alan karmaşık terimleri bir sembolle göstererek ifadeyi sade şekilde yazma.

$R^{-}_{s}47$: $c \in Z$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-c}$ dir.

Ek 2'nin devamı

DENKLEMLERLE İLGİLİ OLARAK BELİRLENEN OPERATÖRLER

R_d1: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
R_d2: Bir cebirsel ifadedeki değişkenlere özel değerler vererek çözüm yapma.
R_d3:Değişkenler arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etme.
R_d4: Değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme.
R_d 5:Verilen cebirsel ifadeye uygun grafiği çizme.
R_d6: Düzlemde 3 veya daha çok doğrunun tanımladığı bölgeyi belirme.
R_d7: İki doğrunun kesişim noktalarını, doğru denklemlerinin ortak çözümü ile bulma.
R_d8: Alan hesaplama.
R_d9: Bir bölgenin alanı bu bölgeyi oluşturan alt bölgelerin alanları toplamıdır.
R^-_d10: y=ax+b cebirsel ifadesi düzlemde bir dörtgen belirtir.
R^-_d11: y eksenini y=0 doğrusudur.
R^-_d12: Düzlemde bir geometrik şeklin yüksekliği, bu şeklin y eksenini kestiği noktadır.
R^-_d13: (x,y) noktası (x,0) ve (0,y) şeklinde iki bileşenden oluşur.
R^-_d14: Bir açıları eş olan üçgenlerin alanları da eştir.
R_d15: Grafik yorumlama.
R^-_d16: Günlük hayat problemlerini modelleyen doğruların başlangıç noktası daima orijindir.
R^-_d17: y=ax+b formunda verilen bir cebirsel ifade düzlemde (a,b) noktasını ifade eder.
R_d18: Aynı yönde hareket eden iki aracın belli bir t anından sonra aldıkları yol sırasıyla X1 ve X2 ise aralarında kalan yol X1-X2 dir.
R_d19: Aynı yönde hareket eden iki aracın hızları sırasıyla V1 ve V2 ise belli bir t anından sonra aralarında kalan yol (V1-V2)t dir.
R_d20: (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) gibi iki noktası bilinen doğrunun denklemi $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ dir.
R_d21: (x_1, y_1) şeklinde bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi $y-y_1=m(x-x_1)$ dir.
R_d22: Bir cebirsel ifadedeki değişkenlere değerler vererek tablo oluşturma.
R^-_d23: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme.

Ek 2'nin devamı

FONKSİYONLAR KONUSU İLE İLGİLİ OLARAK BELİRLENEN OPERATÖRLER

R_f1: f:A$\to$B'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek şart $\forall$ a$\in$A için f(a)$\in$ B'nin mevcut olmasıdır.
R_f2: f:A$\to$B'ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olması için gerek şart; x$\in$A için f(x)=y_1 ve f(x)=y_2 iken y_1= y_2 $\in$B olmasıdır.
R^-_f3: Bir f bağıntısının grafiği eğri ise bu bağıntı bir fonksiyon belirtir.
R^-_f4: Koordinat düzleminde eğrisi verilen bir fonksiyonun görüntü kümesi x ekseni, tanım kümesi y eksenidir.
R^-_f5: Bir f bağıntısının grafiği sonsuza gidiyorsa, bu bağıntı fonksiyon belirtmez.
R^-_f6: Bir g bağıntısının grafiği x ve y eksenlerini kesiyorsa o bağıntı fonksiyon belirtir.
R^-_f7: Bir g bağıntısının tanımsız olduğu değer yoksa bu bağıntı fonksiyon belirtir
R^-_f8: Verilen bir grafiğin fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinin sınırlı olması gerekir.
R^-_f9: Bir grafiğin x eksenini kestiği noktanın ikinci bileşeni yoktur.
R_f10: Bir fonksiyonun tersi olabilmesi için gerek ve yeter şart birebir ve örten olmasıdır.
R_f11: Rasyonel bir fonksiyonun tersini bulma.
R_f12: f: R\{a}$\to$ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise a değeri fonksiyonun kendisini, b değeri ise fonksiyonun tersini tanımsız yapar.
R_f13: $\dfrac{x+a}{x+b}$ ifadesini, paydayı sıfır yapan x=-b değeri tanımsız yapar.
R^-_f14: f: R\{$-\dfrac{d}{c}$}$\to$R\{$-\dfrac{a}{c}$} olmak üzere $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(-\dfrac{a}{c})=-\dfrac{a}{c}$ dir.
R^-_f15: f: R\{a}$\to$ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise limf(x)=a dır ve b fonksiyonun paydasını sıfır yapar.
R^-_f16: f: R\{a}$\to$R\{b} olmak a ve b fonksiyonu tanımsız yapar.
R^-_f17: Bir f fonksiyonunda a ve b fonksiyonu tanımsız yapan iki değer ise f(a)=f(b) dir.
R^-_f18: Bir f fonksiyonu birebir ve örten ise f = f^{-1}dir.
R_f19: f:A$\to$B bir fonksiyon olmak üzere, $f\circ g(x)=f(g(x))$dir.
R_f20: f:A$\to$B bir fonksiyon olmak üzere, $f^{-1}(x)=a$ ise $f(a)=x$ dir.
R^-_f21: f:A$\to$B bir fonksiyon olmak üzere $f\circ g$, f ve g arasında aritmetik işlemler yardımıyla tanımlanır.
R_f22: f: R$\to$R, fonksiyonu için f'(x_0)=0 olmak üzere (x_0, f '(x_0)) fonksiyonun maksimum noktasıdır.
R_f23: f: R$\to$R, $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun görüntü kümesi ($-\infty$, $f(-\dfrac{b}{2a})$] dır.
R_f24:Bir f(x) fonksiyonun değer kümesi x değişkenine değerler verilerek bulunur.
R^-_f25: Bir fonksiyonun görüntü kümesi tersidir.
R^-_f26: Bir fonksiyonun kökleri görüntü kümesini oluşturur.
R_f27: $f(ax+b)=cx+d$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu için ax_0+b=e olmak üzere f(e)=f(x_0) dır.
R_f28:Bir fonksiyon doğrusal ise tersi de doğrusaldır.
R^-_f29: Herhangi bir a değeri için f(a)=a ise f birim fonksiyondur.
R_f30: $f(x)=ax+b$ise $f\circ g(x)=f(g(x))=a.g(x)+b$dir.
R^-_f31: Verilen duruma uygun bir örnekle istenene ulaşılır.
R^-_f32: $f^{-1}\circ(f(x)+g(x))=f^{-1}\circ f(x)+f^{-1}\circ g(x)$ dir.

Ek 2'nin devamı

R_f33: $y = a(x+b)^2 + c$ denklemli parabolün tepe noktası (-b, c) dir.
R_f34: (a, b) noktası IV. bölgede ise a>0 ve b<0 dır.
R_f35: $y = a(x+b)^2 + c$ parabolün tepe noktası IV. bölgede ise $y = -a(x+b)^2 - c$ parabolünün tepe noktası I. Bölgededir.
R_f36: $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktasının apsisi $-\dfrac{b}{2a}$ dır.
R^-_f37: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme.
R^-_f38: $y = a(x+b)^2 + c$ ile $y = -a(x+b)^2 - c$ parabollerinin tepe noktaları aynı kolları zıt yönlüdür.
R^-_f39: y=f(x) parabolün tepe noktası (b, c) ise y = -f(x) parabolününki (-b, -c) dir.
R^-_f40: (b, c) noktasının koordinat düzlemimdeki yerini apsisi belirler.
R^-_f41: Koordinat sisteminde (0,a) noktası birinci bölgede, (0,-a) noktası dördüncü bölgededir.
R^-_f42: Koordinat sisteminin düzlemde ayırdığı bölgeleri karıştırma.
R_f43: Bir parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse tepe noktasının yeri değişmez.
R^-_f44: f(x)= ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)= $-ax^2$-bx-c şeklindedir.
R^-_f45: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=$-ax^2$-bx+c şeklindedir.
R^-_f46: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=$-ax^2$+bx-c şeklindedir.
R^-_f47: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonu köklerine ayrılamıyorsa a ve/veya b sıfıra eşittir.
R^-_f48: f(x)=ax^2+bx+c fonksiyonuna ait parabol tepe noktası üzerinde 180 derece döndürülürse yeni parabole ait cebirsel ifade f(x)=ax^2+bx+2c şeklindedir.
R_f49: Bir cebirsel ifadenin grafiğini çizme.
R_f50: Bir parabolün kolları yukarı doğru ise bu parabolün denklemindeki x^2li terimin katsayısı pozitiftir.
R_f51: x ekseni üzerindeki bir noktanın koordinatları (a,0), y eksenini üzerindeki bir noktanın koordinatları (0,b) dir.
R_f52: y= $a(x-r)^2$+k formundaki cebirsel ifadeye ait olan parabolün tepe noktasının koordinatları (r,k)'dır.
R^-_f53: Bir parabolün üzerindeki noktaların biri herhangi bir denklemi sağlıyorsa bu denklem o parabole aittir.
R_f54: Paraboldeki bilgiler $y = a(x-r)^2 + k$ formunda yerine yazılarak a, r, k belirlenmek suretiyle o parabolün denklemi bulunur.
R_f55: Bir parabol x eksenini bir noktada kesiyorsa, Bu parabolün ait olduğu fonksiyon çift katlı köke sahiptir.
R_f56: Bir parabol tepe noktasından geçen düşey doğruya göre simetriktir.
R_f57: Bir fonksiyona ait grafik üzerinde herhangi bir noktanın apsisi a ise ordinatı f(a) dır.
R^-_f58: f:A$\rightarrow$B bir fonksiyonun grafiği üzerinde f(a) değeri mevcut değilse f(a)=0 kabul edilir.
R^-_f59: Bir f fonksiyonu için f(x)=y iken f^{-1}(y)=x şartını sağlayan bir/birkaç değer bulunabilirse bu fonksiyonun tersi vardır.
R_f60: Bir f fonksiyonun tersi yoksa f^{-1}(x)=y olacak şekilde bir y değeri yoktur.

ÖZGEÇMİŞ

Selcen ÇALIK UZUN 13.03.1981 tarihinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini çeşitli illerde tamamladıktan sonra 1999 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Programına girdi. 4 yıllık üniversite hayatını bölüm üçüncüsü olarak tamamlayarak, 2003 yılında Trabzon Köprübaşı Çifteköprü İlköğretim Okulu'na öğretmen olarak atandı. Aynı zamanda KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi alanında yüksek lisans eğitimine başladı. 2004 yılında açılan sınavı kazanarak KTÜ Artvin Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Sınıf Öğretmenliği Ana Bilim Dalı Araştırma Görevlisi kadrosuna geçti. 2005–2006 akademik yılı güz döneminde KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Doktora Programına geçiş yaptı. 2007 yılından Artvin Çoruh Üniversitesi bünyesine alının Eğitim Fakültesi'nde görevine devam etmekte olup, orta derecede İngilizce bilmektedir. Evli ve bir çocuk annesidir.

E-mail: selcencalik@gmail.com