KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

DİNAMİK MATEMATİK YAZILIMI KULLANIMININ ÖĞRENCİLERİN TÜREV KAVRAMININ GEOMETRİK BOYUTUNA İLİŞKİN ANLAMALARINA ETKİSİ

DOKTORA TEZİ

Erdem ÇEKMEZ

TRABZON
Temmuz, 2013

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

DİNAMİK MATEMATİK YAZILIMI KULLANIMININ ÖĞRENCİLERİN TÜREV KAVRAMININ GEOMETRİK BOYUTUNA İLİŞKİN ANLAMALARINA ETKİSİ

Erdem ÇEKMEZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce Doktora Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Danışmanı
Prof. Dr. Adnan BAKİ

TRABZON
Temmuz, 2013

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jurimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 19 / 07 / 2013

Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Adnan BAKİ**	**.........................**
Üye	**: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR**	**.........................**
Üye	**: Doç. Dr. Bülent GÜVEN**	**.........................**
Üye	**: Doç. Dr. Selahattin ARSLAN**	**.........................**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK**	**.........................**

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Haluk ÖZMEN

Enstitü Müdür V.

BİLDİRİM

Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı ve bu tezi KTÜ Eğitimi Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Erdem ÇEKMEZ
19/ 07/ 2013

ÖN SÖZ

Analiz dersi içerisinde yer alan kavramlar geometrik boyutta zengin bir içeriğe sahiptir. Matematikte anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencilerin, kavramların farklı temsillerine ve bu temsiller arasındaki ilişkilere yönelik yeterli düzeyde anlama geliştirmeleri gerekmektedir. Bu çalışmada dinamik matematik yazılımı destekli tasarlanmış öğrenme ortamının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi geleneksel öğrenme ortamı ile kıyaslanarak incelenmiştir.

Lisans ve doktora öğrenimim süresince öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, tez danışmanım olma lütfunu göstererek bana engin deneyim ve bilgilerinden yararlanma fırsatı sunan sayın hocam Prof. Dr. Adnan BAKİ'ye en içten şükranlarımı sunarım. Yine lisans ve doktora öğrenimim süresince öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, bugüne gelmemde büyük emek ve pay sahibi olan saygıdeğer hocalarım Doç. Dr. Bülent GÜVEN ve Doç. Dr. Selahattin ARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince verdiğim seminerlerde yapıcı eleştiri ve sundukları önerilerle çalışmama katkı sağlayan ve sayıca çok olmasından ötürü adlarını burada zikredemeyeceğim tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma, çalışmalarım sırasında bana her türlü desteği esirgemeyen mesai ve oda arkadaşlarım sayın Yrd. Doç. Dr. Temel KÖSA ve Yrd. Doç. Dr. Fatih KARAKUŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma bağlamında hazırlanan öğretim süreçlerinin uygulanmasında desteğini ve yardımını esirgemeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK'e ve çalışmaya katılan tüm öğrencilerime teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde en büyük emeği sergileyen ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen sevgili annem Cemile ÇEKMEZ, babam Bayram ÇEKMEZ ve kardeşim Erkan ÇEKMEZ'e, bu uzun ve zorlu süreçte bana anlayış göstererek her daim destek olan sevgili eşim Nurcan ÇİMŞİT ÇEKMEZ'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Son olarak doktora öğrenimim süresince sağladığı maddî katkıdan ötürü TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Erdem ÇEKMEZ

Trabzon 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Dinamik Matematik Yazılımı Kullanımının Öğrencilerin Türev Kavramının Geometrik Boyutuna İlişkin Anlamalarına Etkisi

Geleneksel olarak yürütülen analiz öğretimi sürecinde, ders içerisinde yer alan kavramlar ağırlıklı olarak cebirsel formda sunulmakta ve cebirsel işlem gerektiren problemlere ağırlık verilmektedir. Dersin bu şekilde ele alınması sonucunda öğrenciler sembollerin ne anlama geldiğinden çok bu sembollerle yürütülen işlemler üzerine odaklanmaktadırlar. Bu durum öğrencilerin analiz kavramlarına ilişkin kavramsal öğrenmelerini geliştirme yerine işlemsel öğrenmelerini geliştirmelerine neden olmaktadır.

Bu çalışmayla, dinamik matematik yazılımı destekli tasarlanmış öğrenme ortamının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisinin geleneksel öğrenme ortamıyla kıyaslanarak incelenmesi amaçlanmıştır. Yarı deneysel tasarımın benimsendiği araştırmanın örneklemini üniversite düzeyinde türev kavramı ile ilk kez karşılaşan ve farklı iki sınıfta yer alan ilköğretim matematik öğretmeni adayları oluşturmaktadır. Öğretim deney grubunda bilgisayar destekli tasarlanmış çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayar laboratuvarında, kontrol grubunda ise geleneksel sınıf ortamında gerçekleşmiştir. Öğrencilerin anlamalarını değerlendirmek için türev konusu içerisinde yer alan alt başlıklara hitap eden beş test literatür ve uzman görüşü doğrultusunda hazırlanmış ve uygulanmıştır. Ayrıca her iki gruptan seçilen mülakat öğrencileri ile testlerde yer alan sorular üzerinde görüşmeler gerçekleştirilmiş ve anlama seviyeleri APOS teorisi temelinde incelenmiştir. Araştırmada elde edilen bulgular, deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran daha iyi anlamalar gerçekleştirdiğini göstermiştir. Bunun yanı sıra, deney grubunda yürütülen öğretimin öğrencilere dinamik düşünme süreçleri kazandırdığı ve problem çözme becerilerine olumlu katkı sağladığı ortaya çıkmıştır. Araştırma kapsamında elde edilen sonuçlar ışığında türev kavramının öğretimine ve ileride yapılabilecek araştırmalara ilişkin önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Türev Kavramı, Teğet Kavramı, Matematiksel Anlama, Analiz Öğretimi, Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi

ABSTRACT

The Effect of Using Dynamic Mathematics Software on Students' Understanding of the Geometric Meaning of the Derivative Concept

The traditional approach to the teaching of calculus favors the algebraic representation of mathematical concepts and gives emphasis to the problems that involve symbolic and algebraic manipulation. Students concentrate more on the manipulation of symbols, rather than their meanings, as a result of adopting such an approach. This, in turn, results in students developing procedural knowledge instead of conceptual understanding of calculus concepts.

The purpose of this study was to investigate the effect of using dynamic mathematics software, compared to the traditional approach, on students' understanding of the geometric meaning of the derivative concept. The study adopted a quasi-experimental research design with two intact classes of students who were prospective elementary mathematics teachers and had not been given any formal instruction about the derivative concept at the university level prior to the study. The two classes were randomly assigned as experimental and control. Instruction in the experimental group took place in a computer laboratory, where students worked in pairs to complete the tasks introduced in the form of work-sheets using GeoGebra, while the control group was taught the same content in a traditional environment using chalk and board. To assess the students' understanding, five tests addressing different topics concerning the derivative concept were administered to the groups during the study. Additionally, clinical interviews were conducted with nine students in each group to determine their level of understanding with respect to APOS theory. The findings revealed that the students in the experimental group developed a better understanding of the derivative concept than those in the control group. The results showed that the instruction in the experimental group was more effective in developing dynamic thinking processes and in improving problem solving skills. Based on the results of the study, suggestions for improving the teaching and learning of calculus, as well as for further studies, were made.

Key Words: Derivative concept, Tangent concept, Mathematical Understanding, Calculus Teaching, Computer Based Mathematics Education

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

AMS **:** American Mathematical Society
APOS **:** Action Process Object Schema
BCS **:** Bilgisayar Cebir Sistemi
DGY **:** Dinamik Geometri Yazılımı
DMY **:** Dinamik Matematik Yazılımı
GHM **:** Grafik Hesap Makinesi
FBTT **:** Fonksiyon Bağlamında Türev Testi
MAA **:** Mathematical Association of America
NBTT **:** Noktasal Bağlamda Türev Testi
NCEE **:** National Commission on Excellence in Education
NCTM **:** National Council of Teachers of Mathematics
NSF **:** National Science Foundation
RUMEC **:** Research in Undergraduate Mathematics Education Community
TFTT **:** Türev Formel Tanım Testi
TGT **:** Teğet Genelleme Testi
YT **:** Yordama Testi

1. GİRİŞ

Matematiğin bir çok dalında ve kavramında olduğu gibi, analiz dalının ortaya çıkmasındaki etken bir probleme çözüm getirme arayışı olmuştur. Günümüzde analiz dalının temelini oluşturan sonsuz küçük (infinitesimal) fikri sezgisel anlamda ilk olarak Antik Yunan matematikçilerinin bir çemberin alanını hesaplamaya yönelik girişimlerinde kendisini göstermektedir. Eski Yunan matematikçilerinden olan Eudox sonsuz küçük fikri üzerine temellendirdiği tüketme metodu (method of exhaustion) ile şekillerin alanını hesaplamak için bir yöntem ortaya koymuştur. Archimedes tüketme metodunu kullanarak bir kiriş ile sınırlanan bir parabol parçasının alanının, bu sınırlanan alan içerisine çizilebilecek en büyük alana sahip üçgenin alanına oranının $\frac{4}{3}$ olduğunu göstermiş (Baki, 2005) ve çemberin alanına, merkezi çemberin merkezi olan düzgün çokgenlerin alanları yardımı ile yakınlaşmıştır (Bühler, 1990). Fakat Antik Yunan matematikçileri yöntem içerisinde yer alan tekrarlama sürecini sonlu sayıda adım için uygulamaktaydı. Yapılan tekrarlamalar sonucunda oluşan değerlerin, tekrarlama sayısının sonsuza ıraksadığında, limiti durumu ile ilgilenilmemekteydi. Bunun sebeplerinden biri, o tarihlerde geometrik büyüklüklerin sayısal olarak ele alınmaması, sadece geometrik nesnelerin uzunluğu, alanı ve hacimlerinin birbirine olan oranlarından bahsedilmesiydi. Diğer bir ifade ile, bir dikdörtgenin alanı nedir sorusu bir anlam ifade etmemekte iken, iki diktörtgenin alanlarının birbirine oranı nedir sorusu anlamlı idi (Boyer, 1959). Bir diğer sebep ise zamanın meşhur filozofu Zenon'un uzay ve hareket bağlamında ortaya attığı ve günümüzde yaygın olarak bilinen paradokslarına (Ör. Aschille ve kaplumbağa, hareket edemeyen ok vb.) karşı kabul gören bir cevap verilememesiydi (Boyer, 1959). Antik Yunan matematiğinden yaklaşık 2000 yıl sonra, Newton ve Leibnitz'in aynı tarihlerde birbirlerinden bağımsız olarak eğriye teğet oluşturma, fonksiyonların maksimum, minimum değerleri ve bir eğri altında kalan alan ile aynı alana sahip dikdörtgeni oluşturma problemleri üzerine yaptıkları incelemeler sonucunda analiz dalının günümüzdeki formunun ilk adımları atılmaya başlamıştır.

Yurtdışı literatür incelendiğinde matematiğin analiz dalının öğretimine yönelik ilk pedagojik tartışmalar 1980'li yılların başlarında Amerika Birleşik Devletlerinde (ABD) matematik öğretimi ile ilgilenen farklı grupların (Mathematical Association of America [MAA], National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], American Mathematical Society [AMS], National Science Foundation [NSF]) bireysel olarak sundukları raporlar ile başlamıştır (Gantner, 2001; MAA, 1981). Bu grupların hemfikir oldukları nokta, geleneksel olarak yürütülen analiz öğretiminin etkili olmadığı idi. National Commission on Excellence in Education (NCEE) komisyonunun "A nation at risk" başlığıyla sunduğu raporda ortaöğretim ve üniversitelerin yürüttükleri analiz öğretiminin gözden geçirilmesi gerektiği ifade edilmekteydi (NCEE, 1983). Analiz öğretimine yönelik farklı grupların dile getirdiği olumsuzlukların sonucu olarak, analiz öğretimine yönelik bir reform başlatma amacıyla 1986 yılında Tulane Üniversitesi'nde bir konferans düzenlendi. Moore ve Smith (1987), "Toward a lean and lively calculus" isimli konferansın sonuçlarını içeren kitaba yönelik yaptıkları incelemede, konferansın merkezinde yer alan düşünceleri ve soruları şu şekilde özetlemişlerdir:

- Matematik okur-yazarlığı becerisi analiz kavramlarını anlama ve uygulamada temel teşkil etmektedir. Gerçekçi bir reform hareketi bu durumu dikkate almalıdır.
- Öğrencileri öğrenme sürecine aktif olarak dâhil etmemiz gerekmektedir. Gelişmiş hesap makineleri ve mikrobilgisayarlar bu etkileşimi gerçekleştirmek adına nasıl işe koşulabilir? Analiz dersi bir lâboratuvar dersine mi dönüşmeli?
- Mevcut sınav sistemi hesaplama detayları üzerine vurgu yapmaktadır. İleri sürülecek ciddi bir reform hareketinde alternatif değerlendirme yöntemleri nasıl olmalı?
- Yeni analiz dersleri içerisine bilgisayar cebir sistemlerini nasıl dâhil etmeliyiz?

Tulane konferansının sonuçlarında ifade edilen matematik öğretiminde bilgisayarların ve hesap makinelerinin etkili olabileceği fikri ve gelişen teknolojinin sunduğu olanaklar sonucunda, bir çok araştırma grubu analiz reformu olarak nitelenen araştırmalar yapmaya başlamışlardır. ABD'de bulunan NSF kurumu 1988-1991 yılları arasında çeşitli üniversitelerde analiz reformu için başlatılan 82 projeye maddi destek sağlamıştır (NSF, 1992). Bu projeler arasından literatürde en çok değinilenlerden biri, Harvard üniversitesi liderliğinde yedi üniversite ve bir liseyi içeren *Harvard Core Calculus Consortium Project* girişimidir. Bu proje analiz dersinde yer alan bir çok kavramın *grafik*, *nümerik* ve *cebirsel* temsillerinin tümünün işe koşularak öğretilmesi gerektiğini savunmaktadır. İlerleyen yıllarda bu üç yaklaşıma ek olarak matematiksel yazma etkinliklerinin de öğretime dâhil edilmesi gerektiği önerilmiştir. Bu yaklaşımın benimsenmesinin gerekçesini Gleason ve Hallet (1992) şu şekilde belirtmişlerdir:

> Analiz dersi nakarat gibi tekrarlanan prosedürlerin ve belirli kalıplarda problemlerin sunulması sebebiyle, öğrencilere sadece düşünmeden yapılan cebirsel hesaplamalar sunar hale gelmiştir....Örneğin türev kavramının tanımını ele alalım. Öğretimde ilk olarak öğrencilere türev kavramının grafiksel olarak ne anlam taşıdığını gösteren grafikler çizeriz. Sonra, kesen doğrularını teğete götüren limit alma işlemine nümerik bağlamda kısaca değiniriz. Son olarak türevin cebirsel olarak nasıl hesaplanacağını gösteren formüllere değiniriz. Her ne kadar tüm mânâ ilk ikisi içinde yer alsa da, çok nadiren cebirsel boyutun haricinde başka bir şeyi değerlendirmede dikkate alırız. Daha sonraları öğrenciler cebirsel boyutta türev kavramı üzerinde çalışırken, onların türevin grafiksel ve nümerik bağlamda ifade ettiği anlamı da beraberinde getirdiklerine inanmış olmalıyız. Ne yazık ki, durum bunun tam tersidir. Örneğin, türev kavramının grafiksel yorumuna ya da türeve nümerik olarak yaklaşmaya ilişkin soru sorduğumuzda, genellikle bu iki yaklaşıma yönelik anlamanın eksik olduğunu görürüz. Fonksiyonlara ait türevleri mekanik olarak bulabilen ve bunları

> kullanarak problemleri çözebilen öğrencilerin bir çoğu türevin gerçekte ne anlama geldiğini bilmemektedir.

Analiz öğretimini daha etkili yapmak amacıyla öğretimde bilgisayardan faydalanmaya odaklanan araştırma veya projelerin bir kısmı, öğretim sürecine Bilgisayar Cebir Sistemi (BCS) olarak isimlendirilen bilgisayar yazılımlarını dâhil etmişlerdir. BCS adı altında gruplanan yazılımlardan bazıları Mathematica, Derive, Maple, Mathcad ve MuMath isimli yazılımlardır. BCS yazılımları kullanıcıya cebirsel denklemleri, eşitsizlikleri çözme ve fonksiyonların grafiklerini oluşturma gibi olanaklar sunmaktadır. Bu yazılımların matematik öğretiminde kullanılmasının en yaygın gerekçesi olarak, zaman alıcı ve yorucu hesaplamaların bu yazılımlar sayesinde kolayca yapılabilmesi ve bunun sonucunda öğrencilerin işlemler yerine kavramlara yoğunlaşma imkanı bulması, bunun yanında öğretmene öğrenci ile sınıf etkilişimini daha yoğun olarak gerçekleştirme fırsatı sunması olarak ileri sürülmektedir (Baki, 2001; Muhundan, 2005). Bunun yanında bu yazılımlar kalem-kağıt ortamında incelenmesi zor veya imkansız olan gerçek hayat uygulamalarını inceleme potansiyelini kullanıcıya sunmaktadır (Heid, 1988).

Heid (1997), matematik eğitiminde teknoloji kullanımını konu alan araştırmalar üzerinde yaptığı incelemesinde, öğretim sürecinde BCS'den faydalanan öğrencilerin diğer öğrencilere nazaran ele alınan kavramlara yönelik daha derin anlamalar oluşturduğunu söylemektedir. Öğrencilerin yanı sıra Heid öğretim süreçlerinde BCS kullanan öğretmenlerin, sınıf içerisinde kendi rollerine ilişkin algılarının bilgiyi sunan kişiden öğrenmeyi kolaylaştıran kişiye doğru değiştiğini rapor etmiştir. Heid BCS kullanımına yönelik olumsuz sonuç belirtilen araştırmalardaki ortak noktanın uygulama süresinin kısalığı olduğunu belirtmekte, dolayısıyla ileri sürdükleri olumsuz sonucun sebebinin kısıtlı uygulama zamanı olabileceğini öne sürmektedir. Bununla birlikte bazı BCS yazılımlarının etkin bir şekilde kullanılması için ilk olarak yazılıma özgün olan programlama dilinin öğrenilmesi gerekliliği ve bu durumun öğrencilere ek bir zihinsel yük getirmesi, bu yazılımların tercih edilmesinde olumsuz bir faktör olarak bulunmaktadır. BCS yazılımlarının kullanılmasını olumsuz etkileyen faktörlerden bir diğeri, yazılımları ve yazılımları kullanmak için gereken donanımı elde etmede karşılaşılan malî külfet olarak ortaya çıkmıştır. Özellikle BCS yazılımlarının matematik öğretiminde kullanımı konusunda yaşanan malî külfete karşılık, nispeten daha ucuz olan Grafik Hesap Makinelerinin (GHM) kullanımı bir çözüm olarak ortaya çıkmıştır (Muhundan, 2005). Ellington (2000), hesap makinelerinin matematik eğitiminde kullanımına odaklanan araştırmalar üzerinde bir meta-analiz gerçekleştirmiştir. Çalışmasına 1984-2000 yılları arasında yayımlanan deney-kontrol grubu desenli 53 araştırmayı dâhil etmiştir. Araştırmasının sonuçlarında Ellington, matematik öğretiminde GHM'nin kullanıldığı öğretim süreçlerine göre farklı etkiler yaptığını bulmuştur. Buna göre GHM yalnızca odaklanılan konunun öğretiminde kullanılıp öğrenciler kağıt-kalem ortamında değerlendirildiğinde öğrencilerin işlemsel becerilerinin gelişimine olumsuz etki yapmakta, kavramsal anlama üzerinde ise anlamlı etki oluşturmamaktadır. Bununla beraber GHM hem öğretim sürecinde hem de değerlendirme sürecinde kullanıldığında, kavramsal anlama açısından olumlu etki yapmakta, işlemsel beceriler üzerinde etkisi bulunmamaktadır. Duyuşsal açıdan ele alındığında, GHM kullanımının öğrencilerin matematik dersine yönelik olumlu tutum geliştirmelerine katkı sağladığı belirtilmiştir.

Matematiğin analiz dalına atfedilen değerin en temel sebebi, matematikçilere ve diğer disiplinlerde çalışan araştırmacılara oldukça karmaşık olan problemleri bile basit kural ve yöntemlere indirgeme olanağı sunmasıdır (Hughes-Hallett ve diğ., 1994). Matematik eğitimi literatüründe analiz dersi kapsamında ele alınan konuların öğretimi ve bu dersin kapsamı içerisinde yer alan kavramların bireyler tarafından nasıl anlamlandırıldığı üzerine bir çok çalışmanın yapıldığı görülmektedir (Aksoy, 2007; Amit ve Vinner, 1990; Asiala, Dubinsky, Cottrill ve Schwingendorf, 1997; Bezuidenhout, 1998; Çetin, 2009; Dubinsky ve Harel, 1992; Hartter, 1995; LeVeque, 2003). Geleneksel olarak bu ders kapsamında yer alan kavramların öğretimi tanım, teorem, ispat ve problem çözme döngüsünün tekrar edilmesi şeklinde gerçekleşmektedir. Araştırmacılar bu döngünün tekrar edilmesi şeklinde yürütülen derslerin, öğrencilerin matematiğin doğasına ilişkin yanlış düşünceler oluşturmasına ve ders içerisinde yer alan kavramlara yönelik olumsuz tutum geliştirmelerine yol açtığını ifade etmektedirler (Denis ve Confrey, 1996). Duyuşsal alanın yanı sıra bu şekilde işlenen derslerin öğrenmenin bilişsel boyutuna da olumsuz etkileri olduğu yapılan araştırmalarda rapor edilmiştir. Araştırmacılar bu şekilde yürütülen öğretimin, öğrencilere matematiksel muhakeme yapmada kullanılan süreçlerin farkına varma ve kavramlara ilişkin muhakeme yapmada sezgilerini kullanma fırsatı sunmadığını ifade etmektedirler (Dreyfus ve Halevi, 1991; Fischbein, 1982). Yapılan araştırmalar analiz dersi kapsamında ele alınan temel kavramları anlamada öğrencilerin ciddi sıkıntılar yaşadıklarını ortaya koymaktadır (Harel, Selden ve Selden, 2006; Tall, 1992). Tall (1992) öğrencilerin analiz dersinde yaşadıkları bazı sıkıntıları şu şekilde sıralamaktadır:

- Fonksiyon kavramına ilişkin sınırlı kavram imgesi
- Leibnitz notasyonunun ($\frac{dy}{dx}$) anlamlandırılamaması
- Günlük hayat problemlerini formülleştirmede yaşanan sıkıntılar
- Problemlerin çözümü için uygun düşen gösterimleri seçmede ve kullanmada yaşanan sıkıntılar
- Cebirsel işlemleri gerçekleştirmede yaşanan sıkıntılar

- Niceleyicileri kullanmada ve tanımlar içerisinde bulunan niceleyicilerin ne anlama geldiğini kavramada yaşanan sıkıntılar

Geleneksel olarak gerçekleştirilen analiz öğretimi sürecinde, ders içerisinde yer alan kavramlar ağırlıklı olarak cebirsel formda sunulmakta ve cebirsel işlem gerektiren problemlere ağırlık verilmektedir. Dersin bu şekilde ele alınması sonucunda öğrenciler sembollerin ne anlama geldiğinden çok bu sembollerle yürütülen işlemler üzerine odaklanmaktadırlar. Bu durum öğrencilerin analiz kavramlarına ilişkin kavramsal öğrenmelerini geliştirme yerine işlemsel öğrenmelerini geliştirmelerine neden olmaktadır (Berry ve Nyman, 2003). Bu durumun başka bir sonucu da öğrencilerin analiz kavramlarına yönelik cebirsel anlamalarına nazaran geometrik anlamaları daha az gelişmektedir (Selden, Selden ve Mason, 1994). Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997), matematiksel kavramlara ilişkin öğrencilerin yoğun olarak cebirsel anlamalar geliştirmelerinin ve öğretmenlerin derslerde kavramların cebirsel temsillerine ağırlık vermelerinin sebeplerini aşağıdaki gibi sıralamaktadır:

- Görsel olarak yapılan ispatın gerçek bir matematiksel ispat olmadığı anlayışı.
- Analiz ve diğer derslerde öğrencilerin karşılaştığı rutin soruların büyük bir bölümünün çözümünün cebirsel alana yönelik işlem gerektirmesi.
- Analiz dersinin sayılar ve semboller üzerinde işlemler yapmak olduğuna dair öğretmen ve öğrenci inanışı.

Berry ve Nyman (2003), analiz dersi bağlamında anlamanın sadece standart kuralları kullanarak fonksiyonların diferansiyellerini ve integrallerini bulmak gibi cebirsel işlemleri gerçekleştirmekten ziyade, kuralları ve kavramları araştırabilme yeteneği kazanmaya ve bunların gerek matematik gerekse diğer disiplinlerdeki kavramlar ile nasıl bağlantılı olduğunun farkında olmaya bağlı olduğunu ifade etmiştir. Analiz dersindeki kavramların bir çoğu cebirsel formun yanı sıra geometrik olarak da temsil edilebilmektedir. Zimmermann (1991) analiz dersi içerisinde yer alan kavramlara ilişkin yeterli düzeyde anlama gerçekleştirmek için, görsel düşünmenin önemli olduğunu ve ele alınan konunun görsel boyutuna vurgu yapmayan bir öğretimin kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirme açısından başarılı olamayacağını söylemektedir. Zimmermann'ın paralelinde Koirala (1997), analiz derslerinin kavramsal olarak grafikler ve fonksiyonlar üzerine temellendirilmesi gerektiğini, bunun yanında formüllerin ve kuralların doğrudan sunulması yerine sezgisel olarak öğrencilerin matematik ve fen derslerinde kazandıkları ön bilgiler üzerinde yapılandırılması gerektiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla analiz kavramlarının öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılabilmesi için, bu konulara yönelik verilen öğretim sadece cebirsel temsiller üzerine değil, bunun yanı sıra konu olan kavramların geometrik temsilleri ve bu temsiller arasındaki ilişkiler üzerine de odaklanmalıdır (Kaput, 1994). Heid

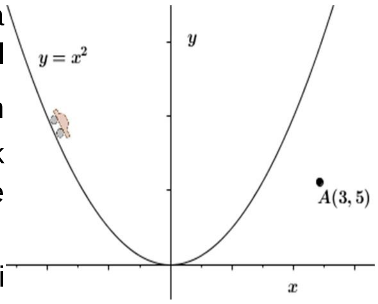
(1988) araştırmasında, ilk olarak farklı temsillerin kullanılmasıyla kavramların ne anlam taşıdığını inceleyen ve bunu takiben cebirsel beceri üzerine odaklanan bir öğretime tabi olan öğrencilerin, geleneksel öğretime tabi olan öğrencilere nispeten analiz kavramlarına yönelik daha iyi anlamalar geliştirdiklerini belirlemiştir.

Geleneksel olarak yürütülen analiz derslerinde işlemsel bilgi ve prosedürlerin üzerinde yoğun olarak durulması, bilgisayar destekli öğrenim gören öğrenciler ile geleneksel yolla öğrenim gören öğrenciler arasında, işlemsel bilgi ve hesaplama tekniklerini kullanma becerisi açısından farklılık yaratıp yaratmayacağı sorusunu ortaya çıkarmıştır. Literatürde bu soruya cevap vermek için yürütülen çalışmalar birbiriyle zıt sonuçlar ortaya koymaktadır. Bazı araştırmalar teknoloji destekli öğrenim gören öğrenciler ile geleneksel öğrenim gören öğrenciler arasında işlemsel beceri açısından anlamlı bir farklılık olmadığını belirtirken (Gaulke, 1998; Matthews, 1998, Cooley, 1997), diğer bazı araştırmalar geleneksel yolla öğrenim gören öğrencilerin bilgisayar destekli öğrenim gören öğrencilere nazaran hesaplama becerileri açısından daha yetenekli hâle geldiğini belirtmektedir (Soto-Johnson, 1996; Miller, 1999).

Analiz konuları içerisinde geometrik veya grafiksel boyut açısından en zengin kavram türev kavramıdır. Kavramın tanımı geometrik bir kavram olan teğet doğrusu üzerine inşa edilmektedir. Bununla birlikte türev ünitesi içerisinde işlenen konuların büyük bir bölümü yine fonksiyon grafiği ile teğeti arasındaki ilişkilere dayanmaktadır. Hiç kuşkusuz, matematik öğretiminin en temel amaçlarından biri öğrencilere bir matematikçi gibi düşünebilme yeteneği kazandırmaktır. Bu yetenekler özetle muhakeme yapabilme, genellemelere varabilme, varsayımda bulunabilme, günlük hayat problemlerini matematiksel olarak ifade edebilme ve çözebilme ve formel ispat tekniklerini kullanabilme olarak sıralanabilir. Türev konusu içerisinde yer alan içerik öğrencilere bu yetenekleri kazandırmada büyük potansiyele sahiptir. İlk olarak kavramın formel tanımı, ileri matematiksel düşünmeye ve formel ispat tekniklerini kullanmaya girişte ilk basamak olarak görülen limit kavramı üzerine inşa edilmiştir. Bunun yanı sıra fonksiyon grafiklerinin karakteristiklerini incelemeye yönelik içerikte ele alınan problem durumları, öğrencilerin matematiksel muhakeme süreçlerini yaşamalarına fırsat sunmaktadır. Son olarak türev kavramı günlük hayat problemlerinde oldukça geniş uygulama alanı bulmaktadır. Bu ise öğrencilerin matematiksel modelleme becerilerini geliştirebilecekleri bir ortam sunmaktadır. Araştırmacı kendi öğretim deneyimleri sonucunda, geleneksel olarak işlenen analiz derslerinin öğrencilere bu becerileri kazandırmada etkili olmadığı görüşündedir. Örneğin şu iki problem durumunu dikkate alalım:

1. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğine $(1,1)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

2. Geceleyin yol almakta olan bir aracın izlediği yol $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği olarak modellenmiştir. Buna göre aracın farları $A(3,5)$ noktasında bulunan heykeli ilk hangi noktada aydınlatmaya başlar?



Araştırmacı bu iki problemi sınıf ortamında öğrencilere yönelttiği her seferde, 1'inci problemin sınıftaki öğrencilerin tamamına yakını tarafından fakat 2'inci problemin ise çok az, bazen hiç, öğrenci tarafından çözülebildiğine tanık olmuştur. Bu durum öğrencilerin öğrendikleri bilginin kural temelli olduğunu ve türev kavramının geometrik boyutu ile cebirsel boyutunu ilişkilendiremediklerini göstermektedir. Araştırmacının bu ve benzer deneyimlerinin sonucunda sahip olduğu görüşün paralelinde Aspinwall (1994), geleneksel yolla işlenen analiz derslerinin kurallar ve yöntemleri öğretmek olarak gerçekleştiğini ve bunun sonucunda, öğrencilerin grafikleri analiz etmede ve teğet doğrusunun eğiminin kavramsal temelini anlamada yetersiz kaldığını ifade etmektedir. Bununla birlikte literatürde yer alan araştırmalar, geleneksel olarak yürütülen analiz derslerinin sonucunda öğrencilerin tek noktada türevin geometrik temsili olan teğet doğrusunu, Euclid bağlamından analiz bağlamına formel bilgiyle tutarlı olacak şekilde genelleyemediklerini rapor etmektedirler (Biza, 2007; Biza ve Zachariades, 2006; Isaacson, 1999). Sonuç olarak araştırmacılar, cebirsel temsilin yanı sıra grafiksel temsilinde öğrencilerin türev kavramınına yönelik anlam oluşturmada temel oluşturması gerektiğini belirtmektedirler (Artigue, 1991; Hartter, 1995). Dolayısıyla öğrencilerin türev kavramına yönelik arzu edilen seviyede anlamaya sahip olmaları ve bunun sonucunda hedeflenen becerileri kazanmaları için kavramın geometrik boyutuna yönelik iyi seviyede anlama oluşturmaları gerekmektedir.

Analiz dersi içerisinde yer alan kavramların öğretiminde görselleştirme, öğrencilerin kavramlara ilişkin daha tutarlı ve kapsamlı zihinsel yapılar oluşturmasında yardımcı bir role sahiptir. Bununla birlikte literatürde yer alan çalışmalar öğrencilerin zayıf görselleştirme becerilerine sahip olduğunu, bunun sonucunda türev kavramının grafiksel boyutuna ilişkin anlamalarının yetersiz olduğunu söylemektedir. Teknolojinin öğretimde kullanılması beraberinde matematik eğitiminde kullanılabilecek yeni yazılımların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Matematik eğitimi için geliştirilen bilgisayar programlarının ve diğer araçların kavramların grafiksel ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkileri kurmada potensiyel sahibi olduğu ileri sürülmektedir. Mevcut olan BCS ve Dinamik Geometri

Yazılımı (DGY) programlarının sahip olduğu karakteristik özellikleri bir arada bulunduran Dinamik Matematik Yazılımı (DMY) programlarının ortaya çıkması bunun son örneğidir. Bu araştırmayla bir DMY olan GeoGebra ile desteklenmiş öğretim ortamının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerinde etkili olup olmadığı problemine cevap aranacaktır. Bu bağlamda çalışmanın problemleri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

1. Öğretim sürecinde DMY kullanımı noktasal bağlamda türev kavramının geometrik boyutunu anlamada etkili midir?
    - 1.a. DMY kullanımı bir fonksiyonun tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlamada etkili midir?
    - 1.b. DMY kullanımı türev kavramının formel (Ɛ-δ) tanımının geometrik boyutunu anlamada etkili midir?
2. Öğretim sürecinde DMY kullanımı fonksiyon bağlamında türev kavramının geometrik boyutunu anlamada etkili midir?
    - 2.a. DMY kullanımı fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlamada etkili midir?
    - 2.b. DMY kullanımı türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlamada etkili midir?
3. Öğretim sürecinde DMY kullanımı öğrencilerin teğet kavramına ilişkin oluşturdukları genellemeler üzerinde etkili midir?

1.1. Araştırmanın Amacı

Matematik eğitimi bağlamında yapılan araştırmaların amaçlarından biri, matematiksel kavramları öğrenirken öğrencilerin yaşadıkları zorlukları, bu zorlukların temelinde yer alan nedenleri saptamak ve öğrencilere yardım etme amacıyla neler yapılabileceğini belirlemektir. Buradan hareketle bu çalışmanın amacı, dinamik matematik yazılımlarından biri olan GeoGebra ile desteklenmiş öğretim sürecinde, yazılımın öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarının gelişimine nasıl katkı sağladığını belirlemektir. Bu bağlamda araştırmanın alt amaçları aşağıda sıralanmıştır:

1. GeoGebra ile desteklenmiş öğretim sürecinin öğrencilerin noktasal bağlamda türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisini belirlemek.

2. GeoGebra ile desteklenmiş öğretim sürecinin öğrencilerin fonksiyon bağlamında türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisini belirlemek.

3. GeoGebra ile desteklenmiş öğretim sürecinin öğrencilerin teğet kavramına ilişkin genellemeleri üzerindeki etkisini belirlemek.

1.2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Yaşadığımız evren içerisindeki her olgu sürekli bir değişim içerisindedir. İnsanoğlu var olduğu günden bu yana bu değişime ayak uydurmaya, kontrol edebildiklerini kendi lehine sonuçlanacak şekilde yönlendirmeye çalışmaktadır. Günümüze kadar bu girişimlerinin sonucunda bazı olguların değişiminin nasıl ve niçin gerçekleştiğini anlamayı başarmış, örneğin mevsimler niçin ve nasıl değişir, bazılarını ise öngörmeyi, örneğin ne zaman deprem olacağı, veya kendi lehine çevirmeyi henüz başaramamıştır. Tarih boyunca insanoğlunun çevresindeki bu değişim olgusunu anlamak ve açıklamak için kullandığı yöntemlerin ve zihinsel çabalarının sonucu günümüz matematiğinin analiz dalı olarak bildiğimiz eserdir. Matematiğin analiz dalına değişim olgusunu inceleme ve açıklama gücünü veren ise türev kavramıdır. Analiz dalı bağlamında değişim içeren sistemler diferansiyel denklemler vasıtası ile modellenebilmektedir. Dolayısıyla türev kavramının kavramsal olarak anlaşılması diferansiyel geometri, diferansiyel denklemler gibi diğer teorik kavramları anlamada kritik öneme sahiptir (Snook, 1997).

Matematik eğitimi alanında yapılan araştırmalar, matematiksel anlama ile görsel ve analitik düşünmeyi birlikte kullanabilme becerisi arasında güçlü bir ilişki olduğu iddiasını desteklemektedir. Araştırmacılar öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin güçlü anlamalar oluşturabilmeleri için görsel ve analitik muhakeme becerilerinin mevcut ve birbiriyle entegre olması gerektiğini ifade etmektedirler (Zazkis, Dubinsky ve Dautermann, 1996; Aspinwall ve Shaw, 2002; Haciomeroglu, Aspinwall ve Presmeg, 2010). Berry ve Nyman (2003), bir fonksiyonun grafiği ile türev fonksiyonunun grafiği arasındaki ilişkileri anlayan öğrencilerin, türev ve türev ile integral kavramları arasındaki ilişkilere yönelik kavramsal anlamalarının büyük ölçüde gelişeceğini iddia etmektedirler. Bu iddianın paralelinde Zimmermann (1991) analiz dersi bağlamında görsel düşünmenin bir temel boyutunun, türev kavramını grafiksel açıdan anlamak olduğunu ifade etmektedir. Analiz eğitimine ilişkin literatürde çokça tartışılan konulardan biri öğrencilerin analiz kavramlarını görselleştirmesi ve kavramların grafiksel boyutuna ilişkin anlam oluşturmada yaşadıkları sıkıntıdır. Analiz kavramları içerisinde geometrik boyut açısından en zengin içeriğe sahip kavramlardan biri türev kavramıdır. Bu sebeple öğrencilerin türev kavramına yönelik tam bir anlama oluşturabilmeleri ve matematik öğrenme süreçlerinin ileriki safhalarında, türev kavramının temel oluşturduğu geometrik anlamda zengin içeriğe sahip olan konulara ve kavramlara yönelik anlam oluşturmada sıkıntı yaşamamaları için, türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin yeterli seviyede anlama geliştirmeleri gerekmektedir. Literatürde yer alan araştırmalar incelendiğinde, türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin öğrencilerin anlamalarını kapsamlı şekilde inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Literatürde mevcut araştırmaların, türev konusu içerisinde yer alan başlıkların bir kısmına (Ör. Teğet kavramı, fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkiler) odaklandıkları, bazı başlıklara (türev kavramının formel tanımı) ise hiç değinmediği görülmektedir. Oysa ki, türev konusunun geometrik boyutuna ilişkin öğretimin etkili bir şekilde gerçekleştirilebilmesi için, konunun bütününde öğrencilerin anlamalarının nasıl oluştuğunun ve hangi noktalarda sıkıntı yaşandığının bilinmesi gerekmektedir. Yapılan bu araştırmada türev kavramının geometrik boyutu bütüncül olarak ele alındığından, araştırmadan elde edilecek sonuçların konunun öğretiminde daha etkili pedagojik stratejilerin geliştirilmesine olanak sağlama potansiyeli bulunmaktadır.

Hangi seviyede ve hangi konuya yönelik olursa olsun, matematik eğitiminin amaçlarından biri de öğrencilerin problem çözme ve akıl yürütme becerilerini geliştirmektir. Öğrencilerin problem çözme ve buna bağlı akıl yürütme becerilerinin gelişiminde kavramsal öğrenmenin olumlu etkisi mevcuttur (Baki, 2008). Bu etki öğrencinin problem çözmede kendi yaratıcılığını ve yeteneklerini verimli bir şekilde kullanmasıyla ortaya çıkmaktadır (Baki, 2008). Bunun yanında kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirmiş öğrenciler, matematiksel durumları farklı halde temsil edebilmekte ve farklı gösterimlerin farklı amaçlar için nasıl kullanılabileceğini bilmektedirler (Hiebert ve Carpenter, 1992; National Research Council [NRC], 2001). Bunun sonucunda kavramsal anlamaya sahip öğrenciler işlemsel bilginin ötesinde anlama gerektiren rutin olmayan problemleri çözebilir hale gelmektedir. NRC (2001), problem çözme becerisinin önemli bir karakteristiği olan esnekliğin rutin olmayan problemler üzerinde çalıştıkça geliştiğini belirtmektedir. Türev kavramı gerek günlük hayat içerisinde gerekse diğer disiplenlerde ortaya çıkan problem durumlarında kendine yer bulmaktadır. Dolayısıyla türev kavramına yönelik öğretim, öğrencilerin problem çözme ve buna bağlı olarak akıl yürütme becerilerini geliştirebilecekleri bir ortam sunma potansiyeline sahiptir. Bu potansiyelden olabildiğince istifade etmek için türev kavramına yönelik öğretim, öğrencilerin kavramsal anlamayı gerçekleştirmelerine olanak sağlayacak şekilde gerçekleştirilmelidir. Yapılan bu araştırma çerçevesinde geliştirilen öğretim stratejileri öğrencilerde kavramsal anlamayı gerçekleştirme amacı taşımaktadır. Benimsenen stratejilerin bu amaca hizmet eder nitelikte olduğu gösterildiğinde, araştırmanın sonuçları eğitimcilere yukarıda ifade edilen becerileri öğrencilere kazandırma amacıyla etkili öğrenme ortamları tasarlamada faydalanabilecekleri bir kaynak oluşturacaktır.

Türev kavramının geometrik boyutta ifade ettiği anlam, noktaların ve bunlara bağlı doğruların devinimini içermektedir. Kavramın temelinde yatan bu devinimin ders kitaplarında resmedilmesi veya statik olarak sınıf içerisinde tahtada sunulması, öğrencilerin zihinlerinde bu sürece yönelik anlam oluşturmada ne derece yardım etmektedir? Literatürde yer alan araştırmalar türev konusunun geometrik boyutunu anlamanın öğrenciler için kolay olmadığını, bu konuya ilişkin kavram yanılgılarına sahip olduklarını ve geleneksel olarak gerçekleşen öğretim süreçlerinin bu açıdan yetersiz kaldığını ortaya koymakta, böylece bu sorunun cevabının olumlu olmadığını göstermektedir. Sonuç olarak, öğrencilere bu süreçte yardım edecek, kavramın temelinde yatan devinimi farketmelerine ve anlamlandırmalarına yardım edecek farklı öğrenme ortamlarının oluşturulması gerekmektedir. Araştırmacılar bilgisayar programlarının bu türden ortamları oluşturma potansiyeli olduğunu belirtmektedir (Ellison, 1993; Isaacson, 1999). Bu durum dikkate alındığında, günümüzde meydana gelen hızlı teknolojik gelişmelerin ışığında analiz öğretimine ilişkin en önemli soru, bu gelişmelerin sunduğu avantajlardan mümkün olduğunca istifade ederek, analiz kavramlarına sezgisel bir yaklaşım sunmanın yanı sıra öğrencilerin modern matematiksel teori ile tutarlı anlamalar gerçekleştirmesine olanak sağlayan öğrenme ortamlarının ve araçlarının nasıl geliştirilebileceği sorusudur (Biza, Diakoumopoulos ve Souyoul, 2007). Bu çalışmada bir dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra kullanılarak tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerindeki etkisini incelemek amaçlanmıştır. Araştırmadan ortaya çıkacak sonuçlar, yukarıda ifade edilen sorunun cevabına katkı sağlayacaktır.

1.3. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Araştırmanın pilot ve esas uygulamasında seçilen örneklem Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında iki farklı sınıfta bulunan öğrenciler ile sınırlıdır.

2. Araştırma çerçevesinde gerçekleştirilen mülakatlar 18 öğrenci ile sınırlı tutulmuştur.

3. Araştırmanın pilot uygulaması 2010-2011 öğretim yılı güz dönemi ve asıl uygulama aşaması 2011-2012 öğretim yılı güz dönemi ile sınırlı tutulmuştur.

4. Hazırlanan öğretim süreci 6 hafta ve 12 ders saati ile sınırlı tutulmuştur.

5. Türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin içerik araştırma sorularında yer alan konu başlıkları ile sınırlı tutulmuştur.

1.4. Araştırmanın Varsayımları

1. Katılımcıların araştırma çerçevesinde uygulanan testlerde ve gerçekleştirilen mülakatlarda gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

1.5. Tanımlar

DMY: BCS ile DGY'nin sahip olduğu karakteristik özellikleri bir arada sunan, program içerisinde oluşturulan matematiksel nesnelerin geometrik ve cebirsel temsillerine aynı anda müdahale imkanı sunan bilgisayar yazılımlarının ortak adıdır (Hohenwarter ve Preiner, 2007).

APOS: İleri matematik bağlamında bireylerin matematiksel kavramlara ilişkin anlamalarını nitelemek ve seviyelendirmek için ileri sürülmüş öğrenme teorisidir (Dubinsky, 1991).

Kavram imgesi: Bireylerin zihinlerinde bir matematiksel kavrama ilişkin sahip oldukları bilginin bütününü nitelemek için ortaya atılan terimdir (Tall ve Vinner, 1981).

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

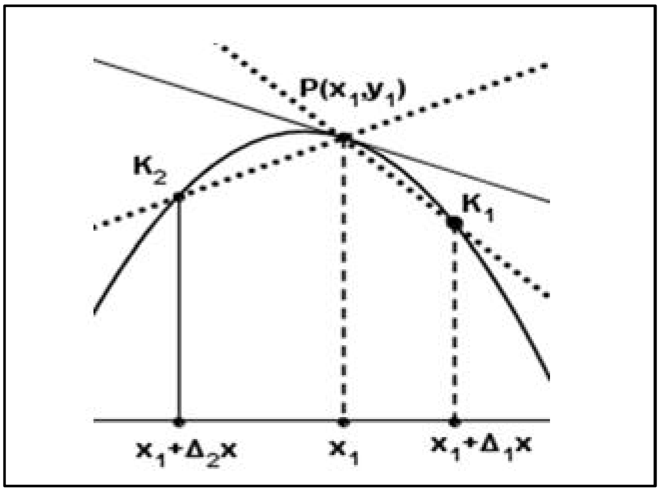
Literatür taramasının bu bölümünde, araştırmada yer alan kavram ve değişkenlere ilişkin literatür ile araştırma konusu ile ilgili daha önce yürütülen çalışmalara ve bu çalışmaların sonuçlarına yönelik literatür sunulmuştur.

2.1.1. Araştırmada Yer Alan Kavram ve Değişkenler

Bu bölümde, araştırmada yer alan kavram ve değişkenlerin literatürde yer alan tanımları verilmiş ve açıklanmıştır.

2.1.1.1. Türev Kavramı

Bilinen matematik tarihi sürecinde teğet kavramı ilk olarak Euclid tarafından düzlem geometri bağlamında ortaya konmuştur. Bu bağlamda ortaya atılan teğet kavramı statik bir yapıda olup, daha çok konikler çerçevesinde eğrilerin üzerindeki bir noktadan eğriye çizilen ve eğriyi tek noktada kesen doğru şeklinde tanımlanmakta idi. Newton'un doğruları, yüzeyleri ve üç boyutta kapalı bölgeleri statik bir yapıda ele alan yaklaşımı redderek, matematiksel kavramların oluşturulmasında devinimi temel alması ile birlikte günümüz analiz dalının temelleri atılmıştır. Newton'a göre artık doğru hareketli noktaların, yüzey hareketli doğruların ve katı cisimler ise hareketli düzlem ya da düzlem parçalarının oluşturduğu nesnelerdir (Isaacson, 1999). Geometrik nesnelerin hareket eden başka nesneler ile oluşturulması fikri, matematikte sezgiye ve gözleme yer açmıştır. Bu yaklaşımın sonucunda Euclid'in ortaya attığı statik yapıdaki tanım yerini dinamik bir tanıma bırakmıştır. Modern matematik bağlamında bir *f(x)* fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan (x_1,y_1) noktasından geçen teğet, bir noktası (x_1,y_1) ve eğimi $lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ değerine eşit olan doğru olarak tanımlanmaktadır (Salas, Hille ve Etgen, 2007). Kavramın formel tanımı notasyonel formda her ne kadar statik bir yapıdaymış gibi görünse de, grafiksel formda içerisinde noktaların ve buna bağlı olarak doğruların hareketini barındırmaktadır. Tanımın grafiksel formu ele alındığında, fonksiyonun grafiğine verilen noktada çizilen teğet, grafik üzerinde serbest olarak alınan K$(x_1+\Delta x, f(x_1+\Delta x))$ noktası ile $P(x_1,y_1)$ noktasından çizilen kesen doğrusunun, K noktasının yön farketmeksizin P noktasına yaklaştığındaki limit durumudur (Şekil 1).



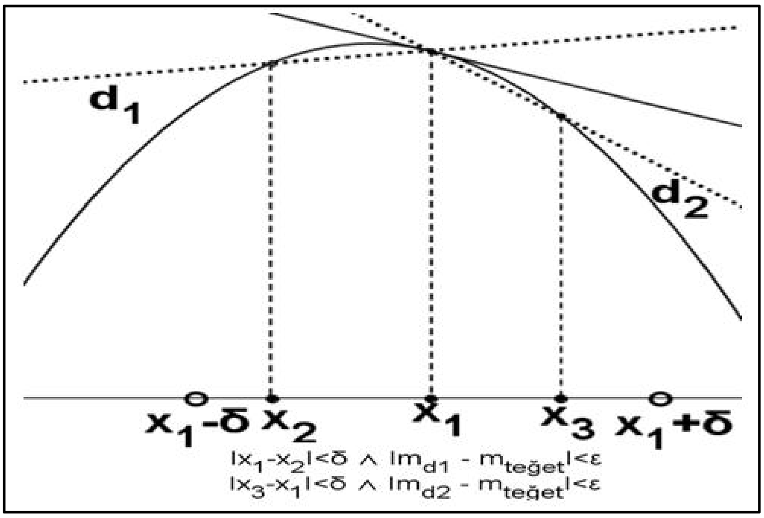
Şekil 1. Kesen doğrularının limit durumu olarak teğet doğrusu.

Bu tanımdan anlaşılacağı üzere bir fonksiyonun grafiğine (x_1,y_1) noktasında teğet çizilebilmesi için $lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ limitinin mevcut olması, başka bir ifade ile sonlu bir reel sayıya eşit olması gerekmektedir. Bu limit ifadesi $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_1$ değerindeki türevi olarak isimlendirilir ve $f'(x_1)$ notasyonu ile ifade edilir. Dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_1$ noktasındaki türevi $f'(x_1) = l$ ise bu durum birbirine denk olan iki limit ifadesi ile şu şekilde tanımlanmaktadır;

$$f'(x_1) = l \Leftrightarrow lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = l \text{ veya } f'(x_1) = l \Leftrightarrow lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = l$$

Buradan anlaşıldığı üzere bir fonksiyonun bir noktasındaki türevi esasında özel bir limittir. İkinci formda verilen limiti formel ($\varepsilon - \delta$) tanım şeklinde yazdığımızda fonksiyonun bir noktadaki türev tanımı şu şekilde oluşacaktır;

$$f'(x_1) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; için \; \exists\delta > 0 \; öyle \; ki \; |x - x_1| < \delta \; oldukça \; \left|\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} - l\right| < \varepsilon \; olur.$$



Şekil 2. Türevin formel (ε-δ) tanımının grafiksel karşılığı.

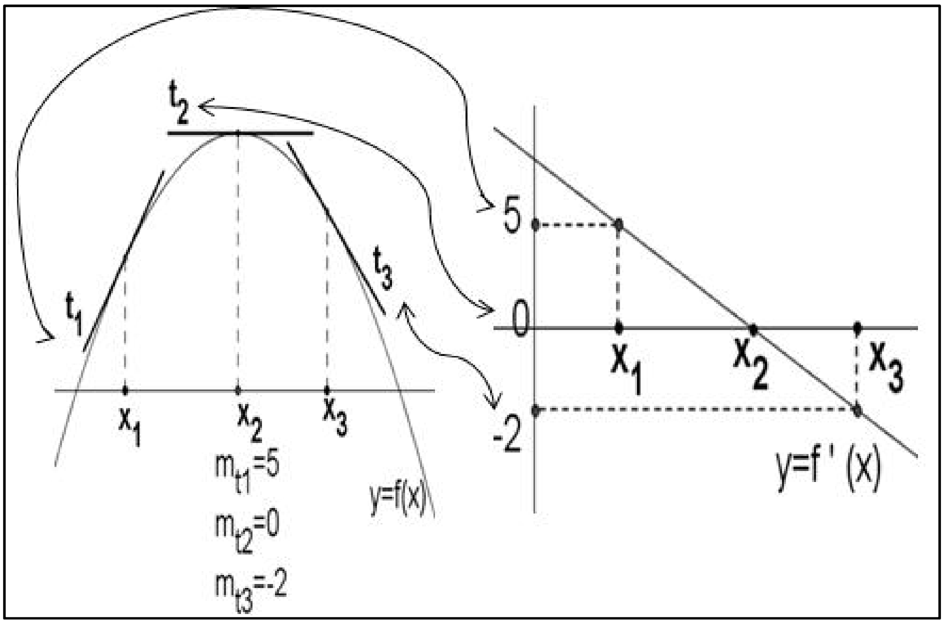
Bu tanım düzlemde şuna karşılık gelmektedir: Sıfırdan büyük her ε değeri için bir δ değeri bulunabilir öyle ki, eğriyi kestiği noktaların apsisleri farkının mutlak değeri δ değerinden küçük olan herhangi bir kesen doğrusunun eğimi ile teğetin eğimi arasındaki farkın mutlak değeri ε değerinden küçüktür (Şekil 2). Tabi burada kesen doğrularının bir noktası sabit olup apsisi x_1 olan nokta, yani fonksiyonun türevinin hesaplandığı değerdir.

Buraya kadar değinilen içerik, bir fonksiyonun bir *noktasındaki* türevi başlığı altında yer almasından ötürü *türev kavramının noktasal bağlamda geometrik boyutu* olarak isimlendirilecektir. Öğrencilerin bu içeriğe yönelik oluşturdukları anlamalar ise *noktasal bağlamda türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalar* olarak isimlendirilecektir.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi içerisinde türevlenebilir olduğu tüm noktaları, bu noktalarda fonksiyonun aldığı türev değerlerine götüren ilişkiye, fonksiyonun türev fonksiyonu olarak isimlendirilmekte ve $f'(x)$ notasyonu ile gösterilmektedir. Tanımın matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir;

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tanım grafiksel boyutta yorumlandığında türev fonksiyonu, fonksiyonun tanım kümesindeki her bir noktayı, şayet o noktada fonksiyon türevlenebiliyorsa, o noktadan fonksiyona çizilen teğetin eğimine götürmektedir. Dolayısıyla türev fonksiyonunun tanım kümesi fonksiyonun türevlenebilir noktalarının kümesi, görüntü kümesi ise fonksiyona çizilen tüm teğetlerin eğim değerlerinin oluşturduğu küme olacaktır (Şekil-3).

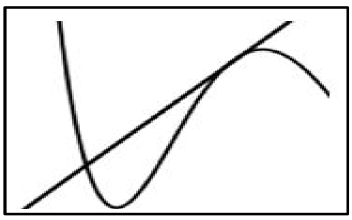


Şekil 3. Türev fonksiyonunun grafiğinin fonksiyon grafiğinden elde edilmesi.

Benzer şekilde bir fonksiyonun yüksek mertebeden türev fonksiyonları da inşa edilmektedir. Örneğin bir fonksiyonun ikinci mertebeden türev fonksiyonunun görüntü kümesindeki değerler, birinci mertebeden türev fonksiyonunun grafiğine çizilebilen tüm teğetlerin eğim değerlerinden oluşacaktır. Türevin fonksiyon olarak anlaşılması, fonksiyonların artan, azalan olduğu aralıklar, fonksiyon grafiklerinin maksimum, minimum noktalarının hesaplanması, fonksiyon grafiğinin konveks, konkav karakteristiğinin belirlenmesi, ortalama değer teorimi vb. konulara temel oluşturduğu için önemlidir. Belirttiğimiz bu konu başlıkları türevin *fonksiyon* boyutu içerisinde olduğundan *türevin fonksiyon bağlamında geometrik boyutu* olarak isimlendirilecektir. Öğrencilerin bu içeriğe yönelik oluşturdukları anlamalar ise *fonksiyon bağlamında türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalar* olarak isimlendirilecektir.

2.1.1.2. Kavram İmgesi

Tall ve Vinner (1981), tarafından ortaya konan kavram imgesi (concept image) terimi, bireyin bir matematiksel kavrama ilişkin oluşturduğu zihinsel yapısının tümünü ifade etmek için kullanılmaktadır. Bir matematiksel kavrama ilişkin birey tarafından oluşturulan bu kavram imgesi içerisinde, bireyin kavrama yönelik zihinsel tasvirleri, başka kavramlar ile kurduğu ilişkiler, kavrama atfettiği özellikler ve kavrama yönelik kendi tanımı bulunmaktadır (Tall, 1988). Buradan anlaşılacağı üzere her bireyin belirli bir matematiksel kavrama ilişkin kavram imgesi birbirinden farklılık gösterebilir. Bireyin bir matematiksel kavram için kavram imgesinde yer alan tanım, kavramın formel tanımından farklı olabilir, hatta çelişebilir. Bunun haricinde kavram imgesi içerisinde kavrama atfettiği geçersiz özellikler bulunabilir. Tall ve Vinner bu durumu ciddi potansiyel çelişki faktörü olarak görmekte ve formel bilgiyi öğrenme sürecini engelleyeceğini söylemektedirler. Eğer kavram imgesi içerisinde yer alan birbiriyle çelişkili bilgiler aynı anda uyarılırsa birey zihinsel ikilem yaşayacaktır. Örneğin bir öğrencinin teğet kavramına yönelik kavram imgesi içerisinde kavrama ilişkin tanımı, eğriye tek noktada değen doğru olarak mevcut olsun. Öğrenciye Şekil-4'de yer alan doğrunun teğet olup olmadığı sorulduğunda, çizilen doğrunun eğriyi birden fazla noktada kestiği için teğet olamayacağı sonucuna ulaşabilir.



Şekil 4. Teğetin eğriyi kesme durumu.

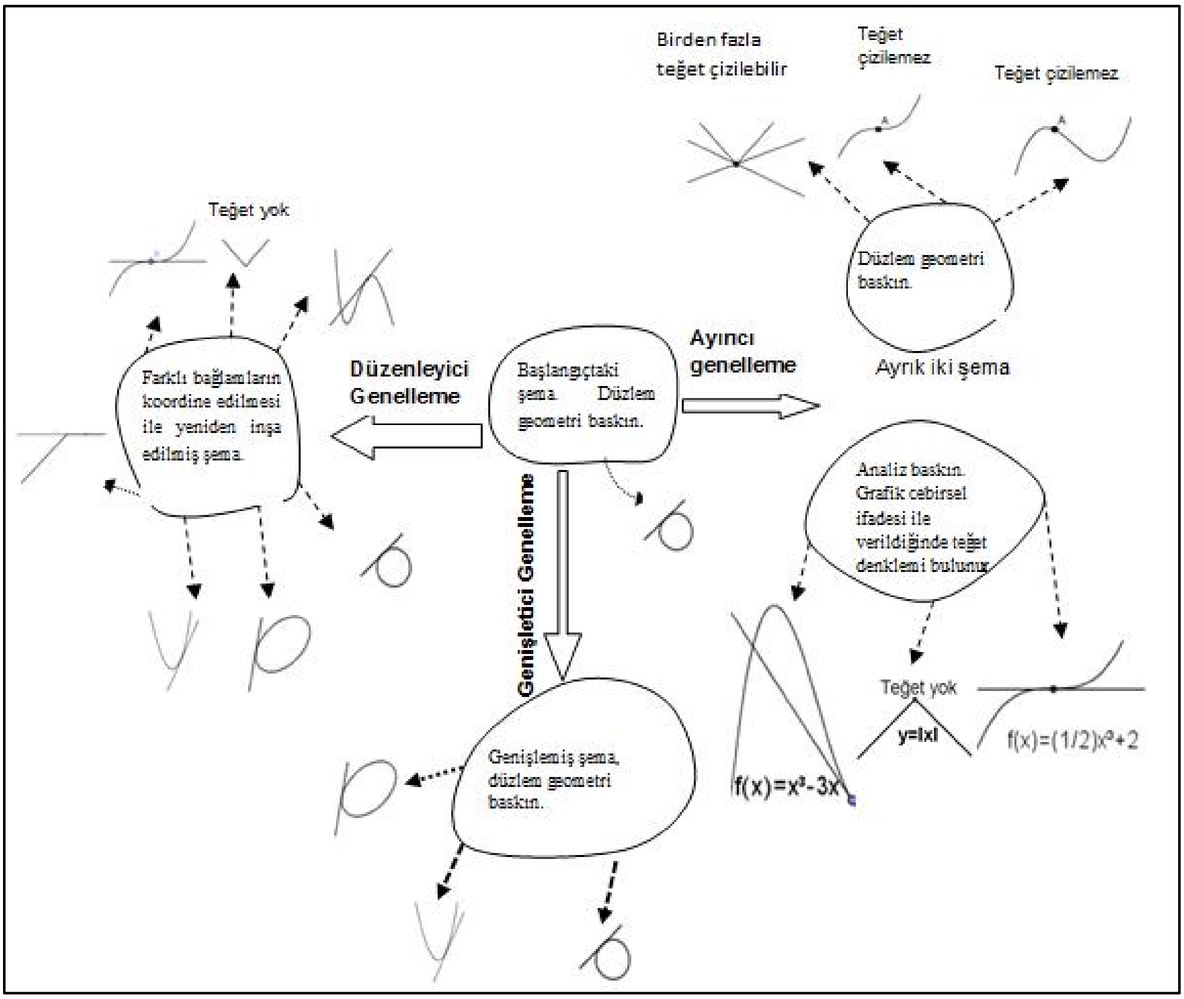
Bu durumda öğrencinin kavram imgesinde bulunan tanım potansiyel bir çelişki faktörüdür ve ilerideki öğrenme süreçlerinde olumsuz rol oynayacaktır. Dolayısıyla bireyin kavram imgesi formel bilgiyle ne kadar tutarlıysa, söz konusu kavrama yönelik anlaması da o denli iyi olarak nitelendirilebilir.

2.1.1.3. Matematiksel Genelleme

Ülkemizde teğet kavramı ile öğrenciler ilk olarak 7. sınıf matematik müfredatında yer alan "çember ve daire" alt öğrenme alanı içerisinde karşılaşmaktadırlar. Bu aşamada öğrencilerin teğet kavramına ilişkin öğrendikleri tek özellik çember ile tek bir ortak noktası olduğudur. Öğrencilerin ikinci kez teğet kavramı ile karşılaşmaları ortaöğretim kademesinde üç farklı alanda gerçekleşmektedir. İlk olarak 10. sınıfta yer alan düzlem geometrisi dersi içerisinde, bir çemberin kirişlerinin ve teğetlerinin kesişimi ile oluşan açılarına ilişkin verilen teoremler bağlamında karşılaşmaktadırlar. Lise son sınıfta öğrenciler teğet kavramını hem analitik geometri hem de matematik dersinde almaktadırlar. Analitik geometri dersi bağlamında öğrenciler, bir hiperbolün, parabolün veya çemberin üzerinde bulunan bir noktadan, bu koniklere çizilen teğetlerin denklemlerinin nasıl bulunduğunu öğrenmektedir. Matematik dersinde ise teğet kavramı ile öğrenciler "türevin geometrik yorumu" başlığı altında karşılaşmaktadır. Bu süreçte öğrenciler, cebirsel denklemi verilen eğrilerin belirli bir noktasından çizilen teğetin denklemini, eğrinin cebirsel denklemi üzerinde türev alma yoluyla bulmayı öğrenmektedir.

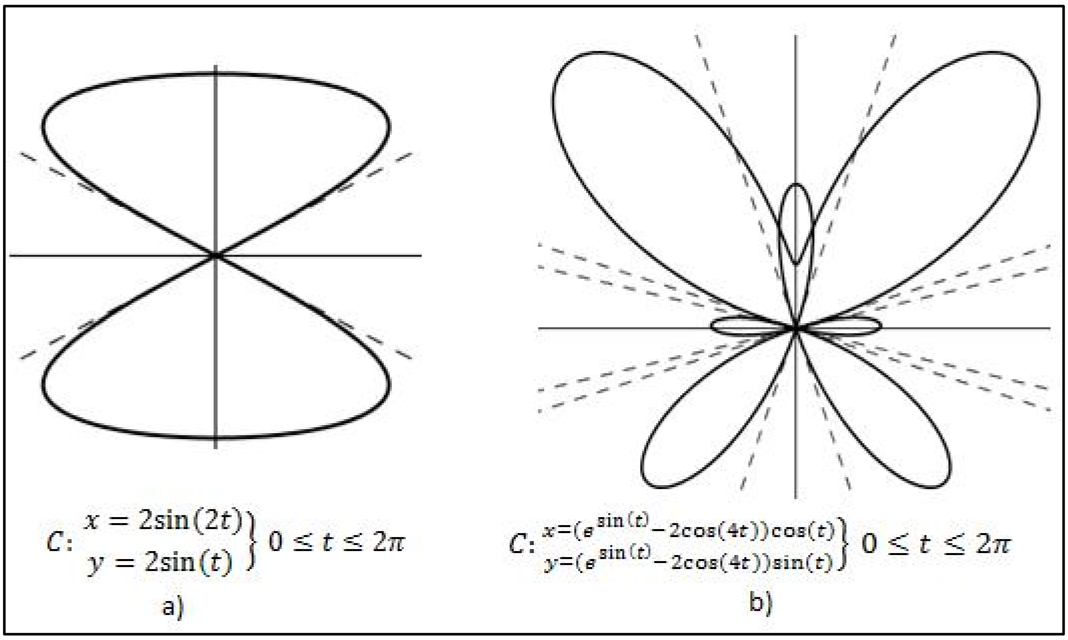
Harel ve Tall (1989) bireyin matematiksel bir kavramı ya da yöntemi genelleştirmesinin üç şekilde olabileceğini ifade etmektedirler. Araştırmacılar bu genelleme türlerini genişletici genelleme (expansive generalization), düzenleyici genelleme (reconstructive generalization) ve ayırıcı genelleme (disjunctive generalization) olarak isimlendirmişlerdir. Araştırmacılar genişletici genellemeyi, bireyin zihninde var olan şemasını yeniden yapılandırmadan, şemasının uygulama sahasını genişletmesi durumu olarak tanımlamışlardır. Genişletici genellemeden farklı olarak eğer birey mevcut bir zihinsel şemasını, uygulanabilir olduğu alanı genişletmek için yeniden yapılandırıyor ise bireyin gerçekleştirdiği genelleme türünü düzenleyici genelleme olarak isimlendirmişlerdir. Son olarak eğer birey, bir bağlamdan farklı bir bağlama geçiş sürecinde, yeni bağlam içinde yer alan problem durumları ile başa çıkabilmek için, eski bağlamda söz konusu kavram ya da prosedüre ilişkin oluşturduğu şemadan ayrı yeni bir şema oluşturuyorsa, bireyin gerçekleştirdiği genelleme türünü ayırıcı genelleme olarak açıklamışlardır. Ayırıcı genelleme türünde birey, her ne kadar kavramın ele alındığı yeni bağlam ile eski bağlam arasında bir ilişki olsa da bu ilişkiyi kuramamaktadır. Araştırmacılar ayırıcı genellemeye örnek olarak lineer denklem sistemleri ve çözümü konusunda bazı öğrencilerin takip ettiği yolu örnek olarak vermişlerdir. Buna göre birey ilk olarak bir bilinmeyenli denklemleri çözmeyi, ezberlediği "x'i yalnız bırak" kuralını kullanarak öğrenir. İleriki yıllarda ele aldığı iki ve üç bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümünde birey, daha önce bir bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümünde ezberlediği kuralı mevcut bağlama genellemeye gider. Buraya kadar bireyin gerçekleştirdiği genelleme, karşılaştığı problem durumlarının üstesinden gelmede başarılı olmuştur. Fakat birey, son basamak olan mxn tipinde lineer denklem sistemlerini çözmek için öğrendiği yöntemin (katsayılar matrisi üzerinde yapılan satır veya sütun işlemleri) daha önce 2x2 veya 3x3 tipinde olan denklemleri çözmede kullandığı yöntemin bir genellemesi olduğunu göremez. Dolayısıyla birey farklı durumlar için birbirinden ayrık farklı şemalar oluşturmuştur. Genişletici genellemeye örnek olarak araştırmacılar, sırasıyla R^2, R^3 ve nihayetinde R^n vektör uzaylarında vektör toplamını ve skaler çarpımını örnek göstermektedirler. Çünkü burada öğrencilerin gerçekleştirdiği, aynı tekniği sırasıyla daha geniş sistemlere uygulamaktır. Harel ve Tall düzenleyici genellemeye örnek olarak R^n vektör uzayından daha soyut bir kavram olan bir F cismi üzerinde tanımlanan V vektör uzayına geçişi göstermekte ve öğrencilerin daha önce R^2 ve R^3 vektör uzaylarında açık olarak görebildikleri özellikleri, aksiyomlardan tümden gelim yoluyla elde etmelerinin kapsamlı bir zihinsel yeniden yapılanma gerektireceğini söylemektedirler.

Harel ve Tall (1989) tarafından ortaya konan farklı genelleme türleri teğet kavramı için Şekil 5'de olduğu gibi uyarlanabilir. Şekil 5'de görüldüğü üzere öğrencilerin teğet kavramını ilk olarak Euclid geometrisi bağlamında ele almalarından ötürü, bu kavrama ilişkin oluşturdukları ilk kavram imgelerinde Euclid geometrisi baskındır ve bu kavrama yükledikleri tek özellik olan "çembere tek noktada değer" geçerlidir. Euclid geometrisi akabinde teğet kavramını analitik geometri dersinde ele almaları sonucunda öğrenciler teğet kavramına ilişkin genişletici genelleme sürecini yaşamaktadırlar. Çünkü analitik geometri bağlamında ele alınan konikler, öğrencilerin Euclid geometrisi bağlamında teğet kavramına atfettikleri "çembere tek noktada değer" özelliği ile çelişmemektedir. Hatta bu özellik analiz dersinde ele alınan bazı grafiklerle de uyum sergilemektedir (örn: $y=x^2$). Öğrenciler teğet kavramını türev başlığı altında matematik derslerinde ele almalarının sonucunda iki farklı genelleme türü gerçekleştirebilirler. Bunlardan ilki olan düzenleyici genelleme türünü başaran öğrenciler, Euclid ve analitik geometri bağlamlarında oluşturdukları kavram imgelerini türev başlığı altında öğrendikleri formel teori ile uyumlu olacak şekilde düzenleyerek, teğet kavramına ilişkin yeni bir kavram imgesi oluştururlar. Bu kavram imgesine sahip olan öğrenciler için artık Euclid geometrisi bağlamında teğete atfettikleri "eğriye bir noktada değer" özellik geçerliliğini yitirmiştir. Düzenleyici genellemeyi başaramayan öğrenciler her iki bağlam için başvuracakları ayrık şemalar oluşturma yoluna giderler ve karşılaştıkları bir problem durumunda problemin ait olduğu bağlama göre sahip oldukları şemaları kullanırlar. Örneğin birbirine eşdeğer, fakat biri yalnız cebirsel denklemi ile, diğeri yalnız grafiksel olarak temsil edilen iki eğri üzerinde seçilen bir noktadan teğet çizilmesini soran bir probleme öğrenci tutarsız cevap verebilir. Cebirsel ifadesiyle verilmiş eğri için teğetin varlığını kabul eden ve denklemini bulabilen veya en azından teğetin türev alma yoluyla eğimini söyleyerek varlığını kabul eden öğrenci, sadece grafiksel formda verildiğinde teğetin eğriyi birden fazla noktada kestiğini ya da eğri ile çakışık olduğunu gerekçe göstererek teğetin olamayacağını ifade edebilir. Bununla birlikte bir noktada sivri köşeye sahip bir eğri (örn. $y = |x|$) yalnızca grafiksel formda verildiğinde, köşe noktasından birden fazla teğet çizilebileceğini söyleyen bir öğrenci, aynı eğri yalnız cebirsel formuyla verildiğinde, köşe noktasında sağdan ve soldan türevlerinin eşit olmadığını, dolayısıyla türevinin bulunmadığını gerekçe göstererek teğet çizilemeyeceği sonucuna varabilir.



Şekil 5. Teğet kavramına yönelik oluşabilecek genellemelerin betimlenmesi.

Öğrencilerin analiz öğrenimleri süresince teğet kavramına yönelik gerçekleştirmeleri gereken genelleme süreci buraya kadar söylediklerimizle sınırlı değildir. Örneğin bir sonraki genelleme sürecinin parametrik fonksiyonlar konu başlığı içerisinde gerçekleşmesi beklenmektedir. Çünkü y değişkeninin x'in açık bir ifadesiyle verilen $y = f(x)$ tipindeki fonksiyonların düzlemde oluşturduğu eğrilerin üzerindeki bir noktada ya eğriye tek bir teğet vardır ya da yoktur. Fakat x ve y değişkenlerinin üçüncü bir parametreye bağlı olarak ifade edildiği fonksiyonların düzlemde oluşturduğu eğrilerde, aynı noktadan eğriye birden fazla teğet çizilebilmektedir. Örneğin Şekil 6-a'da görülen eğrinin O(0,0) noktasında 2 teğeti, Şekil 6-b'de görülen kelebek eğrisinin ise 6 teğeti mevcuttur.



Şekil 6. Parametrik eğrilerde tek noktadan birden fazla teğet geçebilmektedir.

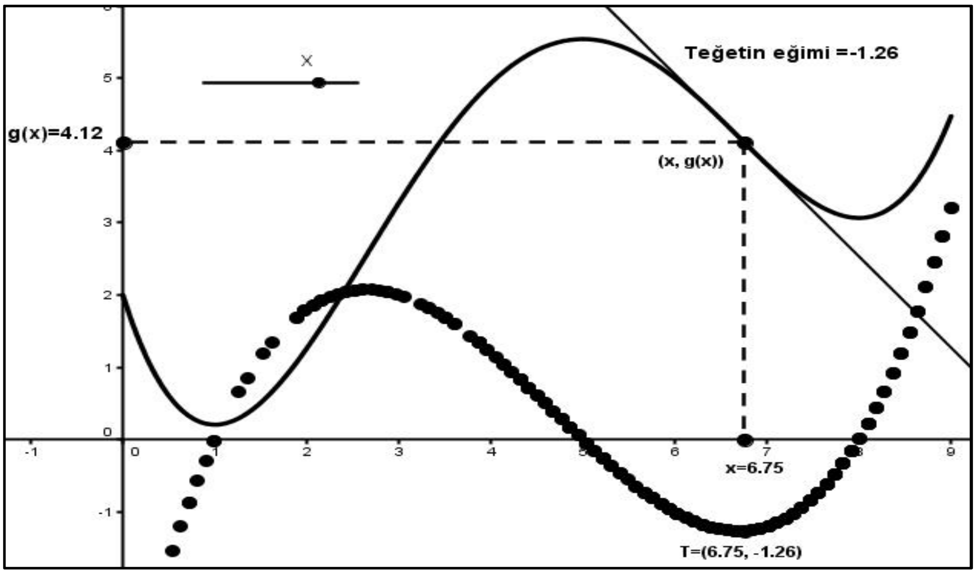
2.1.1.4. Matematik Öğretiminde Bilgisayar

Teknolojinin bir ürünü olan bilgisayar matematikçilerin eline, matematiksel kavramlar ve problemler ile zihinlerinde yaptıkları savaşlarda kullanabilecekleri güçlü ve etkili bir silah vermiştir. Böylece matematikçiler, daha önceleri karmaşıklığından ötürü ele alamadıkları hesaplamaları yapabilir, kağıt-kalem ortamında oluşturulması imkansız grafikleri analiz edebilir hale gelmiştir. Bilgisayarlar sadece hesaplamayı ve grafik çizmeyi kolaylaştırmamış aynı zamanda matematikteki önemli problemlerin doğasını ve matematikçilerin araştırma yöntemlerini de değiştirmiştir (Baki, 2002). Kalem-kağıt ortamında üstesinden gelmesi çok güç olan durumların bilgisayarlar vasıtasıyla doğru ve net olarak analiz edilebilmesi, matematikçilere yeni çözüm stratejileri oluşturabilme fırsatı sunmuştur. Dört renk problemi, Kepler konjektürü gibi çözülmeyi uzun yıllar bekleyen problemlerin bilgisayar vasıtasıyla aydınlatılması bu durumun birer örneğidir.

Bilgisayarların ortaya çıkması pür matematik alanının yanı sıra matematik öğretimini de etkilemiştir. Bu etki en basit anlamda bilgisayarın bir sunum aracı olarak tahtanın yerini alması olarak kendini göstermiştir. Bunun yanında, matematik eğitimi alanında yer alan araştırmacıların bir kısmı bilgisayarı bir sunum aracından öte, öğrencilere matematiksel kavramları anlamada ve matematiksel düşünme süreçlerini kazandırmada etkili öğrenme ortamları oluşturma potansiyeline sahip bir araç olarak ele almıştır. Son olarak ifade edilen yaklaşımı benimseyen araştırmacıların yaklaşık 30 yıldır yaptıkları çalışmaların bütünü, matematik eğitimi literatüründe bilgisayar destekli matematik öğretimi olarak anılmaktadır. Kısaca bilgisayar destekli matematik öğretimi, bilgisayara dayalı bilişsel araçlar kullanılarak yapılan matematik öğretimi olarak tanımlanmaktadır (Baki, 2002).

Yapılan bu çalışmanın da dâhil olduğu bilgisayar destekli matematik öğretimi alanında yer alan araştırmaların ilgilendiği problemlerden biri, öğrencilerin matematiksel konulara ilişkin anlamalarına katkı sağlayacak yapısalcı yaklaşıma dayalı bilgisayar destekli öğrenme ortamlarının nasıl oluşturulacağıdır. Yapısalcı yaklaşıma göre bilgi bireyden bağımsız değil, bizzat bireyin kendi eylemleri sonucunda yine kendisi tarafından oluşturulmaktadır (Baki, 2008). Tabi burada bireyin matematiksel kavramlara ilişkin anlaması eylemlerine bağlı olmakla beraber, bu eylemlere konu olan nesneler ve öğretim fiziksel anlamda somut olmak zorunda değildir (Pirie & Kieran, 1992). Dolayısıyla yapısalcı öğrenme yaklaşımı temelinde bilgisayar destekli tasarlanan öğrenme ortamları, bireylerin oluşturdukları matematiksel anlamaları kendi eylemleri üzerine inşa edecek şekilde yapılandırmalarına olanak vermelidir. Örneğin, bir fonksiyonun birinci mertebeden türev fonksiyonu ile fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ve ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi ele alalım. Geleneksel öğrenme ortamında bu durum genellikle bu ilişkileri ifade eden teoremlerin tahta üzerinde hazır tanımları ve ispatları verilerek öğrencilere sunulması ile gerçekleşir. Böylece bilginin kaynağı olan öğretmen tahta vasıtasıyla bu bilgiyi öğrencilerine aktardığını düşünmektedir. Bu bilgiyi alan öğrenci, karşısına çıkan rutin problem durumlarına uygulayacaktır. Bilginin bilenden bilmeyene aktarıldığı böyle bir ortam yapılandırmacı yaklaşımın epistemolojik temelleri ile aykırı düşmektedir. Çünkü bu durumda öğrenci, edindiği bilgiyi kendi eylemleri üzerine inşa edecek şekilde temellendirmemiştir. Bilgisayar işte tam bu noktada, öğrencilere matematiksel kavramlara ilişkin anlamalarını kendi eylemleri üzerine inşa etme fırsatını sunma yoluyla en önemli katkıyı yapma potansiyeline sahiptir. Bu çalışmada yukarıda ifade ettiğimiz ilişkinin öğrenciler tarafından kazanılması amacıyla oluşturulan çalışma yaprağının bilgisayar ekran görüntüsü Şekil 7’de görülmektedir.

Tasarlanan öğrenme ortamında öğrenciler, grafiğin sol üst köşesinde yer alan sürgü üzerindeki bağımsız değişkeni temsil eden noktayı sürükleyerek, fonksiyon grafiği üzerindeki $(x, g(x))$ noktasından çizilen teğetin eğim değerinin değişimini ve buna bağlı olarak türev fonksiyonunun aldığı değerleri veren T noktasının değişimini görebilmektedir. Çalışma yaprağı içerisinde yer alan yönergeler vasıtasıyla, öğrencilerin yapı üzerindeki gerçekleştirdikleri eylemler sonucunda ilk olarak, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ile türev fonksiyonunun işareti arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri amaçlanmıştır. Devamında öğrencilerin, fonksiyonun artan-azalan karakteristiğini değiştirdiği noktalar ile türev fonksiyonun işareti arasındaki ilişkiyi oluşturmaları hedeflenmiştir. Son aşamada ise, öğrencilerin yaptıkları gözlemler sonucunda fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ve ekstremum noktaları ile türev fonksiyonunun değerleri arasındaki ilişkilere yönelik elde ettikleri sonuçlara formel bir kimlik kazandırmaları amaçlanmıştır. Tasarlanan bu öğrenme ortamıyla, bir aralık boyunca bir fonksiyonun türev değerlerindeki ve buna bağlı olarak artma-azalma karakteristiğindeki değişimin öğrencilerin zihninde dinamik yapıda oluşması amaçlanmıştır. Çalışma kapsamında ele alınan konulara ilişkin bilgisayar destekli tasarlanan öğrenme ortamlarının tümünde, araştırmacının yeteneği ölçüsünde, yukarıdaki gibi öğrencilere oluşturacakları anlamaları kendi eylemleri üzerine inşa etme fırsatı sunulmaya çalışılmıştır.



Şekil 7. Türev fonksiyonu ile fonksiyon grafiği arasındaki ilişkiler konusu için tasarlanan öğrenme ortamının bilgisayar görüntüsü.

2.1.1.5. Niçin GeoGebra?

Geogebra ortaöğretim ve üniversite seviyesinde matematik öğretimi ve öğrenimi için tasarlanmış bir DMY'dir. Bu yazılım DGY'nin sahip olduğu kullanım kolaylığı ile BCS'nin sahip olduğu belirli özellikleri birleştirmekte, böylece matematiğin farklı dalları olan cebir, geometri ve hatta analiz arasındaki boşluğu doldurmaya fırsat sunmaktadır (Hohenwarter ve Preiner, 2007). GeoGebra yazılımı herhangi bir ücret karşılığı olmadan www.geogebra.org adresinden temin edilebilmektedir. Yazılım herhangi bir bilgisayarda, karşıdan yüklenen bir kurulum dosyası ya da kurulum dosyası indirmeyi gerektirmeden doğrudan internet bağlantısıyla kullanıma hazır hale getirilebilmektedir. Yazılımın internet adresinden yazılıma ilişkin bir çok belge ve kaynak elde edilebilmektedir. Bu kaynakların arasında çeşitli konular için hazırlanmış çalışma yaprakları ve öğretim materyalleri de bulunmaktadır. Bunların yanı sıra yine aynı internet adresinde yazılımı kullanan kişilerin deneyimlerini ve yazılıma ilişkin sorunları paylaştıkları bir kullanıcı forumuna erişmek mümkündür. GeoGebra yazılımının temin edilmesinin ve dağıtılmasının mali külfet gerektirmemesi bu çalışmada tercih edilmesindeki etkenlerden biridir.

Genel olarak analiz öğretiminde kullanılan yazılımlar karakteristik özellikleri bakımından ikiye ayrılmaktadır. Bunların ilki cebirsel ifade ve nümerik değerler üzerinde işlem ve hesaplama yapabilen BCS yazılımlarıdır. Bunun yanında öğretimde kavramların görsel temsillerini kullanmak ve görsel düşünmeyi işe koşmak için DGY adıyla bilinen ve yazılım içerisinde oluşturulan geometrik yapıları dinamik olarak değiştirmeyi mümkün kılan yazılımlar kullanılmaktadır. Schumann ve Green (2000), matematik öğretimini daha etkili kılmak için, DGY ile BCS'nin sahip olduğu karakteristik özellikleri tek bir çatı altında sunabilen programlara ihtiyaç olduğunu ifade etmektedir. Son yıllarda duyulan bu ihtiyaca cevap vermek amacıyla BCS ile DGY'nin sahip olduğu karakteristik özellikleri tek bir çatı altında sunan ve DMY olarak isimlendirilen programlar geliştirilmiştir. Bu başlık altında geliştirilen programlardan biri de GeoGebra'dır.

Bazı dinamik geometri yazılımları (ör. Capri Geometry) yazılım içerisinde oluşturulan geometrik nesnelerin sembolik formda cebirsel ifadelerini verebilme özelliğini içermektedir. Fakat DGY, BCS yazılımlarında olduğu kadar cebirsel ifadeler üzerinde işlem gerçekleştirememektedir. Bunun yanı sıra DGY ortamında oluşturulan geometrik yapılar program içerisinde değiştirildiğinde eş zamanlı olarak cebirsel ifadelerinde değişim izlenememektedir. Diğer taraftan bazı BCS yazılımları program içerisinde sembolik olarak girilen matematiksel ifadelerin karşılık geldiği grafik gösterimlerini ekrana yansıtabilme özelliğine sahiptir. Fakat yazılım içerisinde bir objenin cebirsel ifadesinde bir değişiklik meydana geldiğinde, eş zamanlı olarak grafiksel gösterimine bu değişiklik yansımamaktadır (Ör. Derive). Geogebra her obje için iki bileşen oluşturmaktadır; cebirsel bileşen objenin açık, kapalı veya parametrik formda denklemini, geometrik bileşen ise objenin çözüm kümesinin grafiksel temsilini ekranda yansıtmaktadır. GeoGebra yazılımı içerisinde bir objenin her iki temsiline de kullanıcı tarafından doğrudan müdahalede bulunabilmektedir. Objenin geometrik bileşeni fare yardımıyla değiştirildiğinde eş zamanlı olarak objenin cebirsel bileşeni de değişmekte, aynı şekilde objenin cebirsel bileşeninde yapılan herhangi bir değişiklik eş zamanlı olarak geometrik bileşeninde değişikliğe sebep olmaktadır. Bunun sonucu olarak kavramların grafiksel ve cebirsel gösterimleri arasında geçiş eş zamanlı olarak mümkün olmaktadır. Esas itibarıyla GeoGebra yazılımının tercih edilmesinin nedeni söz konusu bu imkânlardır.

2.1.1.6. İleri Matematiksel Düşünme ve APOS Teorisi

Matematik eğitimi alanında çalışan araştırmacılar, ileri matematiksel düşünme ifadesi ile Euclid geometrisi ile temel cebirsel kavramların ve işlemlerin ilerisinde yer alan matematiksel kavramlara yönelik düşünme süreçlerini kastetmektedir. Temel ve ileri matematiksel düşünme süreçleri arasında keskin bir fark olmamakla birlikte, ileri matematiksel düşünme, tanımların ve mantıksal çıkarımların soyut tarafı üzerine odaklanmaktadır (Dreyfus, 1991). Tall (1991), elementer matematikten ileri matematiğe geçişin iki önemli değişim gerektirdiğini ifade etmektedir. Bunlardan ilkini matematiksel kavramları açıklamaktan tanımlamaya doğru olan değişim, diğerini ise matematiksel önermeleri veya iddiaları ikna etmekten ispat etmeye doğru olan değişim olarak ifade etmektedir.

APOS teorisini açıklamadan önce teoriye ilişkin ön bilgisi olmayan okuyucuya teoriye yönelik bir önsezi kazandırma amacıyla, teoriyi günlük hayattan bir benzeşimle açıklamanın yararlı olacağını düşünmekteyim. Bu amaç doğrultusunda her ne kadar teorinin içeriğini kesin olarak açıklamasa da, ilk başta bir fikir oluşturmak için birazdan vereceğimiz örneğin, ilerleyen kısımda okuyucuya ilk bakışta yabancı gelecek kavramlar ile ne kastedilmek istendiğini anlamada yardımcı olacağını ümit etmekteyim.

Hayatında ilk kez düz vites bir arabayı kullanmayı öğrenmeye başlayan birini düşünelim. Bu kişi bu konuda kendinden daha ehil olan birinden alacağı *dışsal* yönergeler doğrultusunda bir takım *eylemler* gerçekleştirecektir. Arabayı harekete geçirmek için bireye verilen bu yönergeler şu şekilde olabilir; debriyaja sonuna kadar bas, birinci vitese tak, biraz gaz ver, yavaş yavaş ayağını debriyajdan kaldır vb. Birey kendisine verilen *eylemlerden* oluşan bu yönergeler üzerine odaklanacak ve her birini icra etmede bu *eylemler* üzerinde düşünecektir. Bu *eylemler* üzerine her seferinde odaklanan birey, bir süre sonra artık bu eylemlerin her biri üzerine odaklanmaktan ve düşünmekten vazgeçerek, bu eylemler serisini bir *süreç* olarak *içselleştirecektir*. Bu aşamada artık birey bu eylemleri gerçekleştirmede *dışsal* bir uyarıcıya ihtiyaç hissetmeyecek, kendiliğinden bir *süreç* olarak gerçekleştirebilecektir. İlerleyen zamanlarda birey oluşturduğu bu süreci sarmalayarak bir *nesne* haline getirecektir. Bu sürecin *nesne* olarak sarmalanması, bu nesneyi oluşturan süreç ve/veya eylemleri *açıp* onlara odaklanarak başka durumlarda kullanabilmesi ile ortaya çıkacaktır. Örneğin eğimli bir yolda arabasını durduran birey arabayı durağan halde tutabilmek için fren yerine, debriyaj *nesnesini* oluşturan *süreçleri* kullanarak, sadece gaz ve debriyaj ile aracı durağan konumunda tutabilecektir. Farklı olarak eğik bir yolda vitese takılı olarak yol alırken aracı biraz hızlandırmak isteyen birey gaza basmak yerine debriyaja basmak suretiyle araca ivme kazandırabilecektir. Sonuç olarak birey oluşturduğu debriyaj nesnesi içerisinde yer alan süreç ve/veya eylemleri başka durumlarda kullanma yetisini gösterebilecektir.

APOS (Action-Process-Object-Schema) olarak isimlendirilen teori, üniversite düzeyinde matematik konularına ilişkin öğrencilerin anlamalarını inceleme amacıyla bir araya gelen ve dâhil oldukları topluluğu Research in Undergraduate Mathematics Education (RUMEC) olarak adlandıran matematik eğitimi araştırmacılarının yaptıkları çalışmalar sonucunda ortaya çıkmıştır. APOS teorisinin temelini Jean Piaget'nin bireyde matematiksel kavramların oluşumunu açıkladığı teorisi oluşturmaktadır. Özellikle teori içerisinde yer alan ve Piaget'nin bireydeki mantıksal-matematiksel yapıların oluşumunu açıklamak için öne sürdüğü yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) kavramı, APOS teorisinde öne sürülen matematiksel yapıların oluşumunu izah etmede kullanılmıştır. Piaget ortaya attığı teoride genel olarak bireyin küçük yaşlardaki zihinsel gelişimine odaklanmış olsa da, yansıtıcı soyutlamanın daha ileriki yaşlarda da bireydeki matematiksel düşünce gelişimini açıklayacağını önermektedir (Krouse, 2000). Bu öneriden hareketle RUMEC araştırmacıları, yansıtıcı soyutlama sürecinin temel özelliklerinin ileri matematik bağlamında rollerini dikkate alarak, matematiksel bilgiye ve zihinde yapılandırılmasına ilişkin tutarlı bir teori ortaya koyduklarını iddia etmektedirler (Dubinsky, 1991). APOS teorisi, Piaget'nin çocukların mantıksal düşünme gelişimlerini açıklamada kullandığı yansıtıcı soyutlama mekanizmasını anlama ve bu düşünceyi ileri matematiksel kavramlara taşıma girişiminin sonucudur (Dubinsky ve Macdonald, 2001). Dubinsky (2000) bu teoriyi bireyin matematiksel bilgisini sosyal bir bağlam içerisinde matematiksel problemler ile başa çıkabilme aracı olarak yapılandırdığı ana fikri üzerine temellendirmiştir. APOS teorisinin başlangıcındaki hipotez, matematiksel bilginin bireyin algılanan problem durumlarını zihinsel aktiviteler, süreçler ve objeler oluşturarak ele alması eğilimine ve oluşturduğu bu yapıları durumlardan anlam çıkartmak ve problem çözmek için şema halinde organize etmesine bağlı olduğudur (Dubinsky ve Macdonald, 2001).

Yansıtıcı soyutlama bilişsel gelişim sürecinde bireyin yapılandırdığı mantıksal ve matematiksel yapıları tanımlamak için Piaget'nin ortaya attığı bir terimdir. Dubinsky yansıtıcı soyutlamayı, zihinsel nesnelerin ve bu zihinsel nesneler üzerinde eylemlerin yapılandırılması olarak ifade etmiştir (Dubinsky, 1991). Dubinsky ileri matematiksel düşünme bağlamında bireyin zihninde mevcut olan yapılardan yeni nesnelerin, süreçlerin ve şemaların oluşumunu açıklamak için, Piaget'nin çocuklardaki mantıksal düşünme süreçlerinin gelişiminde keşfettiği beş yansıtıcı soyutlama türünü kullanmıştır. Bunlar içselleştirme (interiorization), koordinasyon (coordination), sarmalama (encapsulation), genelleme (generalization) ve terslemedir (reversal). Bunlardan ilki olan içselleştirme sonucunda birey, zihinsel nesneler üzerindeki bir eylemler serisine ilişkin içsel bir süreç oluşturur. Birey oluşturduğu bu süreç sayesinde bir eylemler serisini, eylemlerin gerçekleşmesi için gereken tüm adımları icra etmeden, meydana gelmesini tasavvur edebilir. Bu duruma örnek olarak, başlangıçta bir fonksiyonun açık ifadesini kullanma yoluyla her bir girdi için fonksiyondan bir çıktı elde eden öğrenci, gerçekleştirdiği bu eylemler üzerine odaklanarak bir süre sonra, fonksiyonun bağlı bulunduğu bağımsız değişkenin belirli bir aralıktaki her değeri için aldığı değeri gerçekten hesap etmeden düşünebilmesi gösterilmektedir. Bu duruma türev kavramının geometrik yorumu bağlamında kesen doğrularının giderek teğet doğrusuna yaklaşmasını örnek verebiliriz. Başlangıçta farklı noktalarda kesen doğrularının eğimini hesaplayarak bu eğim değerlerinin teğetin eğimine yaklaşmasını gözlemleyen bir öğrenci, gerçekleştirdiği bu eylemler üzerine odaklanarak, bir süre sonra, kesen doğrularının belirli bir aralıkta aldığı her değer için eğimini gerçekten hesap etmeden teğet doğrusuna yaklaşmasını düşünebilir. İki ya da daha fazla sürecin koordine edilmesiyle yeni bir süreç elde edilmesi durumu koordinasyon olarak adlandırılmaktadır. Bu duruma örnek olarak fonksiyonlardaki bileşke işlemi gösterilmektedir. Birey ilk olarak bileşke işlemini uygulayacağı fonksiyonların ifade ettiği süreçleri dikkate alır ve bu iki farklı süreci tek bir süreç içerisinde birleştirir ve böylece farklı iki süreçten yeni bir süreç elde etmiş olur. Türev kavramının formel tanımı içerisinde yer alan ε ve δ değişkenlerinin nitelediği eşitsizlikler içerisindeki süreçlerin birbiri ile ilişkili olarak düşünülerek, sonuçta bu tanımın geometrik yorumunu oluşturmak koordinasyona örnek olarak gösterilebilir. Yansıtıcı soyutlamanın üçüncü formu olan sarmalama, bir sürecin zihinsel bir nesneye dönüşümünü ifade etmektedir. Bu nesne kendi içerisinde bir bütünlük sergiler ve diğer zihinsel eylemler ve süreçler tarafından kullanılabilir. Aynı zamanda bir sürecin sarmalanması sonucu oluşturulmuş zihinsel nesne istenildiğinde kendini oluşturan süreci elde edecek şekilde açılabilir (de-encapsulation). Dubinsky (1991)'nin sarmalamaya verdiği örneklerden biri şu şekildedir. Nesneleri bir araya getirerek bir küme oluşturmak bir süreci ifade etmektedir. Dubinsky bir çok öğrencinin, ki bunlara üniversite öğrencileri de dâhildir, $\{4,\{-3,2,5\},\{\{17,5\}\}\}$ kümesinin eleman sayısının ne olduğu sorulduğunda "6" cevabını verdiklerini gözlemlemiştir. Öğrencilerin burada yaşadıkları sıkıntının nedenini $\{-3,2,5\}$, $\{17,5\}$ kümelerini bir nesne olarak yapılandıramamaları olduğunu ileri sürmektedir. Bu duruma türev kavramının geometrik boyutu bağlamında türev fonksiyonu örnek gösterilebilir. Belirli bir aralıkta bir fonksiyonun türev değerlerini hesaplayan öğrenci, bu zihinsel etkinliğin üzerine odaklanarak, bir aralık boyunca fonksiyonun türev değerlerini temsil eden türev fonksiyonu nesnesini oluşturabilir. Böylece yalnızca iki farklı fonksiyonun grafiğinin verildiği problem durumlarında bu fonksiyonların türev fonksiyonları üzerinde oluşturulan önermeler hakkında, türev fonksiyonlarının cebirsel ifadelerine ihtiyaç duymadan, muhakeme yapabilir (Bkz. Fonksiyon Anlamında Türev Testi-II 2. soru). Yansıtıcı soyutlamanın en basit ve aşikâr formu genellemedir. Bu durum bireyin bir kavrama ait şemasının içerdiği yapıların uygulanabilir olduğu matematiksel nesneler kümesinin genişlediği zaman ortaya çıkmaktadır. Örneğin bireyin fonksiyon kavramına ilişkin şeması içinde bulunan eylemler, başlangıçta sayıları yine sayılara dönüştüren bir yapıdayken, daha ileri öğrenmeler sonucunda bu eylemler başka nesnelere de uygulanabilir hale gelmektedir. Örneğin bir kare matrisi bir reel sayıya karşılık getiren determinant fonksiyonu ya da bir vektör uzayına ait her bir vektörü pozitif bir reel sayıya karşılık getiren norm fonksiyonu gibi. Yansıtıcı soyutlamanın son formu terslemedir. Bu durum mevcut bir sürecin terslenmesi sonucu yeni bir süreç elde etme şeklinde ortaya çıkmaktadır. Dubinsky (1991) bu duruma bir fonksiyonun tersini bulma, çıkarma ve bölme işlemlerinin sırası ile toplama ve çarpma işlemlerinin terslenmesi ile elde edilmesi veya limit teoremlerini ispatlama sürecinde δ değerini ε değerine bağlı olarak ifade etmeyi örnek olarak göstermiştir. Türev kavramının geometrik boyutu açısından ele aldığımızda, türev fonksiyonunun yalnızca grafiksel olarak sunulduğunda, buradan türev fonksiyonun ters fonksiyonuna ilişkin çıkarım yapabilmek yansıtıcı soyutlamanın tersleme formuna örnek teşkil etmektedir (Bkz. Fonksiyon Anlamında Türev Testi-II 3. soru).

RUMEC dâhilinde yer alan araştırmacılar çalışmalarında bu teoriyi kullanmaktadır. Bu araştırmacıların uygulamaya koydukları araştırma çerçevesi üç ana bileşenden oluşmaktadır. Bunlardan ilki üzerinde çalışılacak matematiksel kavrama ilişkin bir teorik analiz yapmaktır. Bu teorik analizin amacı, bireyin bir kavramı öğrenme sürecinde meydana getirebileceği zihinsel yapıları tarif etmektir. Bu analizin sonucunda kavrama ilişkin bir genetik ayrışım (genetic decomposition) ileri sürülür. Bir kavramın genetik ayrışımı, bu kavramın bireyin zihninde nasıl geliştiğini tarif eden zihinsel yapıların yapılandırılmış kümesidir. Bu yapıların oluşumu yansıtıcı soyutlama kavramı ile açıklanmaktadır. İkincisi öğretim süreçlerini tasarlamak ve uygulamak sonuncusu ise, hem başlangıçtaki teorik analizi hem de öğretim süreçlerinin etkililiğini değerlendirmektir. Değerlendirme sürecinde öğrencilerin gerçekleştirdikleri farklı anlama seviyeleri, kavramın analizi sonucunda ortaya konan genetik ayrışım içerisinde ifade edilen zihinsel yapıları kurup kuramamaları ile belirlenmektedir. Bu döngü, üzerinde çalışılan kavramın epistemolojisine ilişkin yeterli düzeyde anlamaya sahip olana ve etkin pedagojik stratejiler elde edilene kadar devam ettirilmektedir. APOS teorisi bağlamında bireyin zihninde matematiksel kavramlara ilişkin oluşabilecek dört yapı olduğu ileri sürülmektedir. Bunlar sırasıyla eylem, süreç , nesne ve şemadır. Bu dört yapıdan ilk üçü, bir kavrama ilişkin ileri sürülen genetik ayrışım içerisinde ifade edilen kazanımları seviyelendirmek için kullanılmaktadır. Bu yapılar aşağıdaki gibi tarif edilmektedir:

> *Eylem:* Eylem bir ölçüde dışsal olan ve birey tarafından algılanan objelerin dönüşümüdür (transformation). Bir dönüşüme ait anlayışı eylem seviyesinde olan bir birey bu dönüşümü sadece hangi adımların atılması gerektiğini açıklayan dışsal uyarıcılara tepki vererek gerçekleştirebilir. Örneğin bir dönüşümü, değerlerini hesap edeceği açık bir formül verilmeden fonksiyon olarak yorumlayamayan bireyin fonksiyona ait anlayışı eylem düzeyindedir. Bu seviyedeki öğrenci karşılaştığı bir fonksiyonla, fonksiyonun belirli noktalardaki değerini kendisine sunulan formülle hesap etmekten ileriye gidemez ya da farklı yorumlar yapamaz. Ayrık tanım kümeleri olan fonksiyonlar, fonksiyonun tersi, fonksiyonların bileşkesi, fonksiyonlar kümesi, bir fonksiyonun türevinin de bir fonksiyon olduğu, bir diferansiyel denklemin çözümünün bir fonksiyon olduğu gibi fikirler bu aşamada öğrenciler için büyük sıkıntı kaynağıdır. Bu sıkıntıların kaynağı bu durumların eylem seviyesinden ileri anlamaları gerektirmesidir.
>
> *Süreç:* Bir eylem tekrar edildiğinde ve tekrar eden birey eylem üzerinde odaklandığında, bu eylem bir süreç olarak içselleştirilebilir. Böylece aynı eylemi, dışarıdan bir uyarıcıya ihtiyaç duymadan, gerçekleştiren bir içsel yapı oluşturulur. Bir dönüşüme ait anlaması süreç aşamasında olan bir birey dönüşümün adımları üzerine, bu adımları zihinsel olarak gerçekleştirerek, yoğunlaşabilir, tersine çevirebilir ve açıklayabilir. Eylem aşamasına zıt olarak, bir süreç birey tarafından içsel olarak algılanır ve onun kontrolündedir, dışsal bir motive ediciye bağlı değildir. Fonksiyonlar konusunda, süreç seviyesinde bir anlayış bireye bir fonksiyonu bir ve birden çok girdi alabilen, bu girdilerle işlemler yapabilen ve bu işlemler sonucunda değerler alabilen bir olgu olarak düşünmesine olanak tanır. Örneğin, bireyin $f(x) = \sin(x)$ şeklinde bir fonksiyonu anlaması için süreç seviyesinde olması gerekir, çünkü girilen bir değerin nasıl hesap edileceğini açıkça ifade eden dışsal

açık bir yönerge yoktur. Fonksiyon kavramına ilişkin süreç seviyesinde anlamaya sahip olan bir birey, iki ya da daha fazla süreci koordine ederek bileşke fonksiyonu oluşturabilir, ya da süreci tersleme yoluyla ters fonksiyonu elde edebilir.

Nesne: Birey belirli bir süreç üzerine uygulanan işlemler üzerine odaklandığında, süreci bir bütünlük olarak algılar, dönüşümlerin ona göre davranabildiğinin farkına varır ve devamında bu süreci bir nesne olarak anlamlandırır. Bu durumda süreç bir nesne halinde sarmalanmıştır. Örneğin, eğer birey bir fonksiyonu, sınırlı sayıda örnekleri referans almadan, farklı iki fonksiyonun toplamı olarak tasavvur edebiliyorsa fonksiyon kavramına ilişkin nesne düzeyinde anlama sergiliyor demektir.

Şema: Belirli bir matematiksel kavram için şema, bireyin zihninde bu kavrama ait problemleri çözmede işe koşabileceği, bazı genel kaidelerle birbirine bağlı olan eylemlerin, süreçlerin, nesnelerin ve diğer şemaların bir bütünüdür. Burada şema olarak ifade edilen kavram Tall ve Vinner (1981) tarafından açıklanan kavram imgesi terimine çok yakındır. İkisi arasındaki fark, bireyin kavram imgesinde yer alan bilgilerin formel bilgi ile tutarlı olması zorunlu değilken, bireyin şemasında yer alan bilgiler formel bilgi ile tutarlılık sergilemek zorundadır (Asiala ve diğ.,1996).

Dubinsky (1991) tüm matematiksel yapıların yukarıda ifade edilen aşamalar açısından temsil edilebileceğini belirtmektedir. Bu teorik çatı, bireyin bir matematiksel kavrama ilişkin anlamasını incelemek için yapılan mülakatların analizi için bir zemin oluşturmaktadır. Bu zemin üzerinde yapılan analizin sonucunda araştırmacı bireyin bir kavrama ilişkin anlamasını yorumlayabilmekte ve seviyelendirebilmektedir (Asiala ve diğ., 1996).

Bu çalışmada öğretmen adaylarının türev kavramının geometrik boyutu ile ilgili anlamalarının yorumlanması amaçlandığı için bu teorik çatı kullanılacaktır. APOS teorisi bağlamında bireyin bir kavrama ilişkin anlamasını yukarıda ifade edilen seviyeler vasıtasıyla karakterize edebilmek için, ilk olarak kavrama ilişkin bireyin zihninde oluşabilecek yapıları tarif eden genetik ayrışımın ortaya konması gerekmektedir. Çalışmada öğrencilerin zihinlerinde türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin oluşturabilecekleri yapıları nitelemek ve seviyelendirmek için, Asiala ve diğ. (1997) tarafından türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin ortaya konan genetik ayrışım esas alınmıştır. Asiala ve diğ. (1997)'nin yaptıkları çalışma ve bu çalışma sonunda ileri sürdükleri genetik ayrışım, literatür taramasının konu ile ilgili yapılan araştırmalar bölümünde sunulmuştur. Bununla birlikte yöntem kısmında genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımların eylem-süreç-nesne seviyelerinden hangisine denk geldiği ve çalışma bağlamında hazırlanan testlerde yer alan soruların genetik ayrışım içerisinde hangi kazanıma karşılık geldiği bir tablo (Tablo 11) ile sunulmuştur.

2.1.2. Konu İle İlgili Araştırmalar

Yapılan bu çalışma ile dinamik matematik yazılımı destekli gerçekleştirilen öğretimin, öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerindeki etkisi, geleneksel öğrenme ortamı ile kıyaslanarak incelenecektir. Araştırma raporunun bu bölümünde araştırmanın yapılmasına ön ayak olan ve nasıl gerçekleştirilmesi gerektiğine ilişkin fikir veren diğer çalışmalar özetlenecektir. Literatür taramasını yönlendiren sorular şu şekildedir:

1. Öğrencilerin türev ve türev kavramının geometrik boyutta en temel karşılığı olan teğet kavramını anlamada yaşadıkları sıkıntılar nelerdir?
2. Türev kavramının öğrenilmesine etki eden ön bilgiler nelerdir?
3. Bu araştırmanın öncesinde, öğrencilerin türev ve teğet kavramına yönelik yaşadıkları sıkıntıları giderme amacıyla ne tür teknoloji destekli öğrenme ortamları hazırlanmıştır? Yapılan bu çalışmaların sonuçları nelerdir?
4. Öğrencilerin türev ve teğet kavramına yönelik anlamalarını betimlemek için oluşturulan kavramsal çatılar nelerdir? Bunların arasından hangisi bu çalışmada kullanıma en uygundur?

Takip eden bölümde, yukarıdaki soruların oluşturduğu alt başlıklar altında literatürde çalışmanın evvelinde ortaya konan araştırma raporları özetlenecektir.

2.1.2.1. Teğet Kavramını Anlamaya Yönelik Yapılan Çalışmalar

Türev kavramının noktasal boyutta geometrik ya da grafiksel anlamı, bir fonksiyonun grafiğine türev hesaplanacak noktada oluşturulan teğet doğrusudur. Dolayısıyla öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarının oluşumunda ve gelişiminde teğet doğrusu kavramı temel teşkil etmektedir. Bu kısımda bireylerin teğet kavramına yönelik anlamalarına odaklanan çalışmalar özetlenecek ve bu çalışmaların ortaya koyduğu sonuçlar verilecektir.

Biza ve Zachariades (2006), üniversitede matematik bölümü birinci sınıfta okumakta olan 182 öğrenci üzerinde yaptıkları çalışmada, öğrencilerin teğet doğrusu kavramına ilişkin sahip oldukları kavram yanılgılarını araştırmışlardır. Bu amaç doğrultusunda hazırladıkları testte öğrencilere teğet doğrusunu tanımlamaya, çeşitli fonksiyon grafikleri üzerinde çizilen doğruların teğet olup olmadıklarını belirlemeye ve oluşturmaya ilişkin sorular yöneltilmiştir. Çalışmanın sonucunda elde edilen bulgular öğrencilerin teğet kavramına ilişkin kavram yanılgılarına sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin bir bölümünün teğet doğrusunun grafiği birden çok noktada kestiği durumlarda, çizilen doğrunun teğet doğrusu olamayacağı ve fonksiyonun büküm noktalarında fonksiyona teğet çizilemeyeceği yönünde kavram yanılgılarına sahip oldukları belirtilmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin bir kısmının aynı fonksiyonun grafiğine çizilen bir doğrunun teğet olup olmadığını belirlemeye yönelik sorulara verdikleri cevapların, fonksiyonun cebirsel ifadesinin verilip verilmemesine göre değiştiğini ifade etmişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarının oluşumuna gerekçe olarak, aynı kavramın daha önce düzlem geometrisi bağlamında ele alınması sonucunda teğet kavramına atfedilen özelliklerin, analiz bağlamında öğrenciler tarafından genelleştirilememesini göstermektedirler.

Biza, Constantinos ve Zachariades (2006), yaptıkları çalışmada lise son sınıf öğrencilerinin bir eğriye çizilen teğet kavramına ilişkin sahip oldukları anlamaları incelemişlerdir. Bu amaç doğrultusunda geliştirdikleri testte üç farklı türde soru bulunmaktadır. Bunlar teğet doğrusunu tanımaya, oluşturmaya ve cebirsel olarak ifade edilen fonksiyonların teğet doğrusunun denklemini bulmaya yönelik sorulardır. Araştırmacılar öğrencilerin testten aldıkları puanlar üzerinde yaptıkları Örtük Sınıf Analizi (Latent Class Analysis) sonucunda öğrencileri testte gösterdikleri performans açısından üç gruba ayırmışlardır. Çalışmanın sonunda araştırmacıların en genel anlamda ulaştıkları sonuç, öğrencilerin teğet doğrusu kavramını ilk olarak düzlem geometrisi bağlamında ele alıyor olmalarının, bu kavramı analiz dersi bağlamına uyumlu olacak şekilde genelleştirme sürecinde bir engel oluşturduğudur. Bunun yanı sıra çalışmada öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları da rapor edilmiştir. Bu kavram yanılgılarından bazıları, teğet doğrusunun grafiği birden çok noktada kesemeyeceği, teğet doğrusunun teğet olduğu eğriyi yalnız bir yarı düzlem içerisine hapsetmesi gerektiği ve grafiğin köşe oluşturduğu noktalarda teğetin varlığını kabul etmeleridir.

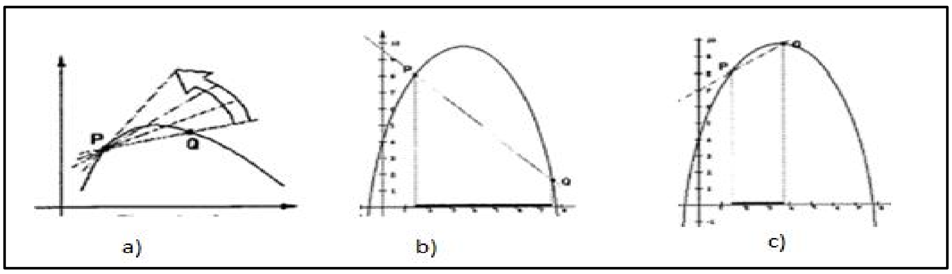
Biza (2007), çalışmasında teğet doğrusu kavramı ile hem düzlem geometri hem de analiz dersi bağlamında karşılaşmış olan öğrencilerin bu kavrama ilişkin anlamalarını modellemiştir. Öğrencilerin anlamalarını modellemek için kullandığı testin sorularını hazırlamada, bir eğri ve bu eğri üzerinde çizilen bir doğru arasında oluşabilecek şu beş ilişkiyi dikkate almıştır:

- Teğet doğrusu teğet olduğu eğri ile yalnız bir ortak noktada kesişebilir.
- Teğet doğrusu ile eğri, teğet noktasının bir komşuluğunda tek bir ortak noktaya sahiptir. Bu komşuluğun dışında farklı bir ortak nokta bulunabilir.
- Teğet doğrusu teğet olduğu eğri ile çakışabilir.
- Bir eğrinin büküm noktasında teğet doğrusu çizilebilir.

- Eğrinin köşe noktalarında eğriye teğet çizilemez.

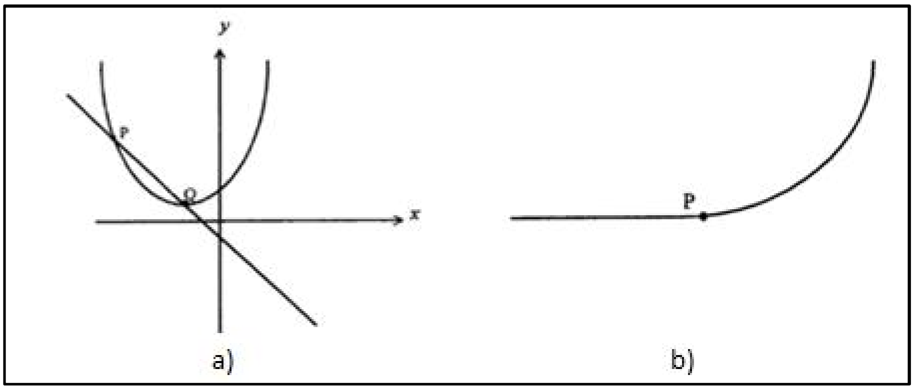
Öğrencilerin testte yer alan sorulara verdikleri cevaplarla ilgili yapılan analizin sonucunda, öğrencilerin anlamalarına yönelik yukarıda belirtilen beş ilişkinin farklı kombinasyonları ile oluşmuş toplam sekiz model ortaya çıktığı ifade edilmiştir. Bu sekiz modelin yalnız biri içerisinde yer alan öğrenciler teğet kavramına ilişkin anlamalarını düzlem geometrisinden analiz bağlamına tutarlı bir şekilde genelleştirebildikleri ifade edilmiştir. Bu modelde yer alan öğrencilerin teğet kavramına ilişkin kavram imgelerinin ifade edilen beş ilişkiden ilk ikisi hariç diğerlerini barındırdığı belirtilmiştir. Diğer modeller içerisinde yer alan öğrencilerin kavram imgelerinin teğet kavramına yönelik farklı yetersizliklere sahip olduğu belirtilmiştir. Araştırmacılar burada sunulan modellerin herhangi bir hiyerarşi oluşturmadığını belirtmektedirler.

Isaacson (1999), doktora çalışmasında teğet kavramının bilgisayar ortamında statik, animasyon ve etkileşimli-animasyon olarak isimlendirdiği üç farklı yöntemle sunulmasının, öğrencilerin teğet kavramına yönelik anlamaları üzerindeki etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmacı çalışmasının gerekçesi olarak, analiz kavramlarının temelinde devinim olduğunu, dolayısıyla kavramların statik yapıda resmedilmesinin öğrenen kişinin kavrama ilişkin tam bir anlama gerçekleştirmesine engel olacağını ifade etmektedir. Çalışmasında üniversite düzeyinde analiz dersini almakta olan toplam 82 öğrenciyi örneklem alan araştırmacı, örneklemi rasgele üç gruba ayırarak her bir grupta üç yöntemden biriyle teğet kavramına yönelik öğretimi gerçekleştirmiştir. Statik olarak adlandırdığı ilk yöntemde öğrencilere, bilgisayar ortamında hazırlanmış, içerisinde birden fazla kesen doğrularının bulunduğu bir şekil gösterilerek kesen doğrularının teğet doğrusuna yaklaştığını tasavvur etmeleri beklenmiştir (Şekil 8-a). Animasyonlu olarak isimlendirilen ikinci yöntemde öğrenciler, kesen doğrusunun iki noktasının apsisleri arasındaki fark olan Δx değerinin sıfıra yaklaşması durumunda, kesen doğrusunun teğet doğrusuna yaklaşmasını animasyon olarak gözlemlemişlerdir (Şekil 8-b). Etkileşimli-Animasyon olarak adlandırılan son yöntemde ise öğrenciler Δx değerini kendileri değiştererek kesen doğrusunun teğete yaklaşmasını gözlemişlerdir (Şekil 8-c).



Şekil 8. İzlenen yöntemlerin bilgisayar görüntüleri.

Uygulama süresinin bir ders saati ile sınırlı olduğu araştırmada, öğrencilerin teğet kavramına yönelik anlamalarını karşılaştırmak için bir test uygulanmıştır. Araştırmacının hazırladığı test tasvir kazanımı ve kavram kazanımı olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Tasvir kazanımı bölümünde yer alan sorular, öğrencinin kesen doğrusunu içeren resim ile karşılaştığında, soruda ifade edilen devinimin sonucunu doğru olarak belirleyebilmesini ölçmektedir. Bu bölüm içerisinde yer alan bir soru aşağıda gözükmektedir (Şekil 9-a). Soruda öğrencilerden, grafikten yararlanarak Q noktasının P noktasına yaklaşması durumunda $\Delta x, \Delta y$ ve kesen doğrusunun eğimi gibi değerlerin nasıl değişim göstereceğini belirlemeleri istenmiştir. Kavram kazanımı bölümünde yer alan sorular ise öğrencilerin teğet kavramına yönelik oluşturdukları kavram imgelerinin formel teori ile tutarlılığını ölçmektedir. Bu kısımda yer alan sorular öğrencilerin Euclid geometrisi bağlamında teğet kavramına atfettikleri geçersiz özelliklerin mevcut olup olmadığını belirlemeyi amaçlamaktadır. Bu bölümde yer alan bir soru aşağıda gözükmektedir (Şekil 9-b). Soruda öğrencilerden şekildeki grafiğe P noktasından teğet çizilip çizilemeyeceğini belirlemeleri istenmiştir.



Şekil 9. Tasvir kazanımı ve kavram kazanımı bölümlerinde yer alan örnek sorular

Araştırmanın sonunda testin puanları üzerinde yapılan varyans analizi, tasvir kazanımı kısmında öğrencilerin ortalama puanları açısından öğretim yöntemi arasında anlamlı bir farklılık olmadığını göstermiştir. Kavram kazanımı bölümünde ise etkileşimli-animasyon grubundaki öğrencilerin puan ortalaması ile statik grupta yer alan öğrencilerin puan ortalaması arasında, etkileşimli-animasyon bölümündeki öğrenciler lehine anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır.

Tall (1987) lise öğrencileri üzerinde yaptığı deneysel çalışmasında, bilgisayar üzerinde oluşturulan grafikleri büyütebilme ve grafik üzerinde seçilen iki noktadan grafiğe kesen çizebilme özelliğine sahip bir bilgisayar programının öğretimde kullanımının, öğrencilerde teğet kavramına ilişkin daha zengin bir kavram imgesi oluşturup oluşturmadığını incelemiştir. Teğet kavramının öğretiminde Tall, yerel doğrusallık (local straightness) olarak isimlendirdiği yaklaşımı kullanmıştır. Bu yaklaşımın dayandığı nokta, bir eğrinin türevlenebilir olduğu her noktaya yeterince yaklaşıldığında eğrinin doğrusal bir hal alacağı gerçeğidir. Öğretim süreçlerinin nasıl gerçekleştiği hakkında detaylı bir bilginin verilmediği araştırmada, öğrencilerin bazı fonksiyonların (y=|sinx|, y=x|xsinx| gibi) kritik noktalarında fonksiyonun grafiğine teğet oluşturulup oluşturulamayacağını yazılım içerisinde tartıştıkları ifade edilmiştir. Çalışmanın sonucunda, deney grubunda yer alan öğrencilerin yaşadıkları deneyimlerin teğet kavramına ilişkin daha tutarlı kavram imgelerine oluşturmalarına olanak tanıdığı ifade edilmektedir. Özellikle deney grubunda bulunan öğrencilerin grafiğe ilişkin cebirsel formülün değiştiği fakat türev değerinin aynı kaldığı noktalarda teğet çizme durumlarını daha iyi yorumladıklarını ifade etmektedir. Bununla birlikte deney grubunda yer alan öğrencilerin önemli bir bölümünün teğet kavramına düzlem geometri dersi bağlamında atfettikleri "teğet grafiğe tek noktada değmelidir" özelliğin geçerli olduğuna inanmaya devam ettikleri ve bu durumunda teğetin grafiğe çakışık olduğu durumlarda öğrencileri yanılgıya düşürdüğü belirtilmiştir.

Potari, Zachariades, Christou, Kyriazis ve Pitta-Pantazi (2006), öğretmenlerin türev kavramının öğretimine ilişkin sahip oldukları pedagojik farkındalıkları incelemişlerdir. Bu amaçla, çalışmaya katılan öğretmenleri derslerde gözlemlemenin yanı sıra, dersin öncesinde ve sonrasında informel mülakatlar gerçekleştirmişlerdir. Yapılan mülakatlar öğretmenlerin teğet doğrusu kavramına ilişkin konu alan bilgilerinin tutarlı bir bütünlük sergilemediğini ortaya çıkarmıştır. Çalışmaya katılan öğretmenlerin düzlem geometrisi ve analiz bağlamında yer alan teğet kavramının birbirinden farklı olduğunu düşündükleri ifade edilmiştir. Diğer bir ifade ile öğretmenler düzlem geometri bağlamında ele alınan çemberde teğet kavramının, türev yoluyla genel eğriler üzerinde tanımlanan teğet kavramının özel bir durumu olduğunu fark edemedikleri belirtilmiştir.

Biza, Constantinos ve Zachariades (2008), daha önce Biza (2007)'nın yaptığı araştırmanın devamı niteliğinde olan çalışmalarında, öğrencilerin teğet doğrusu kavramına ilişkin anlamalarını modellemeyi amaçlamışlardır. Biza (2007)'nın çalışmasından farklı olarak bu araştırmada ortaya konulan farklı modellerin arasında bir hiyerarşi ortaya çıkarmışlardır. Öğrencilerin teğet kavramını anlamalarına modellemek için, öğrencilerin teğet doğrusu kavramını anlamada etki eden 7 faktörü içeren sorulardan oluşmuş bir test uygulamışlardır. Bu faktörlerden beş tanesi Biza (2007) tarafından yapılan araştırmada ortaya konanlar olmak üzere diğer ikisi, teğet doğrusunun cebirsel olarak elde edilmesi ve konikler üzerinde teğet doğrularının oluşturulması olarak ifade edilmiştir. Öğrencilerin test sorularına verdikleri cevaplar üzerinde yapılan istatistiksel inceleme sonucunda, öğrencilerin anlamaları bir hiyerarşi oluşturacak şekilde üç kategoriye ayrılmıştır. Bu kategoriler, yeterlilik sırasına göre, Analitik yerel (Analytical local), Orta-düzey yerel (Intermediate local) ve Geometriksel bütüncül (Geometrical global) olarak isimlendirilmiştir.

Öğrencilerin yanı sıra, teğet kavramı ile türev kavramı arasındaki farkın kesin farkında olan tanınmış matematikçiler dahi bu farkı ifade etmede hata yapabilmektedir. Thurston (1994), field madalyası sahibi bir geometrici, matematikte ilerlemenin ve ispatın doğası üzerine yazdığı makalesinde insanların matemetiği nasıl anladığı konusuna değinmektedir. Bireylerin matematiği anlamada birbirinden farklı yollara sahip olduğunu belirten yazar bu duruma örnek olarak türev kavramını göstermiştir. Yazar türev kavramına bireylerin farklı anlamlar yükleyebileceklerini göstermek için yedi farklı örneği içeren bir liste oluşturmuştur. Sırasıyla yaklaşım ve mikroskobik olarak isimlendirdiği, listenin sonunda yer alan iki farklı yolu şu şekilde açıklamıştır:

Yaklaşım: Bir fonksiyonun türevi, bir nokta civarında fonksiyona en iyi doğrusal yaklaşımdır.

Mikroskobik: Bir fonksiyonun türevi, fonksiyonun grafiğine bir mikroskop altında git gide yaklaşarak baktığınızda elde ettiğimizin limitidir.

Bu iki ifadeye bakıldığında açıkça teğet doğrusunun eğimini değil bizzat kendisini tasvir etmektedir. Dolayısıyla eğer alanında bu denli uzman bir matematikçi türev kavramını ifade etmede bu hatayı sergiliyorsa, doğal olarak, kavramın öğretiminde biz matematikçiler de farkında olmadan sınıf içi diyaloglarımızda bu yönde ifadeler kullanıyor olabiliriz. Bunun sonucu, öğrencilerde bir noktada türevin o noktada çizilen teğetin eğimi olarak değil, bizzat kendisi olarak algılanmasına neden olabilir. Bir sonraki bölümde referans verilen bazı çalışmalarda öğrencilerin bu türden kavram yanılgılarına sahip olduğu rapor edildiği görülmektedir. Bu durumun sebeplerinden biri, bizlerin sınıf içi diyaloglarda farkında olmadan sergilediğimiz dikkatsizlik olabilir.

2.1.2.2. Öğrencilerin Türev Kavramına İlişkin Anlamalarını İncelemeye Yönelik Yapılan Çalışmalar

Bilindiği üzere türev kavramı esasında özel bir limittir. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi l ise, formel tanım $(\varepsilon - \delta)$ çerçevesinde aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$f'(a) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; için \; \exists\delta > 0 \; öyle \; ki \; |x - a| < \delta \; ise \; \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\right| < \varepsilon$$

Literatürde türev kavramının formel tanımı olan bu ifadeye ve bu ifadenin geometrik bağlamdaki temsiline yönelik öğrencilerin anlamalarını kapsamlı olarak inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Yalnızca Fless (1988) tarafından yürütülmüş doktora çalışmasında, türev kavramının limit ifadesine yönelik öğrencilerin sahip oldukları anlamalar incelenmiş, fakat yukarıda verilen tanım içerisindeki eşitsizlikler ve değişkenler dâhil edilmemiştir. Araştırmanın sonuç kısmında çalışmaya dâhil olan öğrencilerin büyük bölümünün, türevin limit gösterimi içerisinde yer alan matematiksel ifadelerin grafiksel olarak neyi temsil ettiğini bilmedikleri belirlenmiştir. Örneğin, bu bağlamda öğrencilere sorulan bir soru şu şekildedir:

“ f (x) bir x=a noktasında türevlenebilirdir” bu ifadenin matematiksel karşılığı; “ $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ mevcuttur$ ” *veya bu ifadeye denk olan* “$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ mevcuttur$ ” *şeklindedir. Bu iki tanımdan yalnızca birini seçerek bir grafik üzerinde ne anlam ifade ettiğini belirtiniz. Bilhassa, limit değerinin neyi ifade ettiğini ve limiti alınan bölüm şeklinde ifadenin neyi temsil ettiğini gösteriniz.*

Çalışmaya katılan 83 öğrenciden yalnız %7'si limit içerisinde yer alan bölüm şeklindeki ifadenin teğete yaklaşan kesen doğrularının eğimini ifade ettiğini resmedebilmiştir. Bunun yanında öğrencilerin sadece %1'i hesaplanan limit değerinin fonksiyon grafiğine $(a, f(a))$ noktasında çizilen teğetin eğim değeri olduğunu söyleyebilmiştir.

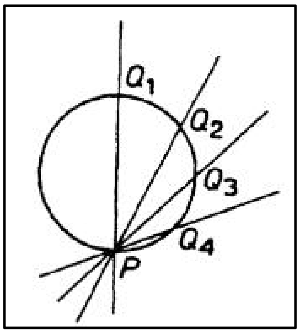
Türev kavramının formel tanımını anlamaya yönelik gerçekleştirilen çalışmaların az olması ile birlikte, literatürde limit kavramının formel tanımını anlamaya yönelik gerçekleştirilen bir çok çalışma mevcuttur. Öğrencilerin fonksiyon bağlamında limit kavramının formel tanımını anlamaya yönelik yaşadığı sıkıntılar, hiç kuşkusuz, bu durumun bir üst seviyesi olan türev kavramının limit tanımını anlamada ve yorumlamada yaşayabilecekleri sıkıntıları yordamak için iyi bir göstergedir. Literatürde limit kavramına yönelik yapılan araştırmalar, bu kavrama yönelik yapılan öğretim süreçleri sonucunda öğrencilerin çok az bir bölümünün kavramın formel tanımına ilişkin yeterli bir anlama geliştirebildiklerini ortaya koymaktadır (Ervynck, 1981; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008).

Barak (2007), öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla yürüttüğü çalışmasında, limit kavramının formel tanımına yönelik yaşanan zorlukları araştırmıştır. İlköğretim matematik, ortaöğretim matematik, fen bilgisi ve bilgisayar öğretmeni adaylarının dâhil olduğu çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının Ɛ-δ tanımını tam olarak anlayamadıkları, bu ifadenin sadece limitin tanımı olduğunu bildikleri ve Ɛ, δ sembolleriyle ne anlatılmak istendiğine yönelik bir açıklama yapamadıkları belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının limit tanımı içerisindeki eşitsizlikleri düzenleyemedikleri ve ε, δ değerleri arasındaki eşitliği bulamadıkları rapor edilmiştir. Yapılan bir diğer çalışmada Queseda ve diğ. (2008), öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları zorlukları şu şekilde belirtmektedir:

- Tanım içerisinde niceleyicilerin kullanımı ve limitin varlığını ispat etmedeki rolünün öğrenciler için yeni olması.
- Öğrencilerin önceki matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki karşılıklı etkileşimi anlamaya olanak vermemesi. Sonuç olarak verilen bir limit durumunda gerekli eşitsizlikleri kurmada zorluk yaşanması.
- Öğrencilerin limit tanımı içersinde yer alan eşitsizliklerden değişkenlerin değer aralıklarını bulmada ve ε, δ değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirlemede, eşitsizliklerde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşaması.

Yapılan çalışmalardan görüldüğü üzere limit kavramının formel tanımını anlamak öğrenciler için sıkıntı oluşturmaktadır. Bu durum özel bir limit olan türev kavramının formel tanımını anlamada öğrencilerin yaşayabilecekleri olası zorlukların önemli bir göstergesidir. Bu sebepten ötürü öğrencilere, türev kavramının limit tanımını öğrenme süreçlerini kolaylaştıracak, zihinlerinde kavramın formel tanımına yönelik tutarlı yapılar oluşturmalarını destekleyecek öğrenme ortamlarının tasarlanması kaçınılmaz gözükmektedir.

Orton (1983), çalışmasında 110 öğrenci üzerinde gerçekleştirdiği mülakatlar çerçevesinde öğrencilerin türev ve değişim oranı kavramlarına ilişkin anlamalarını incelemiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin tamamına yakını türev alma kurallarını uygulamayı gerektiren sembolik türev alma sorularında başarı gösterirken, kavramlara ilişkin tanımlama, uygulama ve grafiksel yorum gerektiren sorularda başarısız oldukları ifade edilmiştir. Örneğin, grafiksel yorumlamaya yönelik Orton öğrencilere bir çember üzerinde alınan P ve Q noktalarından geçen kirişin, Q noktası P noktasına yaklaştıkça, neye yakınsayacağını sormuştur (Şekil 10).



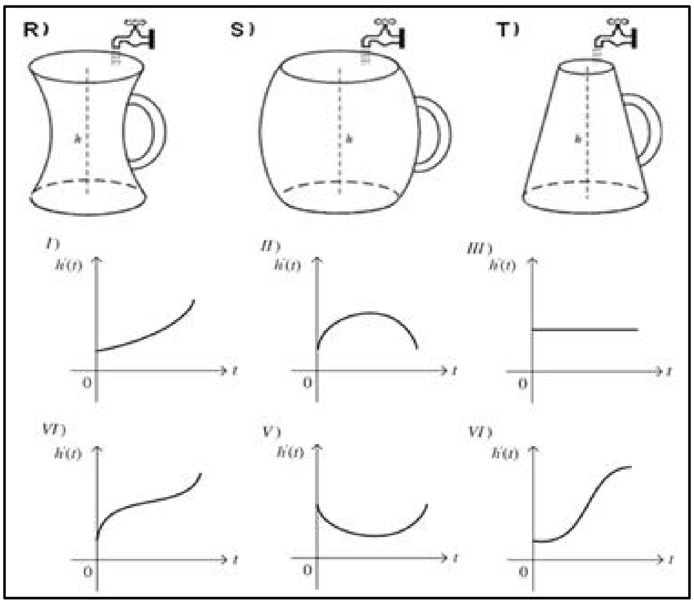
Şekil 10. Grafiksel yorumlamaya yönelik öğrencilere sorulan soru.

Öğrencilerin yarıya yakını şekildeki kesen doğrularının P noktasındaki teğet doğrusuna yakınsayacağını ifade edememiştir. Bunun yerine öğrenciler “PQ doğru parçasının uzunluğu kısalır”, “PQ doğru parçası nihayetinde bir noktaya dönüşür” gibi ifadeler kullanmışlardır. Bunun yanı sıra Orton öğrencilerin ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı kavramları arasındaki bağlantıyı kuramadıklarını ve bir noktada fonksiyonun değeri ile değişim oranını birbirine karıştırdıklarını rapor etmiştir.

Aspinwall ve diğ. (1997), öğrencilerin zihinlerinde oluşturdukları görsel imgelerin bazı durumlarda öğrenme sürecinde olumsuz rol oynayabileceğini belirtmektedirler. Bu durumu örneklemek için yaptıkları araştırmada, bir fonksiyon ile türevi arasındaki grafiksel ilişkiyi anlama konusu bağlamında sistem mühendisliği bölümünde okumakta olan ve bir yıl süreyle temel analiz dersi almış bir öğrenci üzerinde özel durum çalışması yapmışlardır. Çalışmaya konu olan öğrenci, cebirsel olarak ifade edilen fonksiyonların türev fonksiyonlarının bulunmasını isteyen sorularda sıkıntı yaşamazken, yalnız grafiksel formda verilen bir parabolün türev fonksiyonunun grafiğini isteyen soruda aynı performansı gösterememiştir. Öğrenci parabolün kollarının belirli bir noktadan sonra asimptot oluşturacağını, bu sebepten ötürü bir noktadan sonra bu grafiğe ilişkin türev fonksiyonun tanımsız olacağını beyan etmiştir. Araştırmacılar öğrencinin bu soruda yaşadığı sıkıntıyı açıklamak için *kontrol edilemeyen zihinsel imgeler* adında bir terim ortaya atmışlardır. Bu terime göre öğrenciler kimi zaman matematik öğrenme süreçlerinde matematiksel kavramların ya da durumların görsel temsilleri ile karşılaşırlar ve bunun sonucunda bu görsel temsiller öğrencilerin ileride karşılaştığı problem durumlarında zihinlerinde başvurduğu tasvirler haline gelir. Bu tasvirler kimi zaman öğrencilere gösterildiği zamanki statik yapıdan ötürü, öğrenmede kolaylaştırıcı rolün aksine zorlaştırıcı bir rol oynar. Çalışmaya konu olan öğrencinin parabol kavramına ilişkin sahip olduğu zihinsel imgesi, bu fonksiyonun kendisi ve türevi arasındaki ilişkiyi görmesinde zorlayıcı bir rol oynamaktadır. Öğrenci her ne kadar kendisine gösterilen grafiğin cebirsel ifadesi sunulduğunda türev ifadesini ve buradan yola çıkarak türev grafiğinin ne olacağını bilse de, sadece grafiği yorumlayarak türev grafiğinin ne olacağını yorumlayamamıştır. Çalışmanın sonunda araştırmacılar, matematik eğitimcileri arasında yaygın olan, görselleştirmenin matematiksel kavramları anlamada kolaylaştırıcı bir rolü olduğu yönündeki inancın tekrar sorgulanmasının ve gözden geçirilmesinin gerekli olduğunu belirtmektedirler.

Ubuz (2007), mühendislik bölümünde okuyan toplam 147 öğrenci üzerinde, verilen bir fonksiyon grafiğini yorumlamada ve bu fonksiyona ilişkin türev grafiğini oluşturmada öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarını ve anlamalarını incelemiştir. Toplamda dört öğrenci grubunun bulunduğu araştırmada, gruplardan ikisi (91) sınıfta işlenen derslerin haricinde kendilerine verilen ödevleri bireysel ya da grup olarak bilgisayar ortamında gerçekleştirmişlerdir. Öğrenciler kendilerine verilen görevleri yerine getirmede bir grup GTC, diğer gruptaki öğrenciler ise CALMAT ve CALM ismindeki programları kullanmışlardır. Uygulama sonunda öğrencilerin ön ve son test arasındaki gösterdikleri gelişim dikkate alınarak yapılan gruplar arası karşılaştırmada, bilgisayarı kullanan grupların diğerlerine nazaran daha başarılı oldukları bildirilmiştir. Çalışmada yer alan öğrencilerin bir bölümünün, türevin noktasal anlamı ile fonksiyon olarak belirttiği anlamı bir birine karıştırdıkları ve bu ayrımı yapamadıkları ortaya çıkmıştır. Bununla beraber öğrencilerden bir bölümü kendilerine verilen eğrinin türev grafiğini oluşturmaları istenen sorularda, eğriyi temsil eden cebirsel formu öğrenme ihtiyacı hissetmiştir. Öğrencilerin eğrilerin grafiksel ve sembolik gösterimleri arasındaki köprüyü kurmada sıkıntı yaşadıkları belirlenmiştir. Çalışmada kullanılan bilgisayar yazılımlarının özellikle öğrencilerin eğimin sıfır olduğu noktaları ve bu noktaları içeren açık aralıklarda teğetlerin eğimlerinin işaretlerindeki değişimi fark etmede öğrencilere yardım ettiği bildirilmiştir.

Çetin (2009), yaptığı araştırmada, üniversitede okumakta olan öğrencilerin gerçek hayat problemlerine ilişkin fonksiyonların türev grafiklerini belirlemedeki performanslarını incelemiştir. Çalışmada yer alan öğrencilerin tümü, çalışmanın öncesinde içerisinde türev konusunun da bulunduğu Analiz 1 dersini almış olup, çalışma sürecinde bu dersin devamı niteliğindeki Analiz 2 dersini almaktaydılar. Araştırmacı veri toplama aracı olarak gerçek yaşam problemi olarak nitelenen üç sorudan oluşan bir test kullanmıştır. Testin içerisinde yer alan sorulardan biri Şekil 11'de gözükmektedir.

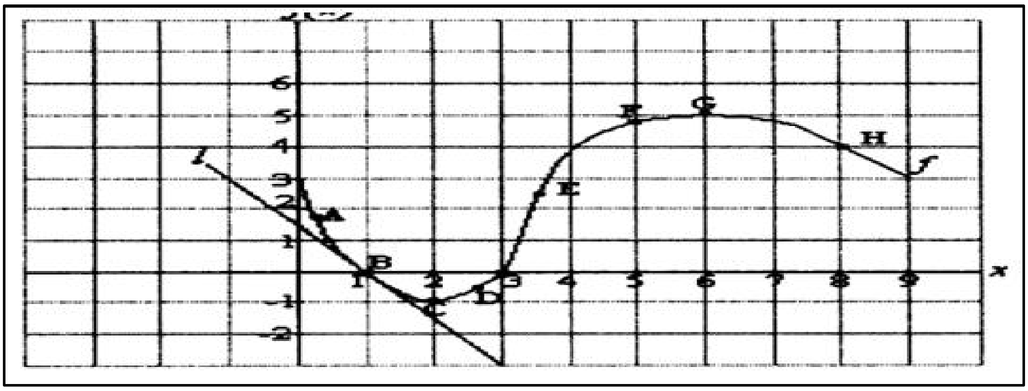


Şekil 11. Test içerisinde yer alan örnek soru

Soruda kaplara dolan suyun yüksekliği zaman cinsinden ifade edildiğinde, ortaya çıkan fonksiyonun türev fonksiyonuna ilişkin grafiğin verilen beş grafik arasından seçilmesi istenmiştir. Çalışmanın sonucunda araştırmacı, öğrencilerin bir fonksiyon ile bu fonksiyonun türevi arasındaki ilişkiyi kuramadıklarını belirtmişlerdir. Bunun yanında araştırmacı, öğrencilerin cebirsel formda ifade edilen fonksiyonların türevinin bir noktadaki değerini temel türev alma kurallarını kullanarak bulabildiklerini, fakat bir fonksiyonun bir noktadaki türevini tanımlayamadıklarını ifade etmişlerdir.

Naidoo ve Naidoo (2007), üniversite öğrencileri üzerinde yaptıkları deneysel çalışmada, türev kavramının öğretiminde geleneksel olarak işlenen derslere ek olarak bilgisayar yazılımı (Mathematica) kullanımının öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkisini incelemiştir. Bunun için öğrencilerin yaptıkları hatalar analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda, deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubundaki öğrencilere nazaran daha az hata yaptıkları bildirilmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin ortalama ve anlık değişim oranı kavramlarına ilişkin zayıf anlamalara sahip oldukları, problemlerin çözümünde cebirsel işlemleri kullanmaya ağırlık verdikleri ve sembolleri yorumlamada başarısız oldukları belirtilmiştir.

Bezuidenhout (1998), Güney Afrika'da bulunan üç üniversitede okuyan ve analiz dersini almış öğrencilerin değişim oranı kavramına yönelik sahip oldukları kavram yanılgılarını incelemiştir. Çalışmasının sonucunda, öğrencilerin bir kısmının nümerik olarak temsil edilen bir fonksiyonun iki noktası arasında değişim oranını bulmaları istendiğinde, fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerlerin aritmetik ortalamasını, bazı öğrencilerin ise fonksiyonun türevinin bu noktalarda aldığı değerlerin aritmetik ortalamasını aldıklarını belirlemiştir. Araştırmacı öğrencilerin değişim kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarını ortaya çıkarmak için Şekil 12'de verilen fonksiyon grafiği üzerinde sorular yöneltmiştir.

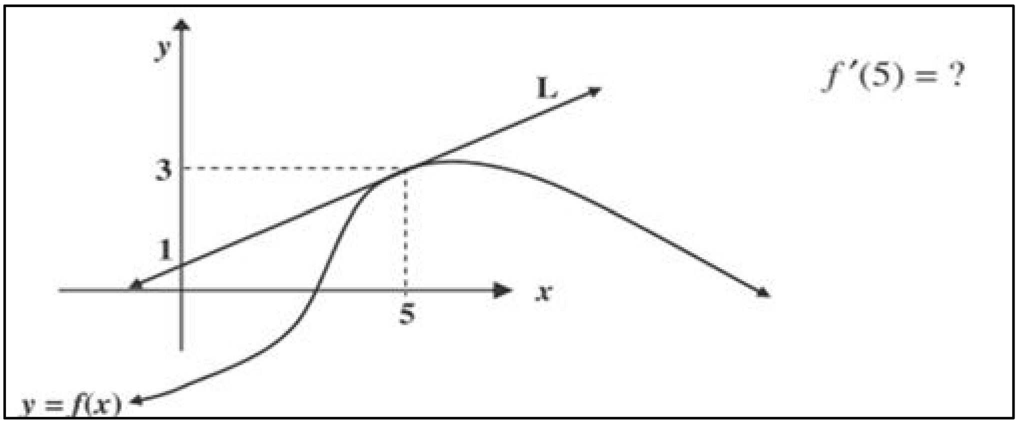


Şekil 12. Öğrencilerin değişim kavramının geometrik boyutuna yönelik anlamalarını ortaya çıkarmak için kullanılan soru.

Grafik bağlamında yöneltilen sorulardan biri öğrencilerden, grafik üzerindeki A,B,C,D,E,F,G,H noktalarının hangisinde $\frac{f(x+0.002)-f(x)}{0.002}$ değerinin 1 değerine en yakın olduğunu belirlemelerini istemektedir. Soruyu cevaplayan 100 öğrenciden 30'u doğru cevabı belirleyebilmiş, bununla birlikte 15'i A, 24'ü ise B noktasını istenen nokta olarak belirtmiştir. Dikkat edildiğinde bu noktalarda ifadenin değeri negatif olmaktadır. Yine grafik bağlamında yer alan bir diğer soruda öğrencilerden, grafikten yararlanarak $\frac{f(1.0001)-f(1)}{0.0001}$ değerini olabildiğince kesin olarak belirlemeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdiği cevaplardan büyük bölümünün grafiği ve (1,0) noktasında grafiğe çizilen teğeti dikkate almayıp, cebirsel işlemler ile sadeleştirme yaparak sonucu 0 veya 1 olarak belirledikleri rapor edilmiştir. Bu ve benzeri bulgulardan hareketle araştırmacı, öğrencilerin değişim oranı kavramına yönelik geometrik boyutta anlamalarının yetersiz olduğu, öğrencilerin kendilerine sunulan problem durumunda geometrik boyutta muhakeme yapamadıkları, bunun yerine geçersiz cebirsel işlemlere yöneldikleri sonucuna ulaşmıştır.

Amit ve Vinner (1990), yaptıkları araştırmada öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktasındaki türevi olarak, fonksiyona o noktadan çizilen teğetin cebirsel formunu aldıklarını gözlemlemişlerdir. Araştırmacılar bu durumun sebebinin bireylerin zihinlerinde bir kavramı tanımlamak için bir resim yerleştirdiklerini, dolayısıyla öğrencilerin zihinlerinde türev kavramının karşılığı olarak teğet doğrusunun bulunması olduğunu belirtmişlerdir.

Bingolbali, Monaghan ve Roper (2007), yaptıkları araştırmada türev kavramının iki temsili olan anlık değişim oranı ve teğet kavramını ele alarak, üniversitede matematik ve mühendislik bölümünde okumakta olan öğrencilerin türev kavramına yönelik anlamalarının gelişiminde kavramın temsil biçimi açısından farklılık olup olmadığını incelemişlerdir. Bu amaç doğrultusunda hazırladıkları test üç farklı zamanda öğrencilere uygulanmıştır. Testin ilk sorusunda öğrencilerden, grafiksel olarak sunulan bir fonksiyon grafiği ve grafiğe çizilen teğet yardımıyla fonksiyonun istenen noktada türev değerini hesaplamaları istenmiştir (Şekil 13).



Şekil 13. Grafiksel olarak tek noktada türev değerini hesaplamaya yönelik soru

Öğrencilerin son test sonuçları incelendiğinde mühendislik bölümünde okuyan öğrencilerin %32'si, matematik bölümünde okuyan öğrencilerin ise % 42'si soruya tam doğru olarak cevap verebilmiştir. Cebirsel ifadesiyle verilen bir fonksiyonun üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin denklemini bulmayı isteyen bir başka soruda ise, mühendislik bölümünde okuyan öğrencilerin %50'si matematik bölümünde okuyan öğrencilerin ise %63'ü soruyu tam doğru olarak cevaplayabilmiştir. Bu durum her iki grupta yer alan öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin cebirsel boyuta nazaran daha zayıf anlamalar gerçekleştirdiklerini göstermektedir.

Baker, Cooley ve Trigueros (2000), üniversite düzeyinde iki dönem analiz dersi almış 41 öğrenci ile yaptıkları araştırmada, cebirsel olarak bir fonksiyona ilişkin verilerden hareketle öğrencilerin fonksiyonun grafiğini oluşturma becerilerini incelemişlerdir. Öğrenciler ile yaptıkları mülakatlar neticesinde öğrencilerin bir fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türevleri arasındaki ilişkiyi oluşturamadıkları sonucuna varmışlardır. Bunun yanında bir diğer durum türev kavramının fonksiyonel anlamda anlaşılması hususunda ortaya çıkmıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bölümünün bir fonksiyonun birinci mertebeden türevini fonksiyon olarak yorumlayamadıkları belirlenmiştir.

Mahir (2010), bir grafiğe ait fonksiyonun gerçek hayat problemi veya pür matematiksel olarak verilmesi durumunda, öğrencilerin fonksiyon grafiğini yorumlama başarıları arasındaki farkı incelemiştir. Bu amaç doğrultusunda üniversite düzeyinde Analiz I-II derslerini tamamlamış 103 matematik bölümü öğrencisini iki gruba ayırarak, öğrencilere iki grafiksel problemi içeren bir test uygulamıştır. Her iki testte yer alan grafikler ve grafiklere ilişkin sorular aynı olmakla beraber, birinde grafikler gerçek hayat problemleri ile ilişkilendirilmiş diğerinde ise sadece birer fonksiyon grafiği olduğu belirtilmiştir. Araştırmanın sonuç kısmında araştırmacı grafiklerin gerçek hayat problemleri ile verildiği gruptaki öğrencilerin diğer gruptaki öğrencilere nazaran daha başarılı olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte her iki gruptaki öğrencilerin grafiksel veriden hareketle fonksiyonların türevlenebilir olup olmadığını belirlemede başarısız oldukları görülmüştür. Bunun yanı sıra öğrencilerin grafiksel veriden hareketle birinci türev fonksiyonun artan ya da azalan olmasına ilişkin muhakeme yapmada başarısız oldukları gözlenmiştir.

Porzio (1997), farklı öğretim yaklaşımlarının öğrencilerin teğetin eğimi, değişim oranı ve birinci türev arasındaki ilişkiyi anlamada etkisini incelemiştir. Üniversite düzeyinde analiz dersini almakta olan ve üç farklı sınıfta yer alan öğrencilerin örneklem alındığı araştırmada öğretim bir sınıfta geleneksel olarak gerçekleştirilmiştir. Diğer bir sınıfta yürütülen öğretimde kavramların hem grafiksel hem de cebirsel gösterimlerini vurgulamak için GHM dersin öğretmeni tarafından kullanılmıştır. Son sınıfta yer alan öğrenciler ise kavramların öğreniminde *Mathematica* programı içerisinde hazırlanan elektronik dökümanları kullanmışlardır. Bu dökümanlar hem statik yapıda metinsel ifadeler hem de öğrencilerin aktif rol aldığı problem durumlarını içermektedir. Gerçekleştirilen öğretim sürecinin sonunda her üç grupta yer alan öğrencilerin problem durumlarında farklı temsilleri kullanma becerileri hazırlanan bir test yardımıyla belirlenmiş ve her gruptan eşit sayıda öğrenci ile testte yer alan sorular çerçevesinde mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen mülaktatlarda her üç sınıfta yer alan öğrencilerin, bir fonksiyonun yerel ekstremumlarını bulmada birinci türevi cebirsel olarak kullanıp başarılı oldukları fakat, geleneksel ve GHM grubunda yer alan öğrencilerin birinci türevi sıfıra eşitlemenin grafiksel bağlamdaki yorumununu kurmada, *Mathematica* grubuna nazaran daha başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. Bunun yanı sıra aynı başarı farkı, belirli bir noktada fonksiyonun birinci türev değeri ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkiyi anlamada da ortaya çıkmıştır. Bu bulgulardan hareketle araştırmacı, öğretimde yalnızca kavramların farklı temsillerini sunmanın öğrencilerin daha iyi anlamalar gerçekleştirmesi için yeterli olmadığını, bunun yerine öğrencilerin farklı temsiller arasındaki bağlantıyı kurabilecekleri problem durumları ile baş başa bırakılmaları gerektiğini iddia etmektedir.

Park (2011), yaptığı doktora çalışmasında üniversite düzeyinde türev kavramına yönelik verilen öğretim sonucunda öğrencilerin geliştirdikleri anlamaları incelemiştir. Gerçekleştirdiği mülakatlar ile öğrencilerin bir noktada türev ve bir fonksiyonun türevi kavramlarını nasıl tanımladıkları, bir fonksiyon ile fonksiyonun türevi ve tek noktada türev kavramları arasındaki ilişkileri nasıl açıkladıkları ve bir fonksiyon ile bu fonksiyona ait türev fonksiyonunu nasıl kullandıkları sorularına cevap aramıştır. Çalışmasının sonucunda incelenen boyutlarda öğrencilerin yetersizliklere ve kavram yanılgılarına sahip olduklarını ortaya çıkarmıştır. Birinci soru bağlamında gerçekleştirdiği mülakatlarda, öğrencilerin türev kavramını açıklayamadıkları ve bir fonksiyonun bir noktasındaki teğet doğrusunu o noktadaki türev olarak belirledikleri gözlemiştir. İkinci soru bağlamında gerçekleştirdiği mülakatlarda, öğrencilerin bir fonksiyonun konvekslik-konkavlık karakteristiği ile türevi arasındaki ilişkiyi açıklayamadıklarını, bunun yanında grafiksel olarak verilen problem durumunda fonksiyonun türevine yönelik muhakeme yapamadıklarını belirlemiştir. Son soru bağlamında ise öğrencilerin bir fonksiyonun bir aralıktaki türevininde bir fonksiyon olduğunu kavrayamadıklarını, bir fonksiyon ile fonksiyona ait türev fonksiyonu arasındaki ilişkileri belirleyemediklerini gözlemiştir.

2.1.2.3. Türev Kavramının Öğrenilmesini Etkileyen Ön Bilgileri Belirlemeye Yönelik Yapılan Çalışmalar

Pinzka (1999), araştırmasında üniversite öğrencilerinin fonksiyon ve türev kavramına ilişkin anlamaları ile uygulama yeterlilikleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Toplamda 37 öğrenci üzerinden elde ettiği nicel veriler ve örneklem içerisinden seçilen 6 öğrenci ile gerçekleştirdiği mülakatlar sonucunda, bu iki kavrama ilişkin işlemsel ve kavramsal anlama açısından pozitif yönde kayda değer korelasyon bulunduğunu rapor etmiştir. Araştırmadan ortaya çıkan nitel bulgular bir öğrencinin türev kavramına ilişkin anlamasının fonksiyon grafiklerini anlayabilmesi ve yorumlayabilmesi, fonksiyonların farklı gösterimleri arasında ilişki kurabilmesi ve fonksiyon kavramına yönelik noktasal ve aralıksal anlaması ile ilişkili olduğunu göstermiştir. Bunun yanında türev kavramını problem durumlarına uygulama becerisinin, fonksiyon kavramına yönelik notasyon ve işlemsel bilgisine, fonksiyonların görüntü ve tanım kümelerine yönelik anlamasına ve fonksiyon belirten ilişkileri tanımlayabilme becerisi ile bağlantılı olduğunu ortaya koymuştur. Pinzka'nın sonuçlarına paralel olarak Hartter (1995) doktora çalışmasının sonuçlarından biri olarak, fonksiyon kavramının grafiksel boyutuna ilişkin daha iyi anlamaya sahip öğrencilerin diğerlerine nazaran grafiksel ve sayısal türev problemlerini çözmede daha başarılı olduklarını söylemektedir. Yapılan bir başka araştırmada ise Pustejovsky (1999) üniversite düzeyinde öğrenim gören öğrencilerin fonksiyon, oran ve değişken kavramlarına yönelik ön bilgilerinin, türev kavramına yönelik geliştirdikleri anlamalar üzerindeki etkisini incelemiştir. Araştırmanın sonuçları, türev kavramının öğretiminden önce oran kavramına ilişkin zayıf anlamaya sahip öğrencilerin, güçlü anlamaya sahip öğrencilere nazaran türev kavramını anlamada daha geride kaldığını göstermiştir.

2.1.2.4. Öğretim Sürecinde Teknoloji Kullanımının Etkisini İnceleyen Araştırmalar

Gelişen teknolojinin hayatın her alanına olduğu gibi, matematik öğrenme-öğretme sürecine de getirdiği yenilikler olmuştur. Bu yeniliklerin bir ayağı matematik eğitimi için geliştirilen bilgisayar yazılımlarıdır. Bu bölümde literatürde öğrencilerin türev kavramına yönelik anlamalarına bilgisayar destekli hazırlanan öğretim süreçlerinin etkisini konu alan araştırmalar özetlenecektir.

Cooley (1997), analiz derslerinde BCS kullanımının öğrencilerin bir fonksiyonun limiti, anlık değişim hızı, eğri çizimi, fonksiyonların maksimum ve minimum noktaları, türev ve integral konularını anlamadaki etkisini incelemiştir. Bu amaç doğrultusunda hazırladığı 15 soruluk kavram testinden ve 10 öğrenci ile yaptığı mülakatlardan elde ettiği bulgular, BCS kullanan öğrencilerin kavramların geometrik boyutuna ilişkin daha iyi anlamalar gerçekleştirdiklerini göstermiştir. Bununla birlikte iki grupta bulunan öğrenciler arasında işlemsel beceri açısından bir farklılık bulunmadığı sonucuna ulaşmıştır.

Berry ve Nymann (2003), yaptıkları çalışmada üniversite birinci sınıfta okumakta olan öğrencilerin, grafik çizme özelliğine sahip hesap makinelerinin kullanıldığı ortamda, bir fonksiyon ile türevi arasındaki ilişkiyi bulmada yaşadıkları deneyimleri incelemişlerdir. Çalışmada, öğrencilerden bir fonksiyonun türev fonksiyonunun grafiğinden yola çıkarak fonksiyonun kendi grafiğine ulaşmaları beklenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerden, kendilerine verilen bir cisme ait hız-zaman grafiğini kullanarak cismin konum-zaman grafiğini bulmaları istenmiştir. Çalışmanın sonunda grup çalışması yöntemiyle birlikte hesap makinelerinin kullanımının, öğrencilerde kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde etkili olduğunu rapor edilmiştir. Araştırmacılar kullanılan teknolojinin, öğrencilere cebirsel işlemler yerine analiz dersinin temelini oluşturan kavramlara ve fikirlere odaklanma fırsatı sunduğunu belirtmektedir.

Castro (2011), yaptığı doktora çalışmasında BCS yazılımlarından birisi olan Maple ile yürütülen derslerde izlenen iki farklı yöntemin, ortaöğretim öğrencilerinin limit ve türev kavramına yönelik anlamaları üzerindeki etkisini incelemiştir. Çalışmaya dâhil olan iki sınıftan rastgele seçilen birinde öğrenciler, yazılım içerisinde kavramları incelemek için kullanacakları yapıları kendileri programlama yoluyla oluşturmuşlardır. Diğer sınıfta yer alan öğrencilere ise bu yapılar araştırmacı tarafından önceden hazırlanıp dersin başlangıcında hazır olarak sunulmuştur. Araştırmacı her iki grupta yürütülen öğretim süreçlerindeki etkinliklerin geliştirilmesinde, literatürde limit ve türev kavramlarının APOS teorisi bağlamında ortaya konan genetik ayrışımlarını kullanmıştır. Bununla birlikte araştırmada kullanılan mülakat ve testler içerisinde yer alan sorular, türev ve limit kavramlarının genetik ayrışımları içerisinde yer alan kazanımlara dayalı olarak hazırlanmıştır. Castro çalışmasının sonuçlarında, kavramları araştırmak için kullanılan yapıları programlama yoluyla oluşturan öğrencilerin, önceden araştırmacı tarafından oluşturulmuş yapıları kullanan öğrencilere nazaran daha geride kaldıklarını belirlemiştir. Araştırmacı programlama yapmanın öğrencilere daha çok bilişsel yük getirdiğini ve bununda öğrenmeyi olumsuz etkilediğini ileri sürmüştür. Formel limit tanımını anlamada hazır yapıları kullanan öğrencilerin programlama yapan öğrencilere nazaran daha iyi anlama sergiledikleri ortaya çıkmıştır. En genel anlamda, hazır yapıları kullanan öğrencilerin APOS teorisi bağlamında limit kavramının genetik ayrışımı içerisinde daha ileri seviyelere ulaştıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte programlama yapan öğrencilerin dersin amacı olarak hedef kavramları incelemeyi değil, bu kavramları incelemede kullanılan yapıları programlama yoluyla oluşturma olarak gördükleri belirtilmiştir.

Aksoy (2007), üniversite düzeyinde türev kavramının öğretiminde BCS kullanımının işlemsel beceri, kavramsal anlama, problem çözme becerisi, matematiğe yönelik tutum ve bilgisayara yönelik tutum değişkenleri üzerindeki etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Deney-kontrol grubu desenine sahip araştırmada bir grup öğrenci dersleri BCS destekli yapılandırmacı yaklaşımı esas alan bir öğrenme ortamında, bir diğer grup ise sadece yapılandırmacı yaklaşımı esas alan öğrenme ortamında işlemişlerdir. Araştırmacı BCS kullanımını belirtilen değişkenler üzerindeki etkisini incelemek için 8 sorudan oluşan bir türev testi kullanmıştır. Türev testinden elde edilen bulgular, her iki gruptaki öğrencilerin işlemsel becerisi ve problem çözme becerisi gerektiren sorulardaki puan ortalamalarının birbirine yakın olmasına karşın, kavramsal anlama gerektiren sorulardaki puan ortalamalarında deney grubu lehine anlamlı bir farkın olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Serhan (2000), üniversite düzeyinde öğrenim görmekte olan öğrencileri konu aldığı doktora çalışmasında, GHM kullanımının öğrencilerin bir noktada türev kavramına yönelik anlamalarının gelişimi üzerindeki etkisini incelemiştir. Araştırmada iki öğrenci grubundan biri teğet doğrusu, bir noktada türev, anlık ve ortalama değişim oranı kavramlarını GHM ile zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamında farklı gösterim alanlarına vurgu yapılarak, diğer grup ise geleneksel öğrenme ortamında incelemiştir. Araştırmada veriler araştırmacının hazırladığı bir başarı testi, öğrencilerin öğretim sürecinin sonunda öğrencilerin oluşturduğu kavram haritaları ve her iki gruptan toplam 11 öğrenci ile yapılan mülakatlardan elde edilmiştir. Öğretim sürecinin sonunda yapılan başarı testinin sonuçları deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark oluştuğunu göstermiştir. Araştırmacı öğrencilerin hazırladığı kavram haritalarında deney grubundaki öğrencilerin farklı gösterim alanlarına daha çok vurgu yapmalarından ötürü, GHM ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının öğrencilere daha zengin kavram imgeleri oluşturmada etkili olduğu sonucuna ulaşmıştır. Öğretim sürecinin sonunda her iki grupta yer alan öğrencilerin, bir noktada türev kavramının formel tanımını anlamada eksik kaldıkları gözlemlenmiştir. Bu durumdan hareketle araştırmacı, GHM kullanılarak görsel ve nümerik boyutlara vurgu yapan öğretimin bir noktada türev kavramının formel tanımına yönelik anlam oluşturmada etkisinin olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Bunun yanı sıra öğretim sürecinin sonunda örneklem dâhilinde olan öğrencilerin büyük çoğunluğu, bir noktadaki türev değerinin o noktadaki teğetin eğimi olduğunu bilmesine rağmen, hiç bir öğrenci bir noktada teğet doğrusunu o noktadaki fonksiyonun türev değerini kullanarak tanımlayamamıştır.

Stiles (1994), üniversite düzeyinde analiz dersinin öğretiminde GHM kullanımının etkilerini belirleme amacıyla bir doktora çalışması gerçekleştirmiştir. Araştırmasında eğrilere teğet çizme, Newton metodu ve grafik çizimi konularına odaklanan araştırmacı, GHM'nin öğrenciler tarafından kullanılabilirliğini ve öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkisini, sadece öğrencilerin yazılı beyanları doğrultusunda belirlemiştir. Daha açık olarak öğrencilerin kavramlara ilişkin anlamalarını ölçen herhangi bir test kullanılmayıp, sadece öğrencilere sunduğu görüş formunda yer alan, kavramların anlaşılabilirliğine yönelik sorulara verilen cevaplardan araştırmanın verileri elde edilmiştir. Araştırmacı öğrencilerin analiz dersinde GHM kullanımına olumlu baktıklarını ifade etmiştir. Kavramlara yönelik anlama açısından ise GHM kullanımının öğrencilerin geometrik sezgilerini geliştirdiği, bunun yanında GHM'lerin ele alınan fonksiyonların grafiklerinin kusursuzca çizmesi sonucunda öğrencilerin ele alınan kavramları daha iyi anladıkları belirtilmiştir.

Muhundan (2005), üniversite düzeyinde matematikten farklı branşlarda öğrenim görmekte olan öğrencileri örneklem aldığı araştırmasında, nümerik yaklaşım benimsenerek GHM kullanımının limit ve türev konularının öğrenimi üzerindeki etkisini incelemiştir. Tasarımında deney-kontrol deseni benimsenen araştırmada toplamda dört sınıftan ikisi deney diğer ikisi kontrol grubu olarak seçilmiş ve araştırmacının haricinde birbirine denk olduğu düşünülen iki öğretmenden her biri kontrol ve deney sınıflarında dersleri yürütmüştür. Öğrencilerin uygulama sonucunda başarılarını belirlemek için türev ve limit kavramlarını ayrı olarak ele alan iki test uygulanmıştır. Her iki test kavrama yönelik işlemsel beceri, kavramı anlama ve kavramı uygulama türünden sorular içermektedir. Türev kavramı bağlamında öğrencilerin başarı puanları üzerinde yapılan istatistiksel testlerde, toplamda ve testin üç alt kısmında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğu saptanmıştır. Araştırmacı tüm gruplarda, türev testinin işlemsel beceriler kısmında yer alan geometrik bağlama yönelik soruda öğrenci başarısının, cebirsel bağlama yönelik sorudaki başarısına nispeten daha düşük olduğunu gözlemlemiştir. Bu gözleme dayanarak araştırmacı her iki sorunun aynı olmasına rağmen bu farklılığın sebebini, öğrencilerin bir noktada türev değerini o noktada çizilen teğet ile ilişkilendiremedikleri sonucu ile açıklamaktadır. Türev kavramına yönelik testin kavramı uygulama kısmında yer alan sorulara öğrencilerin verdiği cevaplardan yola çıkarak araştırmacı, öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktasındaki türev değerinin, o noktada fonksiyonun değişim oranı olduğunu yorumlayamadıkları sonucuna ulaşmıştır.

Girard (2002), yaptığı doktora çalışmasında GHM'lerin limit ve türev problemlerini çözmedeki rolünü incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın örneklemini üniversite düzeyinde analiz dersini alan toplam 57 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın yürütüldüğü dersin müfredatında ve öğretiminde araştırma öncesinde de GHM entegre halde bulunmaktadır. Araştırmanın verileri dönem sonunda dersin final sınavı niteliğindeki testte yer alan sorulara öğrencilerin verdiği cevaplardan elde edilmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin karşılaştıkları soruya bağlı olarak problemlerin çözümünde GHM'yi grafiksel, cebirsel ve nümerik açıdan kullandıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra öğrencilerin problemin çözümüne ulaşmada en başarısız oldukları durumun, nümerik yaklaşımı kullandıklarında ortaya çıktığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin GHM'yi problemlerin çözümünde doğrulama amacından ziyade araştırma amacıyla kullandıkları tespit edilmiştir. Çalışmada türev ve limit kavramlarına yönelik yürütülen öğretimin GHM destekli ve farklı temsillerin vurgulanması şeklinde gerçekleştirilmesine rağmen, çalışmanın sonunda öğrencilerin büyük çoğunlu bir noktada türev hesaplamayı ve elde edilen değeri yorumlamayı isteyen soruya verdikleri cevaplarda $f'(x)$ = 2 ve $f'(1)$ = 2 notasyonlarını karıştırdıkları tespit edilmiştir. Bu veriden hareketle araştırmacı öğrencilerin bir noktada türev kavramı ile fonksiyon anlamında türev kavramı arasındaki farkı ve bağlantıyı göremedikleri sonucuna ulaşmıştır.

Goerdt (2007), doktora çalışmasında üniversite düzeyinde türev kavramının öğretiminde farklı temsillere vurgu yapılmasının, öğrencilerin türev kavramına yönelik anlamaları üzerindeki etkisini incelemiştir. Araştırmasının örneklemini farklı iki üniversitede bulunun iki sınıfta yer alan öğrenciler oluşturmuştur. Bu iki üniversitenin birinde analiz derslerinin öğretimi geleneksel yolla gerçekleşmiş ve ders kitabı olarak geleneksel yaklaşımı esas alan bir kitap kullanılmış, diğerinde ise öğretim Tulane konferansı sonucu ortaya çıkan reform hareketinin parelelinde, farklı gösterim alanlarına vurgu yapılarak ve ders kitabı olarakta reform hareketini temel alan bir yaklaşımla hazırlanmış *"Calculus: The Language of Change"* isimli kitap kullanılmıştır. Bunun yanında reform sınıflarında yürütülen derslerde GHM kullanılmıştır. Geleneksel yaklaşımı temel alan sınıflarda öğretim cebirsel ağırlıklı yürütülmüş, reform sınıfında ise ders sürecinde kavramlar cebirsel, grafiksel ve nümerik olarak üç farklı temsilde ele alınmıştır. Bunun yanında araştırma raporunda derslerde GHM'lerin nasıl kullanıldığı açık olarak belirtilmemiştir. Araştırmada nicel veriler, öğretimin sonunda uygulanan ve toplamda 10 soru içeren bir testten, nitel veriler ise yine bu test içerisinde yer alan sorular kullanılarak gerçekleştirilen mülakatlardan elde edilmiştir. Araştırmacının nicel verilerden elde ettiği sonuçlar, reform öğrencilerinin testteki ortalama puanlarının geleneksel öğrencilere nazaran istatistiksel olarak daha yüksek olduğunu göstermiş, bununla birlikte araştırmacı her iki grubun doğru cevap ortalamasının beşten düşük olduğuna dikkat çekmiştir. Araştırmanın sonuçları reform öğrencilerinin geleneksel öğrencilere nispeten türev kavramının farklı temsilleri arasında geçiş yapmada daha başarılı olduklarını söylemektedir. Bunun yanında her iki grupta bulunan öğrenciler bir fonksiyonun ikinci türevine yönelik grafiksel bağlamda çıkarım yapamadıkları ortaya çıkmıştır.

Ellison (1993), yürüttüğü doktora araştırmasında üniversite düzeyinde verilen analiz derslerinde teknoloji kullanımının, öğrencilerin türev kavramına ilişkin anlam oluşturma süreçleri üzerindeki etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda Ellison iki farklı sınfta yürütülen derslerde GHM ve analiz kavramlarını görselleştirme amacıyla tasarlanmış bir bilgisayar programı *"A Graphic Approach to the Calculus"* kullanmıştır. Ellison öğrencilerin türev kavramına yönelik anlam oluşturma süreçlerini incelemek için ilk olarak, bireyin zihninde türev kavramına ilişkin olgunlaşmış bir zihinsel yapının neleri içermesi gerektiğini belirtmiştir. Ellison'a göre analiz dersinin tamamlayan bir öğrencinin türev kavramına ilişkin zihnindeki kavram imgesinin olgunlaşmış olarak kabul edilebilmesi için aşağıdaki öğeleri içermesi gerekmektedir:

- Teğet doğrusu ile tek noktada türev kavramlarını birbiri ile ilişkilendirebilmek ve bunun sonucunda bir noktadaki teğetin cebirsel denklemini bulabilmek. Bunun yanında bir fonksiyonun grafiğine bakarak, grafiğe çizilen teğetler vasıtası ile, fonksiyonun türevlenebilirliği hakkında sonuç çıkarabilmek.
- Teğetin eğimi, anlık değişim oranı ve bir noktada türev kavramının birbirine denk olduğunu kavramak.
- Bir fonksiyonun bir aralık boyunca türevininde bir fonksiyon olduğunu kavramak. Böylece fonksiyonun kendisinin ya da türev fonksiyonunun grafiği verildiğinde birini diğerinden hareketle çıkarsayabilmek.
- Türev kavramının formel tanımının geometrik boyutunun anlaşılması. Öğrencinin $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ noktalarını birleştiren kesen doğrusu ile $(a, f(a))$ noktasından fonksiyon grafiğine çizilen teğet arasındaki ilişkiyi kavraması gerekmektedir.
- Fonksiyonların türevlerine ilişkin cebirsel formüllere yönelik bilginin kazanımı ve bu formülleri problem çözmede kullanabilme.

Yukarıda ifade edilen öğeler bağlamında araştırmacı, araştırma sorularına cevap aramak için uygulanan testlerin yanı sıra, iki sınıftan toplam 10 öğrenci ile mülakatlar gerçekleştirmiştir. Araştırmanın bir sonucu, öğrencilerin teğet kavramına yönelik daha önce geometri dersi bağlamında yaşadıkları öğrenme deneyimlerinin, analiz bağlamında teğet kavramına yönelik anlamalarında olumsuz etki yaptığı şeklinde ortaya çıkmıştır.

Çalışmanın başında mülakat yapılan 10 öğrencinin tamamında teğet doğrusunun, teğet olduğu eğrinin bir kısmı ile çakışık olamayacağı şeklinde kavram yanılgısının mevcut olduğu belirlenmiştir. Çalışmanın son evrelerine denk gelen son mülakatta dahi bu 10 öğrencinin altısında bu kavram yanılgısının mevcut olduğu ifade edilmiştir. Yine çalışmanın başında 10 öğrencinin tamamında, bir fonksiyonun türevlenebilir olmadığı kırılma noktalarında bir veya birden fazla teğete sahip olduğu yönünde kavram yanılgısının var olduğu belirlenmiştir. Bir önceki kavram yanılgısında olduğu gibi öğrencilerin bu yöndeki algıları çalışmanın son evrelerine kadar değişime direnç gösterdiği rapor edilmiştir. Türev kavramının formel tanımına yönelik elde edilen sonuçlar, öğretimin sonunda 10 öğrenciden 7'sinin teğet doğrusunun kesen doğrularının limit durumu olduğu yönünde zihin imgesi oluşturmada başarısız olduklarını göstermiştir. Türev kavramının fonksiyon anlamında anlaşılmasına yönelik elde edilen sonuçlar, öğrencilerin yarıdan fazlasının öğretimin sonunda türev fonksiyonunun grafiğinden hareketle fonksiyonun grafiğine çizilen teğetlere ilişkin çıkarım yapamadıklarını ortaya koymuştur. Bunun yanı sıra öğrencilerin yarıya yakını öğretimin sonunda bir fonksiyon ve türev fonksiyonunun grafiklerinden biri verildiğinde diğerine ilişkin çıkarım yapamadıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Genel olarak bakıldığında araştırmacı, teknoloji destekli gerçekleştirdiği analiz öğretiminin, öğrencilere türev kavramına yönelik zihinsel yapılar oluşturmada yardımcı olduğunu söylemektedir.

2.1.2.5. Öğrencilerin Türev Kavramına Yönelik Anlamalarını Karakterize Etmek İçin Kavramsal Çatı Oluşturmaya Yönelik Çalışmalar

Bu kısımda literatürde öğrencilerin türev kavramına yönelik anlamalarını seviyelendirmek veya karakterize etmek amacıyla araştırmacılar tarafından ortaya konan kavramsal çatılar sunulmuştur.

Delos Santos ve Thomas (2003), farklı gösterim alanlarını dikkate alarak, öğrencilerin türev kavramına ilişkin anlamalarını karakterize etmek için bir teorik çerçeve geliştirmişlerdir. Araştırmacıların bakış açısına göre, matematiksel kavramların gösterimi matematiksel anlama sürecinden ayrı tutulamaz ve matematiksel anlamanın önemli bir göstergesi de, bireyin bir problemi farklı temsillerde sunabilmesi ve sonuca ulaşabilmesidir. Araştırmacıların ortaya attıkları teorik çerçeve iki bileşenden oluşmaktadır. İlki bireyin sahip olduğu anlamayı niteleyen beş farklı seviye, ikincisi ise türev kavramının temsilinde yararlanılan üç farklı gösterim alanıdır. Araştırmacılar bireyin sahip olduğu anlamanın aşağıda tarif edilen beş seviye ile sınıflandırılabileceğini, bu seviyelerin birbirinden tam olarak ayrı olmadığını fakat bireyin baskın olduğu seviyeyi işaret ettiğini ifade etmişlerdir.

İşleme-dayalı bilme (Procedure-oriented knowing): Birey kendisine verilen bir probleme, anlamlı gelsin ya da gelmesin, bir takım kurallar zincirini takip ederek çözüm getirme. İşleme-dönük anlama bilinen bir takım kurallar ile sınırlıdır. Bir problemi belirli bir temsil alanı içerisinde ifade etme, yorumlama ve işlemi ne zaman ve nasıl kullanılacağını belirleme yeteneklerini barındırır.

Sürece-dayalı bilme (Process-oriented knowing): Birey bir işlemi sahip olduğu bütünlük içerisinde yoğunlaştırmış ve içselleştirmiştir. İşlem artık adım adım ve sıra takip eden biçimde olmaktan ziyade bütüncül bir özellik taşır. Birey bir problemin çözümünde hangi algoritmanın uygun düştüğünü ve kullanılabilir olduğunun farkındadır. Bu yöndeki bilgi, işlem gerçek anlamda gerçekleştirmeden onu açıklama ve üzerinde derinlemesine düşünme kabiliyetini içerir.

Nesneye-dayalı bilme (Object-oriented knowing): Bir süreç bir nesne olarak muamele görebilir. Birey süreçler üzerinde derinlemesine düşünebilir ve bunun yanında bu süreç içerisinden bir matematiksel nesne oluşturabilir. Bir temsili, bir işlem ve bu işlemin sonucunu tasvir eden bir nesne olarak algılayabilir.

Kavrama-dayalı bilme (Concept-oriented knowing): Bireyin zihninde daha büyük bir resim oluşturduğu basamaktır. Bu büyük resim, işlemler, süreçleri ve nesneleri birbirleriyle ilişkisel olarak düzenlenmiş şekilde içeren şemaları kapsar. Bu düzeyde olan kişi, işlemlerin ve süreçlerin neden işlediğine dair sorulara cevaplar sunabilir ve temsiller arasında kavramsal ilişkiler kurabilir.

Çok yönlü bilme (Versatile knowing): Birey problem çözme sürecinde yukarıda açıklanan bilme çeşitlerinden seçim yapabilecek düzeyde her bir alana ilişkin yeteri düzeyde birikime sahiptir. Bunun yanı sıra problem çözme sürecinde yukarıda bahsedilen dört tür bilme arasından ihtiyaca göre geçişler yapabilir.

Araştırmacılar öğrencinin sahip olduğu bilmeyi ait olduğu gösterimsel alana ve niteliği bakımından hangi seviyeye ait olduğunu belirlemek için öğrencilerin gösterebileceği olası davranışları da içeren aşağıdaki tabloyu oluşturmuşlardır.

Tablo 1. Sahip Olunan Bilme Niteliğine ve Gösterimsel Alana İlişkin Muhtemel Davranışlar.

Boyutlar	TEMSİLLER		
	Sembolik	Grafiksel	Sayısal/Çizelge
İşleme Dayalı	Semboller üzerinde belirli kurallara göre işlem yapabilir. Ör. $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$	Grafik halde verilen formlardan hesap yapabilir. Bir teğetin eğimini ya da bir kirişin eğimini iki noktadan hesaplayabilir.	Tablolardan sayısal sonuçlara ulaşmak için bir algoritma izleyebilme. Ör. Ortalama değişimi hesaplayabilmek için tahminde bulunabilmek.

Tablo 1'in devamı

Sürece Dayalı	Sembollerin anlamını diferansiyel bulma süreci olarak yorumlayabilme	Eğrilerin türevine ilişkin noktasal anlamda bir yaklaşıma sahiptir.Ör: Verilen bir fonksiyon grafiğinden bu fonksiyonun türev fonksiyonunun grafiğini çizebilir. İkinci türevi, eğimin değişim oranı olarak anlayabilir.	Tablo halinde sunulan değerleri kullanarak, değişim oranını bulmayı, diferansiyele ulaşmayı başarabilir. Ör: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ifadesini h değişkeninin küçük değerleri için hesaplayabilir.
Nesneye Dayalı	Sembolleri bir nesne olarak algılayıp üzerinde işlemler yapabilir. Ör: $\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$ sembolüne anlam verebilir. Yüksek Mertebeden türevleri bir fonksiyon olarak yorumlayabilir.	Türev grafiklerinin bir fonksiyonu temsil ettiğinin farkında olmak. Grafiklerin üzerinde bir bütün olarak işlem yapabilmek. Ör: Tüm x değerleri için, x=m noktasında f(x) in türevi ile x=m+a noktasında f(x-a)'nın türevini ilişkilendirebilme.	Tablo halinde verilen değerleri, sürekli bir fonksiyona yakınsan bir noktalar topluluğu olarak yorumlayabilme. Ör: y=f(x) fonksiyonu için verilen değerleri y=f(x-a) fonksiyon için dönüştürebilme.
Kavrama Dayalı	Bir gösterim alanı içerisinde diferansiyel bulmaya yönelik uygulanabilecek yöntemleri ve süreçleri birbiri ile ilişkilendirebilme.Ör: $\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d^2y}{d^2x}$ Farklı gösterim alanlarında ve birbirine karşılık gelen diferansiyel bulmaya yönelik işlemler,süreçler ve nesneler arasında kavramsal ilişki kurabilme.		
Çok Yönlü	Kendisine verilen bir diferansiyel bulma sorusunda, problemin çözümünde uygulanacak uygun gösterimsel alanı belirleyebilme ve alanlar arasında geçiş yapabilme. Yukarıda ifade edilen anlama boyutlarına ilişkin yeterliliğe sahip olma.		

Zandieh (2000), öğrencilerin türev kavramına ilişkin anlamalarını tasvir etmek için bir kavramsal çatı geliştirmiştir. Zandieh ortaya koyduğu kavramsal çatının gerekçesi olarak, türev gibi çok boyutlu bir kavramın basit olarak bir öğrenci tarafından anlaşılıp anlaşılamadığının sorulamayacağını, bunun yerine öğrencinin gerçekleştirdiği anlamanın tasvirinin ortaya konmasının gerektiğini söylemektedir. Bu tasvirden kasıt, kavramın hangi boyutlarının öğrenci tarafından bilindiğini ve bu boyutlar arasındaki ilişkilere yönelik sahip olduğu bilginin resmedilmesidir. Araştırmacı kendi kavramsal çatısını, türev kavramının kitaplarda açıklanış yollarını gözlemleyerek ve matematik eğitimi alanındaki araştırmacıların, matematikçilerin ve analiz dersini alan öğrencilerin bu kavramı açıklamalarını dinleme yoluyla geliştirdiğini ifade etmiştir. Araştırmacının ortaya koyduğu çatı iki ana bileşenden oluşmaktadır. Bu bileşenlerden ilki farklı gösterimler ya da bağlamlar, diğeri ise süreç-nesne çiftlerinin aşamalarıdır. Zandieh türev kavramının a) bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi olarak b) sözel olarak anlık değişim oranı c) fiziksel olarak hız d) sembolik olarak ise farkların bölümünün limiti olarak temsil edilebildiğini dikkate alarak, bu farklı bağlamları çatısının ilk bileşeninin öğeleri olarak almıştır. Zandieh ikinci bileşen olarak aşağıda ifade edilen türev tanımının içerisinde geçen alt kavramları almıştır.

Bir fonksiyonun türevi, bir x_o noktasındaki değeri aşağıda ifade edilen *oranın limit* değerine eşit olan *fonksiyondur*. $f'(x_0) = \lim_{h->0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$

Türev kavramının tanımı içersinde geçen alt kavramları (oran, limit ve fonksiyon) kurduğu çatının aşamaları olarak almıştır. Bu gösterim alanlarının ve aşamaların birleşimiyle aşağıdaki matrisi oluşturmuştur.

Tablo 2. Zandieh Tarafından Ortaya Konan Kavramsal Çatının Bileşenleri

	BAĞLAMLAR			
	Grafiksel	Sözel	Fiziksel	Sembolik
Süreç-nesne çiftleri	Eğim	Oran	Hız	Farkların bölümü
Oran				
Limit				
Fonksiyon				

Bu matris içerisindeki her hücre türev kavramının bir yönünü temsil etmektedir. Örneğin oran satırı ile grafik sütunun kesişimin de yer alan hücre, türevi ile ilgilendiğimiz bir fonksiyonun grafiği üzerinde bulunan bir kesen doğrusunun eğimini temsil etmektedir. Zandieh türev kavramının tanımı içerisinde yer alan limit, oran ve fonksiyon kavramlarının aşamalar olarak nitelendirmesinin temelini Sfard tarafından ortaya konan kavramsal çatıya dayandırmaktadır. Sfard (1992), tarafından ortaya konan kavramsal çatıya göre, matematiksel kavramların tarihsel ve psikolojik gelişimi, kavramların süreç ya da operasyonel anlamda algılamadan, durağan ya da yapısal bir algılamaya geçişi öngörmektedir. Bu çatıya göre süreçler önceden inşa edilmiş nesneler üzerindeki operasyonlardır. Her süreç, başka süreçler tarafından işleme sokulabilecek bir nesneye somutlaştırılmaktadır (reified into). Bu anlamda burada ifade edilen aşamaların her biri (fonksiyon, limit ve oran) hem dinamik bir süreç hem de durağan bir nesne olarak algılanabilir. Örneğin oran aşaması operasyonel anlamda bir sayının diğer bir sayıya bölünmesi veya yapısal anlamda çarpımsal bir sistem içerisinde iki sayı çifti olarak görülebilir. Limit aşaması süreç anlamında belirli bir değere yaklaşma olarak veya durağan anlamda epsilon-delta tanımı üzerinden algılanabilir. Fonksiyon aşaması ise süreç anlamında, tanım kümesi içerisinde bir değere uygulanan bir işlem sonucu elde edilen yeni bir değer ya da yapısal olarak elemanları sıralı ikililer olan bir küme olarak görülebilir. Türev kavramı bu üç süreç-nesne çiftini bir zincir oluşturacak şekilde içermektedir. Oran süreci iki nesne üzerine (İki uzunluk veya bir uzaklık ve zaman) bölme işlemini uygular. Bu işlem sonucu somut hale gelen nesne (eğim ya da hız) bir sonraki süreç olan limit alma tarafından kullanılır. Limit alma süreci, nihayetinde belirli bir değere yaklaşan sonsuz sayıda oranın hesaplanması ile gerçekleşir ve bu sürecin sonunda ortaya çıkan somut nesne (eğri üzerinde bulunan bir noktadaki eğim veya anlık hız) türev fonksiyonunun aldığı her değerin tanımlanmasında kullanılır. Türev fonksiyonu süreç anlamında sonsuz sayıda nokta için, her birini bir değere karşılık getiren bir kural olarak ortaya çıkmaktadır. Türev fonksiyonu, diğer fonksiyonların olduğu gibi statik bir nesne anlamında da görülebilir. Bu üç süreç-nesne aşaması türev kavramının her bir gösterimsel alan içerisinde ortaya çıkmasında bir biri ardına rol almaktadır. Zandieh sembolik gösterimsel alanda bu silsileyi şu şekilde açıklamaktadır. İlk aşama olan oran, sembolik gösterimsel alanda aşağıda ifade edilen sembolik bölüm olarak belirmektedir:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{veya} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Bu bölüm süreç ya da nesne anlamında algılanabilir ve bir nesne olarak ikinci aşamada yer alan limit süreci tarafından kullanılır:

$$f'(x_0)=\lim_{x->x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Üçüncü aşama olan türev fonksiyonu aşamasına geçişin gerçekleşebilmesi için bu limit sürecinin bütünleştirilmesi gerekmektedir. Diğer bir ifade ile türev fonksiyonunun tanım kümesi içerisinde yer alan her değer için bu limit süreci bir nesne ortaya çıkarmalıdır:

$$f'(x)=\lim_{h->0}\frac{f(x+h)-f(x\ )}{h}$$

Bu son yazılan ifade bu tanım kümesi içerisinde yer alan sonsuz sayıda değere uygulanabilir olduğu fark edilmelidir. İkinci aşamanın nesnesi olan, bir noktada türev, ile üçüncü aşamanın nesnesi olan türev fonksiyonu kavramsal olarak farklı şeylerdir. Zandieh bu iki durumun sembolik gösterimleri arasındaki farkın belirgin olmadığından ötürü birçok öğrencinin bu ayrımı fark edemediği sonucuna ulaşmıştır.

Fless (1988), yaptığı doktora çalışmasında üniversite düzeyinde gerçekleşen analiz öğretimi sonucunda öğrencilerin türev ve limit kavramına yönelik geliştirdikleri anlamaları incelemiştir. Araştırmacı öğrencilerin geliştirdikleri anlamaları seviyelendirmek için 5 düzeyden oluşan bir çatı geliştirmiştir. Bu çatıyı oluşturmada araştırmacı van Hiele geometrik düşünme düzeylerinden, araştırmasının pilot uygulamasında ortaya çıkan bulgulardan ve matematiksel kavramların tarih sürecinde geçirdiği aşamalardan yararlandığını belirtmektedir. İleri sürdüğü beş düzeyin operasyonel tanımı şu şekildedir:

> Seviye 1. Öğrenciler analiz dersi kapsamındaki temel düzey işlemler olan fonksiyonların integralini, türevini ve limitini bulabilir. Bu seviyenin doğasında, davranışların algoritmik kural temelli olması bulunmaktadır. Bu seviyedeki öğrenciler

bahsedilen işlemlerin altında yatan kavramlara yönelik bir anlamaya sahip olmamakla birlikte, problem durumlarında bu kavramlardan hangisini kullanacaklarını belirleyememektedir. Özetle öğrenciler analiz kavramlarına ilişkin sezgisel anlamadan mahrumdur.

Seviye 2. Bu seviyede olan öğrenciler analiz kavramlarına ilişkin sezgisel bir anlamaya sahiptir ki bu anlayış, öğrencilere bu kavramların anlamlarını açıklamayı ve problemlerde kullanmayı olanaklı hale getirmektedir. Örneğin öğrenciler türevi bir fonksiyonun grafiğine çizilen teğetin eğimi olarak görebilmekte veya belirli integralin bir eğrinin altında kalan alanı verdiğini bilmektedirler. Bu seviyede olan öğrencilerin performansları formel tanımlara ilişkin bir anlama gerektirmeyen problemlere çözüm getirebilme ile karakterize edilir. Örneğin bu seviyede yer alan bir öğrenci bir eğriye bir noktadan çizilen teğetin eğimini, en azından belli bir doğruluk derecesine kadar, git gide teğete yaklaşan kesen doğrularının eğimlerini hesaplayarak belirleyebilir. Benzer olarak bir eğrinin altında kalan alanı, yaklaşım dikdörtgenlerinin alanlarını toplayarak belli bir doğruluk derecesine kadar hesaplayabilir. İkinci düzey seviyesinde anlamaya sahip olan öğrenciler analiz kavramlarının formel tanımlarına ilişkin bir anlamaya sahip değildir. Öğrenciler matematiksel terminolojiyi ve notasyonu anlamada ve kullanmada sıkıntı yaşamaktadırlar.

Seviye 3. Bu düzey 2. ve 4. Seviyeler arası geçiş aşamasıdır. Öğrenciler formel tanımları anlarlar ve anlamlı şekilde matematiksel notasyonu ve terminolojiyi kullanabilirler. Böylece öğrenciler limitin, türevin ve integralin tanımlarını tam olarak belirtmenin yanı sıra, bu kavramların grafiksel temsillerini oluşturabilmektedirler. Formel tanıma ilişkin matematiksel notasyonu ve terminolojiyi içeren bir koşul verildiğinde, öğrenci bu koşulun formel tanıma nazaran daha güçlü veya zayıf olduğuna karar verebilir. Her ne kadar öğrenci verilen bir önermeyi ispat etmek için tanımın neyi gerektirdiğini ifade edebilse de, genelde formel ispatları anlayamamakta ve inşa edememektedir.

Seviye 4. Bu düzeyde olan öğrenciler analizin farklı kavramlarını içeren ispatları anlayabilmekte ve inşa edebilmektedirler. Öncesinde yalnızca sezgisel olarak anlaşılan sonuçlar artık kesin olarak ispatlanabilir. Bu düzeydeki öğrenciler analiz kavramlarını ve bunların sonuçlarını daha soyut bir bağlamda, örneğin metrik ve topolojik uzaylar, çalışmaya hazır haldedir.

Seviye 5. Bu seviye analiz konularını soyut bir ortamda çalışabilme yeteneği ile tarif edilir. Örneğin "gerçel değer alan fonksiyonların kompakt bir metrik uzayda maksimum ve minimum değerlerini aldığı" ya da "bir Hausdorff uzayında limitlerin yalnız tek değer aldığı" durumları temel düzeydeki analiz dersinde ortaya çıkan sonuçların birer genellenmesidir. Bu seviyede bir anlama giriş seviyesindeki analiz derslerinde oluşmamakla birlikte daha ileri düzeylerde ele alınan analiz konuları için gereklidir.

Araştırmacının ortaya koyduğu seviyelerdeki davranışlardan anlaşılacağı üzere, burada yer alan seviyeler ile van Hiele geometrik düşünme seviyeleri arasında büyük paralellik bulunmaktadır. Araştırmacı ortaya koyduğu bu beş seviyenin doğasını sırasıyla sayısal, sezgisel, geçiş, kesin ve soyut olarak belirtmiştir. Ortaya konan bu seviyelerin bir hiyerarşi oluşturup oluşturmadığını belirlemek için öğrencilerden elde edilen veriler üzerinde Guttman scalogram analizi gerçekleştirmiş ve seviyelerin hiyerarşik olduğunu belirtmiştir. Araştırmanın sonuçlarında çalışmaya dâhil olan öğrencilerin çok küçük bir bölümünün her iki kavramda da 3. ve 4. seviyelerde anlama sergiledikleri belirtilmiştir.

Asiala ve diğ. (1997), üniversitede öğrenim görmekte olan 41 öğrenci üzerinde yaptıkları çalışmada, öğrencilerin bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevine ilişkin grafiksel anlamalarını incelemişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarının doğasını inceleme amacıyla APOS teorisini kullanmışlar ve teorinin bu amaca hizmet eder nitelikte ve yeterlilikte olduğunu iddia etmektedirler. Araştırmacılar yaptıkları çalışmada, üniversite müfredatında yer alan matematiğin nasıl öğrenildiği konulu çalışmalarda kullanma amacıyla mensup oldukları topluluk olan RUMEC tarafından geliştirilen araştırma yöntemini kullanmışlardır. RUMEC tarafından benimsenen araştırma metodolojisi üç ana bileşenden oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla teorik analiz, öğretim uygulamaları ve gözlem-değerlendirmedir. Bu üç ana bileşenden ilki olan teorik analizin amacı, çalışılacak kavramın genetik ayrışımını ya da bu kavrama yönelik bilişin bir modelini ortaya koymaktır. Daha açık bir ifadeyle, bireyin belirli bir kavrama yönelik anlam geliştirme sürecinde zihninde oluşması muhtemel yapıların betimlenmesidir. Bu zihinsel yapılar eylem, süreç, nesne ve şema olarak adlandırılmaktadır. Başlangıçta kavrama yönelik ortaya atılan genetik ayrışım araştırmacıların kavrama ilişkin anlamalarına ve hem öğrenen hem de öğretici rollerde yaşadıkları deneyimlerine dayanmaktadır. Araştırmacılar bu temelde ortaya attıkları genetik ayrışımı, gerçekleştirdikleri öğretim süreçleri sonucunda yaptıkları değerlendirmeler sonucunda revize etmişlerdir. Çalışmalarında ilk olarak şu iki sorunun teorik analizi üzerinde yoğunlaşmışlardır:

- Türev kavramını anlamak ne demektir?
- Bu anlama birey tarafından nasıl yapılandırılır?

Bu iki soru bağlamında yapılan analizlerin sonucunda araştırmacılar, türev kavramının bireyin zihninde nasıl gelişebileceğini açıklayan ve zihinsel yapılardan oluşan biçimlendirilmiş bir yol haritası ortaya atmışlardır. Araştırmanın sonunda yapılan mülakatlardan elde edilen veriler ışığında, bu yol haritasının gözden geçirilmiş halini ortaya koymuşlardır. Araştırmacılar ortaya koydukları bu haritaya kavramın genetik ayrışımı adını vermektedirler. Aşağıda araştırmacıların türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin ortaya koydukları genetik ayrışım verilmiştir.

1. Ön Bilgi

Araştırmacılar ilk olarak, bireyin türev kavramına ilişkin bir şema oluşturmadan evvel sahip olması gereken önbilgileri tanımlamışlardır.

A. Matematiksel nesnelerin grafiksel temsilleri.

i. Bir noktanın grafiksel temsili.

ii. Eğim kavramını içerecek şekilde bir doğrunun grafiksel temsili.

B. Noktaların grafiksel gösterimlerinin fonksiyon kavramı ile koordine edilmesi.

i. y, f(x) ile tanımlandığında (x,y) sıralı ikilisinin grafiksel yorumu.

ii. İstenen sonuca ulaşmada yalnız fonksiyonun grafiğinin yeterli olduğu durumlarda, fonksiyona ilişkin bir açık ifade ihtiyacı hissetmemek.

2. Türev Kavramına İlişkin Anlam Oluşturmada İzlenebilecek Grafiksel ve Analitik Yollar.

A1. Grafiksel: Bir eğri üzerindeki iki noktayı bir kiriş oluşturacak şekilde birleştirme ve bu iki noktadan geçen kesenin eğimini bu iki noktayı kullanarak bulma eylemi.

A2. Analitik: Bir noktanın civarında farkların bölümünü, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, kullanarak ortalama değişim oranını hesaplama eylemi.

B1. Grafiksel: A1 kısmında ifade edilen eylemlerin, bu iki nokta grafik üzerinde birbirine yaklaştıkça tek bir süreç olarak içselleştirilmesi.

B2. Analitik: A2 kısmında ifade edilen eylemin, eksenler üzerindeki uzunlukların değerleri sıfıra yaklaştıkça tek bir süreç olarak içselleştirilmesi.

C1. Grafiksel: B1 kısmında ifade edilen sürecin şu iki sonuca ulaştıracak şekilde sarmalanması.

- Teğet doğrusu aslında kesen doğrularının limit durumudur.
- Süreç, fonksiyon grafiğinin bir noktasındaki teğet doğrusunun eğimini vermektedir.

C2. Analitik: B2 kısmında ifade edilen sürecin, bir değişkenin başka bir değişkene bağlı olarak anlık değişim oranını ortaya çıkarak şekilde sarmalanması.

D. B1 ve B2 kısımlarında ifade edilen süreçlerin genel olarak, bir fonksiyonun bir noktasındaki türev tanımını o noktadaki farkların bölümü olarak ortaya çıkaracak şekilde içselleştirilmesi.

3.Türev Kavramının Grafiksel Yorumu.

A. Bir noktada türevin grafiksel yorumu

i. Bir cebirsel ifadenin türevini alma ihtiyacının üstesinden gelmek.

Fonksiyonun bir noktasında türev değerine ulaşmada fonksiyona ait grafiğin yeterli veri sunduğu problem durumlarında, eğer öğrenci türev değerini bulmak için türev alma kurallarını uygulayacağı fonksiyona ait bir cebirsel ifadeye gereksinim duyuyorsa, öğrenci türev kavramına ilişkin grafiksel boyutta eylem öncesi anlamaya sahiptir. Diğer bir ifade ile bir noktada türevin grafiksel yorumu hakkında bir anlama sergilemiyor demektir.

ii. $f'(a)$ değerini bir teğet doğrusunun eğimi olarak görmek.

Bir eylem olarak bir noktada teğet doğrusu belirlenir ve eğimi hesaplanır. Bu eylemin gerçekleşmesi için en az iki yol mevcuttur. Öğrencinin ezberleyerek oluşturduğu bir kuralı vardır: bir fonksiyonun bir noktadaki türevi, fonksiyon grafiğine o noktadan çizilen teğetin eğimini verir. Bundan daha zengin bir yapılandırma A1-C1 arasında tarif edilen şekilde kirişlerin limit durumunun teğeti verdiği olarak gerçekleşebilir. Bu eylemden öğrenci türev fonksiyonu sürecini inşa edecektir. Öğrenci bir aralık içerisinde tek bir noktaya odaklanıp türev değerini o noktadaki teğet denklemi ile ilişkilendirdiğinde eylem seviyesinde anlama sergilemektedir.

iii. $f'(a)$ ifadesinin farklı yorumlarını koordine etmek.

Öğrenci farkların bölümünün, ortalama hızın, marjinal maliyetin limit değeri gibi yorumları bir araya getirir ve bu farklı yorumlar arasında geçişler yapabilir.

B. Türevin bir fonksiyon olarak grafiksel yorumu.

i. Türevi bir x değerini (x,f(x)) noktasındaki teğetin eğim değerine karşılık getiren bir fonksiyon olarak görmek.

Grafiksel anlamda bu türev kavramının süreç seviyesinde anlaşılmasıdır. Diğer bir ifadeyle bir fonksiyonun türevinin de bir fonksiyon olduğunun fark edilmesidir.

ii. Türev fonksiyonunu, fonksiyon grafiğine çizilen teğetler ile tanımak.

Bu aşamada öğrenci bir fonksiyonun türev fonksiyonunu, fonksiyon grafiğine çizilen teğetler vasıtasıyla oluşturabilir. Türev fonksiyonuna ilişkin muhakeme yapmada grafiksel durumun yeterli veri sunduğu problem durumlarında, türev fonksiyonuna ilişkin cebirsel bir ifade bulma ihtiyacı hissetmez. Örneğin türev fonskiyonunun belirli bir aralıkta artan veya azalan olduğunu fonksiyonun grafiği üzerinde oluşturduğu teğetlerden yola çıkarak yorumlayabilir.

4. Türev Kavramını Uygulamaya Koymak.

Bu kısım öğrencinin bir fonksiyonun grafiğine ilişkin zihinsel şemasını, bir fonksiyon ile ona ait türev fonksiyonu arasındaki ilişkileri dikkate alarak genişlettiği bölümdür. Öğrenci türev kavramını oluştururken gerçekleştirdiği süreçleri tersleme yoluyla bir fonksiyonun grafiğini elde edebilir. Bu tersleme türevin grafiksel yorumuna ilişkin süreç seviyesinde bir anlamaya işaret eder ki bu anlama nesne seviyesinde bir anlamanın açılmasından ileri gelebilir.

A. Bir fonksiyonun grafiğini elde etmek için bir takım düzenlemeleri gerçekleştirme

i. Tek bir x değeri için f(x) ifadesinin grafiksel yorumu.

ii. Tek bir x değeri için f'(x) ifadesinin eğim olarak yorumu.

iii. x değerini bir aralık boyunca hareket ettirme süreci.

a. Fonksiyonun monotonluk durumu ve türev işareti arasındaki ilişki.

b. Sonsuz eğim (dikey teğet) ve sonsuz türev değeri.

c. Fonksiyonun konkavlık durumu ve ikinci türev işareti arasındaki ilişki.

iv. Fonksiyonu tam olarak resmeden grafiği çizmek.

2. 2. Literatür Taramasının Sonucu

Teğet kavramını anlamaya ilişkin literatür taraması kısmında referans verilen araştırma raporlarının ortaya koyduğu sonuç, öğrencilerin teğet kavramını ilk olarak Euclid geometrisi bağlamında ele alıyor olmasının, teğet kavramını analiz dersi bağlamında daha genel olarak eğrilere genellemelerini zorlaştırdığıdır. Başka bir ifadeyle, öğrenciler teğet kavramına ilişkin sahip oldukları kavram imgelerini analiz bağlamında formel teori ile tutarlı olacak şekilde genelleyememektedir. Dolayısıyla öğrencilerin bu süreçte yaşadıkları sıkıntı matematiksel bir kavramı genelleme sorunudur. Daha da vahim olan, bu durumun hizmette olan öğretmenlerde de görülmesidir. Çalışmalarda rapor edilen kavram yanılgılarının nedeni, Euclid geometrisinden Analiz bağlamına gereken genellemenin gerçekleştirilememesi ve bunun sonucunda Euclid geometrisi bağlamında teğet kavramına atfedilen geçersiz özelliklerdir. Literatürde bu durumun sonucu olarak ortaya çıkan kavram yanılgıları şunlardır:

- Teğet doğrusu grafiği birden fazla noktada kesemez.
- Büküm noktalarında grafiğe teğet çizilemez.

- Teğet doğrusu çizildiği eğriyi tek bir yarı düzleme hapsetmesi gerekir.
- Bir eğriye çizilen bir doğrunun eğri ile tek bir ortak noktasının olması ve bir önceki koşulu sağlaması, doğrunun eğriye teğet olması için yeterli koşuldur.

Kavrama atfedilen bu geçersiz özelliklerin, geleneksel olarak gerçekleştirilen analiz öğretimi sonucunda öğrencilerin kavram imgelerine hükmetmesi, yapılan öğretimin bu genelleme sürecini gerçekleştirmede istenen düzeyde etkili olmadığı sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Bu durumu farkeden Tall (1987), teğet kavramının öğretiminde yerel doğrusallık olarak isimlendirdiği yöntemi kullanmıştır. Bu yöntemin dayanağı, bir noktada diferansiyellenebilir bir eğriye bilgisayar ortamında yeterince yaklaşıldığında, eğrinin doğrusal bir hal alacağı gerçeğidir. Çalışmamızda Tall (1987)'un ortaya koyduğu bu yaklaşım üç gerekçeden ötürü benimsenmemiştir. İlk olarak, bu yaklaşım matematiksel bir temele değil teknolojinin ya da kullanılan programın acizliğine dayanmaktadır. Çünkü matematiksel olarak bir noktada türevlenebilir olan bir eğriye o noktada ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım, eğer eğri bir doğru değilse, hiç bir zaman doğrusal bir hal almaz. İkinci gerekçe ise, bu yaklaşımın kullanılması sonucunda öğrencilerde Thurston (1994)'un makalesinde belirtilen durumun ortaya çıkma riskidir. Diğer bir ifadeyle öğrencilerin bu yöntemin sonunda türev olarak çizilen teğet doğrusunun eğimini değil de, teğet doğrusunun bizzat kendisini kabullenme olasılığıdır. Son gerekçemiz ise yapılan öğretimin amacına dayanmaktadır. İleri matematik eğitimi bağlamında ister bilgisayar destekli ister farklı bir formda hazırlanan öğrenme ortamı, hiç kuşkusuz, öğrencilerin formel bilgiye ulaşmalarını kolaylaştırıcı rol oynamalı ve kavramlara ilişkin sezgisel bir anlama kazandırma amacı taşımalıdır. Yerel doğrusallık yöntemi ile gerçekleştirilen öğretimin, öğrencilerin türev kavramının formel tanımına yönelik anlam oluşturma sürecine nasıl yardım edeceği veya nasıl bir geçiş sağlayacağı muğlaktır. Daha açık olarak teğetin fonksiyon grafiğine çizilen kesen doğrularının limiti olduğuna yöneltecek bir süreç değildir. Dolayısıyla bu çalışma bağlamında hazırlanan öğretim sürecinde ilk olarak öğrencilerin, Euclid bağlamında yer alan teğet tanımının tüm eğrilere genellemede yetersizliğini farketmesi ve bunun sonucunda yeni bir tanım ortaya koyma ihtiyacı hissettmesi, devamında kesen doğruları ile kavramın limit ifadesini keşfetmeleri amaçlanmıştır.

Yapılan çalışmalar öğrencilerin türevin limit formunda gösteriminin gafiksel karşılığını yorumlayamadıklarını ortaya koymaktadır. Literatürde türev kavramının formel tanımına (ε-δ) yönelik öğrencilerin anlamalarına odaklanan kapsamlı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Buna karşın fonksiyonlarda limit kavramının formel tanımına odaklanan bir çok çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu araştırmaların hemfikir oldukları nokta ise, limit kavramının formel tanımının öğrenciler tarafından anlaşılmasının zor bir süreç olduğudur. Öğrencilerin formel tanıma ilişkin anlam oluşturmada sıkıntı yaşaması esasında doğal bir durumdur. Çünkü öğrenciler daha önceki matematiksel deneyimlerinden farklı olarak ilk kez bir matematiksel tanım içerisinde niceleyicilerin, değişkenlerin ve bunlara bağlı birbiriyle ilişkili eşitsizliklerin bulunduğu karmaşık bir matematiksel notasyon ile karşılaşmaktadırlar. Tanımın bu denli yoğun ve anlaşılmasının güç olması bazı eğitimcileri, limit kavramının öğretiminde formel tanıma daha az vurgu yaparak informel bir yaklaşım sergileme eğilimine yöneltmiştir (Fernandez, 2004; Gass, 1992). Bu ise öğrencilerde limit kavramının bir değer bulma işlemi olduğu anlayışının oluşmasına sebep olmuştur. Bu yönelimin aksine, bazı eğitimciler limit kavramının formel tanımını soyut düşünmeye geçişte, formel ve kesin matematiksel ifadelere yönelik anlam çıkarmada ve formel ispat tekniklerini kullanmada bir başlangıç noktası olarak görmektedirler (Ervynck, 1981; Swinyard ve Lockwood, 2007). İlk yaklaşımın ortaöğretim seviyesinde benimsenmesi makul olabilir. Fakat ileri matematik eğitiminin amaçlarından biri, öğrencilere formel matematiksel düşünme yeteneği ve bu yeteneğin ürünü olan formel ispat yapabilme becerisi kazandırmaktır. Limit kavramının formel ve kesin matematiksel ifadelere yönelik anlam çıkarmada ve formel ispat tekniklerini kullanmada başlangıç noktası olduğu görüşü benimsendiğinde, ifade ettiğimiz amaca ulaşmada öğrencilerin kavramın formel tanımına yönelik yeterli bir anlama gerçekleştirmeleri beklenmektedir. Fakat istenen durumun geleneksel öğretim süreçleri sonucunda gerçekleşmediği yapılan araştırmaların sonuçlarından anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrencilere bu süreçte yardım edecek ve formel teori ile tutarlı daha iyi anlamalar geliştirmelerine olanak sağlayacak öğrenme ortamları tasarlanması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Araştırmalarda ortaya çıkan bir başka durum ise, öğrencilerin sembolik türev almada başarı gösterirken, kavrama ilişkin uygulama ve grafiksel yorum yapmaları gereken durumlarda başarısız olmalarıdır. Öğrencilerin grafiksel muhakeme yapmada başarısızlığının bir sebebi olarak öğretim süreçlerinde sunulan grafiksel örneklerin statik yapıda olması, dolayısıyla bu durumun öğrencilerin zihinlerinde geçersiz zihin imgeleri oluşturması gösterilmektedir. Bu sonuçtan hareketle öğrencilere öğretim süreçlerinde sunulan grafiksel temsillerin dinamik yapıda sunulması ve öğrencilere bu yapılar üzerinde eylemler gerçekleştirebilme fırsatı tanınması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Araştırmalar öğrencilerin türev kavramının grafiksel ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkiyi kuramadıklarını rapor etmektedir. Bu ise öğrencilerin bir fonksiyonun grafiği ya da fonksiyonun türev fonksiyonu verildiğinde birini diğerinden çıkarsayamamalarına, türevi fonksiyon olarak anlayamamasına, değişim oranı ile anlık değişim oranı kavramları arasındaki farkın ve anlık değişim oranı ile türev arasındaki ilişkiyi kuramamasına, bir fonksiyonun türevi ile grafiğinin konveks-konkav, artan-azalan karakteristikleri arasındaki ilişkiyi oluşturamamasına sebep olmaktadır.

Türev kavramına ilişkin içeriğin öğrenilmesine etki eden ön bilgileri belirlemek amacıyla yürütülen çalışmaların sonuçları dikkate alındığında, öğrencilerin türev kavramına yönelik anlamalarının, fonksiyon ve oran kavramlarına ilişkin sahip oldukları ön bilgilerine bağlı olduğu görülmektedir. Bu sonuçtan hareketle, bu araştırmada mülakat öğrencilerini seçmek için kullanılan ve araştırmacı tarafından hazırlanan Yordama Testi içerisindeki sorular yukarıda ifade edilen ilişkiler dikkate alınarak oluşturulmuştur.

Yapılan araştırmalardan türev kavramının öğretiminde teknoloji kullanımının BCS ve GHM olarak iki formda gerçekleştiği görülmektedir. Araştırmaların ortak sonucu, derslerde BCS veya GHM kullanımının öğrenciler işlemler yerine kavramlara odaklanma fırsatı sunduğudur. Bunun yanında gerek BCS gerekse GHM fonksiyonların grafiklerini eksiksiz ve doğru bir şekilde oluşturabilmesi, öğrencilere grafiksel boyutta anlam oluşturmada olumlu katkı sunmaktadır. Öğretimde GHM'den faydalanan araştırmaların sonuçlarında, öğrencilerin türevin geometrik boyutuna ilişkin anlam oluşturmada yetersiz kaldıkları görülmektedir. Buradan hareketle öğretimde GHM kullanımının, öğrencilerin türevin geometrik boyutuna ilişkin anlam oluşturmada istenen düzeyde yardım etmediği sonucuna ulaşılabilir. Bunun bir sebebi GHM'lerin kavramların görsel temsillerini oluşturmada veya bu temsiller üzerinde eylem yapmaya bilgisayar yazılımları kadar olanak vermemesi olabilir. Ellison'un araştırmasında GHM'nin yanı sıra analiz kavramlarının grafiksel gösterimleri için tasarlanmış farklı bir yazılımı kullanması ulaştığımız bu sonucu destekler niteliktedir.

Bazı BCS yazılımları kendine has programlama dili barındırmaktadır. Bu türden yazılımların etkili kullanılabilmesi için öncelikle yazılıma has olan programlama dilinin öğrenilmesi gerekmektedir. Bu tür yazılımların kullanımında öğrencilere programlama yaptırmanın ek bir bilişsel yük getirdiği ve bu durumun öğrenmeyi olumsuz etkilediği anlaşılmaktadır. Yapılan araştırmalar incelendiğinde, türev kavramının geometrik boyutunda yer alan tüm öğeleri kapsayacak şekilde kapsamlı bir çalışmanın yapılmadığı, bundan ziyade belirli noktalara (ör. bir fonksiyonun grafiği ile türevi arasındaki ilişki, maksimum ve minimum noktalar ile türev arasındaki ilişki) odaklanıldığı görülmektedir.

Yapılan literatür taramasının sonucunda, öğrencilerin türev kavramına ilişkin anlamalarını incelemek için farklı araştırmacılar tarafından ileri sürülen dört kavramsal çatı olduğu belirlenmiştir. İleri sürülen bu dört teorik çatıdan üçünün temelde aynı fikir üzerine odaklandığı görülmektedir. Delos Santos ve Thomas (2003), Zandieh (2000) ve Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan teorik çatılar kavramların veya işlemlerin anlaşılmasında bireylerin eylem-süreç-nesne silsilesinden geçtiğini kabul eden yaklaşımı benimsemektedir. Bu üç yaklaşım bu seviyeleri farklı olarak isimlendirmektedir. Tablo 3'de üç yaklaşımda yer alan aynı seviyeler gösterilmiştir.

Tablo 3. Farklı yaklaşımlarda kullanılan terminolojiler arasındaki ilişki

Delos Santos ve Thomas (2007)	Zandieh (2000)	Asiala ve diğerleri (1997)
Yöntem Merkezli Anlama	Operasyon	Eylem
Süreç Merkezli Anlama	Süreç	Süreç
Nesne Merkezli Anlama	Nesne	Nesne

Bununla birlikte Delos Santos ve Thomas (2003) ile Zandieh (2000) tarafından ortaya konan çatılar kavramın farklı temsilleri üzerine temellendirilmiştir. Delos Santos ve Thomas (2003) tarafından ortaya konan çatının son iki seviyesi bu temsiller arasındaki ilişkilere yönelik yeterlilikleri içermektedir. Bu her iki çatıda da grafiksel boyutta öne sürülen anlama seviyelerine ilişkin yeterli miktarda öğrenci davranışlarına yönelik örnekler bulunmamaktadır. Bununla birlikte bu seviyeler arası geçişin nasıl gerçekleştiğine dair bir yol haritası da mevcut değildir.

Yapılacak olan araştırmada öğrencilerin türev kavramının grafiksel boyutuna ilişkin anlamalarını incelemek amaçlanmaktadır. Asiala ve diğ. (1997) tarafından öne sürülen teorik çatının türev kavramının grafiksel boyutuna özgün olması ve anlama seviyeleri arasındaki geçişlere yönelik yol haritası sunması yapılacak bu araştırmada kullanmasına bir etken olmuştur. Fless (1988) tarafından ortaya konan teorik çatı van Hiele geometrik düşünme düzeyleri üzerine kurulmuştur. Öğrenci seviyeler boyunca ilerledikçe matematiksel kavramlara ve işlemlere yönelik anlayışı daha formel hale gelmektedir. Fless (1988) tarafından ortaya konan çatıda da türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin öğrencilerin anlamalarının göstergeleri Asiala ve diğ.(1997) tarafından ortaya konan çatıda olduğu gibi detaylı olarak bulunmamaktadır. Az önce belirttiğimiz gerekçeden ötürü bu çalışmada Asiala ve diğ. (1997) tarafından öne sürülen çatı işlevsellik açısından Fless (1988) tarafından ortaya konan çatıya nazaran daha ön planda durmaktadır. Bunların yanı sıra Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan çatının dayandığı APOS teorisinin hem bu çalışmanın odağı olan türev kavramını (Asiala ve diğ., 1997; Krouse , 2000) hem de farklı kavramları odak alan çalışmalarda kullanılmış olması (Breindenbach, Dubinsky, Hawks ve Nichols, 1992; Cottrill ve diğ., 1996) araştırmacıya teorinin uygulamada nasıl kullanıldığını açıklayan somut örnekler vermektedir. Bu durum yapılacak çalışmada öğrencilerin anlamalarını açıklamak için APOS teorisinin tercih edilmesinde bir diğer etken olmuştur.

3. YÖNTEM

Tezin bu bölümünde araştırmanın tasarımı, araştırmanın yürütülmesinde benimsenen yöntem, veri toplama araçları ve verilerin analizinde izlenen adımlar açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Tasarımı

Bu araştırmada, bir DMY olan GeoGebra kullanılarak gerçekleştirilen öğretimin öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerindeki etkisinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda deney ve kontrol grubu olarak seçilen iki sınıftan birinde herhangi bir yazılım kullanmadan geleneksel öğretim yöntemi, diğerinde ise GeoGebra kullanılarak bilgisayar destekli öğretim gerçekleştirildi. Uygulama sonunda iki grupta yer alan öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamaları kıyaslanmıştır. Yukarıda ifade edilen etkiyi belirlemek için oluşturulan öğrenme ortamlarının tasarlanmasında asıl çalışmaya kadar geçirilen aşamalar şu şekildedir:

- Literatür incelenerek öğrencilerin türev kavramını anlamada sıkıntı yaşadıkları noktalar belirlendi. Böylece çalışma kapsamında odaklanılacak noktalar üzerinde karar verildi.
- Türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin formel bilgi yerli ve yabancı kitaplar, literatürde yer alan araştırma raporları ve uzman görüşleri dikkate alınarak belirlendi. Bununla birlikte bu bilgilerin kitaplardaki sunuş sırası ve sunuş biçimi incelenerek, araştırma kapsamında gerçekleştirilecek öğretim sürecinde konuların kronolojik sırası ve içeriği belirlendi.
- Literatürde matematiksel öğrenmeye ilişkin mevcut olan teoriler incelenerek, çalışma kapsamında öğrencilerinin anlamalarını değerlendirmede hangisinin kullanılacağına karar verildi.
- Türev kavramının geometrik boyutu içerisinde yer alan konulara ilişkin öğrencilerin anlamalarını inceleyen araştırma raporlarının bu hususta kullandıkları veri toplama araçları incelenerek ve uzman görüşleri doğrultusunda çalışmada kullanılan testler geliştirildi. Bunun yanı sıra testlerin geliştirilmesinde, öğrencilerin anlamalarını karakterize etmek için kullanılan teorilerin içerisinde ifade edilen davranışlar da dikkate alındı.
- Deney ve kontrol grubunda yürütülecek olan öğretime ilişkin ders planları yapılarak, deney grubunda kullanılmak üzere bilgisayar destekli öğretime uygun çalışma yaprakları tasarlandı.

- Oluşturulan çalışma yaprakları ve testler pilot çalışma sürecinde uygulanarak eksik yönleri belirlendi.

3.1.1. Çalışma Yapraklarının Tasarlanması

Çalışmada deney grubunda yer alan öğrencilere yönelik gerçekleştirilen öğretim bilgisayar destekli olarak yürütülmüştür. Öğrencilerin bilgisayar destekli ortamda türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlam oluşturma sürecine rehberlik etmek için, bilgisayar ortamında gerçekleştirmeleri gereken eylemler çalışma yaprakları içerisine gömülmüştür. Çalışma yapraklarının oluşturulmasında araştırmacıya Baki (2002) tarafından ortaya konan ilkeler esin kaynağı olmuştur. Çalışma yapraklarının oluşumunda rehber edinilen bu ilkeler şunlardır:

1. Bilgi doğrudan aktarılamaz, bizzat birey tarafından kurulur. O halde çalışma yaprakları hazır bilgiyi doğrudan öğrencilere aktaran nitelikte olmamalıdır.
2. Öğrenmenin ön koşullarından biri de meraktır. Bu nedenle öğretilmesi istenen özellikler, ilişkiler, kavramlar, olgular ilgi çekici bir yaklaşımla, sistemli ve planlı bir şekilde etkinliklerin içerisine gizlenmelidir.
3. Öğrenilmesi istenilen özellikler, kavramlar, olgular, araştırmaya ve keşfetmeye yönelik açık uçlu sorular yardımıyla etkinliklerin içerisine gizlenmelidir.
4. Etkinliklerin senaryoları bireysel ve grup çalışmaları göz önüne alınarak hazırlanmalıdır. Etkinlikler öğrenciye aşağıdaki bilişsel süreçleri sağlamalıdır.
   a. Matematiksel ifadeleri kullanma.
   b. Mantıksal çıkarımlarda bulunma.
   c. Matematiksel sembolleri kullanma ve soyutlama.
5. Çalışma yapraklarının tasarımı öğrencinin en az düzeyde yardıma ihtiyaç duyacak şekilde tasarlanmalıdır. Öğretmen uygulama sırasında öğrencilerin sorularını cevaplamada, doğru veya yanlış hüküm verici bir tavır içinde olmamalıdır.
6. Etkinliklerdeki olgular, çözümler, varsayımlar, genelleştirmeler önce grup tartışması sonrasında sınıf tartışması yoluyla sorgulanmaya uygun olmalıdır.

Bu ilkelere bağlı olarak bilgisayar destekli öğretime uygun tasarlanmış öğrenci çalışma yapraklarının son şekli pilot çalışmadan sonra verildi (Bkz. Ek 7).

3.1.2. Pilot Uygulama ve Asıl Araştırma İçin Yapılan Çalışmalar

Araştırmanın pilot çalışması 2010-2011 öğretim yılı güz yarıyılında KTÜ İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında öğrenim gören ve Grafik Analiz dersini alan 2. sınıf öğrencileriyle yürütüldü. Pilot çalışmanın öncesinde katılımcılara GoeGebra yazılımının kullanımına ilişkin teknik bilgileri içeren dört saatlik bir program uygulandı. Pilot çalışmanın araştırmanın asıl uygulamasına çeşitli yönlerden etkileri oldu. Bu etkiler şu şekildedir:

- Pilot çalışmada hazırlanan çalışma yapraklarının işlevselliği test edildi. Öğrencilerin çalışma yapraklarında yer alan yönergeleri anlamada yaşadıkları sıkıntılar belirlenip düzeltmeler yapılarak asıl çalışmada kullanıma hazır hale getirildi.
- Pilot çalışma sonucunda hazırlanan testler içerisinde yer alan soruların işlevselliği test edildi. Soruların ifade edilmesinde veya içeriğinde öğrencilerin anlamada zorlandıkları noktalar belirlenip düzeltilerek asıl çalışmada kullanıma hazır hale getirildi.
- Pilot çalışmada gerçekleşen öğretim sürecinde, hazırlanan çalışma yaprakları içerisindeki yer alan yapıların öğrenciler tarafından program içerisinde oluşturmaları istenmişti. Fakat yaşanan deneyimler sonucunda bu durumun oldukça zaman aldığı ve öğrencilerin yapıları oluşturmada yaşadıkları sıkıntılar ve zahmet sonucunda, çalışma yapraklarını tamamlamada isteksizleştirdiği gözlemlendi. Bunun sonucu olarak asıl çalışmada çalışma yaprakları içerisinde yer alan yapılar önceden araştırmacı tarafından oluşturularak, öğrencilere dersin başlangıcında sadece çalışma yapraklarında yer alan adımları icra etmede gereken teknik bilgiler kısa süreli bir sunumla tanıtıldı. Böylece öğrencilerin programın nasıl kullanılacağına değil, program vasıtasıyla çalışma yaprakları içerisinde yer alan matematiksel bilgiye odaklanmaları amaçlandı.
- Pilot çalışmada Noktasal Bağlamda Türev Testi (NBTT) , Türev Formel Tanım Testi (TFTT), Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-I (FBTT-I), Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-II (FBTT-II) testleri araştırmanın başında ve sonunda olmak üzere iki sefer uygulandı. Fakat araştırmanın başında öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin bilgilerinin çok sınırlı düzeyde olduğu ve bunun sonucu olarak tüm testlerin büyük bölümüne cevap veremedikleri görüldü. Bu durumun öğrencilerin derse karşı tutumlarını olumsuz etkilediği öğrenciler ile yapılan informel görüşmeler vasıtasıyla farkedildi. Sonuç olarak asıl çalışmada testlerin ön test olarak uygulanmasından vazgeçilerek bunun yerine, öğrencilerin çalışmanın sonunda testlerden aldıkları puanları kıyaslamada literatür taraması sonucu oluşturulan Yordama Testi (YT) puanları ortak değişken olarak alınarak kovaryans analizi kullanıldı.
- Pilot çalışmada öğrencilerin APOS teorisinde belirtilen anlama seviyelerine atanması testlerde yer alan sorulara verdikleri cevaplardan hareket ederek gerçekleştirilmeye çalışıldı. Lâkin bu durumun işlevsel ve güvenilir bir yöntem olmadığı görüldü. Çünkü öğrencilerin sadece kağıt üzerinde yaptıkları işlemler ve verdikleri cevaplar, problemleri çözme sürecinde kullandıkları zihinsel süreçleri tasvir etmede yetersizdi. Bunun yanı sıra pilot çalışma sonrasında bu duruma ilişkin yapılan literatür taramasında benzer sonucun LeVeque (2003) tarafından deneyimlendiğinin görülmesi

üzerine asıl çalışmada öğrencilerin anlama seviyelerinin belirlenmesinde klinik mülakat yönteminin kullanılması benimsendi. Gerçekleştirilen mülakatlar vasıtasıyla öğrencilerin genetik ayrışım içerisinde ifade edilen kazanımlara ulaşıp ulaşmadıklarını belirlemek amaçlandı.

3.2. Araştırmanın Yöntemi

Çalışmada araştırma sorularının doğasına bağlı olarak nicel ve nitel yöntemler birlikte kullanılmıştır. Araştırmacı deney ve kontrol grubu olarak belirlediği sınıflara katılımcıları rasgele olarak atayamamıştır. Bu durum eğitim alanında yapılan araştırmalarda sıklıkla ortaya çıkmaktadır. Bunun sonucunda araştırmada deney ve kontrol grubu olarak belirlenecek sınıflar rasgele olarak seçilmektedir. Bu durumda araştırmacıların benimsediği tasarım yarı-deneysel veya denk olmayan gruplar tasarımı olarak isimlendirilmektedir (Cohen, Manion ve Morrison, 2005). Bu tasarımda katılımcılar denk gruplar oluşturacak şekilde atanamadığından, araştırmacı grupların kıyaslanabilir veya birbirine denk olduğundan emin olamamaktadır. Bu sebepten araştırma çerçevesinde elde edilen verilerden çıkarılan sonuçların daha manidar olması için, bağımlı değişkene etki ettiği bilinen değişkenler ortak değişken adı altında verilerin analizine dâhil edilmektedir.

Çalışmada, yapılan literatür taraması sonucunda türev kavramının öğrenimine etki ettiği rapor edilen ön bilgiler doğrultusunda hazırlanan YT ile grupların çalışmanın başında sahip oldukları farklılıklar kontrol altına alınmaya çalışılmıştır. Bunun neticesinde, elde edilen verilerin analizinden ortaya çıkan sonuçların daha anlamlı olması amaçlanmıştır.

3.3. Araştırma Grubu

Bu çalışmada öğretim sürecinde DMY kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisini incelemek amaçlanmıştır. Hiç kuşkusuz, bu amaçla yürütülen bir araştırmanın sonucunda belirlenen etki seçilen örnekleme bağlı bulunmaktadır. Bu çalışma bağlamında düşünüldüğünde, araştırma sonucunda ortaya konacak etkiye tesir edebilecek en muhtemel durum, öğrencilerin türev kavramına yönelik sahip olduğu ön bilgilerdir. Dolayısıyla ön bilgileri ortaöğretim seviyesine dayanan ve üniversite düzeyinde türev kavramı ile ilk kez karşılaşan, matematik, ortaöğretim matematik öğretmenliği veya ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencileri bu araştırmanın örneklemi olarak seçilebilirdi. Araştırmacının görev yaptığı kurumun ilköğretim matematik öğretmenliği programında verilen dersler içerisinde, bu araştırmaya konu olan içeriğin sunulduğu Grafik Analiz isimli bir ders verilmekteydi. Bu durum örneklemin seçilmesinde en belirleyici etken olmuştur.

Çalışmanın örneklemini 2011-2012 öğretim yılı güz döneminde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında farklı iki sınıfta yer alan öğrenciler oluşturmaktadır. Öğrencilerin sınıflara rasgele atanması mümkün olmadığından, sınıflar deney ve kontrol grubu olarak rasgele atanmıştır. Çalışmada öğrencilerin YT'den elde ettikleri puanlar yapılan istatistiksel analizlerde ve mülakat öğrencilerinin seçiminde kullanıldığından, çalışmanın başında Yordama Testine katılamayan öğrenciler örneklemin dışında bırakıldı. Bunun yanı sıra dersi daha önce alıp başarısız olan ve tekrar alan öğrenciler de örneklemin dışında bırakıldı.

Örneklemin yer aldığı bölümün müfredatında türev kavramı ilk olarak 2. sınıfta sunulan Analiz-I dersi bağlamında ele alınmaktadır. Çalışmanın yürütüldüğü ders olan Grafik Analiz dersi, Analiz-I dersi ile aynı yarı dönem içerisinde verilmektedir. Çalışmada yer alan öğrencilere Analiz-I dersi bağlamında türev kavramına ilişkin öğretim, araştırma çerçevesinden yürütülen öğretimin son haftasında başladı. Dolayısıyla araştırma öncesinde katılımcılar türev kavramına ilişkin üniversite düzeyinde herhangi bir öğretim almamış, türev kavramına ilişkin bilgileri ortaöğretim seviyesinde kazandıkları ön bilgilerine dayanmaktaydı. Bununla birlikte araştırmanın başında mülakata seçilen öğrencilerden, derse devam etmeleri konusunda duyarlı olmaları istenmiş ve tüm mülakat öğrencileri çalışma kapsamında gerçekleştirilen derslere eksiksiz katılmıştır. Yordama testine katılan fakat çalışma kapsamında yürütülen öğretim sürecine bir haftadan fazla katılamayan öğrenciler istatistiksel analizlerin dışında bırakılmıştır.

Çalışmada her iki gruptan mülakata alınacak öğrencilerin seçiminde öğrencilerin Yordama Testinden elde ettikleri puanların dağılımı dikkate alınmıştır. Her iki grupta yer alan öğrenciler Yordama Testine katıldıktan sonra, iki grup birleştirilerek puanların ortalaması ve standart sapması belirlendi. Ortalamadan bir standart sapma solda ve sağda bulunan puanlar arasında yer alan puanlar dağılımın yaklaşık %68'ini oluşturduğundan her iki gruptan seçilecek 9 öğrencinin 5'i bu aralıktan ve bu aralıktaki dağılımı yansıtacak şekilde seçildi. Geriye kalan 2 öğrenci ortalamadan bir standart sapmadan daha büyük puanların bulunduğu bölgeden, diğer 2 öğrenci ise ortalamadan bir standart sapmadan daha küçük olan puanların bulunduğu bölgeden seçildi. Böylece seçilen mülakat öğrencilerinin hem dağılımı temsil etmesi hem de iki gruptan mülakata seçilen öğrencilerin birbiriyle denk olması amaçlandı.

3.4. Asıl Uygulama

Pilot çalışmada elde edinilen deneyimler doğrultusunda asıl çalışmaya geçilmiştir. Araştırmanın asıl çalışması iki sınıfta yer alan İlköğretim Matematik Öğretmenliği öğrencileri ile Grafik Analiz dersi çerçevesinde gerçekleşmiştir. Sınıflar rasgele olarak deney ve kontrol grubu olarak atanmıştır. Her iki sınıfta da öğretim uygulamaları araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Kontrol grubunda gerçekleşen uygulamalarda öğretmen rolündeki araştırmacı derse konu olan bilgileri beyaz tahta üzerinde sunarken, uygun yerlerde sınıfa yöneltilen sorularla sınıf tartışmaları gerçekleştirmeye çalışmıştır. Araştırmacı elinden geldiği kadarıyla, araştırmaya dâhil edilen konu ve kavramların altında yatan matematiksel süreçleri ve mantığı öğrencilere aktarmaya çalışmıştır. Deney grubunda ise uygulamalar bilgisayar donanımlı bir sınıfta yürütülmüştür. Oturma düzeni bir bilgisayarda iki kişilik gruplar oluşacak şekilde belirlenmiştir. Her dersin başlangıcında, derste öğrencilerin üzerinde çalışacağı çalışma yaprağı içinde bulunan adımları GeoGebra ortamında gerçekleştirmeleri için gereken teknik bilgiye ilişkin kısa bir sunum gerçekleştirilmiştir. Dersin devamında öğrenciler kendilerine verilen çalışma yapraklarında yer alan yapılar ve yönergeler üzerinde çalışmışlardır. Bu süreçte araştırmacı gruplar arasında dolaşarak öğrencilere çalışma yapraklarını icra etmede rehberlik etmiştir. Her dersin sonunda öğrencilerin çalışma yapraklarından elde ettikleri sonuçlar sınıf tartışmasına açılmıştır. Tartışmanın sonunda araştırmacı elde edilen sonuçları projeksiyon yardımıyla sınıfa özetlemiştir. Araştırmacı aynı zamanda her iki grubun aldığı Analiz dersinin uygulamasını da yürütmüştür. Çalışmada yer alan testler Analiz dersinin uygulama kısmında yürütülmüştür. Asıl çalışma bağlamında gerçekleşen süreçler kronolojik olarak Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Asıl Uygulamanın Yürütülme Süreci

	Dersin Konusu	Uygulanan Test	Mülakat
Öğretim Öncesi	Yok	TGT ve YT	Yok
1. Hafta	Türev kavramının geometrik anlamına giriş	NBTT	Seçilen NBTT soruları üzerinde tartışma
2. Hafta	Türev kavramının formel tanımı	TFTT	Seçilen TFTT soruları üzerinde tartışma
3. Hafta	Türevlenememe ve türev fonksiyonu	Yok	Yok
4. Hafta	Fonksiyonun artma-azalma karakteristiği ile türev arasındaki ilişki	Yok	Yok

Tablo 4'ün devamı

5. Hafta	Fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği ile türev arasındaki ilişki	FBTT-I	Seçilen FBTT-I soruları üzerinde tartışma
6. Hafta	Rolle ve Ortalama değer teoremi	FBTT-II	Seçilen FBTT-II soruları üzerinde tartışma
7. Hafta	Yok	TGT	TGT soruları üzerinde tartışma

3.5. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada veriler; öğrencilerin literatürde türev kavramının öğrenilmesinde etkili olduğu belirtilen konulara ilişkin ön bilgilerini ölçmek için kullanılan Yordama Testi (YT) (Bkz. Ek 1), öğrencilerin teğet kavramına ilişkin sahip oldukları genelleme türünü belirlemek için kullanılan Teğet Genelleme Testi (TGT) (Bkz. Ek 2), öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik anlamalarını belirlemek için kullanılan Noktasal Bağlamda Türev Testi (NBTT) (Bkz. Ek 3), öğrencilerin türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna yönelik anlamalarını belirlemek için kullanılan Türev Formel Tanım Testi (TFTT) (Bkz. Ek 4), öğrencilerin fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkilere yönelik anlamalarını belirlemek için kullanılan Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-I (FBTT-I) (Bkz. Ek 5), öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna yönelik anlamalarını belirlemek için kullanılan Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-II (FBTT-II) (Bkz. Ek 6) ile bu testlerden seçilen sorular çerçevesinde deney ve kontrol grubundan seçilen 9'ar öğrenciyle yapılan mülakatlardan elde edilmiştir.

3.5.1. Yordama Testi

Asıl çalışmaya geçilmeden önce yürütülen pilot çalışmanın sonuçları, araştırmanın birinci ve ikinci problemlerinde belirtilen konulara yönelik öğrencilerin anlamalarını belirlemek için hazırlanan testlerin ön-test olarak kullanılmasının anlamsız olduğunu gösterdi. Bunun sonucunda araştırmacı tarafından, uygulanan testler ile elde edilen istatistiksel çıkarımları daha anlamlı kılmak ve mülakata alınacak öğrencileri seçmek için, çalışmanın öncesinde öğrencilerin türev kavramının öğrenilmesinde etkili olan konulara ilişkin sahip oldukları ön bilgilerini ölçmek amacıyla Yordama Testi adı verilen bir test geliştirildi. Testin oluşturulmasında literatürde türev kavramının öğrenilmesine etki eden ön bilgileri belirleme amacıyla gerçekleştirilen araştırmaların sonuçları dikkate alındı. YT içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. Yordama Testinde Yer Alan Soruların Odaklandığı Kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Sözel ifadesiyle verilen bir fonksiyonun grafiksel gösterimini tanıyabilme.
2	Düzlemde verilen bir eğrinin bir fonksiyon belirtip belirtmediğini belirleyebilme.
3	Cebirsel ifadesiyle verilen bir fonksiyonun üzerindeki noktaları belirleyebilme. Bu noktalardan geçen kesen doğrusunun eğimini hesaplayabilme.
4 – 5	Sözel olarak verilen iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiyi yorumlayabilme ve düzlemde grafiğini oluşturabilme. Sözel olarak verilen iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiyi belirleyebilme ve devamında iki nokta arasındaki ortalama değişim oranını hesaplayabilme.
6	Grafiksel gösterimleri ile verilen fonksiyonlar üzerinde gerçekleştirilen temel işlemleri, kurulan eşitsizlikleri yorumlayabilme ve bunlara yönelik muhakeme yapabilme.
7	Verilen bir fonksiyon durumu içerisinde yer alan farklı değişkenler arasındaki ilişkileri tanıyabilme ve bunların grafiksel gösterimlerini oluşturabilme.

Araştırmanın öncesinde YT, deney ve kontrol gruplarında yer alan öğrenciler arasında araştırma sorularında belirtilen anlamalar açısından bir farklılık olup olmadığını belirlemede ortak değişken olarak kullanma ve mülakat öğrencilerini seçme amacıyla uygulanmıştır.

3.5.2. Teğet Genelleme Testi

Araştırmanın problemlerinden biri ile, öğretimde DMY kullanımının öğrencilerin teğet kavramına ilişkin oluşturdukları genelleme türleri üzerindeki etkisini belirlemek amaçlandı. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin teğet kavramına ilişkin araştırmanın öncesinde sahip oldukları genelleme türü ve öğretimin sonunda gerçekleştirdikleri genelleme türünü belirlemek için Teğet Genelleme Testi (TGT) ismi verilen bir test oluşturuldu (Bkz. Ek 2). TGT üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmı oluşturan testin ilk sorusunda, öğrencilerden teğet kavramını tanımlamaları istenmektedir. Testin ikinci kısmını yalnız grafiksel olarak temsil edilen dört fonksiyon grafiği oluşturmaktadır. Bu kısımda öğrencilerden, verilen fonksiyon grafiklerine yine bu grafiklerin üzerinde işaretlenen noktalardan, şayet çizilebileceğini düşünüyorlarsa, teğeti çizmeleri, eğer çizilemeyeceğini düşünüyorlar ise bu yöndeki kararlarının gerekçesini belirtmeleri istendi. İkinci kısımda yer verilen bu grafiklerin seçiminde, literatürde öğrencilerin teğet kavramını Euclid bağlamından analiz bağlamına geçişte formel teori ile tutarlı olacak şekilde genelleyememelerinin sonucunda ortaya çıkan kavram yanılgıları belirleyici olmuştur. İkinci kısımda yer alan fonksiyon grafiklerinin literatürde ifade edilen kavram yanılgılarıyla olan ilişkisi Tablo 6’da verilmiştir.

Tablo 6. TGT İkinci Kısımda Yer Alan Grafiklerin Literatürde Rapor Edilen Kavram Yanılgıları ile İlişkisi

Soru	Kavram Yanılgıları
2-i	Büküm noktalarından teğet çizilemez. Teğet çizildiği grafiği tek yarı düzleme hapsetmesi gerekir.
2-ii	Kırık noktalarda fonksiyona sonsuz teğet çizilebilir.
2-iii	Teğet fonksiyon grafiği ile çakışamaz. Teğet ile fonksiyon grafiğinin birden fazla ortak noktası olamaz.
2-iv	Teğetin fonksiyonun grafiği ile birden fazla ortak noktası olamaz. Teğet fonksiyon grafiğini kesemez.

TGT'nin üçüncü kısmında cebirsel olarak ifade edilen dört fonksiyon bulunmaktadır. Üçüncü kısımda verilen fonksiyonların herbiri, ikinci kısımda grafiksel olarak verilen fonksiyonlardan birinin cebirsel karşılığıdır. Üçüncü kısımda öğrencilerden, cebirsel olarak verilen fonksiyonların her birinin verilen noktalarda, şayet var olduğunu düşünüyorlarsa, teğet doğrusunun denklemini bulmaları, eğer teğet olmadığını düşünüyorlarsa gerekçelerini belirtmeleri istendi. Araştırmanın sonunda seçilen mülakat öğrencileri ile testin bütünü üzerinde mülakatlar gerçekleştirildi.

3.5.3. Noktasal Bağlamda Türev Testi

Araştırmanın alt problemlerinden biri ile, öğretimde DMY kullanımının öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerindeki etkisini belirlemek amaçlandı. Bu amaç doğrultusunda çalışmada kullanılmak üzere NBTT geliştirildi. Testin içerisinde yer alan soruların oluşturulmasında literatürde yer alan çalışmalar, Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alındı. NBTT içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. NBTT İçerisinde Yer Alan Soruların Odaklandığı Kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Tek noktada türevin düzlemdeki temsilini belirleyebilme.
2	Grafiksel veriden hareketle bir fonksiyonun birden fazla noktada türev değerlerini kıyaslayabilme.
3	Grafiksel verilerden hareketle bir fonksiyonun farklı noktalardaki türev değerlerinin, pozitif, negatif, sıfır, en büyük ve en küçük olma açısından belirleyebilme.
4	Grafiksel verilerden hareketle tek noktada, temel işlemler altında fonksiyonların türev değerini hesaplayabilme.
5	Grafiksel verilerden hareketle bir fonksiyonun tek noktada türevine ilişkin, bu noktanın civarında bulunan kesen doğrularının eğimlerinden yararlanarak muhakeme yapabilme.

Seçilen öğrenciler ile NBTT içerisindeki 1, 2, 3, ve 5 numaralı sorular çerçevesinde mülakatlar gerçekleştirildi.

3.5.4. Türev Formel Tanım Testi

Araştırmanın alt problemlerinden bir diğeri olan öğretimde DMY kullanımının öğrencilerin türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna yönelik anlamaları üzerindeki etkisini belirlemek için araştırmacı tarafından oluşturulmuş TFTT kullanıldı. Testin içerisinde yer alan soruların oluşturulmasında literatürde yer alan çalışmalar, Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alındı. TFTT içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. TFTT İçerisinde Yer Alan Soruların Odaklandığı Kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Δx ve Δy ifadelerini düzlemde temsil edebilme. Bir fonksiyon eğrisi üzerinde yer alan bir noktanın başka bir noktaya yaklaşması durumunda, noktanın değişimine bağlı olarak Δx, Δy, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ifadelerindeki ve noktalardan geçen kesen doğrusunun eğimindeki değişimi belirleyebilme.
2	Bir noktada türevin limit formunda verilerek belirtilen Ɛ- δ değişkenleri arasındaki ilişkiyi informel olarak ifade edebilme.
3	Bir noktada türevin limit tanımı içerisindeki değişkenlerin ve eşitsizliklerin grafiksel temsilini belirleyebilme.
4	Verilen bir türev durumunda, belirtilen şartlar altında tanım içerisinde yer alan Ɛ ve δ değişkenlerinin değerlerini grafiksel verilerden hareketle belirleyebilme.

Seçilen öğrenciler ile TFTT dördüncü sorusu üzerinde mülakatlar gerçekleştirildi.

3.5.5. Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-I

Araştırmanın alt problemlerinden biri olan öğretimde DMY kullanımının öğrencilerin fonksiyon ve türev grafikleri arasındaki ilişkilere yönelik anlamaları üzerindeki etikisini belirlemek için araştırmacı tarafından oluşturulan FBTT-I kullanılmıştır. Testin içerisinde yer alan soruların oluşturulmasında literatürde yer alan çalışmalar, Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alındı. FBTT-I içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9. FBTT-I Testinde Yer Alan Soruların Odaklandığı Kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Grafiksel olarak verilen bir fonksiyondan, fonksiyonun birinci türev fonksiyonunun grafiğini çizebilme.
2	Grafiksel olarak verilen birinci türev fonksiyonundan, türevi alınan fonksiyonun grafiğini çizebilme.
3	Grafiksel olarak verilen bir fonksiyonun türev fonksiyonunun grafiğini tanıyabilme.
4	Bir fonksiyonun grafiksel olarak verilen ikinci türev fonksiyonundan hareketle fonksiyonun grafiğini çizebilme.
5	Grafiksel olarak verilen birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonlarından fonksiyonun grafiğini tanıyabilme.
6	Grafiksel olarak verilen türev fonksiyonundan yararlanarak fonksiyonun karakteristiklerine yönelik muhakeme yapabilme.
7	Grafiksel olarak verilen bir fonksiyondan hareketle türev fonksiyonunun aldığı değerler hakkında muhakeme yapabilme.

Seçilen öğrenciler ile FBTT-I içerisindeki 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 numaralı sorular çerçevesinde mülakatlar gerçekleştirildi.

3.5.6. Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-II

Araştırmanın alt problemlerinden bir diğeri olan öğretimde DMY kullanımının öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerindeki etkisini belirlemek için araştırmacı tarafından geliştirilen FBTT-II kullanıldı. Testin içerisinde yer alan soruların oluşturulmasında literatürde yer alan çalışmalar, Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alındı. FBTT-II içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar Tablo 10'da verilmiştir.

Tablo 10. FBTT-II Testinde Yer Alan Soruların Odaklandığı Kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Düzlemde grafiği verilen bir fonksiyondan hareketle bir aralıkta türev fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri üzerinde muhakeme yapabilme .
2	Grafiksel olarak temsil edilen iki fonksiyondan, bir aralıkta bu fonksiyonların türev fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri hakkında muhakeme yapabilme.
3	Grafiksel olarak temsil edilen iki fonksiyondan, üzerine işlemler uygulanmış türev fonksiyonları hakkında muhakeme yapabilme.
4	İspat gerektiren grafiksel problem durumlarında türev fonksiyonunu geometrik boyutta kullanabilme. Rolle teoremini grafiksel problem durumlarına uygulayabilme.
5	İspat gerektiren grafiksel problem durumlarında türev fonksiyonunu geometrik boyutta kullanabilme. Ortalama değer teoremini grafiksel problem durumlarına uygulayabilme.
6	İspat gerektiren grafiksel problem durumlarında türev fonksiyonunu geometrik boyutta kullanabilme.

Seçilen öğrenciler ile FBTT-II içerisindeki tüm sorular üzerinde farklı iki zamanda gerçekleştirilen oturumlarda mülakatlar gerçekleştirildi.

Araştırmada veri toplama amacıyla oluşturulan NBTT, TFTT, FBTT-I ve FBTT-II testlerinin içerisinde yer alan soruların Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisine dağılımı Tablo 11'de verilmiştir. Asiala ve diğ. (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisinde türev kavramını uygulamaya koyma kısmı, yalnızca türev fonksiyonunu, fonksiyonun grafiğini oluşturmada uygulamak ile sınırlı tutulmuştur. Buna ek olarak araştırmacı genetik ayrışım içerisinde yer alan türev kavramını uygulamaya koyma kısmına, türev fonksiyonunu araştırma türünden problemlere uygulamayı dâhil etmiştir.

Tablo 11. NBTT, TFTT, FBTT-I, FBTT-II Testlerinde Yer Alan Soruların Genetik Ayrışım İçerisindeki Kazanımlara Göre Dağılımı

	Genetik Ayrışımın Aşamaları																				
	Türev Kavramına İlişkin Anlam Oluşturmada İzlenebilecek Grafiksel ve Analitik Yollar	A1 Eylem	A2 Eylem	B1 Süreç	B2 Süreç	C1 Nesne	C2 Nesne	D Nesne	**Türeev Kavramının Grafiksel Yorumu**	Ai Eylem	Aii Eylem	Aiii Süreç -Nesne	Bi Süreç	Bii Süreç-Nesne	**Türev Kavramını Uygulamaya Koymak**	Ai Eylem	Aii Eylem	Aiii-a Süreç	Aiii-c Süreç-Nesne	Aiv Nesne	**Kavramı Araştırma Türünden Problem Durumlarına Uygulama** (Nesne)
NBTT 1										√	√										
NBTT 2										√	√										
NBTT 3										√	√										
NBTT 4										√	√										
NBTT 5								√		√	√										
TFTT 1		√	√	√	√	√	√														
TFTT 2						√	√	√													
TFTT 3						√	√	√													
TFTT 4						√	√	√													
FBTT-I 1																		√			
FBTT-I 2																		√			
FBTT-I 3																		√			
FBTT-I 4																			√		
FBTT-I 5																		√	√		
FBTT-I 6																		√	√	√	
FBTT-II 1													√								
FBTT-II 2													√								
FBTT-II 3													√	√							
FBTT-II 4																					√
FBTT-II 5																					√
FBTT-II 6													√								√

Genetik ayrışımı oluşturan Asiala ve diğ. (1997) genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımların APOS teorisi içerisindeki anlama seviyelerinden hangisine ait olduğunu belirtmemişlerdir. Bu sebepten ötürü araştırmacı kendisi bu atamaları gerçekleştirmiş ve daha sonra literatürde yer alan başka bir doktora çalışmasında (Koruse, 2000) yapılan atamalar ile kıyaslamıştır. Tablo 11 içerisinde yer alan Bii ve Aiii-c basamaklarında yer alan kazanımlar, öğrencinin verdiği cevaba bağlı olarak süreç veya nesne seviyesinde anlamaya işaret edebilmektedir. Bununla birlikte sorular genetik ayrışım içerisine dağıtılırken, çözümün gerektirdiği en üst kazanım dikkate alınmıştır.

3.5.7. Klinik Mülakat

Klinik mülakat terimi ilk olarak Piaget tarafından ortaya atılmıştır. Piaget klinik mülakat yöntemi ile çocuklarda mantıksal ve matematiksel yapıların gelişimini gözlemek için oluşturduğu problem durumları üzerinde klinik mülakatlar gerçekleştirmiştir (Güven, 2006). Klinik mülakatlar ile öğrencilerin fikir ve anlamalarındaki zihinsel süreçler hakkında veriler toplanabilmekte, analiz edilebilmekte ve düşünceleri altında yatan yapı ve yöntemler ortaya çıkarılabilmektedir (Clements, 2003).

Çalışmanın amaçlarından biri öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarını ortaya çıkarmaktı. Bu amaca erişmede öğrencilere uygulanan testlerin nicel çözümlemesi sonucunda elde edilen istatistiksel çıkarımlar yetersiz kalacaktır. Çünkü öğrencinin anlamasını ortaya çıkarmak, problem durumlarında zihninde yürüttüğü muhakeme süreçlerini ve bu süreçleri yürütmede kullandığı kavramlara ilişkin kavram imgelerini oluşturan matematiksel yapıları açığa çıkarmak anlamına gelmektedir. Diğer bir ifadeyle öğrencilerin problem durumlarında elde ettiği sonuca değil, bu sonuca ulaşmada izlediği yönteme odaklanmayı gerektirmektedir. Bu amaca ulaşmada en etkili yöntem öğrenciler ile problem durumları üzerinde mülakatlar gerçekleştirmektir. Bu amaç doğrultusunda deney ve kontrol grubundan seçilen 9'ar öğrenci ile araştırmanın problemleri bağlamında mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakatlar süresince, her bir araştırma sorusu için hazırlanan testlerin içerisinden seçilen sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplar üzerinde tartışmalar gerçekleştirilmiştir.

3.6. Verilerin Analizi

Bu bölümde araştırmada kullanılan veri toplama araçları ile elde edilen verilerin analizinin nasıl gerçekleştirildiği açıklanacaktır.

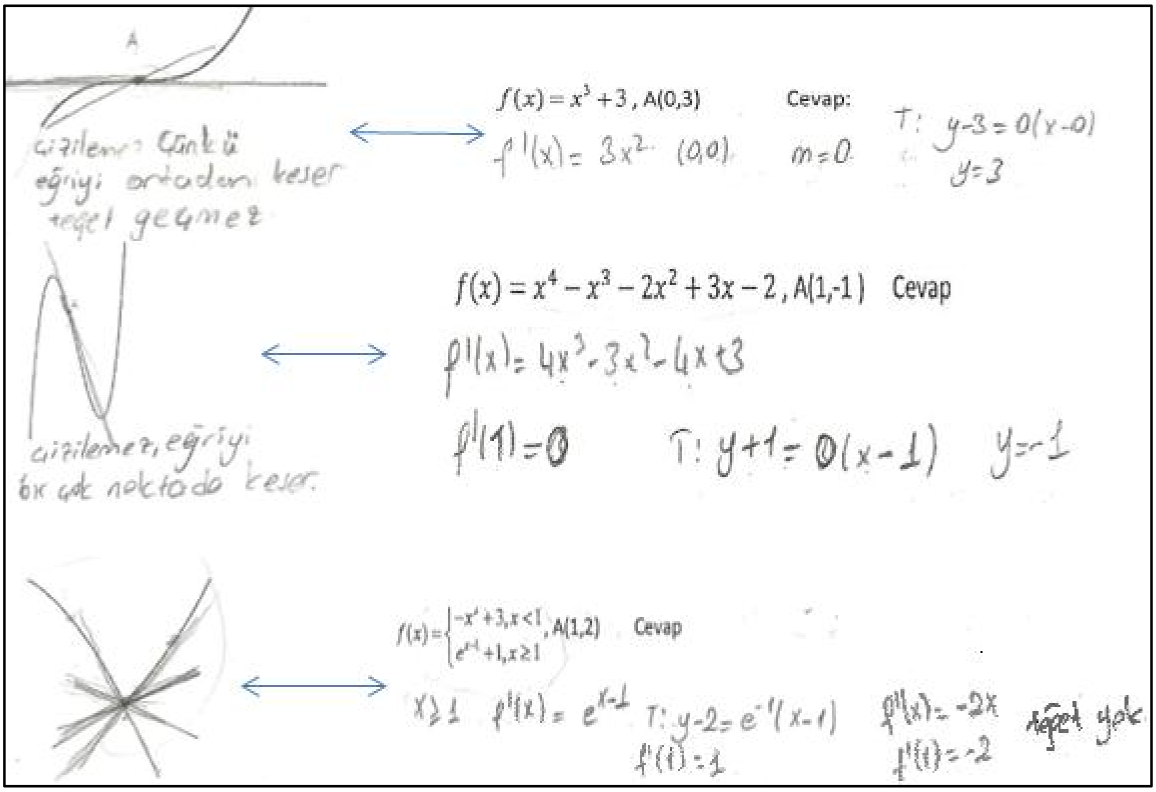
3.6.1. Yordama Testi ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Araştırmada örneklem olarak seçilen gruplar içerisinde yer alan bireyler gruplara rasgele atanamamıştır. Bunun sonucu olarak deney ve kontrol grubunu oluşturacak sınıflar rasgele seçilmiştir. Bu durumda seçilen sınıflar farklılık gösterebileceğinden, araştırmaya konu olan bağımlı değişkenlere etki etmesi muhtemel değişkenler kontrol altına alınması gereklidir. Bunun sonucu olarak araştırmada, literatürde türev kavramının öğrenilmesi ile ilişkili olduğu belirtilen ön bilgiler dikkate alınarak Yordama Testi ismi verilen bir test oluşturuldu. Test araştırmanın başında her iki grupta yer alan öğrencilere uygulandı. Öğrencilerin teste verdikleri cevaplar incelendikten sonra bir puanlama sistemi oluşturuldu (Bkz. Ek 1). Teste katılan tüm öğrencilerin cevapları oluşturulan puanlama sistemine göre değerlendirilerek testten elde ettikleri puanlar hesaplandı. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin Yordama Testi puan ortalamaları arasında bir farklılık olup olmadığını belirlemek için puanlar üzerinde bağımsız t testi gerçekleştirildi. Öğrencilerin Yordama testinden elde ettikleri puanlar, deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin NBTT, TFTT, FBTT-I ve FBTT-II testlerinden elde ettikleri puanları kıyaslamada ortak değişken olarak kullanıldı.

3.6.2. Teğet Genelleme Testi ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Öğrencilerin teğet kavramına ilişkin çalışma öncesinde sahip oldukları genelleme türünü ve çalışma sonrasında gerçekleştirdikleri genelleme türünü belirlemek için TGT çalışmanın başında ve sonrasında uygulandı. TGT birinci kısım ile öğrencilerin teğet kavramının tanımına ilişkin Euclid geometrisinde analiz bağlamına geçişte gereken genellemeyi gerçekleştirip gerçekleştiremediklerini belirlemek amaçlandı. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin testin ilk sorusuna verdikleri cevaplar formel tanım, analiz baskın, Euclid baskın ve cevap yok olarak dört kategori altında toplandı. Eğer öğrencinin tanımı, teğet doğrusunun analiz bağlamında sunulan formel tanımı veya formel tanıma denk bir ifade şeklinde ise, formel tanım kategorisi altında sınıflandı. Yanlış veya eksik olduğuna bakılmaksızın, eğer öğrencinin cevabı türev kavramını içeriyor ise kavram imgesinde kavramı tanımlama hususunda analiz bağlamının baskın olduğuna karar verilerek analiz baskın kategorisi altında sınıflandı. Aksi durumda, öğrencinin tanımı yalnız grafiksel çizimlerden oluşuyor ve/veya türev kavramını içermeyen sözel ifadeler mevcutsa, öğrencinin kavram imgesinde kavramı tanımlama hususunda Euclid geometrisi bağlamının baskın olduğuna karar verilerek Euclid baskın kategorisi altında sınıflandı. Son olarak eğer öğrenci soruya ilişkin bir yorumda bulunmamışsa cevap yok kategorisine dâhil edildi. Bu kategoriler içerisinde yer alan örnek öğrenci cevapları araştırmanın bulgular kısmında sunulmuştur.

TGT ikinci ve üçüncü kısımda yer alan sorular, veri toplama araçları kısmında izah edildiği üzere birbiriyle ilişkilidir. Öğrencilerin çalışmanın başında sahip oldukları ve çalışmanın sonunda gerçekleştirdikleri genelleme türleri, testin ikinci ve üçüncü kısmında yer alan sorulara verdiği cevaplar birlikte analiz edilerek belirlendi. Eğer bir öğrenci aynı fonksiyonun ikinci ve üçüncü kısımda yer alan farklı temsillerine, teğetin varlığı konusunda çelişkili cevap veriyorsa öğrencinin ilgili fonksiyon için cevabı “çelişkili” olarak sınıflandı. Eğer bir öğrenci aynı fonksiyonun ikinci ve üçüncü kısımda yer alan farklı temsillerine, teğetin varlığı konusunda verdiği cevap tutarlı ise “tutarlı” olarak sınıflandı. Şekil 14’de çelişkili olarak sınıflanan öğrenci cevapları görülmektedir.



Şekil 14. Çelişkili olarak sınıflanan örnek öğrenci cevapları

Şekil 14’de üstten ilk sırada yer alan öğrenci cevabı dikkate alındığında, öğrenci aynı fonksiyonun testin ikinci kısmında yer alan grafiksel temsiline teğetin eğriyi ortadan keseceğini gerekçe göstererek çizilemeyeceğine hükmetmiş, lâkin aynı fonksiyonun üçüncü kısımda yer alan cebirsel temsilinde ise türev alma yoluyla teğetin denklemini belirlemiştir. Dolayısıyla öğrencinin cevabı çelişkili olarak sınıflanmıştır. İkinci sırada yer alan cevapta ise öğrenci, fonksiyonun testin ikinci kısmında yer alan grafiksel temsilinde teğetin grafiği birden çok noktada keseceğini gerekçe göstererek çizilemeyeceğine hükmetmiş, fakat aynı fonksiyonun üçüncü kısımda yer alan cebirsel temsilinde ise türev alma yoluyla teğetin denklemini belirlemiştir. Bunun sonucu olarak öğrencinin cevabı çelişkili olarak sınıflanmıştır. Son sırada yer alan örnekte ise öğrenci, köşe noktaya sahip eğriye köşe noktasında birden fazla teğet çizerken, bu eğrinin üçüncü kısımda cebirsel karşılığı olan fonksiyona verilen kırık noktada sağ ve sol türev değerlerinin eşit olmadığını gerekçe göstererek türevin olmadığı kanaatine varmıştır. Yine bu öğrencinin cevabı çelişkili olarak sınıflandırılmıştır.

Her bir öğrencinin testin ikinci ve üçüncü sorularına verdiği cevaplar birlikte incelenerek çelişkili veya tutarlı olarak sınıflandırılmıştır. Eğer bir öğrencinin cevaplarının üç veya dördü çelişkili olarak sınıflanmışsa, öğrencinin teğet kavramına ilişkin genellemesinin ayırıcı genelleme olduğuna karar verildi. Çünkü, bu öğrenciler teğetin varlığı konusunda farklı gösterim alanlarında farklı kararlar vermektedir. Bu ise öğrencilerin zihinlerinde teğet kavramına ilişkin farklı gösterim alanlarında başvurdukları farklı şemalar olduğuna işaret etmektedir. Bu durum, Harel ve Tall (1989) tarafından ortaya konan genelleme türleri arasından ayırıcı genelleme türünü örneklendirmektedir. Benzer olarak eğer bir öğrencinin cevaplarının üç veya dördü tutarlı olarak sınıflandırılmışsa, öğrencinin teğet kavramına ilişkin genelleme türünün düzenleyici genelleme olduğuna karar verildi. Çünkü, bu öğrenciler problemin sunulduğu gösterim alanından bağımsız olarak, teğetin varlığı konusunda tutarlı cevap vermekte, cevaplarını ve gerekçelerini oluşturmada analiz bağlamında sunulan formel teoriyi kullanmaktadır. Bu durum, bu öğrencilerin daha önce Euclid bağlamında teğet kavramına yönelik öğrendikleri bilgileri, analiz bağlamında öğrendikleri formel bilgiyle sentezlediklerini göstermektedir. Burada akla gelebilecek bir soru, niçin cevaplarının üçü tutarlı veya çelişkili olarak sınıflanan öğrencilerin genelleme türü hakkında yargıya varıldığı olabilir. Bu durumun birinci gerekçesi ölçümde rasgele hataya olanak vermek olarak söylenebilir. Bir diğeri ise araştırmacının yürüttüğü analiz derslerinde elde ettiği deneyimdir. Bu deneyim öğrenciler için bir noktada türevin sağ ve sol türevlerine bakarak olmadığını göstermenin, türevli bir noktada türev bulmadan daha zor olduğunu söylemektedir. Bu durum öğrencilerin cevaplarında da kendini gösterdi. Bazı öğrenciler testin üçüncü kısmında -c- şıkkı hariç diğer şıklarda türev alarak teğetin eğimini hesaplarken, türevin mevcut olmadığını gösterememelerinin bir sonucu olarak -c- şıkkında herhangi bir işlem yapamamışlardır.

TGT çalışmanın başında uygulandığında bazı öğrenciler, bir noktada türev değeri ile o noktada fonksiyonun grafiğine çizilen teğet arasındaki ilişkiyi bilmemelerinden ötürü üçüncü kısımda yer alan sorulara cevap verememişlerdir. Bu öğrencilerin çalışma öncesinde teğet kavramına ilişkin sahip oldukları genelleme türünün genişleyici genelleme olduğuna karar verildi. Çünkü, genişleyici genellemenin gerçekleşmesi için, öğrencilerin teğet kavramına ilişkin analiz bağlamında sunulan formel bilgiyle karşılaşmış olmaları gerekmemektedir. Çalışmanın sonunda uygulanan TGT ile öğrencilerin öğretim sonunda teğet kavramına ilişin gerçekleştirdikleri genelleme türleri belirlendikten sonra, iki grup arasında gerçekleştirilen genelleme türü açısından bir farkın olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare bağımsızlık testi uygulandı.

3.6.3. NBTT, TFTT, FBTT-I, FBTT-II Testlerinden Elde Edilen Verilerin Analizi

Araştırma çerçevesinde gerçekleştirilen iki farklı öğretimin öğrencilerin araştırma sorularında ifade edilen anlamalar açısından bir farklılık olup oluşturmadığını belirlemek için araştırmacı tarafından NBTT, TFTT, FBTT-I ve FBTT-II oluşturuldu. Öğrencilerin testlere verdikleri cevapların incelenmesi sonucunda, gösterdikleri performanslara dayalı olarak her bir test için ayrı puanlama rubrikleri oluşturuldu (Bkz. Ek 3, Ek 4, Ek 5, Ek 6). Testlere katılan tüm öğrencilerin cevapları oluşturulan puanlama rubriklerine göre değerlendirilerek testlerden elde ettikleri puanlar hesaplandı. Yürütülen iki farklı öğretim yönteminin araştırma sorularında ifade edilen anlamalar açısından bir farklılık oluşturup oluşturmadığını belirlemek için öğrencilerin testlerden elde ettikleri puanlar üzerinde, YT puanları ortak değişken olarak alınarak, tek yönlü kovaryans analizi gerçekleştirildi.

3.6.4. Mülakat Verilerinin Analizi

Her iki gruptan mülakata seçilen öğrencilerin, araştırmanın 1.a, 1.b, 2.a ve 2.b alt problemlerinde ifade edilen konulara ilişkin APOS teorisi temelinde anlama seviyelerini belirlemek ve teğet kavramına ilişkin genellemelerini incelemek için görüşmeler gerçekleştirildi. Mülakat öğrencileri ile görüşmeler bire bir olarak yerleşke içerisinde yer alan proje odasında gerçekleşmiştir. Yapılan görüşmeler sürecinde öğrenciler ile araştırmada kullanılan testler içerisinden seçilen sorular etrafında yapılan tartışmalar yürütülmüştür. Tartışmalar süresince mülakata alınan öğrencilerden, soruları sesli düşünerek ve kağıt üzerinde çalışarak çözmesi istenmiştir. Bu süreçte araştırmacı öğrencinin yaptığı işlemlere ve yürüttüğü muhakeme sürecine doğru-yanlış şeklinde dönüt vermekten kaçınmış, öğrencinin düşüncelerini olabildiğince açıklaması yolunda cesaretlendirici tavır takınmıştır. Araştırmacı mülakat süresince ortaya çıkan bazı durumlardan emin olmak için, testlerde yer almayan spontane sorular kurgulamış ve öğrencilerden çözmesini istemiştir. Öğrenciler ile araştırmacı arasında yaşanan diyalogların tümü ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmış, bunun yanında öğrencinin mülakat süresince üzerinde çalıştığı cevap kağıdı mülakat sonunda araştırmacı tarafından saklanmıştır. Daha sonra tüm öğrencilerin ses kayıtları dinlenmiş ve kağıtlara aktarılarak mülakat dökümleri oluşturulmuştur. Mülakat dökümleri ile öğrencinin cevap kağıdı birlikte değerlendirilerek, öğrencinin sergilediği anlama seviyesi genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar doğrultusunda belirlenmiştir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, araştırma sürecinde elde edilen veriler; öğrencilerin yordama testi puanlarına ilişkin bulgular ve her bir araştırma problemine yönelik başlıklar altında sunulmuştur.

4.1. Yordama Testi ile Elde Edilen Bulgular

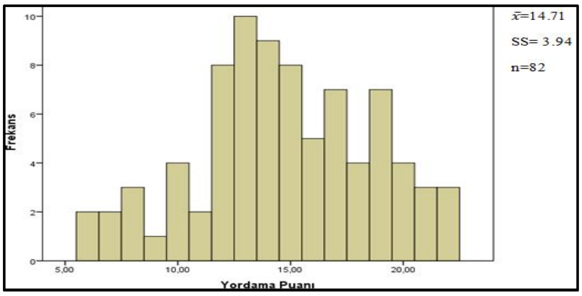
Çalışmada seçilen grupların arasında, literatürde (Pinzka, 1999; Hartter, 1995; Pustejovsky, 1999) türev kavramının öğrenilmesinde etkili olduğu söylenen ön bilgilere sahip olma açısından bir farklılık olup olmadığını belirlemek için YT kullanıldı. Grupların YT puan ortalamaları arasında anlamlı bir farkın olup olmadığını gösteren bağımsız t testi sonuçları Tablo 12'de sunulmuştur.

Tablo 12. Deney ve Kontrol Grubu Öğrencilerinin YT Puanlarına İlişkin t-Testi Sonuçları

		n	$\bar{x}$	SS	t	p
Yordama Testi	Kontrol	40	14.38	3.86	-.744	.46
	Deney	42	15.02	4.02		

Kontrol grubundaki öğrencilerinin YT puan ortalaması $\bar{x}$ =14.38, deney grubu öğrencilerinin YT puan ortalaması $\bar{x}$ =15.02 olarak ortaya çıkmıştır. Deney grubu öğrencilerinin YT puan ortalaması kontrol grubu öğrencilerinin YT puan ortalamasından fazla olmakla birlikte, Tablo 12'den görüldüğü üzere bu fark istatistiksel olarak anlamlı değildir (t=-.744 p >.05). Dolayısıyla asıl çalışmanın öncesinde iki gruptaki öğrenciler, literatürde türev kavramının öğrenilmesine etki ettiği rapor edilen konulara yönelik ön bilgilere sahip olma açısından denktir.

Yordama testine katılan tüm öğrencilerin aldıkları puanların histogram grafiği Şekil 15'de görülmektedir.



Şekil 15. Öğrencilerin YT puanlarının histogram grafiği

Bu dağılım esas alınarak seçilen mülakat öğrencilerinin YT puanları Tablo 13'de verilmiştir.

Tablo 13. Mülakata Seçilen Öğrencilerin YT Puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
YT Puanı	16	17	14	21	12	22	9	13	7	14	17	8	18	10	17	20	22	12

4.2. Tek Noktada Türev Değerinin Geometrik Boyutunu Anlamaya Yönelik Elde Edilen Bulgular

4.2.1. Noktasal Bağlamda Türev Testinden Elde Edilen Bulgular

Gerçekleştirilen iki farklı öğretim yöntemi arasında, öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin anlamaları üzerindeki etki açısından fark olup olmadığını belirlemek için, öğrencilerin NBTT'den aldıkları düzeltilmiş puanları üzerinde tek yönlü gruplar arası kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Grupların çalışmanın başında elde ettikleri YT puanları ortak değişken olarak alınmıştır. Analizin öncesinde elde edilen verilerin kovaryans analizinin ön varsayımları olan bağımlı değişken ile ortak değişken arasında doğrusal bir ilişkinin bulunması, regresyon doğrularının eğimlerinin homojenliği ve gruplar içi varyansın homojenliği kriterlerinin ihlâl edip etmediği sınanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar herhangi bir varsayımın ihlâl edilmediğini göstermiştir. NBTT sonucu grupların ham ve düzeltilmiş puanlarının betimsel istatistikleri Tablo 14'de verilmiştir.

Tablo 14. Deney ve Kontrol Gruplarının NBTT Puanlarının Betimsel İstatistikleri

		NBTT Puanı		Düzeltilmiş NBTT Puanı	
Grup	n	$\bar{x}$	SS	$\overline{x_d}$	SH
Deney Grubu	42	7.98	2.33	7.83	.22
Kontrol Grubu	40	6.43	2.26	6.58	.22
Toplam	82	7.22	2.41		

$\overline{x_d}$: Düzeltilmiş NBTT Puanı Ortalaması

Tablo 14'den görüldüğü üzere deney grubu öğrencilerinin NBTT puan ortalaması kontrol grubu öğrencilerinin ortalamasından daha büyüktür. Bu farkın anlamlı olup olmadığını belirlemek için, iki grubun YT puanları kontrol değişkeni olarak alınarak kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Yapılan kovaryans analizinin sonuçları Tablo 15'de sunulmuştur.

Tablo 15. NBTT'den elde edilen düzeltilmiş puanlara ait ANCOVA sonuçları

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	sd	Kareler Ortalaması	F	Anlamlılık Değeri(p)	Etki Büyüklüğü (eta kare)
YordamaTesti	267.72	1	267.72	136.43	.00	.63
Grup	31.82	1	31.82	16.22	.00	.17
Hata	155.01	79	1.96			
Toplam	472.05	81				

Gerçekleştirilen kovaryans analizi sonuçlarına göre, deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin YT'den aldıkları puanlar kontrol altına alındığında, NBTT puan ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık bulunmaktadır [$F_{(1-79)}=16.22$, $p<.01$].

4.2.2. NBTT ile İlgili Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Türev kavramının genetik ayrışımı içerisinde bir noktada türev kavramının grafiksel yorumu başlığı altında ifade edildiği üzere, bir noktada türev ile teğetin eğimi arasında ilişki öğrencinin zihninde farklı yapılanma gösterebilir. Bunlardan ilkinde öğrenci sadece bir noktada türevin o noktada çizilen teğetin eğimini verdiği şeklinde yüzeysel olarak ezber niteliğinde bir anlamaya sahip olabilir. Bu türden anlama sergileyen öğrencinin tek noktada türev kavramına ilişkin anlaması eylem seviyesindedir. Bunun tersine öğrenci tek noktada türeve ilişkin anlaması, genetik ayrışım içerisinde ifade edilen daha önceki süreçleri barındıracak şekilde olabilir. Daha açık olarak öğrenci tek noktada türevi ve onun karşılığı olan teğeti, kesen doğrularının teğet alınacak noktaya yaklaşması süreci ve farkların bölümünün türev alınacak noktadaki limit süreci sonunda ortaya çıkan bir nesne olarak yapılandırmış olabilir. Bu türden anlamaya sahip olan öğrencinin tek noktada türev kavramına ilişkin anlamasının nesne seviyesinde olduğuna karar verildi. Son olarak eğer öğrenci bir noktada türev ile o noktadaki teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramamış ise, öğrencinin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi seviyede anlama sergilediğine hükmedildi. NBTT içerisinden seçilen sorular bağlamında öğrenciler ile gerçekleştirilen mülakatlar vasıtasıyla, öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin sahip oldukları anlama seviyeleri belirlenmiştir. Takip eden kısımda farklı anlama seviyelerine sahip öğrenciler ile gerçekleştirilen mülakatlara örnekler verilecektir.

Kontrol grubu öğrencilerinden olan Erkan ile gerçekleşen mülakatta öğrencinin tek noktada türev kavramına ilişkin eylem öncesi seviyede anlamaya sahip olduğu ortaya çıktı. Erkan ile yapılan mülakatta NBTT içerisindeki ikinci soru bağlamında gerçekleşen bir kesit aşağıdaki gibidir:

Araş. : *$f'(1)$ sana ne söyler?*
Erkan : *Birinci türevdeki yerini.*
Araş. : *Birinci türevinin neyi?*
Erkan : *[Cevap yok]*
Araş. : *$f'(1)$ değeri geometrik olarak ne ifade ediyor sana?*
Erkan : *Yani birinci türevi alınmış, oradaki yeri gibi bir şey.*
Araş. : *Tamam burası 1 noktası bu da y= f(x) fonksiyonunun grafiği, grafiksel olarak $f'(1)$ değeri sana bir şey ifade ediyor mu, ya da $f'(2)$ değeri.*
Erkan : *Muhakkak söyler ama çıkartamadım şimdi türevin grafiği olmadığı için, yani burada azalma var fonksiyon azalmış.*

Buraya kadar yaşanan diyalogtan anlaşılacağı üzere Erkan $f'(1)$ değerine ilişkin yorum yapabilmek için türev fonksiyonunun grafiğini görme ihtiyacı hissetmekte, yalnız fonksiyonun grafiğinden $f'(1)$ değerine ilişkin teğeti kullanarak herhangi bir çıkarım yapamamaktadır. Mülakatın devamı aşağıdaki gibi gerçekleşti:

Araş. : *Peki yalnız bu grafiğe dayalı olarak çıkarım yapamazmısın $f'(1)$ ile $f'(2)$ değerleri arasında?*
Erkan : *$f'(1)$ küçük $f'(2)$ derim.*
Araş. : *Nasıl karar verdin?*
Erkan : *Azaldığı için.*
Araş. : *Azalan ne?*
Erkan : *Fonksiyonun kendisi azalıyor. Burada bir minumum yapıp tekrar artma gösteriyor. Yani o sebepten $f'(1)$ küçük $f'(2)$ denebilir, çünkü fonksiyonun türevinin grafiği fonksiyonun grafiğine yakın bir grafik olması lazım.*
Araş. : *Niçin böyle düşünüyorsun?*
Erkan : *Öyle bir şey vardı, yok muydu, yanlışmı hatırlıyorum, ona benzer çok fark olmadan diye biliyorum.*
Araş. : *O zaman $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ değerleri arasında nasıl bir sıralama olacak?*
Erkan : *$f'(1)$ büyük $f'(2)$ o da büyük $f'(3)$ olacak.*
Araş. : *Az önce $f'(1)$ küçük $f'(2)$ dedin.*

Erkan : Bir dakika, fonksiyon 1'den 3'e doğru azalıyor, buna göre, yanlış söylemişim son söylediğim doğru.

Diyalogtan görüldüğü gibi, öğrenci türev değerlerine ilişkin muhakeme yapma sürecinde teğet doğrusuna hiç değinmemiştir. Bunun yerine zihninde mevcut olan, türev fonksiyonunun grafiğinin fonksiyonun grafiğine bir şekilde benzemesi gerektiği yanılgısına dayalı olarak, fonksiyon azalıyorsa türevinin de azalması gerektiği sonucunu çıkarmıştır. Sonuç olarak Erkan tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi seviyede anlama sergilemektedir. Erkan benzer muhakeme sürecini kullanarak NBTT üçüncü soruda B noktasındaki türev değerinin A noktasındaki türev değerinden büyük, E noktasındaki türev değerinin ise D noktasındaki türev değerinden küçük olduğuna karar vermiştir. NBTT beşinci soruda ise Erkan sorunun cevabına ilişkin bir yaklaşım sergileyememiştir.

Kontrol grubunda yer alan Veysel de tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi seviyede anlama sergiledi. Fakat Erkan'dan farklı olarak Veysel, soruların çözümünde ortaöğretim seviyesinde türev kavramına ilişkin edindiği fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile türev işareti arasındaki ilişkiyi kullanma eğilimi sergilediği gözlenmiştir. Bu şekilde NBTT'de yer alan ikinci soruya doğru, üçüncü soruya ise kısmen doğru cevap verebildi. Fakat mülakatın ilerleyen kısımlarında Veysel'in kullandığı akıl yürütme sürecinin hatalı olduğu, ikinci ve üçüncü sorulara doğru yanıt verebilmesinin sebebinin sorulardan kaynaklandığı ortaya çıktı. NBTT'nin ikinci sorusu etrafında Veysel ile gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

Veysel : [Soruyu okuyor] Bu 4 noktasında fonksiyonun minimum değerinde mi?

Araş. : Tamam öyle kabul edelim.

Veysel : O zaman şimdi dördün solunda grafik azalan olduğu için türev negatif, dördün sağında da pozitif olacak buna göre [Türev değerlerini büyükten küçüğe doğru olarak sıralıyor].

Araş. : Peki şunu sorayım $f'(6)$ *ile* $f'(7)$ *değerlerini nasıl kıyasladın?*

Veysel : Dört noktasında türev değeri sıfır olduğundan $f'(6)$ *değeri sıfıra daha yakın bir değer olacak dolayısıyla* $f'(7)$ *değeri daha büyük.*

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin ortaya koyduğu muhakeme sürecinin kusursuz, hatta araştırma sürecinde bir fonksiyonun türevinin işareti ile artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkiye yönelik öğretim henüz gerçekleşmediği için beklenenden daha derin olduğu söylenebilir. Fakat NBTT üçüncü soruda öğrencinin sergilediği yaklaşımın temelde iyi yapılanmadığı ortaya çıktı. Öğrenci NBTT üçüncü soruda yer alan ilk dört şıkta aynı muhakeme sürecini kullanarak doğru cevap verebilmiş, fakat türev değerinin en küçük olduğu noktayı soran son şıkta kullandığı muhakeme sürecinin yetersizliği ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : *Son şıkta ise bu verilen noktalardan hangisinde* $f'(x)$ *değerinin en küçük olduğunu soruyor.*

Veysel : *Bakalım, D ve E noktalarında türev negatifti çünkü fonksiyon azalan, bunlardan hangisi küçük olur,* [Biraz düşünüyor], *bunları kıyaslayamayız bence.*

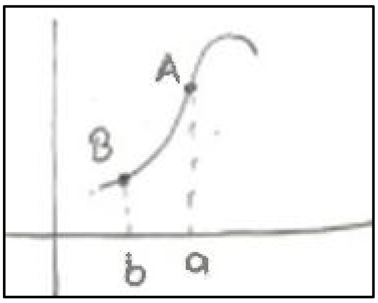
Araş. : *Niçin kıyaslayamayız?*

Veysel : *Çünkü şimdi C noktasında fonksiyon maksimum yapmış dolayısıyla türev sıfır, F noktasında ise minimum olmuş orada da türev sıfır, D ve E noktalarının her ikisi de sıfıra yakın yerlerde ama hangisinin sıfıra daha yakın olduğunu bilmiyoruz.*

Araş. : *Peki şunu varsayalım, D noktası daha yakın olsun o zaman ne dersin?*

Veysel : *Öyleyse en küçük E noktasında olur türev.*

Diyalogtan anlaşılacağı üzere, Veysel türev değerlerini kıyaslamada teğet doğrularının eğimlerine başvurmamakta, bunun yerine noktaların türev değerinin sıfır olduğu noktalara uzaklıklarını kıyaslama yoluyla türev değerlerini karşılaştırarak geçersiz bir muhakeme süreci yürütmektedir. Bu durumdan emin olmak için mülakat esnasında kağıt üzerine araştırmacı tarafından yeni bir problem durumu oluşturuldu (Şekil 16).



Şekil 16. Veysel ile yapılan görüşme sırasında araştırmacı tarafından oluşturulan problem

Bu problemde Veysel'den A ve B noktalarındaki türev değerlerini kıyaslaması istendi. Bu süreçte Veysel ile yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : *Sana başka bir soru sormak istiyorum* [Araştırmacı problemi kağıt üzerinde oluşturuyor]. *Bu eğri üzerindeki A ve B noktalarından hangisinde fonksiyonun türev değeri daha büyüktür?*

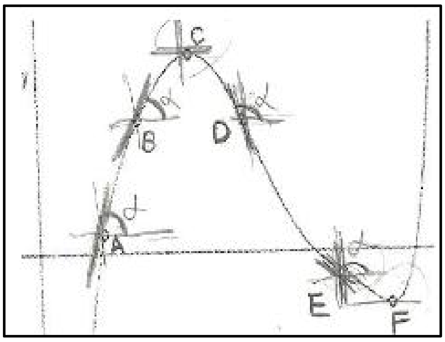
Veysel : *B noktasında.*

Araş. : *Niçin?*

Veysel : *Çünkü grafiğe baktığımızda burada bir maksimum nokta var ve o maksimum noktanın solunda fonksiyon artmış böylece türev pozitif, bu tepe noktada türev sıfır olacak, A noktası o tepe noktaya daha yakın olduğu için türevi de sıfıra B noktasından daha yakın olacak.*

Diyalogtan görüldüğü gibi, Veysel aynı muhakeme sürecini kullanarak soruyu yanlış cevaplamıştır. Veysel soruları cevaplamada teğet doğrularından hiç bahsetmemiştir. Sonuç olarak Veysel tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik eylem öncesi seviyede anlama sergilemektedir. Veysel'in NBTT beşinci soruda sergilediği yaklaşım yine ulaştığımız bu sonucu destekler niteliktedir. Veysel beşinci sorudaki fonksiyonun grafiğini bir parabol grafiği olarak ele almış, böylece grafiğe ait fonksiyonun denkleminin $y = ax^2 + bx + c$ olacağını söyleyip, grafik üzerinde verilen noktalardan yaralanarak denklem içerisindeki a,b ve c katsayılarını belirleme yoluna gitmiştir.

Yapılan mülakatlar sonucunda öğrencilerin bir kısmının tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik eylem seviyesinde anlama sergilediği fakat nesne seviyesinde bir anlamaya sahip olmadığı belirlendi. Öğrencilerin eylem ya da nesne seviyelerinden hangisinde anlama gerçekleştirdikleri, NBTT'de yer alan beşinci soru bağlamında gerçekleştirilen mülakatlarda ortaya çıkmıştır. Ersel ile gerçekleşen mülakatta öğrencinin tek noktada türevin grafiksel yorumuna ilişkin eylem seviyesinde olduğu fakat nesne seviyesinde bir anlama sergilemediği belirlendi. Ersel'in NBTT üçüncü soru üzerinde yaptığı çizimler Şekil 17'de gözükmektedir.



Şekil 17. Ersel'in NBTT üçüncü soru üzerinde yaptığı çizimler

Öğrencinin eylem seviyesinde olduğunu gösteren NBTT üçüncü soru üzerinde yaşanan diyalog şu şekildedir:

Ersel : [Soruyu okuyor] Hangi noktalarda $f'(x)$ *değeri pozitiftir. Yani eğim değerini kastediyor bize.*

Araş. : Evet.

Ersel : Şimdi bu noktalardaki teğetleri çizeyim [Ersel kağıt üzerinde teğetleri çiziyor] şimdi buralardaki açıları oluşturursam [her teğet noktasında küçük koordinat eksenlerini oluşturarak teğet doğrularının, oluşturduğu küçük koordinat eksenlerinde yatay eksenle yaptığı açıları işaretliyor] o zaman A ve B noktalarında açı 0^o *ile* 90^o *arasında dolayısıyla buralarda pozitif olacak.*

Araş. : Peki $f'(x)$ *değerinin negatifliğine ilişkin ne söyleyebilirsin?*

Ersel : O zaman açı 90^o *ile* 180^o *arasında olmalı yani buradaki D ve E noktalarında negatif olacak. O zaman C ve F noktalarında sıfır olacak türev.*

Araş. :Tamam, $f'(x)$ *değeri en büyük nerede olur sence?*

Ersel : Pozitif olduğu noktalara bakmamız lazım, açı büyüdükçe eğim değeri büyüyordu, o zaman A noktasına bakarsak açı böyle, B noktasında ise böyle, A noktasıdaki açı daha büyük böylece eğim daha büyük yani türevi daha büyük bu A noktasında.

Diyalogtan görüldüğü gibi, Ersel bir noktadaki türev ile o noktadaki teğet arasındaki ilişkiyi kurmuş ve bunu problem çözme sürecinde kullanabilmektedir. Dolayısıyla eylem seviyesinde bir anlamaya sahip olduğu gözükmektedir. Bununla birlikte Ersel teğetin eğimini hesaplamada her seferinde oluşturduğu küçük koordinat eksenleri vasıtasıyla teğetin x-ekseni ile yaptığı açıyı kullanmaktadır. Bu durum kontrol grubu öğrencilerinin büyük bölümünde görülmüştür. Ersel her ne kadar tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem seviyesinde anlama sergileyebilse de, NBTT beşinci soru üzerinde yapılan tartışmada nesne seviyesinde anlamaya sahip olmadığı görüldü. Beşinci soru bağlamında gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

Araş. : Şimdi şu soruya bakalım.

Ersel : [Soruyu okuyor] ilkinde x=2 noktasındaki türevi bir olabilir diyor bize.

Araş. : Evet sence olabilir mi?

Ersel : [Biraz düşünüyor] teğeti çizeyim mi buraya.

Araş. : İstediğini yapabilirsin.

Ersel : [x=2 noktasında fonksiyon grafiğine teğeti çiziyor ve x eksenini kesecek şekilde uzatarak yaptığı açıyı işaretliyor ve biraz düşünüyor] bence 1'den küçük olur.

Araş. : Niçin öyle düşünüyorsun?

Ersel : Çünkü bu teğetin açısına baktığımızda 45^{o} den küçük gibi gözüküyor, o zaman eğim birden küçük olur, o zaman ikinci ve üçüncü şık hiç olamaz, dördüncü ve beşinci şık olabilir çünkü birden küçük.

Araş. : Peki burada (2,4) noktasının dışında iki nokta daha verilmiş, bunlar sana yardımcı olabilir mi?

Ersel : Nasıl yani?

Araş. : Biz bir noktada türevi limit olarak tanımlamıştık ve bu limit tanımının grafiksel karşılığında kesen doğruları vardı, o tanımı hatırlıyor musun?

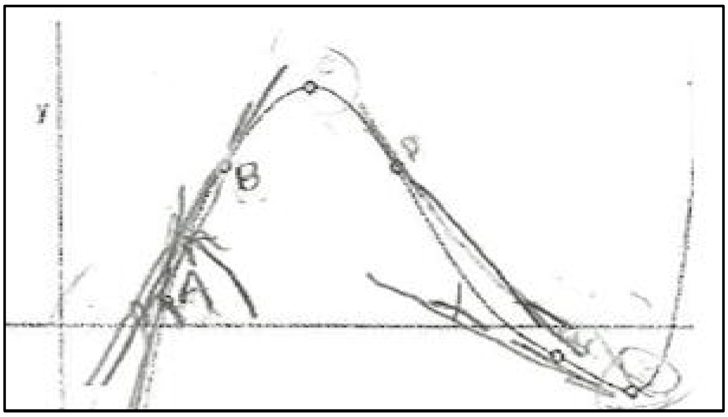
Ersel : Türevin limit tanımını hatırlıyorum, bu şekildeydi [bir noktada türevin limit ifadesini yazdı].

Araş. : Evet bu tanımın grafiksel karşılığını bu soruda x=2 noktasındaki türev durumu için oluşturabilir misin?

Ersel : [Bir müddet düşünüyor] Yok, hayır.

Diyalogtan görüleceği üzere, Ersel zihninde tek noktada türev kavramının geometrik karşılığı olan teğet doğrusunu, limit tanımı içerisinde yer alan kesen doğrularının yakınlaşması sürecini sarmalayacak şekilde oluşturamamıştır. Dolayısıyla öğrencinin teğet kavramına ilişkin anlaması eylem seviyesinde kaldığı nesne seviyesine ulaşamadığı görülmektedir.

Ersel ile yapılan mülakatta elde ettiğimiz bulgulara benzer şekilde, kontrol grubunda yer alan öğrencilerin çoğunluğu tek noktada türev değerine ilişkin teğet doğrusunun eğiminden çıkarım yaparken, teğet doğrusunun x-ekseni ile yaptığı açıyı kullanmaktadır. Bu yöntemin bazı öğrencilere, teğetlerin eğimlerinin birbirine yakın olduğu durumlarda zorluk yaşattığı gözlemlendi. Örneğin kontrol grubu öğrencilerinden olan Zehra NBTT'nin 2'nci sorusunda teğetlerin eğimlerini kıyaslamada bir sorun yaşamaz iken, 3'üncü soruda türev değerinin en büyük olduğu noktayı belirlemede A ve B noktalarındaki eğimleri kıyaslamada zorlandığı gözlenmiştir. Yaşadığı bu sıkıntının sebebi, A ve B noktalarından çizilen teğetlerin eğimlerinin birbirine yakın olmasından ötürü, teğetlerin x-ekseni ile yaptığı açıların birbirine yakın değerde olması, dolayısıyla görsel olarak hangisinin büyük olduğunu belirleyememesidir. Zehra'nın üçüncü soru üzerinde yaptığı çizimler Şekil 18'de görülmektedir.



Şekil 18. Zehra'nın NBTT 3'üncü soru üzerinde yaptığı çizimler

Zehra ile bu soru üzerinde gerçekleşen tartışmanın bir bölümü şu şekildedir:

Araş. : Bu noktalardan hangisinde $f'(x)$ değeri en büyüktür?

Zehra : Bakalım, en büyük değerini sorduğu için A veya B olacak.

Araş. : Niçin?

Zehra : Çünkü bu ikisinin pozitif olduğunu söylemiştik.

Araş. : Peki bu taktirde hangisinde en büyüktür?

Zehra : Tamam, teğetlerin eğimine bakalım uzatırsak teğetleri [teğet doğrularını x-ekseni ile kesiştirerek yaptığı açıları belirliyor] bence B noktasında olur en büyük değer.

Araş. : Neden B olduğuna karar verdin?

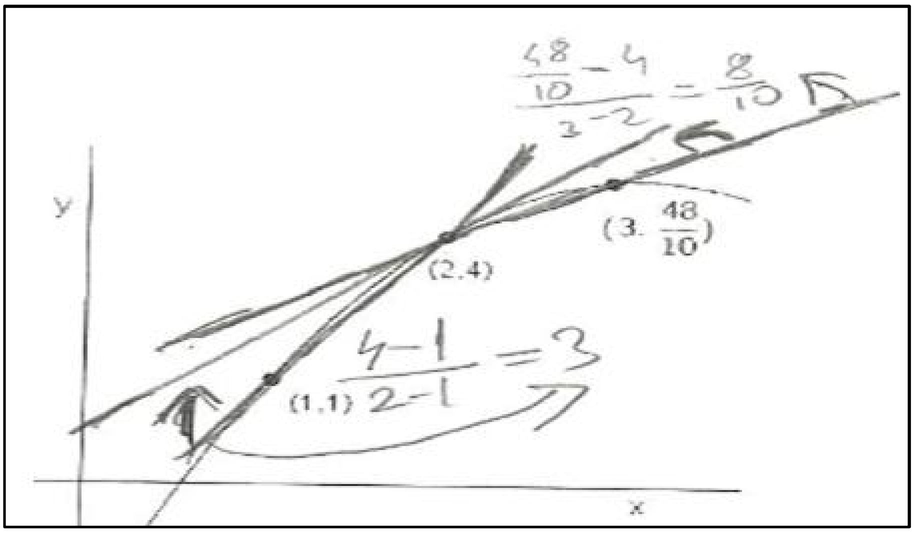
Zehra : Eğimlerine bakıyorum, B noktasından geçen teğetin açısı daha büyük.

Araş. : Sence B noktasından geçen teğetin açısı daha mı büyük?

Zehra : Evet o daha büyük gözüküyor bence, dolayısıyla B noktasındaki türev daha büyük.

Diyalogtan görüldüğü gibi, Zehra yaptığı hatalı çizimin sonucu olarak B noktasından geçen teğetin x-ekseni ile yaptığı açının daha büyük olduğunu söylerek yanlış sonuca varmıştır. Deney grubu öğrencileri ise teğetin eğim değerine ilişkin muhakeme yaparken bu yöntemi kullanmamışlardır. Deney grubu öğrencileri tek noktada farklı türev değerlerine ilişkin muhakeme yapmayı gerektiren bu tür sorularda, teğetlerin eğimlerini büyüklük açısından sıralarken doğrudan biri diğerinden daha büyük veya daha küçük olduğunu söyleyebildikleri gözlemlendi.

Mülakatlardan ortaya çıkan bulgular, bazı öğrencilerin tek noktada türev kavramının grafiksel yorumuna yönelik nesne seviyesinde anlamaya sahip olduğunu gösterdi. Nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrencilerden biri deney grubunda yer alan Kadriye'dir. Kadriye ve anlama seviyesi nesne olarak belirlenen tüm diğer öğrenciler NBTT'de yer alan ve üzerinde konuştuğumuz alt problem için kullanılan tüm mülakat sorularına doğru yanıt vermiştir. Kadriye'nin nesne seviyesinde anlamaya sahip olduğunu ortaya çıkaran NBTT 5'inci soruda yaptığı çizimler Şekil 19'da görülmektedir.



Şekil 19. Kadriye'nin NBTT 5'inci soru üzerinde yaptığı çizimler

Kadriye ile bu soru bağlamında gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir:

Araş. : Sıradaki soruya bakalım.

Kadriye : Tamam [öğrenci soruyu okuyor] fonksiyonun x=2 noktasındaki türevi 1 olabilir diyor bize.

Araş. : Sence olabilir mi?

Kadriye : Biraz düşüneyim... x=2 noktasındaki türevi 1 olabilir mi diyor bize, yani x=2 noktasındaki teğetin eğimini soruyor, 1 olabilir mi bu eğim... teğeti çizeyim mi?

Araş. : Her şeyi yapmakta özgürsün.

Kadriye : Şimdi bu noktada [(2,4) noktasını kastediyor] teğeti çizersek böyle olacak [öğrenci teğeti doğru olarak çiziyor].

Araş. : Evet sence o teğetin eğimi bir olabilir mi?

Kadriye : Bir dakika... şimdi burada iki tane daha nokta var [bir müddet düşünüyor] hani teğeti tanımlarken kesen doğruları vardı, bunları oluştursam bu noktalar yardımıyla.

Araş. : Dediğim gibi istediğini yapmakta özgürsün.

Kadriye : Bu kesen doğrularını çizeyim o zaman [öğrenci kesen doğrularını çiziyor], şimdi bunların eğimlerini de bulabiliriz aslında [öğrenci kesen doğrularının eğimlerini doğruların geçtiği noktalardan yararlanarak buluyor ve biraz düşünüyor] tamam anladım şimdi.

Araş. : Neyi anladın?

Kadriye : Şimdi bu (2,4) ile (3,$\frac{48}{10}$) noktalarından geçen kirişin eğimi $\frac{8}{10}$ olur. Bu noktayı [(3, $\frac{48}{10}$) noktasını kastediyor] buraya [(2,4) noktasını kastediyor] doğru sürüklersek bu kiriş teğete yaklaşacak ve gitgide eğimi büyüyecek o zaman bu teğetin eğimi $\frac{8}{10}$'dan büyük olur. Benzer olarak (1,1) ile (2,4) noktalarından geçen kirişin eğimini 3 bulmuştuk. Yine bu noktayı [(1,1) noktasını kastediyor] buraya [(2,4) noktasını kastediyor] doğru sürüklersek bu kiriş teğete yaklaşacak ve eğimi gitgide azalacak, böylece teğetin eğimi 3'den kesin küçük olacak.

Diyalogtan anlaşılacağı üzere Kadriye'nin zihnindeki tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin imge, kesen doğrularının limit sürecini sarmalayacak şekilde yapılanmıştır. Dolayısıyla Kadriye soruda, bu yapılanma içerisindeki süreçler üzerine odaklanarak, soruda yer alan önermeleri doğru-yanlış olması bakımından doğru olarak sınıflandırabilmiştir. Sonuç olarak Kadriye tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin nesne seviyesinde anlama sergilemektedir. Nesne seviyesinde anlama sergileyen diğer öğrenciler de, Kadriye gibi, NBTT'nin 5'inci sorusunda verilen önermeler hakkında muhakeme yaparken, kesen doğrularının eğimlerini kullanmışlardır.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda görüşme yapılan öğrencilerin belirlenen anlama seviyeleri ve NBTT'den aldıkları puanlar Tablo 16'da verilmiştir.

Tablo 16. Mülakat Öğrencilerinin Belirlenen Anlama Seviyeleri ve NBTT Puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
NBTT Puanı	7	12	8	7	5	10	7	8	3	10	11	7	10	6	9	12	12	8

Tablo 16'nın devamı

Anlama Seviyesi	E	N	E	E	EÖ	N	E	E	EÖ	N	N	E	N	E	N	N	N	E

EÖ: Eylem Öncesi; E: Eylem; N: Nesne

Tablo 16'dan görüldüğü üzere, kontrol grubunda iki, deney grubunda ise altı öğrenci nesne seviyesinde anlama sergilemiştir.

4.3. Formel Tanımın Geometrik Boyutunu Anlamaya Yönelik Elde Edilen Bulgular

4.3.1. Türev Formel Tanım Testinden Elde Edilen Bulgular

Gerçekleştirilen iki farklı öğretim yönteminin, öğrencilerin geometrik olarak türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna yönelik anlamaları üzerindeki etkililiğini belirlemek için, öğrencilerin TFTT'de elde ettikleri düzeltilmiş puanları üzerinde tek yönlü gruplar arası kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Grupların çalışmanın başında elde ettikleri YT puanları ortak değişken olarak alınmıştır. Analizin öncesinde elde edilen verilerin kovaryans analizinin ön varsayımları olan bağımlı değişken ile ortak değişken arasında doğrusal bir ilişkinin bulunması, regresyon doğrularının eğimlerinin homojenliği ve gruplar içi varyansın homojenliği kriterlerini ihlâl edip etmediği sınanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar herhangi bir varsayımın ihlâl edilmediğini göstermiştir. TFTT sonucu grupların ham ve düzeltilmiş puanlarının betimsel istatistikleri Tablo 17'de görülmektedir.

Tablo 17. Deney ve Kontrol Grubunun TFTT Puanlarının Betimsel İstatistikleri

		TFTT Puanı		Düzeltilmiş TFTT Puanı	
Grup	n	$\bar{x}$	SS	$\overline{x_d}$	SH
Deney Grubu	40	11.58	3.26	11.38	.39
Kontrol Grubu	37	7.12	3.39	7.33	.41
Toplam	77	9.43	3.99		

$\overline{x_d}$: Düzeltilmiş TFTT Puanı Ortalaması

Tablo 17'dan görüldüğü üzere deney grubu içerisinde yer alan öğrencilerin puan ortalaması kontrol grubu öğrencilerinin puan ortalamasından daha büyüktür. Ortaya çıkan bu farkın anlamlı olup olmadığını belirlemek için kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Yapılan kovaryans analizinin sonuçları Tablo 18'de verilmiştir.

Tablo 18. TFTT’den Elde Edilen Düzeltilmiş Puanlara Ait ANCOVA Sonuçları

Varyansın Kaynağı	KarelerToplamı	sd	Kareler Ortalaması	F	Anlamlılık Değeri (p)	Etki Büyüklüğü (eta kare)
Yordama Testi	374.20	1	374.20	61.11	.00	.45
Grup	312.51	1	312.51	51.03	.00	.41
Hata	453.15	74	6.12			
Toplam	1210.86	76				

Gerçekleştirilen kovaryans analizi sonuçlarına göre, deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin Yordama testinde aldıkları puanlar kontrol altına alındığında, TFTT puan ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık bulunmaktadır [$F_{(1\text{-}74)}$=51.03, p<.01].

4.3.2. TFTT ile İlgili Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin tek noktada türev kavramının formel tanımına ilişkin oluşturdukları anlama seviyelerini belirlemek için TFTT dördüncü soru üzerinde mülakatlar gerçekleştirildi. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda öğrencilerin formel tanıma ilişkin anlama seviyeleri, eylem öncesi, eylem, süreç ve nesne olarak belirlendi. Takip eden kısımda öğrencilerin bu anlama seviyelerine nasıl atandığını örneklemek adına, her bir anlama seviyesi için örnek mülakat kesitleri verilmiştir.

Tek noktada türev kavramının formel tanımına ilişkin eylem öncesi kategorisine dâhil edilen öğrencilerin genel özelliği, sorunun içerisinde yer alan eşitsizliklere ilişkin muhakeme yapabilmek için verilen fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç duymalarıdır. Bir diğer ortak özellik ise bu öğrencilerin tek noktada türev kavramının limit tanımı içerisinde yer alan ve farkların bölümü olarak isimlendirilen “$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$” ifadenin geometrik olarak ne anlama geldiğini bilmedikleridir. TFTT’nin dördüncü sorusunun ikinci maddesi üzerinde Özgür ile yapılan mülakattan elde edilen bulgular, öğrencinin tek noktada türev kavramının formel tanımına ilişkin geometrik boyutta eylem öncesi seviyede anlama sergilediğini göstermiştir. Özgür ile yapılan mülakatın bir kesiti şu şekildedir:

Araş. : Bu sorunun bizden ne istediğini sözel olarak bana anlatabilir misin?

Özgür : Bu şartı sağlayan en küçük epsilon değerini istiyor.

Araş. : Peki epsilon değişkenini içeren eşitsizliğin içerisindeki $\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ *ifadesi bize ne ifade eder geometrik olarak, yani düzlemde?*

Özgür : Teğetin eğimini.

Araş. : Hangi teğetin eğimi?

Özgür : Dört noktasındaki teğetin eğimi.

Araş. : Peki $f'(4)$ *bize neyi ifade eder?*

Özgür : O da teğetin eğimini ifade eder, o zaman mutlak değer içerisindeki bu fark sıfır olur.

Araş. : Peki $\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ *ifadesi ile f '(4) arasındaki fark ne, ikiside teğetin eğimini ifade ediyorsa.*

Özgür : [Biraz düşünüyor] Bilmiyorum.

Diyalogtan anlaşılacağı üzere öğrenci türevin limit tanımı içerisinde yer alan farkların bölümü ifadesinin düzlemde kesen doğrularının eğimine karşılık geldiğini bilmemektedir. Dolayısıyla öğrenci tek noktada türev kavramının formel tanımının geometrik anlamı hususunda eylem öncesi seviyede anlama sergilemektedir.

Gerçekleştirilen mülakatlardan elde edilen bulgular bazı öğrencilerin tek noktada türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna ilişkin eylem seviyesinde anlamaya sahip olduklarını göstermiştir. Bu anlama seviyesinde olan öğrenciler, farkların bölümü ifadesini kesen doğrularının eğimleri ile ilişkilendirebilmekte fakat eğimini hesaplayacakları noktalar açık olarak belirli olmadığında, kesen doğrularının eğimlerine ilişkin çıkarım yapamamaktadırlar. Dila ile yapılan mülakattan elde edilen bulgular, eylem seviyesinde anlamaya sahip olduğunu ortaya çıkarmaktadır. TFTT'nin 4'üncü sorusunun birinci şıkkı üzerinde gerçekleşen mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Burada epsilon değişkenini barındıran eşitsizlik grafiksel olarak bize ne söyler?

Dila : Bu noktayla [(2,2) noktasını kastediyor] oluşturduğumuz kesenlerin eğimi ile yine bu noktadaki [(2,2) noktasını kastediyor] teğetin eğimi arasındaki farkın mutlak değeri epsilondan yani $\frac{1}{2}$*'den küçük olmalı.*

Araş. : Tamam, peki bu grafik üzerinde verilen noktalar ile oluşturulan kirişlerin eğimi ile teğetin eğimi arasındaki farkı bulabilir misin?

Dila : İki noktası belli doğrunun eğimini bulma yöntemini kullanarak bulabilirim.

Araş. : Ne olur o zaman?

Dila : Bunu hesaplarsak [(2,2) ile $(\frac{24}{10},\frac{21}{10})$ *noktalarından geçen kirişin eğimini hesaplıyor] eğimi* $\frac{1}{4}$ *olur. Bunun ise [(2,2) ile* $(\frac{18}{10},\frac{175}{100})$ *noktalarından geçen kirişin eğimini hesaplıyor]* $\frac{5}{4}$ *olacak, bunun da [(2,2) ile* $(\frac{16}{10},\frac{12}{10})$

noktalarından geçen kirişin eğimini hesaplıyor] 2 olur, baktığımızda eğimleri $\frac{1}{4}$ ile $\frac{5}{4}$ olan kirişlerin eğimleri ile teğetin eğimi arasındaki fark tam $\frac{1}{2}$ oldu.

Araş. : Peki şimdi sana şunu sorayım. Bu elde ettiklerinden yola çıkarak bana grafik üzerinde, teğetin eğimi ile kendi eğim farkının mutlak değeri $\frac{1}{2}$ den küçük olan kesen doğrularının yerini söyleyebilir misin?

Dila : Söyleyebilir miyim [Biraz düşünüyor] onu nereden bulacağız ki ?

Araş. : Peki başka soru sorayım. Sen (2,2) ile $(\frac{24}{10},\frac{21}{10})$ noktalarından geçen kirişin eğimi ile (2,2) noktasındaki teğetin eğiminin farkının mutlak değerini $\frac{1}{2}$, (2,2) ile $(\frac{18}{10},\frac{175}{100})$ noktalarından geçen kirişin eğimi ile (2,2) noktasından geçen teğetin eğiminin farkının mutlak değerini de $\frac{1}{2}$ olarak buldun. Peki grafik üzerinde olmak şartıyla $\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ ile $(\frac{24}{10},\frac{21}{10})$ noktaları arasında keyfi bir nokta alalım ve bu nokta ile (2,2) noktasından geçen kirişi oluşturalım. Sence bu oluşturduğumuz kirişin eğimi ile teğetin eğimi arasındaki fark $\frac{1}{2}$ değerinden küçük olur mu?

Dila : [Biraz düşünüyor] Yok büyük olabilirdi.

Araş. : Nasıl büyük olurdu?

Dila : Burada keyfi seçtiğimiz noktanın koordinatlarını bilmiyoruz, o koordinatlara bağlı olarak büyükte çıkabilir küçükte.

Araş.: Koordinatlarını bilmediğimiz için kesin bilemeyeceğimizi mi söylüyorsun?

Dila : Tabi, şimdi bilsek az önce yaptığımız gibi hesaplayabilirdik, ama belirleyeceğimiz nokta keyfi olduğundan büyük mü olur küçük mü olur bilemeyiz.

Diyalogtan görüldüğü gibi, Dila oluşacak kirişlerin eğimi ile teğetin eğimi arasındaki farka yönelik muhakeme yapabilmek için, üzerinde eğim hesaplama eylemini gerçekleştireceği noktaların koordinatlarına ihtiyaç duymaktadır. Dila her bir nokta için bu eylemi gerçekleştirmeden, grafik üzerinde $\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ ile $(\frac{24}{10},\frac{21}{10})$ aralığında kesen doğrularının eğimlerini tasavvur edememekte, dolayısıyla teğetin eğimi ile farkına ilişkin çıkarım yapamamaktadır. Sonuç olarak Dila eylem seviyesinde anlama sergilemektedir.

Gerçekleştirilen mülakatlardan elde edilen bulgular bazı öğrencilerin tek noktada türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna ilişkin süreç seviyesinde anlamaya sahip olduklarını göstermiştir. Bu seviyede olan öğrenciler her ne kadar grafik üzerindeki bir aralıkta kesen doğrularının eğimleri ile teğetin eğimi arasındaki farka yönelik, kesen doğrularının geçtiği noktaların koordinatlarına gerek duymadan çıkarım yapabilseler de, bu süreci δ değişkeninin sınrladığı eşitsizliğin belirttiği süreç ile koordine edememektedirler. Deney grubu öğrencilerinden olan İrem ile yapılan mülakattan elde edilen bulgular öğrencinin süreç seviyesinde anlama sergilediğini göstermiştir. İrem ile TFTT'nin dördüncü sorusunun birinci şıkkı üzerinde gerçekleşen mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ *ifadesinin düzlem üzerinde geometrik anlamı nedir?*

İrem : (2, f(2)) ile (x, f(x)) noktalarından geçen kesen doğrusunun eğimini, $f'(2)$ *de teğetin eğimi verir.*

Araş. : O zaman bu epsilon değişkeninin sınırladığı mutlak değerli ifade ne söyleyecek?

İrem : Bir noktası (2, f(2)) olan kesen doğrularının eğimi ile teğetin eğimi arasındaki farkın mutlak değeri küçük epsilon yani $\frac{1}{2}$ *değerinden küçük olmalı.*

Araş. : Grafik üzerinde bazı noktalar verilmiş bize, bunlardan yararlanarak epsilon değişkeninin sınırladığı eşitsizliği gerçekleyen kesen doğrularının nerede olduğunu bulabilir misin?

İrem : Bakayım, burada o zaman bu noktayı alırsak [$\left(\frac{24}{10},\frac{21}{10}\right)$ *noktasını kastediyor] buradan geçen kesen doğrusunun eğimi [* $\left(\frac{24}{10},\frac{21}{10}\right)$ *ile (2,2) noktalarından geçen kesen doğrusunu çizerek eğimini hesaplıyor]* $\frac{1}{4}$ *olacak. O zaman bunun eğimi ile teğetin eğimi farkı* $\frac{1}{2}$ *olur, yani tam epsilona eşit oldu.*

Araş. : Tamam $\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ *ile (2,2) noktalarından geçen kesen doğrusunun eğimi ne olur?*

İrem : Onu da bulalım [$\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ *ile (2,2) noktalarından geçen kesen doğrusunu çizerek eğimini hesaplıyor]* $\frac{5}{4}$ *olacak, bunun teğetin eğimi ile farkı, bu da* $\frac{1}{2}$ *oldu, bu taktirde buradaki bütün noktalarda fark küçük olacak.*

Araş. : Neredeki noktalarda?

İrem : Bu iki nokta arasında [$\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ *ile* $\left(\frac{24}{10},\frac{21}{10}\right)$ *noktalarını kastediyor].*

Araş. : Şunu sorayım sana, grafik üzerinde söylediğin iki nokta arasında keyfi bir nokta alsak ve diğer noktası (2,2) olan kesen doğrusunu oluştursak, oluşan kesen doğrusunun eğimi ile teğetin eğimi arasındaki fark $\frac{1}{2}$ *den küçük olur mu?*

İrem : Yaklaşırsak bu noktaya doğru [(2,2) noktasını kastediyor] eğimler daha da yaklaşacak teğetin eğimine, o zaman çıkarma işlemide yani farkta daha da küçülecek yani $\frac{1}{2}$*'den daha küçük olacak.*

Araş. : Bu taktirde keyfi seçtiğimiz nokta bu şartı [$\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f'(2)\right| < \mathcal{E}$ *kastediliyor] sağlar mı?*

İrem : Evet sağlar.

Buraya kadar olan diyalogtan görüldüğü üzere İrem, soru içerisindeki şartın grafiksel olarak düzlemde ne anlam ifade ettiğini belirleyebilmiş, bununla birlikte grafik üzerinde $\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ ile $\left(\frac{24}{10},\frac{21}{10}\right)$ noktaları arasında keyfi olarak oluşturulan kesen doğrularının eğimi ile teğetin eğimi arasındaki farka yönelik, bu seçilen keyfi noktanın koordinatlarına ihtiyaç duymadan çıkarım yapabilmiştir. Sonuç olarak öğrenci süreç seviyesinde anlama sergilemiştir. Mülakatın devamında İrem'in bu süreci delta değişkeninin belirlediği süreç ile koordine edemediği dolayısıyla bu iki sürecin sonucu olarak bir noktada türev kavramının formel tanımını, bir nesne oluşturacak şekilde yapılandıramadığı belirlenmiştir. Bu durumun ortaya çıktığı diyalog şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araş. : Soruda bizden ne isteniyor?

İrem : Delta değerini istiyor.

Araş. : Delta değerine ilişkin bir şey söyleyebilir misin?

İrem : [Biraz düşünüyor fakat cevap yok]

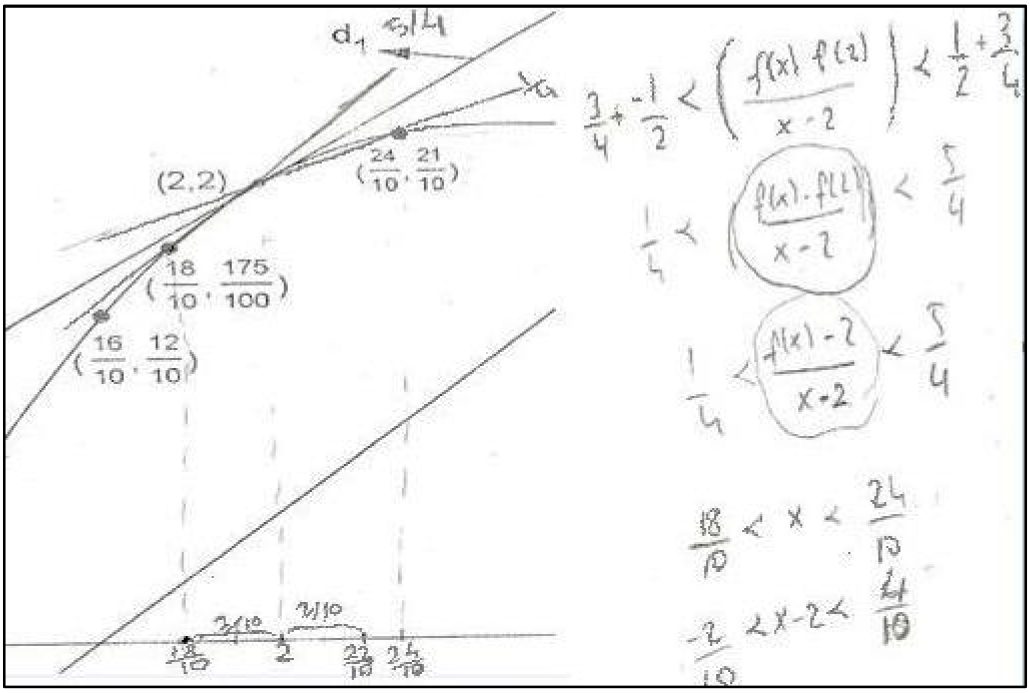
Araş. : Tamam şöyle sorayım $|x-2| < \delta$ *olması ne demek?*

İrem : x değişkeninden ikiyi çıkardığımızda deltadan küçük olması demek.

Araş. : Peki soruda $|x-2| < \delta$ *eşitsizliği ile* $\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f'(2)\right| < \mathcal{E}$ *eşitsizliği birbirine nasıl bağlı?*

İrem : [Biraz düşünüyor] bilmiyorum.

Diyalogtan anlaşıldığı üzere İrem δ değişkeninin sınırladığı eşitsizlik ile $\mathcal{E}$ değişkeninin sınırladığı eşitsizlik arasındaki bağlantıyı kuramamıştır. Bu iki eşitsizliğin belirttiği süreçleri bilmesine rağmen bunları birbiri ile koordine ederek tek bir nesne oluşturacak şekide yapılandıramadığı görülmektedir. Sonuç olarak İrem'in tek noktada türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna ilişkin anlama seviyesi süreç seviyesinde kalmıştır. Gerçekleştirilen mülakatlarda bazı öğrencilerin ifade edilen bu iki durumu birbiri ile koordine ederek nesne seviyesinde anlama gerçekleştirdiği ortaya çıkmıştır. Deney grubu öğrencilerinden olan İnci bu öğrencilerden biriydi. İnci'nin TFTT'nin dördüncü sorusunun birinci şıkkında yaptığı çizimler ve işlemler şekil 20'de verilmiştir.



Şekil 20. İnci'nin TFTT'nin 4'üncü sorusunun birinci şıkkı üzerinde yaptığı çizimler ve işlemler

İnci'nin tek noktada türev kavramının formel tanımına ilişkin anlamasının nesne seviyesinde olduğuna işaret eden mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Evet soruya baktığımızda epsilon değeri $\frac{1}{2}$ *verilmiş bu şartı sağlayan delta değeri soruluyor sana.*

İnci : Soruda x=2 noktasında türev $\frac{3}{4}$ *olarak verilmiş, epsilon değerinin* $\frac{1}{2}$ *olduğunu biliyorum, deltayı bulacağım, epsilon değerini yazıp bu eşitsizliği açsam.*

Araş. : İstediğini yapabilirsin.

İnci : [İnci şekil 20'de görülen işlemleri yaparak kesen doğrularının eğimlerinin olması gereken aralığı buluyor] $\frac{1}{4}$ *ile* $\frac{5}{4}$ *arasındaymış.*

Araş. : $\frac{1}{4}$ *ile* $\frac{5}{4}$ *arasında olan ne?*

İnci : İşte bölüm halindeki ifade.

Araş. : Peki o bölümlü ifadenin geometrik anlamı ne, yani düzlemde ne anlam belirtir?

İnci : Eğimi verir, (x,f(x)) ile (2, f(2)) noktalarından geçen kirişin eğimini.

Araş. : Peki bu grafik üzerinde yer alan noktalardan yararlanarak bu şartı sağlayan kirişlerin nerede olduğunu bulabilir misin?

İnci : Tamam bunu alırsak [$\left(\frac{24}{10},\frac{21}{10}\right)$ *ile (2,2) noktalarından geçen kirişi çizerek eğimini buluyor] eğimi* $\frac{1}{4}$ *olacak, şunla şuna bakarsak [*$\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ *ile (2,2) noktalarından geçen kirişi çizerek eğimini buluyor]* $\frac{5}{4}$ *olur eğim. O zaman bunların arasında, bu noktaların arasında olması gerekiyor.*

Araş. : Onların arasında olan ne?

İnci : Yani (2,2) noktasından geçecek kirişlerin eğimleri bu aralıkta olması için diğer noktanın bu ikisi [$\left(\frac{24}{10},\frac{21}{10}\right)$ *ile* $\left(\frac{18}{10},\frac{175}{100}\right)$ *noktalarını kastediyor] arasında olması lazım.*

Araş. : Peki deltayı nasıl bulacağız şimdi?

İnci : Bu noktaların apsislerine bakarsak [$\frac{24}{10}$*, 2 ve* $\frac{18}{10}$ *değerlerini x ekseni üzerinde işaretliyor] x değişkeninin aralığı bu şekilde [x-ekseni üzerinde* $\frac{24}{10}$ *ile* $\frac{18}{10}$ *noktaları arasındaki aralığı kastediyor] olmalı.*

Araş. : Tamam deltayı nasıl bulursun buradan?

İnci : İlk önce x-2 için aralığı oluşturalım [az önce x değişkeni için bulduğu aralıktan x-2 aralığını oluşturuyor] o da bu olur, ama burada iki taraf birbirine eşit çıkmadı [Grafik üzerinde biraz düşünüyor] $\frac{2}{10}$ *olmalı delta değeri.*

Araş. : Niçin $\frac{2}{10}$ *olmalı,* $\frac{4}{10}$ *olarak niçin seçmedin?*

İnci : Çünkü $\frac{18}{10}$ *değerine* $\frac{2}{10}$ *kadar uzaktayız,* $\frac{24}{10}$ *değerine ise* $\frac{4}{10}$ *kadar uzaktayız, aralığımız bu bunu daha çok açamayız, yani* $\frac{4}{10}$ *kadar açsak sol taraftan aralığın dışına kayarız.*

Araş. : Peki sol tarafa kaysak ne olur?

İnci : Şartımızı bozarız, çünkü kesen doğrusunun eğimi $\frac{5}{4}$'den büyümeye başlardı, büyürse de teğetin eğimi ile farkı açılacaktı.

Araş. : Peki delta değerini $\frac{2}{10}$ değerinden küçük seçebilir miydik?

İnci : Seçebilirdik, daha yakın bir komşuluk alabilirdik, çünkü o zaman kirişlerin eğimleri yine bu aralıkta kalırdı.

Diyalogtan anlaşıldığı üzere, İnci delta değişkeni ile epsilon değişkeninin sınırlandırdığı eşitsizliklerin belirttiği süreçlerin grafiksel olarak ne anlam ifade ettiğinin farkında olup, bu iki durumu birbiri ile koordine edebilmektedir. Bunun sonucu olarak İnci, delta değişkeninin sınırladığı eşitsizliğin belirttiği sürecin üzerinde yapılan dönüşümlerin, epsilon değişkeninin sınırladığı eşitsizliğin belirttiği süreç üzerinde nasıl etki yaptığını belirleyebilmekte, iki süreç arasındaki koordinasyonu sağlayabilmektedir. Böylece delta değişkenin $\frac{2}{10}$ değerinden daha küçük bir değeri için, epsilon değişkeninin sınırlandırdığı eşitsizliğin belirttiği süreci zihninde test ederek istenen şartın sağlanıp sağlanmayacağını belirleyebilmektedir. Sonuç olarak İnci bu iki sürecin koordinasyonu sonucunda, tek noktada türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna ilişkin nesne seviyesinde anlama gerçekleştirmiştir.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda görüşme yapılan öğrencilerin belirlenen anlama seviyeleri ve TFTT'den aldıkları puanlar Tablo 19'da verilmiştir.

Tablo 19. Mülakat Öğrencilerinin Belirlenen Anlama Seviyeleri ve TFTT Puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
TFTT Puanı	11	14	5	16	3	8	8	5	4	13	14	7	16	8	12	17	18	13
Anlama Seviyesi	E	S	EÖ	N	EÖ	E	E	EÖ	EÖ	S	S	E	N	E	S	N	N	S

EÖ: Eylem Öncesi; E: Eylem; S: Süreç; N: Nesne

4.4. Fonksiyon ve Türev Fonksiyonu Grafikleri Arasındaki İlişkileri Anlamaya Yönelik Elde Edilen Bulgular

4.4.1. Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-I ile Elde Edilen Bulgular

Gerçekleştirilen iki farklı öğretim yönteminin, öğrencilerin fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlamaları üzerindeki etkililiğini belirlemek için, öğrencilerin FBTT-I'de elde ettikleri düzeltilmiş puanları üzerinde tek yönlü gruplar arası kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Grupların çalışmanın başında elde ettikleri YT puanları ortak değişken olarak alınmıştır. Analizin öncesinde eldeki verilerin kovaryans analizinin ön varsayımları olan bağımlı değişken ile ortak değişken arasında doğrusal bir ilişkinin bulunması, regresyon doğrularının eğimlerinin homojenliği ve gruplar içi varyansın homejenliği kriterlerini ihlâl edip etmediği sınanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar herhangi bir varsayımın ihlâl edilmediğini göstermiştir. FBTT-I sonucu grupların ham ve düzeltilmiş puanlarının betimsel istatistikleri Tablo 20'de sunulmuştur.

Tablo 20. Deney ve Kontrol Gruplarının FBTT-I Puanlarının Betimsel İstatistikleri

		FBTT-I Puanı		Düzeltilmiş FBTT-I Puanı	
	n	$\bar{x}$	SS	$\overline{x_d}$	SH
Deney Grubu	40	14.10	2.73	13.98	.33
Kontrol Grubu	37	10.90	3.14	10.97	.34
Toplam	77	12.53	2.41		

$\overline{x_d}$: Düzeltilmiş FATT-I Puan Ortalaması

Tablo 20'den görüldüğü gibi deney grubu öğrencilerinin FBTT-I puan ortalaması kontrol grubu öğrencilerinin ortalamasından daha büyüktür. Bu farkın anlamlı olup olmadığını belirlemek için, iki grubun YT puanları kontrol değişkeni olarak alınarak kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Yapılan kovaryans analizinin sonuçları Tablo 21'de verilmiştir.

Tablo 21. FBTT-I'den Elde Edilen Düzeltilmiş Puanlara Ait ANCOVA Sonuçları

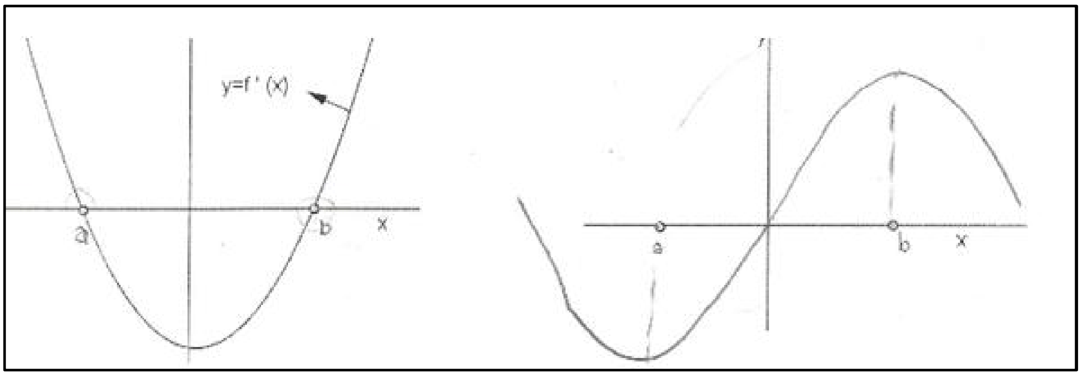
Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	sd	Kareler Ortalaması	F	Anlamlılık Değeri(p)	Etki Büyüklüğü (eta kare)
Yordama Testi	328.94	1	328.94	76.90	.00	.51
Tablo 23'ün devamı						
Grup	174.07	1	312.51	40.69	.00	.36
Hata	316,531	74	6.12			
Toplam	837,169	76				

Gerçekleştirilen kovaryans analizi sonuçlarına göre, deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin Yordama testinden aldıkları puanlar kontrol altına alındığında, FBTT-I puan ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık bulunmaktadır [$F_{(1-74)}$=40.69, p<.01].

4.4.2. FBTT-I ile İlgili Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Mülakat öğrencilerinin bir fonksiyonun grafiği ile fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik anlama seviyelerini belirlemek için, FBTT-I testi içerisinde yer alan sorular üzerinde mülakatlar gerçekleştirildi. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda öğrencilerin geometrik boyutta bir fonksiyonun grafiği ile fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik anlama seviyeleri, eylem öncesi, eylem, süreç ve nesne olarak belirlendi. Takip eden kısımda öğrencilerin bu anlama seviyelerine nasıl atandığını örneklemek adına, her bir anlama seviyesi için örnek mülakat kesitleri verilmiştir.

Fonksiyonun grafiği ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik eylem öncesi kategorisine dâhil edilen Veysel'in genel özelliği, ezber niteliğinde bile olsa fonksiyon grafiğinin artma-azalma ve konveks-konkav karakteristikleri ile birinci ve ikinci türevleri arasında hiçbir ilişki oluşturamaması olarak ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte Veysel'in fonksiyon grafiklerinden, fonksiyonun birinci ve ikinci türev fonksiyonlarına ilişkin çıkarım yapamadığı gözlenmiştir. Veysel'in eylem öncesi anlamaya sahip olduğuna işaret eden FBTT-I içerisindeki ikinci soruya verdiği cevap Şekil 21'de görülmektedir.



Şekil 21. Veysel'in FBTT-I 2'nci sorudaki yanıtı

Veysel ile bu soru çerçevesinde gerçekleşen mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Çizdiğin grafikte bir tane yerel maksimum bir tane de yerel minimum noktası oluşturdun.

Veysel : Evet.

Araş. : Peki bu noktaların maksimum ve minimum olduğuna nasıl karar verdin?

Veysel : Türev değeri bu noktalarda sıfır olduğu için.

Araş. : Peki burada [x=a noktası kastediliyor] niçin maksimum nokta olmadı da minimum nokta oldu?

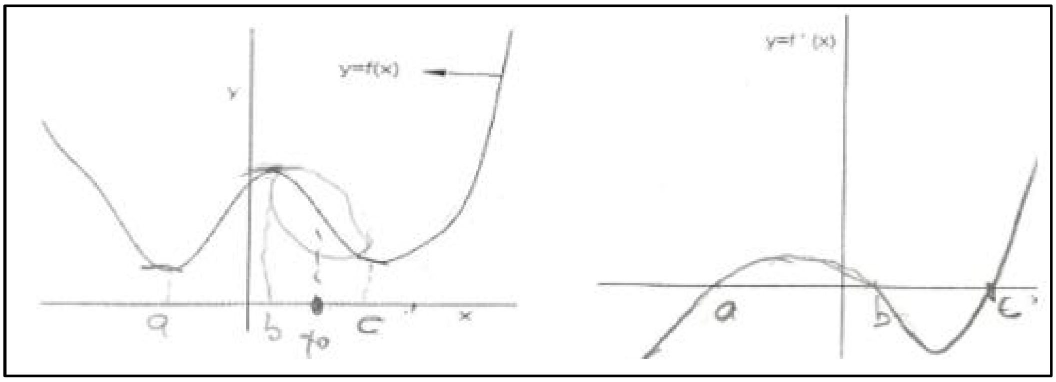
Veysel : O farketmez.

Araş. : Nasıl yani?

Veysel : Bu fonksiyonun formülünü bilmediğimiz için değer veremiyoruz, yani burası [x=a noktasını kastediyor] maksimumda olabilirdi, minimum da. Ben a noktasının minimum olduğuna b noktasınında maksimum olduğuna karar verdim.

Diyalogtan anlaşılacağı üzere, Veysel fonksiyonun grafiğini oluşturmada türev fonksiyonunun işareti ile fonksiyonun artan azalan olma durumunu hiç dikkate almamış, sadece türev fonksiyonunun sıfır olduğu noktaları dikkate almıştır. Veysel yine bu stratejiyi kullanarak FBTT-I içerisindeki 3'üncü soruda tüm eğrilerin olabileceğini belirtmiştir. Öğrencinin maksimum ve minimum noktaları tam olarak belirlemede fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç duyması, türev fonksiyonunun işareti ile fonksiyonun artan–azalan karakteristiği arasındaki ilişkiye yönelik geometrik boyutta eylem öncesi seviyede anlama sergilediğini ortaya koymaktadır.

Öğrenciler ile gerçekleştirilen mülakatlarda bazı öğrencilerin geometrik boyutta fonksiyonun grafiği ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik eylem seviyesinde anlama geliştirdiği belirlenmiştir. Bu seviyede olan öğrenciler her ne kadar tek noktada bir fonksiyonun grafiğinden türevinin negatif ya da pozitif olduğunu belirleyebilseler de, bir aralık boyunca fonksiyonun türev değerlerini tasavvur ederek, bu durumun fonksiyonun artan-azalan ve konveks-konkav karakteristikleri arasındaki ilişkisini grafiksel olarak oluşturamamışlardır. Bu durumun doğal bir sonucu olarak bu öğrenciler fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları ile türevin işaretindeki değişimi grafiksel boyutta gerekçelendirememektedir. Yine bu öğrencilerin fonksiyonun artan-azalan ve konveks-konkav karakteristikleri ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkiye yönelik bilgileri ezber niteliğindedir. Ersel ile yapılan mülakatın birinci soru üzerinde gerçekleşen kısmı öğrencinin eylem seviyesinde anlamaya sahip olduğunu gösterdi. Ersel'in birinci soruya verdiği cevap şekil 22'de verilmiştir.



Şekil 22. Ersel'in FBTT-I birinci soruya verdiği cevap

Ersel ile birinci soru çerçevesinde yaşanan diyaloğun bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Niçin bir fonksiyonun türevi negatif ise fonksiyon azalan oluyor?

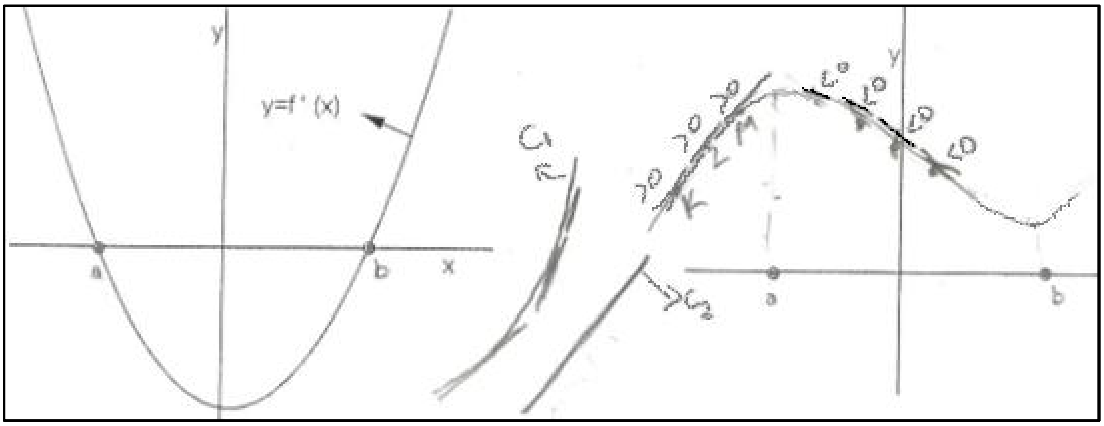
Ersel : Fonksiyonda mesela 1 koyunca ve 2 koyunca ilkinde daha büyük değer elde ediyorsak azalandı ama niçin azalan bilmiyorum türevi negatif ise.

Araş. : Peki şimdi sana şunu sorayım y = f(x) fonksiyonunun grafiğinde b ve c noktaları arasında bir x_o noktası alalım, burada türev negatif mi olur pozitif mi?

Ersel *: Negatiftir.*

Diyalogtan anlaşıldığı gibi, Ersel her ne kadar tek noktada fonksiyonun grafiğinden türev fonksiyonunun işaretine ilişkin çıkarımda bulunabilse de, bir aralık boyunca türev fonksiyonunun aldığı değerleri tasavvur ederek, fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile ilişkilendirememektedir. Öğrencinin fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile türev fonksiyonun işareti arasındaki ilişkiye yönelik bilgisi ezber niteliğindedir. Ersel FBTT-I'in dördüncü sorusunda fonksiyonun konveks-konkav karakteristiğini, soruda verilen ikinci türev fonksiyonunun işaretine bağlı olarak belirleyebilmiştir. Fakat niçin öyle olduğu sorusuna cevap veremeyerek ezber niteliğinde bilgiye sahip olduğunu göstermiştir. FBTT-I'in altıncı sorusunda ise Ersel yine ezber niteliğindeki bilgisini kullanarak soruda verilen birinci türev fonksiyonunun grafiğinden fonksiyonun artan-azalan karakteristiğine yönelik önermelere doğru cevap verebilmiş, fakat fonksiyonun konveks-konkav karakteristiğine ilişkin çıkarım yapabilmek için gereken bilgiyi birinci türev fonksiyonunun grafiğinden elde edemediğinden, konveks-konkav karakteristiğine ilişkin önermeleri bilinemez olarak sınıflamıştır. Sonuç olarak Ersel'in sorularda sergilediği performans eylem seviyesinde anlamaya sahip olduğunu göstermektedir.

Yapılan mülakatlar sonucunda öğrencilerin bir kısmının grafiksel boyutta fonksiyonun grafiği ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik süreç seviyesinde anlama geliştirebildikleri ortaya çıkmıştır. Bu seviyede anlama sergileyen öğrenciler, bir fonksiyonun türev fonksiyonunun işaretinin pozitif veya negatif olması ile fonksiyonun artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkiyi grafiksel boyutta gerekçelendirebilmektedirler. Bunun sonucunda bu öğrenciler fonksiyonun maksimum ve minumum noktaları ile türevin işareti arasındaki ilişkiyi, fonksiyon grafiği üzerinde çizdikleri teğetler ve bu teğetlerin eğimlerinde meydana gelen değişim ile açıklayabilmektedir. Fakat bu öğrenciler türev fonksiyonunu bir nesne olarak alıp bu nesne üzerinde tekrar türev alma sürecini gerçekleştirememelerinden ötürü, ikinci mertebeden türev fonksiyonunun işareti ile fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi grafiksel boyutta kuramamaktadır. Dolayısıyla bu husustaki bilgilerinin ezber niteliğinde olduğu ortaya çıkmıştır. Sinan'ın FBTT-I'in ikinci sorusunda ortaya koyduğu gerekçeler öğrencinin süreç seviyesinde anlamaya sahip olduğunu göstermiştir. Sinan'ın soruya ilişkin cevabı ve yaptığı çizimler şekil 23'de görülmektedir.



Şekil 23. Sinan'ın FBTT-I'in ikinci sorusunda yaptığı çizimler

Sinan ile bu soru bağlamında gerçekleşen diyaloğun bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Sana burada bir şey sormak istiyorum. Fonksiyonun türevi pozitif ise neden fonksiyon artan oluyor?

Sinan : Teğetin eğimi ile alakalı, sonuçta pozitif olacak ki fonksıyon artan olsun. Mesela bu çizdiğimiz grafiğe bakarsak a noktasının solunda K, L, M noktaları alalım bu noktalardaki teğetlerin eğimine bakarsak hepsi sıfırdan büyük, yani türevin işareti pozitif.

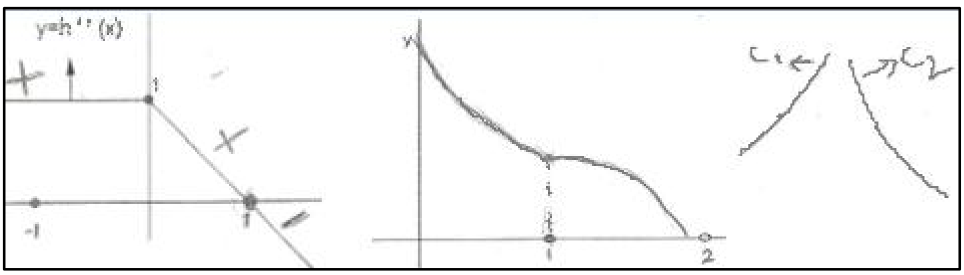
Araş. : Peki bir fonksiyon artan ve grafiği bu şekilde ise dediğin doğru. Peki fonksiyon artan ve grafiği başka şekilde olduğunda yine doğru olur mu? Yani genel olarak konuşursak her zaman doğru olur mu?

Sinan : Mesela fonksiyon artan ise grafiği bu şekilde de [Sinan C_1 eğrisini çiziyor] olabilir. Yine bu durumda da teğetler çizersek grafiğe eğimler hep pozitif yani türevin işareti pozitif, doğrusal olsaydı da durum değişmezdi [Sinan C_2 eğrisini çiziyor] böyle doğrusal olsaydı eğimler sabit ama pozitif, türev pozitif olur.

Araş. : Tamam eğer bir noktada türev sıfır ve o noktada pozitiften negatife geçiyor ise yerel maksimum nokta olur demiştin az önce. Bunu teğetler ile ilişkisini kurabilir misin?

Sinan : [Sağ tarafta yer alan kendi çizdiği eğri üzerinde konuşuyor] Burada a noktasında türev sıfır, solunda az önce teğetlerin eğimleri sıfırdan büyük dedik, sağına bakarsak mesela yine noktalar alıp teğetler çizelim, burada teğetlerin eğimi negatif yani fonksiyon azalan dolayısıyla a noktasına kadar artıyor sonra azalıyor yani fonksiyon "a" noktasında doyuma ulaşıyor.

Sinan'ın sunduğu gerekçelerden görüldüğü üzere, türev fonksiyonunu bir aralık boyunca teğetlerin eğimleri ile yorumlayarak fonksiyonun artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkiyi geometrik boyutta oluşturabilmiştir. Sonuç olarak Sinan süreç seviyesinde anlamaya sahiptir. Sinan ile FBTT-I'in dördüncü sorusu üzerinde yaşanan diyalogta anlama seviyesinin nesne düzeyine ulaşamadığı ortaya çıkmıştır. Sinan'ın dördüncü soruya ilişkin cevabı Şekil 24'de verilmiştir.



Şekil 24. Sinan'ın FBTT-I dördüncü soruya ilişkin cevabı

Sinan ile dördüncü soru bağlamında yaşanan diyaloğun bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : *Bir fonksiyonun ikinci türevi pozitif ise niçin fonksiyonun grafiği konveks oluyor?*

Sinan: *Çünkü fonksiyonun türevi pozitif değer alıyor, türevi pozitif değer aldığı içinde ikinci türevi pozitif oluyor.*

Araş. : *Peki o zaman şu eğriye dikkatini çekmek istiyorum* [araştırmacı C_1 eğrisini çiziyor]. *Bu eğri konveks mi konkav mı?*

Sinan : *Konveks.*

Araş. : *Peki bu eğriye teğetler çizsem eğimleri ne olur?*

Sinan : *Pozitif.*

Araş. : *Peki şu* [araştırmacı C_2 eğrisini çiziyor] *konveks midir ?*

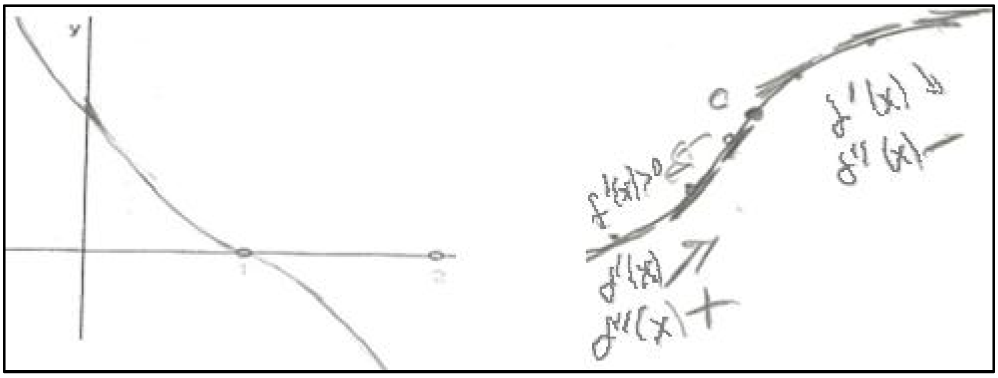
Sinan : *Evet bu sefer eğimler negatif olur, az önce söylediğim olmadı o zaman.*

Araş. : *O zaman bir eğri konveks ise ona çizdiğimiz teğetlerin eğimi pozitifte olur negatifte. Peki ikinci türev ile nasıl ilişkisi var konveksliğin, ikinci türev sıfırdan büyükse niçin konveks diyorsun?*

Sinan : *Hımm..* [biraz düşünüyor] *bir saniye... pozitiften negatifliğe geçince ikinci türev, konveksten konkavlığa geçiyor, ama diyorsunuz ki neden pozitif ise konveks* [biraz düşünüyor]. *Bilemeyeceğim, onun nedenini anlamadım.*

Diyalogta görüldüğü gibi, Sinan bir aralık boyunca türev fonksiyonunu bir nesne olarak ele alarak bu nesne üzerinde türev alma işlemini gerçekleştiremediğinden, ikinci türev fonksiyonunun işareti ile fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi grafiksel olarak yorumlayamamaktadır. Mülakatın devamında benzer olarak Sinan ikinci türev fonksiyonunun işaretinin negatif olması ile fonksiyonun konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi açıklayamamıştır. Bununla birlikte Sinan FBTT-I'in altıncı sorusunda türev fonksiyonunun grafiğinden fonksiyonun artan azalan olduğu aralıkları belirleyebilmiş, fakat birinci türev fonksiyonu grafiğinden yola çıkarak fonksiyonun konveks-konkav karakteristiğine ilişkin yorum yapamamıştır. Yine öğrencinin altıncı sorudaki bu performansı türev fonksiyonunu bir nesne olarak alıp, bu nesnenin üzerine türev işlemini uygulayamamaktan kaynaklanmaktadır. Sonuç olarak Sinan grafiksel boyutta bir fonksiyonun artan-azalan, konkav-konveks karakteristikleri ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik süreç seviyesinde anlama sergilemektedir.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda bazı öğrencilerin grafiksel boyutta fonksiyonun grafiği ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkilere yönelik nesne seviyesinde anlama geliştirdikleri belirlenmiştir. Bu seviyede anlama sergileyen öğrenciler, hem bir fonksiyonun türev fonksiyonunun işaretinin pozitif veya negatif olması ile fonksiyonun artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkiyi, hem de bir fonksiyonun ikinci mertebeden türev fonksiyonun işareti ile fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi grafiksel boyutta gerekçelendirebilmektedirler. Melih nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrencilerden biriydi. Melih ile FBTT-I'in ikinci sorusunda yapılan mülakatta Sinan'ın sergilediği performansa benzer bir performans segileyerek süreç seviyesinde anlamaya sahip olduğu ortaya çıktı. Bunun yanında Melih'in, Sinan'dan farklı olarak ikinci türev fonksiyonunun işareti ile fonksiyonun konveks – konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi gerekçelendirebildiği FBTT-I'in dördüncü sorusunda yapılan mülakatta ortaya çıktı. Melih'in dördüncü sorudaki cevabı şekil 25'de verilmiştir.



Şekil 25. Melih'in FBTT-I dördüncü soruya verdiği cevap ve yaptığı çizimler

Melih ile dördüncü soruda yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : İkinci türev fonksiyonunun işareti pozitiften negatife geçtiğinde niçin eğri konvekslikten konkavlığa geçiyor ?

Melih : Çünkü, mesela şöyle bir eğrimiz olsun [Şekil 25'de sağ tarafta yer alan yapıyı oluşturuyor] c noktası büküm noktası olsun. Burada c noktasının sağında da solunda da teğetlerin eğimi pozitif yani birinci türevin işareti pozitif.

Araş. : Tamam birinci türevler pozitif ikinci türevlerine ilişkin nasıl çıkarım yaparsın?

Melih : C noktasının sol tarafına bakarsak eğimler pozitif yani birinci türev pozitif ama teğeti c noktasına doğru sürüklersek teğetin eğimi gitgide artıyor, yani teğetin eğimi artan, teğetin eğimini de bize türev veriyordu o zaman türev fonksiyonu artan bir fonksiyon burada.

Araş. : Anladım, peki devam et.

Melih : Ne demiştik, türevi artan o zaman burada, o zaman, bunun türevini alırsak pozitif olur artan olduğundan, yani türevin türevini aldık, yani ikinci türev pozitif.

Araş. : Peki sağ [Melih'in oluşturduğu yapıda c noktasının sağ tarafı kastediliyor] tarafta ne oluyor?

Melih : Buraya bakarsak burada da eğimler pozitif ama teğeti taşırsak sağa doğru eğimi giderek azalıyor eğimler, o zaman, türev azalan bir fonksiyon yani birinci türevi, onun da türevini alırsak, azalan olduğu için türevi negatif olacak.

Araş. : Sonuç olarak ne elde ettin?

Melih : İkinci türev pozitiften negatife işaret değiştirirse, fonksiyonda konvekslikten konkavlığa geçecek.

Yaşanan diyalogtan görüldüğü üzere, Melih bir fonksiyonun konkav-konveks karakteristiği ile ikinci türev fonksiyonunun işaret arasındaki ilişkiye yönelik, fonksiyon grafiği üzerinde çizdiği teğetler vasıtasıyla çıkarım yapabilmektedir. Melih muhakeme sürecinde grafik üzerinde birinci türev fonksiyonunu bir nesne olarak kullanabilmekte, böylece bu nesne üzerine tekrar uyguladığı türev alma işlemi sonucunda fonksiyonun ikinci mertebeden türev fonksiyonunu grafiksel olarak oluşturabilmekte, teğetlerin eğimlerinden ikinci türev fonksiyonunun işaretine ulaşabilmektedir. Melih benzer muhakeme sürecini FBTT-I'in altıncı sorusunda verilen türev fonksiyonu grafiği üzerinde uygulayarak, konveks-konkav karakterisitiğini içeren önermeleri doğru olarak sınıflandırabilmiştir. Sonuç olarak Melih, grafiksel boyutta bir fonksiyonun grafiği ile birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları arasındaki ilişkiye yönelik nesne seviyesinde anlamaya sahiptir.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda görüşme yapılan öğrencilerin belirlenen anlama seviyeleri ve FBTT-I'den aldıkları puanlar Tablo 22'de verilmiştir.

Tablo 22. Mülakat Öğrencilerinin Belirlenen Anlama Seviyeleri ve FBTT-I Puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
FBTT-I Puanı	10	9	16	13	6	17	8	9	8	14	18	17	14	13	16	19	18	14
Anlama Seviyesi	E	E	N	S	EÖ	N	E	E	E	S	N	N	S	S	N	N	N	S

EÖ: Eylem Öncesi; E: Eylem; S: Süreç; N: Nesne

4.5. Türev Fonksiyonunun Geometrik Boyutunu Anlamaya İlişkin Elde Edilen Bulgular

4.5.1. Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-II ile Elde Edilen Bulgular

Gerçekleştirilen iki farklı öğretim yönteminin, öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlamaları üzerindeki etkililiğini belirlemek için, öğrencilerin FBTT-II'de elde ettikleri düzeltilmiş puanları üzerinde tek yönlü gruplar arası kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Grupların çalışmanın başında elde ettikleri YT puanları ortak değişken olarak alınmıştır. Analizin öncesinde mevcut verilerin kovaryans analizinin ön varsayımları olan bağımlı değişken ile ortak değişken arasında doğrusal bir ilişkinin bulunması, regresyon doğrularının eğimlerinin homojenliği ve gruplar içi varyansın homejenliği kriterlerinin ihlâl edip etmediği sınanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar herhangi bir varsayımın ihlâl edilmediğini göstermiştir. FBTT-II sonucu grupların ham ve düzeltilmiş puanlarının betimsel istatistikleri Tablo 23'de sunulmuştur.

Tablo 23. Deney ve Kontrol Gruplarının FBTT-II Puanlarının Betimsel İstatistikleri

		FBTT-II Puanı		Düzeltilmiş FBTT-II Puanı	
Grup	n	$\bar{x}$	SS	$\overline{x_d}$	SH
Deney Grubu	40	22.43	5.60	22.10	.64
Kontrol Grubu	38	16.87	4.22	17.21	.66
Toplam	78	19.72	5.68		

$\overline{x_d}$: Düzeltilmiş FBTT-II Puan Ortalaması

Tablo 23'den görüldüğü gibi deney grubu öğrencilerinin FBTT-II puan ortalaması kontrol grubu öğrencilerinin ortalamasından daha büyüktür. Bu farkın anlamlı olup olmadığını belirlemek için, iki grubun YT puanları kontrol değişkeni olarak alınarak kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Yapılan kovaryans analizinin sonuçları Tablo 24'de verilmiştir.

Tablo 24. FBTT-II'den Elde Edilen Düzeltilmiş Puanlara Ait ANCOVA Sonuçları

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	sd	Kareler Ortalaması	F	Anlamlılık Değeri(p)	Etki Büyüklüğü (eta kare)
Yordama Testi	646.68	1	646.68	39.32	.00	.34
Grup	458.40	1	458.40	27.87	.00	.27
Hata	1233,44	75	16.45			
Toplam	2481,80	77				

Gerçekleştirilen kovaryans analizi sonuçlarına göre, deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin Yordama testinde aldıkları puanlar kontrol altına alındığında, FBTT-II puan ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık bulunmaktadır [$F_{(1-75)}$=27.87, p<.01].

4.5.2. FBTT-II ile İlgili Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Mülakat öğrencilerinin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna yönelik oluşturdukları anlama seviyelerini belirlemek için, mülakat öğrencileri ile FBTT-II testi içerisinde yer alan sorular üzerinde mülakatlar gerçekleştirildi. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna ilişkin anlama seviyeleri, eylem öncesi, eylem, süreç ve nesne olarak belirlendi. Takip eden kısımda öğrencilerin bu anlama seviyelerine nasıl atandığını örneklemek adına, her bir anlama seviyesi için örnek mülakat kesitleri verilmiştir.

Türev fonksiyonunun geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi kategorisine dâhil edilen tek öğrenci kontrol grubunda yer alan Erkan olarak belirlendi. Erkan, her ne kadar grafik üzerinde verilen teğetin eğiminin o noktada fonksiyonun türev değeri olduğunu bilse de, bir noktada teğet verilmediğinde türev fonksiyonunun değerine ilişkin çıkarım yapamamaktadır. Erkan ile FBTT-II'nin birinci sorusunun dördüncü şıkkı üzerinde gerçekleşen diyaloğun bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Dördüncü şıkka bakalım.

Erkan : x = 4 ise g(x) = -1 olabilir diyor bize. Bizim burada fonksiyona [y = f(x) fonksiyonunu kastediyor] ilişkin kafamızdan bir şeyler bulmamız gerekiyor mu?

Araş. : Bir şeyler derken neyi kastediyorsun?

Erkan : Yani fonksiyon için bir kural bulmamız lazım mı?

Araş. : Cebirsel bir ifade mi kastediyorsun?

Erkan : Evet

Araş. : Ben bu soruna cevap vermemeyeyim. Sen istediğini söylemekte özgürsün.

Erkan : f fonksiyonunun türevi -1 diyor bize, olabilir mi, [biraz düşünüyor] ben bunları [soruda verilen teğetlerin eğimleri olan $\frac{1}{4}$ ve 5 değerlerini kastediyor] hiç kullanmadım, bunları kullanarak sonuca gideceğiz galiba ama bunları nerede kullanacağım konusunda hiç bir fikrim yok.

Diyalogtan görüleceği üzere Erkan, fonksiyonun grafiğinden yola çıkarak türev fonksiyonunun değeri hakkında çıkarımda bulunamamaktadır. Erkan bu hususta fonksiyonun grafiğinden yararlanamadığı için, cebirsel olarak fonksiyonun türevini alarak soruyu cevaplamak adına fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç duymaktadır. Bu yetersizliğin sonucu olarak Erkan, türev fonksiyonunun [3, 5] aralığında aldığı değerleri tasavvur etmeyi gerektiren sorunun ilk üç şıkkında çıkarım yapamamış, yine fonksiyonun cebirsel ifadesini öğrenme ihtiyacı hissetmiştir. Örneğin birinci sorunun üçüncü şıkkında Erkan ile yaşanan diyaloğun bir kısmı şu şekildedir:

Erkan : Eşit olabilir aslında, hani ben öyle iki değer alırım ki oralarda türev aldığımda türevleri eşit olur.

Araş. : Bana bu değerleri grafik üzerinde gösterebilir misin? Yani noktalar birbirine eşit olmayacak ama türevleri eşit olacak.

Erkan : Değer vererek yapsam, hani atıyorum bu [y = f(x) fonksiyonunu kastediyor] şöyle bir fonksiyon olsun, $x^2 + 4x + 5$, dedik mesela buradan türev aldığımızda $2x + 4$ gelecek, bu aralıkta mesela iki değer alalım, $\frac{3}{2}$ ile $\frac{5}{2}$ olsun, o zaman türevleri 7 ile 9 gelir, böylece eşit olmaz.

Araş. : Peki fonksiyon üçüncü dereceden olsaydı, x^3 ile başlasaydı o zaman türevi x^2 ile başlayacaktı.

Erkan : x^3 ile başlasaydı mesela [biraz düşünüyor] o zaman belki eşit olabilirdi, bilmiyorum, fikrim yok.

Diyalogtan görüldüğü gibi, Erkan [3, 5] aralığında türev fonksiyonunun değerlerine ilişkin grafiksel verilerden yararlanarak çıkarım yapamamaktadır. Bunun sonucu olarak fonksiyonu temsil eden cebirsel ifadeye ihtiyaç duymaktadır. Erkan'ın tek noktada grafiksel veriden hareketle türev fonksiyonuna ilişkin çıkarım yapamaması bu hususta eylem öncesi seviyede olduğunu göstermektedir. Bunun sonucu olarak Erkan diğer mülakat sorularına cevap verememiştir.

Yapılan mülakatlar sonucunda tek noktada türev fonksiyonunun değerine ilişkin grafiksel veriden hareketle çıkarım yapabilen fakat bir aralık boyunca türev fonksiyonunun aldığı değerleri tasavvur edemeyip, türev fonksiyonuna ilişkin muhakeme yapamayan öğrencilerin anlama seviyeleri eylem olarak belirlendi. Zehra, anlama seviyesi eylem olarak belirlenen öğrencilerden biriydi. Zehra tek noktada türev fonksiyonuna ilişkin çıkarım yapmayı gerektiren birinci soru dördüncü şıkta yer alan önermenin, fonksiyonun artan olmasından ötürü x = 4 noktasında türevinin negatif olamayacağı gerekçesini öne sürerek yanlış olduğuna kanaat getirdi ve böylece soruya doğru cevap verdi. Fakat bir aralık boyunca türev fonksiyonunun alacağı değerleri tasavvur etmeyi gerektiren birinci soru birinci şıkta verilen önermeye yorum getiremedi. Öğrenci ile bu süreçte yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : Grafiğe baktığımızda sence [3, 5] aralığında g(x) = 2 şartını sağlayan bir nokta mevcut mu?

Zehra : Onu nasıl bulacağız ki, kirişlerin eğimlerinden mi yola çıkacağız?

Araş. : Sen ne düşünüyorsun? Acaba türevin 2 değerine eşit olduğu bir nokta var mı [3, 5] aralığında?

Zehra : Bilmiyorum ki, onu nasıl bulacağız çünkü fonksiyon yok elimizde.

Araş. : Fonksiyonun cebirsel ifadesinimi kastediyorsun?

Zehra : Evet.

Diyalogtan görüldüğü üzere Zehra, türev fonksiyonunun değerlerinin [3, 5] aralığında $\frac{1}{4}$ ile 5 arasında olacağını çıkarsayamamaktadır. Bir başka ifade ile fonksiyonun belirtilen aralıktaki değerlerini tasavvur edememektedir. Bunun sonucunda Zehra testin ikinci sorusunda yer alan şıklardaki önermelere yorum getirememiştir. Bu durum öğrencinin eylem seviyesinde anlamaya sahip olduğunu göstermektedir.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda bazı öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna ilişkin süreç seviyesinde anlama gerçekleştirdikleri belirlendi. Bu seviyedeki öğrenciler grafiksel verilerden hareketle bir aralık üzerinde türev fonksiyonunun aldığı değerleri tasavvur ederek çıkarım yapabilmekteydi. Lâkin bu seviyedeki öğrenciler, türev fonksiyonunu bir nesne olarak ele alıp bu nesne üzerinde bileşke, tersini alma gibi işlemleri uygulamayı gerektiren testin üçüncü sorusunda yer alan şıklarda ve türev fonksiyonunu kullanarak araştırma yapmayı gerektiren beşinci soruda başarı gösterememiştir. İrem süreç seviyesinde anlama sergileyen öğrencilerden biriydi. İrem'in süreç seviyesinde anlamaya sahip olduğuna işaret eden birinci soru birinci şık bağlamında yaşanan diyaloğun bir kısmı şu şekilde gerçekleşti:

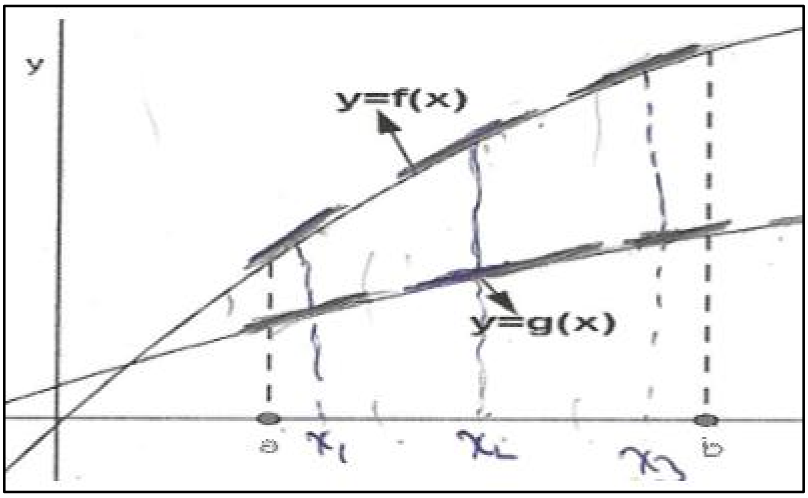
Araş. : Evet, birinci şıkka bakalım.

İrem : [Önermeyi okuyor] O halde eğimi 2 olan bir sayı, baktığımızda 3 ve 5 noktalarında çizilen teğetlerin eğimi $\frac{1}{4}$ ile 5, 2 bunların arasında olduğundan olur.

Araş. : Nasıl olur, biraz daha açabilir misin?

İrem : Tam 3 noktasında teğetin eğimi $\frac{1}{4}$ olmuş, bu teğeti 5 noktasına doğru sürüklersek eğimi hep artıyor, beşe kadar artıyor, o zaman 2 değerini bir x sayısında alacaktır.

İrem benzer akıl yürütme sürecini kullanarak ikinci soru ikinci şıkta yer alan önermeyi doğru olarak cevaplamıştır. İrem'in önermeyi yorumlarken verilen grafik üzerinde yaptığı çizimler Şekil 26'da gözükmektedir.



Şekil 26. İrem'in FBTT-II'nin 2'nci sorusunda yaptığı çizimler

İrem ile bu bağlamda gerçekleşen mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : İkinci şıkka bakalım.

İrem : [Önermeyi okuyor] Birbirine eşit olduğu nokta türevlerinin, olabilir mi, (a,b) aralığında diyor ama, olamaz bence.

Araş. : Niçin olamayacağını düşünüyorsun?

İrem : Yani bir noktada ikisinin de türevleri eşit olacak, ama bir noktada birbirine eşit olamaz ki.

Araş. : Neye dayanarak söylüyorsun bunu?

İrem : Mesela böyle farklı noktalar alsak [İrem x-ekseni üzerinde x_1, x_2, x_3 noktalarını işaretleyerek bu noktalardaki teğetleri çiziyor] bu noktalardaki türev teğetlerin eğimlerini verecek, teğetlere bakarsak f(x) fonksiyonuna çizdiğimiz teğetlerin eğimleri hep daha fazla, yani bu aralıkta ikisinin eşit olduğu bir nokta gözükmüyor.

Diyalogtan görüldüğü üzere İrem, (a, b) aralığında türev fonksiyonlarının değerlerini tasavvur ederek, iki fonksiyonun türev fonksiyonlarının değerlerini kıyaslayabilmektedir. Dolayısıyla süreç seviyesinde anlama sergileyebilmektedir. Lâkin, İrem ile testin üçüncü soru ikinci şık çerçevesinde gerçekleşen mülakatta, bir aralık boyunca tasavvur ettiği teğetlerin eğimlerini türev fonksiyonunun görüntü kümesi nesnesini oluşturacak şekilde sarmalayamadığı ve bunun sonucunda bu nesne üzerine tekrar türev alma işlemini uygulayamadığı ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda İrem ile yapılan mülakatın bir kesiti şu şekildedir:

Araş. : İkinci şıkka bakalım.

İrem : 1 ile 3 arasında K bileşke H sıfırdan küçük olurmu [biraz düşünüyor] f(x)'in türevine bakarsak 1 ile 3 arasında hep pozitif.

Araş. : Evet.

İrem : g(x)'in türevide 1 ile 3 arasında şuraya kadar [(2, g(2)) noktasını kastediyor] pozitif sonra negatif oluyormuş.

Araş. : Peki g(x) fonksiyonunun türevine niçin $(1,3)$ *aralığında baktın?*

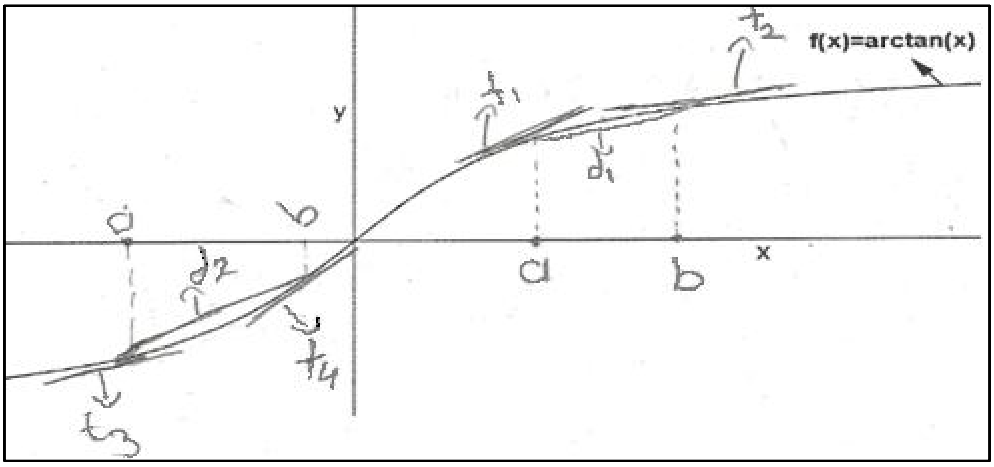
İrem : Bir ile üç arasında hangi değere g(x)'in türevi, pardon tamam, f(x)'in 1 ile 3 aralığında türevi pozitif, o zaman bu pozitif olduğu...bir dakika...değerleri g(x) fonksiyonunda ne olacak, küçük olur diyor, mesela a diyelim, ama hangi aralıkta olduğunu bilemeyiz ki.

Araş. : g(x) fonksiyonunun türev fonksiyonunun alacağı değerleri mi kastediyorsun?

İrem : Evet, bilemeyiz, o zaman bilemeyiz, yani olabilir derim ama kesin bir şey söyleyemem.

Diyalogtan görüleceği üzere İrem, $(1,3)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun türev değerlerini teğetlerin eğimi yardımıyla tasavvur ederek pozitif olduğunu çıkarsayabilmektedir. Lâkin bu değerlerin fonksiyonun görüntü kümesini temsil eden bir nesne olarak sarmalayamamaktadır. Bunun sonucunda bileşke işlemi altında g(x) fonksiyonunun türev fonksiyonunun tanım kümesini oluşturamadığından, verilen önermeye ilişkin muhakeme yapamamaktadır. Sonuç olarak İrem'in anlama seviyesi süreç seviyesinde kalmıştır.

Süreç seviyesinde anlama sergileyen öğrenciler altıncı soruda verilen eşitsizliği grafik üzerine taşıyıp yorumlayarak soruyu cevaplayabilmiştir. Sorunun çözümünde öğrencilerin kullandığı en yaygın strateji, eşitsizlik içerisinde yer alan *a* ve *b* noktalarının farklı durumları için eşitsizliğin sınanması olarak ortaya çıktı. Hülya süreç seviyesinde anlama sergileyen ve soruya bu şekilde çözüm getiren öğrencilerden biriydi. Hülya'nın altıncı soruda yaptığı çizimler Şekil 27'de verilmiştir.



Şekil 27. Hülya'nın FBTT-II'nin altıncı sorusu üzerinde yaptığı çizimler

Hülya ile bu bağlamda gerçekleşen diyaloğun bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Eşitsizliğin içerisinde yer alan cebirsel ifadelerin grafiksel karşılıklarını oluşturabilir misin?

Hülya : Siz zaten burada arctan(x)'in türevini vermişsiniz, o zaman bu, [$\frac{1}{1+a^2}$ ifadesini kastediyor] fonksiyonun "a" noktasındaki türevi demek, yani "a" noktasında çizdiğimiz teğetin eğimi, buda [$\frac{1}{1+b^2}$ ifadesini kastediyor] yine "b" noktasındaki türevi yani oradaki teğetin eğimini verir. Ortadakide [$\frac{arctanb-arctana}{b-a}$ ifadesini kastediyor] bu "a" ve "b" noktalarından geçen kirişin eğimi olacak.

Araş. : Peki bu söylediklerini grafik üzerinde gösterebilir misin?

Hülya : O zaman ben rasgele "a" ve "b" noktaları alayım, mesela bunlar olsun [x-ekseninin pozitif kısmında "a" ve "b" noktalarını işaretliyor], şimdi bunun [$\frac{1}{1+a^2}$ ifadesini kastediyor] değeri bunun [t_1 teğetini çiziyor] eğimine eşit olacak, bu da [$\frac{1}{1+b^2}$ ifadesini kastediyor] bunun eğimine [t_2 teğetini çiziyor], bu da [$\frac{arctanb-arctana}{b-a}$ ifadesini kastediyor] bununkine [d_1 doğrusunu çiziyor] eşit olacak.

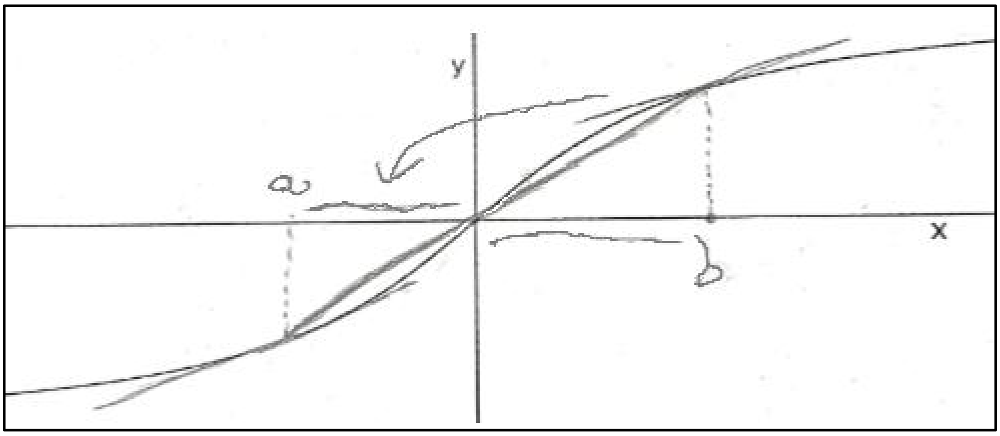
Araş. : Peki bu taktirde eşitsizlik doğru mudur?

Hülya : Bakalım, doğrudur.

Araş. : Nasıl karar verdin?

Hülya : Çünkü bunun [t_1 teğetini kastediyor] eğimi bununkinden [d_1 doğrusunu kastediyor] oda bununkinden [t_2 teğetini kastediyor] büyük, bu da eşitsizliğin doğru olduğunu gösterir.

Mülakatın devamında Hülya x-ekseninin negatif kısmında aldığı "a" ve "b" noktalarında aynı yapıyı oluşturarak, şekil üzerinde görülen t_3, t_4 teğetleri ile d_2 doğrusunu çizip, eşitsizliğin sağlanmadığını göstermiştir. Kontrol grubunda yer alan ve soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin tümü çözümlerinde bu stratejiyi kullanmıştır. Deney grubunda yer alan öğrencilerin bir kısmı soruyu bu şekilde çözerken bir kısmı sorunun çözümünde iki farklı yaklaşım sergiledi. Sinan sorunun çözümüne farklı yaklaşım getiren öğrencilerden biriydi. Sinan'ın sorunun çözümünde yaptığı çizimler şekil 28'de görülmektedir.



Şekil 28. Sinan'ın FBTT-II'nin 6'ncı sorusunda yaptığı çizimler

Sinan ile bu bağlamda yaşanan diyalog şu şekilde gerçekleşti:

Araş. : Bize verilen eşitsizlik düzlemde ne ifade ediyor onu söyleyebilir misin?

Sinan : En soldaki ifade "b" noktasındaki türevi verir, yani "b" noktasındaki teğetin eğimini, en sağdaki de aynı şekilde "a" noktasındaki türevi yani teğetin eğimini verecek.

Araş. : Peki eşitsizlikte ortadaki ifade neyi temsil eder grafiksel olarak?

Sinan : O da "a" ve "b" noktalarından geçen kirişin eğimini verecek, ama ben bunu derste test olarak dağıttığınızda bu kirişi hiç kullanmadım çözerken.

Araş. : Nasıl cevapladın o zaman?

Sinan : Yani, şimdi, arctan(x) fonksiyonunun grafiğine baktığımızda ben burada simetrik olduğunu düşündüm, yani orjinin sağında ve solunda grafik orjine göre simetrik.

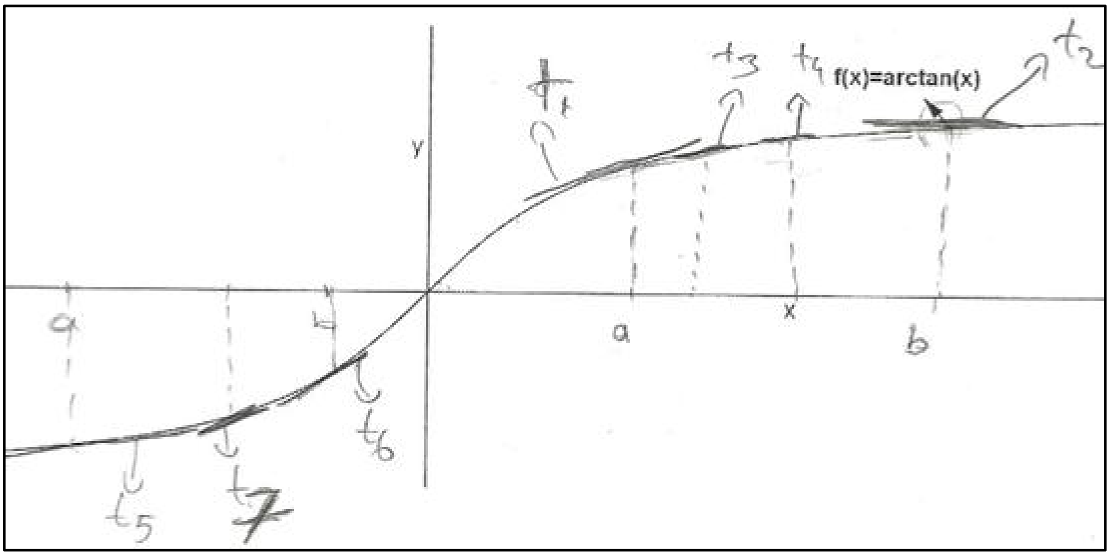
Araş. : Evet, devam et.

Sinan : Burada mesela sağ tarafta [x-ekseninin pozitif kısmını kastediyor] bir nokta alalım "b" olsun ve teğeti çizelim, şimdi bu teğeti taşırsak sol tarafa doğru [x-ekseninin negatif kısmını kastediyor] bir yerde teğetin eğimi, ilk yerdeki ["b" noktasını kastediyor] teğetin eğimine eşit olacak, hatta tam sıfır noktasına "b" noktası kadar uzak olunca olacak, bu yeni noktaya "a" dersek "a", "b" den küçük olacak ama teğetlerin eğimleri yani türevler eşit olacak, eşitsizlik sağlanmayacak.

Araş. : Anladım, peki sana şunu sorayım, seçtiğin bu noktalar için bana oluşacak kiriş ile teğetlerin eğimini kıyaslayabilir misin?

Sinan : Tamam çizersek kirişi [kirişi çiziyor], böyle olur o zaman kirişin eğimi en büyük oldu.

Diyalogtan görüldüğü üzere Sinan, verilen grafiğin orjine göre simetrik olduğunu farkedip, farklı noktalarda çizilen teğetlerin eğimlerinin birbirine eşit olacağını tasavvur ederek soruya doğru cevap verebilmiştir. Deney grubu öğrencilerinden olan Kadriye sorunun çözümünde ortalama değer teoreminden yararlanarak farklı bir strateji ortaya koydu. Kadriye'nin sorunun çözümünde yaptığı çizimler şekil 29'da verilmiştir.



Şekil 29. Kadriye'nin FBTT-II'nin 6'ncı sorusunda yaptığı çizimler

Kadriye ile altıncı soru çerçevesinde gerçekleşen mülakattan bir kesit şu şekildedir:

Araş. *: Burada verilen eşitsizliği grafiksel olarak yorumlayabilir misin?*

Kadriye : a < b demiş, “a” ve “b” diye iki nokta alalım şurada [x-ekseninin pozitif kısmında temsili “a” ve “b” noktaları alıyor], bakarsak şimdi bu [$\frac{1}{1+b^2}$ ifadesini kastediyor] bunun eğimini verecek [t_2 teğetini çiziyor], bu da [$\frac{1}{1+a^2}$ ifadesini kastediyor] bunun eğimini verecek [t_1 teğetini çiziyor] bu da [$\frac{arctanb-arctana}{b-a}$ ifadesini kastediyor] kirişin eğimi olacak.

Araş. *: Peki, bu durumda eşitsizlik için ne dersin, doğru mu?*

Kadriye : Grafiğe bakarsak bunun eğimi [t_1 teğetinin eğimini kastediyor] bunun [t_2 teğetini kastediyor] eğiminden büyük ve “a” ve “b” noktaları arasındaki teğetlerin eğimleri [t_3 ve t_4 teğetlerini çiziyor] bu ikisinin [t_1 ile t_2 teğetlerini kastediyor] arasında, yani eşitsizlik doğru.

Araş. *: Bir dakika, bu ifade [$\frac{arctanb-arctana}{b-a}$] kirişin eğimini verir demiştin, “a” ve “b” noktaları arasındaki teğetleri niçin işin içine kattın?*

Kadriye : Çünkü, hani ortalama değer teoremi bize, yani kirişin eğimine eşit eğimli bir teğet vardır diyordu. O zaman bakarsak grafiğe, buradan [“a” noktasını kastediyor] buraya [“b” noktasını kastediyor] giderken teğetlerin eğimleri azalacak, yani kirişin eğimi bu iki teğetin arasında kalacak.

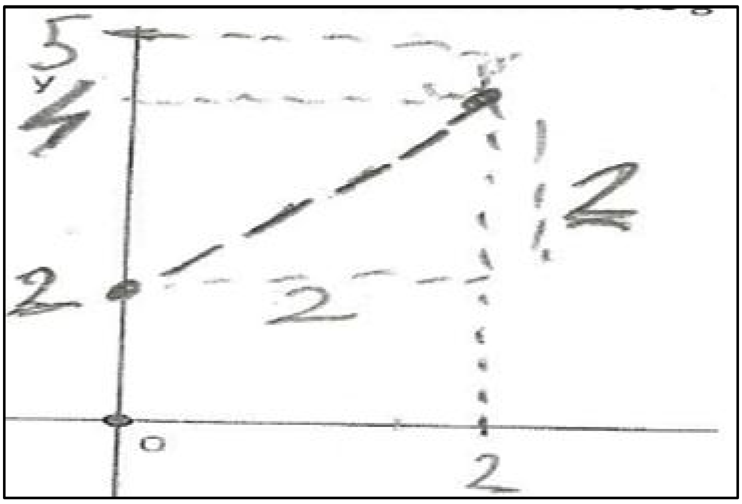
Yaşanan diyaloğun devamında Kadriye, x-ekseninin negatif kısmında yine temsili “a” ve “b” noktaları alarak eşitsizliğin gerçeklenmediğini gösterdi. Diyalogtan görüleceği üzere Kadriye bir aralık boyunca türev fonksiyonunun aldığı değerleri tasavvur etmenin yanı sıra, türev fonksiyonunu bir nesne olarak ele alıp bu nesne üzerinde ortalama değer teoremini soruya uygulayarak çözüme ulaşmıştır. Her ne kadar problemin çözümü için süreç seviyesinde bir anlama yeterli olsa da Kadriye’nin problem bağlamında, türev fonksiyonu nesnesi üzerine ortalama değer teoremini uygulayıp, teoremin altında yatan süreçleri açarak çözüme ulaşması nesne seviyesinde bir anlama sergilediğine işaret etmektedir.

Mülakatlar sonucunda anlama seviyesi nesne olarak belirlenen öğrenciler testte yer alan tüm sorulara doğru cevap verebilmiştir. Yukarıda İrem’in üçüncü soru ikinci şıkta, türev fonksiyonunun görüntü kümesini bir nesne olarak inşa edememesi öğrencinin nesne seviyesine ulaşamadığını göstermekteydi. Nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrenciler bu şekilde bir sıkıntı yaşamamıştır. Örneğin, yapılan mülakat sonucunda anlama seviyesi nesne olarak belirlenen İnci ile bu soru bağlamında yaşanan diyalog içerisinde bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : İkinci önerme hakkında ne düşünüyorsun?

İnci : İlk önce şöyle K(H(x)) şeklinde yaparsam, neydi H(x), f(x)' in türeviydi. (1, 3) aralığına bakarsak bu aralıkta 3 ile 5 arasında değerler alacak, böylece K fonksiyonunun 3 ile 5 arasında aldığı değerlere bakacağız, yani g(x) fonksiyonunun türevine, grafikte (3, 5) aralığında g(x)' in grafiğine çizdiğimiz teğetler hep negatif oluyormuş, yani doğru o zaman önerme.

Yapılan mülakatar sonucunda FBTT-II soruları arasında beşinci sorunun, öğrencilerin süreç veya nesne seviyelerinden hangisinde anlama sergilediklerini belirlemede en etkili olduğu ortaya çıktı. Süreç seviyesinde anlama sergileyen öğrencilerin hiçbiri sorunun çözümüne ilişkin bir yaklaşım sergileyemedi. Anlama seviyesi nesne olarak belirlenen öğrencilerin bir kısmı sorunun çözümünde ortalam değer teoremini kullanmışlardır. Bu öğrenciler fonksiyonun üzerinde yer alan (0, 2) ile (2, 5) noktalarından geçen kirişin eğimini $\frac{3}{2}$ olarak belirleyip, ortalam değer teoremi gereğince (0, 2) aralığında eğimi bu değere eşit bir teğet olması gerektiğini söyleyerek verilen şartlar altında bir fonksiyon olamayacağını belirtmişlerdir. Kontrol grubunda yer alan ve nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrenci soruyu bu yöntem ile çözmüştür. Bu çözümün haricinde deney grubunda yer alan öğrenciler sorunun çözümünde farklı iki strateji kullanmıştır. Bunlardan biri Mehmet'in çözümünde ortaya çıktı. Mehmet'in beşinci soru bağlamında yaptığı çizimler Şekil 30'da görülmektedir.



Şekil 30. Mehmet'in FBTT-II'nin 5'inci sorusu üzerinde yaptığı çizimler

Mehmet ile bu bağlamda yaşanan diyaloğun bir kısmı şu şekilde gerçekleşti:

Mehmet : Ben bu soruyu varsayımda bulunarak çözmeye çalıştım.

Araş. : Tamam, sen ne düşündüysen onu söyle.

Mehmet :Fonksiyon sıfırda iki, ikide ise beş değerini almış, bu noktaları işaretlersek [verilen düzlem üzerinde (0,2) ile (2,5) noktalarını oluşturuyor], şimdi, yani, fonksiyon ikiden beşe tırmanacak, bir şekilde yukarı gitmeli.

Araş. : Devam et.

Mehmet : Ben burada dedim ki, fonksiyonun türevi en fazla 1 olabilirmiş o zaman 1 olsun, yani her noktada 1 olsun.

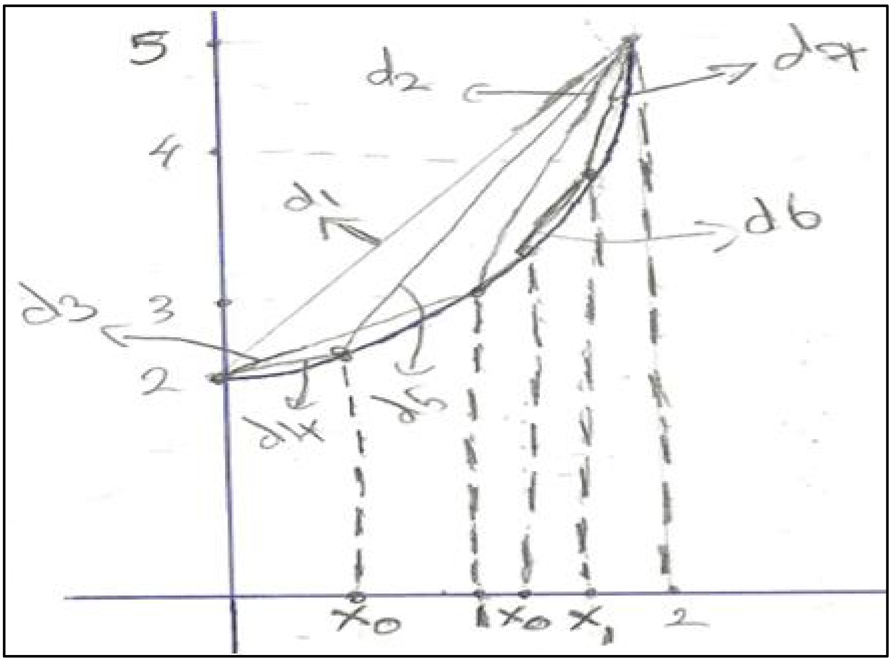
Araş. : Anladım, ne olur o taktirde?

Mehmet : Her noktada fonksiyona çizdiğimiz teğetlerin eğimi 1 olacak, mesela böyle bir kaç tane çizersek [hayali fonksiyon grafiği üzerine şekilde görülen teğetleri çiziyor] aslında bir doğru olur bu grafik, böylece en çok dörde varabiliriz.

Araş. : Anladım, beşe varamayız diyorsun böylece.

Mehmet : Evet çünkü beşe varmamız için teğeti biraz daha dikleştirmemiz lazım.

Diyalogtan görüldüğü üzere Mehmet, türev fonksiyonu nesnesini oluşturan bir aralık boyunca her nokta türev hesaplama sürecini açarak, hayali fonksiyon grafiği üzerinde teğetleri oluşturmuş ve buradan yola çıkarak yürüttüğü akıl yürütme süreci sonucunda verilen şartlar altında bir fonksiyonun olamayacağına hükmetmiştir. Mehmet'in gösterdiği bu performans türev fonksiyonuna ilişkin nesne seviyesinde anlama sergilediğine işaret etmektedir. Sorunun çözümüne yönelik en karmaşık yaklaşım Yeşim tarafından ortaya kondu. Yeşim'in soru üzerinde yaptığı çizimlerin okuyucunun anlamasını zorlaştıracağı düşünülerek, araştırmacı tarafından özünü çarpıtmayacak şekilde yeniden oluşturulmuştur. Yeşim'in beşinci soru üzerinde yaptığı çizimlerin düzenlenmiş hali Şekil 31'de verilmiştir.



Şekil 31. Yeşim'in FBTT-II'nin 5'inci sorusu üzerinde yaptığı çizimler

Yeşim ile gerçekleşen mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Yeşim : Benim bunu test olarak verdiğinizde yaptığım şeyi anlatabilir miyim?

Araş. :Tabi, sen zihnindekileri anlat bana, doğru cevap vermek zorunda değilsin.

Yeşim : Ben ilk şu iki nokta [(0,2) ile (2,5) noktalarını kastediyor] arasındaki eğimi bile buldum, gereksiz mi bilmiyorum ama.

Araş. : Öyle düşünme, ne yaptıysan anlatmanı istiyorum bana.

Yeşim : Bu kirişin [d_1 kirişini çizerek eğimini hesaplıyor] eğimi $\frac{3}{2}$ olacak.

Araş. : Evet.

Yeşim : Hatta şöyle dedim ben , fonksiyon 3 değerini x=1 noktasında alsın. Kafamdan uydurmak gibi oldu ama.

Araş. : Tamam, olsun, devam et.

Yeşim : Hani şunu yapıyorduk ya, iki nokta arasındaki bir noktada teğetin eğimini bulurken sağ ve sol kirişlerin eğimlerinden yola çıkıyorduk, o zaman aradaki noktadaki teğetin eğimi için yorum yapabiliyorduk.

Araş. :Evet, devam et.

Yeşim : x = 1 noktasında 3 değerini alırsa, bu kirişin eğimi [d_2 kirişini çiziyor] 2 olacak. Bir de şu kirişin [d_3 kirişini çiziyor] eğimini hesaplarsak 1 olur. Yani bu iki kiriş giderek teğete yaklaşırsa teğetin eğimi birden büyük *ikiden küçük olur, yani şartı sağlamaz, bu fonksiyon 3 değerini x=1 noktasında alamayacak o zaman.*

Araş. : Anladım, peki bundan sonra ne yaptın?

Yeşim : Bundan sonra dedim fonksiyon mesela 3 değerini sıfır ile bir arasında bir noktada alsın, yani böyle x_0 gibi [(0,1) arasında x_0 noktasını işaretliyor] bir noktada alsın.

Araş. : Devam et

Yeşim : Yine aynı yöntemle iki tane kiriş oluşturdum. O zaman soldaki kirişin [d_4 kirişini çiziyor] eğimi $\frac{1}{x_0}$ olacak, bu da 1'den büyük olur. Sağdaki kirişe [d_5 kirişine] bakarsak eğimi $\frac{2}{2-x_0}$ bu da 1'den büyük olur, bu x_0 noktasındaki teğetin eğimi yine 1'den büyük olacak.

Araş. : Anladım, peki fonksiyon 3 değerini 1 ile 2 arasında alamaz mı?

Yeşim : O zamanda şöyle düşündüm, bu sefer dedim bu fonksiyon 4 değerini x_0 ile 2 arasında x_1 gibi bir noktada alacak.

Araş. : Devam et.

Yeşim : x_1 noktasındaki teğete yine sağdan ve soldan kirişler ile yaklaşırsak [d_6 ve d_7 kirişlerini çiziyor.] sağdaki kirişin eğimi $\frac{1}{2-x_1}$ olacak bu da 1'den büyük bir sayı, soldaki kirişin eğimi ise $\frac{1}{x_1-x_0}$ yine 1'den büyük, şart sağlanmaz.

Diyalogtan görüleceği üzere, Yeşim türev fonksiyonu nesnesini oluşturduğu bir aralık boyunca her noktada türev hesaplama sürecini açarak, ilk olarak bir noktada türeve odaklanıp ve daha sonra tek noktada türev nesnesini oluşturduğu kirişlerin teğete yakınsaması sürecini açarak gerçekleştirdiği akıl yürütme sonucunda, verilen şartlar altında bir fonksiyon olamayacağına hükmetmiştir. Yeşim'in sergilediği performans türev fonksiyonuna ilişkin nesne seviyesinde bir anlamaya sahip olduğunu göstermektedir.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda görüşme yapılan öğrencilerin belirlenen anlama seviyeleri ve FBTT-II'den aldıkları puanlar Tablo 25'de verilmiştir.

Tablo 25. Mülakat Öğrencilerinin Belirlenen Anlama Seviyeleri ve FBTT-II Puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
FBTT-II Puanı	15	19	18	17	16	18	15	22	8	30	32	30	26	27	22	29	27	23

Tablo 25'in devamı

Anlama Seviyesi	E	S	S	S	E	N	E	S	EÖ	N	N	N	N	N	S	N	N	S

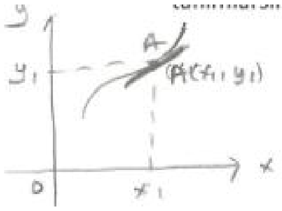
EÖ: Eylem Öncesi; E: Eylem; S: Süreç; N: Nesne

4.6. Teğet Kavramını Genellemeye İlişkin Elde Edilen Bulgular

4.6.1. Teğet Kavramını Genellemeye İlişkin TGT ile Elde Edilen Bulgular

Araştırmanın son problemi, öğretim sürecinde DMY kullanımının öğrencilerin teğet kavramına yönelik genellemeleri üzerindeki etkisini belirlemeye yönelikti. Probleme cevap bulma amacıyla araştırmacı tarafından hazırlanan TGT araştırmanın başında ve sonunda her iki gruba da uygulandı. TGT birinci kısımda yer alan ve teğet kavramını tanımlamayı isteyen soruya verilen cevaplardan, öğrencilerin teğet kavramına ilişkin kavram imgeleri içerisinde, kavramı tanımlama hususunda Euclid geometrisi veya analiz bağlamlarından hangisinin baskın rol oynadığı, böylece kavramın tanımına ilişkin Euclid geometrisinden analiz bağlamına istenen genellemenin gerçekleşip gerçekleşmediğini belirlemek amaçlandı. Öğrencilerin bu kısma verdikleri cevaplar; formel tanım, analiz baskın, Euclid baskın ve cevap yok olmak üzere dört kategoriye ayrıldı. Bu kategorilere örnek teşkil edecek öğrenci cevapları Tablo 26'da görülmektedir.

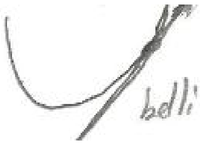
Tablo 26. Teğet Kavramını Tanımlamaya İlişkin Kategoriler ve Örnek Öğrenci Cevapları

Formel Tanım	1. fonksiyonun A noktasındaki türevi bu noktadan çizilen teğetin eğimidir. Bu eğime sahip olup A'dan geçen doğruya teğet denir. 2. $d_t : y - y_1 = f'(x_1).(x - x_1) \rightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + y_1$ * Yarıçapa dik olan doğru * Eğriyi tek bir noktada kesen doğru Yetersiz bulunmuştur. 3.  $f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_1) - f(x)}{x - x_1} = m_t$ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_t \Rightarrow y = m.(x - x_1) + y_1$

Tablo 26'nın devamı

Analiz Baskın

1.



Eğer $f'(x) \neq 0$ farklı ise yani o nok belli eğim varsa teğet anlamlıdır.

2.

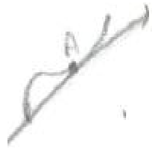
Bu eğri denkleminin 1. türevi denebilir.
Bir eğrinin eğrinin denklemi $ax^3+bx^2+cx+d=0$ olsun
Teğetinin denklemi $3ax^2+2bx+c$ şeklindedir.

Euclid Baskın

1.

A noktasından teğet çiziyorsak,
bu teğet eğriyi sadece A nok. kesmeli.
Çünkü A nok. başka noktalardan da
keserse bu doğru teğet değil kesen olur

2.



Eğri üzerinde bulunan bir A noktasından eğriye çizilen
teğet; eğriyi sadece bir noktada değiyorsa bunun adı
eğri üzerindeki teğet olur. Fakat sadece değip geçmesi
lazım eğer keserse bunun adı teğet olmaz.

Ön ve son test olarak uygulanan TGT'den kavramın tanımını genellemeye ilişkin elde edilen bulgular Tablo 27'deki gibidir.

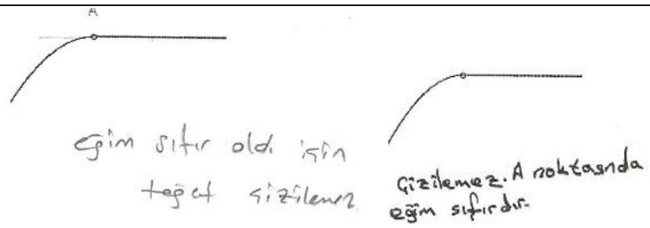
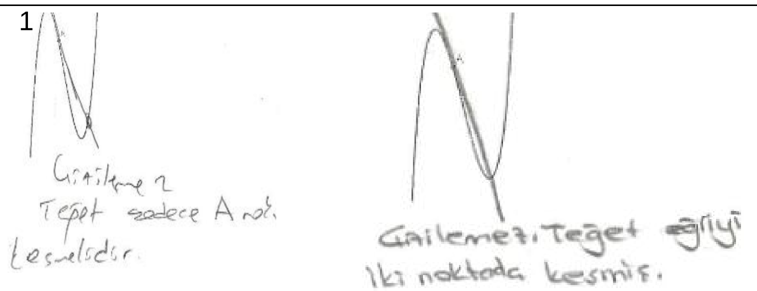
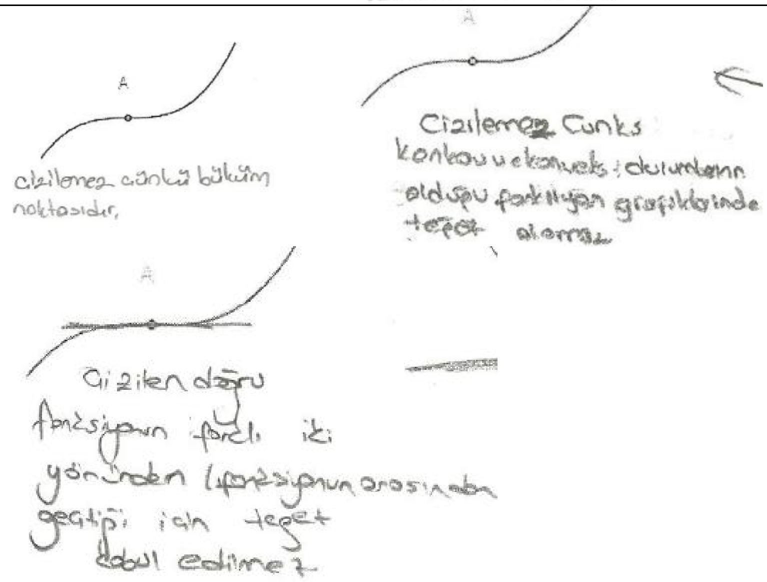
Tablo 27. Öğrencilerin Kavramı Tanımlamaya İlişkin Kategorilere Göre Dağılımı

	Euclid Baskın		Analiz Baskın		Formel Tanım		Cevap Yok	
Ön Test	Kontrol (n=40)	Deney (n=42)	Kontrol (n=40)	Deney (n=42)	Kontrol (n=40)	Deney (n=42)	Kontrol (n=40)	Deney (n=42)
	27	32	7	5	1	2	5	3
Son Test	Kontrol (n=39)	Deney (n=40)	Kontrol (n=39)	Deney (n=40)	Kontrol (n=39)	Deney (n=40)	Kontrol (n=39)	Deney (n=40)
	14	4	15	8	10	28	0	0

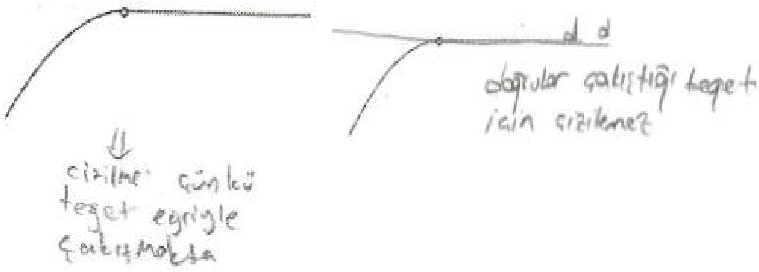
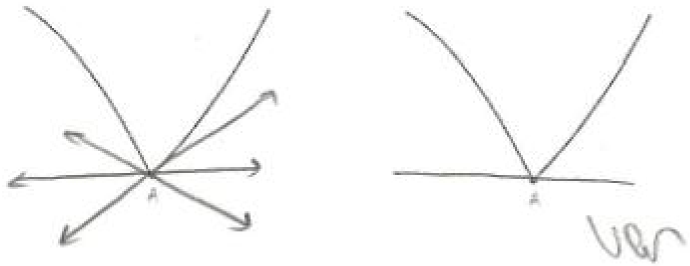
Tablo 27'den görüldüğü gibi ön test sonucunda formel tanım kategorisinde kontrol grubunda 1, deney grubunda ise 2 öğrenci bulunmaktadır. Yapılan öğretim sonucunda kavramın tanımına ilişkin arzu edilen genelleme olan formel tanım kategorisinde deney grubunda 28, kontrol grubunda ise 10 öğrencinin bulunduğu tespit edildi.

Öğrencilerin teğet kavramına ilişkin Euclid bağlamından analiz bağlamına istenen genelleme türünü gerçekleştirememelerinin bir sonucu olarak oluşturdukları kavram yanılgıları, testin birinci ve ikinci kısmına verdikleri cevaplarda ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin TGT'ye verdikleri cevapların analizi sonucunda toplamda altı kavram yanılgısının mevcut olduğu belirlenmiştir. Ortaya çıkan kavram yanılgıları ve bu yanılgılara örnek öğrenci cevapları Tablo 28'de sunulmuştur.

Tablo 28. Ortaya Çıkan Kavram Yanılgıları ve Örnek Öğrenci Cevapları

Kavram Yanılgısı	Örnek Cevaplar
KY1: Türev veya eğim sıfıra eşit ise teğet çizilemez.	
KY2: Fonksiyonun türevi bizzat teğet doğrusunun kendisini verir.	Bu eğri denkleminin 1. türevi denklemidir. Örneğin eğrinin denklemi $ax^3+bx^2+cx+d=0$ olsun. Teğetinin denklemi $3ax^2+2bx+c$ şeklindedir.
KY3: Teğet doğrusu çizildiği eğriyi birden fazla noktada kesemez.	1 
KY4: Büküm noktalarında fonksiyon eğrisine teğet çizilemez.	

Tablo 28'in devamı

KY5: Teğet doğrusu çizildiği eğri ile çakışamaz.	
KY6: Köşe noktalarda eğriye bir veya birden fazla teğet çizilebilir.	

Çalışmanın başında ve sonunda uygulanan TGT sonucunda belirtilen kavram yanılgılarına sahip öğrencilerin frekansları Tablo 29'da verilmiştir.

Tablo 29. Belirlenen Kavram Yanılgılarına Sahip Öğrencilerin Frekansları

Kavram Yanılgıları		KY1	KY2	KY3	KY4	KY5	KY6
Ön Test	Kontrol (n=40)	10	5	30	35	37	33
	Deney (n= 42)	8	3	27	32	36	34
Son Test	Kontrol (n=39)	6	0	19	20	20	13
	Deney (n= 40)	2	0	6	5	7	6

Verilerin analizi kısmında belirtilen yöntem kullanılarak, öğrencilerin teğet kavramına ilişkin oluşturdukları genelleme türleri çalışmanın başında ve sonunda yapılan TGT ile belirlendi. Çalışmanın başında yapılan TGT'ye öğrencilerin verdikleri cevaplar analiz edildiğinde, kontrol ve deney grubunda yer alan bazı öğrencilerin, cebirsel olarak ifade edilen bir fonksiyonun verilen bir noktasında teğet denklemini türev alma işlemi ile bulmayı bilmemelerinden ötürü, testin üçüncü kısmında yer alan soruları cevaplandıramadıkları tespit edildi. Dolayısıyla bu öğrencilerin çalışmanın öncesinde teğet kavramına ilişkin sahip oldukları genelleme türü genişletici genelleme olarak belirlendi. Ön TGT testi sonucunda, çalışmanın başında teğet kavramına ilişkin genelleme türlerinde bulunan öğrencilerin frekansları Tablo 30'da sunulmuştur

Tablo 30. Öğrencilerin Ön TGT Sonucunda Genelleme Türlerine Göre Dağılımı

Genelleme Türü / *Grup*	*Genişletici*	*Ayırıcı*	*Düzenleyici*
Kontrol (n=40)	11	29	0
Deney (n=42)	12	30	0

Tablo 30'dan görüldüğü gibi çalışmanın öncesinde öğrencilerin teğet kavramına ilişkin genelleme türleri genişletici ve ayırıcı olarak iki şekilde ortaya çıkmıştır. Düzenleyici genellemeye sahip öğrenci ise her iki grupta da bulunmamaktadır. Son TGT testi sonucunda, teğet kavramına ilişkin genelleme türlerinde bulunan öğrencilerin frekansları Tablo 31'de sunulmuştur.

Tablo 31. Öğrencilerin Son TGT Sonucunda Genelleme Türlerine Göre Dağılımı

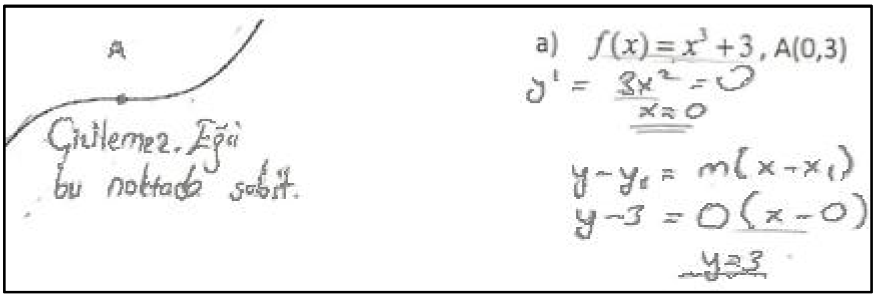
GenellemeTürü / Grup	*Genişletici*	*Ayırıcı*	*Düzenleyici*
Kontrol (n=39)	0	20	19
Deney (n=40)	0	10	30

Uygulama sonrasında, öğretim yöntemiyle gerçekleştirilen genelleme türü arasında bir ilişki olup olmadığını belirlemek için, TGT son testi üzerinde ayırıcı ve düzenleyici genelleme türleri dikkate alınarak Ki-Kare bağımsızlık testi uygulandı. Yapılan Ki-Kare bağımsızlık testi sonucunda deney grubunda ayırıcı genelleme türüne sahip öğrenci sayısının düzenleyici genelleme türüne sahip öğrenci sayısına oranı ile kontrol grubunda ayırıcı genelleme türüne sahip öğrenci sayısının düzenleyici genelleme türüne sahip öğrenci sayısına oranı arasında anlamlı bir farklılık bulunmuştur, $X^{2}(1, N=79) = 4.73$, $p < .05$. Tablo 31'den görüldüğü üzere kontrol grubuna nazaran deney grubunda daha fazla öğrenci yapılan öğretimin sonucunda arzu edilen genelleme türü olan düzenleyici genellemeyi gerçekleştirmiştir.

4.6.2. Öğrencilerin Teğet Kavramına İlişkin Genellemelerine Yönelik Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Bulgular

Çalışma kapsamında belirlenen mülakat öğrencileri ile çalışmanın sonunda ikinci kez uygulanan TGT'ye verdikleri cevaplar üzerinde mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde bu mülakatlar sürecinde ortaya çıkan bulgulara yer verilecektir.

Daha önce ifade edildiği üzere, TGT içerisinde yer alan sorulara verilen cevaplar öğrencilerin teğetin çizilmesi istenen noktada türev değeri sıfırsa teğet doğrusu çizilemeyeceği yönünde kavram yanılgısına sahip olduğuna işaret etmekteydi. Kontrol grubu öğrencileri arasında yer alan Nilüfer'in TGT'ye verdiği cevaplarda bu türden kavram yanılgısına sahip olduğu görüldü. Nilüfer'in TGT ikinci kısımda yer alan ilk eğrinin altına yazdığı ifade ve testin üçüncü kısmında bu eğrinin cebirsel karşılığı olan fonksiyonda teğet doğrusuna ilişkin cevabı Şekil 32'de görülmektedir.



Şekil 32. Nilüfer'in son TGT'de ilgili sorulara verdiği cevaplar

Nilüfer ile yapılan mülakkatta bu durum üzerinde gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

Araş. : *Şimdi bu eğriye bakalım. Çizilemez eğri bu noktada sabit demişsin. Ne demek istedin burada?*

Nilüfer : *Bu noktaya baktığımızda eğri dönmüş yani burada düzleşmiş dolayısıyla türev sıfır olacak o yüzden teğet yok.*

Araş. : *Peki türev sıfırsa neden teğet olamayacağını düşünüyorsun?*

Nilüfer : *Yani türev sıfır, teğet olmaz çünkü eğim yok.*

Araş. : *Eğim ile türevin sıfıra eşit olması arasında nasıl bir ilişki kuruyorsun?*

Nilüfer : *Türev bize eğimi veriyordu, ama baktığımızda türev sıfır, yani doğru yatay olacak eğimi olmayacak.*

Diyalogtan anlaşılacağı üzere ilginç bir şekilde öğrenci burada sıfır sayısını varlık yokluk belirten şekilde yorumlamakta, böylece türev sıfır olduğunda doğrunun eğimi olmayacağını düşünmektedir. Öğrenci mülakatın ilerleyen sürecinde bu kavram yanılgısını farkederek üstesinden gelmiştir. Bu farkındalığın gerçekleşmesi TGT'nin üçüncü kısmında yer alan ve bu eğrinin cebirsel karşılığı olan fonksiyon üzerinde yapılan tartışmada meydana gelmiştir. Yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : Bu soruda teğetin denklemini y=3 olarak bulmuşsun doğru mu?

Nilüfer : Evet.

Araş. : Nasıl bulduğunu anlatırmısın bana.

Nilüfer : Eee, fonksiyonun denklemi belli, türev alırsak $y=3x^2$ geliyor, noktamız A(0,3) böylece türev burada sıfır, doğru denklemini oluşturursak y=3 doğrusu olur.

Araş. : Peki, burada da türev sıfır çıktı, az önce türev sıfırsa eğim yok dolayısıyla teğette yok demiştin.

Nilüfer : Evet doğru, bu nasıl oldu peki, [Biraz düşünüyor], teğet denklemini böyle bulmuyor muyduk yanlış mı yaptım acaba? Galiba kendimle çelişiyorum şu an, eğim sıfırsa doğru yatay olacak, [Biraz düşünüyor], olsun tamam, evet tamam, ben az önce yanlış söyledim tamam anladım şimdi.

Araş. : Neyi anladın?

Nilüfer : Yani türev sıfırsa eğim sıfır, yani eğimi yok değil sıfır, ben bir an hani doğru ne yukarı nede aşağı olduğundan, düz olduğundan eğimi yok dedim.

Diyalogdan görüldüğü üzere öğrenci ilk başta eğim kavramını günlük yaşantımızda kullandığımız fiziksel anlamıyla yorumlamıştır, fakat yaşadığı çelişki ile bu sahip olduğu kavram yanılgısının farkına vararak üstesinden gelmiştir. Mülakatın devamında öğrencinin ikinci kısımdaki eğriye verdiği cevabında bir değişiklik olup olmayacağını belirlemek için tekrar tartışma başlatılmıştır. Yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : Az önce konuştuğumuz ikinci kısımdaki eğriye tekrar dönmek istiyorum, teğetin varlığı hakkında şimdi ne düşünüyorsun?

Nilüfer : Burada teğet yok.

Araş. : Niçin?

Nilüfer : Çünkü eğriyi böyle kesiyor, yani benzemez teğete.

Araş. : Tamam, hatırlarsan derste türevi limit olarak tanımlamıştık.

Nilüfer : Evet, özel bir limit demiştik.

Araş. : Evet ve o limiti grafiksel olarak yorumlamıştık.O yorumu bu soru için oluşturabilir misin?

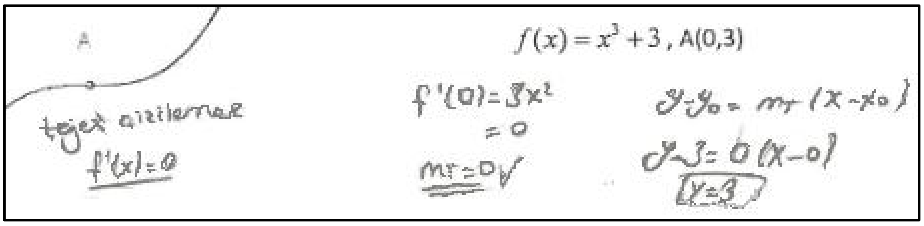
Nilüfer : Nasıl yani.

Araş. : Hani kesen doğruları vardı, git gide teğete yaklaşıyordu.

Nilüfer : Hımm. Yok yapamam.

Bu diyalogtan anlaşıldığı gibi öğrenci cebirsel bağlamda sunulan soruda teğet doğrusunun denklemini bulmakla beraber, grafiksel bağlamda teğetin varlığını zihnindeki teğet imgesiyle örtüşmediği için kabul etmemektedir. Açıkça öğrenci aynı probleme grafiksel bağlamda farklı cebirsel bağlamda farklı cevap vermektedir. Dolayısıyla öğrencinin bu yöndeki ifadeleri teğet kavramına ilişkin ayırıcı genelleme türüne sahip olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte öğrenci teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak tasavvur edememektedir.

Kontrol grubu öğrencilerinden olan Dila'nın son TGT'ye verdiği cevaplar Nilüfer'de olduğu gibi, teğetin çizilmesi istenen noktada türev değeri sıfırsa teğet doğrusu çizilemeyeceği yönünde kavram yanılgısına sahip olduğuna işaret etmekteydi. Gerçekleşen mülakatta Dila'nın, Nilüfer'in sahip olduğu tarzda kavram yanılgısına sahip olmadığı ortaya çıktı. Dila'nın cevap kağıdında ikinci kısımda yer alan ilk eğriye ve bunun cebirsel karşılığı olan üçüncü kısımdaki fonksiyona verdiği cevaplar Şekil 33'de görülmektedir.



Şekil 33. Dila'nın son TGT'de ilgili sorulara verdiği cevaplar

Mülakatın bu duruma ilişkin kısmı şu şekildedir:

Araş. : Burada eğriye teğet çizilemez demişsin niçin?

Dila : Çizilemez, o zaman teğet buradaki eğriyi tam ortasından ayırmak zorunda çizersek, o yüzden çizilemez.

Araş. : Buraya $f'(x) = 0$ *yazmışsın, onu niçin yazdın?*

Dila : Yani teğet, eğimin sıfır olması demek, sabit bir şey, yani doğrusal oluyor, doğrusal olunca da eğriyi kesiyor, o zaman da teğet çizilemez.

Araş. : Grafiği ayırdığı için teğet çizilemez diyorsun, doğru mu anladım.

Dila : Evet.

Araş. : Peki ben sana şimdi şunu sorayım, [Araştırmacı tarafından y= - x^2 *eğrisi kağıt üzerine çizilerek A(0,0) noktası işaretleniyor], bu eğri y = g(x) fonksiyonu olsun. A noktasında g fonksiyonunun türevi nedir?*

Dila : Sıfırdır.

Araş. : Peki buradan eğriye teğet var mı?

Dila   : Vardır, çizeyim mi?

Araş. : Lütfen.

Dila   : İşte bu [Öğrenci teğeti doğru şekilde oluşturuyor].

Araş. : Peki burada da türev sıfır buna niçin çizebildin.

Dila   : Ama, şimdi buradaki böyle, işte tek noktada değip geçmiş yani teğet olmuş o sebepten öteki gibi değil.

Diyalogtan görüldüğü üzere, Dila'nın ikinci kısımdaki eğrinin altına $f'(x)$ = 0 yazmasının sebebi Nilüfer'inkinden tamamen farklıdır. Öğrenci bu ifadeyi teğetin yatay olduğunu bunun ise eğriyi ortadan ayıracağını belirtmek için kullanmaktadır. Dila'nın grafiksel bağlamda grafiğe teğet çizememenin yanında, eğrinin cebirsel formunda teğetin denklemini y=3 olarak bulması teğet kavramına ilişkin ayırıcı genelleme türünü gerçekleştirdiğini göstermektedir. Dila grafiksel bağlamda karşılaştığı problem durumunda teğetin varlığına ilişkin kararını verirken, Euclid geometrisi bağlamında kavrama atfettiği özellikleri kıstas olarak kullanmaktadır. Mülakatın başka bölümlerinde Dila'nın teğeti türev kavramıyla istenen şekilde ilişkilendiremediği, başka bir ifadeyle teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak oluşturamadığı ortaya çıkmıştır.

Mülakat öğrencilerinin bir kısmında farklı bir durum ortaya çıktı. Bu öğrenciler ikinci kısımda yer alan birinci ve üçüncü eğrilerde teğetin varlığını kabul etmekte, fakat nasıl çizileceğini bilmemektedirler. Bu öğrencilerden biri olan Zehra ile yapılan mülakatın bu noktaya ilişkin kısmı şu şekildedir:

Araş. : [İkinci kısımdaki birinci eğri kastediliyor] Sadece şekle bakarak, bize bir nokta verilmiş, bu noktadan bu eğriye teğet çizebilir misin varsa.

Zehra : Hımm. Varsa çizebilir miyim [Biraz düşünüyor].

Araş. : Sence var mı?

Zehra : Bence yok gibi.

Araş. : Niçin olmadığını düşünüyorsun?

Zehra : Şimdi burada ikinci türev sıfır, burada birinci türev işaret mi değiştiriyor onu mu anlayacağız?

Araş. : Sence birinci türev işaret değiştiriyormu?

Zehra : [Biraz düşünüyor] Yok değiştirmiyor.

Araş.   : Nereden anladın?

Zehra : Çünkü fonksiyon burada da artıyor burada da artıyor, demek ki işaret değiştirmiyor, türevin işareti artı artı. Dolayısıyla türev var, ama nasıl çizilecek bilmiyorum.

Araş. : Bilmiyorsun demek, var mıdır sorusuna cevap verebilirmisin peki?

Zehra : Vardır diyorum, çünkü türev var yani teğetin eğimi var bir de geçtiği nokta var bunlar yeterli, ama çizemiyorum.

Araş. : Niye çizemiyorsun?

Zehra : Niye çizemiyorum, hani böyle değil yani [Bir parabol eğrisi oluşturuyor] böyle sabitleşiyor burada bilmiyorum işte.

Diyalogtan anlaşıldığı üzere öğrenci aslında teğet ile türev değeri arasında ilişkiyi oluşturmuştur. Bunun yanında istenen noktada türevin varlığını kabul etmekte fakat bununla beraber teğetin Euclid bağlamında ele aldığı örneklere uymamasından ötürü oluşturamamaktadır. Zehra üçüncü kısımda bu eğrinin cebirsel karşılığı olan fonksiyonda teğetin denklemini y=3 doğrusu olarak bulmuştur. Mülakatın devamında öğrenci ile ortaya çıkan bu zıt durum üzerinde tartışılmıştır. Ortaya çıkan diyalog şu şekildedir:

Araş. : Sence birinci eğri ile arka sayfadaki şu fonksiyon [$f(x)= x^3+3$ fonksiyonu kastediliyor] arasında bir ilişki mevcut mudur?

Zehra : Galiba bu bunun grafiği.

Araş. : Şekildeki bu nokta A(0,3) olsa teğet nasıl olurdu?

Zehra : O zaman böyle yatay olacaktı demek.

Araş. : Sana şimdi şunu sormak istiyorum. Hani türevi limit olarak ele almıştık. Hatırlıyor musun?

Zehra : Evet özel bir limitti.

Araş. : Yazabilir misin o ifadeyi.

Zehra : Nasıldı, şöyle [Limit ifadesini yazdı]

Araş. : Bu limit ifadesinin düzlemdeki karşılığı neydi?

Zehra : Nasıl yani?

Araş. : Hani derste, bu limit durumunu grafiksel olarak temsil edip teğet doğrusuna ulaşıyorduk, bunu bu örnek için uygulayabilir misin?

Zehra : Hımm. Galiba yapamam, bilmiyorum.

Diyalogtan görüleceği üzere ilk başta teğetin var olduğunu fakat çizemeyeceğini söyleyen Zehra, üçüncü kısımda verdiği cevapla oluşturduğu çelişki ile yüzleştiğinde teğetin nasıl olacağını anlayabilmiştir. Zehra gibi başta teğetin varlığını kabul eden fakat çizemeyen diğer öğrenciler de kendileri ile yapılan mülakat sürecinde ikinci ve üçüncü kısımlardaki cevaplarının oluşturduğu çelişki ile yüzleştiklerinde, teğet doğrularını çizebilmişlerdir. Buradan anlaşıldığı üzere bu öğrenciler karşılaştıkları problem durumunun ait olduğu gösterimsel alana göre teğetin çizilip çizilemeyeceğine farklı karar vermekteydi. Dolayısıyla bu öğrencilerin teğet kavramına ilişkin oluşturdukları genelleme ayırıcı genellemeydi. Bununla birlikte Zehra'da olduğu gibi diğer öğrenciler de teğeti zihinlerinde kesen doğrularının limit durumu olarak oluşturamadıkları görülmüştür.

Kontrol ve Deney grubunda yer alan bazı öğrencilerin, teğet kavramına ilişkin arzu edilen genelleme türü olan düzenleyici genellemeyi zihinlerinde gerçekleştirdikleri yapılan mülakatlarda ortaya çıkmıştır. Takip eden kısımda bu türden genellemeyi gerçekleştiren bir kontrol ve bir deney grubundan öğrenciler ile yapılan mülakatlardan kesitler sunulmuştur. Deney grubu öğrencilerinden olan Saliha, düzenleyici genellemeyi gerçekleştiren öğrencilerden biriydi. Saliha ön TGT sınavında ikinci kısımda yer alan köşe noktasına sahip eğriye (2-ii) teğet çizmişti. Fakat son TGT sınavında Saliha bu eğrinin altına "çizilemez" ifadesini yazmış, bu eğrinin cebirsel karşılığı olan üçüncü kısımdaki fonksiyona da (3-c) sağdan ve soldan türevlerinin eşit olmadığını gerekçe göstererek teğet yok cevabını vermişti. Bu durum mülakat esnasında Saliha ile tartışılmıştır. Yaşanan diyalog şu şekilde gerçekleşti:

Araş. : Şimdi sana şunu sormak istiyorum. İlk testte köşe noktasına sahip bu kırık eğriye teğet çizmişsin. Şimdi neden çizilemez dedin?

Saliha : İlk testte teğetin türevle ilgili bu tanımını bilmiyordum, o yüzden, şimdi çizilemez diyorum çünkü burada sağdan ve soldan türev birbirine eşit değil ondan.

Araş. : Peki sağdan ve soldan türev eşit olmayınca neden o noktada teğet olmuyor?

Saliha : Şöyle söyleyeyim, türev aslında özel bir limit demekti. Limit aldığımız o bölümlü ifade bize kesen doğrularının eğimini veriyordu. Burada hani o programda sürüklediğimiz noktayı sağ tarafta alıp A noktasına doğru sürüklersek, mesela bir kaç tane alalım [öğrenci eğrinin üzerinde noktalar belirleyerek kesen doğrularını oluşturuyor] böyle, böyle, şöyle bir teğet doğrusu oluşacak. Öteki kısımda yine bu yolu izlersek, mesela burada, burada alalım, bu seferde böyle bir teğet doğrusu oluşacak [buraya kadar öğrenci sağ ve sol teğet doğrularını oluşturdu] iki teğet çıkıyor dolayısıyla teğet yok bu noktada.

Diyalogtan görüldüğü gibi Saliha geçirdiği öğrenim süreci sonunda teğet kavramına ilişkin zihinsel yapısını formel teori ile tutarlı olacak şekilde yeniden yapılandırarak düzenleyici genelleme türünü gerçekleştirmiştir. Öğrenci GeoGebra programında gerçekleştirdiği kesen doğrularının limite yaklaştırma eylemlerini, karşılaştığı problem durumunda zihninde gerçekleştirerek problem durumu uygulayabilmiştir.

Kontrol grubu öğrencilerinden olan Tülin benzer akıl yürütme sürecini kullanarak teğetin varlığına ve yokluğuna ilişkin karar vermiştir. TGT'nin 2-i kısmında yer alan eğri üzerinde bu hususta gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

Araş. : *Peki bu eğriye teğet çizilir mi?*

Tülin : *Evet çizilir demişim ama şey, yani, şey yapabiliyoruz değil mi, mesela bunu şey yaptım, teğet eğrinin sadece üstünde ya da sadece altında kalması gerekmiyor değil mi, sonuçta bu noktada bir eğimi olur.*

Araş. : *Sence bu durumun bir sakıncası var mı?*

Tülin : *Bence yok, hayır yok. Bunun gibi değil çünkü* [Öğrenci 2-ii kısmında köşe noktasına sahip eğriyi kastediyor] *bu noktaya buradan da yaklaşsak oradan da yaklaşsak sıfıra gidecek çünkü.*

Araş. : *Kesen doğrularını mı kastediyorsun?*

Tülin : *Evet, yavaş yavaş yaklaşsak, hatta bunu ispatlarda da kullanmıştık.*

Her ne kadar Tülin ilk olarak teğetin varlığı hususunda başlangıçta ikileme düşse de, kavram imgesinde yer alan kesen doğrularının limit sürecine başvurarak problemi yorumladığında doğru cevaba ulaşabilmiştir. Her iki öğrencinin de teğet kavramına ilişkin düzenleyici genelleme türünü gerçekleştirdiği yaşanan diyaloglardan görülmektedir.

Mülakat öğrencilerinin son TGT sınavı sonucunda kavramı tanımlama ve genelleme türüne ilişkin atandıkları kategoriler ayrı olarak Tablo 32'de sunulmuştur.

Tablo 32. Mülakat Öğrencilerinin Belirlenen Genelleme Türleri

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
Genelleme Türü	A	D	A	D	A	D	A	A	A	D	D	A	D	D	D	D	D	A
Tanımlama Kategorisi	F	F	An	F	E	F	F	E	An	F	F	An	F	F	F	F	F	E

A: Ayırıcı Genelleme; D: Düzenleyici Genelleme; F: Formel Tanım; An: Analiz Baskın; E: Euclid Baskın

Tablo 32’den görüldüğü üzere gerçekleştirilen öğretimin sonunda kontrol grubunda 3, deney grubunda ise 7 öğrenci teğet kavramına ilişkin düzenleyici genellemeyi gerçekleştirmiştir. Bununla birlikte, kontrol grubunda kavramı tanımlama hususunda formel tanım kategorisinde 5, analiz baskın kategorisinde 2, Euclid baskın kategorisinde 2 öğrenci, deney grubunda ise formel tanım kategorisinde 7, analiz ve Euclid baskın kategorilerinde 1’er öğrenci bulunmaktadır.

5. TARTIŞMA

Tezin bu bölümünde yürütülen çalışma sonucunda elde edilen bulgular çalışmanın amaçlarına bağlı olarak tartışılacaktır. Bu amaçla yapılan uygulamaların türev kavramının geometrik boyutunu anlamada etkisine yönelik tartışmalara yer verilmiştir.

5.1. Öğrencilerin Noktasal Bağlamda Türev Kavramını Anlamalarına İlişkin Tartışma

Öğrencilerin noktasal anlamda türev kavramına ilişkin anlamaları; teğet kavramına ilişkin genelleme, grafiksel veriden hareketle tek noktada türeve ilişkin muhakeme yapma ve tek noktada türevin formel tanımını anlama başlıkları altında tartışılacaktır.

5.1.1. Öğrencilerin Tek Noktada Türev Değerini Anlamalarına İlişkin Tartışma

Öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik anlamalarını değerlendirmek için uzman görüşleri ve genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar dikkate alınarak NBTT geliştirildi. Test her iki grupta yer alan öğrencilere araştırma sürecinin ilk haftası içerisinde ve ilk haftada gerçekleştirilen öğretimden sonra uygulandı. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin NBTT'de gösterdikleri performansları sayısallaştırmak için, öğrencilerin testte yer alan sorulara verdikleri cevaplar dikkate alınarak her bir soru için puanlama rubrikleri oluşturuldu. Araştırmanın başlangıcında her iki grupta yer alan öğrenciler, literatürde türev kavramının öğrenilmesine etki eden kavramlar üzerine yapılan araştırmaların sonuçları dikkate alınarak hazırlanan YT'yi cevaplamıştı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik anlamalarını karşılaştırmada elde edilecek istatistiksel sonuçları daha anlamlı kılmak için, öğrencilerin NBTT puanlarının yanı sıra araştırma öncesinde uygulanan YT'den elde ettikleri puanlar da dikkate alındı. Araştırmanın başında deney ve kontrol gruplarına uygulanan YT sonuçlarına yapılan bağımsız t testi gruplar arasında anlamlı bir farklılık olmadığını ortaya koymuştu ($t=-.744$ $p>.05$). Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin NBTT puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için, YT puanları ortak değişken alınarak yapılan ANCOVA analizi iki grup arasında deney grubu lehine anlamlı bir farkın olduğunu gösterdi ($F_{(1\text{-}79)}=16.22$, $p<.01$). Ortaya çıkan bu istatistik deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran NBTT içerisinde yer alan sorularda daha iyi performans sergilediklerini ortaya koymaktadır. Bu sonuç deney grubunda gerçekleştirilen öğretimin, tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir.

NBTT'nin uygulanmasından sonra her iki gruptan seçilen 9'ar öğrenci ile testin içerisinde yer alan sorular üzerinde mülakatlar gerçekleştirildi. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda mülakata katılan öğrencilerin anlama seviyeleri belirlendi. Kontrol grubunda yer alan 9 öğrenciden 5'inin eylem ve 2'sinin nesne seviyesinde, deney grubunda yer alan 9 öğrenciden 3'ünün eylem ve 6'sının nesne seviyesinde anlamaya sahip olduğu ortaya çıktı. Bununla birlikte kontrol grubunda yer alan 2 öğrenci eylem öncesi kategorisine dâhil edildi. Eylem öncesi kategorisine dâhil edilen öğrenciler, en temel anlamda bir noktadaki türev değeri ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi oluşturamadıklarından, grafiksel verilerin yeterli veri sunduğu problem durumlarında çözüme ulaşmada geçersiz yollara başvurmuşlardır. Erkan ile yapılan mülakatta görüldüğü üzere, öğrenci fonksiyonun grafiği ile fonksiyonun türev fonksiyonunun grafiği arasında benzerlik olması gerektiğini düşünmektedir. Bunun neticesinde Erkan bu geçersiz özelliğe dayalı yürüttüğü muhakeme süreci ile soruları cevaplayamamıştır. Eylem öncesi kategorisine dâhil edilen bir diğer öğrenci olan Veysel ise farklı noktalarda fonksiyonun türev değerlerini birbiriyle kıyaslamada fonksiyonun bu noktalarda teğetlerini tasavvur etmek yerine, kıyaslanacak noktaların fonksiyonun ekstremum noktalarına olan uzaklığından yola çıkarak yanlış bir muhakeme süreci yürütmüştür. Veysel bir noktada türev değeri ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramadığından, tek noktada türev değerine ilişkin çıkarım yapmayı isteyen 5'inci soruda fonksiyonun cebirsel ifadesini öğrenme arayışı içerisine girmiştir. Eylem öncesi kategorisinde yer alan bu öğrencilerin sergilediklerine benzer ve tek noktada türev değeri ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramamaktan kaynaklanan geçersiz akıl yürütme süreçleri literatürde yer alan başka araştırmalarda da rapor edilmiştir (Bezuidenhout, 1998; Ubuz, 2007).

Yapılan mülakatlar sonucunda deney grubunda yer alan öğrencilerin, fonksiyonun bir noktadaki türevi ile teğetinin eğimi arasındaki ilişkiyi oluşturmada kontrol grubu öğrencilerine nazaran daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Dolayısıyla bu ilişkiyi kurmada ortaya çıkan bu fark deney grubunda yürütülen öğretim yönteminin, dolayısıyla yazılımın bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Deney grubunda yer alan öğrencilerin Çalışma Yaprağı-2 içerisinde teğet doğrusununun tanımını kesen doğrularının limit durumu olarak kendilerinin dinamik olarak oluşturmaları ve devamında tek noktada fonksiyonun türevini formel olarak tanımlamaları sonucunda, grafiksel verilerin yeterli veri sunduğu durumlarda türevi hesaplamak için fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç hissetmemişlerdir. Bununla birlikte yazılım vasıtasıyla öğrencilerin yaşadığı bu süreçler, kontrol grubun öğrencilerinde ortaya çıkan fonksiyonun türev grafiği ile fonksiyon grafiğinin birbirine benzemesi gerektiği gibi kavram yanılgılarının oluşumuna engel olmuştur.

NBTT'nin 5'inci sorusunda deney grubu öğrencilerinin daha iyi performans sergiledikleri ve bunun sonucunda yapılan öğretim sonucunda daha fazla öğrencinin nesne seviyesinde anlama oluşturduğu belirlenmiştir. Bu ise yazılım içerisinde öğrencilerin teğet doğrusunu kesen doğrularının yaklaşımı olarak kendilerinin dinamik olarak oluşturmasının, bu sürecin tahta üzerinde öğretmen tarafından açıklanmasından daha etkili olduğunu göstermektedir. Yazılımın öğrencilere sunduğu bu olanak sonucunda, deney grubunda yer alan öğrenciler yazılım içerisinde kendilerinin aktif olarak yaşadığı bu süreci zihinlerinde de yapılandırabilmiş, böylece problem durumunda bu süreci uygulayabilmişlerdir. Özellikle deney grubunda daha fazla öğrencinin Kadriye ile yapılan mülakatta ortaya çıktığı gibi, yaklaştırırsak, taşırsak, sürüklersek gibi fiilleri içeren cümleler kullanmaları, yazılımın bu dinamik sürecin öğrencilerin zihninde oluşumunda tahtadan daha etkili bir rol üstlendiğine işaret etmektedir.

Literatür taraması kısmında yer verilen araştırmalardan bazıları (Amit ve Vinner, 1990; Park 2011) öğrencilerin bir noktadaki türevi, o noktadaki teğet doğrusunun eğimi olarak değil de bizzat teğet doğrusunun cebirsel formu olarak tanımladığını rapor etmekteydi. Araştırmacı, araştırma öncesinde bu durumun sebebinin öğretmenlerin sınıf içi diyaloglarda sergilediği dikkatsizlik olabileceği varsayımında bulunmuş ve her iki grupta yürüttüğü derslerde "bir noktada türev o noktada teğeti verir" gibi öğrencilerde daha önceki araştırmaların rapor ettiği yanılgıyı oluşturabilecek ifadelerden kaçınmıştır. Araştırma öncesinde uygulanan TGT sonucunda kontrol grubunda 5 deney grubunda ise 3 öğrencide bu yönde kavram yanılgısının mevcut olduğu belirlendi. Son TGT sonucunda ise bu kavram yanılgısının öğrencilerde mevcut olmadığı görüldü. Bu durum araştırmanın başında ortaya konan varsayımı doğrular niteliktedir. Her iki grupta yer alan öğrenciler, araştırmacının bu yönde gösterdiği kasıtlı dikkatin sonucunda bu kavram yanılgılarının üstesinden gelmiş, bunun yanında yürütülen öğretim süreci sonucunda bu kavram yanılgısını oluşturan yeni bir öğrenci ortaya çıkmamıştır.

5.1.2. Öğrencilerin Formel Tanımın Geometrik Boyutunu Anlamalarına İlişkin Tartışma

Öğrencilerin türev kavramının formel tanımına yönelik anlamalarını değerlendirmek için uzman görüşleri ve genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar dikkate alınarak TFTT geliştirildi. Test her iki grupta yer alan öğrencilere araştırma sürecinin ikinci haftası içerisinde ve ikinci haftada yürütülen öğretimden sonra uygulandı. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin TFTT'de gösterdikleri başarıyı sayısallaştırmak için, öğrencilerin testte yer alan sorulara verdikleri cevaplar dikkate alınarak her bir soru için puanlama rubrikleri oluşturuldu. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin türev kavramının formel tanımına ilişkin anlamalarını karşılaştırmada elde edilecek istatistiksel sonuçları daha anlamlı kılmak için, öğrencilerin TFTT puanlarının yanı sıra araştırma öncesinde uygulanan YT'den elde ettikleri puanlar da dikkate alındı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin TFTT puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için, YT puanları ortak değişken alınarak yapılan ANCOVA analizi iki grup arasında deney grubu lehine anlamlı bir farkın olduğunu gösterdi ($F_{(1-74)}$=51.03, p<.01). Ortaya çıkan bu istatistik deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran TFTT içerisinde yer alan sorularda daha iyi performans sergilediklerini ortaya koymaktadır. Bu sonuç deney grubunda gerçekleştirilen öğretimin, türev kavramının formel tanımını anlamada geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir.

Her iki gruptan seçilen öğrenciler ile yapılan mülakatlar da istatistiksel olarak ortaya çıkan bu farkı yansıtmaktadır. Kontrol grubu öğrencileri ile kıyaslandığında deney grubunda yer alan öğrencilerin türev kavramının formel tanımına yönelik daha ileri seviyede anlamalar gerçekleştirdikleri ortaya çıkmıştır. Türev kavramının formel tanımını anlamak için, hiç kuşkusuz, ilk olarak tanım içerisinde geçen ifadelerin geometrik temsillerini bilmek gerekmektedir. Mülakatlar sonucunda kontrol grubundaki 9 öğrenciden 4'ü, tanım içerisindeki farkların bölümü "$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$" ifadesinin geometrik temsilini yorumlayamadıkları için eylem öncesi kategorisine dâhil edilmiştir. Deney grubu mülakat öğrencilerinin ise tümü, en azından yukarıdaki ifadenin geometrik anlamda kesen doğrularının eğimini verdiğini bilmekte ve bir kesen doğrusunun geçtiği iki nokta açık olarak koordinatları ile verildiğinde eğimini bulabilmekteydi. Kontrol grubunda yürütülen öğretim sürecinde formel tanım içerisinde yer alan bu ifade, araştırmacının tahta üzerinde resmettiği bir fonksiyon grafiği üzerinde ele alınmış ve tartışılmıştır. İzlenen bu yöntemin sınırlılığının bir sonucu olarak farkların bölümü ifadesinin geometrik temsili ve sayısal değeri, grafik üzerinde yer alan 2 farklı nokta için çizilmiş ve hesaplanmıştır. Deney grubunda yürütülen öğretim sürecinde ise öğrenciler, çalışma yaprağı-3 içerisinde ikinci soruda farkların bölümü ifadesinin hem geometrik temsilinin hem de sayısal değerinin değişimini, türev aranan noktanın komşuluğunda dinamik olarak incelemişlerdir. Deney grubu öğrencilerinin öğrenme sürecinde üstlendiği bu aktif rol, farkların bölümü ifadesinin geometrik temsilini anlamada geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir. Fless (1988) yaptığı doktora çalışmasında geleneksel olarak gerçekleşen analiz öğretimi sonucunda, öğrencilerin çok az bölümünün farkların bölümü ifadesinin geometrik temsilini oluşturabildiklerini belirtmektedir. Bu çalışmada elde ettiğimiz bulgular Fless'in çalışmasıyla paralellik göstermektedir.

Formel tanımın geometrik boyutuna ilişkin süreç seviyesinde anlama sergileyen öğrenciler, tanım içerisinde farkların bölümünün yer aldığı mutlak değer eşitsizliğini geometrik boyutta kesen doğrularının ve teğet doğrusunun eğimi ile ilişkilendirebilmektedir. Bu seviyedeki öğrenciler türev aranan bir noktanın komşuluğunda kesen doğrularının eğimleri ile teğetin eğimi arasındaki farkı, kesen doğrularının eğimlerini hesap etmeden tasavvur edebilmektedir. Gerçekleştirilen mülakatların sonucunda kontrol grubunda 1, deney grubunda ise 4 öğrenci formel tanımın geometrik boyutuna ilişkin süreç seviyesinde anlama sergilediği belirlendi. Deney grubunda yürütülen öğretim sürecinde öğrenciler çalışma yaprağı-3 içersinde yer alan sorularda " $\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right|$" ifadesinin hem geometrik karşılığını hem de aldığı sayısal değerleri bir aralık içerisinde incelemişlerdir. Yazılımın sunduğu dinamik yapı içerisinde öğrencilerin fonksiyonun bağımsız değişkenini serbest olarak hareket ettirerek farkların bölümü ifadesinin hem geometrik hem de aldığı nümerik değerlerin değişimini gözlemlemeleri sonucunda, kağıt üzerinde karşılaştıkları statik problem durumunda bu süreçleri zihinlerinde canlandırarak farkların bölümünün aldığı değerleri tasavvur edebilmişlerdir. Mülakatlar içerisinde deney grubunda kontrol grubuna nazaran daha fazla öğrencinin, farkların bölümünün geometrik temsili olan kesen doğruları için "*buraya doğru taşırsak*" gibi ifadeler kullanmaları bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Her iki grupta yer alan öğrencilerin formel tanımı anlamada en çok zorluk çektikleri nokta, tanım içerisinde yer alan epsilon ve delta değişkenlerinin birbiri ile olan ilişkisi olarak ortaya çıkmıştır. Kontrol grubunda yalnız bir, deney grubunda ise üç öğrenci bu iki değişken arasında koordinasyonu sağlayarak nesne seviyesinde anlama geliştirebilmiştir. Bu hususta yazılımın göreceli olarak etkili olduğu söylenebilir. Deney grubu öğrencilerinin Çalışma Yaprağı-3 içerisinde yer alan 4, 5, 6 ve 7'nci sorularda, epsilon ve delta değişkenlerinden biri verildiğinde, bu durumun geometrik karşılığını yazılım içerisinde görerek tanım içerisindeki şartı sağlayacak şekilde diğer değişkene ait değeri araştırmaları, epsilon ve delta değişkenlerini birbiri ile ilişkilendirmede geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olmuştur. Deney grubunda daha fazla öğrenci "*aralığı açarsak*, *aralığı kapatırsak, sol tarafa kayarsak*" gibi ifadeleri mülakat sürecinde kullanmıştır. Bu durum deney grubu öğrencilerin yazılım içerisinde yaşadığı dinamik süreçlerin zihinlerindeki karşılığının dışa vurumu olarak yorumlanmıştır.

Araştırma sorularında belirtilen konular içerisinde öğrencilerin anlamada en çok zorlandıkları formel tanım olarak ortaya çıkmıştır. Bunun bir sebebi öğrencilerin matematik öğrenme deneyimleri ve tanımın matematiksel anlamda yoğunluğu olarak gösterilebilir. Çünkü öğrenciler ilk kez limit ve türev konuları içerisinde notasyonel anlamda zengin ve karmaşık bir matematiksel tanımla karşılaşmaktadırlar. Literatürde yer alan araştırmalar limit kavramının formel tanımını anlamanın öğrenciler için çok zor olduğunu ve geleneksel öğretim yönteminin formel tanımı anlamada etkili olmadığını belirtmektedir (Barak, 2007; Queseda ve diğ. 2008). Araştırmaya katılan öğrenciler araştırma dâhilinde yürütülen öğretim sürecinin öncesinde Analiz-I dersi içerisinde limit kavramını geleneksel olarak yürütülen bir öğretim süreci içerisinde ele almış, limit kavramının formel tanımını derinlemesine incelememişlerdi. Dolayısıyla formel tanım içerisinde yer alan epsilon ve delta değişkenlerinin sınırladığı eşitsizlikleri ve bu iki eşitsizliğin birbiri ile olan ilişkisini ilk kez araştırma sürecinde derinlemesine ele aldılar. Bu durumun özellikle epsilon ve delta değişkenleri arasındaki ilişkiyi oluşturmada bir handikap oluşturduğu düşünülmektedir. Çünkü bir fonksiyonun bir noktadaki limiti formel tanım bağlamında incelenirken, hem delta hem de epsilon değişkenleri eksenler üzerinde grafiksel olarak doğrudan görülebilmekte, delta değişkeninde meydana gelen değişime karşılık epsilon değişkeninin yeni değeri grafiksel olarak izlenebilmektedir. Fakat tek noktada türevin formel tanımının grafiksel karşılığında epsilon değişkeninin doğrudan görülebilecek herhangi bir geometrik temsili bulunmamaktadır. Dolayısıyla epsilon ve delta arasındaki ilişkiyi ilk kez türev tanımı içerisinde anlamlandırmak, tek noktada fonksiyonun limiti tanımı içerisinde anlamlandırmaktan daha zordur. Özetle, araştırmaya katılan öğrencilerin fonksiyonlarda limit konusu içerisinde formel tanımı etraflıca incelememesinin, araştırma sorularında belirtilen konular içerisinde anlamada en çok zorlandıkları konunun formel tanım olarak ortaya çıkmasının bir diğer sebebi olduğu düşünülmektedir.

5.2. Öğrencilerin Fonksiyon Bağlamında Türev Kavramını Anlamalarına İlişkin Tartışma

Öğrencilerin fonksiyon bağlamında türev kavramına yönelik anlamaları; fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlama ve türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlama başlıkları altında tartışılacaktır.

5.2.1. Öğrencilerin Fonksiyon ve Türev Fonksiyonu Grafikleri Arasındaki İlişkileri Anlamalarına İlişkin Tartışma

Öğrencilerin fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkilere yönelik anlamalarını ortaya çıkarmak için genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar dikkate alınarak, literatür ve uzman görüşleri desteği doğrultusunda FBTT-I geliştirildi. FBTT-I testi hem deney hem de kontrol grubuna, araştırma çerçevesinde gerçekleştirilen öğretim sürecinin 5'inci haftasında yürütülen derslerden sonra uygulandı. Öğrencilerin FBTT-I'de gösterdikleri performansları sayısallaştırmada, testte yer alan sorulara verdikleri cevaplar dikkate alınarak her bir soru için puanlama rubrikleri oluşturuldu. Araştırmanın başında her iki grupta yer alan öğrenciler, literatürde türev kavramının öğrenimine etki eden kavramlar üzerine yapılan araştırmaların sonuçları dikkate alınarak hazırlanan YT'yi cevaplamıştı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkilere yönelik anlamalarını karşılaştırmada elde edilecek istatistiksel sonuçları daha anlamlı kılmak için, öğrencilerin puanlarının yanı sıra araştırma öncesinde uygulanan YT'den elde ettikleri puanlar da dikkate alındı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin FBTT-I puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için, YT puanları ortak değişken alınarak yapılan ANCOVA analizi iki grup arasında deney grubu lehine anlamlı bir farkın olduğunu gösterdi ($F_{(1\text{-}74)}=40.69$, $p<.01$). Ortaya çıkan bu istatistik deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran FBTT-I içerisinde yer alan sorularda daha iyi performans sergilediklerini ortaya koymaktadır. Bu sonuç deney grubunda gerçekleştirilen öğretimin, fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlamada geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir.

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda iki grup arasında anlama seviyeleri açısından ortaya çıkan fark, istatistiksel boyutta ulaşılan sonucu destekler niteliktedir. Deney grubunda yer alan öğrencilerin tümü süreç veya nesne seviyesinde anlama sergilerken, kontrol grubunda bir öğrenci eylem öncesi, beş öğrenci eylem seviyesi kategorisine dâhil edildi. Eylem öncesi kategorisine dâhil edilen ve kontrol grubunda yer alan öğrenci, bir fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türevleri ile artan-azalan ve konveks-konkav karakteristikleri arasındaki ilişkilere yönelik ezber niteliğinde dahi olsa grafiksel boyutta hiç bir anlama geliştirememişti. Anlama seviyeleri eylem olarak belirlenen öğrenciler ise her ne kadar verilen bir fonksiyon grafiğine bakarak tek noktada fonksiyonun türev değerine ilişkin çıkarım yapabilseler de, bir aralık boyunca fonksiyonun grafiğinden türev değerlerini tasavvur edemeyerek, fonksiyonun artan-azalan ve konveks-konkav karakteristikleri arasındaki ilişkileri grafiksel boyutta oluşturamamışlardır. Benzer olarak literatürde yer alan diğer bazı araştırmalar da, geleneksel olarak yürütülen öğretim süreci sonucunda öğrencilerin bir fonksiyon ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri arasındaki ilişkileri oluşturamadıklarını (Baker ve diğ., 2000), grafiksel verilerden hareketle birinci türev fonksiyonunun artan ya da azalan olmasına ilişkin muhakeme yapmada başarısız olduklarını (Mahir, 2010) rapor etmektedirler.

Kontrol grubunda yürütülen öğretim sürecinde araştırmacı tarafından tahtaya bir fonksiyon grafiği ve bu grafik üzerinde teğetler çizilerek, fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile teğetlerin eğimlerinin, dolayısıyla türev değerlerinin pozitif-negatif olma durumu arasındaki ilişki öğrencilere aktarılmaya çalışıldı. Deney grubunda yürütülen öğretim sürecinde ise öğrencilere bu ilişki Çalışma Yaprağı-6 içerisinde yer alan yönergeler doğrultusunda GeoGebra ortamında oluşturulan yapı içerisinde gerçekleştirdikleri eylemler vasıtasıyla kazandırmak amaçlandı. Öğrenciler verilen yapı içerisinde bulunan fonksiyon grafiği üzerinde yer alan serbest bir noktayı hareket ettirme yoluyla, bu noktadan geçen teğetin eğimindeki değişimi dinamik olarak gözlemleyerek, türev değerinin pozitif-negatif olma durumu ile fonksiyonun artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkiyi yorumlamışlardı. Deney grubunda daha fazla öğrencinin bir fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile türev değeri arasındaki ilişkilere yönelik sorularda yürüttükleri muhakeme sürecinde, bir aralık içerisinde fonksiyon grafiği üzerinde teğetleri çizerek, teğetlerin eğimleri ile fonksiyonun artan-azalan ve ekstremum noktalarla ilişkisini kullanması deney grubunda yürütülen öğretimin daha etkili olduğunu göstermektedir. Kontrol grubunda yürütülen öğretim bu dinamikliği öğrencilere kazandırmada etkili olamamış, bunun sonucunda bir çok öğrenci artan-azalan ve ekstremum noktaların birinci türev ile ilişkisini ezberleme yoluna gitmiştir.

Fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkilere yönelik anlaması nesne olarak kategorilendirilen öğrenciler grafiksel olarak fonksiyonun birinci türevi ile artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkinin yanı sıra, ikinci türev ile konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi kurabilmişlerdir. Bu öğrenciler bir aralıkta fonksiyon grafiğine çizdikleri teğetlerin eğimlerini tasavvur etmenin yanı sıra, eğimlerin artıp azaldığını da tasavvur edebilmekte ve buradan fonksiyonun ikinci türevinin işaretinin ne olacağını belirleyerek, bunu fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği ile ilişkilendirebilmektedir. Mülakatlar sonucunda deney grubunda 5 kontrol grubunda ise 2 öğrenci nesne kategorisine dâhil edildi. Kontrol grubunda yürütülen öğretim sürecinde araştırmacı tahta üzerinde konveks ve konkav fonksiyon grafikleri ve bu grafikler üzerinde teğetler çizerek, teğetlerin eğim değerlerinin değişimine vurgu yaparak ikinci türev işareti ile konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi öğrencilere aktarmaya çalışmıştır. Deney grubunda yürütülen öğretim sürecinde ise öğrencilere bu ilişki Çalışma Yaprağı-7 içerisinde yer alan yönergeler doğrultusunda GeoGebra ortamında oluşturulan yapı içerisinde gerçekleştirdikleri eylemler vasıtasıyla kazandırmak amaçlandı. Öğrenciler verilen yapı içerisinde bulunan bir konveks bir de konkav fonksiyon grafikleri üzerinde yer alan serbest bir noktayı hareket ettirme yoluyla, bu noktadan geçen teğetin eğim değerindeki artmayı dinamik olarak gözlemleyerek, ikinci türev değerinin pozitif-negatif olma durumu ile fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi oluşturmaya çalıştılar. Mülakatlarda kontrol grubuna nazaran deney grubunda daha fazla öğrencinin, ikinci türev ile konveks-konkav karakteristiği arasındaki ilişkiyi kullanmayı gerektiren sorularda yürüttükleri akıl yürütme sürecinde “*teğeti sürüklersek”*, “*buralarda teğetleri çizersek”* vb. kelime gruplarını cümlelerinin içerisinde kullanmaları, bu ilişkiyi oluşturmada deney grubunda yürütülen öğretimin daha etkili olduğunu göstermektedir.

5.2.2. Öğrencilerin Türev Fonksiyonunun Geometrik Boyutunu Anlamalarına İlişkin Tartışma

Öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna yönelik anlamalarını ortaya çıkarmak için genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar dikkate alınarak, literatür ve uzman görüşleri desteği doğrultusunda FBTT-II geliştirildi. FBTT-II testi grafiksel verilerden hareketle bir fonksiyonun türev fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri hakkında muhakeme yapabilmeyi, ispat gerektiren grafiksel problem durumlarında türev fonksiyonunu kullanabilmeyi ve türev konusu içerisinde yer alan teoremleri problem durumlarına uygulayabilmeyi gerektiren sorulardan oluşmaktaydı. FBTT-II testi hem deney hem de kontrol grubuna araştırma çerçevesinde gerçekleştirilen öğretim sürecinin 6’ncı haftasında yürütülen öğretimden sonra uygulandı. Öğrencilerin FBTT-II’de gösterdikleri performansı sayısallaştırmada, testte yer alan sorulara verdikleri cevaplar dikkate alınarak her bir soru için puanlama rubrikleri oluşturuldu. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin türev fonksiyonunun geometrik boyutuna yönelik FBTT-II testinde gösterdikleri performansları karşılaştırmada elde edilecek istatistiksel sonuçları daha anlamlı kılmak için, öğrencilerin FBTT-II puanlarının yanı sıra araştırma öncesinde uygulanan YT’den elde ettikleri puanlar da dikkate alındı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin FBTT-II puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için, YT puanları ortak değişken alınarak yapılan ANCOVA analizi iki grup arasında deney grubu lehine anlamlı bir farkın olduğunu gösterdi ($F_{(1\text{-}75)}=27.87$, $p<.01$). Ortaya çıkan bu istatistik deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran FBTT-II içerisinde yer alan sorularda daha iyi performans sergilediklerini ortaya koymaktadır. Bu sonuç deney grubunda gerçekleştirilen öğretimin, türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir.

FBTT-II her iki gruba uygulandıktan sonra testin içerisinde yer alan sorular üzerinde seçilen öğrenciler ile mülakatlar gerçekleştirildi. Mülakatların neticesinde deney grubunda tüm öğrenciler süreç veya nesne, kontrol grubunda ise bir öğrenci eylem öncesi, 3 öğrenci eylem, 4 öğrenci süreç ve bir öğrenci nesne seviyesinde anlama kategorisine dâhil edildi. Eylem öncesi kategorisine dâhil edilen öğrenci bir noktada teğet eğim değeri ile birlikte verildiğinde fonksiyonun o noktadaki türev değerini belirleyebilse de, grafik üzerinde teğetler verilmediğinde türev fonksiyonuna ilişkin çıkarım yapamamaktadır. Dolayısıyla bu öğrenci grafiksel verilerden türev fonksiyonunun değeri hakkında çıkarımda bulunamadığından fonksiyona ilişkin bir cebirsel ifade bulma arayışına girmiştir. Eylem seviyesinde yer alan öğrenciler ise grafiksel verilerden hareketle türev fonksiyonu için yalnızca tek noktada çıkarımda bulunabilmekte, bir aralık boyunca türev fonksiyonunun değerlerini tasavvur edemeyerek görüntü kümesini oluşturamamaktadır. Yine bu seviyedeki öğrenciler de türev fonksiyonunun bir aralık boyunca aldığı değerlerden görüntü kümesini belirleyebilmek için fonksiyonun cebirsel ifadesini öğrenme ihtiyacı hissetmişlerdir.

Kontrol grubunda türev fonksiyonu kavramını kazandırma amacıyla yürütülen öğretimde araştırmacı, tahtada fonksiyon grafikleri ve grafikler üzerinde bir aralıkta bir kaç teğet doğrusunu eğim değerleri ile birlikte çizerek, türev fonksiyonunun tanım ve değer kümelerinin ne olacağını tartışmıştır. Deney grubunda yürütülen öğretim sürecinde ise bu kavramın, öğrencilerin çalışma yaprağı-5 içerisinde yer alan yönergeler doğrultusunda GeoGebra içerisinde gerçekleştirdikleri eylemler vasıtasıyla kazanılması amaçlanmıştır. Öğrenciler, GeoGebra içerisinde yer alan bir fonksiyon grafiği üzerinde serbestçe hareket eden noktayı grafik üzerinde gezdirerek, bu noktadan grafiğe çizilen teğetin eğim değerindeki değişimi ve bu eğim değerlerinin oluşturduğu grafiği ekranda incelemiş, devamında türev fonksiyonunun tanımını oluşturarak tanım ve değer kümelerini belirlemişlerdir. Deney grubunda yer alan öğrencilerin tümü, grafiksel problem durumlarında bir fonksiyonun grafiğinden türev fonksiyonunun görüntü kümesine ilişkin çıkarımda bulunmada fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç hissetmemiştir. Deney grubunda öğrencilerin bu ihtiyacı hissetmemesi, GeoGebra içerisinde herhangi bir cebirsel ifadeyle uğraşmadan, doğrudan fonksiyon grafiğine çizilen teğetler ile türev fonksiyonunu inşa etme yönünde gerçekleştirdikleri eylemlerin bir sonucu olduğu düşünülmektedir.

Süreç ve nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrenciler arasındaki farklardan biri, bir aralık boyunca bir fonksiyonun türev fonksiyonunun aldığı tüm değerleri matematiksel bir nesne, diğer bir ifadeyle bir küme olarak yapılandırma noktasında ortaya çıkmıştır. Süreç seviyesinde anlama sergileyen öğrenciler her ne kadar bir aralık boyunca bir fonksiyonun türev fonksiyonu değerlerine ilişkin çıkarımda bulunabilse de, türev fonksiyonun bu aralıktaki tüm değerlerini temsil eden görüntü kümesini oluşturamamış, bunun sonucunda türev fonksiyonu üzerinde tanımlanan bileşke ve tersleme işlemlerini içeren sorularda başarı gösterememişlerdir. Mülakatlar sonucunda deney grubunda 7 kontrol grubunda ise bir öğrenci nesne kategorisine dâhil edildi. Deney grubunda yer alan öğrenciler GeoGebra ortamında türev fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri üzerine tartışırken, yazılımın sağladığı avantajın sonucunda, bir aralık boyunca türev fonksiyonunun aldığı tüm değerleri bir grafik olarak görebilmekte bunun yanı sıra fonksiyonda meydana gelen herhangi bir değişim sonucunda, bu değişimin türev fonksiyonuna nasıl etki ettiğini eş zamanlı olarak izleyebilmekteydi. Kontrol grubunda yer alan öğrenciler ise öğrenme ortamının doğası gereği bu fırsattan yoksundular. Yazılımın sunduğu bu olanağın, türev fonksiyonuna ilişkin nesne seviyesinde anlama oluşturmada en etkili etken olduğu düşünülmektedir.

FBTT-II içerisinde araştırma türünden problemler olan ve ortalama değer teoremi üzerine kurgulanan 5. ve 6. sorular, deney ve kontrol grubu öğrencilerinin anlama seviyelerinin yanı sıra, problem çözme becerileri açısından oluşan farklılığı da ortaya çıkarmıştır. Deney grubunda yer alan öğrenciler bu sorularda kontrol grubu öğrencilerinde rastlanmayan farklı çözüm yöntemleri kullanmışlardır. Bu çözüm yöntemlerinin doğasına bakıldığında, ortalama değer teoremini uygulamanın ötesinde, temelinde teğet ve kesen doğrularının devinimini içermektedir. Deney grubu öğrencilerinin sorulara bu yönde yaklaşımı, derslerde yazılım içerisinde oluşturulan yapılarda yer alan öğeler üzerindeki eylemlerin bir sonucu olarak düşünülmektedir. Öğrencilerin derslerde yapılar üzerinde dinamik olarak gerçeleştirdikleri eylemler düşünme süreçlerini de etkilemiş, böylece kağıt ortamında statik olarak karşılaştıkları problem durumlarında zihinlerinde oluşturdukları dinamik süreçleri uygulayabilir hale gelmiştir. Kontrol grubu öğrencilerinin problemlerin çözümünde dinamik bir yaklaşım sergilememeleri, deney grubu öğrencilerin bu dinamik çözüm yöntemlerini uygulamada yazılımın rolü olduğunu göstermektedir.

5.3. Öğrencilerin Teğet Kavramına İlişkin Genellemelerine Yönelik Tartışma

Matematik öğretim sürecinde matematiksel kavramların bir kısmı bir üst öğretim seviyesinde daha kapsamlı ve formel olacak şekilde tekrar ele alınmaktadır. Bu durumlarda kavramın ya uygulanabilir olduğu nesnelerin kümesi genişlemekte, ya da kavram daha formel nitelikte tanımlanmaktadır. Fonksiyon kavramı ilk duruma örnek olarak gösterilebilir. Matematik eğitimi sürecinde fonksiyon kavramı öğrencilere ilk olarak sayıları yine sayılara çeviren bir işlem olarak gösterilmekte, daha üst öğrenim seviyelerinde ise, determinant fonksiyonunda olduğu gibi, fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerinin elemanları farklı nesneler olabilmektedir. İkinci durumun bir örneği teğet kavramıdır. Teğet kavramı öğrencilere ilk olarak Euclid geometrisi çerçevesinde sunulmakta, daha sonra analitik geometri müfredatında tekrar ele alınmakta ve son olarak formel anlamda analiz dersleri bağlamında tanımlanmaktadır. Teğet kavramının analiz dersi içerisinde ele alınmasıyla öğrencilerden, kavramı türev kavramı ile ilişkilendirmeleri ve formel olarak yeniden yapılandırmaları beklenmektedir. Fakat daha önce literatür kısmında değindiğimiz üzere bu konu üzerinde yapılan çalışmalar geleneksel öğretim süreçlerinin öğrencilerin kavramı formel olarak genellemede etkili olmadığını göstermektedir. Bu sonuçtan hareketle araştırmanın amaçlarından biri, tasarlanan öğretim ortamının öğrencilerin teğet kavramını genellemelerindeki etkisini belirlemekti.

Tasarlanan öğretim ortamının geleneksel öğretim ortamıyla kıyaslayarak öğrencilerin genellemeleri üzerindeki etkisini belirlemek için ilk olarak öğrencilerin genellemelerini sınıflandırmak veya nitelemek gerekmekteydi. Bu gereklilikten hareketle matematiksel kavramların veya işlemlerin genellenmesinde bireyin zihninde oluşabilecek farklı yapılanmaları açıklayan ve Harel ve Tall (1989) tarafından ileri sürülen teori teğet kavramına uyarlandı. Bu basamağın devamında öğrencilerin teğet kavramına ilişkin genellemelerini belirlemek için TGT geliştirildi. TGT içerisinde yer alan soruların oluşturulmasında, literatürde çalışmanın evvelinde bu konu üzerinde yapılan araştırmaların rapor ettiği kavram yanılgıları ve sonuçlar dikkate alındı. TGT üç bölümden oluşmaktaydı. Testin birinci kısmı öğrencilerden teğet kavramını tanımlamalarını, ikinci kısım verilen eğrilere üzerindeki noktalardan, şayet varsa, teğet çizmeyi ve son kısım ise yalnızca cebirsel olarak ifade edilen fonksiyonların verilen noktalarda, şayet varsa, teğet denklemlerini bulmalarını istemekteydi. TGT araştırmanın başında ve sonunda her iki gruba da uygulandı.

Araştırmanın başında yapılan TGT'de her iki gruptaki öğrencilerin büyük çoğunluğu teğet kavramını Euclid geometrisi bağlamında tanımlamıştır. Araştırmanın sonunda yapılan TGT'de ise kontrol grubu ile kıyaslandığında, deney grubundaki öğrencilerin daha büyük çoğunluğunun teğet kavramını formel olarak tanımladığı görülmüştür. Çalışma bağlamında yürütülen öğretim sürecinde her iki grupta da teğet kavramının formel tanımı, tanımın geometrik boyutta ifade ettiği anlam ile birlikte tartışılarak ele alınmış, bunun yanı sıra çalışmanın ilerleyen haftalarında teğet doğrusu, türev kavramının geometrik yorumu altında yer alan diğer konu başlıkları içerisinde yoğun olarak kullanılmıştır. Buna rağmen araştırmanın sonunda yapılan TGT sonucunda kontrol grubunda 14, deney grubunda ise 4 öğrencinin kavramı Euclid bağlamında tanımlamış olması, öğrencilerin kavram imgelerinin oluşumunda rol alan Euclid bağlamının değişime dirençli olduğunu göstermektedir.

TGT'nin ikinci kısmında yer alan sorular öğrencilerden verilen eğrilere, eğriler üzerinde işaretlenen noktalardan teğet çizmeyi ve çizilemeyeceğine karar verdiklerinde ise gerekçelerini belirtmelerini istemekteydi. Öğrencilerin bu bölüme verdikleri cevaplar kavram imgelerinde yer alan kavram yanılgılarını ortaya çıkardı. Ortaya çıkan bu kavram yanılgılarından biri hariç tümü literatürde yer alan başka çalışmalarda da rapor edilmiştir (Tall, 1987; Biza ve Zachariades, 2006; Biza ve diğ., 2006; Potari ve diğ., 2006; Biza, 2007). Bu çalışmaya özgü olan kavram yanılgısı, öğrencilerin TGT'nin ikinci kısmında yer alan eğrilerden bazılarına istenen noktada teğet çizilemeyeceği yönünde verdikleri kararlarını desteklemek için ileri sürdükleri, teğet aranan noktada türev değerinin sıfıra eşit olduğu yönündeki gerekçelerinde kendini göstermiştir. Mülakat öğrencilerinden Nilüfer'in de yer aldığı öğrencilerin bir bölümü, aranan noktada türev değerinin sıfır olduğunu söyleyip, sıfır değerini eğim değişkenini niceleyen bir sayı olarak değil, günlük hayatta kullanılan yokluk anlamında ele aldıkları görülmüştür. Her ne kadar teğet kavramına yönelik yapılan çalışmalarda böyle bir kavram yanılgısı rapor edilmemiş olsa da, özellikle limit kavramını anlamada günlük dilin etkisini inceleyen araştırmalar bu yönde yanılgıları rapor etmiştir (Monaghan, 1991). Belirlenen kavram yanılgıları incelendiğinde, esasında tümünün doğasının aynı olduğu görülmektedir. Kavram yanılgılarının tümü teğet kavramının ilk olarak Euclid geometrisi bağlamında ele alınması sonucunda kavrama atfedilen "teğet çizildiği eğri ile bir tek ortak noktaya sahiptir" özelliğinin bir sonucudur. Dolayısıyla, teğet kavramına ilişkin genellemenin gerçekleştirilememesi, bu kavram yanılgılarını ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Araştırmanın sonunda yapılan TGT'de kontrol grubunda kavramı tanımlamada Euclid baskın kategorisi içerisinde 14 öğrenci bulunmakla birlikte, KY3, KY4, KY5 olarak sınıflanan kavram yanılgılarına sahip öğrencilerin frekansları sırasıyla 19, 20 ve 20 olarak belirlenmiştir. Bu durum kavramı tanımlamada analiz baskın veya formel tanım sınıfına dâhil edilen öğrencilerden bir kısmının bu kavram yanılgılarına sahip olduklarını göstermektedir. Bu öğrenciler araştırmanın sonunda her ne kadar kavramı tanımlamada Euclid bağlamından kurtulmuş olsalar da, Euclid bağlamında kavrama atfettikleri "teğet çizildiği eğri ile bir tek ortak noktaya sahiptir" geçersiz özellik hâlâ kavram imgelerine hükmetmektedir. Sonuç olarak bu durum, kavramı tanımlamada Euclid geometrisi bağlamından kurtulmanın, kavramı tam olarak genellemede yeterli olmadığını göstermektedir. Mülakat öğrencilerinin belirlenen genelleme türleri ile kavramı tanımlama hususunda atandıkları kategorileri gösteren Tablo 32'de yer alan veriler de bu sonucu destekler niteliktedir. Tablo 32'de görüldüğü gibi, kavram tanımlama hususunda formel tanım kategorisine dâhil edilen öğrencilerin bazıları düzenleyici genellemeyi gerçekleştirememiştir. Dolayısıyla kavramın formel tanımının öğrenilmiş olması, teğet kavramını Euclid bağlamından analiz bağlamına başarılı bir şekilde genelleştirildiği anlamına gelmemektedir.

Öğrencilerin TGT'nin ikinci ve üçüncü kısmına verdikleri cevaplar birlikte ele alınarak teğet kavramına ilişkin gerçekleştirdikleri genelleme türleri belirlendi. Çalışmanın başında kontrol ve deney grubunda yer alan öğrencilerden hiç biri, teğet kavramını Euclid bağlamından analiz bağlamına formel anlamda başarılı bir şekilde genellemeyi gerektiren düzenleyici genelleme türünü gerçekleştirememişti. Bu durum, her ne kadar teğet kavramının türev ile ilişkisi ortaöğretim matematik müfredatında türev konusu içerisinde bir kazanım olarak yer alsa da, öğrencilerin bu süreçte aldıkları öğretimin kavramı genellemede etkili olmadığını göstermektedir. Bunun yanı sıra, her iki grupta yer alan öğrencilerin bir kısmının cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun bir noktasında teğet denklemini hesaplayamadığı görülmüş, bunun sonucunda bu performansı sergileyemeyen öğrencilerin genelleme türleri genişleyen genelleme olarak sınıflandırılmıştır. Çalışmanın sonunda deney ve kontrol grubu öğrencilerinin teğet kavramına ilişkin gerçekleştirdikleri genelleme türleri arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare bağımsızlık testi yapılmıştır. Testin sonucu deney grubunda ayırıcı genelleme türüne sahip öğrenci sayısının düzenleyici genelleme türüne sahip öğrenci sayısına oranı ile, kontrol grubunda ayırıcı genelleme türüne sahip öğrenci sayısının düzenleyici genelleme türüne sahip öğrenci sayısına oranı arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğunu göstermiştir ($p<.05$). Ortaya çıkan bu fark, teğet kavramını Euclid geometrisi bağlamından analiz bağlamına genellemede, tasarlanan öğretim sürecinin geleneksel öğretim sürecine nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir. Ortaya çıkan bu farklılık ve sebebi her iki grubtan seçilen öğrenciler ile yapılan mülakatlarda, öğrencilerin sergilediği muhakeme süreçlerinde kendini daha açık olarak göstermiştir. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda kontrol grubundan seçilen 9 öğrenciden 3'ü düzenleyici, 6'sı ise ayırıcı genelleme sınıfında, deney grubundan seçilen 9 öğrenciden 2'si ayırıcı, 7'si ise düzenleyici genelleme sınıfında yer almıştır. Ayırıcı genelleme sınıfına dâhil edilen öğrencilerin, aynı fonksiyonun testin ikinci ve üçüncü kısmında yer alan grafiksel ve cebirsel temsillerine teğetin varlığı konusunda çelişkili cevaplar verdikleri görülmüştür. Bu öğrencilerden bir kısmı verdikleri çelişkili cevaplar ile yüzleştirildiklerinde bile grafiksel bağlamda teğetin varlığını, üzerinde uğraştıkları örneğin genişleyici genelleme sonucunda kavram imgelerine ekledikleri örneklere benzememesinden ötürü reddetmişlerdir. Bu öğrenciler kavramın formel tanımının geometrik boyutta ifade ettiği anlamı zihinlerinde yapılandıramamalarının bir sonucu olarak, grafiksel bağlamda sorulan bir probleme ilişkin muhakeme yapma sürecinde hâlâ Euclid bağlamında oluşturdukları kavram imgelerini kıstas olarak kullandıkları görülmüştür. Zehra'nın örnek olduğu ayırıcı genelleme sınıfına dâhil edilen öğrencilerin bir bölümü ise, grafiksel bağlamda sunulan problem durumlarında teğetin varlığını kabul etmelerine rağmen, ele alınan örneğin genişleyici genelleme sonucunda zihinlerine dâhil ettikleri eğrilere benzememesinden ötürü teğetin nasıl olacağını belirleyememişlerdir. Bu öğrencilerin de kavramın formel tanımının geometrik boyutta ifade ettiği anlamı zihinlerinde yapılandıramadıkları belirlenmiştir.

Yapılan mülakatlar sonunda, teğet kavramına ilişkin genelleme türü ayırıcı olarak belirlenen öğrencilerden hiçbirinin teğet doğrusunu, kesen doğrularının limit durumu olarak ilişkilendiremediği ortaya çıkmıştır. Buna karşın genelleme türü düzenleyici olarak belirlenen öğrencilerin ise bu ilişkiyi kurabildikleri görülmüştür. Bu durum, teğet kavramına ilişkin istenen genelleme türü olan düzenleyici genellemenin gerçekleşmesi için, kavramın tanımında yer alan limit ifadesinin belirttiği kesen doğrularının teğete yaklaşma sürecinin anlaşılmasının gerekli olduğunu göstermektedir. Mülakat öğrencilerinin tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlama seviyeleri (Tablo 16) ile genelleme türleri (Tablo 32) arasındaki ilişki de bu gerekliliğe işaret etmektedir. Tek noktada türev değerine yönelik anlaması nesne seviyesinde belirlenen öğrenciler, kesen doğrularının teğete yaklaşma sürecini problem durumlarına uygulayabilmekte ve bu süreci kullanarak muhakeme yapabilmekteydi. Tablo 16 ile Tablo 32 bir arada ele alındığında nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrencilerin tümünün istenen genelleme türü olan düzenleyici genellemeyi gerçekleştirildiği görülmektedir. Bu durum da düzenleyici genellemenin gerçekleşmesi için kesen doğrularının teğete yaklaşması sürecinin anlaşılması gerektiğini göstermektedir. Tablo 16'da tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin nesne seviyesinde anlama sergilemeyen fakat Tablo 32'de düzenleyici genelleme sınıfına dâhil edilen öğrencilerin bulunması, ilk bakışta, yaptığımız bu yorumu geçersiz kıldığını düşündürebilir. Fakat öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik anlama seviyeleri araştırma dâhilinde yürütülen öğretimin 1. haftasında, teğet kavramına ilişkin oluşturdukları genelleme türleri ise 7. haftada belirlenmiştir. Dolayısıyla tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik nesne seviyesinden daha alt seviyede anlama sergileyen ve düzenleyici geneleme türünü gerçekleştiren bu öğrenciler, kesen doğrularının teğet doğrusuna yaklaşma sürecini bu zaman aralığı içerisinde anlamış olabilir.

Teğete ilişkin genelleme hususunda deney grubunun kontrol grubuna nazaran gösterdiği başarı, bu ilişkiyi kurmada deney grubunda yürütülen öğretim yönteminin, dolayısıyla yazılımın bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Deney grubu öğrencilerinin, teğet kavramı ile türev kavramı arasındaki ilişkiyi kurmaları için hazırlanan Çalışma Yaprağı-1 ve Çalışma Yaprağı-2 içerisinde yer alan eylemleri gerçekleştirmeleri bu ilişkiyi kurmada etkili olmuştur. Öğrencilerin Çalışma Yaprağı-2 içerisinde yer alan adımlarda, kesen doğrularını yazılım içerisinde serbestçe hareket ettirerek teğet doğrusuna yaklaştırmaları, kesen doğrularının eğimi ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi gözleyebilmeleri ve bu süreçler sonunda teğet doğrusunu kesen doğrularının yaklaşımı olarak tanımlama yönünde sarfettikleri zihinsel çaba, teğet doğrusunu kesen doğrularının limiti olarak görmede geleneksel yöntem ile işlenen derslere nazaran daha etkili olmuştur. Bu durum mülakatlarda öğrencilerin söyledikleri ifadelerde de kendisini göstermiştir. Kontrol grubuna nazaran deney grubunda daha fazla öğrenci, kesen doğrusu teriminin belirli nesne olduğu ve yüklemi, taşırsak, sürüklersek, hareket ettirirsek fiillerinden biri olan cümleler kurduğu gözlenmiştir. Bu durumun ise deney grubu öğrencilerinin yazılım içerisindeki yaptıkları eylemlerin zihinlerinde bıraktığı izlerin, daha sonra problem durumlarında sözel olarak dışa vurumu olduğu olarak yorumlanmıştır.

Tall (1987), yaptığı araştırmada yerel doğrusallık yaklaşımını kullanarak bilgisayar destekli yürütülen öğretim sürecinin öğrencilerin teğet kavramına ilişkin kavram imgelerine etkisini incelemiştir. Araştırmasının sonuçlarında öğrencilerin önemli bir bölümünün teğet kavramına düzlem geometrisi bağlamında atfettikleri "teğet grafiğe tek noktada değmelidir" özelliğin geçerli olduğuna inanmaya devam ettiklerini ve bu durumun teğetin, grafik ile çakışık olduğu durumlarda öğrencileri yanılgıya düşürdüğünü bildirmiştir. Yapılan bu çalışmada teğet kavramına ilişkin istenilen genelleme türünü gerçekleştiren ve gerçekleştiremeyen öğrenciler arasındaki farkın, teğet kavramının formel tanımının geometrik boyutunu anlama olduğu göz önüne alındığında, Tall'un elde ettiği sonuç beklenen bir sonuçtur. Zira yalnızca yerel doğrusallık fikrinin işe koşulmasıyla gerçekleştirilen öğretim sürecinin öğrencilerin kavramın formel tanımını anlamada yeterli olmayacaktır.

Isaacson (1999), teğet kavramının bilgisayar ortamanında statik, animasyon, ve etkileşimli-animasyon olarak sunulmasının öğrencilerin teğet kavramına yönelik anlamaları üzerinde etkisini incelemiştir. Çalışmasının sonucunda bilgisayar ortamında oluşturulmuş yapılara doğrudan müdahele ederek eylemler gerçekleştiren öğrencilerin, diğer gruplarda yer alan öğrencilere nazaran teğet kavramına ilişkin kavram imgelerinin formel teori ile daha tutarlı olduğunu bildirmiştir. Diğer bir ifadeyle öğrencilerin teğet kavramının formel tanımını anlamada, tanımın içerisinde yer alan limit sürecini bizzat kendilerinin bilgisayar ortamında oluşturmaları, bu sürecin bir başkası tarafından onlara aktarılmasından daha etkili olmuştur. Elde edilen bu sonuç, bu çalışmada elde edilen sonuç ile paralellik göstermektedir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu araştırmada bir DMY olan GeoGebra ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının, üniversite düzeyinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi geleneksel öğrenme ortamıyla kıyaslanarak incelenmiştir. Yarı-deneysel yöntemin benimsendiği araştırmada deney grubunda öğretim hazırlanan çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayar destekli olarak yürütülürken, kontrol grubunda geleneksel yöntem izlenmiştir. Her iki grupta öğretim araştırmacı tarafından yürütülmüştür.

Çalışmanın öncesinde öğrencilerin, türev kavramının geometrik boyutu altında belirlenen alt başlıklara ilişkin bilgilerinin yetersiz olmasından ötürü TGT hariç hazırlanan diğer testler ön-test olarak uygulanamamıştır. Bunun sonucunda araştırmacı uygulama öncesinde hem iki grubun araştırmanın başında denk olduğunu belirlemek hem de her iki gruptan mülakatlara denk öğrenciler seçmek için YT'yi tasarlayıp uygulamıştır. YT'nin tasarımında, literatürde türev kavramının öğrenilmesine etki eden ön bilgilerin neler olduğunu belirlemeyi amaçlayan araştırma raporları dikkate alınmıştır. YT'den elde edilen veriler üzerinde gerçekleştirilen bağımsız t-testi sonuçları, araştırma öncesinde her iki grubun türev kavramının öğrenimine etki ettiği rapor edilen konularda gösterdikleri başarı açısından birbirine denk olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte mülakatlara seçilen öğrenciler, YT'den elde edilen verilerin oluşturduğu dağılım dikkate alınarak, hem örneklemi temsil edecek hem de birbirleriyle denk olacak şekilde seçilmiştir.

Öğrencilerin araştırmanın birinci ve ikinci problemlerinde belirtilen konulara ilişkin anlamalarını kıyaslamak için, geliştirilen testlerde elde ettikleri puanlar üzerinde YT puanları ortak değişken alınarak ANCOVA analizleri gerçekleştirilmiştir. Bunun yanı sıra her iki gruptan seçilen öğrenciler ile testler içerisinde yer alan sorular üzerinde mülakatlar gerçekleştirilerek, APOS teorisi temelinde anlama seviyeleri belirlenmiştir. Klinik mülakatlar aynı zamanda deney grubu için oluşturulan öğrenme ortamının, muhakeme yapmada ve problem çözmede kazandırdığı farklı düşünme biçimlerini ortaya çıkarmıştır. Araştırmanın üçüncü problemini cevaplamak için literatürde matematiksel kavramların genellemesine ilişkin ileri sürülen bir teori teğet kavramına uyarlanmış ve bu temelde hazırlanan TGT testi öğrencilere araştırmanın başında ve sonunda uygulanmıştır. Bu bölümde araştırmadan elde edilen sonuçlar araştırma problemleri başlıkları altında sunulacaktır.

1. DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı bir fonksiyonun tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğrenme ortamına kıyasen daha etkilidir.

Araştırmanın amaçlarından biri, DMY destekli tasarlanan öğrenme ortamının bir fonksiyonun tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğrenme ortamına kıyasen etkililiğini incelemekti. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin anlamalarını belirlemek için araştırmacı tarafından, genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar ve uzman görüşleri doğrultusunda NBTT geliştirildi. NBTT en genel anlamda, grafiksel verilerden hareketle bir fonksiyonun bir noktasındaki türevini teğet doğrusu ile ilişkilendirip yorumlayabilmeyi ve bir noktada türev değerine ilişkin, noktanın civarında bulunan kesen doğrularının eğim değerlerinden yararlanarak muhakeme yapabilmeyi gerektiren sorulardan oluşmaktaydı. NBTT her iki gruba uygulandıktan sonra, tüm öğrencilerin testte yer alan sorulara verdikleri cevaplar incelenerek soru bazında puanlama rubrikleri oluşturuldu. Devamında bu puanlama rubrikleri kullanılarak her bir öğrencinin NBTT puanı hesaplandı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin NBTT puanları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için, araştırmanın başında YT'den aldıkları puanlar ortak değişken olarak alınarak ANCOVA analizi gerçekleştirildi. Analizin sonucu deney grubu lehine anlamlı bir farkın bulunduğunu ortaya koydu. Bu sonuç deney grubunda oluşturulan öğrenme ortamının geleneksel öğrenme ortamına kıyasen, tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlamada daha etkili olduğunu söylemektedir.

Her iki gruba NBTT uygulandıktan sonra, mülakat öğrencileri ile testte yer alan sorular üzerinde görüşmeler gerçekleştirildi. Böylece iki grubun sorular üzerindeki gösterdikleri performansın yanı sıra, tâbi oldukları öğrenme ortamlarının, şayet sebep olduysa, düşünme biçimlerinde nasıl farklılıklar oluşturduğunu ve APOS teorisi temelinde anlama seviyelerini saptamak amaçlandı. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubu öğrencilerine nispeten, APOS teorisi bağlamında daha ileri anlamalar gerçekleştirdikleri ortaya çıkmıştır. Bu durumun neticesi olarak, gerçekleştirilen mülakatlardan ulaşılan sonuçlar şu şekildedir;

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı bir noktadaki türev değeri ile o noktada fonksiyon grafiğine çizilen teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi oluşturmada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkilidir. Bunun sonucunda deney grubu mülakat öğrencilerinin hiç birinde, kontrol grubu mülakat öğrencilerinin düşünme süreçlerinde rastlanan (türev fonksiyonunun grafiği ile fonksiyonun grafiği arasında benzerlik bulunması gerektiği veya farklı noktalardaki türev değerlerini noktaların fonksiyonun ekstremum noktalarına olan uzaklıklarından yola çıkarak kıysalamak gibi) geçersiz akıl yürütme süreçlerine rastlanmamıştır.

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı grafiksel verilerden hareketle bir noktada türev değerine ilişkin çıkarımda bulunmada geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha etkilidir. Bunun sonucunda kontrol grubu öğrencilerinde karşılaşıldığının aksine deney grubu öğrencilerinden hiçbiri, grafiksel verilerin yeterli olduğu problem durumlarında türev değerine ilişkin çıkarımda bulunmada fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç hissetmiştir. Bunun yanı sıra kontrol grubu öğrencilerinin bir kısmı teğetin eğim değerine ilişkin çıkarımda bulunurken, her defasında teğetin O_x ekseni ile yaptığı açıdan yola çıkmakta ve bazı durumlarda izledikleri bu yol onları hataya sürüklemekteydi. Deney grubu öğrencileri ise yalnızca teğet doğrusunun grafik üzerinde pozisyonuna bakarak eğim değeri hakkında doğru çıkarımda bulunabilmekteydi. Bu durumun sebebi, deney grubunda yer alan öğrencilerin yazılım içerisinde fonksiyon grafikleri üzerinde çizilen teğetleri serbestçe hareket ettirerek, teğet doğrularının eğim değerlerindeki değişimi fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç duymadan izleyebilmeleridir. Bu eylemlerin sonucunda deney grubu öğrencileri, bir fonksiyon grafiği üzerinde farklı noktalarda çizilen teğetlerin eğim değerlerini, teğetlerin konumlarına bakarak düşünebilir hale gelmiştir.
- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı bir noktada teğet doğrusu ile o nokta civarındaki kesen doğruları arasındaki ilişkiyi anlamada geleneksel öğrenme ortamına nispetle daha etkilidir. Böylece deney grubunda daha fazla öğrenci tek noktada türev değerine ilişkin, noktanın civarında bulunan kesen doğrularının eğimlerini kullanarak muhakeme yapabilmiştir. Yazılım içerisinde bir noktada teğetin ve bu noktanın civarında kesen doğrularının serbest bir değişkene bağlı olarak oluşturabilmesi sonucunda, deney grubu öğrencileri kesen doğrularının serbest değişkeni değiştirme vasıtasıyla teğet doğrusuna yaklaşımını hem grafiksel hem de sayısal olarak inceleyebilmiştir. Yazılımın sunduğu bu olanaklar öğrencilere bu ilişkiye yönelik başlangıçta sezgisel bir anlama kazandırmada rol oynamıştır.
- ✓ Öğretim sürecinde bir noktada türev ile o noktadaki teğet doğrusu arasındaki ilişkiyi vurgulamak için kullanılan ifadelerde sergilenen dikkatsizilik, öğrencilerde teğet doğrusunun denkleminin birinci türev fonksiyonunun cebirsel ifadesi olduğu şeklinde kavram yanılgısının oluşumuna sebep olmaktadır.

2. DMY ile zengileştirilmiş öğrenme ortamı türev kavramının formel (ε-δ) tanımının geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha etkilidir**.**

Araştırmanın amaçlarından bir diğeri, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının türev kavramının formel tanımının geometrik boyutunu anlamada etkisini geleneksel öğrenme ortamıyla karşılaştırarak belirlemekti. Öğrencilerin türev kavramının formel tanımının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarını ortaya çıkarmak ve değerlendirmek için, araştırmacı tarafından genetik ayrışım içerisindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alınarak hazırlanmış TFTT kullanıldı. TFTT içerisinde yer alan sorular özetle, türev kavramının formel tanımı içerisindeki değişkenlerin ve eşitsizliklerin düzlemdeki temsillerini belirlemeyi ve grafiksel verilerden hareketle ε ve δ değişkenlerinin sınırlandırdığı eşitsizlikleri yorumlamayı gerektiren sorulardan oluşmaktaydı. Öğrencilerin TFTT'de sergiledikleri performansları sayısallaştırmada, testte yer alan her bir soru için yine öğrencilerin verdikleri cevapların temelinde hazırlanan puanlama rubrikleri kullanıldı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin TFTT puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için, YT puanları kontrol değişkeni alınarak ANCOVA analizi gerçekleştirildi. Elde edilen istatiksel sonuç iki grubun TFTT puan ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir farkın bulunduğunu gösterdi. Bu durum, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının türev kavramının formel tanımını anlamada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkili olduğunu söylemektedir.

TFTT'nin uygulanmasından sonra, mülakat öğrencileri ile testin dördüncü sorusu etrafında görüşmeler gerçekleştirildi. Yürütülen mülakatlar ile iki grupta yer alan öğrencilerin hem APOS teorisi bağlamında ulaştıkları anlama seviyeleri hem de problemlerin çözümünde kullandıkları düşünme süreçleri arasında farklılıkların olup olmadığını belirlemek amaçlandı. Yapılan görüşmeler deney grubu öğrencilerinin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran, APOS teorisi açısından daha ileri seviyede anlamalar gerçekleştirdiklerini ortaya koymuştur. Bu durumun neticesi olarak görüşmelerden ortaya çıkan sonuçlar şu şekildedir;

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı formel tanım içersinde yer alan ifadelerin geometrik temsillerini anlamada geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir. Bunun sonucunda deney grubunda yer alan öğrencilerin tümü, türev aranan noktadan çizilen kesen doğrularının eğim değerini gösteren farkların bölümü ifadesinin geometrik temsilini yorumlayabilmiştir. Buna karşın kontrol grubunda yer alan bazı öğrenciler bu ifadenin geometrik temsilini oluşturamadığından, bu yeterliliğe sahip olmayı gerektiren sorulara yorum getirememiştir. Bu durumun sebebi, yazılımın ekranda farkların bölümü ifadesinin aynı anda gafiksel, notasyonel ve sayısal temsillerini resmedebilmesidir. Bu olanağın sonucunda deney grubu öğrencileri yazılım içerisinde delta değişkeninin belirlediği aralıkta, kesen doğrularının farklı durumları için farkların bölümü ifadesinin neye karşılık geldiğini ve aldığı değerleri dinamik olarak izleyebilmiştir. Bunun sonucunda bu ifadenin farklı temsilleri arasındaki ilişkiyi kurabilmiştir.

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı formel tanım içerisinde yer alan eşitsizliklerin geometrik temsillerini anlamada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkilidir. Bunun sonucunda kontrol grubuna nazaran deney grubunda daha fazla öğrenci, türev aranan noktanın civarında kesen doğrularının eğimlerindeki değişimi, fonksiyon eğrisini kestiği noktaların koordinatlarının sayısal değerlerine ihtiyaç duymadan tasavvur edebilmiştir. Böylece formel tanım içerisinde Ɛ değişkeninin sınırladığı eşitsizliğe yönelik grafiksel verilerden hareketle muhakeme yapabilmiştir. Ortaya çıkan bu farkın sebebi, yazılımın Ɛ değişkeninin sınırladığı eşitsizliğin grafiksel ve sayısal temsillerini ekrana yansıtabilmesi sonucunda, öğrencilere bir aralıkta kesen doğrularının eğimleri ile teğetin eğimi arasındaki farkı dinamik olarak hesaplayabilme fırsatı sunmasıdır.
- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı formel tanım içerisinde yer alan Ɛ ve δ değişkenleri arasındaki ilişkiyi anlamada geleneksel öğrenme ortamına nispetle daha etkilidir. Bunun sonucunda deney grubunda kontrol grubuna kıyasen daha fazla öğrenci, grafiksel verilerden hareketle bu iki değişkenin sınırladığı eşitsizliklerin belirlediği kümeyi ve birinde meydana gelen değişimin diğerinde sebep olduğu etkiyi yorumlayabilmiş, böylece bu iki değişkenin birbirine bağlı değerlerini hesaplayabilmiştir. Deney grubunda yer alan öğrenciler, δ ve ε değişkenlerine farklı sayısal değerler vererek belirlenen aralıklarda bu eşitsizliklerin hem grafiksel gösterimlerini hem de bu aralıklar içerisinde ilgili ifadelerin sayısal değerlerindeki değişimi gözlemlemiş, bu iki değişkenin arasındaki bağlantıyı dinamik olarak incelemiştir. Yazılımın sunduğu bu olanaklar, bu iki eşitsizlik arasındaki ilişkiyi oluşturmada kolaylaştırıcı bir rol oynmaktadır.

3. DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlamada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkilidir.

Araştırmada cevap aranan sorulardan biri, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının öğrencilerin fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlamada etkili olup olmadığı idi. Öğrencilerin bu hususta anlamalarını ortaya çıkarmak için FBTT-I araştırmacı tarafından geliştirildi. Geliştirilen bu test türev fonksiyonu grafiklerinden biri verildiğinde diğerini oluşturabilmeyi ve grafiksel verilerden hareketle fonksiyonun artan-azalan, konveks-konkav karakteristikleri hakkında muhakeme yapabilmeyi gerektiren sorulardan oluşmaktaydı. Öğrencilerin FBTT-I'de gösterdikleri performansları sayısallaştırmada, sorulara verdikleri cevaplar incelenerek hazırlanan puanlama rubrikleri kullanıldı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin FBTT-I puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için, YT puanları kontrol değişkeni alınarak ANCOVA analizi gerçekleştirildi. Ortaya çıkan sonuç deney ve kontrol gruplarının sergiledikleri performanslar arasında deney grubu lehine anlamlı bir farkın bulunduğunu gösterdi. Bu durum, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının fonksiyon ve türev fonksiyonu grafikleri arasındaki ilişkileri anlamada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkili olduğunu söylemektedir.

FBTT-I'in uygulanmasını takiben mülakat öğrencileri ile testin içerisinde yer alan sorular çerçevesinde görüşmeler gerçekleştirildi. Gerçekleştirilen mülakatlar yoluyla deney ve kontrol grubu öğrencilerinin hem APOS teorisi temelinde ulaştıkları anlama seviyeleri hem de düşünme süreçleri arasında farklılıkların olup olmadığını belirlemek amaçlandı. Yapılan görüşmeler deney grubu öğrencilerinin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran daha ileri seviyede anlamalar gerçekleştirdiklerini ortaya çıkardı. Bunun neticesinde görüşmelerden ortaya çıkan sonuçlar şu şekildedir;

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı bir aralık boyunca fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile türev fonksiyonunun işareti arasındaki ilişkiyi anlamada geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha etkilidir. Bunun sonucunda deney grubu mülakat öğrencilerinin tamamı bir aralık içerisinde fonksiyonun artan azalan durumunu, bu aralıkta fonksiyon grafiğine çizilen teğetlerin eğim değerlerini tasavvur ederek gerekçelendirebilmiştir. Kontrol grubu mülakat öğrencilerinin bazıları bu dinamik düşünme biçimini kazanamamalarından ötürü bu ilişkiyi kuramamış, bu husustaki anlamaları ezber niteliğinde kalmıştır. Ortaya çıkan bu farklılığın sebebi, yazılımın bir fonksiyonun grafiğini ve fonksiyon gafiği üzerinde çizilen teğetin farklı durumları için aldığı değerlerin grafiğini eş zamanlı olarak ekranda yansıtabilmesidir. Bu olanağın sayesinde deney grubunda yer alan öğrenciler, verilen bir fonksiyon grafiği üzerinde çizilen teğeti serbestçe gezdirerek fonksiyonun artan-azalan durumu ile teğetin eğiminin pozitif-negatif olması arasındaki ilişkiyi, fonksiyonun cebirsel ifadesine gerek duymadan inceleyebilmiştir.

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı bir aralık boyunca fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği ile ikinci türev fonksiyonun işareti arasındaki ilişkiyi anlamada geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir. Bunun neticesinde kontrol grubuna nazaran deney grubunda daha fazla öğrenci bir aralık boyunca fonksiyonun grafiğine çizilen teğetlerin eğim değerlerindeki değişimi tasavvur edip, bu değişimin ikinci türev fonksiyonunun işaretine etkisini belirleyerek fonksiyonun konveks-konkav olma durumunu gerekçelendirebilmiştir. Deney grubunda yer alan öğrenciler bir fonksiyonun konveks-konkav karakteristiği ile ikinci türev fonksiyonun işareti arasındaki ilişkiyi incelerken, yazılım içerisinde oluşturulan konveks ve konkav fonksiyon grafikleri üzerinde yer alan teğetleri serbestçe hareket ettirerek teğetlerin eğim değerlerindeki artma ve azalma durumunu hem sayısal hem de grafiksel açıdan dinamik olarak gözlemlemiş ve bunun sonucunda ikinci türev fonksiyonun işaretini yorumlamıştır. Yazılımın sunduğu bu olanaklar bu hususta iki grup arasında farkın ortaya çıkmasında en temel etken olmuştur.

4. DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir

Araştırmada cevap aranan sorulardan bir diğeri, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının öğrencilerin türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlamada etkili olup olmadığı idi. Yürütülen öğretim süreçleri sonucunda öğrencilerin bu konuda sahip oldukları anlamaları belirlemek için FBTT-II araştırmacı tarafından geliştirildi. FBTT-II en genel anlamda grafiksel verilerden hareketle türev fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri hakkında muhakeme yapabilmeyi içeren sorulardan ve fonksiyon anlamında türev kavramını yorumlamayı gerektiren araştırma türünden problemlerden oluşmaktadır. Öğrencilerin FBTT-II’de gösterdikleri performansları sayısallaştırmada, sorulara verdikleri cevaplar incelenerek hazırlanan puanlama rubrikleri kullanıldı. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin FBTT-II puanları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için YT puanları kontrol değişkeni alınarak gerçekleştirilen ANCOVA analizi, deney grubu lehine anlamlı bir farkın bulunduğunu gösterdi. Bu durum, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının türev fonksiyonunun geometrik boyutunu anlamada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkili olduğunu söylemektedir.

FBTT-II’nin her iki gruba uygulanmasından sonra mülakat öğrencileri ile testte yer alan soruların tümü üzerinde farklı iki zamanda görüşmeler gerçekleştirildi. Yürütülen mülakatlar vasıtasıyla deney ve kontrol grubu mülakat öğrencilerinin hem APOS teorisi çerçevesinde ulaştıkları anlama seviyeleri hem de problemlerin çözümünde sergiledikleri düşünme süreçleri arasında farklılıkların olup olmadığını belirlemek amaçlandı. Yapılan görüşmeler deney grubu öğrencilerinin kontrol grubunda yer alan öğrencilere nazaran daha ileri seviyede anlamalar gerçekleştirdiklerini ortaya çıkardı. Bunun neticesinde görüşmelerden ortaya çıkan sonuçlar şu şekildedir;

- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı grafiksel verilerden hareketle türev fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini oluşturmada geleneksel öğrenme ortamına kıyasen daha etkilidir. Bunun sonucunda deney grubu mülakat öğrencilerinin tümü grafiksel olarak verilmiş bir fonksiyondan hareketle, bu fonksiyona ait türev fonksiyonunun görüntü kümesine ilişkin çıkarımda bulunabilmişlerdir. Kontrol grubu mülakat öğrencilerinin bir kısmı ise bir fonksiyon grafiksel olarak temsil edildiğinde, bir aralık içerisinde bu fonksiyon grafiğine çizilen teğetleri tasavvur edemeyip, bu fonksiyona ait türev fonksiyonunun görüntü kümesini oluşturamamıştır. Bu yetersizliğin sonucu olarak bu öğrenciler fonksiyonun cebirsel ifadesini bulma veya öğrenme arayışı içerisine girmişlerdir. Deney grubu öğrencileri bir fonksiyonun türev fonksiyonunun görüntü kümesini araştırırken, yazılım içerisinde verilen bir fonksiyon grafiği üzerinde teğet doğrusunu oluşturmuş ve belirtilen aralık içerisinde teğetin eğim değerindeki değişimi hem sayısal olarak hem de, yazılımın iz bırakma özelliğinden faydalanarak, grafiksel olarak incelemişti. Bu durum deney grubu öğrencilerine bir aralık boyunca türev fonksiyonun aldığı değerleri temsil eden grafiği yorumlama ve türev fonksiyonunun görüntü kümesine ilişkin grafiksel veriden çıkarımda bulunabilme fırsatı sundu. Yazılımın sağladığı bu olanaklar, iki grup arasında ortaya çıkan bu farkın en temel sebebidir.
- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı türev fonksiyonunu matematiksel bir nesne olarak yapılandırmada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkilidir. Bunun sonucunda kontrol grubuna nazaran deney grubunda daha fazla öğrenci, grafiksel verilerden hareketle bir fonksiyonun türev fonksiyonunu farklı işlemler altında kullanabilir hale gelmiştir.
- ✓ DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı problem çözme becerisini geliştirmede geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkildir. FBTT-II testi içerisinde yer alan araştırma türünden problemlere mülakat öğrencilerin verdikleri cevaplar, deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubu öğrencilerinde rastlanmamış farklı çözüm stratejileri kullandıklarını ortaya koymuştur. Ortaya konan bu farklı stratejilerin ortak noktası, çözümde matematiksel nesnelerin devinimini içermesidir. Deney grubu öğrencilerinin

kazandıkları bu dinamik düşünme süreçleri, yazılım içerisinde gerçekleştirdikleri eylemlerin bir sonucudur. Özellikle deney grubu öğrencilerinin ortalama değer teoremine ilişkin yürütülen öğretim sürecinde, teorem içerisinde ifade edilen şartı sağlayan noktayı araştırırken yazılım içerisinde gerçekleştirdikleri eylemleri, daha sonra karşılaştıkları kağıt üstündeki problem durumlarına uyarladıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin çözüme ilişkin yürüttükleri stratejilerde teğet ve kesen doğrularının hareketi bulunmaktadır. Bu durum, öğrencilerin yazılım içerisinde gerçekleştirdikleri eylemlerin onlara dinamik problem çözme stratejileri kazandırdığını göstermektedir.

5. DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamı teğet kavramını Euclid bağlamından analiz bağlamına genellemede geleneksel öğrenme ortamına kıyasen daha etkilidir.

Araştırmada ele alınan son soru, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının teğet kavramının genellenmesinde etkili olup olmadığı idi. Öğrencilerin teğet kavramına ilişkin genellemelerini sınıflandırmak için, literatürde matematiksel kavramların genellenmesine yönelik Harel ve Tall tarafından ileri sürülen teori teğet kavramına uyarlanarak, bu zeminde araştırmacı tarafından geliştirilen TGT kullanıldı. Araştırma sürecinin sonunda öğretim yöntemiyle gerçekleştirilen genelleme türü arasında bir ilişki olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare bağımsızlık testi gerçekleştirildi. Testin sonucu, deney grubunda düzenleyici genelleme türüne sahip öğrenci sayısının ayırıcı genelleme türüne sahip öğrenci sayısına oranı ile kontrol grubunda düzenleyici genelleme türüne sahip öğrenci sayısının ayırıcı genelleme türüne sahip öğrenci sayısına oranı arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğunu göstermiştir. Bu durum, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının teğet kavramını Euclid bağlamından analiz bağlamına başarılı bir şekilde genellemede geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha etkili olduğu sonucunu ortaya koymaktadır.

TGT testi araştırmanın sonunda her iki gruba uygulandıktan sonra testte yer alan sorular üzerinde seçilen mülakat öğrencileri ile görüşmeler gerçekleştirildi. Yapılan görüşmeler yoluyla öğrencilerin teğet kavramına ilişkin oluşturdukları kavram imgelerini derinlemesine incelemek ve tâbi oldukları öğretim süreçlerinin kavram imgelerinde farklılık oluşturup oluşturmadığını belirlemek amaçlandı. Yapılan görüşmeler sonucunda ulaşılan sonuçlar şu şekildedir;

- ✓ Teğet kavramının ilk tanımlanmasında rol alan Euclid bağlamı değişime dirençlidir. Araştırma çerçevesinde her iki grupta yürütülen öğretim sürecinde teğet kavramı formel olarak tanımlanmış ve türev kavramının geometrik boyutu içerisinde yer alan konu başlıkları altında teğet doğrusu yoğun olarak kullanılmıştır. Buna rağmen son TGT'de hem kontrol hem de deney grubunda yer alan öğrencilerin bir kısmının kavramı tanımlamada Euclid bağlamını kullandıkları görülmüştür. Bununla birlikte araştırma sonunda teğet kavramını kontrol grubunda 15 deney grbunda ise 4 öğrencinin Euclid bağlamında tanımlamış olması, bu direnci kırmada DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha etkili olduğunu göstermektedir. Deney grubunda yer alan öğrenciler teğet kavramının formel tanımına ilişkin yürütülen öğretim sürecinde, bir noktada teğet doğrusunu çizmiş daha sonra bu nokta civarında oluşturdukları kesen doğrularının teğete yaklaştırarak, bu yaklaşımı hem grafiksel hem de sayısal olarak yorumlamıştı. Deney grubu öğrencilerin kavramın tanımını oluşturan bu limit sürecini dinamik olarak yazılım içerisinde oluşturmalarının, bu hususta iki grup arasında ortaya çıkan farkın en temel sebebidir.

- ✓ Teğet kavramının formel tanımının öğrenilmiş olması, kavramın Euclid bağlamından analiz bağlamına başarılı bir şekilde genellendiği anlamına gelmemektedir. Araştırmada yer alan öğrencilerin bir kısmı her ne kadar teğet kavramını formel olarak tanımlamış olsa da, grafiksel bağlamda karşılaştıkları problem durumlarında bir noktada teğetin varlığı hususunda karar verirken Euclid bağlamında kavrama atfettikleri "teğet doğrusu eğriyi tek noktada kesmelidir" geçersiz özelliği kullandıkları görülmüştür.
- ✓ Teğet kavramının Euclid bağlamından analiz bağlamına başarılı bir şekilde genellenebilmesi için, teğet doğrusunun kesen doğrularının limit durumu olarak yapılandırılması gerekmektedir. Yapılan görüşmeler sonucunda teğet kavramına yönelik istenen genellemeyi gerçekleştiren öğrencilerin tümünün, grafiksel problem durumlarında teğet doğrusunun varlığına ilişkin yürüttükleri muhakeme sürecinde kesen doğrularının teğet doğrusuna yaklaşma sürecini kullandıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra teğet doğrusunun varlığına ilişkin farklı bağlamlarda farklı karar veren öğrencilerin hiçbiri teğet doğrusu ile kesen doğruları arasındaki ilişkiyi kuramamıştır.

6.2. Öneriler

Öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna yönelik anlamalarına iki farklı öğretim yönteminin etkisini incelemeyi amaçlayan bu çalışmanın sonunda DMY ile zenginleştirilmiş öğretim sürecinin geleneksel öğretim sürecine nazaran daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Takip eden bölümde varılan sonuçlar ışığında öneriler sunulmuştur.

6.2.1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

Analiz dersi içerisinde ele alınan kavramların bir çoğunun temelinde nokta ve doğru gibi matematiksel nesnelerin devinimi yatmaktadır. Hâlbuki, geleneksel olarak yürütülen analiz öğretiminde kavramlar ağırlıklı olarak cebirsel formda sunulmakta ve buna bağlı olarak hem ölçme değerlendirme sürecinde hem de ele alınan kavramlara ilişkin uygulamalarda cebirsel işlem gerektiren problemlere ağırlık verilmektedir. Öğretim sürecinin bu doğrultuda gerçekleşmesi sonucunda öğrenciler sembollerin ne anlama geldiğinden çok bu sembollerle yürütülen işlemler üzerine odaklanmaktadırlar. Nihayetinde bu durum, öğrencilerin analiz dersinde ele alınan kavramlara ilişkin anlamlı öğrenme gerçekleştirmelerinden ziyade cebirsel işlemleri yürütmede ustalaşmalarına sebep olmaktadır. Literatürde hemfikir olunan görüş, analiz dersi çerçevesinde ele alınan kavramlara ilişkin yeterli bir anlama gerçekleştirmede görsel düşünmenin önemli olduğu ve ele alınan konunun geometrik boyutunun görselleştirilmesine vurgu yapmayan bir öğretimin kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirme açısından başarılı olamayacağıdır. Bu görüşten hareketle bu çalışmada analiz dersinin temel kavramlarından biri olan ve geometrik boyutta zengin bir içeriğe sahip türev kavramının öğretiminde DMY kullanımının etkisi incelenmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar, DMY kullanılarak yürütülen öğretim süreçlerine katılan olan öğrencilerin geleneksel öğretim süreçlerine katılan öğrencilere nazaran türev kavramının geometrik boyutuna yönelik daha iyi anlamalar gerçekleştirdiklerini göstermiştir. Bu sebepten analiz kavramlarının geometrik boyutuna yönelik öğrencilerde daha iyi anlamalar gerçekleştirme adına öğretim süreçlerinde DMY kullanılması önerilmektedir.

Türev kavramının geometrik boyutta en temel karşılığı, bir fonksiyon grafiğine bir noktadan çizilen teğet doğrusudur. Araştırmanın sonuçları DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının, teğet doğrusunun eğimi ile bir noktada türev değeri arasındaki ilişkiyi oluşturmada ve teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak anlamada daha etkili olduğunu göstermiştir. Bilhassa teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak yapılandıran öğrencilerin bir sonraki adım olan kavramın formel tanımını anlamada daha başarılı oldukları görülmüştür. Bununla birlikte araştırmanın sonuçları, teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak yapılandırmanın, teğet kavramını Euclid bağlamında analiz bağlamına genellemede kilit rol oynadığını göstermiştir. Deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine nispeten bu hususlarda daha iyi anlamalar gerçekleştirmesinin sebebi, öğrenme sürecinde aktif olarak yazılım içerisindeki gerçekleştirdikleri eylemler olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bir noktada türev değeri ile teğet doğrusu arasındaki ilişkiye yönelik gerçekleştirilecek öğretim süreçlerinde DMY'den faydalanılması önerilmektedir.

Literatürde limit kavramının formel tanımının soyut düşünmeye geçişte, formel ve kesin matematiksel ifadelere yönelik anlam çıkarmada ve formel ispat tekniklerini kullanmada başlangıç noktası olduğu belirtilmektedir. Türev kavramının özel bir limit olduğu gerçeği göz önüne alındığında, kavramın formel tanımının anlaşılması bir önceki cümlede belirtilen yeterlilikleri kazanmada olumlu katkı sağlayacaktır. Araştırmanın sonuçları DMY destekli yürütülen öğretim sürecinin, öğrencilere formel tanım içerisinde yer alan eşitsizliklerin ve değişkenlerin grafiksel temsillerini anlamada ve tanım içerisinde yer alan ε ve δ değişkenleri arasındaki ilişkiyi oluşturmada geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etikili olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla bu içeriğe yönelik yürütülecek öğrenme sürecinde DMY'den faydalanılması önerilmektedir. Bununla birlikte araştırma dâhilinde ele alınan konu başlıklarında öğrencilerin sergilediği başarılar kendi içerisinde kıyaslandığında, öğrencilerin anlamada en çok zorlandıkları konunun formel tanım olduğu belirlenmiştir. Araştırmada ortaya çıkan bu durumun iki etkenden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bunlardan ilki, her iki grupta yer alan öğrencilerin araştırma öncesinde analiz dersi içerisinde tâbi oldukları limit kavramının öğretiminde, kavramın formel tanımını derinlemesine incelememiş olmasıdır. Dolayısıyla türev kavramının formel tanımına yönelik gerçekleştirilecek öğretimden önce limit kavramının formel tanımının anlaşılmasının, türev kavramının formel tanımını anlamayı kolaylaştıracağı düşünümektedir. Diğer etken olarak, deney grubu için bilgisayar destekli hazırlanan öğrenme ortamının tasarımı düşünülmektedir. Bilindiği üzere limit kavramının formel tanımı içerisinde yer alan ε ve δ değişkenlerinin belirlediği açık aralıklar eksenler üzerinde resmedilebilmektedir. Türev kavramının formel tanımında ise ε değişkeninin belirlediği aralığın eksenler üzerinde karşılığı bulunmamaktadır. Fakat DMY destekli hazırlanacak bir öğrenme ortamında, eksenlerin haricinde eklenecek üçüncü bir eksen üzerinde ε değişkeninin belirlediği aralık resmedilebilir. Araştırmacı deneyimsizliğinin bir sonucu olarak, formel tanımın öğretimi için yaptığı tasarımda bu durumu dikkate alamamıştır. Formel tanımın öğretimi için hazırlanacak DMY destekli öğrenme ortamının bu doğrultuda tasarlanmasının, içeriğin anlaşılmasında daha etkili olacağı düşünülmektedir.

Bir fonksiyonun bir aralık içerisindeki tüm noktalarda aldığı türev değerlerini düşünebilme, türev kavramını bir fonksiyon olarak inşa etmede ve devamında türev fonksiyonu ile fonksiyon grafiğinin karakteristik özellikleri arasındaki ilişkileri oluşturmada kritik öneme sahiptir. Lâkin, geleneksel öğrenme ortamının vazgeçilmezlerinden olan tebeşir-tahta vasıtasıyla tasarlanmış bir öğrenme ortamı bu kavram ve ilişkileri kazandırmada potansiyel anlamda bilgisayar destekli hazırlanan öğrenme ortamının oldukça gerisindedir. Geleneksel öğrenme ortamının statikliğinden ötürü, sunulan teorik bilginin geometrik boyutta ifade ettiği anlamı ve altında yatan devinimi anlamak tamamen öğrencinin tahayyül becerisine bağlı bulunmaktadır. Oysaki, DMY ile tasarlanmış bir öğrenme ortamında öğrenciler fonksiyon grafiklerini yazılım içerisinde kolayca oluşturabilmekte ve bu grafikler üzerinde tanımladıkları yeni elemanların aldığı değerleri ve değişimi dinamik bir şekilde izleyebilmektedir. Araştırmanın sonuçları deney grubunda yer alan öğrencilerin, türev fonksiyonu ile fonksiyon grafiğinin karakteristik özellikleri arasındaki ilişkileri anlamada kontrol grubu öğrencilerine nispeten daha başarılı olduğunu göstermiştir. Bu farkın ortaya çıkmasındaki en büyük etken deney grubu öğrencilerinin bu başlık altında öğrendikleri teorik bilginin altında yatan devinimi yazılım içrisinde gerçekleştirdikleri eylemler sonucunda anlamış olmalarıdır. Kontrol grubunda yer alan bir çok öğrenci ise bu devinimi anlayamadıklarından bu konu başlığı altında gösterilen ilişkileri ezberleme yoluna gittikleri görülmüştür. Bundan hareketle kavramların ve işlemlerin altında yatan devinimi kazandırma amacıyla yürütülen bir analiz öğretim sürecinde DMY'den faydalanılması önerilmektedir.

Sözel iletişim eğitim-öğretim sürecinin ayrılmaz bir parçasıdır. Bu süreçte matematiksel kavramları tanımlamak veya açıklamak için kullanılan ifadeler, öğrencilerin kavram imgelerinin oluşumunda veya şekillenmesinde etkili olmaktadır. Araştırma sonucunda teğet doğrusu ile tek noktada türev kavramı arasındaki ilişkiyi belirtmek için eğitimcilerin dikkatsizce kullandıkları "bir fonksiyonun bir noktadaki türevi o noktadaki teğeti verir" veya paralelindeki ifadelerin öğrencilerde, bir noktadaki teğet doğrusunun denkleminin üzerinde uğraştıkları fonksiyonun birinci türev fonksiyonunun cebirsel ifadesi olduğu yönünde kavram yanılgısına sebep olduğu görülmüştür. Dolayısıyla birinci türev ile teğet doğrusu arasındaki ilişkiyi belirtmek için kullanılacak ifadelerde bu noktanın dikkate alınması önerilmektedir.

Araştırmanın pilot çalışma safhasında yürütülen öğretim sürecinde, çalışma yapraklarında yer alan ve öğrencilerin bilgisayar ortamında üzerinde çalışacakları yapıların öğrenciler tarafından oluşturulması benimsenmişti. Fakat bu durumun öğretim sürecini olumsuz etkilediği, öğrencilerin çalışma yapraklarında amaçlanan ilişkilere değil, yapıları nasıl oluşturacaklarına odaklanmalarına sebep olduğu görüldü. Bu noktadan hareketle asıl çalışma safhasında öğrencilerin bilgisayar üzerinde çalışacakları yapılar araştırmacı tarafından önceden hazırlandı. Asıl çalışmada benimsenen yaklaşımın, öğrencileri hedef kazanımlara ulaştırmada daha etkili olduğu görülmüştür. Dolayısıyla DMY destekli hazırlanacak öğrenme ortamlarının tasarımında bu durumun dikkate alınmasının yararlı olacağı düşünülmektedir.

Matematik öğrenim hayatları boyunca öğrenciler teğet kavramı ile farklı öğrenim seviyelerinde ve bağlamlarda karşılaşmaktadır. Araştırmanın sonuçları, öğrencilerin teğet kavramını ilk olarak Euclid bağlamında ele almalarından ötürü kavrama "eğriye tek noktada kesmelidir" geçersiz özelliği atfettiklerini, bu özelliğin öğrencilerin kavram imgelerine güçlü bir şekilde hükmettiğini ve değişime dirençli olduğunu göstermiştir. Yine araştırmanın sonuçları bu durumun öğrencilerin teğet kavramını Euclid bağlamından analiz bağlamına genellemede olumsuz bir rol oynadığını göstermiştir. Elbette, öğrencilere teğet kavramını ilk olarak ele aldıkları ilköğretim seviyesinde, kavramın formel tanımını vererek başlamak hazırbulunuşluklarına uygun değildir. Fakat gerek ortaöğretim gerekse lisans düzeyinde aldıkları öğretim sürecinde, öğrencilere kavrama atfettikleri bu özelliğin geçersiz olduğunu belirtmek ve geçersiz olduğunu gösteren örnekler sunarak farkındalıklarını geliştirmek gerekmektedir. Bilhassa teğet doğrusu ile kesen doğrularının arasındaki ilişkiyi göstermek için kullanılacak fonksiyon grafiğinin öğrencilerin teğet kavramına atfettikleri geçersiz özellik ile çelişen türden olmasının faydalı olacağı düşünülmektedir.

6.2.2. İleride Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

Yapılan bu çalışmada ileri matematik bağlamında üniversite düzeyinde öğrenim görmekte olan öğrenciler örneklem olarak alınmıştır. Ülkemiz matematik eğitiminde türev kavramı ile öğrenciler ilk olarak ortaöğretim seviyesinde karşılaşmaktadır. MEB, 2013 yılında hazırladığı matematik öğretim programında türev kavramına ilişkin kazanımlara 12. sınıf düzeyinde yer vermekte ve bu kazanımlara ilişkin yürütülecek öğretim süreçlerinde bilgi-iletişim teknolojilerinden faydalanılmasını istemektedir. Bu noktadan hareketle ortaöğretim seviyesinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin örneklem alındığı bir araştırmada öğrencilerin öğrenim deneyimlerini konu alan bir araştırma gerçekleştirilebilir.

Yapılan bu çalışmada DMY destekli tasarlanan öğrenme ortamının bilişsel açıdan öğrenciler üzerindeki etkileri incelenmiştir. Yapılacak benzer başka çalışmalarda bilişsel etkinin yanı sıra duyuşsal etkiler de incelenebilir. Araştırma sonucunda her ne kadar deney grubu öğrencileri kontrol grubu öğrencilerine nazaran ele alınan konu başlıklarında daha başarılı olsalar da, deney grubu öğrencileri arasında da bazı öğrencilerin geri kaldıkları belirlenmiştir. Bu durumun gerekçesi olarak kontrol edilemeyen bir çok değişken gösterilebilir. Bununla birlikte literatürde yer alan bazı araştırmalar öğrencilerin farklı öğrenme stillerine sahip olduğunu ve tasarlanan bir öğrenme ortamının sağlayacağı avantajın öğrenme stiline göre farklılaşabileceğini belirtmektedir. Bu görüş akla "acaba DMY destekli tasarlanan öğrenme ortamları farklı öğrenme stillerine sahip öğrencilere aynı düzeyde katkı sağlamakta mıdır?" sorusunu getirmektedir.

Çalışmada elde edilen bulgular, deney grubunde yer alan öğrencilerin araştırma türünden problemlerin çözümünde kontrol grubu öğrencilerinde rastlanmayan farklı çözüm yöntemleri kullandıklarını göstermiştir. Bu durum DMY destekli öğrenme ortamlarının öğrencilerin problem çözme becerilerine etkisinin olduğuna işaret etmektedir. Dolayısıyla gelecek araştırmalarda problem çözme sürecinin geleneksel ve DMY destekli öğrenme ortamlarında nasıl farklılaştığını karakterize edecek çalışmalar yürütülebilir.

Öğrencilerin analiz dersi çerçevesinde teğet kavramına ilişkin gerçekleştirmeleri beklenen genelleme tek değişkenli fonksiyonların grafikleri ile sınırlı değildir. Parametrik fonksiyonlar ve grafikleri konusu içerisinde öğrencilerin teğete ilişkin kavram imgelerini tekrar düzenlemeleri gerekmektedir. Çünkü tek değişkenli cebirsel fonksiyonların grafiklerine bir noktada ya teğet yoktur ya da bir tane vardır, oysa parametrik fonksiyonların grafiklerine bir noktadan birden fazla teğet çizilebilmektedir. Öğrencilerin gerçekleştirmesi beklenen bu genelleme sürecinde yaşadıkları öğrenme deneyimlerini inceleyen herhangi bir araştırmaya rastlanmamıştır.

İki değişkenli fonksiyonlar konusu içerisinde ele alınan kısmi türevlerin anlaşılması, tek değişkenli fonksiyonların türevinin anlaşılmasına nazaran daha zordur. Buna bağlı olarak öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonlarda türev kavramını öğrenmede olumlu katkı sağlayacak öğrenme ortamlarının tasarımı ve etkililiğinin araştırılması önerilmektedir.

7. KAYNAKLAR

Aksoy, Y. (2007). Türev Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebir Sistemlerinin Etkisi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Amit, M. and Vinner, S. (1990). Some Misconceptions in Calculus – Anecdotes or the Tip of the Iceberg? In G. Booker, P. Cobb, and T. N. de Mendicuti, (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol.1* (pp.3-10), Mexico.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). The Netherlands: Kluwer Academic Pub.

Asiala M., Dubinsky E., Cottrill J. and Schwingendorf E. K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16* (4), 399-431.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In Kaput J., Schoenfeld H. A. and Dubinsky E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II* (pp.1-32). American Mathematical Society.

Aspinwall L. (1994). The role of graphic representation and students' images in understanding the derivative in calculus: critical case studies. Unpublished doctoral dissertation. The Florida State University.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. and Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between a Function and Its Derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Aspinwall, L. and Shaw, K. L. (2002). Representations in Calculus: Two Contrasting Cases. *Mathematics Teacher, 95,* 434-439.

Baker, B., Cooley, L. and Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Baki, A. (2001). Bilişim Teknolojisi Işığı Altında Matematik Eğitiminin Değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, *149*, 26-31.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik*. Ceren Yayın-Dağıtım. İstanbul.

Baki, A. (2005). Visualization and Experimental Verification of Mathematical Ideas. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(3), 259-270.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Yayıncılık.

Barak, B. (2007). Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Balıkesir Üniversitesi.

Berry S. J. and Nyman A. M. (2003). Promoting Students' Graphical Understanding of the Calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 481–497.

Bezuidenhout J. (1998). First-year Students' Understanding of Rate of Change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(3), 389-399.

Bingolbali, E., Monaghan, J. and Roper, T. (2007). Engineering Students' Conceptions of the Derivative and Some Implications for Their Mathematical Education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(6)*,* 763-777.

Biza, I. (2007). Is the Tangent Line Tangible? Students' Intuitive Ideas About Tangent Lines. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics: Vol.27(1)* (pp.6-11). London.

Biza, I., Constantinos, C. and Zachariades, T. (2008) Student Perspectives on the Relationship Between a Curve and Its Tangent in the Transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53-70.

Biza, I. and Zachariades, T. (2006). Conceptual Change in Advanced Mathematical Thinking: The Case of Tangent Line. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka and N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference*: *Vol.1*, (pp.168–170). Prague, Czech Republic.

Biza, I., Constantinos, C. and Zachariades, T. (2006) Students' Thinking About the Tangent Line. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka and N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference*: *Vol. 2,* (pp. 177–184). Prague, Czech Republic.

Biza, I., Diakoumopoulos, D. and Souyoul, A. (2007). Teaching Analysis in Dynamic Geometry Environments. In. D. Pitta-Pantazi and G. Phillipou (Eds.), Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp.1359-1369). Cyprus.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications Inc.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. and Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3)*,* 247-285.

Bühler, M. (1990). Reading Archimedes' Measurement of a Circle. In J. Fauvel (Ed.), *History in the Mathematics Classroom* (pp. 43-58). Leicester: The Mathematical Association.

Castro C. H. (2011). Assesing the impact of computer programming in understanding limits and derivatives in a secondary mathematics classroom. Unpublished doctoral dissertation. Georgia State University.

Çetin N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. *Primus, 19*(3), 232-244.

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin and D. Schifter (Eds.). *A Research Companion to Principles and Standarts for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2005). *Research methods in education* (5th Ed.). London: Routledge Falmer.

Cooley L. A. (1997). Evaluating Student Understanding in a Calculus Course Enhanced by a Computer Algebra System. *Primus, 7*(4)*,* 308-316.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Delos Santos, A. G. and Thomas, M. O. J. (2003). Representational ability and understanding of derivative. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty and J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of PME. Vol. 2*, (pp. 325-332). Honolulu: University of Hawaii.

Dennis, D. and Confrey, J. (1996). The Creation of Continuous Exponents: A Study of the Methods and Epistemology of Alhazen and John Wallis. *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 33-60). American Mathematical Society.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). The Netherlands: Kluwer Academic Pub.

Dreyfus T. and Halevi T. (1991). QuadFun-A Case Study of Pupil Computer Interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *10*(2), 43-48.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Dubinsky E. (2000). Towards a theory of learning advanced mathematical concepts. In Fujita et al. (Eds.), *Proceedings of the ninth international congress on mathematical education* (pp. 121-123)*.* Japan: Kluwerd Academic Pub.

Dubinsky, E. and Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In Harel, G and Dubinsky, E., (Eds.). *The concept of function aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Dubinsky E. and Macdonald M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Holton D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at the university level. Vol. 7*, (pp. 275-282). Netherlands: Kluwerd Academic Pub.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. *Proceedings of the fifth conference of the international group for the psychology of mathematics education.* (pp.330-333). Berkeley.

Ellington, J. A. (2000). Effects of hand-held calculators on precollege students in mathematics classes- a meta-analysis. Unpublished doctoral dissertation. The University of Tennessee.

Ellison, M. J. (1993). The effect of computer and calculator graphics on students' ability to mentally construct calculus concepts. Unpublished doctoral dissertation. University of Minnesota.

Fernandez, E. (2004). The Students' Take on the Epsilon-Delta Definition of a Limit. *Primus, 14*(1), 43-54.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, 3(2), 9-18.*

Fless, A. M. (1988). An investigation of introductory calculus students' understanding of limits and derivatives. Unpublished doctoral dissertation. The University of Iowa.

Gantner, S. L. (2001). Changing calculus: a report on evaluation efforts and national impact from 1988-1998. MAA Notes.

Gass, F. (1992). Limits via Graphing Technology. *Primus, 2*(1), 9-15.

Gaulke, S. (1998). Integrating DERIVE into calculus instruction. 13.04.2010 tarihinde ERIC veritabanından ulaşılmıştır. (Accession No: ED469077).

Girard, R. N. (2002). Students' representational approaches to solving calculus problems: examining the role of graphing calculators. Unpublished doctoral dissertation. University of Pittsburgh.

Gleason, M. A. and Hallett, H. D. (1992). The Calculus Consortium Based at Harvard university. *Focus on Calculus 1,*1-4.

Goerdt, L. S. (2007). The effect of emphasizing multiple representations on calculus students' understanding of the derivative concept. Unpublished doctoral dissertation University of Minnesota.

Güven, B. (2006). Öğretmen adaylarının küresel geometri anlama düzeylerinin karakterize edilmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L. and Presmeg, N. C. (2010). Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning, 12(2),*152-176.

Harel, G. and Tall, D. (1989) The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11(1),* 38-42.

Harel, G., Selden, A. and Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectives. In A. Gutierrez and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 147–172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Hartter, B. (1995). Concept image and concept definition for the topic of derivative. Unpublished doctoral dissertation. Illinois State University.

Heid, M. K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 3-25.

Heid, M.K. (1997). The Technological Revolution and the Reform of School Mathematics. *American Journal of Education, 106*(1)*,* 5-57.

Hiebert, J. and Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.67-97). New York: Macmillan.

Hohenwarter, M. and Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. Vol.7

Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Flath, D., Gordon, S., Lomen, D., Lovelock, D., et al. (1994). *Calculus*. USA: Wiley & Sons, Inc.

Infante, E. M. N. (2007). Students' understandings of related rates problems in calculus. Unpublished doctoral dissertation*.* Arizona State University.

Isaacson, J. (1999). The effects of static graphic, animated graphic, and ınteractive animated graphic presentations on acquisition of the tangent concept. Unpublished doctoral dissertation. University of Florida.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving.* (pp. 77–156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Koirala, H. P. (1997). Teaching of Calculus for Students' Conceptual Understanding. *The Mathematics Educator*, *2*(1), 52–62.

Krouse, L. J. (2000). The effects of writing assignments on high school students' understanding of the derivative concept. Unpublished doctoral dissertation. University of Pittsburgh.

LeVeque, R. J. (2003). The development of the function concept in students in freshman precalculus. Unpublished doctoral dissertation. Morgan State University.

Mathematical Association of America (1981). *Recommendations for a general mathematical sciences program*. Committee on the Undergraduate Program in Mathematics. Washington, DC: Author.

Mahir, N. (2010). Student's Interpretation of a Function Associated with a Real-Life Problem from Its Graph. *PRIMUS, 20*(5), 392-404.

Matthews, L. N. O. (1998). A comparison of traditional and reform styles in teaching applied calculus. Unpublished doctoral dissertation. University of Oklahoma.

Miller, M. L. (1999). A study of the effects of reform teaching methodology and van Hiele level on conceptual learning in calculus. Unpublished doctoral dissertation. Oklahoma State University.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of mathematics, 11*(3), 20-24.

Moore, L. C. and Smith, D. A. (1987). Toward a Lean and Lively Calculus [Book Review]. College Mathematics Journal, 18(5), 439-442

Muhundan, A. (2005). Effects of using graphing calculators with a numerical approach on students' learning of limits and derivatives in an applied calculus course at a community college. Unpublished doctoral dissertation. University of South Florida.

National Commision for Excellence in Education (1983). A nation at risk. *Communications of the ACM*, 26(7).

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee. Washington: National Academy Press.

National Science Foundation (1992). Awards 1988-1991 Curriculum Development in Mathematics-Calculus and the Bridge to Calculus. 14.02.2012 tarihinde http://www.nsf.gov/pubs/stis1992/nsf92115/nsf92115.txt adresinden ulaşılmıştır.

Naidoo, K. and Naidoo, R. (2007). Students' Understanding of the Derivative in a Blended Learning Environment: Teaching Calculus in a Blended Learning Environment. *The International Journal of Learning,14*(4),193-202.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics,14*(2/3)*,* 235-250.

Park, J. (2011). Calculus instructors' and students' discourses on the derivative. Unpublished doctoral dissertation. Michigan State University.

Pinzka, M. K. (1999). The relationship between college calculus students' understanding of function and their understanding of derivative. Unpublished doctoral dissertation. University of Minnesota.

Pirie, S. and Kieren, T. (1992). Creating Constructivist Environments and Constructing Creative Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*(5), *505-528.*

Porzio, D. T. (1997). Effects of different instructional approaches on calculus students' understanding of the relationship between slope, rate of change, and the first derivative. In J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmonte, and A. E. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 19th annual meeting of the north american chapter of the ınternational group for the psychology of mathematics education.*(pp.37-44). Bloomington-Normal, IL.

Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi D. (2006). Teachers' mathematical and pedagogical awareness in calculus teaching. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez, (Eds.) *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.846-848). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Pustejovsky, F. S. (1999). Beginning calculus students' understanding of the derivative: three case studies. Unpublished doctoral dissertation. Marquette University.

Quesada, A., Richard, L. and Wiggins, M. (2008). The Impact of the Graphical Approach on Students' Understanding of the Definition of Limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 15*(3), *95-102.*

Salas, S., Hille, E. and Etgen, G. (2007). *Calculus: One and several variables* (10th ed.). USA: Wiley & Sons, Inc.

Schumann, H. and Green, D. (2000). New Protocols for Solving Geometric Calculation Problems Incorporating Dynamic Geometry and Computer Algebra Software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(3), *319–339.*

Selden, J., Selden, A. and Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. *In J. Kaput and E. Dubinsky, (Eds.), Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analysis and results.* (pp. 19-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Serhan, D. (2000). The effect of using graphical calculators on students' concept images of the derivative at a point. Unpublished doctoral dissertation. Arizona State University.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of refication- the case of function. *In G. Harel and E. Dunbinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp.59-84). Washington, DC: MAA.

Soto-Johnson, H. (1996). Technological vs. traditional approach in conceptual understanding of series. Unpublished doctoral dissertation. University of Northern Colorado.

Snook, K. G. (1997). An investigation of first year calculus students' understanding of the derivative. Unpublished doctoral dissertation. Boston Univeristy.

Stiles, L. D. A. (1994). Graphing calculators and calculus. Unpublished doctoral dissertation. Illinois State University.

Swinyard, C. and Lockwood, E. (2007). Research on Students' Reasoning about the Formel definition of Limit: An Evolving Conceptual Analysis. 2.12.2011 tarihinde http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/lockwood-swinyard.pdf adresinden ulaşılmıştır.

Tall, D. O. (1992). Plenary Presentation. In M. Artigue and G. Ervynck (Eds), *Proceedings of working group 3 on students' difficulties in calculus*. (pp. 13-28). Québec, Canada.

Tall, D. O. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Tall, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In. Bergeron, J.C., Herscovics N. and Kieran, C. (Eds.), *Proceedings of the 11th ınternational conference of psychology of mathematics education.* (pp. 69-75). Montreal.

Tall, D. O. (1988). Concept image and concept definition. 05.01.2010 tarihinde http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988e-concept-image-icme.pdf adresinden ulaşılmıştır.

Tall, D. O. and Vinner, S., (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), *151-169.*

Thurston, W., P. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), *161-177.*

Ubuz, B. (2007). Interpreting a Graph and Constructing its Derivative Graph: Stability and Change in Students' Conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), *609–637.*

Zandieh, J. M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 8*. (pp. 103-127). American Mathematical Society.

Zazkis, R., Dubinsky, E. and Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 435-457.

Zimmermann, W. (1991). Visiual thinking in calculus. In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.)*, Visualization in teaching and learning mathematics,* (pp. 127-138). Washington DC: MAA.

8. EKLER

Ek 1. Yordama Testi ve Puanlama Rubriği

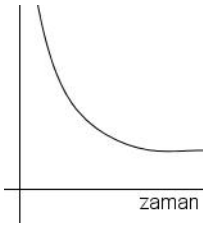
1. Aşağıda numaralandırılmış üç ifade verilmiştir. Bu ifadelerin herbirinde iki değişken arasında bulunan ilişki betimlenmektedir. Tüm ifadelerde bağımsız değişken *zaman* olup, bağımlı değişken her bir ifadenin sonunda parantez içerisinde görülmektedir. Her bir ifadenin belirtmiş olduğu ilişkinin grafiksel temsili, verilen eğrilerden hangisidir? Eğrinin altına ifadenin numarasını yazarak belirleyiniz (Pustejovsky, (1999)'dan uyarlanmıştır).

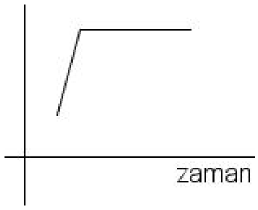
i) Bardakta bulunan kaynamış su soğuması için oda sıcaklığına bırakıldı (Suyun sıcaklığı).

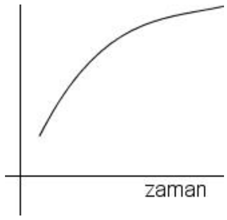
ii) Araç sabit ivmeyle bir süre hızlandı ve devamında sabit hızla yoluna devam etti (Aracın hızı).

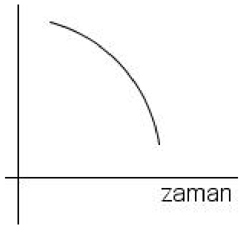
iii) Altın fiyatları artmakta, lâkin artış son zamanlarda eskiye nazaran daha az oranda gerçekleşiyor (Altın fiyatı).

İV) Hastanın kan basıncı giderek daha hızlı azalıyor (Kan basıncı).





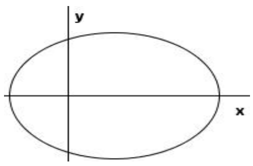


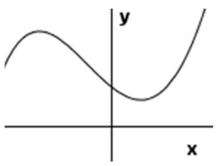


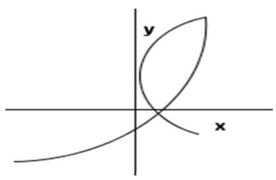
( ) ( ) ( ) ( )

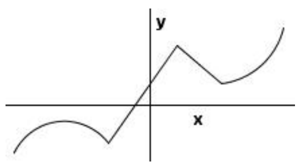
Puan	Cevabın Tasviri
0	İfade ile grafik yanlış eşleştirilmiş
1	İfade ile grafik doğru eşleştirilmiş

2. Aşağıdaki eğrilerden hangisi veya hangileri bir fonksiyon grafiği olabilir? Fonksiyon grafiği olduğunu düşündüğünüz eğrinin altına "√" işareti koyunuz.





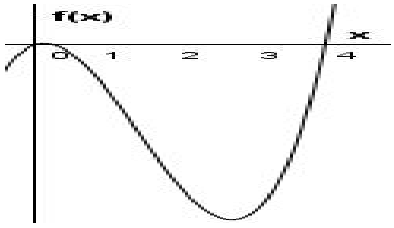




( ) ( ) ( ) ( )

Puan	Cevabın Tasviri
0	Fonksiyon belirtmeyen grafik(ler) seçilmiş
1	Fonksiyon belirten grafik seçilmiş

3. Aşağıda $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. Grafik üzerinde $(1, f(1))$ ve $(3, f(3))$ noktalarını belirleyerek bu noktalardan geçen doğruyu çiziniz ve eğimini bulunuz.



Cevap:

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya anlamsız cevap
1	Çizim yapmadan doğrunun eğimi bulunmuş
2	İstenenler grafiksel ve cebirsel olarak belirtilmiş

4. Bir fabrikanın atık yağı Marmara denizine boşaltılmakta ve denizin üzerinde dairesel olarak yayılmaktadır. Atık yağın deniz yüzeyinde oluşturduğu dairenin yarıçapının günde 3 metre sabit hızla arttığı bilinmektedir. Bu verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız (Infante, (2007)'den uyarlanmıştır).

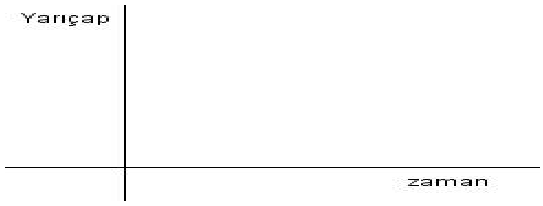
i) Yayılma alanını zamanın fonksiyonu olarak düşünürsek, bu fonksiyonun grafiğini aşağıya çiziniz.

ii) 9. ve 10. günler arasında dairenin yayılma alanının ortalama değişimi oranı nedir?

	Puan	Cevabın Tasviri
Soru i)	0	Cevap yok veya konkav veya doğrusal olarak artan bir eğri çizilmiş.
	1	Konveks ve artan bir eğri çizilmiş
Soru ii)	0	Cevap yok veya anlamsız işlemler yapılmış.
	1	İstenen doğru olarak hesaplanmış.

5.İçi gaz dolu küresel bir balon başlangıçta 100 cm^3 hacminde gaz barındırmaktadır. Balonun ağzı açıldığında tamamen sönünceye kadar sabit olarak saniyede 5 cm^3 hava boşaltmakta ve buna bağlı olarak *küresel şeklini koruyarak* küçülmektedir. Bu verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız (Infante, (2007)'den uyarlanmıştır).

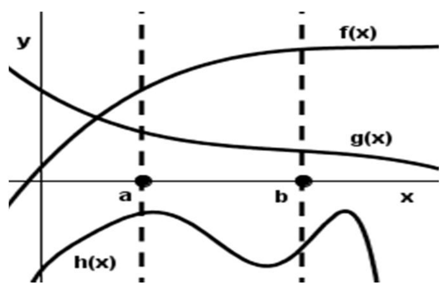
i) Balonun yarıçapını zamanın fonksiyonu olarak düşünürsek, bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.



ii) 3. ve 5. saniyeler arasında balonun yarıçapındaki ortalama değişim oranı nedir?

	Puan	Cevabın Tasviri
Soru i)	0	Cevap yok veya konveks veya doğrusal olarak azalan bir eğri çizilmiş
	1	Konkav ve azalan bir eğri çizilmiş.
Soru ii)	0	Cevap yok veya anlamsız işlemler yapılmış.
	1	İstenen doğru olarak hesaplanmış.

6.Yanda verilen analitik düzlemde $y = f(x)$ $y = g(x)$ ve $y = h(x)$ fonksiyonlarının grafikleri görülmektedir. Bu gafiklerden yararlanarak aşağıdaki önermeleri doğru veya yanlış olarak sınıflandırınız.



i) x=a ve x=b noktaları arasında f(x) fonksiyonunun ortalama değişim oranı, g(x) fonksiyonunun ortalama değişim oranından büyüktür. Doğru Yanlış

ii) $x_0 = \frac{a+b}{2}$ için $f(x_0) < g(x_0)$ olur. Doğru Yanlış

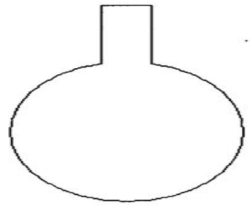
iii) $\forall x \in$(a,b) için $(f + h)(x) > (g + h)(x)$ dir. Doğru Yanlış

iv) $\forall x \in$ (a,b) için $\left(\frac{f}{h}\right)(x) > \left(\frac{g}{h}\right)$(x) dir. Doğru Yanlış

v) $\exists x \in$ (a,b) için $(f - h)(x) = (g - h)(x)$ dir. Doğru Yanlış

Puan	Cevabın Tasviri
0	Önermenin doğruluğu yanlış belirlenmiş.
1	Önermenin doğruluğu doğru olarak belirlenmiş.

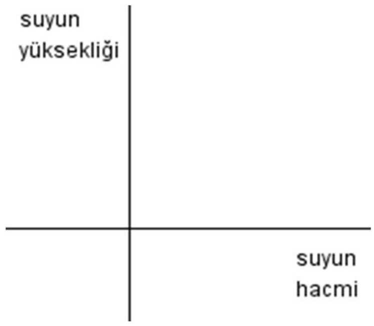
7. Yanda şekli belirtilen kap *birim zamanda eşit miktarda akan su* ile ağzına kadar doldurulmaktadır. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



i) Kaba akan suyun hacmi zamana bağlı bir fonksiyon olarak düşünüldüğünde, bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

ii) Kap içerisine dolan suyun yüksekliği zamana bağlı bir fonksiyon olarak düşünüldüğünde, bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

iii) Kap içerisine dolan suyun yüksekliği kaba dolan suyun hacmine bağlı bir fonksiyon olarak düşünüldüğünde, bu fonksiyonun grafiğini çiziniz



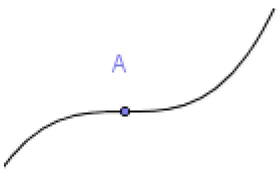
	Puan	Cevabın Tasviri
Soru i)	0	Cavap yok veya eğri hatalı çizilmiş.
	1	İstenen eğri doğru olarak çizilmiş
Soru ii)	0	Cevap yok veya eğri hatalı çizilmiş
	1	Kabın tepesindeki dikdörtgensel bölge dikkate alınmamış
	2	İstenen eğri tam olarak çizilmiş
Soru iii)	0	Cevap yok veya eğri hatalı çizilmiş
	1	Kabın tepesindeki dikdörtgensel bölge dikkate alınmamış
	2	İstenen eğri tam olarak çizilmiş

Ek 2. Teğet Genelleme Testi

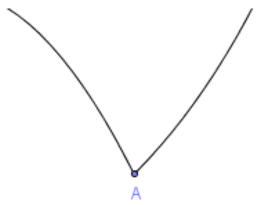
1. Bir eğri üzerinde bulunan bir A noktasından bu eğriye çizlen teğet doğrusunu nasıl tanımlarsınız? (Tanımınız matematiksel notasyon yerine sözel olarakta yapabilirsiniz)

2. Aşağıda verilen eğriler üzerinde bulunan A noktasından eğriye, şayet çizilebiliyorsa, teğet doğrularını çiziniz. (Çizilemeyeceğini düşünüyorsanız şeklin altına gerekçenizi belirtiniz)

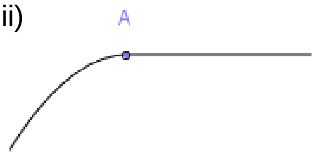
i)



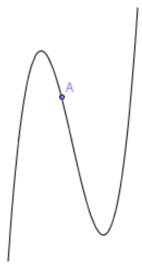
ii)



iii)



iv)



3. Aşağıda verilen fonksiyonlara verilen “A” noktalarından geçen teğetin denklemini, şayet teğet varsa, yazınız ? Eğer teğet olmadığını düşünüyorsanız gerekçenizi yazınız.

a) $f(x) = x^3 + 3$, A(0,3) Cevap:

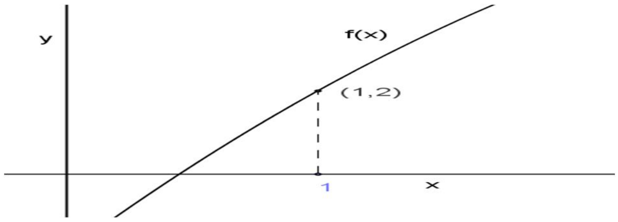
b) $f(x) = \begin{cases} -x^2, x < 0 \\ 0, x \geq 0 \end{cases}$, A(0,0) Cevap:

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, x < 1 \\ e^{x-1} + 1, x \geq 1 \end{cases}$, A(1,2) Cevap

d) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, A(1,-1) Cevap

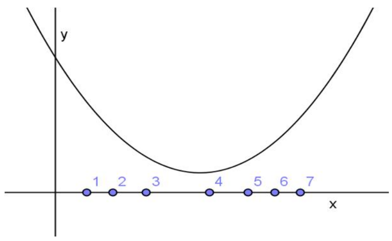
Ek 3. Noktasal Bağlamda Türev Testi ve Puanlama Rubriği

1. Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun x=1 noktasındaki türev değerinin düzlemde neyi temsil ettiğini grafik üzerinde çizerek gösteriniz.



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap verilmemiş veya “ Teğeti temsil eder” yönünde ifade var.
1	Yalnızca teğet çizilmiş veya teğet doğrusu çizilmeden “eğimi verir” veya “fonksiyonun eğimini verir” yönünde ifadeler var.
2	Teğet doğrusu çizilerek teğetin eğimi belirtilmiş.

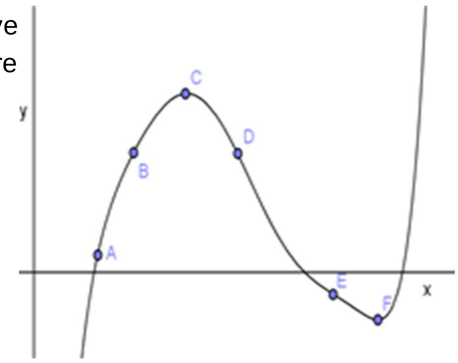
2. Yandaki şekilde y=f(x) fonksiyonun grafiği verilmiştir. $f'(1), f'(2), f'(3), f'(4), f'(5)$ $f'(6), f'(7)$ değerlerini *büyükten küçüğe* doğru sıralayınız.



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya yanlış sıralama yapılmış.
1	1,2,3 noktalarındaki türev değerleri ve 5,6,7 noktalarındaki türev değerleri kendi aralarında kıyaslanmış, tüm noktalar kıyaslanmamış.
2	Doğru sıralama yapılmış.

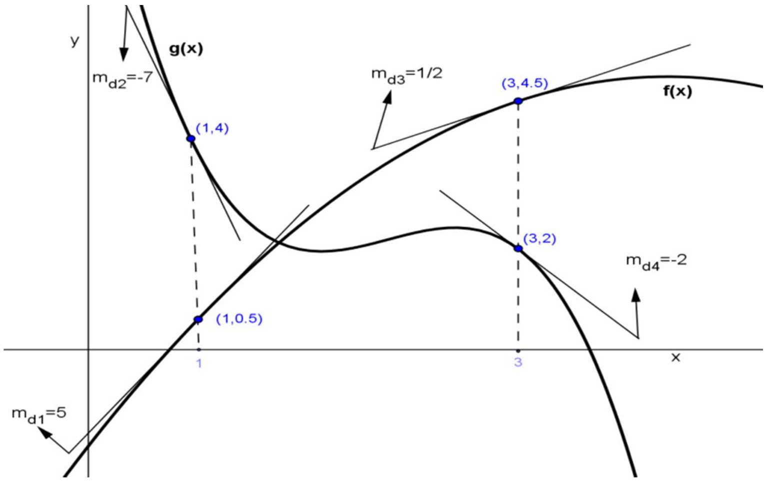
3. Yandaki şekilde bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve grafiğin üzerinde bazı noktalar verilmiştir. Bu verilere dayanarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Hangi nokta(lar)da $f'(x)$ değeri pozitiftir? Cevap:
b) Hangi nokta(lar)da $f'(x)$ değeri negatiftir? Cevap:
c) Hangi nokta(lar)da $f'(x)$ değeri sıfırdır? Cevap:
d) Hangi noktada $f'(x)$ değeri en büyüktür? Cevap:
e) Hangi noktada $f'(x)$ değeri en küçüktür? Cevap:



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya istenen özellikleri sağlayan noktalar yanlış belirlenmiş.
1	Türev değeri pozitif, negatif ve sıfır olan noktalar doğru olarak belirlenmiş, fakat en büyük ve en küçük türev değerine ilişkin yorum yapılmamış veya yanlış belirlenmiş.
2	Tüm istenen noktalar doğru olarak belirlenmiş.

4. Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$, $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ve grafiklere çizilen teğetler eğim değerleri ile birlikte ($m_{d1} = 5, m_{d2} = -7, m_{d3} = \frac{1}{2}, m_{d4} = -2$) verilmiştir. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki soruları yanıtlayınız.



$(f+g)'(1) =$

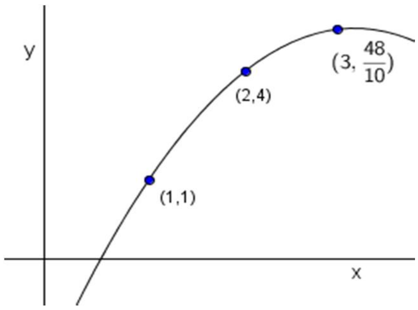
$(f.g)'(1) =$

$f'(3) - g'(1) =$

$g'(3) + f'(1) =$

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya istenen türev değerleri yanlış olarak belirlenmiş.
1	(f.g)' (1) = f ' (1) . g '(1) şeklinde geçersiz eşitlik kurularak yanlış sonuç elde edilmiş. Diğer istenen değerler doğru olarak bulunmuş.
2	Tüm istenen değerler doğru olarak belirlenmiş.

5. Yandaki grafikte $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve grafik üzerinde 3 nokta koordinatları ile birlikte verilmiştir. Bu verilerden hareketle aşağıdaki yargıları doğru veya yanlış olarak belirleyiniz.



i) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri 1 olabilir — Doğru Yanlış

ii) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{7}{2}$ olabilir — Doğru Yanlış

iii) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{7}{3}$ olabilir — Doğru Yanlış

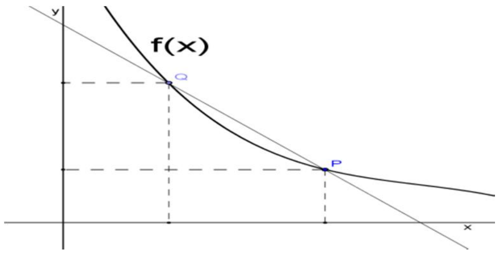
iv) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{1}{2}$ olabilir — Doğru Yanlış

v) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{3}{4}$ olabilir — Doğru Yanlış

Puan	Cevabın Tasviri
0/1	Önermenin doğruluğu yanlış belirlenmiş/ Önermenin doğruluğu doğru belirlenmiş

Ek 4. Türev Formel Tanım Testi ve Puanlama Rubriği

1. Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve grafik üzerinde yer alan P, Q noktaları verilmiştir. Δx ifadesi fonksiyonun bağımsız değişkenindeki (x) değişimi, Δy ise fonksiyonun bağımsız değişkeninde meydana gelen değişime karşılık fonksiyonun aldığı değerdeki değişimi göstermektedir.



i) Q noktası P noktasının bulunduğu konuma getirildiğinde Δy ve Δx değerleri düzlemde nereye karşılık gelmektedir ? Şeklin üzerinde belirtiniz.
ii) Q noktasının grafik üzerinden P noktasına yaklaşması durumunda aşağıdaki önermelerin doğruluk değerini belirleyiniz.

a) Δx değeri artar ....Doğru Yanlış
b) Δy değeri azalır ....Doğru Yanlış
c) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değeri artar ....Doğru Yanlış
d) Q ve P noktalarından geçen doğrunun eğimi artar ....Doğru Yanlış

	Puan	Cevabın Tasviri
Bölüm- i)	0	Δx ve Δy ifadelerinin düzlemde karşılıkları belirtilmemiş, yanlış belirtilmiş veya anlamsız çizimler mevcut
	1	Δx ve Δy ifadelerinden yalnızca birinin düzlemdeki karşılığı doğru olarak resmedilmiş
	2	Δx ve Δy ifadelerinin her ikiside doğru olarak resmedilmiş.
Bölüm-ii)	0 / 1	Her şık için doğru cevap 1, yanlış cevap 0 puan.

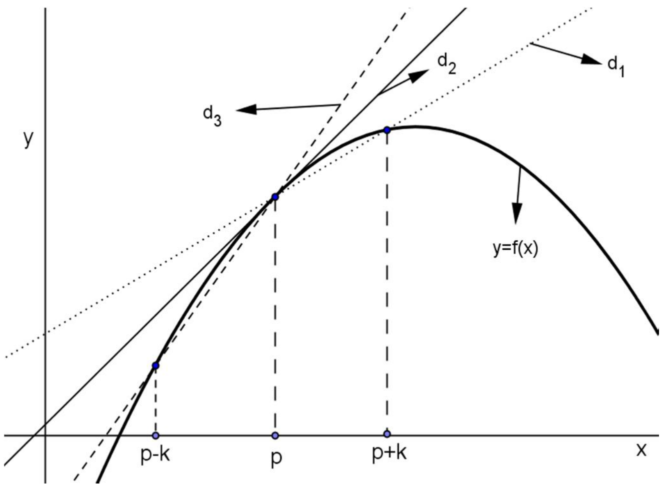
2. $y = f(x)$ bir fonksiyon ve $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$ olduğu bilinmektedir. Limit tanımı içerisindeki Ɛ değişkenine $\frac{1}{2}$ değeri verildiğinde (Ɛ=$\frac{1}{2}$) bu Ɛ değişkenine karşılık gelen en büyük δ değeri nedir?

Yukarıdaki ifade aşağıdakilerden hangisi ya da hangilerine denktir? Denk olduğunu düşündüğünüz madde ya da maddelerin yanına √ işaretini koyunuz.

i) x değişkeni 1 değerine en fazla ne kadar uzak olabilir öyleki (x,f(x)) ile (1,f(1)) noktalarından geçen doğrunun eğiminin 3 değerine uzaklığı $\frac{1}{2}$ den küçük olsun.
ii) x değişkeni 3 değerine en fazla ne kadar uzak olabilir öyleki (x,f(3)) ve (x, f(1)) noktalarından geçen doğrunun eğiminin 1 değerine olan uzaklığı $\frac{1}{2}$ den büyük olsun.
iii) x değişkeni 1 değerine en fazla ne kadar yakın olabilir öyleki (1, f(3)) ile (x,f(3)) noktalarından geçen doğrunun eğiminin 3 den uzaklığı $\frac{1}{2}$ den küçük olsun.
iv) x değişkeni 3 değerine en fazla ne kadar yakın olabilir öyleki, (x,f(x)) ile (x,f(1)) noktalarından geçen doğrunun eğiminin 1 değerine olan uzaklığı en az $\frac{1}{2}$ olsun.

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya ifadenin karşılığı olarak tek ve yanlış madde seçilmiş.
1	İfadenin karşılığı olan bir doğru maddenin yanında bir de yanlış madde seçilmiş.
2	İfadenin karşılığı olan madde doğru olarak belirlenmiş.

3. $y = f(x)$ bir fonksiyon ve $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ olmak üzere, fonksiyonun grafiği ve verilen limit durumu aşağıda resmedilmiştir. $|m_{d1} - m_{d3}| > |m_{d2} - m_{d3}| > |m_{d2} - m_{d1}|$ olmak şartıyla, türev kavramının limit tanımı içerisinde yer alan Ɛ, δ, α , L değişkenlerinin düzlemdeki temsilleri p, k, m_{d1} , m_{d2} , m_{d3} , $|m_{d2} - m_{d3}|$, $|m_{d1} - m_{d3}|$, $|m_{d2} - m_{d1}|$ ifadelerinden hangisine karşılık geldiğini eşleştirerek gösteriniz. (m_{d1} , m_{d2} , m_{d3} değerleri sırasıyla d_1 , d_2, d_3 doğrularının eğimlerini göstermektedir, d_2 doğrusu grafiğe $(p, f(p))$ noktasında teğettir.)



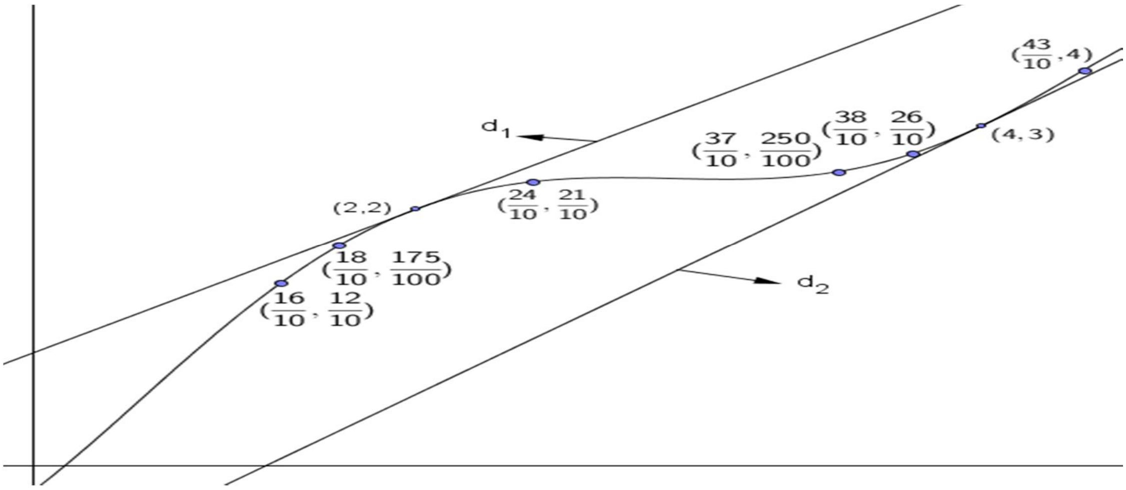
Ɛ	p
	k
δ	m_{d1}
	m_{d2}
L	m_{d3}
	$|m_{d2} - m_{d3}|$
α	$|m_{d1} - m_{d3}|$
	$|m_{d2} - m_{d1}|$

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya yanlış kısmi eşleştirmeler mevcut.
1	Yalnız α , δ veya L doğru olarak eşleştirilmiş.
2	Yalnız (α ,δ), (δ, L) veya (α , L) çiftlerinden biri doğru olarak eşleştirilmiş.
3	Ɛ hariç diğer üç ifade doğru olarak eşleştirilmiş.
4	Tüm ifadeler doğru olarak eşleştirilmiş.

4. Aşağıdaki şekilde bir y=f(x) fonksiyonunun grafiği ve grafik üzerinde yer alan noktalar koordinatları ile verilmiştir. d_1 ve d_2 doğruları grafiğe sırasıyla (2,2) ve (4,3) noktalarında teğet olup eğimleri $md_1=\frac{3}{4}$ $md_2=2$ dir. Bu verilerden hareketle aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

i) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olarak verilsin. $|x-2| < \delta$ oldukça $\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2} - f'(2)\right| < \varepsilon$ şartını sağlayan en büyük δ değeri nedir?

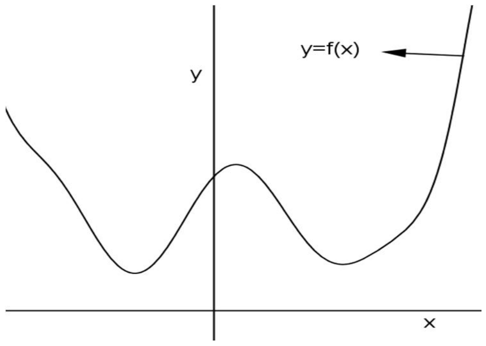
ii) $\delta = \frac{3}{10}$ olarak verilsin. $|x-4| < \delta$ oldukça $\left|\frac{f(x)-f(4)}{x-4} - f'(4)\right| < \varepsilon$ şartını sağlayan en küçük ε değeri nedir?

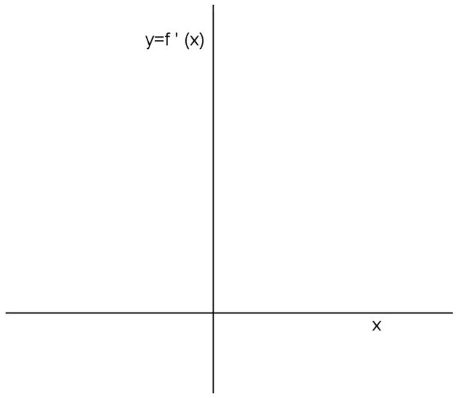


	Puan	Cevabın Tasviri
Bölüm i)	0	Cevap yok veya anlamsız çizimler ve cebirsel işlemler mevcut Grafiğe çizilen teğetlerin denklemleri bulunmuş. Grafiği verilen fonksiyon 3. dereceden bir polinom fonksiyona eşitlenmeye çalışılmış.
	1	Mutlak değer eşitsizliğine ilişkin grafiksel çizimler olmadan cebirsel işlemler mevcut fakat bir cevap yok.
	2	(2,2) noktasından ve yakınında bulunan noktalardan geçen kesen doğruları çizilmiş ve eğimleri hesaplanmış. Devamında bu değerler mutlak değerli eşitsizlikler içerisinde kullanılmış fakat ε-δ değişkenleri arasında ilişki kurulamamış.
	3	Bir üst kısımda yer alan davranışlara ek olarak δ değeri yanlış hesaplanmış
	4	Yapılan çizimler ile birlikte doğru sonuç bulunmuş.
Bölüm ii)	0	Cevap yok veya anlamsız çizimler ve cebirsel işlemler mevcut Grafiğe çizilen teğetlerin denklemleri bulunmuş. Grafiği verilen fonksiyon 3. dereceden bir polinom fonksiyona eşitlenmeye çalışılmış.
	1	Mutlak değer eşitsizliğine ilişkin grafiksel çizimler olmadan cebirsel işlemler mevcut fakat bir cevap yok.
	2	(4,3) noktasından ve yakınında bulunan noktalardan geçen kesen doğruları çizilmiş ve eğimleri hesaplanmış. Devamında bu değerler mutlak değerli eşitsizlikler içerisinde kullanılmış fakat ε-δ değişkenleri arasında ilişki kurulamamış.
	3	Bir üst kısımda yer alan davranışlara ek olarak ε değeri yanlış hesaplanmış.
	4	Yapılan çizimler ile birlikte doğru sonuç bulunmuş.

Ek 5. Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-I ve Puanlama Rubriği

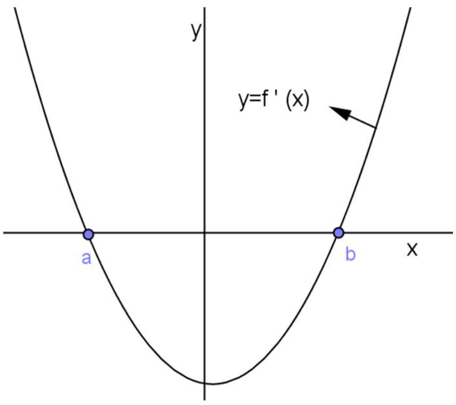
1. Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun [a,b] aralığında grafiği verilmiştir. Şeklin sağında bulunan kısma $y = f(x)$ fonksiyonunun *türev fonksiyonunun* "$y = f'(x)$" muhtemel bir grafiğini çiziniz.

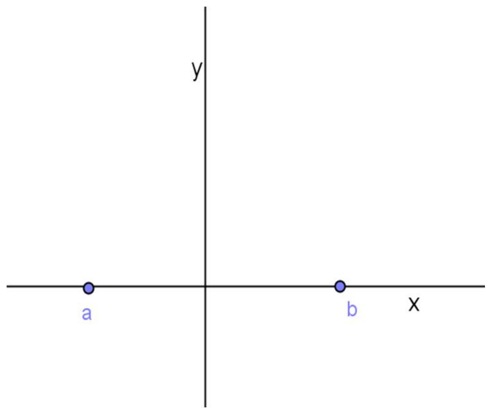




Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya çizilen grafik fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıkları temsil etmiyor.
1	Fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıklarda türevin işareti tutarlı fakat ekstremum noktalarda çizilen grafik sıçrama süreksizliğine sahip.
2	Fonksiyonun artan- azalan ve ekstremum noktalarını doğru temsil eden sürekli bir grafik çizilmiş.

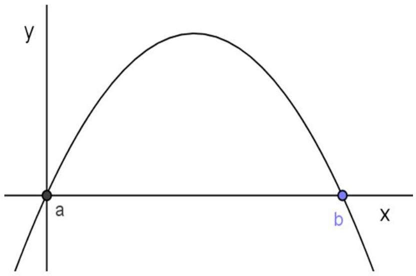
2. Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun *türev foksiyonunun* "$y = f'(x)$" grafiği verilmiştir. Verilen analitik düzlem üzerine $y = f(x)$ *fonksiyonunu* temsil edebilecek muhtemel bir grafik çiziniz.

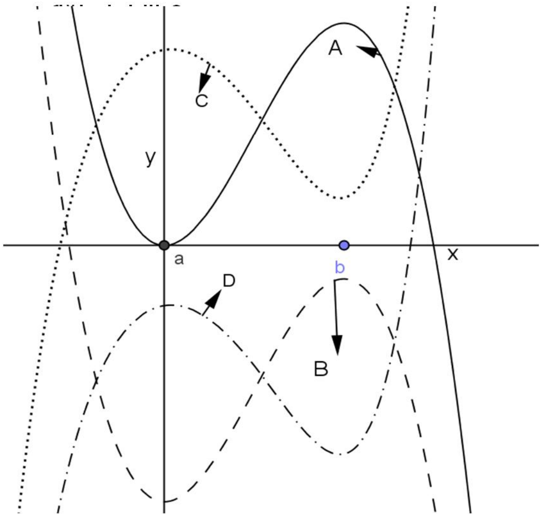




Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya çizilen grafikte artan-azalan aralıklar türevin işareti ile tutarlı değil.
1	Ekstremum noktaların doğru temsil edildiği süreksiz bir grafik.
2	Fonksiyonun artan- azalan ve ekstremum noktalarını doğru temsil eden sürekli bir grafik çizilmiş.

3. Yandaki şekilde $y = g(x)$ fonksiyonunun *türev fonksiyonunun* $y = g'(x)$ grafiği verilmiştir. Aşağıda verilen grafiklerden hangisi veya hangileri $y = g(x)$ *fonksiyonunun*

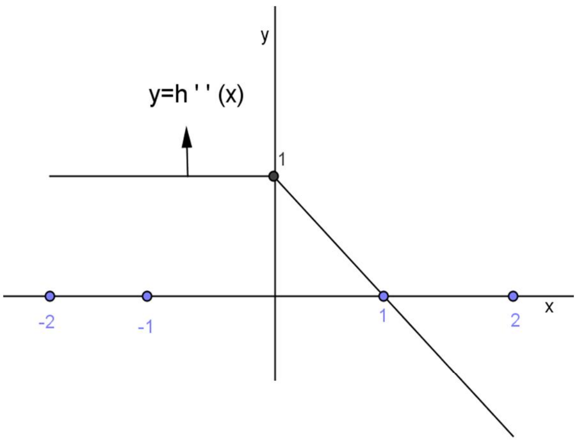


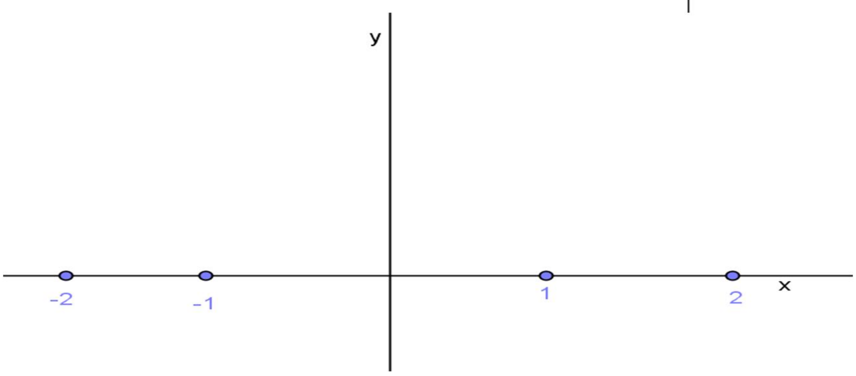


Cevap:.......................

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya yanlış eğri(ler) seçilmiş.
1	Yalnız A veya yalnız B eğrisi seçilmiş.
2	A ve B eğrisi seçilmiş.

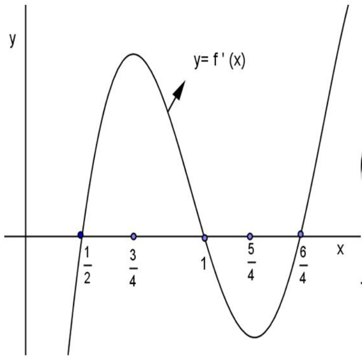
4. Yandaki şekilde bir $y = h(x)$ fonksiyonunun *ikinci mertebenden türev foksiyonunun* $y = h''(x)$ grafiği verilmiştir. Grafikten yararlanarak $y = h(x)$ *fonksiyonunu* temsil edebilecek muhtemel bir grafik çiziniz.

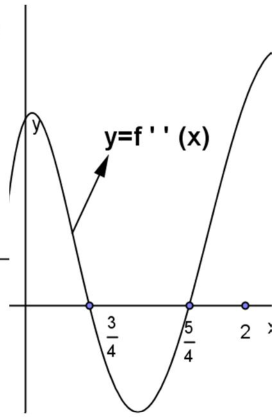


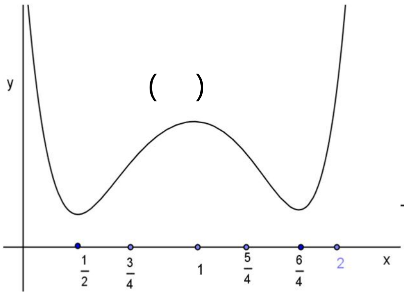


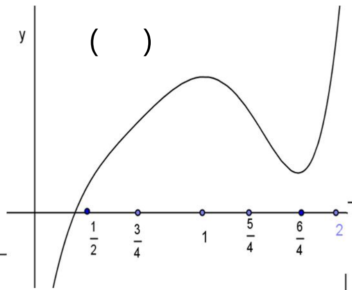
Puan	Cevabın Tasviri
0	• Cevap yok veya çizilen eğri fonksiyonun konveks – konkav karakteristiğini doğru temsil etmiyor. • h(x) fonksiyonunun cebirsel ifadesini bulmaya yönelik işlemler yapılmış.
1	Çizilen eğri x= 1 noktasında konvekslikten konkavlığa geçmiş fakat bu noktada türevi olmayacak şekilde köşe noktasına sahip.
2	Konveks – konkav karakteristiğini doğru temsil eden sürekli bir grafik çizilmiş.

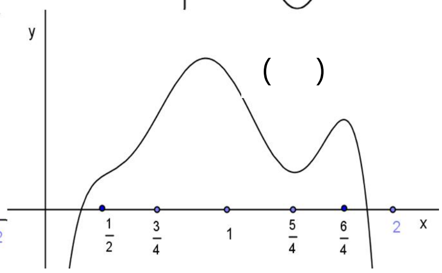
5. Yandaki iki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci $y = f\,'(x)$ ve ikinci mertebeden $y = f\,''(x)$ *türev fonksiyonlarının* grafikleri verilmiştir. Bu iki grafikten yola çıkarak aşağıdaki fonksiyon grafiklerinden hangisi $y = f(x)$ *fonksiyonunu* en iyi temsil etmektedir? Seçtiğiniz grafiğin ( ) kısmına √ işareti koyunuz.

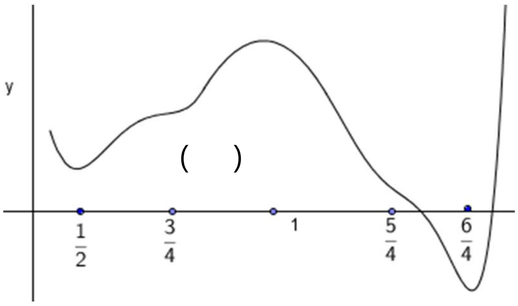


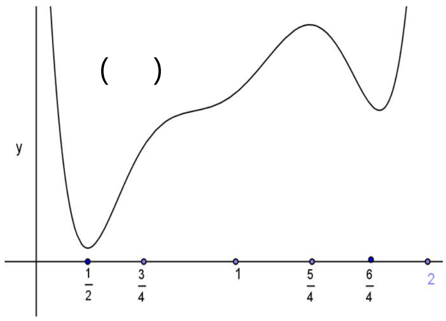






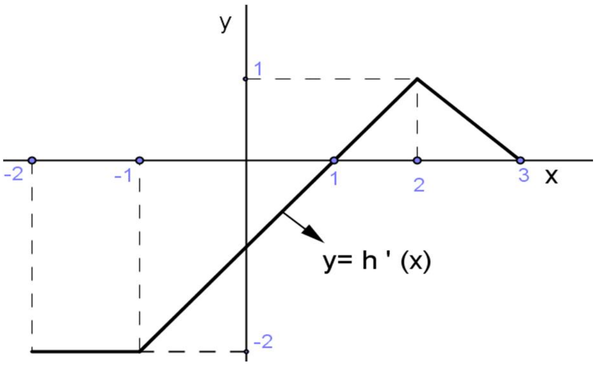






Puan	Cevabın Tasviri
0/1	Yanlış grafik seçilmiş / Doğru grafik seçilmiş

6. Yandaki şekilde $y = h(x)$ fonksiyonunun *türev fonksiyonunun* $y = h'(x)$ grafiği verilmiştir. Grafiğe dayalı olarak $y = h(x)$ *fonksiyonu* hakkında yapılan çıkarımları doğru, yanlış veya bilinemez olarak sınıflandırınız.



i) y = h(x) fonksiyonu [-2,-1] aralığında azalandır. Doğru Yanlış Bilinemez

ii) y= h(x) fonksiyonu [-1,0] aralığında artandır. Doğru Yanlış Bilinemez

iii) y= h(x) fonksiyonu x=0 değerinde yerel maksimuma sahiptir. Doğru Yanlış Bilinemez

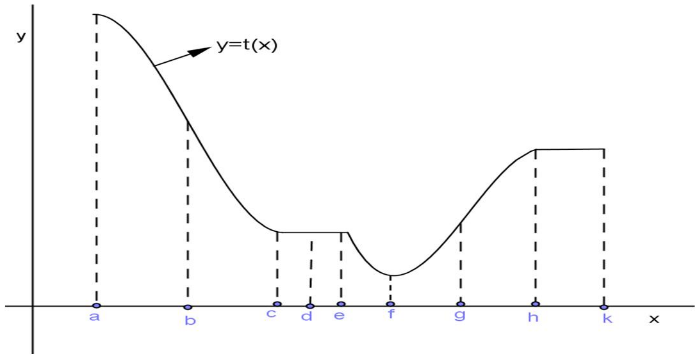
iv) y= h(x) fonksiyonu [2,3] aralığında azalandır. Doğru Yanlış Bilinemez

v) y= h(x) fonksiyonu (0,1) aralığında konvekstir(). Doğru Yanlış Bilinemez

vı) y= h(x) fonksiyonu (1,2) aralığında konkavdır (). Doğru Yanlış Bilinemez

Puan	Cevabın Tasviri
0/1	Önermenin doğruluğu yanlış olarak sınıflandırılmış / Önermenin doğruluğu doğru olarak sınıflandırılmış.

7. Yandaki şekilde $y = t(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafik üzerinde bulunan $(b, t(b))$ ve $(g, t(g))$ noktaları büküm, $(f, t(f))$ noktası ise dönüm noktasıdır. Bu verilere dayanarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.



a) Hangi aralık(lar) içerisinde türev fonksiyonunun aldığı değerler pozitiftir? Cevap:

b) Hangi aralık(lar) içerisinde türev fonksiyonunun aldığı değerler negatiftir? Cevap:

c) Hangi nokta(lar)da türev fonksiyonunun aldığı değer sıfırdır? Cevap:

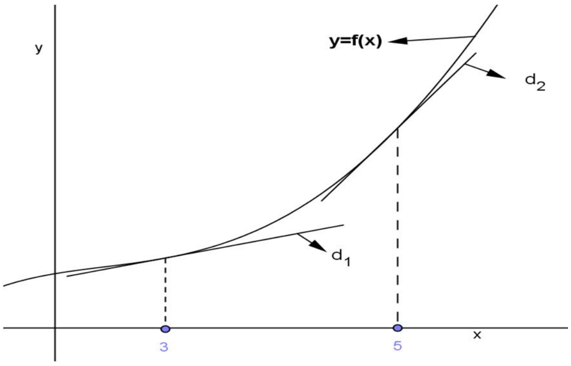
d) Türev fonksiyonunun sabit değer aldığı aralık mevcut mu? Cevap:

e) Türev fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerini hangi noktalarda almaktadır? Cevap:

Puan	Cevabın Tasviri
0/1	Yanlış cevap verilmiş / Doğru cevap verilmiş.

Ek 6. Fonksiyon Bağlamında Türev Testi-II ve Puanlama Rubriği

1. Sağ tarafta yer alan şekilde f:ℝ→ℝ tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir bölümü verilmiştir. Eğri üzerinde görülen d_1 ve d_2 doğruları grafiğe sırasıyla $(3, f(3))$, $(5, f(5))$ noktalarında teğet olup eğimleri $md_1=\frac{1}{4}$ ve $md_2=5$ dir. $g(x) := f'(x)$ olmak üzere aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini (doğru veya yanlış) gerekçelendirerek belirleyiniz.



i) 3<x<5 ve g(x)= 2 şartını sağlayan en az bir x değeri mevcuttur. Cevap ve gerekçe:

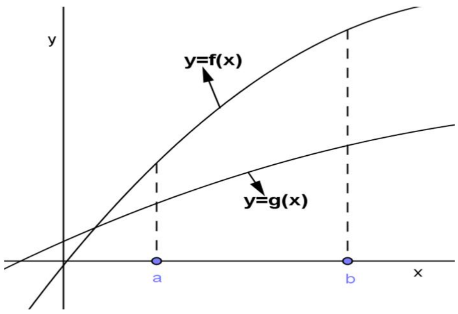
ii) $3<x_1<x_2<5$ ise $g(x_2) < g(x_1)$ dir. Cevap ve gerekçe:

iii) $x_1 \neq x_2$ ve x_1 , $x_2 \in [3,5]$ olmak üzere $g(x_1) = g(x_2)$ olabilir. Cevap ve gerekçe:

iv) x= 4 ise g(x)= -1 olabilir. Cevap ve gerekçe:

	Puan	Cevabın Tasviri
Herbir madde için	0	Cevap yok veya yanlış cevap
	1	Doğru cevap fakat gerekçe belirtilmemiş.
	2	Doğru cevap ve gerekçe verilmiş.

2. Yandaki şekilde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. $t(x) := f'(x)$ ve $h(x) := g'(x)$ olmak üzere aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini gerekçelendirerek belirleyiniz.



i) (a,b) aralığındaki tüm "x" değerleri için $t(x) \geq h(x)$ dir. Cevap ve gerekçe:

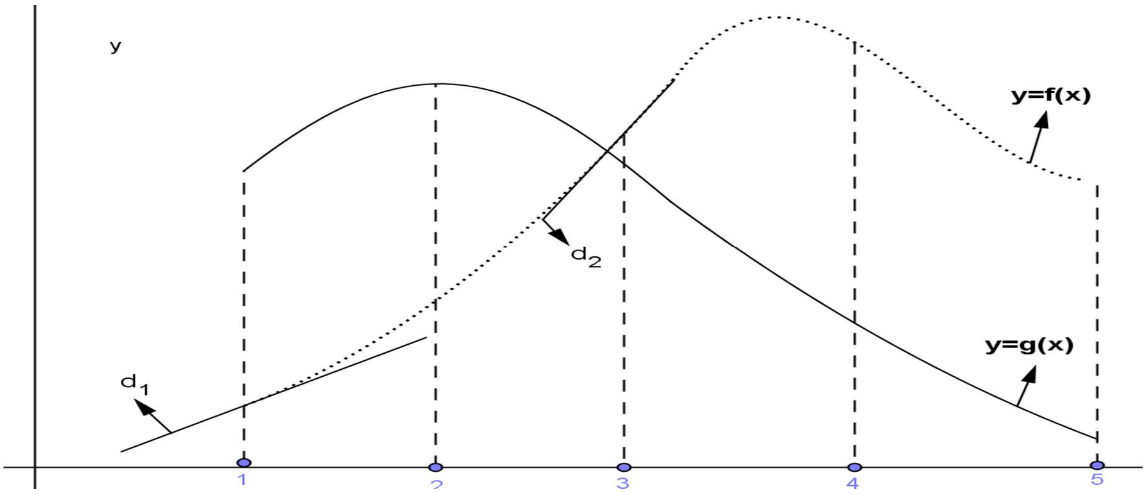
ii) (a,b) aralığı içerisinde en az bir "x_0" değeri vardır öyleki bu x_0 değeri için $t(x_0)=h(x_0)$ dır. Cevap ve gerekçe:

iii) (a,b) aralığı içerisindeki her "x_0" değeri için $t(x_0).h(x_0) \leq 0$ dır. Cevap ve gerekçe:

iv) (a,b) aralığı içerisinde en az bir "x_0" değeri vardır öyleki bu x_0 değeri için $t(x_0).h(x_0)=0$ dır. Cevap ve gerekçe:

	Puan	Cevabın Tasviri
Herbir madde için	0	Cevap yok veya yanlış cevap
	1	Doğru cevap fakat gerekçe belirtilmemiş.
	2	Doğru cevap ve gerekçe verilmiş.

3.



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının [1,5] kapalı aralığında grafikleri verilmiştir. d_1 ve d_2 doğruları sırasıyla $(1, f(1))$, $(3, f(3))$ noktalarında grafiğe teğet olup eğimleri $m_{d_1} = 3$, $m_{d_2} = 5$ dir. Bununla birlikte $(2, g(2))$ noktası $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiği için bir yerel maksimumdur. $H(x) := f'(x)$ ve $K(x) := g'(x)$ olarak tanımlandığında aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini gerekçelendirerek belirleyiniz. (Bilgi: $K^{-1}(x)$, $H^{-1}(x)$ ifadeleri tanımlı oldukları aralıklarda sırasıyla $K(x)$ ve $H(x)$ fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını simgelemektedir).

i) x= 4 ise $(\frac{H}{K})(x) < 0$ dır. Cevap ve gerekçe:

ii) 1 < x < 3 ise (K *o* H) (x) < 0 dır. Cevap ve gerekçe:

iii) x < 0 ise $H^{-1}(x) = \frac{22}{10}$ olabilir. Cevap ve gerekçe :

iv) x > 0 ise $K^{-1}(x) = \frac{15}{10}$ olabilir. Cevap ve gerekçe:

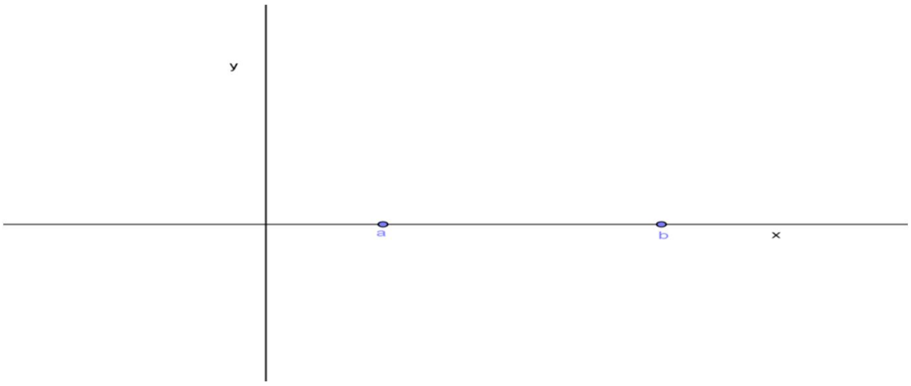
v) Grafikte verilenlerden x= 4 için (HoK)(4) > 0 önermesi için yorum yapılabilir mi? Cevap ve gerekçe:

	Puan	Cevabın Tasviri
Her bir madde için	0	Cevap yok veya yanlış cevap
	1	Doğru cevap fakat gerekçe belirtilmemiş.
	2	Doğru cevap ve gerekçe verilmiş.

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı her noktada sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \Re$ için $f(a) = f(b) = 2$ olsun. Bu taktirde (a, b) aralığında bir "c" sayısı mevcuttur öyleki $f'(c) = 0$ dır.

i) Önermenin ifade ettiği durumu aşağıdaki düzlemde resmediniz.

ii) Önermenin doğruluğu veya yanlışlığına ilişkin görüşünüzü yapacağınız çizimler ve gerekçeleriniz ile belirtiniz.



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya geçersiz gerekçe belirtilmiş
1	Önerme grafiksel olarak doğru resmedilmiş fakat cevaba ilişkin gerekçe belirtilmemiş.
2	Önerme grafiksel olarak resmedilmiş fakat çizilen grafik doğrusal veya maksimum noktaya veya minimum noktaya sahip olma durumlarından sadece birini örneklendiriyor .
3	Bi önceki adımda ifade edilen üç durumda grafiksel olarak resmedilmiş.

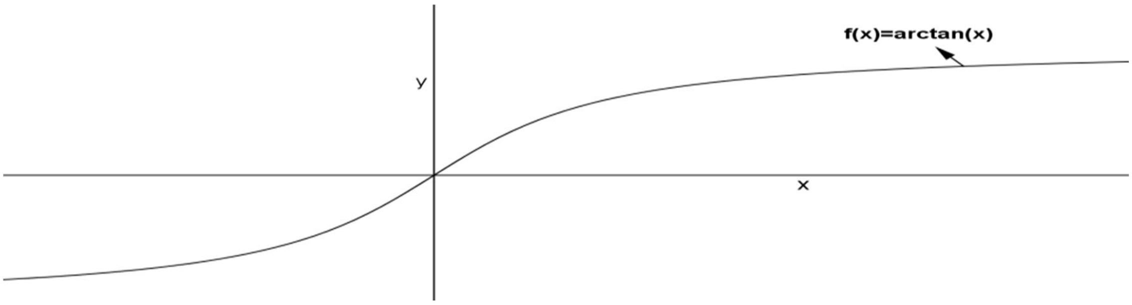
5. Sizce aşağıdaki aşağıdaki üç şartı sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonu olabilir mi?

• $f(0) = 2$ • $f(2) = 5$ • $(0, 2)$ açık aralığında fonksiyon her noktada türevlenebilir ve her "x" değeri için $f'(x) \leq 1$ dir.

Fonksiyonun varlığına ilişkin düşüncenizi düzlem üzerinde gerekli çizimleri yaparak ve gerekçelerinizi belirterek ifade ediniz.

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok, anlamsız çizimler ve geçersiz gerekçeler mevcut.
1	Fonksiyonu temsil eden grafik ve graiğin üzerinde çizilen teğetler mevcut fakat soruya ilişkin gerekçe ve cevap yok.
2	Fonksiyonu temsil eden grafik ve cevap doğru fakat gerekçe tam olarak geçerli veya açık değil.
3	Fonksiyonu temsil eden grafik ve cevap doğru, gerekçe olarak ortalama değer teorimi gösterilmiş veya farklı akıl yürütme süreci mevcut.

6. Aşağıdaki grafik $y = \arctan(x)$ fonksiyonuna aittir. $a, b \in \Re$ $ve\ a < b$ olmak kaydıyla $\frac{1}{1+b^2} < \frac{arctanb - arctana}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$ eşitsizliğinin doğru olduğu iddia edilmekte. Eşitsizliğin düzlemdeki karşılığını aşağıda verilen grafik üzerinde çizerek doğruluğu hakkındaki görüşünüzü gerekçeniz ile birlikte belirtiniz. (Bilgi: $\frac{d(arctanx)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$)



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok, anlamsız çizimler veya cebirsel işlemler mevcut.
1	Sadece, $\frac{1}{1+b^2}, \frac{1}{1+a^2}$ ifadeleri sırasıyla b ve a noktalarında fonksiyona çizilen teğetlerin eğimi olarak yorumlanmış ve grafiksel olarak gösterilmiş.
2	Eşitsizlikte yer alan tüm ifadelerin grafiksel karşılıkları çizilmiş fakat aralarında bir kıyaslama yok.
3	Eşitsizlik düzlemde alınan birer a, b noktaları için resmedilmiş ve alınan noktalara bağlı olarak doğru veya yanlış olarak belirlenmiş.
4	Eşitsizlik düzlemde alınan farklı a,b noktaları için sınanarak doğru veya yanlış olabileceği grafiksel olarak gösterilmiş.

Ek 7. Ders Planları ve Çalışma Yaprakları

1. Ders Planı

Dersin Konusu: Türev Kavramının Geometrik Anlamına Giriş

Dersin Amaçları: Bu ders ile öğrencilerin aşağıdaki kazanımlara ulaşmaları amaçlanmıştır:

- Euclid geometrisi temelinde oluşturulan teğet doğrusuna yönelik bilgilerin analiz bağlamında sunulan formel bilgiyle tutarlı olarak genelleyebilme
- Bir fonksiyonun grafiğinin üzerinde yer alan (x,f(x)) noktasında çizilen teğet doğrusunu, bu noktada eğriye doğrusal yaklaşım olduğunu kavrayabilme
- Bir fonksiyonun bir noktasındaki türevinin değeri ile bu noktadan fonksiyonun grafiğine çizilen teğet arasındaki ilişkiyi kurabilme.

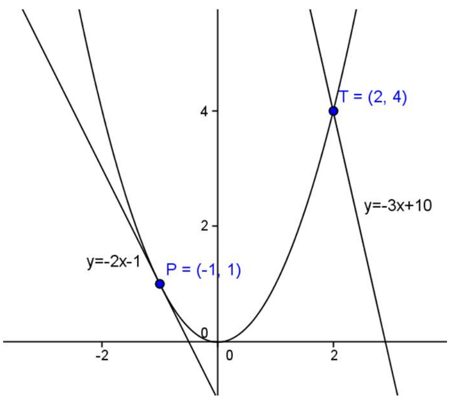
Öğretim Süreci

Kontrol Grubu

Dersin başlangıcında öğrencilere ölçülebilir bir değişkenin bir diğer ölçülebilir değişkene göre değişim hızına ait matematiksel kavramın türev adı verilen özel bir limit olduğu ifade edilip devamında bu duruma günlük hayattan örnekler vermeleri istenir (hız-zaman vb.). Dersin devamında öğrenciler ile Euclid geometrisi bağlamında çember üzerinde çizilen bir teğetin tanımı için yeterli olan şu iki şart belirlenir.

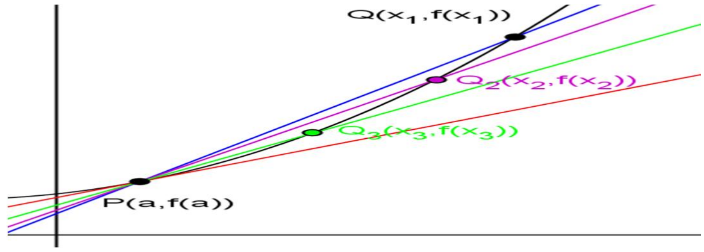
i) Çemberi yalnızca P noktasında kesen doğru

ii) Çemberin P noktasına ait yarıçapına P noktasında dik olan doğrudur.



Daha sonra öğrencilere sol tarafta yer alan eğri verilerek yukarıdaki şartların bu durumda bir eğriye çizilen teğeti tanımlamak için yeterli ve geçerli olduğu sorgulatılır. Bunun amacı öğrencilerin zihinlerinde Piaget'nin öğrenme için gerekli gördüğü bilişsel dengesizliği (disequilibrium) oluşturmaktır. Sınıf tartışması yoluyla bu iki şartın genel olarak eğrilerde teğet kavramını tanımlada yetersiz olduğu ve yeni bir tanımın gerekliliği konusunda ortak bir karara varılır. Bu aşamadan sonra yeni tanıma zemin hazırlamak için öğrencilere teğet doğrusunu kiriş doğrularının limit pozisyonu olarak tanıtmak amaçlanmıştır.

Bu amaç için öğrencilere aşağıda yer alan eğri üzerindeki Q noktasının P noktasına yaklaşması sonucunda kiriş doğrularının ve kiriş doğrularının eğiminin neye yaklaşacağı sorgulatılır. Böylece öğrencilerin teğet doğrusunun kiriş doğrularının limit durumu ve eğiminin de kiriş doğrularının eğimlerinin limit durumu olduğu farkettirilir. Elde edilen bu sonuç farklı tipteki eğriler için incelenir. Son aşamada öğrenciler ile birlikte bir fonksiyon eğrisinin üzerinde bulunan bir noktadan çizilen teğet formel olarak tanımlanarak teğetin eğimini veren limit ifadesinin fonksiyonun teğet çizilen noktadaki türev değeri olarak tanımlanır.



Deney Grubu

Yukarıda Euclid geometrisi bağlamındaki teğet doğrusu tanımının eğrilere genellemedeki tartışma dersin başlangıcında deney grubuna da uygulanır. Dersin devamında çalışma yaprağı-1 ve çalışma yaprağı-2 uygulanır. Dersin son kısmında sınıf tartışması ile ulaşılan sonuçlar özetlenir ve formel olarak tanımlanan teğet doğrusunun içerisinde yer alan limit ifadesinin fonksiyonun teğet çizilen noktadaki türev değeri olarak tanımlanır.

Çalışma Yaprağı-1

Euclid günümüzde hâlâ geçerli olan düzlem geometri alanının temellerini attığı Elementler kitabında çemberde teğet kavramına değinmiştir. Kitabının 3. Cildinde yer alan 16 numaralı önermede aşağıdaki iddiayı ortaya atmıştır.

“ Elimizde bir çember ve bu çember üzerinde yer alan bir nokta (*A*) olsun. Şayet bu *A* noktasından çemberin çapına dik olacak şekilde bir doğru çizilirse, A noktasından başlayan ve bu çember ile doğru arasında kalacak şekilde başka bir yarı doğru bulunamaz.”

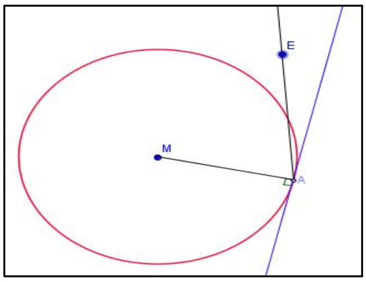
Şimdi Euclid’ in bu ifadesinin doğruluğunu GeoGebra ortamında inceleyelim.

1. Adım A noktasından başlayan ve çember ile A noktasından çizilen teğet arasında kalacak şekilde bir doğru oluşturup oluşturalamayacağını inceleyiniz.

2. Adım Oluşturduğunuz yarı doğrunun teğetle *çakışmaması* durumunda, çemberi kaç farklı noktada kesmektedir?

3. Adım 2. adımda bulduğunuz noktayı B olarak isimlendirirsek, B noktası A noktasına yaklaştıkça, B ve A noktalarından geçen kesen doğruları neye yakınsamaktadır?

4. Adım Şu ana kadar geçirmiş olduğunuz süreci dikkate alarak, çember üzerinde bir noktadan çizilen teğete ilişkin bir tanım verebilir misiniz?



Şekil 34. Çalışma yaprağı-1 için GeoGebra ekran görüntüsü

Çalışma Yaprağı-2

Ekranda bir fonksiyonun grafiği ve grafik üzerinde verilen A ve C noktaları görülmektedir. Grafik üzerindeki bilgilere dayanarak aşağıdaki sorulara cevaplayınız.

Soru 1. A ve C noktalarının belirlediği doğrunun eğimini yine A ve C noktalarının koordinatları cinsinden ifade edebilir misiniz.

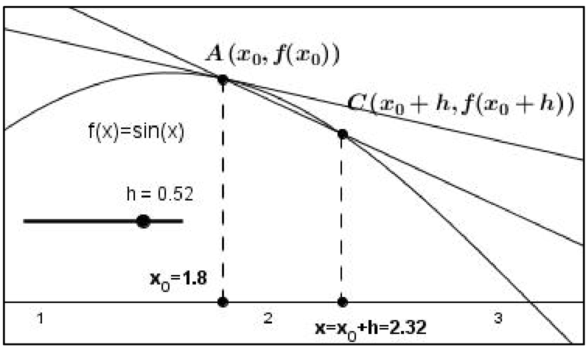
Soru 2. h değişkeninin değeri sıfıra yaklaştıkça A ve C noktalarından geçen doğru neye yaklaşmaktadır?

Soru 3. h değişkeninin aşağıda verilen değerleri için A ve C noktalarından geçen kirişin eğim değerini yazınız?

H	1	0.5	0.2	0.1	0.06	0.04	0.02	-0.02	-0.04	-0.06	-0.1	-0.2	-0.5	-1
m_{AC}														

Soru 4. h değişkenin değeri sıfıra yaklaştıkça A ve C noktalarından geçen kirişin eğimi hangi değere yaklaşmaktadır.

Soru 5. Yukarıda bulduklarınızdan yola çıkarak A noktasından foksiyonun grafiğine çizilen teğetin eğimini veren bir ifade bulabilir misiniz? Bulduğunuz bu ifade ile A noktasından fonksiyona çizilen teğeti nasıl tanımlarsınız?



Şekil 35. Çalışma yaprağı-2 için GeoGebra ekran görüntüsü

2. DERS PLANI

Dersin Adı: Grafik Analiz

Dersin Konusu: Bir Noktada Türev Kavramının (Ɛ-δ) Tanımı ve Geometrik Anlamı

Dersin Amaçları: Bu ders ile öğrencilerin aşağıdaki kazanımlara ulaşmaları amaçlanmıştır.

- Bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramının formel tanımından hareketle bir noktada türev kavramının (Ɛ-δ) tanımını oluşturabilme.
- Bir noktada türev kavramının formel (Ɛ-δ) tanımı içerisindeki değişkenlerin düzlemdeki geometrik temsillerini belirleyebilme.
- Türev kavramının formel (Ɛ-δ) tanımı içerisinde yer alan Ɛ ve δ değişkenlerine tekil değerler verildiğinde bu durumun düzlemde neyi temsil ettiğini ve birbirlerine bağlı değerlerini belirleyebilme.

Öğretim Süreci

Kontrol Grubu

Dersin başlangıcında bir önceki derste ulaşılan "bir fonksiyon grafiğinin üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi, fonksiyonun o noktasındaki türev değeridir" sonucu hatırlatılır. Devamında öğrenciler ile birlikte bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramının formel (Ɛ-δ) tanımı üzerinde tartışılır. Daha önceki derste türev kavramının özel bir limit olduğu sonucundan ve bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramının formel tanımından hareketle tek noktada türev kavramının formel tanımı (Ɛ-δ) sınıf tartışması yoluyla oluşturulur.

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : \left|\mathrm{x}-\mathrm{a}\right| < \delta \Rightarrow \left|\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)-\mathrm{L}\right| < \varepsilon$$

tanımından aşağıdaki tanıma geçiş

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : \left|x-a\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-m\right| < \varepsilon$$

Tanım oluşturulduktan sonra tanım içerisindeki değişkenlerin ve eşitsizliklerin düzlem üzerindeki temsillerinin ne olduğu üzerine sınıf tartışması gerçekleştirilir. Bunun için $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği çizilerek $P(2, f(2))$ noktasında fonksiyonun grafiğine çizilen teğetin denklemi türev alma yoluyla bulunur ve grafik üzerinde resmedilir. Daha sonra $x = 2$ değeri için hesaplanan türevin limit ifadesi (1) yazdırılarak bu limit durumunun formel tanımı (2) oluşturulur.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ =-2 (1)

$\forall\varepsilon > 0$ $için$ ∃δ > 0 öyleki Ix – 2I < δ oldukça $\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-(-2)\right| < \varepsilon$ (2)

Bu verilen örnek üzerinde Ix-2I< δ ve $\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-(-2)\right| < \varepsilon$ eşitsizliklerinin düzlemdeki temsillerinin ne olduğu tartışılır. Yapılan tartışmanın akabinde öğrencilerden, δ değişkenine 0,5 değeri verildiğinde tanım içerisinde belirtilen şartı sağlayan bir Ɛ değeri bulmaları istenir. Devamında öğrencilerin belirlediği Ɛ değerinin tek olup olamayacağı üzerine sınıf tartışması gerçekleştirilir. Tartışmadan sonra öğrencilerden "Ɛ" değişkenine 0,25 değeri verildiğinde tanım içerisindeki şartı sağlayan bir "δ" değeri bulmaları istenir ve bu değerin tekliği üzerine sınıf tartışması gerçekleştirilir. Dersin devamında öğrencilerden "Ɛ" değişkenin alabileceği tüm değerler için "δ" değişkeninin "Ɛ" değişkenine bağlı olarak ifade edilip edilemeyeceğini araştırmaları istenir. Aynı süreç farklı örnekler için tekrar edilir.

Deney Grubu

Kontrol grubunda olduğu gibi deney grubunda çalışma yaprağı öğrencilere dağıtılmadan önce bir fonksiyon bir noktasındaki limiti kavramının formel tanımından (Ɛ-δ) türev kavramının formel tanımı oluşturulur. Dersin sonunda ulaşılan sonuçlar özetlenir.

Çalışma yaprağı- 3

<u>Bilgi:</u> $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $x = x_0$ için $f(x)$ fonksiyonunun türevi şu limit değerine eşittir " $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$ ". Bu limitin formel (Ɛ-δ) tanımı ise şu şekildedir;

∀ε > 0 için ∃ δ > 0 öyleki Ix-x_0I < δ oldukça $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|$ < ε olur.

Aşağıdaki soruları GeoGebra ekranında karşılaştığınız ilk durum için cevaplamaya çalışınız.

Soru 1. Ekranda bir fonksiyonun grafiği ve bu fonksiyona ilişkin bir türev durumu grafiksel olarak resmedilmiştir. Grafiksel veriler ışığında türev kavramının formel tanımı (Ɛ-δ) içerisinde yer alan "x_0", "δ" ve "m" değişkenlerinin değerleri bu örnek için neye eşittir?

X_0=................. δ=.................. m=..........................

Soru 2. Grafikte verilen x değişkeni belirtilen aralıkta (x_0- δ, x_0+ δ) değiştikçe A ve H noktalarından geçen kirişin eğim " $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ " değeri hangi aralıkta değişmektedir?

(*Uyarı:* x değişkeni aralığın uç noktalarındaki değerleri alamamaktadır)

Soru 3. Grafikte verilen x noktası belirtilen aralıkta (x_0- δ, x_0+ δ) değiştikçe A ve H noktalarından geçen kirişin eğimi ile teğetin eğimi arasındaki farkın mutlak değeri

“ $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|$ ” değeri hangi aralıkta değişmektedir? (**Uyarı:** x değişkeni aralığın uç noktalarındaki değerleri alamamaktadır)

Soru 4. Bir önceki soruya verdiğiniz cevaptan hareketle δ değişkeninin yukarıdaki değeri için türevin formel tanım içerisindeki şartı sağlayan bir ε değeri bulabilir misiniz? Sizce tanım içerisindeki bu şartı sağlayan ε değeri tek midir? *(Uyarı:* x değişkeni aralığın uç noktalarındaki değerleri alamamaktadır)

ε = ...

Soru 5. Aşağıda verilen δ değişkeninin değerleri için türevin formel tanımı içerisindeki şartı sağlayan en küçük ε değerleri ne olmalıdır?

δ = 0.4 ise en küçük ε = ... δ = 0.3 ise en küçük ε = ...

δ = 0.2 ise en küçük ε = ... δ = 0.1 ise en küçük ε = ...

Soru 6. ε = 0,1 olarak verilsin. Bu ε değerine karşılık türev kavramının formel tanımı içerisinde yer alan şartı sağlayacak şekilde bir δ değeri bulabilir misiniz? Bulduğunuz bu δ değerinden başka ε = 0,1 için tanım içerisindeki şartı sağlayacak başka δ değerleri bulunabilir mi? Eğer cevabınız evet ise bir örnek gösteriniz.

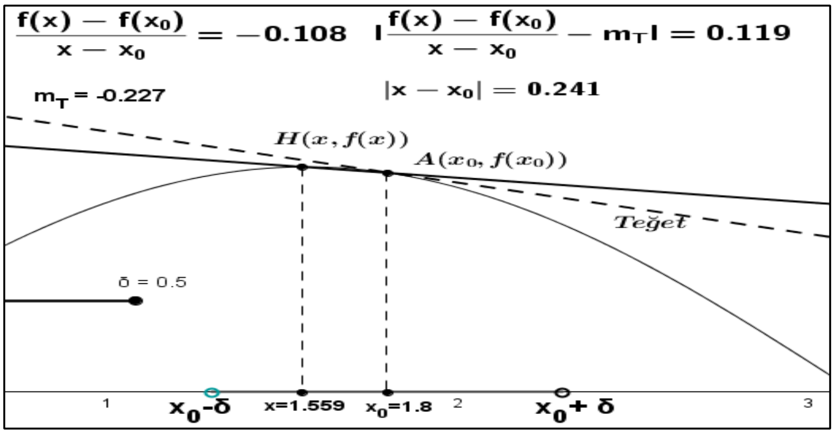
Soru 7. Aşağıda verilen ε değişkeninin değerleri için türevin formel tanımı içerisindeki şartı sağlayan en büyük δ değerleri ne olmalıdır.

ε = 0.06 ise en büyük δ=................. ε = 0.04 ise en büyük δ=............

ε = 0.181 ise en büyük δ=............ ε = 0.171 ise en büyük δ=............

Soru 8. Üzerinde çalıştığımız örnek için konuşacak olursak, sizce ε değişkeni sıfırdan büyük herhangi bir değer aldığında, bu değere karşılık tanım içerisindeki şartı sağlayan bir δ değeri bulunabilir mi? Eğer cevabınız evet ise ε değişkenine 2 farklı değer siz veriniz ve tanım içierisindeki şartı sağlayacak şekilde bu değerlere karşılık gelen δ değişkeninin alabileceği en büyük değerleri bulunuz.

Soru 9. $y = f(x)$ fonksiyonu $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ olarak tanımlansın. İlk olarak fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değerini limit tanımını ($\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) kullanarak ve $P(2, f(2))$ noktasında fonksiyonun grafiğine çizilen teğetin denklemini bulunuz. Daha sonra türevin formel tanımını bu örnek için oluşturarak, tanım içerisindeki şartı sağlayacak şekilde δ değişkenini ε değişkeni cinsinden ifade ediniz.



Şekil 36. Çalışma yaprağı-3 için GeoGebra ekran görüntüsü

3. DERS PLANI

Dersin Adı: Grafik Analiz

Dersin Konusu: Türevlenememe ve Türev Fonksiyonu

Dersin Amaçları: Bu ders ile öğrencilerin aşağıdaki kazanımlara ulaşmaları amaçlanmıştır:

- Sürekli fonksiyonlarda tek noktada türevlenememe durumunu grafiksel olarak yorumlayabilme.
- Bir aralık boyunca bir fonksiyonun türevini bir fonksiyon oluşturacak şekilde yapılandırabilme.
- Türev fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirleyebilme.

Öğretim Süreci:

Kontrol Grubu

Öğrencilere sürekli olup bir noktada türevi olmayan fonksiyonların grafiksel yorumunu göstermek için $y = |\sin(x)|$ grafiğinin x= 0 değerinde teğetinin olup olmadığı tartışılır. Bu tartışma çerçevesinde öğrencilerin kesen doğrularının sağdan ve soldan yaklaşması durumunda kesen doğrularının farklı teğet doğruları ortaya çıkardığı farketmeleri sağlanır. Devamında sağdan ve soldan yaklaşma sonucunda ortaya çıkan farklı teğet durumları ile fonksiyonun bu noktada sağ ve sol türevleri arasında ilişki kurulur.

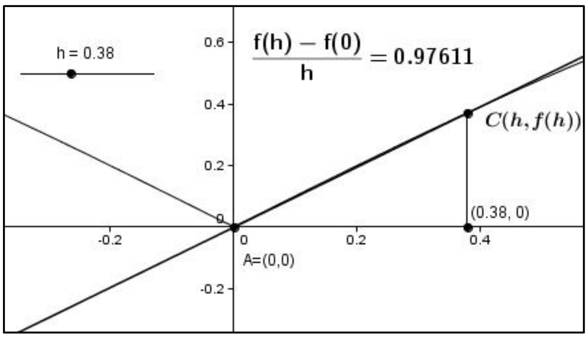
Dersin ikinci kısmında öğrencilere türevi fonksiyon olarak oluşturmaları için tahtaya bir fonksiyon grafiği çizilir. İlk olarak öğrencilerden bir aralık içerisinde yer alan farklı noktalarda, eğriye çizilen teğetlerden yaralanarak türev değerlerinin neler olabileceği tahmin etmeleri istenir. Devamında bu aralık içerisindeki tüm noktalarda türev değerlerinin fonksiyonel bir ilişki oluşturup oluşturmayacağı üzerine tartışılarak bir fonksiyonun türev fonksiyonu tanımına ulaşılır. Bu aşamadan sonra türev fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri belirlenir.

Deney Grubu

Bu ders içerisinde deney grubundaki öğrenciler belirlenen kazanımlara yönelik hazırlanan iki çalışma yaprağı üzerinde çalışır. Her bir çalışma yaprağının sonunda sınıf tartışması yoluyla elde edilen sonuçlar özetlenir.

Çalışma Yaprağı- 4

1. Adım: Bir fonksiyonun grafiğine üzerindeki bir noktadan $(A(x_0, f(x_0)))$ çizilen teğetin eğimini hesaplamak için kullandığımız ifade neydi?
2. Adım: C noktası A noktasına sağdan yaklaşırken 1. adımda bulduğumuz ifadenin değeri neye yaklaşmaktadır?
3. Adım: 2. adımda bulduğumuz değer, elimizdeki fonksiyon ve türev arasında nasıl bir ilişki kurabiliriz?
4. Adım: C noktası A noktasına soldan yaklaşırken 1. adımda yer alan ifade neye yaklaşmaktadır?
5. Adım: 4. adımda bulduğumuz değer, elimizdeki fonksiyon ve türev arasında nasıl bir ilişki kurabiliriz ?
6. Adım: Ulaştığımız tüm sonuçları dikkate alarak A noktasında fonksiyonun türevine ve A noktasından fonksiyonun grafiğine teğet çizme hususunda ne söylenebilir?



Şekil 37. Çalışma yaprağı-4 için GeoGebra ekran görüntüsü

Çalışma Yaprağı - 5

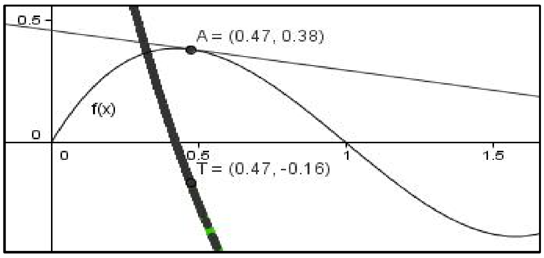
Açmış olduğunuz çalışma sayfasında bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, grafik üzerinde serbestçe hareket edebilen A noktası, bu A noktasından fonksiyonun grafiğine çizilen teğeti ve bu A noktasına bağlı olarak değişen bir T noktası görülmektedir. T noktasının apsisi A noktasının apsisine , ordinatı ise A noktasından grafiğe çizilen teğetin eğimine eşittir. Buradan hareketle;

Soru 1. T noktasının oluşturduğu grafiğe ait fonksiyonu $h(x)$ olarak isimlendirirsek, bu $h(x)$ fonksiyonunu nasıl tanımlardınız?

Soru 2. Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulabilir misiniz?

Soru 3. Grafiğini oluşturduğunuz $h(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi ile görüntü kümesini bulabilir misiniz?

Soru 4. $h(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının tanım kümelerinin farklı olduğu durumlar olabilir mi?



Şekil 38. Çalışma yaprağı-5 için GeoGebra ekran görüntüsü

4. DERS PLANI

Dersin Adı: Grafik Analiz

Dersin Konusu: Bir fonksiyonun artan-azalan olma durumu ile türev fonksiyonu arasındaki ilişki

Dersin Amaçları: Bu ders ile öğrencilerin aşağıdaki kazanımlara ulaşmaları amaçlanmıştır:

- Grafiksel verilerden hareketle bir fonksiyonun artan veya azalan olduğunu belirleyebilme.
- Bir fonksiyonun artan olma durumu ile türev fonksiyonunun işareti arasındaki ilişkiyi kurabilme.
- Bir fonksiyonun azalan olma durumu ile türev fonksiyonu işareti arasındaki ilişkiyi kurabilme.
- Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktaları ile türev fonksiyonun işaretindeki değişim arasındaki ilişkiyi kurabilme.

Öğretim Süreci

Kontrol Grubu

Dersin ilk aşamasında artan ve azalan fonksiyonların tanımı verilir ve bu tanım grafiksel olarak tartışılır. Daha sonra tahtaya çizilen bir fonksiyon grafiği üzerinde fonksiyonun artan azalan olduğu aralıklar belirlenir. Devamında bu belirlenen aralıklar içerisinde grafiğe çizilen teğetler vasıtasıyla oluşturulan türev fonksiyonunun işareti incelenir. Son olarak türev fonksiyonunun işareti ile artan azalan aralıkları arasındaki ilişki belirlenir.

İkinci aşamada verilen grafikte fonksiyonun aldığı yerel minimum ve yerel maksimum değerler belirlenerek bu noktalarda türev fonksiyonun işareti ve noktaların civarında türev fonksiyonunun işaretindeki değişim incelenir ve yerel maksimum ve yerel minimum noktaları veren kurallara ulaşılır.

Bir noktada bir fonksiyonun türevini sıfıra eşit olmasının o noktanın yerel maksimum veya yerel minimum nokta olması için yeterli olmadığını göstermek amacıyla, tahtaya $f(x) = (x-2)^3 + 3$ fonksiyonunun grafiği çizilir ve öğrencilerle türev fonksiyonun sıfır değerini aldığı nokta civarında değişimi ile fonksiyonun artan–azalan olma durumu incelenir.

Deney Grubu

Dersin başlangıcında kontrol grubunda olduğu gibi deney grubu öğrencilerine artan ve azalan fonksiyon tanımları ve grafiksel yorumu yansıdan sınıf içerisinde tartışılır. Devamında öğrencilere çalışma yaprağı – 6 dağıtılır.

Çalışma Yaprağı - 6

İnceleyeceğiniz GeoGebra ekranı içerisinde bir $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiği, bu grafik üzerinde serbestçe değişebilen bir nokta, bu noktadan geçen teğet ve bir T noktası gözükmektedir. T noktasının koordinatlarını veren sıralı ikilinin birinci bileşeni(apsisi) $(x, g(x))$ noktasının birinci bileşenine(apsisine) ikinci bileşeni(ordinatı) ise $(x, g(x))$ noktasından grafiğe çizilen teğetin eğimine eşittir. Ekranda görünen veriler ışığında aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Soru 1. Grafiği verilen $g(x)$ fonksiyonu hangi aralıkta artmakta ve azalmaktadır?

Soru 2. Grafiği verilen $g(x)$ fonksiyonu hangi noktaların bir komşuluğunda en büyük ve en küçük değerlerini almaktadır?

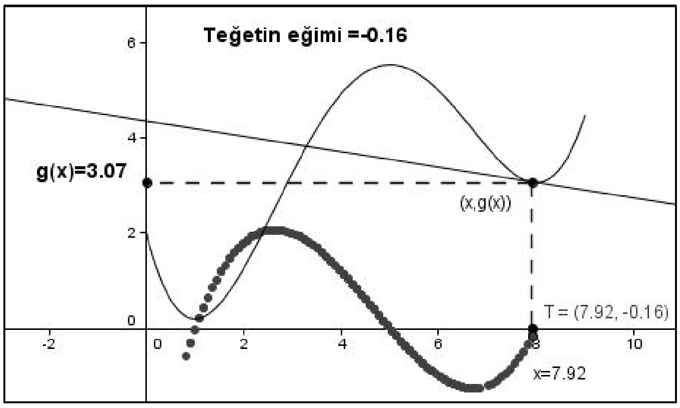
Soru 3. Grafiği verilen $g(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu hangi aralıklarda pozitif ve negatif değerler, hangi noktalarda 0 değerini almaktadır?

Soru 4. $g(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğinden yararlanarak $g(x)$ fonksiyonunun kesin artan olduğu aralıklar ile bu aralıklarda $g(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonunun değeri arasında nasıl bir ilişki mevcuttur?

Soru 5. $g(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğinden yararlanarak, $g(x)$ fonksiyonunun kesin azalan olduğu aralıklar ile bu aralıklarda türevinin değeri arasında nasıl bir ilişki mevcuttur?

Soru 6. $g(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğinden yararlanarak, $g(x)$'in maksimum ve minimum değerlerini aldığı noktalar ile bu noktalarda türevinin değeri arasında nasıl bir ilişki mevcuttur?

Soru 7. Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarını veren bir kural oluşturabilir misiniz?



Şekil 39. Çalışma yaprağı-6 için GeoGebra ekran görüntüsü

Çalışma yaprağından ortaya çıkan sonuçlar sınıf tartışması yoluyla formel olarak ifade edilir. Dersin son aşamasında yansıdan, bir noktada türev değeri sıfıra eşit olan fakat işaret değiştirmeyen fonksiyonlara örnekler verilir.

5. DERS PLANI

Dersin Adı: Grafik Analiz

Dersin Konusu: Bir fonksiyon eğrisinin konveks- konkav karakteristiği ile ikinci türev fonksiyonu arasındaki ilişki

Dersin Amaçları: Bu ders ile öğrencilerin aşağıdaki kazanımlara ulaşmaları amaçlanmıştır:

- İnformel olarak bir eğrinin konveks ya da konkavlık karakteristiğini tanımlayabilme.
- Bir fonksiyonun ikinci mertebeden türev fonksiyonunu oluşturabilme.
- Bir fonksiyon eğrisinin konvekslik karakteristiği ile ikinci türev fonksiyonunun işareti arasındaki ilişkiyi kurabilme.
- Bir fonksiyon eğrisinin konkavlık karakteristiği ile ikinci türev fonksiyonunun işareti arasındaki ilişkiyi kurabilme.
- Bir fonksiyon eğrisinin konveks-konkav karakteristiğini değiştirdiği noktalar ile ikinci türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi belirleyebilme

Öğretim Süreci

Kontrol Grubu

Öğrencilere dersin başlangıcında ilk olarak bir eğrinin konveks-konkav karakteristiği informel olarak şu şekilde tanımlanır:

Konveks: Eğer bir fonksiyon eğrisi belirli bir aralıkta kendisine çizilen teğetlerin üstünde kalıyorsa o aralıkta konvekstir.

Konkav: Eğer bir fonksiyon eğrisi belirli bir aralıkta kendisine çizilen teğetlerin altında kalıyorsa o aralıkta konkavdır.

Bunun yanı sıra öğrenciler ile daha önce oluşturulan birinci mertebeden türev fonksiyonundan hareketle ikinci ve daha yüksek mertebeden türev fonksiyonlarının ne anlam ifade ettiği tartışılır. Devamında öğrenciler ile tahtaya çizilen iki eğrinin konveks-konkav karakteristiği yapılan tanıma göre belirlenir. Daha sonra eğriler üzerinde çizilen teğetlerden yola çıkarak birinci mertebeden türev fonksiyonun belirtilen aralıklarda artan-azalan olma durumu tartışılır ve buradan ikinci mertebeden türev fonksiyonunun işareti yorumlanır. ikinci mertebeden türev fonksiyonun işareti ile konveks-konkav karakterisitiği arasındaki ilişki formel olarak kurulur. Bununla birlikte dersin son aşamasında öğrencilere ikinci mertebeden türev fonskiyonunun sıfır değeri aldığı fakat işaret değiştirmediği fonksiyon eğrisi örnekleri sunulur.

Deney Grubu

Dersin başlangıcında öğrencilere bir eğrinin konveks-konkav karakteristiği informel olarak tanımlanır. Bunun yanında öğrencilerle ikinci ve daha yüksek mertebeden türev fonksiyonlarının ne anlam ifade ettiği tartışılır. Dersin devamında öğrencilere çalışma yaprağı-7 dağıtılır.

Çalışma Yaprağı-7

İnceleyeceğiniz GeoGebra ekranı içerisinde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla [a,b], [c,d] aralıklarındaki grafikleri, grafikler üzerinde serbestçe hareket edebilen H ve G noktaları ve bu noktalardan eğrilere çizilen teğetler eğimleri ile birlikte verilmiştir. Bu verilenlerden faydalanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

y = f(x) fonksiyonunun grafiğini dikkate alalım

i) H noktası A noktasına doğru hareket ettikçe teğetin eğimi artmakta mıdır yoksa azalmakta mıdır?

ii) H noktası B noktasına doğru hareket ettikçe teğetin eğimi artmakta mıdır yoksa azalmakta mıdır?

iii) Bu taktirde $y = f(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu olan $y = f'(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında artan mı yoksa azalan bir fonksiyon mudur ? (Bir noktada bir fonksiyonun türevi ile teğetinin eğimi arasındaki ilişkiye dikkat edin)

iv) $y = f'(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu olan $f''(x)$ fonksiyonunu, yani $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türev fonksiyonunu dikkate alalım. iii) şıkta verdiğiniz cevabı dikkate alarak $y = f''(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığında pozitifliği ve negatifliği hakkında ne söyleyebilirsiniz?

y = g(x) fonksiyonunun grafiğini dikkate alalım

i) G noktası C noktasına doğru hareket ettikçe teğetin eğimi artmakta mıdır yoksa azalmakta mıdır?

ii) G noktası D noktasına doğru hareket ettikçe teğetin eğimi artmakta mıdır yoksa azalmakta mıdır?

iii) Bu taktirde $y = g(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu olan $y = g'(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında artan mı yoksa azalan bir fonksiyon mudur? (Bir noktada bir fonksiyonun türevi ile teğetinin eğimi arasındaki ilişkiye dikkat edin)

iv) $y = g'(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu olan $y = g''(x)$ fonksiyonunu, yani y = g(x) fonksiyonunun ikinci mertebeden türev fonksiyonunu dikkate alalım. iii) şıkta verdiğiniz cevabı dikkate alarak $y = g''(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığında pozitifliği ve negatifliği hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Sonuç1: Yukarıda keşfettiklerinizin sonucunda bir fonksiyonunun (a,b) aralığındaki grafiğinin konveks ve konkav olduğunu belirlemek için bir şart yazabilir misiniz?

Sonuç2: Bir fonksiyonunun grafiğinin konvekslikten konkavlığa, ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktalara büküm noktası denir. Örneğin üzerinde çalıştığımız iki eğriyi B ve C noktaları üst üste gelecek şekilde birleştirirsek, bu çakışma noktası yeni eğri için büküm noktası olacaktır. Bu tanımdan hareketle bir eğrinin büküm noktalarını veren bir şart oluşturabilir misiniz?

Çalışma yaprağından ortaya çıkan sonuçlar sınıf tartışması yoluyla formel olarak ifade edilir. Dersin son aşamasında yansıdan öğrencilerle bir noktada ikinci türev değeri sıfır olan fakat işaret değiştirmeyen fonksiyonlar üzerinde tartışılır.

6. DERS PLANI

Dersin Adı: Grafik Analiz

Dersin Konusu: Rolle ve Ortalama Değer Teoremi

Dersin Amaçları: Bu ders ile öğrencilerin aşağıdaki kazanımlara ulaşmaları amaçlanmıştır:

- Rolle teoremini ifade edebilme.
- Rolle teoremini grafiksel olarak yorumlayabilme.

- Ortalama değer teoremini ifade edebilme.
- Ortalama değer teoremini grafiksel olarak yorumlayabilme.

Öğretim Süreci

Kontrol Grubu

Dersin başlangıcında Rolle teoreminin matematiksel ifadesi tahtaya yazılır ve teoremin grafiksel anlamı sınıf tartışması yoluyla oluşturulur. Devamında verilen farklı örnekler üzerinde fonksiyonları Rolle teoreminde istenen noktalar hem cebirsel hem de grafiksel olarak buldurulur. Son aşamada Rolle teoeriminin formel ispatı verilir. Dersin ikinci aşamasında ortalam değer teoreminin ifadesi tahtaya yazılır ve teoremin grafiksel anlamı sınıf tartışması yoluyla oluşturulur. Daha sonra verilen farklı örnekler üzerinde hem cebirsel hem de geometrik olarak teorem içerisndeki şartı sağlayan noktalar bulunur. Son aşamada ortalama değer teoreminin formel ispatı verilir.

Deney Grubu

Deney grubu öğrencilerine Rolle teoremine yönelik bir çalışma yaprağı hazırlanmaz. Bunun yerine dersin başlangıcında Rolle teoreminin ifadesi ve örnekler yansıdan sınıf içerisinde tartışılır ve son aşamada teoremin formel ispatı verilir. Dersin devamında ortalama değer teoremi için çalışma yaprağı- 8 öğrencilere dağıtılır.

Çalışma Yaprağı-8

GeoGebra ekranında görülen fonksiyonun grafiği bir aracın zamana göre hızını göstermektedir. Bağımsız değişken olan “x” saat cinsinden geçen zamanı, bağımlı değişken olan “y” ise belirli bir zamanda aracın sahip olduğu hızı kilometre cinsinden göstermektedir. Aracın hız-zaman grafiğine bağlı olarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Soru 1. Grafikten yararlanarak, aracın $[t_0,t_1]$, ($t_0=2$, $t_1=6$), zaman aralığında ortalama ivmesini bulabilir misiniz? Aracın ortalama ivmesinin grafik üzerinde geometrik temsili nedir?

Soru 2. Aracın $t_0=4$ anında anlık ivmesinin grafik üzerinde geometrik anlamı nedir? Buna bağlı olarak grafik üzerinden aracın $t_0=4$ anında anlık ivmesini bulabilir misiniz?

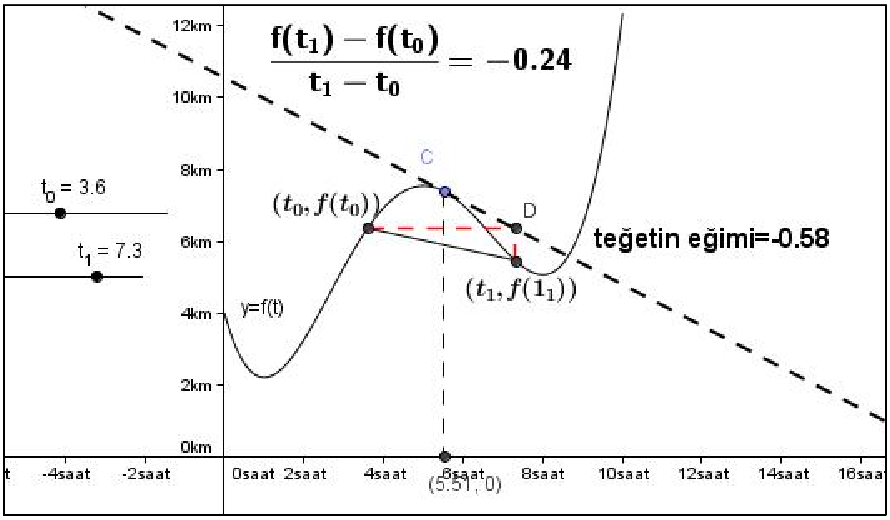
Soru 3. Sizce $t_0=2$ *ile* $t_1=6$ değerleri arasında öyle bir t_2 değeri varmıdır ki, aracın bu t_2 anındaki anlık ivmesi $t_0=2$ ile $t_1=6$ zamanı arasındaki ortalama ivmesine eşit olsun?

Soru 4. Aşağıda verilen t_0, t_1 değerleri için 3. Soruda verilen şartı sağlayan t_2 değerlerini bulabilir misiniz?

$t_0=2.4$ $t_1=6.5$ için $t_2=$ .... $t_0=1.8$ $t_1=3.4$ için $t_2=$ ....

$t_0=0$ $t_1=10$ için $t_2=$ .... $t_0=3.5$ $t_1=5.5$ için $t_2=$ ....

Soru 5. 4. soruda elde ettiğiniz izlenime dayanarak fonksiyonun tanım kümesi içerisinde yer alan keyfi (t_0, t_1) çifti için bir t_2 değeri bulunabilir mi? Matematiksel olarak bu durumu nasıl ifade edersiniz?



Şekil 40. Çalışma yaprağı-8 için GeoGebra ekran görüntüsü.

Çalışma yaprağından ortaya çıkan sonuçlar sınıf tartışması yoluyla formel olarak ifade edilir. Son olarak yansıdan ortalama değer teoreminin formel ispatı verilir.

9. ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Erdem ÇEKMEZ, 1982 yılında Bursa'da doğdu. İlkokulu Karacabey Atatürk İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Karacabey Anadolu Lisesi'nde ve lise öğrenimini Savaştepe Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 2002 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği programını kazandı. 2007 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında doktora öğrenimine ve araştırma görevlisi ünvanı ile göreve başladı. Yabancı dili İngilizce olup evli ve bir çocuk babasıdır.

İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adres : KTU Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi ABD, Söğütlü, Akçaabat, Trabzon.

E-posta : erdemcekmez@ktu.edu.tr

Telefon : 0536 430 98 56