KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ

ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MESLEK YÜKSEKOKULU ÖĞRENCİLERİNİN BİLGİSAYAR DESTEKLİ ORTAMDA "LİMİT-SÜREKLİLİK" KONUSUNDAKİ ÖĞRENMELERİNİN SOLO TAKSONOMİSİNE GÖRE DEĞERLENDİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Elif ERTEM AKBAŞ

TRABZON

Kasım, 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MESLEK YÜKSEKOKULU ÖĞRENCİLERİNİN BİLGİSAYAR DESTEKLİ ORTAMDA "LİMİT-SÜREKLİLİK" KONUSUNDAKİ ÖĞRENMELERİNİN SOLO TAKSONOMİSİNE GÖRE DEĞERLENDİRİLMESİ

Elif ERTEM AKBAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce Doktora Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Danışmanı
Prof. Dr. Adnan BAKİ

TRABZON
Kasım, 2016

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 29 / 11 / 2016

Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Adnan BAKİ	....
Üye	: Prof. Dr. Bülent GÜVEN	....
Üye	: Prof. Dr. Cengiz ALACACI	....
Üye	: Doç. Dr. Selahattin ARSLAN	....
Üye	: Doç. Dr. Yaşar AKKAN	....

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Nevzat YİĞİT

Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı ve bu tezi KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Elif ERTEM AKBAŞ

29 / 11 / 2016

ÖN SÖZ

Matematik dersinin mantık ve düşünmeye yön veren özelliklerin gelişmesinde etkili olması, bireyler tarafından kazanılması gereken mesleki gelişim açısından önemli görülmektedir. Dolayısıyla ülkemizde lisans düzeyinde eğitim veren kurumlar ile ortaöğretim kurumları arasındaki boşluğu doldurma işlevini yerine getiren Meslek Yüksekokullarında okutulmakta olan genel matematik dersi içerisinde yer alan kavramlarda anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencilerin soyut düşünme becerilerini geliştirilmek gerekmektedir. Bu çalışmada MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli ortamda "limit-süreklilik" konusunu nasıl öğrendikleri, nasıl düşündükleri, nasıl ilişki kurdukları öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin nasıl gelişebileceğine odaklanılarak incelenmiştir.

Her eser uzun bir yolculuktur aslında. Bu yolculukta eserimize bilerek ya da bilmeyerek dokunan birçok insan vardır. Lisans ve doktora öğrenimim süresince ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, tez danışmanım olma lütfunu göstererek bana engin deneyim ve bilgilerinden yararlanma fırsatı sunan, çalışmamın her aşamasında desteğini eksik etmeyen, yol gösteren, değerli hocam, danışmanım sayın Prof. Dr. Adnan BAKİ'ye en içten şükranlarımı sunarım. Yine lisans ve doktora öğrenimim süresince öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, örnek edindiğim, kendini geliştirmenin ne anlama geldiğini ve öğretime ne derece katkı sağladığını davranışlarıyla öğreten, ufkumu genişleten, bu güne gelmemde büyük emek ve pay sahibi olan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Bülent GÜVEN ve Doç. Dr. Selahattin ARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince verdiğim seminerlerde tezimin gelişimine yönelik yapıcı eleştirilerde bulunan ve sundukları önerilerle çalışmama katkı sağlayan, sayıca çok olmalarından ötürü burada adlarına yer veremediğim tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma, çalışma bağlamında özel olarak fikirlerini almak için aradığımda desteğini ve yardımını esirgemeyen sayın Doç. Dr. Derya ÇELİK ve Yrd. Doç. Dr. Temel KÖSA'ya, çalışmaya katılan tüm öğrencilerime, çalışmalarım sırasında motivasyonumu kaybettiğimde her zaman destekçim olan arkadaşım sayın Arş. Gör. Duygu TAŞKIN'a ve mesai arkadaşım sayın Arş. Gör. Tuğba UYGUN'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde en büyük emeği sergileyen, maddi manevi her türlü desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, yoğun çalışmalarımdan ötürü genelde ihmal ettiğim ancak her aradığımda sıcacık sevgiyle karşılayan, her zaman korumaları altında olduğumu hissettiğim sevgili annem Fatma ERTEM, sevgili babam Medet ERTEM ve sevgili kardeşim Tülin ERTEM YILMAZ’a, sağlık sorunlarımla yürüttüğüm bu uzun-zorlu süreçte her zaman destekçim olan ve stresli olduğumda tüm huysuzluklarıma katlanan sevgili eşim Soner AKBAŞ’a minnet ve şükranlarımı sunarım. Sabrınız için teşekkürler.. Sizleri çok seviyorum…

Kasım, 2016
Elif ERTEM AKBAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Meslek Yüksekokulu Öğrencilerinin Bilgisayar Destekli Ortamda "Limit-Süreklilik" Konusundaki Öğrenmelerinin SOLO Taksonomisine Göre Değerlendirilmesi

Günlük yaşamımızın bir parçası olan eğitimin amacı sadece bilen değil, öğrenen, eleştirel düşünen, sorgulayan, yenilik getiren ve yeniliklere ayak uyduran bireyler yetiştirmektir. Buna paralel olarak matematik eğitimi de bireylerin soyut düşünme becerilerini geliştirerek gerçek yaşama hazırlamayı amaçlamaktadır. Ancak sadece ezbere bilgiye odaklanan bir matematik eğitimi ile bu amaca ulaşmanın oldukça zor olduğu görülmektedir. Üniversitelerimizin meslek yüksekokullarında geleneksel olarak yürütülen genel matematik öğretimi sürecinde kavramsal öğrenmeye ve derinlemesine akıl yürütmeye gereken özen gösterilmemektedir. Bu durum matematiğin soyut kavramlarına ilişkin kavramsal anlama boyutunun ihmal edilmesine ve MYO öğrencilerinde ezbere bilgi birikimine neden olmaktadır. Bu doğrultuda limit-süreklilik gibi anlaşılması güç soyut matematiksel kavramların öğretimi sırasında somutlaştırılması ve öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin geliştirilmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada MYO öğrencilerinin bir BCS yazılımının kullanıldığı ortamda limit-süreklilik konusunu nasıl öğrendiklerini anlamak amaçlanmıştır. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen bu çalışmada MYO öğrencilerinin gözlenen öğrenme çıktıları değerlendirilirken ve yorumlanırken SOLO taksonomisi tercih edilmiştir. Çalışma meslek yüksekokulunda Bilgisayar Teknolojileri Programı'nda öğrenim gören 32 ön lisans öğrencisi ile yürütülmüştür. Araştırma süresince uygulanan çalışma yaprakları (bu çalışma yapraklarındaki öğrenci notları), öğrencilerin bilgisayar ekran çıktıları (Derive yazılımı üzerinde yaptıkları çalışmalar), gözlemler, gözlemler esnasında araştırmacı öğretmenin tuttuğu notlar ve öğrencilerle gerçekleştirdiği diyaloglar bu çalışmanın veri kaynaklarını oluşturmuştur. SOLO taksonomisinin kullanılmış olması nedeniyle belirlenen araştırma problemine cevap aranırken MYO öğrencilerinin her bir kazanıma ilişkin öğrenme çıktılarının SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık geldiği hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

Araştırmaya ait bulgular, SOLO taksonomisi ile değerlendirilen MYO öğrenci cevaplarının çoğunun limit-süreklilik konusuna ilişkin ilişkilendirilmiş yapı seviyesi altında yer aldığını göstermiştir. Bu durum sahip oldukları bilgi ve becerileri tutarlı bir yapı içinde bütünleştiremedikleri anlamına gelmektedir. Ancak BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamı MYO öğrenci cevaplarını hedeflenen öğrenme seviyesine ulaştırmamış olsa da cevapların genel bilgiyi yorumlayabilecek seviyeye gelişim göstermesine katkı sağlamıştır. Bu sonuçlar ışığında MYO öğrencilerinin seviyesi dikkate alınarak matematiğin soyut kavramlarının öğretiminde BCS yazılımları gibi dinamik görsellerden, görsel öğeleri ve sözel iletişimi destekleyen etkinliklerden faydalanılması önerilmektedir. Bununla birlikte yükseköğretimden önce ortaöğretim kademesinde de öğrencilerin soyut düşünme becerilerini geliştirmeye yardımcı olan BCS yazılımı gibi yazılımların kullanımı ile ilgili bir dersin okutulması önerilebilir.

Anahtar Kelimeler: Meslek Yüksekokulu Öğrencileri, Limit-Süreklilik Kavramı, SOLO Taksonomisi, Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi.

ABSTRACT

Evaluation of the Learning of the Students of Vocational High Schools In Computer Assisted Environment About the Concept of "Limit and Continuity" By SOLO Taxonomy

As a part of our daily lives the purpose of the education is to educate people for learning, thinking critically, criticizing, creating and adopting new thinkings rather than just rote learning. In this respect, mathematics education aims to help individuals become ready to real life by improving their abstract thinking skills. However, it is difficult to reach this aim through traditional teaching providing rote learning. Throughout the implementation of traditional mathematics teaching at Vocational High Shools (VSH) of our universities does not draw on conceptual mathematics learning and analitical reasoning. This situation causes to ignore conceptual understanding of abstract concepts and yield rote learning at VHSs. In order to solve this problem we need to use effective teaching methods and tools to make, difficult and abstract mathematical concepts such as limit and continuity, easy to learn for VHS students.

In the present study, it was aimed to examine learning of VHS students about limit and continuity within an environment supported by BCS software. The structure of observed learning outcomes of the students were evaluated and interpreted by SOLO taxonomy through an action research process. The study was conducted to 32 students enrolled in the program of Computer Technologies in VHS. The data were collected through worksheets completed by students, students' computer screen outputs of Derive, observations, teacher field notes through observations and student talks. In order to find the answers of research problem so SOLO taxonomy were used. The detailed information about each learning outcomes of VHS students were compared with SOLO taxonomy levels.

It was observed that the answers of the students evaluated by SOLO taxonomy were lower than the structure related to limit-continuity concept. This means that they could not make connection between their knowledge and skills in a coherent structure. Although the BCS software could not help students to reach the expected learning levels, it could help them about improwing themselves to interpret the general knowledge about limit and continuity. In light of these findings, it can be suggested that the activities encoraging dynamic visualizations such as BCS softwares, representations and oral communication should be benefited from considering the levels of VHS students. In

addition, there might be a course about the usage of softwares such as BCS in order to develop abstract thinking skills in high schools before university programs.

Keywords: VHS Students, Limit-Continuity Concept, SOLO Taxonomy, Computer Assisted Mathematics Learning.

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

GRAFİKLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

MYO	**:** Meslek Yüksekokulu
SOLO	**:** Structure of the Observed Learning Outcome
BDÖ	**:** Bilgisayar Destekli Öğretim
BCS	**:** Bilgisayar Cebir Sistemi
CAS	**:** Computer Algebra System
Çlş.Yp.	**:** Çalışma Yaprağı
DGY	**:** Dinamik Geometri Yazılımı
GHM	**:** Grafik Hesap Makinesi
NCTM	**:** National Council of Teachers of Mathematics
MEB	**:** Milli Eğitim Bakanlığı

1. GİRİŞ

Kendine özgü amaç, yöntem ve sonuçlarıyla entelektüel değeri yüksek bir disiplin olan matematik doğası gereği, soyut kavramlar ile inşa edilen, düzenli ve kesin biçimi ile alışkın olduğumuz günlük düşünce esasına dayanır. Bize yabancı gelen düşüncenin kendisi değil, düşüncemizi ifade eden özel simgelerdir. Bu özel simgeleri içeren matematiğin uğraş konusu sayı, nokta, küme, limit, süreklilik, türev, geometrik şekiller, uzay gibi soyut nesneler olgusal değil kavramsaldır. Matematikçi bu kavramların özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri ortaya çıkarma, genelleme ve ulaştığı sonuçları ispatlama çabası içindedir (Kabaca, Çontay ve İymen, 2011). O halde matematik insan tarafından zihinsel olarak yaratılan bir sistemdir. Bu durum matematiği soyut hale getirir. Genel olarak, soyut kavramların kazanılması zordur. Matematiğin öğrencilere zor gelmesinin sebebi belki de burada yatmaktadır. Ancak matematik kavramları, öğretim sırasında somutlaştırılarak ve somut araçlar kullanılarak bu zorluk giderilebilir; en azından azaltılabilir. Dolayısıyla öğrenilmesi zor olan soyut matematiksel kavramların öğretimi sırasında somut araçlar kullanılabilir (Baki, 2002; Bozkurt ve Akalın, 2010; Ersoy, 1997).

Bilim ve teknolojideki hızlı gelişimler yakından takip edildiğinde çeşitli alanlarda bilgi-beceri donanımını destekleyen teknolojik araç kullanımının gündeme geldiği görülmektedir. Bu araçlardan bilgisayarlar ve hesap makinelerinin kullanımı matematik eğitiminde giderek artmıştır. Özellikle bilgisayar kullanımındaki bu artış matematik eğitiminde de yeni beklentiler ortaya çıkarmıştır. Bu beklentilere göre öğrenciler teknoloji ile matematiği kendi başlarına keşfedebilecekler ve kâğıt-kalem uygulamaları ikinci planda kalacaktır. Bu beklentilerin çoğu gerçekleşmese de öğrencilerin matematiği daha iyi öğrenebilmeleri için bilgisayarın nasıl kullanılması gerektiği konusunda önemli bilgi ve deneyim oluşmuştur (Baki, 2001; Güven ve Karataş, 2003). Örneğin, kavramlara ilişkin özelliklerin ortaya çıkarılmasında, ölçüm yapabilmede, görselleştirmede, farklı örnekler üzerinde akıl yürütmede, ilişkilendirmede, iletişim becerilerinin geliştirilmesinde ve öğrencilerin kendi matematiksel yapılarını oluşturabilmesinde bilgisayarın nasıl kullanılması gerektiği ile ilgili tecrübe kazanılmıştır (Baki, 2000; Çıldır, 2012; Gökmen, Budak ve Ertekin, 2015; Güven, 2008; Güven ve Karataş, 2003; Köse ve Özdaş, 2009; Pierce ve Stacey, 2002; Sevimli ve Delice, 2015).

Bireylerin objektif ve özgür düşünmesinde, özgüveninin artmasında, karşılaştığı problemlerdeki sebep-sonuç ilişkilerini açıklayabilmesinde matematik eğitimi önemli bir potansiyele sahiptir. Bu nedenle günümüzde matematiği bilen, anlayan ve kullanabilen bireylere gereksinim duyulmaktadır (Özdaş, 1998). O halde matematik öğretim sürecinde öğrencilerin bireysel anlamalarını sağlayabilecek ortamlar oluşturulmalıdır. Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin bilişim teknolojilerini sınıflarında etkili kullanması öğrencilerin matematiği anlaması açısından önemli görülmektedir.

NCTM (2000) hazırladığı raporda, teknolojinin matematik eğitiminde kullanımını okul matematiği ilke ve standartları içerisinde saymakta, "teknoloji, matematik öğrenmeyi ve öğretmeyi etkiler ayrıca teknolojiyle birlikte yapılan öğretim matematikte öğrenci öğrenmelerini arttırır" ifadesine yer vermektedir. Bu rapora göre bilişim teknolojileri (hesap makineleri ve bilgisayarlar); matematiksel ifadelerin görsel temsillerini oluşturmada, verileri düzenleme ve çözümlemede etkilidir. Bu ise öğrencilere doğru hesap ve matematiğin her alanında araştırma yapma imkânı sunmaktadır. Böylece öğrencilerin karar verme, yansıtma, muhakeme etme ve problem çözme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olmaktadır. Bilişim teknolojileri, sembolik (cebirsel), grafik (geometrik), sayısal (aritmetik) gösterimleri eşzamanlı olarak göstererek öğrencilere varsayımları doğrulamada ve çoklu durumları betimlemede yardımcı olmaktadır. Bu durum öğrencilerin daha güçlü problem çözücü olmalarına ve matematiksel kavramları daha rahat anlamalarına izin vermektedir (A. Ersoy, 2005; Erbaş, 2005; Y. Ersoy, 2003). O halde matematik sınıflarında bilişim teknolojileri uygun biçimlerde kullanıldığında matematiksel anlama derinleşeceğinden, matematik eğitiminde bilgisayar kullanımı ile muhakeme etme, varsayımda bulunma ve genelleme gibi yüksek düzey zihinsel beceriler üzerine odaklanılabilir (Wiest, 2001).

Bilgisayar teknolojisinde yaşanan hızlı gelişmelerin matematik sınıflarına yansımaları olan dinamik geometri yazılımları (DGY) ve bilgisayar cebir sistemleri (CAS), matematik eğitiminin bu amaçlara ulaşabilmesi için önemli bir potansiyele sahiptir. Hazzan ve Goldenberg'e (1997) göre yapılan araştırmalar, dinamik özelliğe sahip olan geometri yazılımlarının öğrencilere, yaygın olarak kullanılan kâğıt-kalem çalışmalarına göre çok daha fazla soyut yapılar üzerine yoğunlaşma fırsatı verdiğini göstermiştir. Öğrencilerin soyut yapılar üzerine yoğunlaşabilmesi matematikte hayal etme gücünün artması, sezgi yolunun dolayısıyla yaratma ve keşfetme yollarının açılması demektir. Bu yollar ise öğrencilerin analiz yapma, varsayımda bulunma, genelleme yapma ve problem çözme becerilerini geliştirecektir (Baki, 2001). Bu bağlamda, öğretim faaliyetlerinde öğrenci merkezlilik esas alınarak öğrencileri bilginin pasif alıcısı konumundan bilginin aktif kurucusu konumuna taşınması önemli hale gelmektedir. Bilgisayar teknolojisinin böyle bir süreçte önemli bir potansiyele sahip olduğu birçok araştırmacılar tarafından dile getirilmektedir (Baki, 2002; Hazzan ve Goldenberg, 1997).

Matematikte karşılaşılan birçok sembolik kavram formal olarak tanımlanmadan önce sınırlı olsa da kişilerin zihinlerinde sezgisel olarak mevcuttur. İlgili literatür incelendiğinde matematiksel sembolik kavramların birçoğunun öğrenciler tarafından güç kavrandığı ve yüzeysel olarak öğrenildiği belirtilmektedir (Aztekin, 2012; Chang ve Li 2005; Çıldır, 2012; Gürbüz, Toprak, Yapıcı ve Doğan, 2011; Krishnamani ve Kimmins, 2001; Sevimli ve Delice, 2015; Van Eck ve Dempsey, 2002). Analizde karşılaşılan “limit” kavramı bu kavramlardan biri olmakla birlikte ön öğrenmeleri üst düzey olan öğrencilerin bile zorlandığı bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Sürekliliği özel bir durum olarak içeren ve pek çok kavramın dayandığı limit kavramı, analizin çeşitli dallarında önemli rol oynamaktadır (Bayar ve Gündüzalp, 1988; Swinyard ve Lockwood, 2007; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015). Limit ve süreklilik; matematiğin türev, integral gibi birçok önemli kavramının kazanılması için bilinmesi gereken en önemli ve temel kavramlardandır. Dolayısıyla bu kavramların öğrenciler tarafından anlamlandırılması önemlidir.

Limit-süreklilik gibi öğrenilmesi zor olan temel kavramlarla ilgili karmaşık problemle karşılaşan öğrenci problemi çözme sürecinde teknoloji destekli öğrenme ortamında küçük gruplar halinde etkileşimli olarak sürece dâhil edildiğinde mantıklı çözüm yolları üretebileceklerdir. Böyle ortamlarda öğrenciler hem sözlü hem de yazılı olarak ifade ettikleri fikirlerini uygulama olanağına sahip olacaklarından daha eleştirel düşünebilme ve bilgilerini analiz edebilme yeteneğine ulaşabileceklerdir (Castro, 2011). Böylece, limit ile ilgili günlük yaşamda edindikleri ön bilgilerle, okuldaki bilgilerini ilişkilendirerek kendi bilgilerini oluşturan öğrencilerde daha etkili öğrenme gerçekleşecektir. Bu süreçte öğretmenler, limit ve sürekliliğin kazanımları doğrultusunda öğretim sürecini daha etkili hale getirebilmek için ne yapabileceklerine odaklanmalıdır. Bu bağlamda öğrencilerin cebir ve aritmetiksel metotlar kullanarak kolaylıkla sonuca ulaşmalarının mümkün olmadığı ileri düzey matematiksel düşünmeye geçişin göstergesi olan ve özellikle üniversite matematik müfredatının temelinde bulunan limit-süreklilik kavramının (Cornu, 1991; Tall, 1992) öğretiminde, öğretim sürecini etkili hale getirmek için teknoloji destekli öğrenme ortamları oluşturulabilir.

Ülkemizde ortaöğretim eğitimini tamamlayıp üniversite giriş sınavında başarı gösteren öğrencilerin %60’lık diliminin lisans programlarına devam ettiği düşünüldüğünde üniversitelerimizde ve özel olarak meslek yüksekokullarımızda okutulmakta olan genel matematik dersinin içeriğinde yer alan limit-süreklilik kavramlarının öğretiminin ele alınması kaçınılmazdır. Genel veya temel matematik okuyan lisans öğrencilerine göre Meslek Yüksekokulu (MYO) öğrencilerinin limit ve süreklilik konularını öğrenmede çok daha sorunlu bir durumda olması bu geçişte yaşanabilecek birtakım zorlukları doğuracaktır. Özellikle bu kavramların öğretimi işlemsel ağırlıklı yapıldığında kavramsal anlama boyutu ihmal edileceğinden MYO öğrencilerinde öğrenme güçlükleriyle karşılaşılması kaçınılmazdır. Hâlbuki matematiksel işlemleri uygulama ve bunların pratiğini yapma fırsatı bulan öğrenci matematiği anlayıp-matematiksel düşünme gücü kazanabilir (Kokol-Voljc, 2000). Matematiksel işlemleri ve algoritmaları en iyi matematikçilerden bile daha hızlı ve güvenilir olarak uygulayabilen bilgisayar cebiri sistemleri (BCS) uygun konu eşliğinde uygun amaçlar için kullanıldığında bu işlem ve algoritmaların anlaşılması sağlanabilir (Kokol-Voljc, 2000). Araştırmalar, anlaşılması zor olan matematiksel kavramlarda karşılaşılan öğrenme güçlüklerinin aşılmasında BCS'lerin önemine vurgu yapmaktadır (Aksoy, 2007; Aktümen, 2007; Aktümen ve Kaçar, 2008; Çelik, 2007; Kabaca, 2006; Kokol-Voljc, 2000). Böylece limit-süreklilik kavramlarının öğretimi esnasında karşılaşılacak öğrenme güçlüklerinin aşılmasında BCS'ler kullanılabilir.

BCS'yi sınıf ortamlarına taşımak öğrencilere çeşitli durumları temsil etme, sembol kullanma, sembolik gösterimlerle birlikte grafiksel-sayısal gösterimlerden yararlanma ve yorumlama olanağı da sunmaktadır. Dolayısıyla teknolojinin matematik eğitimine sunmuş olduğu bu imkânları öğrencilere sunabilmek için araştırmacı öğretmenin bu konuyu derinlemesine ele alması gerekmektedir.

Bu çalışmada ortaöğretim kurumlarının son sınıf müfredatı içerisinde yer almasına rağmen üniversiteye giriş sınavına hazırlanma kaygısıyla kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiği görülen limit-süreklilik konusu ele alınmıştır. Özellikle temel matematik bilgisinden yoksun olan MYO'lar için genel matematiğin temel taşı olan limit-süreklilik konusundaki öğrenmeleri önemli görülmüştür. Bu konuları MYO öğrencilerinin etkili ve kalıcı öğrenmesini sağlamak amacıyla BCS'den Derive yazılımı kullanılarak oluşturulan öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Çalışmada öğrencilerin bu ortamdaki limit-süreklilik konusundaki öğrenmelerini derinlemesine değerlendirmek amacıyla Biggs ve Collis (1991) tarafından geliştirilen genel bilişim modeli olarak tanımlanan SOLO taksonomisinin kullanılmasına karar verilmiştir. İlgili literatürde SOLO taksonomisinin özellikle öğrenme ortamlarıyla ilişkili olarak öğrencilerin bilgi ve becerilerini değerlendirmeye yönelik etkili bir model olduğu vurgulanmaktadır (Bigg ve Collis,1991; Çelik, 2007; Lian ve Idris, 2006; Pegg ve Tall, 2004). SOLO taksonomisi ilköğretimden üniversiteye öğrencilerin belli kavramlarla ilgili matematiksel düşünme becerilerini tanımlamada ve yorumlamada çokça kullanılmıştır (Çelik, 2007; Jones, Thornton, Langrall, Mooney, Perry ve Putt, 2000; Lian ve Idris; 2006; Pegg ve Davey, 1998; Vallecillos ve Mareno, 2002).

Her öğrencinin limit-süreklilik kavramları ile ilgili düşünce ve yorumlama süreçleri belirli anlama düzeyleri tanımlanarak oluşturulabilir. Bu nedenle üniversitelerin MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusundaki öğrenmeleri SOLO taksonomisine göre değerlendirilebilir. Bu ifadeyi daha açık bir hale getirmek için çalışmanın bundan sonraki kısmında araştırmanın içeriği ile ilgili olarak BCS yazılımlarından özellikle DERİVE programı ve MYO öğrencilerinin limit-süreklilik ile ilgili öğrenmelerinin değerlendirilmesinde SOLO taksonomisinin aşamaları ile ilgili genel bilgiler üzerinde durulacaktır.

BCS'nin Genel Matematik Eğitimindeki Yeri ve Potansiyeli

Matematik dersinin temel amacını "matematiği anlamak-matematiksel düşünme gücü kazanmak" olarak gören Kokol-Voljc'e (2000) göre matematik eğitiminde BCS'nin kullanımı kaçınılmazdır. Kokol-Voljc (2000), geleneksel eğitim yaklaşımında matematik öğretiminin "algoritma" merkezli olduğunu belirtip algoritmaların uygulamalarını öğrenen öğrencilere "zanaatkâr" benzetmesi yapmaktadır. Bu benzetmesiyle BCS kullanımının matematik öğretimindeki hedefleri etkilediğini "ağaca tırmanırken niçin tırmandığımızı unutmamalıyız" ifadesi ile açıklamaya çalışmıştır. Bu doğrultuda matematik dersindeki amacımız matematiksel işlemleri ve algoritmaları uygulamak yerine bu işlem ve algoritmaları uygun amaçlar için kullanabilmek ve anlamak şeklinde değiştirilmelidir (Işık, 2007; Kabaca, 2006).

Matematik eğitimi ile kazanılan matematiksel akıl yürütme ve kanıtlama becerileri hemen her alanda bireylerin düşüncelerinin gelişimi ve biçimlenmesi için önemli bir araçtır. Bundan dolayı matematikle ilgili davranışlar ilköğretimden yükseköğretim programına kadar her alanda yer alır. Üniversitelerde öğrettiğimiz matematik ağırlıklı olarak matematiksel işlemleri uygulama ve bunların pratiğini yapma düzeyindedir. Hâlbuki bu tarz işlemleri BCS en iyi matematikçilerden bile daha hızlı ve güvenilir olarak yapabilmektedir.

Genel olarak üniversite matematik müfredatının temelinde bulunan limit kavramının öğretimi ve BCS'nin öğretim amaçlı kullanımlarını araştıran literatür çalışmaları, limit kavramının öğrenciler tarafından güç kavranan ve çoğunlukla yüzeysel olarak öğrenilen bir konu olduğu görüşünde ortak sonca varmaktadır (Aztekin, 2012; Çıldır, 2012; Fernandez, 2004; Ferrini-Mundy ve Graham, 1994; Gürbüz ve diğ., 2011; Tall ve Vinner, 1981; Zaslavsky ve Shir 2005). Bu sonuç özellikle MYO'larda genel metemetik dersi içeriğinde yer alan ve öğrenciler tarafından üst düzey düşünmeyi gerektiren limit-süreklilik kavramlarının öğretimi sürecinde araştırmacı öğretmen için dikkat çekicidir.

Genel anlamda matematik daha özel olarak cebir öğrenme ve öğretmede BCS yazılımlarının potansiyelini ortaya koyan birçok çalışmanın (Aktümen, 2007; Aztekin, 2012; Clements ve Sarama, 1997; Çelik, 2007; Çıldır, 2012; Harris, 2000; Heid, 2002; Herwaarden ve Gielen, 2002; Iseri, 2003; Işık, 2007; Jakuncyn ve Kerr, 2002; Kabaca, 2006; Mayes, 2001; O'Callaghan, 1998) olması, matematiğin temel kavramlarının öğrenimi sürecine BCS'nin entegre edilmesinin etkili olacağı görüşünü ortaya çıkarmıştır. Bu doğrultuda öğrencilerin temel kavramlara ilişkin anlayışlarını ve soyut düşünme becerilerini geliştirme sürecinde BCS'lerin avantajları kullanılabilir. Dolayısıyla genel matematiğin temel kavramlarından özellikle limit-süreklilik kavramlarını öğrenme ve öğretme sürecinde BDÖ ortamında BCS kullanımının etkili olacağı düşünülmüştür.

BCS yazılımlarının öğrencilere sunduğu olanaklar Kutzler (2000) tarafından şu şekilde sınıflandırılmıştır;

1. *Basitleştirme:* Öğrencilere aritmetikte, cebirsel işlemlerde ve grafik çiziminde kolaylıklar sunarak öğrencilerin çok daha karmaşık ve gerçekçi problemlerle meşgul olmasını sağlarlar.
2. *Deneme yapma:* Öğrenci bu ortamlarda düşüncelerini gerçekleştirebilecek ve sonuçlarını görerek düşündüklerinin doğruluğunu kontrol etme fırsatına sahip olabilecektir. Bu doğrultuda düşünceleri için yeni planlamalar yapabilecektir.
3. *Görselleştirme:* Bir görselleştirme aracı olarak BCS kullanımı, öğrencilerin çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamalarına yardımcı olur.
4. *Yoğunlaşma:* Teknoloji öğrencilerin düşük seviyeli becerilerden, daha yüksek seviyede düşünme gerektiren becerilere odaklanmalarını sağlar. BCS kullanımı öğrencilerin karmaşık cebirsel işlemlerle meşgul olmaları yerine model geliştirme, elde edilen çözümü analiz etme ve yorumlama gibi yüksek seviyeli becerilere odaklanmalarını sağlar.

Belirlenen bu olanaklar kapsamında BCS ortamlarının öğrenciler için sahip olduğu potansiyel şu şekilde özetlenebilir; BCS ortamları, öğrencilere sembollerle çalışmanın yanı sıra bu sembolleri çeşitli durumları temsil etmek için kullanabilme, sembolleri yorumlayabilme, sembollerle akıl yürütebilme, grafiksel ve sayısal gösterimlerden yararlanma olanağı sunar. Ayrıca BCS ortamları geleneksel ortamlardan farklı olarak öğrencilerdeki görselleştirmeyi, keşfetmeyi ve matematiksel fikirleri geliştirmeyi amaçlayan bir oyun ortamı oluşturur.

İşte bu anlamda BCS yazılımlarından “Derive” yazılımının kullanıldığı bilgisayar destekli öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin matematiğin temel konularından limit ve süreklilikle ilgili öğrenmelerinin incelenmesi kaçınılmazdır. Böylece araştırmayı yapan araştırmacı öğretmen Derive yazılımının kullanıldığı bilgisayar destekli öğrenme ortamında belli bir problem durumu üzerinde çalışırken bu sürece dair düşüncelerinin yansımasını derinlemesine inceleme fırsatı bulacaktır.

Neden Derive Programı?

Genel olarak analiz öğretiminde kullanılan yazılımlar karakteristik özellikleri bakımından cebirsel ifade ve nümerik değerler üzerinde işlem ve hesaplama yapabilen BCS ve geometrik yapıları dinamik olarak değiştirmeyi mümkün kılan DGY olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. BCS yazılımları program içerisinde sembolik olarak girilen matematiksel ifadelerin karşılık geldiği gösterimlerini ekrana yansıtabilme özelliğine sahip olmasına rağmen cebirsel ifadede değişiklik yapıldığında eş zamanlı olarak grafiksel gösterime bu değişiklik yansımamaktadır. Bu duruma örnek olan BCS’den Derive yazılımı bu çalışma sürecinde araştırmacı öğretmene, meslek yüksekokulu öğrencilerinin düşüncelerini, fikirlerini elde edebileceği bir ekran sunmaktadır.

Noss ve Hoyles’in (1996) çalışmalarında belirttiği gibi çalışma sürecinde bilgisayar, ortam sağlayıcı bir rolde olup öğrencilerin öğrenme çıktılarını değerlendirmede araştırmacı öğretmene, öğrencilerin düşüncelerine ait izleri gözlemleyebileceği bir pencere sunmaktadır.

İlgili literatürde (Kabaca, 2006; Ruthven, Rousham ve Chaplin, 1997) Derive ortamının öğrencilere sunmuş olduğu olanaklar aşağıdaki gibi özetlemiştir;

1. Diğer BCS yazılımları gibi somut işlemler döneminde Derive ile çalışmak öğrencilerde bireysel farklılıkları arttırmasına rağmen öğrencilerin beceri ve davranışlarına etkisi az olmaktadır.
2. Buna karşın soyut işlemler döneminde, öğrencilerin sahip oldukları kavramlarla yazılımın çalışması arasında benzerlikler ortaya çıkmaktadır.
3. Yeniden organize edilmeye çalışılan düşünme sistemlerinin yükseltilmesinde bilişsel araçlar olarak Derive yazılımı destekleyici bir rol oynamaktadır.
4. Geleneksel ortamlarda kâğıt-kalem ile kolaylıkla oluşturulamayacak durumları Derive, derinlemesine inceleme fırsatı vermektedir.
5. Çoklu gösterimler arasında dönüşümleri kolaylıkla gerçekleştiren Derive, öğrencilere sembolik, grafiksel ve sayısal verilerle çalışma imkânı sunmaktadır.
6. Alışılmamış problemlerle çalışma, çözüm stratejilerinin uyum ve özümsenmesinde Derive yazılımının yaptığı hesaplamaların interaktif ortamda izlenmesi araştırmacılara önemli kolaylıklar sağlamaktadır.

Yukarıda özetlenen üstünlükleri, Derive yazılım menüsünün sade, basit olması ve temin edilmesinin kolay olması dikkate alındığında bu çalışmada Derive yazılımı kullanımının gerekçelerini şu şekilde özetleyebiliriz;

1. Kurulumu ve kullanımı özellikle merkezden uzak problemli yerleşim yerlerindeki meslek yüksekokulları, öğrencileri ve buradaki bilgisayarlar için daha uygun olduğu düşünülmektedir.
2. Öğrenciler cebirsel ilişkiye ait sembolik, grafik ve sayısal temsiller arasında nasıl bir ilişkilendirme yapılıp/yapılmadığını ortaya koymak amacıyla farklı gösterimler arasındaki dönüşümleri sağlayan Derive gibi BCS’lerine ihtiyaç duyulmaktadır.
3. Derive öğrencilerin problemlere ve kendi matematiğini yapmaya odaklanmasını sağlamaktadır.

4. MYO öğrencileri için özellikle limit-süreklilik konusunun öğretiminde ileri düzeyde matematiksel işlem, sayısal-sembolik hesaplamalar ve grafik gösterimi gerekli görülmüştür. Bu anlamda ileri düzeyde matematiksel işlem, sayısal ve sembolik hesaplamalar yapabilen, iki ve üç boyutlu grafik gösterimini kolaylaştıran Derive, MYO öğrencilerinin limit ve süreklilikle ilgili öğrenmelerini değerlendirmede hazırlanan çalışama ortamı için önemli olduğu düşünülmektedir.

SOLO Taksonomisi

Öğrenme ortamlarıyla ilişkili olarak farklı seviyelerdeki öğrencilerin yer aldığı bu çalışmada araştırmacı öğretmen öğrencilerin öğrenme çıktılarını değerlendirebilmek için SOLO taksonomisinin uygun olduğunu düşünmüştür. Biggs ve Collis (1991) tarafından geliştirilen ve genel bilişlim modeli olarak tanımlanan Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO) modeli Gözlenen Öğrenme Çıktılarının Yapısı olarak da bilinmektedir.

SOLO taksonomisi özellikle öğrenme ortamlarıyla ilişkili olarak farklı konu alanı ve farklı seviyelerdeki öğrencilerin özellikle bilişsel bilgi ve becerilerini değerlendirmeye yönelik bir taksonomidir (Biggs ve Collis, 1991; Çelik, 2007; Lian ve Idris, 2006; Ünal ve Köksal, 2007). Bu taksonomi ilköğretimden üniversiteye kadar farklı alanlarda özellikle öğrencilerin belli bir uyarıcıya verdiği cevapları, niteliği ve yapısı açısından tutarlı bir şekilde yorumlayarak sınıflandırmak için kullanılmaktadır (Pegg ve Tall, 2005). SOLO, Piaget'nin bilişsel gelişim evrelerine (duyusal-motor evre, işlem öncesi evre, somut işlemler evresi, soyut işlemler evresi) benzer beş düşünce evresinden oluşmaktadır. SOLO ile Piaget'nin evreleri arasındaki fark Piaget'nin modelindeki işlem öncesi evresini Biggs ve Collis imgesel evre olarak adlandırmış ve bu evrelere soyut dönem sonrası olarak adlandırılan yeni bir evre daha eklemiş olmalarıdır (Çelik, 2007; Pegg ve Tall, 2004). SOLO modelindeki her bir evre Piaget'nin bilişsel gelişim evrelerindeki gibi kendi özelliğini gösteren mantıksal bir yapıya göre tanımlanmıştır (Biggs ve Collis, 1991; Pegg ve Tall, 2005). Her bir evre kendinden sonraki evre için zemin olup öğrenci tarafından verilecek cevaba destek olacak şekilde hiyerarşiktir (Çelik, 2007; Pegg ve Coady, 1993). Ayrıca her iki modeldeki (SOLO ve Piaget modelleri) evreler yaş durumunu dikkate almıştır. Buna rağmen aynı evrede yer alan çocuklar bazı etkinliklerde farklı evrelerde görülebilir (Biggs ve Collis, 1991; Pegg ve Tall, 2005). Bunun gibi nadiren görülen bazı davranışlar Piaget tarafından "dėcalage" terimi ile ifade edilmiştir (Biggs ve Collis, 1991; Pegg ve Tall, 2005). Piaget'nin modelindeki bu duruma ait olan yetersizliği çözebilmek için Biggs ve Collis bireylerin verdikleri cevaplara yoğunlaşmayı sağlayan SOLO taksonomisini geliştirmişlerdir (Pegg ve Tall, 2005). Bu bağlamda SOLO ve Piaget arasındaki fark

SOLO'nun verilen cevaplara odaklanması olarak belirtilebilir. Aşağıdaki tabloda Piaget ve SOLO modellerindeki evreler karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Tablo 1. Bilişsel Gelişimde Piaget ve SOLO Evrelerinin Karşılaştırılması

Piaget'in Evreleri	SOLO Evreleri
Duyusal Motor (Sensori Motor)	Duyusal Motor (Sensori Motor) (0-18 ay)
İşlem Öncesi (Pire-operational)	İmgesel (İkonic) (18 ay- 6 yaş)
Somut İşlemler (Concreate operational)	Somut Sembolik (Concreate symbolic) (6-14 yaş)
Soyut İşlemler (Formal operational)	Soyut (Formal) (14-20 yaş)
	Soyut Dönem Sonrası (Post formal) (20 yaş-)

Biggs ve Collis'e (1991) göre üniversiteye kadar olan eğitim genelde soyut-sembolik evrede gerçekleşirken, üniversite eğitimi ise genelde soyut evrede gerçekleşir. Bu modele göre bazı istisna yetişkinler soyut evreye hiçbir zaman geçemezken soyut düşünme genelde 14 yaş civarında kazanılmalıdır. Biggs ve Collis'in (1991) modeline göre beş evrenin her biri alt evre ya da düzeylerden oluşmaktadır. Bu düzeyler öğrencinin akıl yürütmesindeki karmaşıklığın yapısal kaymalarını yansıtan bilişsel düzeylerdir ve her bir evre üç bilişsel düzeyi bir döngü halinde içerir. Bu üç düzey: tek yönlü yapı (unistructural), çok yönlü yapı (multistructural) ve ilişkilendirilmiş yapı (relational) olarak adlandırılır (Biggs ve Collis, 1991; Hattie ve Brown, 2004). Buna bağlı olarak iki düzeyin daha var olduğunu savunan Bigss ve Collis (1991) bu beş evrenin her birinin gelişiminin bir önceki evrenin gelişimi ile birlikte devam ettiğini vurgulamaktadır. Savunulan iki düzey bir önceki evre ile ilişkili olan yapı öncesi düzey (prestructural- en düşük seviye) ve bir sonraki evre ile ilişkili olan soyutlanmış yapı (extended abstract- en yüksek seviye) olarak adlandırılmıştır.

Özel olarak matematik öğretiminde cebirsel düşünmeyi gerektiren limit ve süreklilik konularının somut sembolik evrede ve soyut evrede yer aldığı söz konusudur (Çelik, 2007). Ayrıca bu çalışmanın odağında limit-süreklilik konusunun ve meslek yüksekokulu öğrencilerinin yer alması SOLO modelinin kullanımıyla birlikte bu öğrencilerin soyut evrede olduğu varsayımına zemin hazırlamıştır.

Soyut Evre: Soyut kavramların kullanımını temel alan soyut evre, ilkelerin ve teorilerin kullanımına fırsat verir. Birey bu evrede bir kavramı kavrayabilmek için somut nesnelere bundan önceki evrelerdeki kadar ihtiyaç duymamaktadır (Çelik, 2007). Bu evrede bireyler limit ve süreklilik gibi konuları kavrama sürecinde herhangi bir yetersizlikle karşılaştıklarında, bu yetersizliğin temelindeki ilkeleri anlayabilmek için uygulanabilir alternatifler üretebilirler. Bazı bireyler soyut evreyi geliştiremeyebilir. Oysa bu evre genellikle ön lisans ve lisans çalışmalarında gerekli olan soyut düşünme seviyesidir (Biggs ve Collis, 1991; Çelik, 2007). SOLO modelinde öğrenci cevaplarının niteliğinde hiyerarşik bir artma söz konusudur (Biggs ve Collis, 1991). Bu hiyerarşik düzen, öğrencilerin öğrenme derinliği, anlama kaliteleri ve problem çözmeleri hakkında bilgi vermesiyle birlikte değerlendirmeye de yardımcı olan bir sistemdir (Çelik, 2007; Lian ve Idris 2006). İşte bu hiyerarşik sisteme SOLO taksonomisi denilmektedir (Biggs ve Collis, 1991).

SOLO Taksonomisi'nin Hiyerarşik Düşünme Seviyeleri

Bu taksonomi verilecek belli bir görevle ilgili sözlü/yazılı cevapları değerlendirme sürecinde öğrencilerin bilgi ve becerilerine ait düşünme sevilerini tanımlamada kullanılabilir (Çelik, 2007). Ayrıca bu taksonomi öğrencilerin kavramlarla ilgili öğrenmelerini değerlendirmede güçlü bir araç niteliğindedir (Çelik, 2007; Groth ve Bergner, 2006; Lian ve Idris, 2006).

Araştırmanın soruları dikkate alınarak aşağıda SOLO taksonomisinin bundan önce bahsedilen hiyerarşik düşünme seviyeleri açıklanmıştır.

Yapı Öncesi (YÖ) (pre-structural): SOLO taksonomisinin en alt düzeyidir. Bu düzeyde öğrenci çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönlerine daha çok dikkat eder. Çalışmada limit-süreklilik ile ilgili sorulan sorularla ilgilenmektense verilen şekillerle ilgilenilmesi, tabloların karalanması gibi cevaplarda öğrencilerin kendilerine verilen görevle neredeyse hiçbir ilgisi yoktur. Ayrıca yaptıkları daha alt düzeydeki bir evreye aittir.

Tek Yönlü Yapı (TY) (unistructural): Bu düzey verilen göreve veya probleme odaklanmaya çalışan öğrencinin az da olsa anlamaya sahip olduğunu gösterir. Buna rağmen odaklanma, görevin tamamına değil tek bir yönünedir. Örneğin, öğrenci cevapları limit arama sürecinde verilen değeri yerine yazmakla veya elde ettikleri belirsizliğe odaklanmakla sınırlı kalır. Buna benzer cevaplar bütünlüğün içinde tek yönlü odaklanma olup diğer yönlerle ilişkili olmaktan uzak ve sınırlıdır.

Çok Yönlü Yapı (ÇY) (multistructural): Bu düzeyde öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullanır. Öğrenciler limit-süreklilik ile ilgili sorulan soruların cevaplarını verirken kullanmış oldukları bilgi parçaları doğru olmasına rağmen bu bilgi parçalarının nereden geldiği hakkında kesin bir yargıya varamaz. Verilen cevaplar, birleştirici bir unsur kullanılmadan ezbere olduğundan bu bilgi parçaları arasında tutarsızlıklar görülebilir. Böylece öğrenci cevapları birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.

İlişkilendirilmiş Yapı (İY) (relational): Bu düzeyde öğrenci cevaplarında birleştirici unsur ön plana çıkar. Öğrenci limit-süreklilik ile ilgili sorulan sorulardaki her bir yönergeyi dikkate alarak, verdiği cevaplarda belirsizliği, limiti, sürekliliği birbiriyle ilişkilendirebilir. Böyle cevaplar, sorulan sorunun tüm yönlerini ilişkilendirerek bütünün içindeki yeri kavradığından tutarlıdır.

Soyutlanmış Yapı (SY) (extended absract): Bu seviye yeni bir düşünce biçimi olarak kabul edilebilir. Öğrenci bir önceki düzeyin özelliklerine ek olarak, daha ileri düşünüp yeni soyutlamalar yapabilir. Örneğin, öğrenci limit-süreklilik ile ilgili istenilen yönergelerin dışında kendi kendine ürettiği sorulara yanıt arayabilir. Ayrıca verilen sorulardan yola çıkarak genellemelere ulaşabilir. Öğrenci elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir ve verdiği cevaplar genellemeler içerir.

Bu düzeyler arası geçişi incelediğimizde, ÇY'nin TY'den farkı öğrenci cevaplarının birden fazla ilişkili veriyi kullanması olduğunu görmekteyiz. ÇY'de öğrenci rutin işlemleri takip ederek algoritmaları adım adım yürütebilir. ÇY'den İY'ye geçişte öğrenci elindeki verilere daha geniş bir perspektiften bakma becerisi geliştirerek ilişkiler arası sıralama yapabilir. Başarılması en zor olan süreç, İY'den SY'ye düzeyler arası geçiştir. Bu süreçte öğrenci hem geniş bir bakış açısına sahip olabilmeli hem de genellemeler yapıp elindeki içeriğin ötesine çıkarımlarda bulunabilmelidir (Pegg ve Davey, 1998). SY'de öğrenci yeni kavram ve durumlar üretebilir. Yapı öncesi (YÖ) öğrencinin önceki kavram ve durum yapısını gösterirken, soyutlanmış yapı (SY) sonuncu seviye olarak öğrencinin yeni kavram ve durumları oluşturma yeterliliğini göstermektedir. Özetle öğrenmede söz konusu görev için çok düşük bir soyutlama seviyesindeki cevaplar bir önceki evreye aittir ve bu evre YÖ'dür. Eğer cevaplar bir sonraki evre içerisinde yer alabilecek bir soyutlama seviyesinde ise bu bir üstteki evreye geçişi gösterir işte bu evre de SY'dir. Bu bağlamda bu evre, bir sonraki evre için YÖ (ilk seviye) olmaya başlar (Biggs ve Collis, 1991; Çelik, 2007). Bu seviyeler arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda açıklanmıştır.

Tablo 2. Soyut Evrede SOLO Taksonomisinde Düşünme Seviyelerin Gelişimi

	SOLO'da Bilişsel Seviyeler
Yeni Kavram /Durum	Soyutlanmış Yapı (SY)
Mevcut Kavram/Durum	İlişkilendirilmiş Yapı (İY)
	Çok Yönlü Yapı (ÇY)
	Tek Yönlü Yapı (TY)
Önceki Kavram/Durum	Yapı Öncesi (YÖ)

Bu düzeyleri eğitim-öğretim açısından incelersek öğrencilerin bireysel farklılıkları ve almış oldukları eğitimin etkililiğine göre TY, ÇY, İY düzeylerinden herhangi birine çıkabilmesi beklenir. Bu süreçte öğretmenin amacı öğrencilerin durumunu organize edilmemiş ve tutarlı bilginin olmadığı YÖ düzeyden üst düzeylere çıkarabilmektir. Fakat SY düzeyinde yer alan cevaplar doğrudan eğitimin sonucu olarak değerlendirilemez. Bu düzeydeki öğrenmeleri daha ileri taşıyabilmede öğrencilerin sahip olduğu yeteneklerin fonksiyonu ön plandadır (Pegg ve Tall, 2005). Bu bağlamda SY, geleneksel eğitime bağlı olmayıp bireysel yetenekler sonucu oluşan bir düzeydir denilebilir.

Yapılan tüm bu açıklamalar dikkate alındığında SOLO taksonomisinin farklı alanlarla birlikte matematikte de belli kavramlarla ilgili öğrenme durumlarında öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini tanımlamak ve yorumlamak için çokça kullanıldığı anlaşılmaktadır (Çelik, 2007; Groth ve Bergner, 2006; Lian ve Idris, 2006; Pegg ve Coady, 1993; Pegg ve Davey, 1998; Pegg ve Tall, 2005).

Bu çalışmanın temelini matematik öğretiminde cebir konuları içinde yer alan “limit ve süreklilik” kavramları oluşturmaktadır. Yapılan açıklamalar doğrultusunda kavramsal anlamadan söz edilebilmesi için öğrencinin limit ve süreklilik konusundaki durumlara en azından İY seviyesinde cevap verebilmesi beklenmektedir. Çünkü bu seviyede sayısal hesaplamalardan önce öğrenci problemde ne istendiği hakkında açık bir fikre sahiptir. Ayrıca öğrenci konu ile ilgili sembolleri amacına uygun bir şekilde düzenleyerek kullanabilir. Bu durum çalışmanın temelinde yer alan MYO öğrencilerinin BCS ortamında limit-süreklilikle ilgili öğrenmelerinin değerlendirilmesinde ve öğrenci cevaplarında ortaya çıkan anlamanın temelini oluşturan yapıyı tanımlamada SOLO taksonomisi kullanımının uygun olacağını göstermiştir.

1. 1. Araştırmanın Amacı

Matematik eğitiminde geleneksel yaklaşım, öğrenme-öğretme etkinliğini genellikle öğrenci-öğretmen etkileşimiyle bilginin öğrenciye doğrudan aktarılmasıyla gerçekleştirilir. Bu durum yaratılıştan gelen öğrenme yetisini okullarda oluşturulan öğrenme ortamlarıyla sınırlamaktadır. Bu nedenle öğrenme-öğretme etkinliği daha zengin daha geniş ortamlarda düşünülmeli, tasarlanmalı ve uygulanmalıdır (Baki, 2002). Böylece soyut bir yapıya sahip olan matematiğin somutlaştırılmasında matematik öğrenme-öğretme etkinliklerinin ortaya konuş biçiminin önemi ortaya çıkmaktadır.

Sürekliliği özel bir durum olarak içeren limit kavramı, analizin çeşitli dallarında önemli rol oynamaktadır. Limit, matematikteki türev ve integral gibi birçok önemli kavramın kazanılması için bilinmesi gereken en temel kavram olmasına rağmen doğası gereği öğrenciler tarafından her zaman zor anlaşılmıştır. Bu kavramın anlaşılması ve limitle ilgili hesaplamaların yapılmasında, öğrenciler birçok bilişsel zorluklarla karşılaşıp çok az başarı göstermişlerdir (Juter, 2006). Bu bağlamda eğitimciler, eğitim araştırmacıları matematiksel analizin temeli olan limit-süreklilik ile ilgili sahip oldukları bilgi ve becerilerini öğrencilere aktarabilmek için nasıl bir ortam tasarlamalıdır? Tasarlanacak olan ortam öğrencilerin limit-süreklilikle ilgili gözlenen öğrenme çıktılarını değerlendirmede etkili olabilecek mi? Araştırmacı öğretmen bunun gibi sorulara cevap verebilmek için bulunduğu sınıf ortamında tespit ettiği anlaşılması güç olan limit-süreklilik konusuyla ilgili öğrencilerinin gözlenen öğrenme çıktılarını değerlendirmeye yönelik ayrıntılı bir analiz yapmalıdır. Bu analiz sürecinde öğrencilerin limit-süreklilik konusundaki öğrenmelerini derinlemesine değerlendirebilmek için matematiksel düşünme becerileri tanımlanıp yorumlanmalıdır. Böylece her öğrencinin limit-süreklilik kavramları ile ilgili düşünce ve yorumlama süreçleri belirli anlama düzeyleri tanımlanarak oluşturulabilir.

MYO'da matematik derslerini yürüten araştırmacı öğretmen öğrencilerin beklenen soyut evrede olmadığını özellikle limit-süreklilik konusunda kavramsal öğrenmeye sahip olmadıklarını gözlemlemiştir. Bu nedenle BCS'yi bir öğrenme aracı olarak kullanarak bu öğrenciler için etkili ve kavramsal öğrenmeyi sağlayacak bir ortam tasarlayıp uygulamayı düşünmüştür. Bu ortamın etkili olup olmadığını incelemek isteyen araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusunu bu ortamda nasıl öğrendiğine odaklanmıştır.

Yukarıda anlatılanlar ışığında matematik eğitimi ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, temel olarak öğrenilmesinde zorluklar yaşanan matematiksel kavramların öğretilmesi ve öğrenilmesi süreçlerinde yaşanan zorlukların nedenlerini inceleme ve bu zorlukların giderilmesine yönelik çözümler üretme amacıyla neler yapılabileceğine odaklanıldığı görülmektedir. Matematik eğitimi araştırmalarındaki bu genel eğilime paralel olarak bu çalışmanın amacı; bir BCS yazılımının kullanıldığı bu ortamda MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusundaki öğrenmelerini SOLO taksonomisine göre değerlendirmek ve yorumlamaktır.

Bu amaca bağlı olarak çalışmanın araştırma problemi; "BCS ile desteklenmiş öğrenme ortamında MYO öğrencileri limit-süreklilik konularını nasıl öğrenmektedir?" olarak belirlenmiştir. Bu problem çerçevesinde aşağıdaki alt problemlere cevap bulunmaya çalışılmıştır;

1. BCS destekli bir ortamda MYO öğrencilerinin "fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile o noktadaki görüntüsü ile ilgili öğrenmeleri" SOLO taksonomisine göre hangi seviyededir?
2. BCS destekli bir ortamda MYO öğrencilerinin "fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili öğrenmeleri" SOLO taksonomisine göre hangi seviyededir?
3. BCS destekli bir ortamda MYO öğrencilerinin "fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili öğrenmeleri" SOLO taksonomisine göre hangi seviyededir?
4. BCS destekli bir ortamda MYO öğrencilerinin "fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili öğrenmeleri" SOLO taksonomisine göre hangi seviyededir?
5. BCS destekli bir ortamda MYO öğrencilerinin "limit ile süreklilik arasındaki ilişki ile ilgili öğrenmeleri" SOLO taksonomisine göre hangi seviyededir?

Dolayısıyla esas amaç MYO öğrencilerinin bu ortamda ne kadar öğrendiğini / ne öğrendiğini betimlemekten çok nasıl öğrendiklerini anlamaktır. Bu nedenle MYO öğrencilerinin gözlenen öğrenme çıktıları değerlendirilirken ve yorumlanırken SOLO taksonomisi tercih edilmiştir.

SOLO taksonomisinin kullanılmış olması nedeniyle belirlenen araştırma probleminin cevabı aranırken "MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenme çıktıları SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık gelmektedir?" sorusuna odaklanılacaktır. Ayrıca bu çalışma, BCS ile desteklenmiş ortamın limit- süreklilik konusunun öğretiminde MYO öğrencilerinin gelişimine katkıda bulunup bulunmadığını, araştırmacı öğretmen (aksiyon araştırması) yöntemiyle birinci elden verilerle ortaya koymayı amaçlamaktadır.

1. 2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Ezberlenen bilgi zihinde uzun süre muhafaza edilemez. Uzun süre muhafaza edebilmek ve anlamlı öğrenmeyi gerçekleştirebilmek için öğrencilerin ezberden kurtulup önceden öğrenilen kavramlarla sonradan öğrenilen kavramlar arasında bağlantı kurabilmesi gerekir. Bilgisayar destekli eğitim üst düzey düşünme becerisini geliştirerek kavramlar arasındaki bağlantının kurulabilmesinde etkili olup öğrencilerin kavrayarak öğrenmelerine yardımcı olmaktadır (Renshaw ve Taylor, 2000). Ezberlenerek gerçek anlamda öğrenilemeyen bilgi, anlamlı şekilde öğrenildiğinde öğrenilemeyecek olan bilgi birikimi olmaktan çıkar. Senemoğlu (2005), anlamlı bir şekilde öğrenilen bilginin anlamsız olarak öğrenilen bilgiden daha kolay geri getirilebilir, daha kalıcı ve genellenebilir olduğunu ifade etmiştir. Bu da ancak soyut matematiksel kavramların öğretimi sırasında somutlaştırılmasıyla sağlanır. Somutlaştırma sırasında matematiksel kavramları bilgisayar yardımıyla keşfettirmek öğrenmeyi kolaylaştırılabilir (Baki, 1994, 1996).

Matematik eğitiminin durumu hakkında genel olarak anlattıklarımıza özelde ülkemiz açısından baktığımızda, üniversiteye öğrenci seçmek amacı ile uygulanan sınav sisteminin öğrencilerimizi ezber yapmaya yönlendirdiğini görmekteyiz. Bu sınav sisteminin bir sonucu olarak ortaöğretimde öğrencilerin kavramsal öğrenmeye ve derinlemesine akıl yürütmeye gereken özeni gösteremediği açıktır. Bu durum ise öğretmenlerimiz tarafından istenerek ya da istenmeyerek desteklenmek zorundadır. Ülkemizde okulların ve öğretmenlerin başarısını gösteren birinci faktör olarak üniversiteye yerleştirdikleri öğrenci sayısının kabul edilmesi bunun en büyük gerekçesidir. Ortaöğretimde eğitimini tamamlayan öğrencilerin üniversite veya meslek yüksekokullarına yerleşmesi sonucu burada görecekleri matematik öğretiminin en az ortaöğretim kurumlarındaki matematik öğretimi kadar önemli olduğu dikkate alınırsa lisans ve ön lisans programlarında öğretilen matematik konularının kavranabilmesinin gerekliliği ile karşılaşırız. Bu süreçte matematik öğretiminin yapılandırmacı bilgi kuramı temelinde bir öğretime dayandırılması iyileştirme süreci olarak görülebilir. Ayrıca bütün dünyada genel matematik konularının öğretiminde teknoloji desteğinin giderek artması önemli bir yaklaşım olarak görülmektedir.

Son yıllarda teknolojinin gelişmesiyle birlikte eğitim ve öğretimde bilgisayarın ve bilgisayar grafik çizim programlarının kullanımı artmıştır. Bu kullanım sonucu görsel temsillerin, problem çözmede kullanışlı bir araç olarak öğrenmeyi kolaylaştırdığı, öğrenmenin kalıcı olmasını sağlayabildiği, öğrenciler ve öğretmenlerde olumlu tutumlar geliştirdiği görülmüştür (Fischbein, 1987). Aynı zamanda matematik eğitimi ile ilgili topluluklar ve son reform çabaları görsel muhakemenin kullanımını desteklemekte ve cesaretlendirmektedir. NCTM (2000), okul matematiğinde esas ve standartlar adlı raporunda sınıflardaki problem çözme sürecinde çok yönlü tasvirlerin kullanımını önermektedir. Bu öneri “öğrencilerin genelleme ve soyut düşünme becerilerinin gelişmesi” amacını sağlamada teknolojik araçların varlığının önemini ön plana çıkarmaktadır.

Bilindiği gibi çağdaş matematiğin farklı bilim dalları arasında temel oluşturan birkaç alt dalından birisi de analizdir. Üniversitelerin meslek yüksekokullarında da okutulan analiz derslerindeki temel kavramlardan biri de limit ve süreklilikdir. Bu temel kavram türev ve integral kavramlarına geçiş için ilk basamak olarak görülebilir. Dolayısıyla bu süreçte yaşanabilecek bir takım sıkıntılar ileride daha büyük problemleri doğuracaktır. Bu düşünceden hareketle, temel işlem olarak kabul edilen limit ve süreklilik kavramlarının öğretiminin araştırılması gerekli bir konu olarak görülmektedir. Ayrıca Piaget’e göre öğretimin amacı, sadece öğrencilerin davranışlarının yeniden şekillendirilmesi değil, aynı zamanda onların kendi kendilerine keşfetmeleri için uygun ortamların ve uyarıcıların da sunulmasıdır (Atherton, 2002). Bu düşünceden hareketle biz eğitimciler olarak “Öğrencileri temel fikirleri hakkında yeniden düşünmeye sevk edebilmek için öğrencilere nasıl uygun ortamlar oluşturmalıyız?” sorusuna odaklanmalıyız. Bu soruya cevap ararken, özel olarak üniversitelerimizin meslek yüksekokullarında okutulmakta olan genel matematik dersi göz önünde bulundurulmuş ve bu dersin temel konuları niteliğinde olan limit, türev ve integral konularının kavramsal temelini oluşturan limit ve süreklilik kavramlarının öğretimi bu araştırmanın amacı olarak seçilmiştir.

Limit, genel matematik konularında yer alan soyut kavramlardan biridir ve bu konuyu takip eden türev ve integral kavramlarının keşfedilme felsefesi de limite dayanmaktadır. Bu nedenle karşımıza en az limit kavramının kendisi kadar önemli olan bir başka konu çıkar: “Limit-süreklilik öğretimi ve limit-süreklilik öğretiminde kullanılması gereken yöntem”. Bilindiği gibi üniversitelerin meslek yüksekokullarında öğretilmesi gereken ve anlaşılması güç olan konular için “nasıl olsa öğrenciler çalışıp öğrenirler!” görüşü hâkimdir. Bir bakıma öğrenciler kendi yetenek ve motivasyonlarının elverdiği ölçüde öğrenmektedirler. Bu bağlamda bu araştırma ile öğrencilerin limit ve süreklilikle ilgili öğrenmelerini değerlendirebilmek için BCS'lerinden Derive yazılımı ile desteklenmiş bir öğrenme ortamı hazırlanmıştır.

Literatür incelendiğinde gerek yurt içi gerek yurt dışı limit-süreklilik konularının MYO öğrencileri tarafından öğrenilmesinde teknoloji destekli bir öğrenme ortamı hazırlamaya fazla yer verilmemiş olup genelde pür çalışmalara ve limit ile ilgili kavram yanılgılarına yönelik çalışmalar üzerine odaklanılmıştır (Barak, 2007; Bukova, 2006; Çetin, 2009; Foley, 1986; Parks, 1995; Slomer, 1999; Tall ve Schwarzenberger, 1978; Uyhan, 2002).

Bu bağlamda çalışma, bilgisayar destekli öğrenme ortamında BCS'den Derive yazılımı kullanılarak MYO öğrencilerinin limit-süreklilik ile ilgili öğrenmelerini değerlendirebilme amacı ile önem arz etmektedir. Bu açıdan, çalışmada araştırmacı öğretmen yönteminin kullanılması açısından ve öğrencilerin "limit-süreklilik" konusundaki öğrenme çıktılarının değerlendirilmesine ilişkin düşünce evrelerini belirlemede SOLO taksonomisinin kullanımı açısından bu çalışma özgün bir yapıya sahip olacak, benzer çalışmalar ve öğretim uygulamaları için bir başlangıç ve bir yol haritası niteliğine sahip olacaktır.

1. 3. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmanın sınırlılıkları aşağıdaki gibi sıralanmaktadır:

1. Bu araştırma araştırmacı öğretmene kolaylık sağlaması açısından araştırmacı öğretmenin ders anlattığı MYO'nun Bilgisayar Teknolojileri Programcılığı sınıfı öğrencileriyle sınırlı tutulmuştur.
2. Hazırlanan çalışma yaprakları MYO öğrencilerinin öğrenmede zorlandığı ve Tablo.6'da belirtilen kazanımlarla sınırlıdır.
3. MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusunu öğrenebilmelerine ilişkin görüşleri ile ilgili seviyelerin analizi konuya yönelik hazırlanan çalışma yaprakları ve ders sürecinde gerçekleştirilen diyaloglardaki sorular ile sınırlıdır.
4. Hazırlanan öğrenme ortamında pilot çalışma 2010-2011 eğitim öğretim yılının bahar döneminin 7 haftası ile sınırlandırılmıştır.

1. 4. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmanın varsayımları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. BCS destekli ortamda MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarını ciddi bir şekilde yürüttükleri ve soruları cevaplarken samimi oldukları varsayılmıştır.

2. MYO öğrencilerinin ders sürecinde gerçekleşen diyaloglarda gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

1. 5. Tanımlar

MYO: Ülkemizde lisans ve ön lisans düzeyinde eğitim veren Mesleki ve Teknik Eğitim kurumları ile ortaöğretim kurumlarının hedef aldığı istihdam sahaları arasında kalan boşluğu doldurma işlevini yerine getiren üniversite kuruluşlarıdır (Günüç, Odabaşı ve Kuzu, 2012; Karadeniz ve Kelleci, 2015; Karakuş, 2013).

BCS: Matematik ve teknolojinin gelişimine paralel olarak matematiksel işlemleri daha hızlı ve hatasız yapabilen araçlar keşfetme gayretinin bir ürünüdür. Bilgisayar Cebiri Sistemleri yazılımları geleneksel ortamlardan farklı olarak öğrencilerdeki görselleştirmeyi, keşfetmeyi ve matematiksel fikirleri geliştirmeyi amaçlayan güçlendirici bir oyun ortamı oluşturmaktadır. Kısacası öğrencilere sembolik gösterimlerle birlikte grafiksel ve sayısal gösterimlerden yararlanma olanağı sunmaktadır (Laborde, 2001).

SOLO: İleri matematik bağlamında özellikle öğrenme ortamlarıyla ilişkili olarak farklı konu alanı ve farklı seviyelerdeki öğrencilerin özellikle bilişsel bilgi ve becerilerini öğrenme çıktılarıyla değerlendirmeye yönelik bir taksonomidir (Biggs ve Collis, 1991; Çelik, 2007; Lian ve Idris, 2006).

Kavram İmajı: Matematiksel kavramların kendilerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi kapsayan kavram imajı, bireyin söz konusu kavrama ilişkin zihnindeki işlemler, özellikler ve resimler gibi zihinsel yapıların tümünü açıklamak için kullanılmaktadır (Tall ve Vinner, 1981).

2. LİTERATÜR TARAMASI

2. 1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Literatür taramasının bu bölümünde, araştırmada yer alan kavramlara ilişkin literatür ile araştırma konusu ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalara ve bu çalışmaların sonuçlarına yönelik bilgiler sunulmuştur.

2. 1. 1. Araştırmada Yer Alan Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada yer alan kavramlar literatürde yer alan tanımları ile açıklanmıştır.

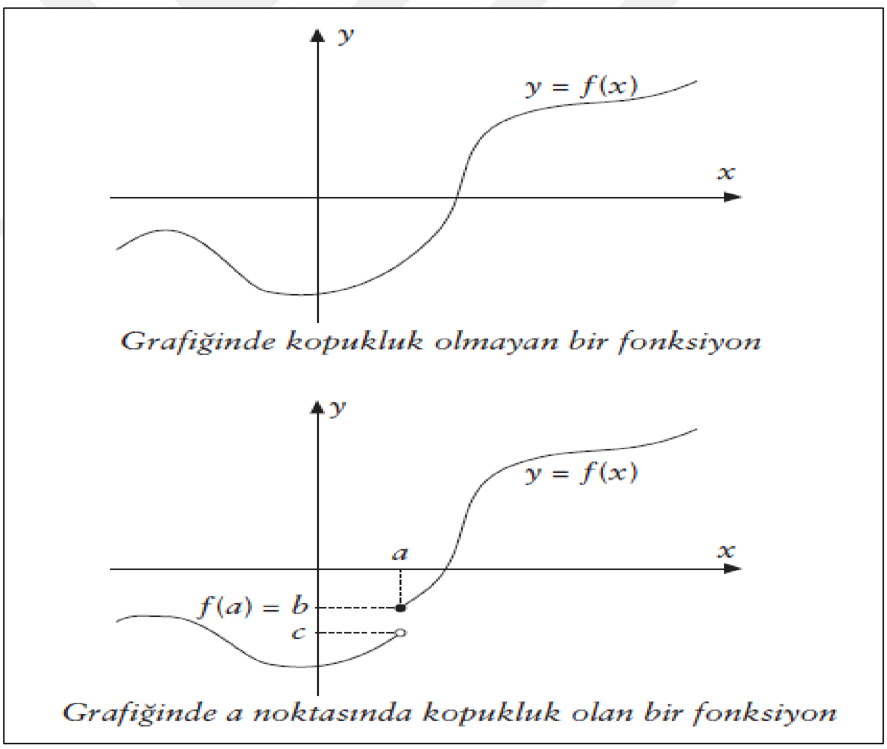
2. 1. 1. 1. Limit-Süreklilik Kavramı

Matematik tarihi sürecinde Euclid ve Archimedes tarafından düzlem geometri bağlamında eğrisel kenarlara sahip şekillerle ilgili teoremlerde kullanılmış olan limit ve süreklilik kavramı, daha sonra günümüz analiz dalını temel alan Newton ve Leibniz'in çalışmalarında yer almıştır. Analiz dersi içerisinde yer alan türev, integral, yaklaşıklık kuramı (approximation theory), Taylor serileri vb. konuların tanımları, ilk kez Cauchy tarafından ortaya konan ve ε-δ tanımı olarak da bilinen limit ve süreklilik kavramının formal tanımı üzerine inşa edilmiştir. Bu sebepten Artigue (2000) limit ve süreklilik kavramını matematiğin analiz dalının her konusuna değinen en temel kavram olarak ifade etmiştir. Sahip olduğu bu öneme karşın matematik öğretiminde yapılan çalışmalar, öğrencilerin cebir ve aritmetiksel metotlar kullanarak sonuca ulaşmada en çok zorlandığı kavramların limit ve süreklilik olduğunu göstermektedir (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Scwinngendorf, Thomas ve Vidakovic, 1996; Przenioslo, 2004; Roh, 2007; Tall ve Vinner, 1981).

Rasyonel fonksiyonların limiti, sürekliliği ve asimptotları ile ilgili üniversite öğrencilerinin anlamalarını araştıran Nair (2010) öğrencilerin belli bir noktada limiti hesaplayabildiklerini fakat sonsuzda limit hesaplamalarında başarısız olduklarını ortaya koymuştur. Bu bağlamda içerisinde sonsuzu (∞) içeren cebirsel işlemler barındırıp öğrencilerin anlamada güçlük çekmesi limit ve sürekliliğin, ileri düzey matematiksel düşünmeye geçiş için temel olduğunu göstermektedir. İleri düzey matematik eğitimine başlayan öğrenciler limit ve sürekliliği dinamik (informal) ve statik (formal) olmak üzere iki şekilde kavramsallaştırmaktadır (Cornu, 1991; Tall ve Vinner, 1981). Dinamik form; Tall ve

Vinner (1981) tarafından tanımlanmış olup “$x \to a \Rightarrow f(x) \to L$” ya da sözel olarak “$x$ ’ler a ’ya yaklaşırken $f(x)$ ’ler L ’ye yaklaşır” ifadesine dayanmaktadır. Matematik otoritelerince kabul edilen statik form ise; “$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır $\exists |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ olur” şeklinde bilinen formal limit tanımıdır. İlgili literatürde öğrencilerin bu iki tanımdan dinamik formu daha kolay kavramsallaştırdığına ulaşılmaktadır (Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991). Bu bağlamda öğrenciler limiti, araştırılan noktaya yakın noktaların fonksiyondaki görüntülerinin nereye yaklaştığını araştırma ya da fonksiyonun grafiği aracılığıyla yaklaşmaları inceleme şeklinde ifade edebilmektedir. Bu duruma biraz da sezgisel olarak yaklaşıp işin içine limit ve sürekliliğin grafiksel karşılığını katacak olursak;

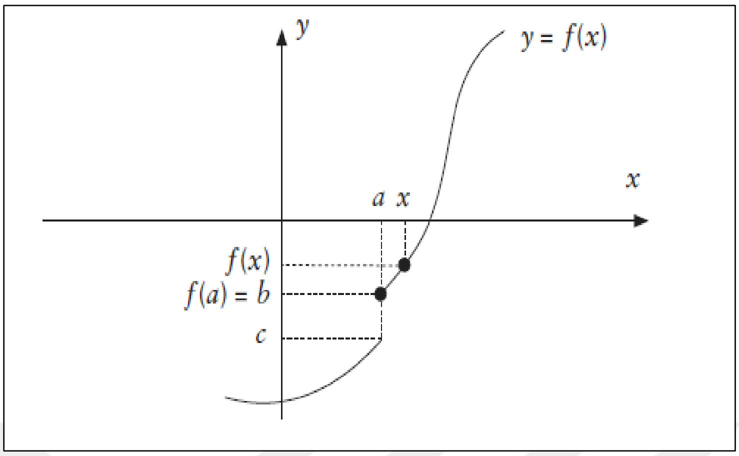
Bazı fonksiyonların grafiğinde kopukluk yoktur, bazılarında ise tam tersine kopukluk vardır.



Şekil 1. Grafiğinde kopukluk olan ve olmayan fonksiyon

Birinci örnekte kopukluk yokken ikinci örnekte a noktasında bir kopukluk vardır. Dolayısıyla grafiği birinci örnekteki gibi olan fonksiyonlara sürekli fonksiyon denirken, grafiği ikinci örnekteki gibi olan fonksiyonlar ise a noktasında kopukluk-sıçrama olduğu için a noktasında süreksizdir denir.

Grafiğinde kopukluk olan “süreksiz” dediğimiz fonksiyonumuzu grafik üzerinde “a” noktası çok az değiştiğinde aldığı değerler doğrultusunda tekrar inceleyelim;

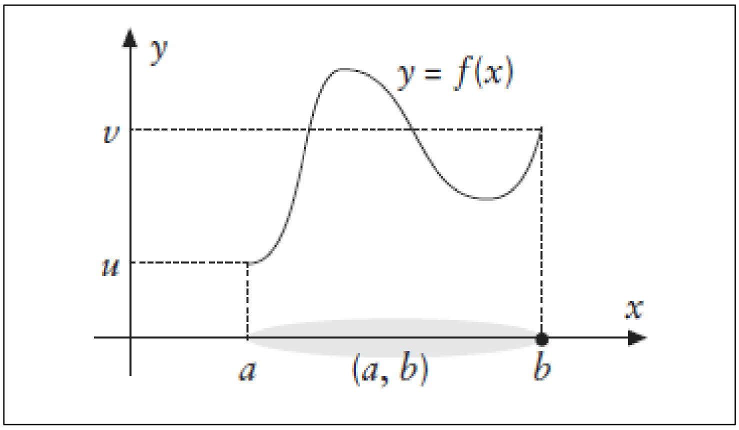


Şekil 2. Grafiğinde “a” noktasında kopukluk olan fonksiyon

Eğer x, a’nın sağında (yani a’dan daha büyük) ve a’ya çok yakınsa, f(x), f(a)’nın yani b’nin çok yakınındadır. Hatta x’i a’nın sağında ve x’e çok çok yakın alarak, f(x) değerini f(a)’ya dilediğimiz kadar yakınlaştırabiliriz. Öte yandan a’ya sol taraftan istediğimiz kadar çok yaklaştığımızda fonksiyon değerleri b’ye değil c’ye çok yaklaşır. Buradan da anlaşılacağı üzere sürekli fonksiyonlarda x yavaş yavaş değişirken f(x) de yavaş yavaş değişir, sürekli olmayan fonksiyonlarda ise x a’nın solundan sağına ya da sağından soluna geçerken bir sıçrama yaşar. Sezgisel ve grafiksel olarak tanımladığımız sürekliliğin matematiksel ifadesi ise; “$\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ $\forall x\in A$ $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$” şeklindedir. “Sürekliliğin” matematiksel formunun “limit” tanımının statik formuna benzediği açıktır. Buradan anlaşılacağı üzere limit ve süreklilik birbirini tamamlayan iki kavramdır.

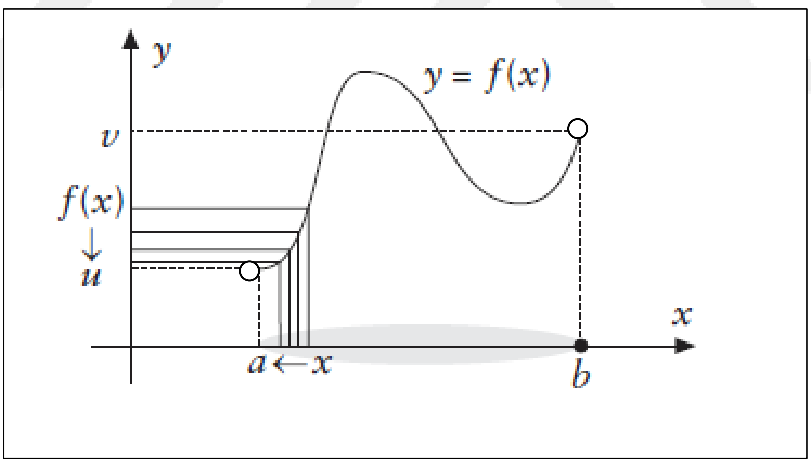
Yukarıda dinamik ve statik formunu verdiğimiz “limit” tanımını da “süreklilik” tanımdan yola çıkıp sezgisel ve grafiksel olarak yorumlayacak olursak;

"f" bir fonksiyon olsun o halde “x, a’ya yaklaştığında, f(x)’in limiti” dediğimiz şey aslında “x, a’ya çok çok yaklaştığında, f(x)’in belli bir sayıya çok çok yakın olup olmayacağı, oluyorsa hangi sayıya çok çok yakın olacağı”nı irdelemekle eşdeğerdir. Grafiği aşağıdaki gibi olan $f:(a,b)\rightarrow R$ fonksiyonunu incelersek;



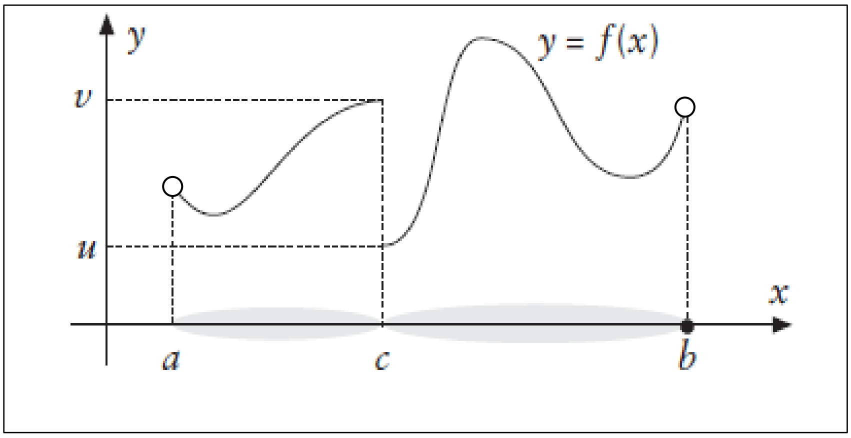
Şekil 3. f : (a,b) → R fonksiyonu grafiği

Bu fonksiyon (a,b) açık aralığında tanımlanmış fakat a ve b noktalarında tanımlanmamış olup f(a) ve f(b) diye bir değer yoktur. Oysa grafiği incelediğimizde f(a)'nın u olarak, f(b)'nin ise v olarak tanımlanması gerektiği görülmektedir. Çünkü (a,b) aralığındaki bir x sayısı a'ya doğru hareket ettirildiğinde f(x) değeri de u'ya doğru hareket ediyor ve u'ya çok yaklaşıyor. Bu durum aşağıdaki grafikte daha açıklayıcıdır (Şekil 4).



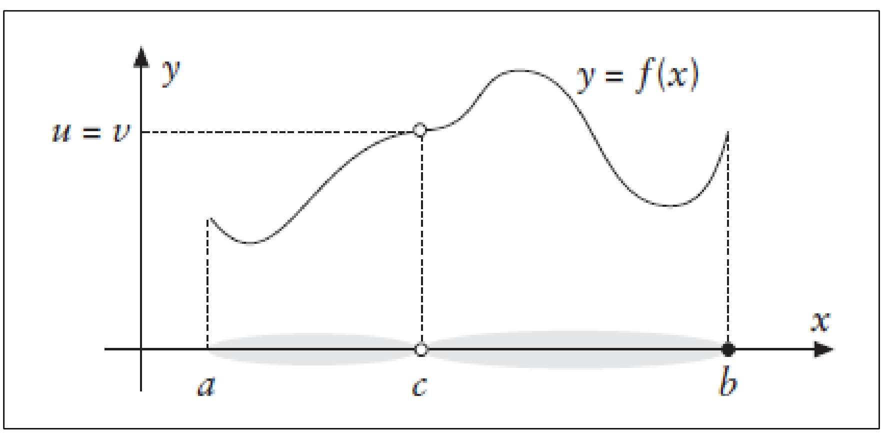
Şekil 4. f : (a,b) → R fonksiyonunda x'in a'ya yakınsaması

Bu duruma benzer olarak başka bir fonksiyon "$a < c < b$ ve $f: [a, b]\backslash\{c\} \rightarrow R$" grafiğini ele alalım (Şekil-5).



Şekil 5. “a < c < b ve f: [a,b]\{c} → R” fonksiyonu grafiği

Bu fonksiyon “c” noktasında tanımlanmamış oysa “c” noktasının sağında ve solunda tanımlamış. Fonksiyonda x, c’ye küçük değerlerden yaklaştığında, f(x) değeri v’ye yaklaşırken, c’ye büyük değerlerden yaklaşırken f(x) değerinin u’ya yaklaştığı görülmektedir. Oysa $u \neq v$ olduğundan, x c’ye yaklaştığında, f(x)’in sabit bir sayıya yaklaştığı söylenemez. Bu durumda f’nin c’de tanımlanmamış olması ve limitinin olmaması doğaldır. Ancak fonksiyonun grafiği Şekil-6’daki gibi $(u = v)$ olsaydı o zaman f fonksiyonunun c’deki değeri doğal olarak f(c) olarak tanımlayabilirdik.



Şekil 6. “a < c < b ve f: [a,b] \ {c} → R ” fonksiyonunda “u = v” durumunun grafiği

Şekil-6’da c noktası her ne kadar $[a, b]\backslash\{c\}$ kümesinde tanımlı olmasa da bu nokta fonksiyonun bir yoğunlaşma noktası olup x, c’ye giderken fonksiyonun limiti incelenebilir. Böylece limiti incelenecek olan sayının fonksiyonun tanım kümesinde olma zorunluluğu yoktur. Fonksiyonda x, c’ye küçük değerlerden yaklaştığında, f(x) değeri u=v’ye yaklaşırken, c’ye büyük değerlerden yaklaşırken f(x) değerinin u=v’ye yaklaştığı görülmektedir. O halde burada limitin varlığından söz edilebilir. Fakat "$f(c) \neq (u = v)$" olduğundan bu fonksiyon c noktasında sürekli olmayacaktır.

Buraya kadar değinilen içerik, limit ve sürekliliğin matematiksel tanımına sezgisel olarak yaklaşımı ele almıştır. Bu yaklaşım MYO öğrencileri için “grafiksel (görsel) ve dinamik limit-süreklilik tanımı” olarak isimlendirilecektir. Öğrencilerin formal olarak limit ve sürekliliği kavramsallaştırmada zorlandıklarına ve formal tanımı formül olarak ele aldıklarına ilgili literatürde yer verilmiştir (Przenioslo, 2004; Tall ve Vinner, 1981). Öğrencilerin özel olarak MYO öğrencilerinin matematiksel notasyonlarla kavramsallaştırmada güçlük çektiği limit-süreklilik konusu sezgisel yaklaşımlar yoluyla dinamik ortamlarda grafiksel (görsel) çalışmalarla limit-sürekliliği kavramsallaştırarak öğrenmeleri şeklinde değerlendirilecektir.

2. 1. 1. 2. Kavram İmajı

Matematiksel kavramların kendilerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi kapsayan kavram imajı, bireyin söz konusu kavrama ilişkin zihnindeki işlemler, özellikler ve resimler gibi zihinsel yapıların tümünü açıklamak için kullanılmaktadır (Tall ve Vinner, 1981). Kavram tanımı ise matematiksel kavramı anlatmak için kullanılan kelimeler topluluğu olmakla birlikte matematiksel ifadeler (formal) veya bireyin kendi ifadeleri (informal) şekilde olabilir. Buradan da anlaşılacağı üzere her bireyin kendi açıklamasının olması matematiksel kavrama ilişkin birbirinden farklı kavram imajlarını ve kavram tanımlarını ortaya çıkarmaktadır. Ayrıca birey matematiksel kavramı oluştururken kavram imajı ve kavram tanımı arasında ilişki kurabileceği gibi sadece kavram tanımını ya da kavram imajını kullanabilir (Vinner, 1991). Oysa öğrenmenin gerçekleşebilmesinde kavram tanımı ve kavram imajı arasında ilişki kurulması durumu önemlidir. Eğer bireyin kavram tanımı ile kavram imajı çelişirse bireyde zihinsel ikilem meydana gerlir ki bu durum Tall ve Vinner (1981) tarafından “potansiyel çelişki faktörü” olarak tanımlanmıştır. Örneğin bir öğrencinin limit kavramına yönelik kavram imajı içerisinde kavrama ilişkin tanımı, fonksiyonun bir noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsü olarak mevcut olsun. Öğrenciye $\lim_{x\to\infty} x.sin\frac{2}{x}$ limiti sorulduğunda öğrenci sonsuzu sayı olarak algılayıp fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü alarak bulacağı değerin limit olacağı sonucuna ulaşabilir. Başka bir örnek olarak öğrencilerin limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırdıkları, limit araştırmalarında fonksiyonu tanımsız yapan bir değer olup olmadığına bakmaları ile açıklanabilir.

Bu durumda sonsuz, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının limit-süreklilik kavramlarının öğrenilmesinde oldukça önemli olduğu ortaya çıktığı gibi öğrencinin kavram imajında bulunan tanımın potansiyel bir çelişki olduğu da açıktır. Bu çelişki ise ilerideki öğrenme süreçlerinde olumsuz rol oynayacaktır. Dolayısıyla bireyin kavram imajı ve kavram tanımı formal bilgiyle ne kadar tutarlıysa, limit-süreklilik kavramına yönelik öğrenmesi de o denli iyi olarak nitelendirilebilir.

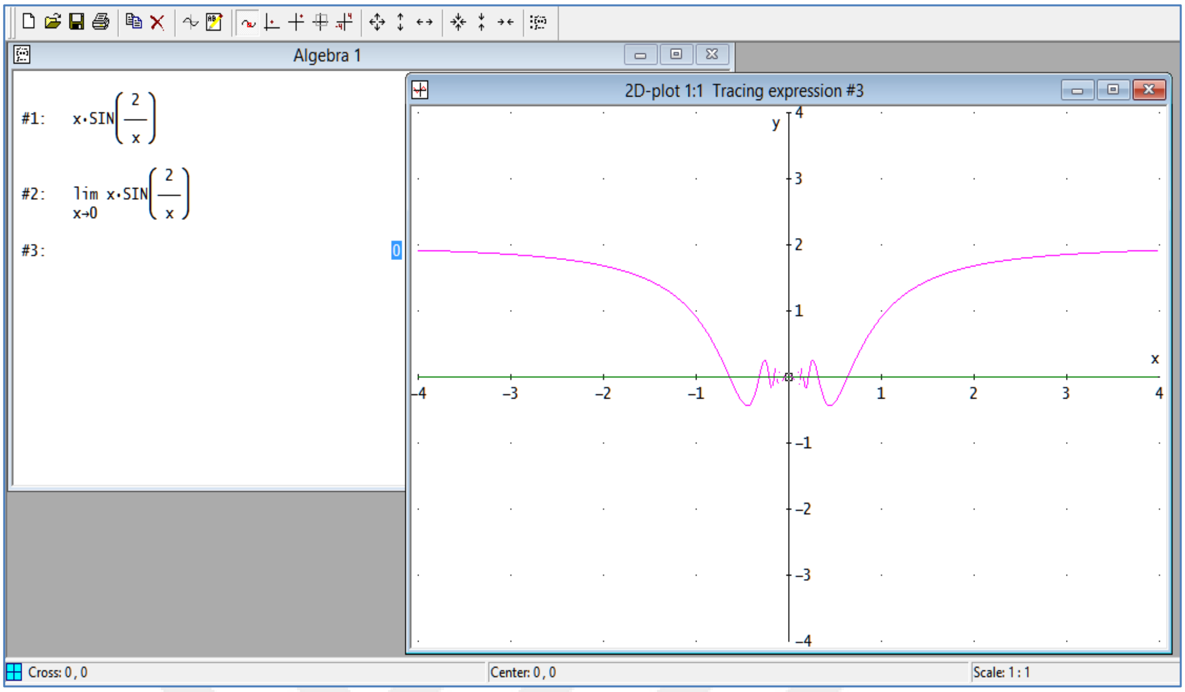
2. 1. 1. 3. Matematik Öğretiminde BCS

Matematik ve teknolojinin gelişimine paralel olarak matematiksel işlemleri daha hızlı ve hatasız yapabilen araçlar keşfetme gayretinin bir ürünü olan Bilgisayar Cebiri Sistemleri, matematikçiler için matematiksel kavramlar ve problemler ile zihinlerinde yaptıkları savaşlarda kullanabilecekleri güçlü bir silah olmuştur. Böylece matematikçiler, temel aritmetik işlemlerin yanı sıra matematiksel fonksiyonların sayısal değerlerinin ve limitinin hesaplanması, polinomların köklerinin bulunması, sayısal integrasyon ve matrislerin sayısal öz-değerlerinin hesaplanması, özellikle de kağıt-kalem ortamında oluşturulması imkansız grafikleri analiz edebilir hale gelmiştir. BCS'leri sadece sayısal-sembolik hesaplamayı ve grafik çizimini kolaylaştırmamış aynı zamanda matematik dersinin temel amacını yani matematiksel kavramları anlamaya, matematiksel düşünme gücü kazanmaya olanak sunmuştur. Geleneksel eğitim yaklaşımında matematik öğretiminin "algoritma" merkezli olduğunu belirtip algoritmaların uygulamalarını öğrenen öğrencilere "zanaatkâr" benzetmesi yapan Kokol-Voljc (2000) bu benzetmesiyle BCS kullanımının matematik öğretimindeki hedefleri etkilediğini "ağaca tırmanırken niçin tırmandığımızı unutmamalıyız" ifadesi ile açıklamaya çalışmıştır.

Matematik eğitimi ile kazanılan matematiksel akıl yürütme ve kanıtlama becerileri hemen her alanda bireylerin düşüncelerinin gelişimi ve biçimlenmesi için önemli bir araçtır. Bu kapsamında BCS ortamlarının, öğrencilere sembollerle çalışmanın yanı sıra bu sembolleri çeşitli durumları temsil etmek için kullanabilme, sembolleri yorumlayabilme ve sembollerle akıl yürütebilme, kısacası soyut düşünebilme becerilerini geliştirmelerine fırsat sunduğu açıktır. Ayrıca BCS ortamları geleneksel ortamlardan farklı olarak öğrencilerdeki görselleştirmeyi, keşfetmeyi ve matematiksel fikirleri geliştirmeyi amaçlayan güçlendirici bir oyun ortamı oluşturmaktadır. Kısacası öğrencilere sembolik gösterimlerle birlikte grafiksel ve sayısal gösterimlerden yararlanma olanağı sunmaktadır (Laborde, 2001).

İşte bu anlamda yapılan bu çalışmanın da dahil olduğu BCS yazılımlarının kullanıldığı çalışmaların ilgilendiği problemlerden biri bilgisayar destekli öğrenme ortamlarında öğrencilerin matematiksel konulara ilişkin soyut düşünme becerilerinin nasıl geliştirilebileceğidir. Tabi burada bireyin matematiksel kavramlara ilişkin anlaması öğrenme ortamına ve eylemlerine bağlı olmakla beraber bu eylemlere konu olan kavramlar ve öğretim somut olmak zorunda değildir. Dolayısıyla BCS yazılımlarının kullanıldığı öğrenme ortamları öğrencilerin kendi eylemlerinin üzerinde soyut düşünmelerine olanak vermelidir. Örneğin, verilen noktada belirsiz olan bir fonksiyonun limitini ve sürekliliğinin incelenmesini ele alalım. Geleneksel öğrenme ortamında bu durum genellikle tahta üzerinde hazır verilen teoremler ve formüller doğrultusunda öğrencilere sunulması ve ezberletilmesi ile gerçekleşir. Böylece bilginin kaynağı öğretmen öğrencilerin bu bilgiyi öğrendiğini düşünmektedir. Oysa bilgiyi alan öğrenci ezberlediği bilgi parçalarını benzer problem durumlarına uyarlamaktan öteye gidemeyecek olup soyut düşünme becerisini geliştiremeyecektir. İşte bu anlamda BCS yazılımlarının kullanıldığı ortamlar, öğrencilerin matematiksel kavrama ilişkin öğrenmelerinde kendi eylemleri üzerine yeni inşalar yapmalarına fırsat sunmaktadır. Bu çalışmada yukarıda ifade ettiğimiz “verilen noktada belirsiz olan bir fonksiyonun limitini ve sürekliliğinin incelenmesi” ilişkisini öğrencilerin kazanması amacıyla oluşturulan çalışma yaprağının bilgisayar ekran görüntüsü Şekil 7’de görülmektedir.

BCS yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamında öğrenciler kullandıkları yazılım menüsünde öncelikli olarak gerekli cebirsel (limit bulma) işlemleri yaptıktan sonra grafik çizme “2D-plot Window” menüsü ile grafik çizimi yapabilmekte ve grafiğin sol üst menüsünde yer alan “Trace Plots” yardımıyla grafik üzerinde hareket edebilmekte ve x=0 noktasına grafik üzerinde yaklaştıkça foksiyonun aldığı değerlerin değişimini grafik menüsünde bulunan Cross: 0,0; Center: 0,0 ve Scale: 1:1’den görebilmektedir. Çalışma yaprağı içerisinde yer alan yönergeler vasıtasıyla MYO öğrencilerinin ilk olarak ∞’da $\infty.0$ belirsizliği olan $f(x) := x.\sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunun limitini cebirsel işlem menüsü yardımıyla 2 olarak bulmaları amaçlanmıştır. Devamında öğrencilerin, grafik çizme menüsü yardımıyla verilen fonksiyonun grafiğini çizip “trace plots” yardımıyla grafik üzerinde değişimi incelerken fonksiyonun yoğunlaşma noktası olan x=0 noktasını incelemeleri bu noktadaki limiti bulup sürekliliği incelemeleri hedeflenmiştir. Son aşamada ise, MYO öğrencilerinin cebirsel ve dinamik olarak yaptıkları çalışmalar sonucunda soyut düşünme becerilerini geliştirip, fonksiyonun belirsiz olduğu noktalarda limitinin varlığından söz edilebilmesine rağmen süreklilikten bahsedilemeyeceğine yönelik elde ettikleri sonuçlara formel bir kimlik kazandırmaları amaçlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin görsel olarak inceledikleri fonksiyonun belirsizlik ve limit-süreklilik durumunu ilişkilendirerek zihinlerinde dinamik yapıda oluşması amaçlanmıştır.



Şekil 7. Verilen noktada belirsiz olan bir fonksiyonun limiti ve sürekliliğinin incelenmesi için hazırlanan çalışma yaprağının öğrenme ortamındaki BCS görüntüsü

Bu çalışma kapsamında BCS yazılımlarından Derive yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamında ele alınan limit-süreklilik konusuna ilişkin hazırlanan tüm çalışma yapraklarında, araştırmacı öğretmenin yeteneği ölçüsünde, yukarıda örneklendirildiği gibi öğrencilerin geliştirecekleri anlamaları kendi eylemleri üzerine inşa etme fırsatı sunulmaya çalışmıştır.

2. 1. 1. 4. MYO'da Matematik Öğretimi

Matematik, bilimde olduğu kadar günlük yaşamımızdaki problemlerin çözülmesinde kullandığımız önemli araçlardan biridir. Bu öneminden dolayı matematikle ilgili davranışlar okul öncesi eğitim programlarından yükseköğretim programlarına kadar her düzeyde ve her alanda yer almaktadır. Matematik dersinin mantık ve düşünmeye yön veren özelliklerin gelişmesinde etkili olması, bireyler tarafından kazanılması gereken mesleki gelişim açısından önemli görülmektedir. Mesleki gelişim yeterliğine sahip olan birey, nitelikli iş gücü sayesinde iyi bir performans sergilemenin yanı sıra düşünen, öğrenen ve üretendir. Nitelikli iş gücüne sahip olmanın yolu ise iyi planlanmış mesleki eğitimle mümkündür. Bu anlamda lisans ve ön lisans düzeyinde eğitim veren Mesleki ve Teknik Eğitim kurumları ile ortaöğretim kurumlarının hedef aldığı istihdam sahaları arasında kalan boşluğu doldurma işlevini yerine getiren üniversitelerin Meslek Yüksekokullarına önemli rol düşmektedir (Günüç, Odabaşı ve Kuzu, 2012; Karadeniz ve Kelleci, 2015; Karakuş, 2013).

Mesleki ve Teknik Eğitim Sistemi yükseköğrenimde iki yıllık Meslek yüksekokulları ve dört yıllık mesleki ve teknik eğitim fakülteleri aracılığıyla yürütülmektedir. Ülkemizde 1933 yılında 2287 sayılı kanunla Mesleki ve Teknik Öğretim Genel Müdürlüğü, 1941 yılında Bakanlık Merkez Örgütü Kanunu'nun 4113 sayılı kanunuyla, değiştirilerek Mesleki ve Teknik Öğretim Müsteşarlığı kurulmuştur (Karadeniz ve Kelleci, 2015). Meslek ve Teknik Eğitim Sistem'inin en önemli aşamalarından olan Meslek Yüksekokulları sanayi, ticaret ve hizmet sektörlerine yeterli bilgi ve beceriyle donanmış ara eleman yetiştirmek amacıyla kurulmuştur. Böylece nitelikli eleman yetiştirmenin ve elemanların soyut düşünme becerilerinin önemi ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda düşünmeyi geliştirdiği bilinen matematik öğretimi ve öğrenimi önem kazanmaktadır. Bu önem doğrultusunda ülkemizde ortaöğretim eğitimini tamamlayıp üniversite giriş sınavında başarı gösteren öğrencilerin %40'lık diliminin ön lisans programlarına devam ettiği düşünüldüğünde üniversitelerimizin meslek yüksekokullarında okutulmakta olan genel matematik dersinin içeriğinde yer alan kavramların öğretiminin ele alınması kaçınılmazdır. Bu doğrultuda soyut bir yapıya sahip olan matematiğin öğrenme ve öğretilmesinde yenilikler yapılarak somutlaştırılması gerektiği vurgulanmıştır (Akbulut ve Işık, 2005). Bu durum matematik öğrenme-öğretme etkinliklerinin ortaya konuş biçiminin ne kadar önemli olduğunu göstermektedir. Oysa ortaöğretim kurumlarının son sınıf müfredatı içerisinde yer almasına rağmen üniversiteye giriş sınavına hazırlanma kaygısıyla kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiği görülen limit-süreklilik kavramları için bu önemin dikkate alınmadığı görülmektedir. Örneğin; sonsuzluğu bir sayı olarak algılayan MYO öğrencileri belirsiz olan bir fonksiyonun sürekli olabileceğini düşünmektedir. Ayrıca ortaöğretimi bitirinceye kadar fonksiyon grafiği incelemeyen MYO öğrencileri formal olarak tanımlanan limit-süreklilik kavramlarını işlemsel olarak karşılaştıkları herhangi bir probleme uyarlamakta da zorluk çekmektedir. Açıkçası öğrenciler ezberledikleri bilgi parçalarını bile yeterli düzeyde anlamlandıramamaktadır.

Buradan anlaşıldığı üzere bu çalışma kapsamında araştırmacı öğretmen yeteneği ölçüsünde, Meslek Yüksekokullarında okutulan ve kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiğini gözlemlediği genel matematiğin temel konuları niteliğinde olan limit, türev ve integral konularının kavramsal temelini oluşturan limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin tasarladığı bilgisayar destekli öğrenme ortamında öğrencilerin soyut düşünme becerilerini geliştirmeye çalışmıştır.

2. 1. 1. 5. BCS ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Çağımızda hızla gelişen bilim ve teknoloji, eğitimin her alanını belli düzeylerde etkilemiş ve eğitim yaklaşımlarında yenilikleri zorunlu kılmıştır. Matematik eğitimi için geliştirilen bilgisayar yazılımları bu yeniliklere örnek olup matematik araştırmacıları bireysel olarak genel matematikteki birçok kavram hakkında BCS teknolojisinin kullanımı ile ilgili çalışmalar yürütmüşlerdir. Bu bölümde literatürde matematik öğretiminde BCS kullanımını konu alan bazı araştırmalar özetlenecektir.

1984, 1988, 1997 ve 2002 yıllarında genel matematik derslerinde teknoloji kullanımını inceleyen ilk araştırmacılardan olan Heid, 1984 yılındaki çalışmasında BCS'nin kullanıldığı uygulamalı genel matematik dersinde öğrencilerin uygulamalarda odaklandıkları rutin sembolik işlemleri gerçekleştirebilmelerini incelemiştir. 12 haftalık çalışma sürecinde geleneksel yöntemle öğretimin yapıldığı bir sınıfla bir BCS olan muMATH ile öğretimin yapıldığı sınıf karşılaştırılmıştır. Daha sonra kavramsal sorular karşılaştırılarak mülakatlar çözümlenmiş, final sınavları incelenmiş ve veriler toplanmıştır. Çalışma sonucunda deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubundaki öğrencilere göre genel matematik kavramları hakkında daha detaylı ve daha rahat bir şekilde konuştuklarını böylece deney grubundaki öğrencilerin genel matematik kavramlarını anlamada daha başarılı olduklarını belirtmiştir. Bu bağlamda Heid bilgisayarın problem durumlarının incelenmesine bir esneklik verdiğini vurgulamıştır. 1988 yılında yapmış olduğu çalışmasında genel matematiğin temelini oluşturan kavramların araştırılmasında bilgisayarı bir araç olarak kullanmıştır. 15 hafta süren bu çalışmasında iki sınıfa da genel matematik dersi anlatan Heid, deney grubunda on iki hafta boyunca kavram gelişimi, sonraki üç hafta da beceriler çalışmıştır. Kontrol grubunda ise on beş hafta boyunca beceriler çalışmıştır. Bu süreç sonunda deney grubu öğrencilerinin kavramları öğrenmeleri ve rutin becerileri geliştirebilmelerinin kontrol grubu öğrencilerine göre daha iyi olduğunu gözlemlemiştir. Heid bu sonuçları dikkate alarak genel matematiğin öğretimdeki sıralamanın yeniden düzenlenmesi ve öğretim sürecinde kavramsal anlamaya öncelik verilmesinin öğrencilerin genel matematik kavramlarını anlayabilmelerine etken olacağına ulaşmıştır. Öğrenciler bu çalışmada kullanılan BCS sayesinde akıl yürütme becerilerini geliştirerek kendilerine olan güvenlerinin arttığını belirtmişlerdir. Böylece işlem yükü hafifleyen öğrenciler problem çözmenin daha genel yönlerine odaklanabilmiştir. Yine Heid 1997 ve 2002 yıllarında yaptığı çalışmalarda "Teknoloji bize, öğrencilerimizin matematiksel anlayışlarını geliştirmemiz ve onlara yeni kapılar açabilmemiz için çeşitli fırsatlar sumaktadır" diyerek BCS'ne karşı olan şu görüşleri tartışmıştır:

1. Elle yapılan sembolik hesaplamalardaki yeteneği BCS azaltmaktadır.
2. Yapılan standart sınavlarda sembolik hesaplamalarda BCS kullanılmadığı için orta öğretimde kullanılmasına izin verilmemelidir.
3. Yeni müfredat tam cevapların ve sembolik çalışmanın önemini düşürmektedir.
4. Kullanılması zor olan BCS ayrıca pahalıdır.

Bu tartışmaların sonucunda bilgisayarların işlemsel beceriler üzerinde ustalık kazanma üzerine harcanan zamanı ve dikkati azalttığını, böylece problem durumlarının incelenmesine bir esneklik verdiğini ve deney grubu öğrencilerinin genel matematik kavramları hakkında daha detaylı, rahat ve büyük bir netlikle konuştuklarını belirtmiştir. Heid'in yukarıda özetlenen çalışmaları aslında kullanılan yazılımın uygun ortamda, uygun konu eşliğinde, etkili şekilde kullanımının önemini ortaya çıkarmıştır.

Matematikteki kavramların çoğunun üç yolla sunulması gerektiğini savunan Huges – Hallet (1991) matematik kavramlarının anlaşılması için teknoloji ile birlikte çoklu gösterimlerin kullanımının önemine vurgu yapan Harvard Core Calculus projesinde bu üç yolun teknolojinin kullanımı ile birlikte grafiksel, sayısal ve cebirsel gösterim olduğunu savunmuştur. "Üç Kural" olarak da bilinen bu projenin beş büyük hamlesi vardır bunlar:

1. İşlemsel beceriler üzerindeki mevcut strese vurgu yapabilmek için kavramlardaki görsel yorumlar, düşüncelerdeki sayısal yorumlar ve geleneksel işlemsel yaklaşımlar arasında bir denge oluşturulmuştur.
2. Modern matematiksel fikirlere daha çok vurgu yapılmıştır.
3. Öğrencilerin anlamalarını geliştirmek amacı ile genel matematikteki kavramlara uygun teknolojilerin (bilgisayar, BSC ve hesap makineleri) kullanımı dahil edilmiştir.
4. Genel matematikteki kavramlara ve yöntemlere daha sezgisel bir yaklaşım yapılarak öğrencilerin anlaması geliştirilmeye çalışılmıştır.
5. Geniş çapta daha gerçekçi uygulamalar içerebilmesi için matematiğin diğer alanlardaki modern uygulamalarına yer verilmiştir.

Dubsinky ve Schwingendorf tarafından 2004 yılında yürütülen ve C4L (The Calculus, Concepts, Computer ve Cooperative Learning Program) adı verilen proje kapsamında yapılandırmacı teori perspektifinde matematiğin nasıl öğrenileceğini temel alan pedagojik bir yaklaşım yer almaktadır. Projenin öğretim tasarımı ACE (etkinlikler, sınıf, alıştırmalar) döngüsüne dayandırılmıştır. Bu döngüye göre *Etkinlikler*; her ünite öğrencilerin bilgisayar ortamındaki etkinlikleri ile başlar ve öğrenci keşfetme çalışmalarında dikkatli seçilmiş bilgisayar etkinlikleri ile matematiksel kavramları zihinsel olarak yapılandırır. *Sınıf;* laboratuvar ortamından sonra sınıf ortamına geçen öğrenciler bilgisayar ortamında edindikleri tecrübeleri yapılandırmaya çalışır. *Alıştırmalar;*

öğrencilerin ilk iki adımda kazandıkları bilgileri zorlayacak klasik alıştırmalar verilir. Bu proje öğrencinin nasıl öğrendiğini, kavramsal anlamanın önemli olduğu kadar hesaplamaların da önemli olduğu, işbirlikçi öğrenmenin matematik öğrenme için doğru bir bağlam olduğu, interaktif sınıf ortamında probleme dayalı çalışmalar yapılması gerekliliği ve ders kitaplarının yapısının pedagojik stratejiyi desteklemesi gerekliliği dikkate alınarak yürütülmüştür. Sonuç olarak proje geliştiricileri işlemsel becerilerden çok kavramsal gelişime önem verilmesi gerekliliğini belirterek proje kapsamında öğrencilerin kavramsal anlamalarının teknoloji kullanımı ile geliştirilebileceğini belirtmişlerdir.

Başka bir projede Minnesota Üniversitesi'nde Kahng Byungik tarafından yönetilen ve 2005 Mayıs ayında başlayıp 2007 Ocak ayında biten Bilgisayar Destekli Genel Matematik Öğretimi Projesi kapsamında Genel Matematik I, Genel Matematik II ve Genel Matematik III derslerinin konuları ele alınmıştır. Bu konuların öğretiminde etkileşimli mathematica çalışma sayfaları modüller şeklinde hazırlanıp öğretim bu kapsamda planlanmış olup proje sonunda aşağıdaki önemli noktalar olumlu yönde değerlendirilmiştir:

1. Sınıf ortamında modüller kullanılabiliyor mu?
2. Bu modüller öğrencilere farklı bakış açıları ve anlayışlar kazandırabiliyor mu? Öğrencilerin karmaşık problemleri gerçekçi şekilde modellemesine yardımcı oluyor mu?
3. Öğrenciler bu süreçte aşırı derecede vakit ayırmak zorunda kalıyor mu?
4. Hazırlanan çalışma sayfalarının yeniden düzenlenmesi veya bazı bölümlerinin atlanması gerektiğinde kısacası küçük parçalar halinde kullanımında güçlükler yaşanıyor mu?

2005 yılında Hyang ve Young-Mi, bir üniversitedeki matematik dersinde teknolojiyi kullanmaya dair birisi; birim çemberin alanını çokgenler yardımıyla ve Reimann toplamlarının kullanımı ile hesaplama olan üç model örneği vermiştir. Ayrıca deneysel tarzda yürütülen çalışmaların sonucunda BCS destekli öğretime tabi tutulan öğrenci gruplarının istatistiksel olarak anlamlı derecede daha iyi bir matematiksel performans sergilediklerine ve matematiğe karşı tutumların anlamlı derecede arttığına ulaşmış olup BCS'nin matematik öğretimindeki önemine vurgu yapmıştır.

Cunningham ve Zimmermann (1991), bilgisayar yazılımı kullanmanın matematik derslerindeki başarısını incelemek üzere deney-kontrol gruplu, ön test-son test desenli çalışmasında, öğrencilerin matematik hesaplamalarındaki ve hesaplama becerilerindeki performanslarını karşılaştırarak, yazılım kullanmanın başarıyı arttırdığı sonucuna ulaşmıştır.

Palmiter (1991), doktora tezinin paralelinde yaptığı BCS (MACYSMA) destekli genel matematik öğretimi (integral tanımı ve uygulamaları) çalışmasında 40 lisans öğrencisini deney grubu olarak alıp beş hafta boyunca BCS destekli öğretim yapmıştır. Bu süreçte öğrenciler BCS'yi matematik öğretimi ile ilgili işlemleri yapmak için kullanmışlardır. 40 öğrenciden oluşan kontrol grubunda ise on hafta boyunca geleneksel yöntemle öğretim yapılmıştır. Bu gruptaki öğrenciler hesaplama işlemlerinde kağıt-kalem kullanmıştır. Öğretim sonunda her iki gruba da aynı şartlar altında kavramsal bilgileri yoklayan bir sınav yapılmıştır. Bu sınavda yer alan integral (tanım ve integralin uygulamaları) ile ilgili kavramsal sorularda deney grubundaki öğrenciler en yüksek puanları almışlardır. Ayrıca işlemsel bilgileri yoklayan bir sınav yapan Palmiter deney grubundaki öğrencilere bir saat süre vermiş ve işlemleri BCS kullanarak yapmalarını isterken, kontrol grubuna iki saat süre vermiş ve işlemleri kağıt-kalem kullanarak yapmalarını istemiştir. Bu sınavın (işlemsel sınav) sonunda da deney grubundaki öğrenciler kontrol grubundaki öğrencilerden anlamlı şekilde başarılı olmuşlardır. Çalışmanın sonucunda deney grubu öğrencilerinin kavramsal sınavda ve işlemsel sınavda anlamlı şekilde başarılı olduğuna ve deney grubu öğrencilerinin %43'ünün matematiğe ve bilgisayara yönelik tutumlarının arttığına ulaşılmıştır.

BCS programlarının birçoğu öğrencilerin genel matematik problemlerini çözmek için grafiksel, sayısal ve cebirsel gösterimleri kullanmalarına imkân vermektedir. Örneğin, Porizo (1994) doktora tezinde genel matematik dersi alan üç sınıfta üç farklı öğretim yaklaşımı kullanarak bunların etkisini incelemiştir. Birinci grupta bir BCS olan Mathematica yazılımı ile ikinci grupta grafik çizen (TI-81) hesap makinesi ile üçüncü grupta ise geleneksek yöntemle öğretim yapılmıştır. BCS ile öğretimin yapıldığı gruptaki öğrencilerin genel matematik problemlerini çözmede diğer iki gruptaki öğrencilerden daha başarılı bir şekilde grafiksel ve cebirsel gösterimler arasında ilişkiler kurabildikleri belirtilmiştir.

Vlachos ve Kehagias 2000 yılında yaptıkları deneysel çalışmalarında BCS destekli genel matematik öğretimi ile bilgisayar kullanılmayan geleneksel tarzdaki genel matematik öğretimini karşılaştırmışlardır. Karşılaştırmada değişken olarak; önemli matematiksel kavramlardaki kazanımlar, genel performans gelişmesi ve matematiğin öğrenciler için daha ilginç ve ilgi çekici hale dönüşmesi seçilmiştir. Çalışma sonunda deney grubu olan BCS destekli öğretime tabi tutulan grup kontrol grubuna göre istatistiksel olarak daha iyi bir matematiksel performansa ulaşıp, matematiğe karşı tutumları anlamlı derecede artmıştır. Bu çalışma ile araştırmacılar BCS destekli öğretim modelini bütün matematik derslerine yaymayı önermişlerdir.

Öğrencilerin matematiksel kavramlardaki anlayışlarını kuvvetlendirebilmek, yeni öğretme ortamlarını bilen ve teknolojiyi matematikte güvenle yeterli düzeyde kullanabilen matematik öğretmenleri yetiştirebilmek amacıyla Harris 2000 yılında bir yıllık bir çalışma yapmıştır. Bu çalışma sürecinde bir matematik dersini Maple çalışma sayfaları eşliğinde gerektiğinde tahtayı da kullanabileceği bir bilgisayar laboratuvarında işlemiştir. Çalışma sonucunda istatistiksel veriler sunan Harris amaçlarının büyük ölçüde gerçekleştiğini sergilemiştir.

2001 yılında BCS içerikli bir müfredatın uygulanmasını araştıran Kendal diferansiyel konularını 11. sınıflar ile çalışıp öğretim sırasında grafiksel ve sembolik gösterimlerden yararlanmanın etkili yöntemler olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Pierce ve Stacey (2002) BCS ile ilgili çalışmalarında, öğrencilerin gerçek hayat problemlerini formülize etme ve sonuçları yorumlamada daha fazla bilişsel faaliyet yapmaları gerektiğini ve BCS'nin ise bu bilişsel faaliyetlere zaman ayırma imkânı sunduğunu vurgulamaktadır. Bu bağlamda okullarda BCS kullanımı cebir öğretiminde önem verilen noktaların değişmesinde etkilidir sonucuna ulaşmışlardır. Yine Pierce (2001) doktora tezinde BCS'nin etkili kullanımını araştırarak, eğitimde kullanımına yönelik bir yapı önermiştir.

Klein ve Kertay (2002) BCS'nin öğrencilerin cebirsel yeteneklerini geliştirmede kullanılması gerektiğini tavsiye ederek, bazı öğretmenlerin BCS öğrencilerin cebirsel yeteneklerini köreltir tereddütlerine karşılık vermiştir.

Mahoney'in (2002) BCS kullanımının okullarda nasıl yararlı olduğuna dair örneklerle açıkladığı beş aksiyomu şu şekildedir:

1. BCS okullarda ne öğrettiğimizi ve nasıl öğretmemiz gerektiğini büyük oranda değiştirir.
2. Öğrencilerin precalculus ve calculus konularını iyi öğrenmelerine yardımcı olur.
3. Öğrencilerin matematik anlayışlarının daha anlamlı olmasını sağlar.
4. Calculus kavramlarının öğrencilere tanıtılmasında, lise öğretmenlerinin işini kolaylaştırır.
5. Öğrencilerin cebir, calculus ve precalculus konuları ile ilgili bol miktarda deneme yapmalarına olanak sağlar.

Ortaöğretim düzeyinde yine benzer bir çalışma yapan Stephens ve Konvalina (1999) BCS kullanımı etkisinin istatistiksel olarak anlamlı olmasa da deney grubu ortalamasının beklenen şekilde daha fazla olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Charlwood (2002), çalışmasında soyut cebire giriş derslerinde Maple bilgisayar yazılımının nasıl kullanılacağını araştırmıştır. Çalışmada simetrik gruplar, matris gruplar ve kompleks sayı grupları konularının öğretimine yönelik Maple çalışma yaprakları hazırlanmış ve konuların öğretiminde bu materyallerden yararlanılmıştır. Öğretim süreci sonunda, öğrencilerin kavramlar arasındaki ilişkileri kurmada ve iddialarını ispatlamada daha cesaretli olduklarını gözlemlemiştir. Elde edilen veriler doğrultusunda, Maple bilgisayar çalışma yaprakları ile desteklenen öğretim ortamının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişmesine önemli derecede katkı yaptığına ulaşılmıştır.

Denklemler sistemi konusunda geleneksel öğretime destek olarak Mathematica yazılımı kullanımının öğrencilerin performanslarına etkisini deneysel desen yöntemiyle inceleyen Ghosh (2003), çalışmasını 32 deney ve 35 kontrol grubu olmak üzere toplam 77 öğrenci ile yürütülmüştür. Deney grubunda geleneksel öğretimin yanında Mathematica yazılımı kullanılırken kontrol grubunda yalnızca geleneksel öğretim ile ders işlenmiştir. Çalışmanın sonucunda her iki grubunda soruları çözme becerilerindeki performanslarının aynı olduğu görülmüştür. Ancak deney grubundaki öğrencilerin soruların çözümlerinde grafikleri açıklamalarının kontrol grubuna göre daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır.

Öğretimde BCS kullanımının önemli bir araç olduğunu vurgulayan Leinbach, Pountney ve Etchells (2002), BCS'lerin öğrencilerin öğrenme işlemlerindeki yönünü değiştiren bir araç olduğuna vurgu yapmıştır. Leinbach ve diğerlerine (2002) göre BCS'nin eğitimde kullanımı öğrenmeyi anlamlı oranda etkilemektedir ve öğrencilerin üst düzey bilişsel faaliyetler gerçekleştirmelerine imkân sağlamaktadır.

BCS ve biliş ötesi eğitimin matematiksel düşünme üzerindeki etkisini inceleyen bir başka çalışma Kramarski Chaya Hirsch (2003) tarafından araştırılmıştır. Çalışma kapsamında 83 sekizinci sınıf öğrencisi rastgele seçilen 4 gruba ayrılmıştır ve her bir gruba ayrı ayrı eğitim verilmiştir. Bu gruplar BCS destekli eğitim, biliş ötesi eğitim, BCS destekli ve biliş ötesi eğitim alan gruplar ve kontrol grubu olmak üzere ayrılmıştır. Bu çalışma sonunda BCS destekli ve biliş ötesi eğitim alan grubun diğer üç gruptan anlamlı derecede daha iyi performans sergilediği elde edilmiştir. Ayrıca sadece BCS destekli eğitim ya da sadece biliş ötesi eğitim alan grupların da kontrol grubundan anlamlı derecede daha iyi performans sergilediği görülmüştür.

Klein (2005) BDÖ yazılımlarından online olan MyMathLab yazılımının üniversite öğrencileri üzerinde başarı ve tutumlarına etkisini incelemiştir. Çalışma 30 öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmanın sonucunda MyMathLab yazılımını kullanan BDÖ grubu öğrencileri ile geleneksel öğretim yapılan kontrol grubu öğrencilerinin başarı puanlarında anlamlı bir farklılık olmadığını tespit etmiştir. Ayrıca MyMathLab yazılımını kullanan öğrenciler ile kullanmayan öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarında bir farklılık olmadığını, üstelik yazılımı kullanan öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarının negatif yönde olduğunu belirtmiştir. Bu sonuç kullanılan yazılımın uygun ortamda, uygun konu eşliğinde etkili şekilde kullanımının önemini ortaya çıkarmıştır.

Leinbach (2005) çeşitli matematiksel kavramlardaki parametrelerin nasıl yorumlanması gerektiğini BCS yardımı ile grafiksel gösterimler de kullanarak açıklamıştır. BCS'ni öğretimde kullanırken öğretim esnasında nelere önem vermemiz gerektiğinin ve nasıl öğretmemiz gerektiğinin değişmesi gerekliliğine vurgu yapan Leinbach, “Öğrencilerin işlemlere fonksiyon gibi bakabilmeye ve fonksiyon ile ilişkilendirilen parametreler açısından işlemin davranışını ve niteliğini yorumlamaya ihtiyaçları vardır.” cümlesi ile BCS’nin bu anlamda etkili olduğunu savunmuştur.

Tuluk ve Kaçar (2007), 30 öğrenciden oluşan bir sınıfı örneklem aldığı deneysel desenli çalışmasında BCS’lerinin matematik öğretimindeki etkisini incelemiştir. Deney grubunda yapılandırmacı yaklaşıma dayalı BCS destekli öğrenme, kontrol grubunda ise yapılandırmacı yaklaşıma dayalı öğretim uygulanmıştır. Bilgisayar yazılımı olarak Maple kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda problem çözme becerisinde deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunurken, işlemsel ve kavramsal anlamda anlamlı bir fark bulunmamıştır.

BCS ile ilgili yukarıda özetlenen çalışmalar paralelinde dinamik özelliğe sahip yazılımlar matematik öğretiminde uygun konu eşliğinde etkili şekilde kullanıldığında geleneksel ortamlarda görülemeyen, oluşturulamayan birçok ilişkinin, özelliğin, genellemenin rahatlıkla çalışılabileceği açıktır. Böylece matematik öğretenlerin çağdaş öğrenme, öğretme ve değerlendirme süreçlerinde teknoloji kullanımına bağlı olarak BCS gibi yazılımlar kullanımının önemi ortaya çıkmaktadır.

2. 1. 2. Konu ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Yapılan bu çalışma ile bir bilgisayar cebiri sistemi yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusundaki öğrenmeleri SOLO taksonomisine göre değerlendirilip yorumlanacaktır. Bu bölümde araştırmanın yürütülmesinde temel oluşturan ve mevcut probleme nasıl çözüm getirebileceği ile ilgili fikir veren çalışmalara kısaca yer verilecektir. Mevcut probleme çözüm getirmesi beklenen ve bu bağlamda literatür taramasına yön veren sorular şu şekildedir:

1. Genel matematik konularında yer alan ve soyut düşünmeyi gerektiren limit-süreklilik kavramlarının öğretiminde ve öğreniminde yaşanan sıkıntılar nelerdir?
2. Limit-süreklilik kavramları öğretimi için ne tür teknoloji destekli öğrenme ortamları hazırlanmıştır? MYO öğrencileri limit ve süreklilik kavramını nasıl öğrenebilir?
3. Matematik öğretiminde BCS ile desteklenmiş öğrenme ortamları ve matematik öğretimine katkıları nelerdir?
4. Öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına yönelik öğrenme çıktılarını değerlendirmede izlenebilecek en uygun yaklaşımlar nelerdir? Öğrencilerin SOLO taksonomisi ile değerlendiği çalışmalar nelerdir?

Takip eden bölümde ise bu sorulara cevap verebilecek literatürdeki çalışmalar alt başlıklar altında özetlenecektir.

2. 1. 2. 1. Limit ve Süreklilik ile İlgili Yapılan Çalışmalar

İleri düzeydeki matematiğin başlangıcı ve matematiğin ileri konularının anlaşılmasında temel oluşturacak olan analiz ile ilgili son yıllarda sayısız çalışma yapılmıştır. Bunun nedenlerini (Ubuz, 1999b, 2002, 2004; Ubuz, Üstün ve Erbaş, 2009);

1. Ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim,
2. Kavramsal alandaki yetersizlik,
3. İleri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmek,

olarak sıralarken, NCTM (2000) analiz dersi sayesinde lise öğrencilerinin şu yetenekleri edinmeleri gerektiğini vurgulamıştır;

1. Öğrenciler, analiz konuları üzerinde sayısal ve grafiksel olarak informal keşifler yapabilmeli,
2. Her öğrenci bir grafiğin maksimum ve minimum noktalarını belirleyebilmeli,
3. Problem durumlarındaki sonuçları yorumlayabilmeli,
4. Limit ve süreklilik kavramını araştırabilmeli,
5. Sonsuz dizi ve seri kavramlarını irdeleyerek eğri altında kalan alanı araştırabilmelidir.

Ayrıca üniversiteye gitmek isteyen öğrenciler;

1. Limit ve süreklilik kavramının,
2. Eğri altında kalan alanın,
3. Değişim oranının,
4. Teğet doğrusunun eğiminin, kavramsal temellerini anlamalı ve
5. Polinom, rasyonel, köklü ve transandantal fonksiyonların grafiklerini analiz edebilmelidir.

Analizde karşılaşılan "limit" ön öğrenmeleri üst düzey olan öğrencilerin bile zorlandığı bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunun çeşitli nedenleri olabilir. Bu nedenlerden birini Sanchez (1996), öğrencilerin türev-integral kavramlarının gelişiminde limit kavramının ne denli önemli olduğunu farkına varmamaları olarak görmektedir. O'na göre öğrenciler, sürekli fonksiyonlar her noktada tanımlı olduğunda limit değerini bulmakta sıkıntı yaşamazken, fonksiyonun bağıntısı değiştirildiğinde, özellikle belirsizlik durumları söz konusu olduğunda sıkıntı yaşamaktadırlar. Örneğin; $\mathrm{f(x)} = \frac{x^2-4}{\mathrm{x}-2}$ fonksiyonu $\mathrm{x} = 2$ noktasında tanımlı olmasa da fonksiyon bu noktada limite sahiptir. Bu örnekte de görüldüğü gibi rasyonel fonksiyonlarda kimi zaman fonksiyonun tanımsız olduğu noktada limitin olması, kimi zaman da fonksiyonun tanımlı olduğu noktada limitin olmaması öğrencilerin anlamalarında sıkıntılara neden olmaktadır. Aynı çalışmasında Sanchez (1996), limit kavramını geometrik gösterime dayandıran bir yaklaşımla ele almıştır. Bu yaklaşım doğrultusunda bir çember içinde köşeleri çember üzerinde olmak koşulu ile çizilen n kenarlı düzgün çokgenin kenar sayısının artması durumunda geometrik şeklin neye yaklaşabileceğinin araştırılması sürecinde, öğrencilerin limit kavramını anlamalarında geometrik gösterimlerin olası bir yaklaşım olarak kullanılabileceğini vurgulamıştır. Yine bu geometrik gösterimin kullanılması öğrencilerin yorumlamada zorlandığı diğer bir yaklaşım olan epsilon-delta yaklaşımında da görsellik ve matematiksel kavrayışın birleştirilmesi için uygun bulunmaktadır.

Gerçek sayıların limit kavramı ile nasıl ilişkili olduğunu keşfetmeye çalışan Tall ve Schwarzenberger (1978), üniversitelerin ilk dönem öğrencilerinden seçtikleri bir grup öğrenciyle yaptıkları görüşmelerde öğrencilerin limit alma sürecinde karşılaştıkları bilişsel uyuşmazlıklara odaklanmışlardır. Araştırma sonucunda öğrencilerin 0,333… ondalık sayısının $\frac{1}{3}$ rasyonel sayısına eşit olduğunu fakat 0,999… sayısının ise 1'den az olduğunu ve 1'e ancak yaklaşık olarak eşit olabileceğine inandıklarını görmüşlerdir.

Cornu (1991) çalışmasında öğrencilerin sonlu hesaplamalarla sınırlandıramadığı limit kavramını matematiksel davranışlarla cevap verilemeyen ilk konu olarak belirtmiştir. Başka bir çalışmasında ise matematiksel analizin neredeyse tümü için (yaklaşım teorisi, türev ve integral) merkezi bir rol oynayan limit-süreklilik kavramının ileri düzeyde matematiksel düşünme gerektiren zor bir olgu olduğuna değinmiştir (Cornu, 2002). Kasten (1988) yapmış olduğu çalışmasında analiz eğitiminin öğrencilere iyi bir hizmet vermediğini ve üniversite öğrencilerinin fonksiyon, limit, türev, integral gibi analizdeki temel kavramları kavrayamadıklarını belirtmiştir.

Matematiksel sembolik kavramların birçoğunun öğrenciler tarafından güç olarak kavrandığı ve yüzeysel olarak öğrenildiğini belirten çalışmalar, fonksiyonla ilişkili limit, süreklilik, türev, integral gibi kavramların öğrenciler tarafından ezberlenilmesi gereken konular yığını olarak görüldüğü ve ele alınış şekilleriyle zor kavramlar olarak algılandığı sonucuna ulaşmıştır (Beziudenhout, 2001; Bukova, 2006; Gürbüz ve Pırtıcı, 2014). Öğrencilerin limit kavramını belli bir düzeyde kullanabilmelerine rağmen kavramın oluşturulabilmesi ile ilgili üst düzey basamaklarda problemler yaşadıklarını belirten çalışmalar doğrultusunda öğrencilerin limit kavramını oluşturmada yaşayabilecekleri problemler;

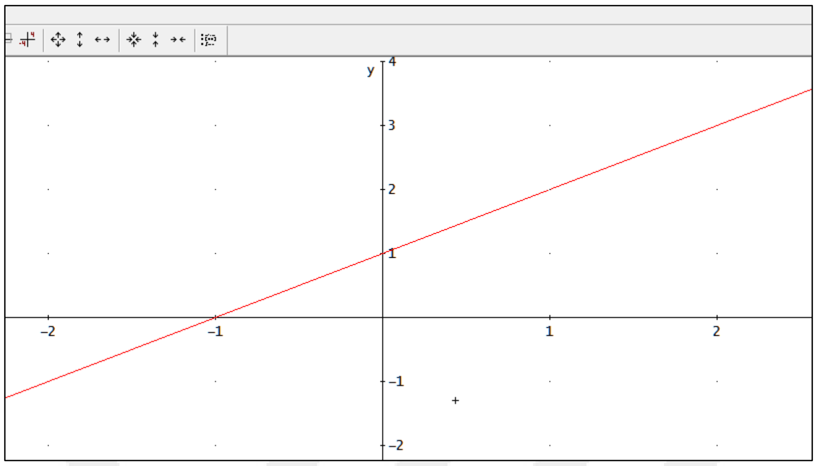
1. Fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplama,
2. Fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığını gösterebilme,
3. Fonksiyonla limitin ilişkisini kurabilme,

şeklinde sıralanabilir. (Barbé, Bosch, Espinoza ve Gascón, 2005; Çıldır, 2012; Gürbüz ve diğ. 2011; Hofe, 1997).

Ülkemizde limit ve süreklilik konusu 12.sınıf öğretim programı içerisinde yer almaktadır (MEB, 2005). Bu öğretim programında öncelikle limit konusunun tamamlanması sonrasında ise süreklilik konusuna geçiş yapılması önerilmektedir. Ortaöğretimde 12.sınıf düzeyinde anlatılan limit ve süreklilik konuları, üniversitelerde bölümlere göre değişiklik göstermekte olup birinci ya da ikinci sınıf düzeyinde öğretilmektedir. Hem ortaöğretim son sınıfta hem de üniversitelerin ilk yıllarında görülen limit ve süreklilik kavramlarını öğrenmede öğrenciler zorlanmakta ve çeşitli yanılgılara sahip olmaktadırlar (Özmantar ve Yeşildere, 2008). Bazen de öğrencilerin limit ve süreklilik ile ilgili problemlere doğru yanıt verebildikleri halde temel fikir ve kavramlarda yanlış anlamalara sahip olduğu görülmektedir (Swinyard ve Lockwood, 2007; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015). Bu kavramlara ilişkin yanılgıların belirlenmesi, giderilmesi ve bu kavramların öğretilmesi üzerine yapılan çalışmalar oldukça fazladır (Bezuidenhout, 2001; Duru, Köklü ve Jakubowski, 2010; Ervynck, 1981; Swinyard ve Lockwood, 2007; Tall ve Vinner; 1981; Williams, 1990). Bu çalışmaların sonucu olarak, bu kavramların öğretiminde, ileri matematik bilgisi içerisinde yer alan formal tanımın yerine bu kavramlara ilişkin öğrencilerin zihinlerinde daha çok imajın oluşturulması önerilmektedir. Ülkemizde bu doğrultuda hazırlanan ortaöğretim matematik öğretim programında limit ve süreklilik konusuna ilişkin kazanımlar arasında şu kazanımlara yer verilmiştir:

1. Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasını örneklerle açıklar.
2. Bir fonksiyonun bir noktadaki soldan limitini ve sağdan limitini örneklerle açıklayarak fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.

Bu kazanımlar limit kavramının sezgisel olarak öğrencilere anlatılmasının önerildiğini göstermektedir. Ayrıca öğretim programının açıklamalar bölümünde ikinci kazanıma ilişkin “Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, dizi ve ε-δ tekniği gibi daha çok matematikçileri ilgilendiren teorik yaklaşımlarla verilmez.” ifadesi yer almaktadır (MEB, 2006). Bu durum, üniversite öğrencilerinin bile öğrenmede zorlandıkları formal tanımın ortaöğretim düzeyi öğrencileri için uygun olmadığını göstermektedir (Bezuidenhout, 2001). Tatar, Okur ve Tuna (2008), çalışmalarında Eğitim Fakültesi’ne başlayan öğrencilerin ortaöğretim matematik konularını öğrenmedeki güçlük düzeylerini belirlemişler ve bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliğindeki öğrencilerin limit ve süreklilik konusundaki güçlük düzeyini %55,56 olarak belirlemişlerdir. Çoker, Özer ve Taş (1989) öğretilmesi ve öğrenilmesi zor bir konu olarak karşımıza çıkan limit konusunun öğretilmesinde öncelikle sezgisel bir yaklaşım verilmesi gerektiğine değinmiştir. Örneğin; $y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir;



Şekil 8. $y= f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği

Bu fonksiyonun grafiğini, x≠1 olan noktalarda y=x+1 doğrusunun grafiğini çizerek bulabiliriz. x=1 sayısına küçük ve büyük değerlerden yaklaştığımızda fonksiyonun aldığı değerler Tablo 3.'de verilmiştir. Fonksiyonun limit değeri 2'dir. Bunu grafikten de kolayca görebiliriz.

Tablo 3. x→1, f(x) Fonksiyonun Aldığı Değerler

x	0,99	0,999	0,9999	→	1	←	1,0001	1,001	1,01
f(x)	1,99	1,999	1,9999	→	2	←	2,0001	2,001	2,01

Yukarıdaki grafikten ve tablodaki f(x) fonksiyonunun aldığı değerlerden limiti tahmin etmek kolaydır fakat grafiği kolayca çizilmeyecek kadar güç fonksiyonların davranışını sezgisel olarak bulmak hiç de kolay değildir. Benzer bir çalışma olan "Ortaöğretim Matematik Müfredatında Zor Olarak Algılanan Konular ve Bunların Nedenleri" adlı çalışmada ise Gürbüz, Toprak, Yapıcı ve Doğan (2011) ilköğretim matematik, fen bilgisi, okulöncesi ve sınıf öğretmenliği anabilim dalı öğrencilerine bir anket uygulanmıştır (N=353). Anket yardımıyla ortaya çıkan zorlukların nedenlerini anlamak için ise öğretmenlerle görüşme yapılmıştır (N=20). Çalışmanın sonunda konuların zorluklarına bakıldığında limit ve sürekliliğin de zor algılanan konular arasında olduğu ve zorluk indeksinin %14 olduğu görülmüştür.

Literatürde yer alan araştırmalar, öğrencilerin çok az bir kısmının öğretim süreçleri sonucunda limit kavramının formal tanımına yönelik kesin bir anlama geliştirdiklerini söylemektedir (Ervynck, 1981; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008)

“Limit Öğretiminde İki Farklı Eğitim Durumunun Karşılaştırılması” isimli yüksek lisans çalışmasında Çolak (2002), iki farklı eğitim durumunun limit öğretimine etkisini karşılaşmıştır. Deney kontrol gruplu deneysel çalışama yürüten Çolak Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramı için ayrılan sürede iki farklı şekilde ders işlenmiştir. Kontrol grubunda geleneksel yöntemle ders işlerken, deney grubunda geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemde i) yakınsama kavramı, ii) bir dizinin limiti, iii) bir fonksiyonun limiti kavramları öğrencilere deneysel yöntemlerle kavratılmaya çalışılmıştır. Deneyler bitince her iki gruba (deney-kontrol) erişti testi uygulanmıştır. Çalışma sonucunda geleneksel yöntemin kullanıldığı kontrol grubunda öğrencilerin limit kavramı ile ilgili problemleri çözebildikleri fakat yaptıkları işlemlerin ne anlama geldiğini bilmedikleri ve limitin formal tanımının ne olduğunu bilmedikleri görülmüştür. Oysa deney grubu öğrencilerinin öğrendikleri bilgileri ezberlemeden limit kavramı ve limit ile ilgili işlemler arasında bağ kurabildikleri ve yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bildikleri görülmüştür. Çalışmanın sonucunda her ne kadar deney grubu lehine bir durum ortaya çıkmış olsa da, araştırmacı limit kavramının formal tanımını anlamayı sadece limit hesaplamayı gerektiren cebirsel 2 probleme ve öğrencilerin limit kavramına ilişkin kavram imajlarını ortaya çıkarmaya amaçlayan 2 soruya indirgemiştir.

Limit-süreklilik kavramlarının formal tanımının bu denli yoğun ve anlaşılmasının güç olması bazı eğitimcileri bu kavramlarla ilgili informel yaklaşım sergileme eğilimine yöneltmiştir (Fernandez, 2004; Gass, 1992). Fernandez (2004) yaptığı çalışmasında limit kavramının öğretimine formal tanımı vererek başlamak yerine, tasarladığı farklı bir öğretim sürecinin öğrencilerin anlamalarına nasıl etki ettiğini belirlemeyi amaçlamıştır. Sınıf içerisinde öğrencileri birbiriyle tartıştırma yöntemi ile hem grafiksel hem de cebirsel olarak temsil edilmiş tek bir örnek üzerinde, formal tanım içerisinde yer alan epsilon-delta değişkenlerine tekil değerler vererek bu iki değişken arasındaki ilişkiyi keşfettirmeyi hedeflemiştir. Yürüttüğü yöntemin etkisini belirlemek için öğretim sürecinin sonunda çalışmaya katılan öğrencilere limit kavramının formal tanımına yönelik 3 sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Testin sonucunda öğrencilerin Ɛ-δ değerlerinin birbirine bağlı değerlerini bulmaya yönelik cebirsel sorularda kayda değer bir başarı gösterdikleri rapor edilmiştir. Fakat bu çalışmada bir önceki çalışmada olduğu gibi limit kavramının formal tanımını anlamayı sadece cebirsel boyutta Ɛ-δ değişkenlerinin değerlerini bulmaya indirgemiştir. Bu doğrultuda yapılan bir başka çalışmada Mcdonald (2005) öğretmenlerin limit kavramını öğretirken sayısal, grafiksel, sembolik ve sözlü sunumları birlikte kullanmalarının önemi vurgulanmış olup teknolojinin keşfetme ve problem çözme için bir araç olarak kullanılmasının doğruluğu ortaya koyulmuştur. Aynı çalışma yapılandırmacı kuram temelinde grup çalışmasının önemine de vurgu yapmıştır (Mcdonald, 2005). Limit kavramında yaşanan zorluklara değinen Queseda ve ark. (2008) yaptıkları çalışmada kendi öğretim deneyimleri sonucunda öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları zorlukları şu şekilde belirtmektedirler;

1. Tanım içerisinde niceleyicilerin kullanımı ve limitin varlığını ispat etmedeki rolünün öğrenciler için yeni olması,
2. Öğrencilerin önceki matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki karşılıklı etkileşimi anlamaya olanak vermemesi. Sonuç olarak verilen bir limit durumunda gerekli eşitsizlikleri kurmada zorluk yaşanması,
3. Öğrencilerin limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerden değişkenlerin değer aralıklarını bulmada ve ε, δ değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirleme adına eşitsizliklerde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşaması.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geleneksel olarak yürütülen analiz dersleri sonucunda limit kavramının formal tanımına yönelik geliştirdikleri anlamaları inceleyen Baki ve Çekmez (2012) analiz 1 dersini başarıyla tamamlamış olan 112 öğretmen adayına, alan uzmanlarının görüşleri ve literatürde yer alan araştırmalar doğrultusunda hazırlanmış açık uçlu ve çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir test uygulamıştır. Testin sonucunda adayların tanımın grafiksel temsilini, tanım içerisindeki değişkenleri ve eşitsizlikleri anlama ve yorumlamada sıkıntılar yaşadıklarını belirtmişlerdir. “Limit Fikrini ve Sonsuz Küçükleri Anlama Üzerine” adlı çalışmasında Parameswaran (2007), öğrencilerin gerçek yaşamlarına dayalı küçük sayılarla ilgili kişisel limit algılamalarını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bunun için çalışmalarını iki grupla yürütmüştür. 12. sınıf öğrencilerinden oluşan ilk gruba limit, informal bir yaklaşımla ($\varepsilon - \delta$ tanımı kullanılmadan) öğretilmiştir. Üniversite 1. sınıf öğrencilerinden oluşan diğer gruba ise limit bildik $\varepsilon - \delta$ tanımı kullanılarak öğretilmiştir. Araştırma sonunda her iki gruptaki birçok öğrencinin limitleri hesaplarken karşılarına çıkan küçük sayıları sıfıra tamamladığını çünkü bu öğrencilerin limiti yakın olma (yakınlaşma) olarak algıladıklarını ortaya çıkarmıştır.

Foley (1986), “Bir Devlet Üniversitesinin Calculus Dersinde Sonsuz Küçükleri (Hyperreel Numbers) Kullanarak Limit ve Süreklilik Öğretimi” adlı çalışmasında konuyla ilgili literatür taraması ve Calculus ders kitaplarının incelenmesinin ardından bir öğretim programı kılavuzu ve bir de çoktan seçmeli başarı testi pilot öğretim süreçleri için hazırlayarak çalışmasının deneysel kısmını oluşturmuştur. Çalışma sürecinde Austin Devlet Üniversitesinin 1. dönem Calculus dersinde limit ve süreklilik öğretimi için iki kavramsal yaklaşımın göreli etkisinin önemli olduğunu ölçmüştür. Bu çalışmaya paralel olarak Todorov (2001), "Klasiğe Dönüş: Sonsuz Küçüklerle Limit Öğretimi" adlı çalışmasında alışılmış limit tanımına denk bir tanım vererek bu tanımın tahmini bir limit değerini gerektirmeksizin L limitini tek olarak belirlenebileceğini belirtilmiştir. Kleiner (2001) ise sonsuz küçükler ve sonsuz büyükler kavramlarının tarihi gelişimini eğitim açısından yorumlayarak incelemiştir.

Aztekin (2012) "Repertuar Çizelge Tekniği ile Matematikteki Limit Kavramı ile İlgili Anlayışların Belirlenmesi" çalışmasında kişilerin bir konu ile ilgili bilişsel seviyelerini ortaya çıkarmak için kullanılan repertuar çizelge tekniğini matematikteki limit konusuna uygulamıştır. Çalışmayı Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü'nde Genel Matematik dersini alan 4 öğretmen adayı ile yapmıştır. Limit konusu ile ilgili yapılan bir sınava ve vize sınavı sonuçlarına göre 5 katılımcı seçmiş ve bunlardan 4'ü ile 4 oturumdan oluşan bir çalışma yapmıştır. İlk ve son oturumlarda, mülakat yöntemi ile katılımcıların repertuar çizelgelerini çıkarmıştır. Ara oturumlar ise ders anlatımı ve etkinlik uygulamaları şeklinde geçmiş, katılımcılara limitle ilgili farklı anlayışlar sunmuştur. Repertuar çizelgelerinin oluşturulmasıyla elde edilen yapılar arasındaki ilişkiler doğrultusunda katılımcıların limit konusunu anlayışlarıyla ilgili şemalar oluşturulmuştur. Sonuç olarak, matematik eğitimi araştırmalarında kullanıldığında repertuar çizelge tekniğinin öğretmen adaylarının kavram imajlarını, bilişsel seviyelerini, yapılarını ve çelişen düşüncelerini ortaya çıkarmada başarılı olduğu, ayrıca limit kavramı ile ilgili kritik yönlerinin belirlenmesine yardımcı olduğunu görmüştür.

"Üniversite Analiz (Calculus) Dersi Öğrencilerinin Limit Kavramı ile Oluşturdukları Modeller" adlı çalışmasında Williams (1991), bir üniversitenin 341 lisans öğrencisine, içinde limit ile ilgili 6 ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu işaretlemeleri ve hangi ifadenin limiti en iyi tanımladığını seçmeleri istenen bir anket uygulamıştır. Bu anket ile öğrencilerin karşılaştığı anormal örneklere verdikleri cevaplar incelenmiştir. Anketin sonucuna göre 6 ifadeden en net ve açık olan 4 tanesi seçilmiştir. Çalışmanın ikinci aşamasında ise 10 öğrenci seçilip bu öğrencilerle 5 toplantı yapılmıştır. Williams son görüşmede öğrencilerin önceki görüşmelerdeki limit ile ilgili görüşlerini öne sürerek bu görüşlerinin niçin değişip değişmediğini sorgulamıştır. Bundan sonra da öğrencilerin limit görüşleri ile ilgili bazı genellemeler yapmıştır. Bu genellemelerde öğrencilerin formal bilgilerinin (sürekli fonksiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L'Hopital kuralını uygulama gibi…) kavramsal bilgilerinden oldukça ayrık olduğuna, öğrencilerin basit ve pratik limit modellerini tanımlardan daha önemli gördüğüne ayrıca öğrencilerin daha şekli limit görüşünü benimsemelerinde 5 toplantının yetersizliğine vurgu yapılmıştır.

Monaghan (1991) "Limit Kelimesinin Algılanmasıyla İlgili Problemler" adlı çalışmasında limit öğrenimi ve öğretimi sırasında kullanılan dilin etkisi üzerinde çalışmıştır. Aynı soruyu dört farklı şekilde sorarak hazırladığı ankette: eğilim, yaklaşma, yakınsama ve limit kelimelerini kullanmıştır. Bu anketi ilk önce 16 yaşındaki 54 lise öğrencisine ve bir yıl sonrasında ise anketin düzeltilmiş formunu 190 lise öğrencisine uygulamıştır. Çalışmada kullanılan likert tipindeki anketin nicel analizi anket uygulanan öğrencilerin bu dört kelimeye çok farklı anlamlar yüklediğini göstermiştir. Çalışma sonunda Monaghan, öğrencilerin her kelimeyi cümle içinde kullanma şekillerini incelemiş ve bu kelimelerin öğrenciler için nasıl anlamlar ifade ettiklerini sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmaları şöyle özetleyebiliriz: limit kelimesi genellikle sınır; yaklaşma kelimesi bir şeyin başka bir şeye doğru en sonunda ulaşma fikri ile hareket etmesi; eğilim kelimesi kişisel eğilim ve yakınsama kelimesi ise öğrenciler tarafından iki sürekli nesnenin birleşmesi olarak algılanmaktadır. Bu çalışmasında Monaghan (1991), Tall ve Vinner'dan (1981) "Matematiksel olarak aynı anlama gelen kelimeler, doğal kullanımlarında farklı anlamlara gelebilmektedir. Sonuç olarak, bu durum aynı matematiksel kavram için farklı kavram görüntüleri oluşmasına sebep olabilmektedir." alıntısını yapmıştır. Bu bağlamda öğrencilere kendi kavramlarını tartışma ve keşfetme izini verilebilmelidir ayrıca matematiksel kelimelerin gündelik anlamlarının onları nasıl bir yanılgıya götürebileceğini anlamalarına imkân tanınmalıdır.

"Limit ve Süreklilik İle İlgili Olarak Matematikte Kavram Algılama ve Kavram Tanımlama" adlı ve kavram imajları (bir kavram ile ilgili olarak öğrencinin zihninde oluşturduğu görüntü), kavram tanımları (öğrenci veya öğretmen tarafından kullanılan ve kavramı açıklayan kelimeler topluluğu), kavram tanımı imajı (kavram tanımının anlamı ile öğrencinin zihninde oluşan görüntü) merkezli olan çalışmalarında Tall ve Vinner (1981) birinde 36 diğerinde 70 üniversite öğrencisi bulunan iki gruba anket uygulamışlardır. Öğrencilere kısa cevaplı açık uçlu sorular yönlendirilmiş ve verdikleri cevaplar sınıflandırılmıştır. Sorulan sorulardan elde edilen bulgular sonucunda öğrencilerin zihinlerinde limit tanımının ve limit kavramının farklı görüntüsünün olduğu, ayrıca limit kavramının görüntüsünün limit tanımının oluşturduğu görüntü ile çatışma halinde olduğu yani bağlantısız olduğu sonucuna varılmıştır. Bu bağlamda Tall ve Vinner matematikte karşılaştığımız birçok kavram, formal olarak tanımlanmadan ve karmaşık bilişsel yapısına kavuşmadan önce kısmi olarak da olsa kişilerin zihninde mevcut olduğuna ulaşmıştır. Ayrıca Szydlik (2000), "Matematiksel İnançlar ve Bir Fonksiyonun Limitini Kavramsal Anlama" adlı çalışmasında öğrencilerin matematiksel inançları ile limiti anlama arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin analiz dersini uygulanılan, hatırlanan yöntem ve gerçekler olarak gördüğü, bu yöntem ve gerçeklerin altında yatan teoriyi anlamaya çalışmadıkları ve değer vermediklerine ulaşılmıştır.

Tall ve Vinner (1981) çalışmasında limitin formal tanımının yanı sıra süreklilik kavramının formal tanımından ziyade informal tanımlamaların üzerine bina edildiğine vurgu yapmıştır. Bilindiği gibi günlük hayattaki kullanımında süreklilik kelimesi aralıksız ya da boşluksuz olma şeklinde anlaşılmaktadır. Süreklilikle ilgili kavram imajını bu anlayışa göre oluşturmuş olan bir öğrenci, söz konusu kavramı matematiksel kavram olarak yapılandırmakta güçlüklerle karşılaşabilmekte ve çoğu kez yanılgılara düşebilmektedir. Başka bir ifadeyle öğrenci kavramın günlük hayattaki kullanımından hareketle sürekli bir fonksiyonun grafiğinde kırıklık ya da kopukluk olmaması gerektiği şeklinde bir düşünce geliştirebilmektedir.

Bayar ve Gündüzalp'e (1998) göre sürekliliği özel bir hal olarak ihtiva eden kavramlardan biri olan limit kavramı analizin çeşitli dallarında çok önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca limit matematikteki türev ve integral gibi birçok önemli kavramın oluşması için bilinmesi gerekli olan en temel kavramdır. Fakat limit kavramının doğası nedeniyle öğrenciler tarafından her zaman zor anlaşılır. Böylece bu kavramın anlaşılması ve limit ile ilgili hesaplamaların yapılmasında öğrenciler birçok bilişsel zorluklarla karşılaşarak çok az başarı gösterebilirler (Juter, 2006). Juter (2006) bu bilişsel zorluklardan bazılarını şöyle ifade etmiştir: öğrencilere göre diziler hiç bitmez, fonksiyonlar limitlerine ulaşamaz, seriler bir final cevabı oluşturamaz. Öğrencilerin çoğunlukla yönteme odaklandıkları ve bu nedenle de zihinlerine yerleştiremedikleri limit kavramı bir yöntemden ve bir konudan fazlasıdır. Bunu farkına varamayan öğrenciler genellikle limit ile ilgili işlemleri yapmakta zorlanmaktadırlar.

Bir üniversitenin matematik bölümünde genel matematik dersini bitirmiş öğrencilerle limit kavramları üzerine çalışma yürüten Przenioslo (2004), çalışma kapsamında komşuluklar, grafiklerin ve değerlerin yaklaşımı, x_0 noktasında tanımlı olma, x_0 noktasındaki limitin $f(x_0)$ ile eşit olması ve algoritma kavramları üzerine odaklanmıştır. Elde ettiği önemli sonuçlarından biri öğrencilerin bazı kavramları tanımlama ile ilgili soruları doğru cevaplandırmalarına rağmen bunları uygulamada sıkıntı çekmiş olmalarıdır.

(Hofe, 1997,1998), öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları problemleri incelediği çalışmalarında normal bir genel matematik dersinde matematiksel içeriğin; "grafik ve aritmetik temsilleri, işlem ve nesne, statik ve dinamik yorum ve sezgisel fikirler ile matematiksel özellik alanlarına" fazla önem verilmediğini belirterek çalışmasının sonucunda ana problemin bu konular doğrultusunda olduğunu belirtmiştir.

Öğrencilerin kendi kavramlarını tartışmalarına ve keşfetmelerine izin verildiği takdirde, matematiksel ifadelerin gündelik anlamlarının onları nasıl bir yanılgıya götürebileceğine ulaşmak daha kolay olacaktır. İlgili literatürde limit-süreklilik kavramı ile ilgili formal tanımı anlamlandırmanın yanı sıra matematik öğretmen adayları ve matematik öğrencilerinin bu kavramlara ilişkin kavram yanılgılarını tespit eden çalışmalara da yer verilmiştir.

Genellikle limit kavramı günlük hayattaki kullanımında ulaşılabilecek en üst değer şeklinde algılanmakta ve aşılmaması gereken bir sınır anlamını taşımaktadır. Williams (1991) ve Jordaan (2005) tarafından yapılan araştırmalar limit kavramının günlük hayattaki bu kullanımının öğrenciler tarafından aynen fonksiyonlardaki limit kavramına uyarlandığını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin bir fonksiyonun limiti ile bu fonksiyonun tanım kümesi arasında ilişki kurarken pek çok kavram yanılgısına sahip oldukları rapor edilmektedir (Akbulut ve Işık, 2005; Jordaan, 2005). Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması, limit alınan noktanın fonksiyonunun tanım kümesinde yer alması, fonksiyonun limitinin olması için sürekli olması ve fonksiyonun her noktada limiti olması gerektiği gibi birbirleriyle yakından ilişkili öğrenci yanılgıları bunlara örnek olarak verilebilir.

Szydlik (2000), öğrencilerin fonksiyonlarda limit konusundaki matematiksel inanışları ve kavramsal anlayışları üzerine yaptığı çalışmada öğrencilerin, fonksiyondaki değişkenin bir sayıya yaklaşıyor olmasının limitin de yaklaşık bir değer alması gerektiği inanışında olduklarını ortaya çıkarmıştır.

“Limit öğretimi ve kavram yanılgıları” isimli yüksek lisans tezinden yazılan makalede Akbulut ve Işık (2005) geleneksel yöntemin yerine bilişsel alanın kavrama ve uygulama basamaklarını kapsayan etkileşimli öğretim stratejisini kullanmıştır. Bu çalışmasında limit kavramının öğretimi ve ortaya çıkan kavram yanılgılarını araştırmıştır. Deneysel çalışma yürüten Akbulut deney grubunda limit konusunu etkileşimli öğretim stratejisi, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemleri ile işlemiştir. Çalışma sonucunda limit konusunun anlaşılması açısından deney gurubu lehine önemli bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir.

Barak (2007) “Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi” isimli yüksek lisans tezinde öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin kavram yanılgılarını belirleme amacıyla yürüttüğü çalışmasının içerisinde limit kavramının formal tanımına yönelik yaşanan zorlukları da araştırmıştır. İlköğretim, ortaöğretim matematik, fen bilgisi ve bilgisayar öğretmeni adaylarının dâhil olduğu çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının ε-δ tanımını tam olarak anlayamadıkları, bu ifadenin sadece limitin tanımı olduğunu bildiklerini ε, δ sembolleriyle ne anlatılmak istendiğine yönelik bir açıklama yapamadıklarını belirtmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının limit tanımı içerisindeki eşitsizlikleri düzenleyemediklerini ve Ɛ-δ değerleri arasındaki eşitliği bulamadıklarını rapor etmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin limit kavramı tanımı, sağdan soldan limit kavramları, fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı, limit-süreklilik arası ilişki, bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması, fonksiyonun grafiğinin çizilmesi, sonsuz kavramının anlaşılması ve işlemlerde kullanılması ile ilgili kavram yanılgılarının ve hatalarının olduğuna ulaşılmıştır.

Özmantar ve Yeşildere (2008), limit ve süreklilik üzerine yapılan araştırmaları inceleyerek öğrencilerin sahip olabilecekleri yanılgı ve karşılaşabilecekleri zorluklara değinmiştir. Bu yanılgı ve zorluklar; limit değerinin asla ulaşılamaz olduğu, limit almanın fonksiyonda yerine koyma olduğu, tanımsızlık ve belirsizlik içeren limit durumunda zorluklar yaşandığı, sürekli fonksyonlara dair kavram yanılgılarının olduğu şeklinde özetlenebilir. Dönmez (2009) “Matematik Öğretmen Adaylarının Fonksiyonlarda Limit Ve Süreklilik Konusuna İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin Değerlendirilmesi” isimli yüksek lisans tezinde 37 ortaöğretim matematik öğretmen adayına fonksiyonlarda limit ve süreklilik ünitesi ile ilgili alan bilgisi sınavı uygulamıştır. Bu sınavın sonuçlarına göre farklı bilgi düzeylerindeki 4 öğretmen adayı ile anket, gözlem, görüşme ve doküman analizi yöntemleriyle araştırma verilerini oluşturmuştur. Verilerinin analizi sonucunda öğretmen adaylarının fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularında çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğunu, pedagojik alan bilgileri ve onun alt bilgilerinde eksiklikler olduğunu tespit etmiştir. Bu çalışmanın paralelinde Baştürk ve Dönmez (2011) matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgılarını araştırdıkları çalışmalarında Özmantar ve Yeşildere’nin (2008) çalışma sonucunda elde ettiği zorluklara benzer zorluklarla karşılaşmıştır. Baştürk ve Dönmez (2011), bu zorluklara ilave olarak sonsuzun limit olarak algılandığı ve parçalı fonksiyonun grafiğinde sıçrama-kırılma varsa fonksiyon o noktada tanımlı bile olsa limitinin olmayacağı inancı ile karşılaşmıştır.

Bazı çalışmalar limit kavramının sezgisel olarak ve daha etkili anlaşılması amacı doğrultusunda yapılmıştır. “Ortaöğretimde Limit Kavramının Oluşturulmasına Yönelik Bir Çalışma” isimli çalışmalarında Akkoyunlu, Güler, Uğurel ve Alan (2002) limit öğretiminin daha etkili yapılabilmesi için değişik bazı öğretim yaklaşımlarını tanıtarak görüşlerini sunmuşlardır. Oysa sezgisel tanımlamalar yaparken öğrencilerde limit-süreklilik kavramlarına ilişkin oluşabilecek olası zorluklara dikkat edilmelidir.

Derslerde verilen günlük yaşam örneği doğrultusunda limit değerine asla ulaşılamayacağına dair kavram yanılgısına (Szydlik, 2000; Williams, 1989, 2001) sebep olunabilecek vurgular yapılmıştır. Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades ve Zoulinaki (2009) yaptıkları çalışmada bu konuya dikkat çekerek, öğrencilerin sahip olabilecekleri olası kavram yanılgılarından haberdar olunması ve öğretimin de bu doğrultuda şekillendirilmesi gerektiğini belirtmektedirler. Ayrıca, limit kavramına özgü kullanılan öğretim stratejilerinin konu ile ilgili kavram yanılgılarının oluşumunu engelleme ya da sağlama gibi rollerinden ötürü seçimi büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda konuya özgü öğretim stratejilerini seçerken öğrencilerin zorluk ve yanılgı yaşayacağı hususların göz önüne alınması önerilmektedir. Çünkü kavrama ilişkin yanlış analojilerin oluşturulması ise öğrencilerin kavramı yanlış anlamalarına neden olabilecektir (Gusril, 2008'den aktaran: Nusantari, 2014: 23).

Matematik öğretmeni adaylarının derslerinde kullandıkları limit kavramına özgü öğretim stratejilerini incelemek amacıyla yaptıkları çalışmada Kula ve Güzel (2015), çalışma verilerini son sınıf dört ortaöğretim matematik öğretmeni adayının limit kavramına yönelik hazırladıkları ders planlarından, derslerinin video kayıtlarından ve yarı-yapılandırılmış görüşmelerin ses kayıtlarından derlemişlerdir. Öğretmen adaylarının öğretimlerinde kullandıkları limit kavramına özgü öğretim stratejileri konuya özgü gösterimler ve konuya özgü etkinlikler bağlamında incelemişlerdir. Limit kavramına özgü kullanılan gösterimler; şekilsel, sayı doğrusu, tablo, grafiksel, cebirsel ve sözel şeklindedir. Limit konusuna özgü etkinlikler ise oyun, günlük yaşam örneği, animasyon, görsellerle desteklenmiş senaryo, analoji, Escher'in resimleri, farklı bilim dalları, polinom fonksiyonlarda limit değerini tartışma, limite ilişkin özelikleri pekiştirme olarak gruplandırılmıştır. Öğretmen adaylarının limit kavramını ağırlıklı olarak ilk derslerinde günlük yaşamla ilişkilendirdikleri ve kendileri ile yapılan görüşmelerde bu stratejiyi tercih etme sebeplerinin öğrencilerin limit kavramını daha iyi anlayabilmelerini sağlamak olarak belirttiklerine, ders akışı boyunca ise sıklıkla sözel ve cebirsel gösterimler kullandıklarına ulaşmışlardır.

Lauten, Graham ve Ferrini-Mundy (1994) "Öğrencilerin Analizdeki (Calculus) Temel Kavramları Anlamaları: Grafik Hesap Makinesi ile Etkileşim" adlı çalışmalarında ikisi bir lisede ileri seviye genel matematik dersi alan, üçü de bir üniversitede ilk dönem genel matematik dersi görmekte olan 5 öğrenci ile görüşmeler yaptıktan sonra bu öğrencilerden biri ile yapılan görüşme sonuçlarına yer vermişlerdir. Lauten ve diğerleri, çalışmalarının amacının öğrencilerin fonksiyonlar ve limit kavram imajları ve bu kavramları anlamaları ile öğrencilerin grafik hesap makinelerini kullanmadaki eğilimlerini saptamak olduğunu belirtmişlerdir. Çalışma sonunda öğrencilerin hesap makinesini minimum ölçüde kullandığına ve limit hakkındaki kavram görünümünün formal tanımdan uzak, dinamik bir görünüm sergilediğine ulaşılmıştır. Dinamik gösterimin önemi doğrultusunda Domingos (2009) ve Hofe (1997) limit kavramının öğretiminde önce grafiksel gösterimin verilmesinin cebirsel gösterime geçişi desteklediğini ifade etmektedirler. Benzer şekilde Elia ve diğerleri (2009) de cebirsel ve grafiksel gösterimlerden yararlanmanın limit kavramının kazandırılmasında etkili olduğunu vurgulamaktadırlar. Bununla birlikte Domingos (2009), grafik üzerinde komşulukları göstermenin ileriye dönük olarak formal tanıma geçişte kolaylık sağladığını belirtilmektedir.

Monaghan, Sun ve Tall (1994) BCS ile limiti anlama üzerine yaptıkları çalışmada, BCS'lerden Derive kullanma olanağı olan 9 öğrenciden oluşan deney grubu ile BCS kullanma olanağı olmayan 19 kontrol grubu öğrencisini karşılaştırarak limit kavramını anlamalarını araştırmışlardır. Deney grubunda öğrencilere sadece Derive programı ile öğretim yapılmış, kontrol grubundaki öğrenciler ise geleneksel öğretim ile limit kavramını görmüşlerdir. Gruplar dikkatli bir şekilde eşleştirilerek çalışma yapılmıştır. Çalışma sonucunda Derive programı ile ders gören öğrencilerin limit kavramı içerisinde "yakınsama" ve "sonsuzluk" algılarını göz ardı ettiklerine öğrencilerin program aracılığıyla sadece çözüme odaklandıklarına ve limit kavramının derinlemesine anlaşılmasında BCS'li veya BCS'siz kolay olmadığına ulaşılmıştır. Buna rağmen BCS'nin kullanımını dahil eden alternatif yaklaşımlar öğrencilerin daha derinlemesine limit görüşü geliştirmelerine katkıda bulunabileceğine dair sonuçlar elde etmiştir.

Benzer bir çalışmada Parks (1995), bilgisayar cebir sistemlerinden Mathematica yazılımı kullanımının öğrencilerdeki limit kavramı oluşmada etkinliğini araştırmıştır. Deneysel yöntemle yürütülen bu çalışmanın sonucuna göre deney ve kontrol grubu öğrencilerine yapılan son testte aldıkları puanlarda anlamlı bir farklılık olmadığı; ancak limitin formal tanımını anlamlandırmada farklılık olduğu saptanmıştır.

Animasyon kullanımının limit öğretimindeki etkisini belirlemek üzere 84 adet lise öğrencisi ile etkinliklerde görselleştirme ve animasyonların Mathematica yazılımı kullanılarak hazırlandığı başka bir çalışmada ise Kidron ve Zehavi (2002), bilgisayar ortamında yapılan görselleştirme ve animasyonların öğrencilerin zihninde kalıcılığı arttırdığına ve bu durumun öğrencilerin formal limit tanımını anlamlandırmalarına yardımcı olduğuna ulaşmışlardır.

Dubinsky ve diğerleri (1996), "Limit Kavramını Anlama: Bağlantılı Yöntem Şeması" adlı nitel ağırlıklı çalışmalarında, limit kavramının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı ile ilgili literatür çalışmalarının sentezine yer vermişlerdir. Limitin informal ve dinamik olarak algılanması üzerindeki görüşleri değerlendirmelerinin yanı sıra dinamik anlayışın öğrenciler tarafından daha kolay algılandığını ve bu anlayışın formal tanımı yapılandırma için bir engel olarak görüldüğünü belirtmişlerdir. Dubinsky, Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas ve Vidakovic (1996) göre limite dinamik yaklaşım APOS teorisindeki şema gibi algılanmalıdır. Onlara göre dinamik yaklaşım formal tanımı yapılandırma yönünde önemli bir basamaktır. Deneysel çalışmalarında ise Dubsinky ve diğerleri (1996) aşağıdaki aktivitelerin kombinasyonundan oluşan bir pedagojik strateji kullanmışlardır;

1. Öğrencilerin zihinsel yapılandırmalar oluşturabilmeleri için tasarlanmış bilgisayar aktiviteleri
2. Bilgisayar ile yapılan çalışmaların tartışılıp kâğıt-kalem ile bunların nasıl yapılabileceğinin anlatılmasının ardından sınıf içinde yapılan aktiviteler
3. Öğrencilerin yapılandırdıkları kavramları kuvvetlendirecek alıştırmalar

Kullanılan pedagojik strateji doğrultusunda bütün öğrenciler 3, 4 ve 5'er kişilik gruplar halinde çalışmış diziler, türev ve integral gibi limiti takip eden genel matematik konuları üzerinde limit kavramını tekrar düşünmüşlerdir.

"Limitler Kavramına Sayısal Yaklaşım" adlı çalışmasında Slomer (1999) grafik ve nümerik değerlerin bir fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamada kullanışlı bir yol olduğunu belirtmiştir.

Kabaca (2006) doktora tezinde limit kavramının öğretiminde Bilgisayar Cebir Sistemlerinden (BCS) Maple programının kullanımının etkilerini incelemiştir. Deneysel desene sahip olan bu araştırmada, Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünün birinci sınıfında okuyan 30 öğrenci birbirine denk 15'er kişilik iki gruba ayrılmıştır. Maple programının etkisini gözlemlemek amacı ile araştırma gruplarından birisine sadece yapılandırmacı öğretim ilkelerine göre ders verilirken, diğer grup aynı zamanda Maple yazılımı yardımı da kullanılmıştır. Sonuç olarak genel başarıya bakıldığında BCS desteğinden yararlanan grup diğer gruptan daha yüksek ortalamaya sahip olsa da bu farkın istatistiksel anlamlılığının olmadığına ulaşılmıştır. Ayrıca BCS desteğinin matematiğe yönelik tutuma anlamlı düzeyde etkisinin olduğu ve BCS kullanımının öğrencileri daha iyi motive olmalarını sağlayıp öğrencilerin daha yüksek bir kavramsal anlama düzeyine ulaştığı tespit edilmiştir.

Büyükkoroğlu, Düzce, Çetin, Mahir, Deniz ve Üreyen (2006) BCS yazılımlarından MATLAB kullanarak hazırlanan ders anlatımının öğrencilerin limit başarısı üzerine etkisini incelemişlerdir. Türkiye'de yer alan bir üniversiteden 52 öğrenci ile çalıştıkları kontrol gruplu deneysel çalışmalarının sonucunda bilgisayar destekli limit öğretiminin öğrencilerin başarısına olumlu yönde katkı sağladığı ancak bunun istatistiksel olarak anlamlı bulunmadığına ulaşmışlardır.

Çetin (2009) "Öğrencilerin Limit Konusunu Kavramaları: APOS Perspektifinden" isimli doktora tezinde birinci sınıf analize giriş öğrencilerinin limit konusunu nasıl kavradıklarını incelemek ve bu kavrayışın araştırmacı tarafından APOS Teorisi kullanılarak tasarlanan öğretim ortamının uygulamasından sonra nasıl değiştiğini araştırmak amacıyla yürüttüğü çalışmasında Orta Doğu Teknik Üniversitenin Matematik

Bölümünde öğrenim gören 25 öğrenci geliştirilen öğretim ortamında 5 hafta boyunca her hafta iki saatlik laboratuvar uygulamalarında işbirlikçi bir ortamda kümeler halinde çalışmış daha sonra dört saatlik derslere katılmışlardır. Ders saatlerinden önce, bilgisayar laboratuvarlarında öğrencileri limit konusunda düşünmeye yönlendirici bilgisayar programlama (ISETL) etkinlikleri kullanılmıştır. Öğrencilerin limit kavramını anlama düzeylerindeki değişimi belirlemek için acık uçlu sorular içeren limit anketi öğrencilere ön-test ve son-test olarak uygulanmıştır. Beş haftanın sonunda, öğrencilerin limit konusunu nasıl kavradıklarını derinlemesine incelemek için, öğrencilerin tümüyle yarı yapılandırılmış görüşmeler düzenlenmiştir. Öğrencilerin limit anketinde verdiği cevaplar nitel ve nicel yöntemler kullanılarak incelenmiş ve görüşme sorularına verilen yanıtlar APOS çerçevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre, oluşturulan genetik çözümlemenin bu çalışmadan elde edilen öğrenci verileri ile uyumlu olduğu gözlenmiştir. Ayrıca araştırmacı tarafından geliştirilen öğrenim ortamının öğrencilerin limit konusunu kavramalarına olumlu etkide bulunduğu gözlenmiştir.

Türev konusunun kavramsal olarak algılanması ile ilgili deneysel bir çalışma yürüten Cooley (1997) genel matematik dersinde BCS (Mathematica)'nın dâhil edilmesinin matematiksel bazı kavramların (limit, türev, anlık değişim oranı, integral, maksimum ve minimum, eğri çizimi) anlaşılmasındaki pozitif etkilerini belirtmiştir. Çalışma sonunda deney grubundaki öğrenciler türevi kavramsal olarak anlamada ve işlemsel becerileri kullanmada daha başarılı olmuşlardır. Böylece Cooley, öğrencilerin hesaplama becerilerinde bir eksilme görülmediğini ve bilgisayar cebiri sistemlerinin kavramsal anlamada öğrencilerin algoritmik süreçleri başarılı bir şekilde yerine getirmelerine yardımcı olabileceğini belirtmiştir.

Cnop (1997), yapmış olduğu çalışmasında eşitsizlikler, limit, süreklilik, lipschitz durumları, fonksiyonların limit değerlerinin yaklaşma hızları, dört boyuta kadar geometrik şekillerin görselleştirilmesi gibi kavramların öğretiminde BCS'ni tavsiye etmiştir. Ayrıca kolejlerde ve orta dereceli okullarda bazı soyut matematik kavramlarının anlaşılmasının güç olduğunu bu bağlamda BCS'nin önemli bir gereksinim olduğunu vurgulayarak Mathematica yazılımlı ile çeşitli uygulamalar önermiştir. Cnop'a göre kontrol altında tutulduğu takdirde BCS'i hafızayı güçlendirir, öğrenmeyi hızlandırır, öğretmenin görevini kolaylaştırır ve öğrencinin matematik konularına karşı ilgisini arttırır. Yine Cnop 2001 yılında yapmış olduğu bir çalışmasında BCS ile hazırlanan dokümanların, kavrayış kazandırmada yetersiz kalan geleneksel matematik dokümanlarına göre ne kadar etkili olduğuna vurgu yapmıştır.

Ubuz (2002), analiz dersinde ISETL ve DERİVE yazılımlarının kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim yöntemi ile öğrencilerin türev kavramını öğrenmelerini incelemiştir.

Çalışmada, matematiksel kavramları bilgisayar ortamında oluşturmalarında öğrencilere yardım etmek için ISETL programı, hesaplamalar ve grafik çizimleri için ise Derive yazılımı kullanılmıştır. Orta Doğu Teknik Üniversitesindeki 59 matematik ve matematik eğitimi öğrencisinin katılımcı olduğu çalışmada, öğrencilerin limit ve türev konularını anlamalarını ölçmek için bir test geliştirilmiş ve ön-test, son-test olarak uygulanmıştır. Uygulama sonrasında öğrenciler arasından rasgele seçilen 11 öğrenci ile mülakat yapılmıştır. Testte yer alan sorulara verilen yazılı ve sözel cevaplar türev kavramının iyi bir şekilde anlaşıldığını ortaya çıkarmıştır.

Ellison'un (1993) araştırmasında analiz kavramlarının grafiksel gösterimleri için tasarlanmış farklı bir yazılım kullanması öğretimde GHM'lerin kavramların görsel temsillerini oluşturmaya veya bu temsiller üzerinde eylem yapmaya bilgisayar yazılımları kadar olanak vermediği sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Buradan hareketle öğretimde GHM kullanımının öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin anlam oluşturmada istenen düzeyde yardım edemeyeceği sonucuna ulaşılabilir.

GHM'lerin limit ve türev problemlerini çözmedeki rolünü inceleme amacıyla yaptığı doktora çalışmasında Girard (2002), çalışmasını üniversite düzeyinde analiz dersini alan toplam 57 öğrenci ile yürütmüştür. Araştırma öncesinde dersin müfredatında ve öğretiminde GHM entegre halde bulunmakta olup, araştırmanın verileri dönem sonunda dersin final sınavı niteliğindeki testte yer alan sorulara öğrencilerin verdiği cevaplardan elde edilmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin problemlerin çözümünde GHM'yi grafiksel, cebirsel ve nümerik açıdan kullanmalarına rağmen problemin çözümüne ulaşmada en başarısız oldukları durumun numerik yaklaşımı kullanma olduğuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin GHM'yi problemlerin çözümünde doğrulama amacından ziyade araştırma amacıyla kullandıkları tespit edilmiştir.

Hoyles ve Noss (1994), DGY'lerin en önemli özelliğinin oluşturulan şekillerin sürüklenebilmesi olduğunu belirterek matematik öğretimindeki önemine değinmiştir. (Hoyles ve Noss, 1999, 2003) matematik eğitiminde teknoloji kullanımı ile ilgili yaptıkları başka çalışmalarında, çalışma sürecinde bilgisayarın, ortam sağlayıcı bir rolde olduğunu belirterek öğrencilerin öğrenme çıktılarını değerlendirmede araştırmacı öğretmene, öğrencilerin düşüncelerine ait izleri gözlemleyebileceği bir pencere sunacağını vurgulamıştır.

BCS kullanımı ve kağıt kalem kullanımının uygun şekillerde entegre edilmesi gerektiğini vurgulayan çalışmalarında Herwaarden ve Gielen (2002) uygun entegre edilmediğinde öğrencilerin kavrayışlarında eksiklikler bulunabileceğini vurgulamışlardır. Bu anlamda şu yapıyı önermişlerdir:

Tablo 4. Kalem Kağıt Kullanımı ile BCS Kullanımının Uygun Bir Şekilde Entegrasyonu (Herwaarden ve Gielen, 2002, s. 142).

Kalem kâğıt ile çözülecek alıştırmalar	Bilinen tiplerde ve çok ayrıntılı olmayacak şekilde seçilmeli
BCS ile çözülecek alıştırmalar	Ayrıntılı bir yönerge eşliğinde
Bazı benzer alıştırmalar	Sürece hem BCS hem de kalem kâğıt hâkim olmalı
Daha zor alıştırma ve uygulamalar	Kâğıt kalem kullanımına da uygun alıştırmalar da olmalı

Muhundan (2005), tasarladığı nümerik yaklaşımla GHM kullanımının farklı branşlarda öğrenim görmekte olan üniversite düzeyindeki öğrencilerin limit ve türev konularının öğrenimi üzerindeki etkisini incelemiştir. Deney-kontrol deseni benimsenen araştırmada toplam 4 sınıftan ikisi deney diğer ikisi kontrol grubu olarak seçilmiş olup araştırmacının haricinde birbirine denk olduğu düşünülen iki öğretmenden her biri kontrol ve deney sınıflarında dersleri yürütmüştür. Uygulama sonucunda öğrencilerin limit ve türev kavramlarındaki başarılarını belirlemek için kavrama yönelik işlemsel beceri, kavramı anlama ve kavramı uygulama türünden sorular içeren iki ayrı test uygulanmıştır. Limit problemlerinin çözümünde geleneksel yöntem (cebirsel yaklaşım) ve nümerik yaklaşımla GHM kullanımı (işlemsel beceri, kavram, uygulama) arasındaki öğrencilerin başarı puanları karşılaştırıldı. Sonuç olarak istatistiksel testlerde, toplamda ve testin üç alt kısmında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğuna ulaşılmıştır.

Aksoy (2007) “Türev Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi” isimli çalışmasında bilgisayar cebiri sistemlerinin üniversite birinci sınıf genel matematik dersindeki türev kavramının öğretiminde öğrencilerin akademik başarı, kavramsal anlama, işlemsel beceri ve problem çözme becerileri üzerindeki etkisini incelemiştir. Deneysel desenin kullanıldığı çalışmada 22 deney, 21 kontrol grubu öğrencisi yer almıştır. Deney grubuna yapılandırmacı yaklaşıma dayalı BCS (Maple) destekli öğretim yapılırken kontrol grubuna sadece yapılandırmacı yaklaşıma dayalı öğretim yapılmıştır. 5 haftalık uygulama sonucunda son test ve son tutum ölçekleri uygulanmıştır. Deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubundakilerden istatistiksel olarak daha başarılı olduğu ortaya çıkmıştır. Son test sonuçları alt boyutlarına göre incelendiğinde ise grupların işlemsel anlama ve problem çözme becerisini gerektiren sorularda birbirine yakın ortalamalara ulaştıkları, kavramsal anlamayı ölçen sorularda ise BCS desteğinden yararlanan deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğu görülmüştür. BCS desteğinin öğrencilerin kavramsal anlamalarına olumlu yönde katkı sağladığı bu araştırmanın sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları incelendiğinde ise deney ve kontrol grubunun arasında az bir fark olsa da istatistiksel olarak matematiğe yönelik tutumlarının aynı kaldığı görülmüştür. BCS desteğinin matematiğe yönelik tutuma anlamlı düzeyde olumlu bir etkisinin olmadığı belirlenmiştir.

Aktümen (2007), yaptığı doktora çalışmasında BCS yazılımlarından birisi olan Maple'nin belirli integral kavramının öğretimindeki etkilerini incelemiştir. Çalışmanın örneklemini üniversite 1. sınıf öğrencilerinden seçilen 47 öğrenci oluşturmuştur. Bu öğrenciler genel matematik konularına yönelik hazır bulunuşlukları ve matematiğe yönelik tutumları denk seviyede 23 ve 24'er kişilik iki gruba ayrılmıştır. Bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisini belirlemek amacı ile araştırma gruplarından birinde sadece yapılandırmacı öğretim prensiplerine göre ders işlenirken diğer grupta yapılandırmacı öğretim prensiplerine ek olarak Maple programı desteği ile araştırmacı tarafından geliştirilen yazılımlardan yararlanarak ders işlenmiştir. 28 ders saati süren uygulamanın ardından belirli integral testi ve tutum ölçeği uygulanmıştır. Elde edilen nicel ve nitel veriler analiz edilerek yorumlanmıştır. Çalışmanın sonucunda grupların problem çözme düzeyleri ortalamaları ve matematik tutum ölçeği puanları ortalamaları arasında Maple kullanan gruptaki öğrencilerin lehine anlamlı bir fark olduğu belirtilmiştir.

Aktümen ve Kaçar (2008), 2005-2006 eğitim-öğretim yılında eğitim fakültesinde öğrenim görmekte olan 47 birinci sınıf öğrencisini örneklem aldığı araştırmasında, BCS yazılımlarından Maple kullanan öğrencilerin matematiğe yönelik tutuma etkisini incelemişlerdir. Öğrenciler, genel matematik hazır bulunuşluk testi ve matematik tutum ölçeği ön test kullanılarak iki gruba ayrılmıştır. Araştırma gruplarından biri, sadece yapılandırmacı yaklaşım prensiplerine göre belirli integral kavramını işlerken diğer grup yapılandırmacı yaklaşım prensiplerine ek olarak Maple programı desteği ile araştırmacı tarafından geliştirilen yazılımlardan da yararlanarak belirli integral kavramını işlemiştir. 28 ders saati süren uygulamanın ardından matematik tutum ölçeği son test uygulanmış, nicel veriler analiz edilerek yorumlanmıştır. Matematik tutum ölçeği ön test puanlarının kontrol değişkeni olarak alındığı ANCOVA sonuçları, öğrenme ortamında Maple kullanan öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarının daha olumlu olduğunu göstermiştir.

Castro (2011), BCS yazılımlarından birisi olan Maple ile yürütülen derslerde izlenen iki farklı yöntemin, ortaöğretim öğrencilerinin limit ve türev kavramına yönelik anlamalarını incelediği doktora çalışmasında iki sınıftan rastgele seçilen birinde öğrenciler, yazılım içerisinde kavramları incelemek için kullanacakları yapıları kendileri programlama yoluyla oluşturmuşlardır. Bu yapılar diğer sınıfta yer alan öğrencilere araştırmacı tarafından hazırlanıp dersin başlangıcında sunulmuştur. Literatürde limit ve türev kavramlarının APOS teorisi bağlamında ortaya konan genetik ayrışımları kullanılarak her iki grupta yürütülen öğretim süreçlerindeki etkinlikler geliştirilmiştir. Ayrıca araştırmada kullanılan mülakat ve testlerdeki sorular limit ve türev kavramlarının genetik ayrışımları içerisinde yer alan kazanımlara dayalı olarak hazırlanmıştır. Çalışmanın sonuçlarında programlama yapmanın öğrencilerde öğrenmeyi olumsuz etkilediğine ve bilişsel yük getirdiğine böylece formel limit tanımını anlamada hazır yapıları kullanan öğrencilerin programlama yapan öğrencilere nazaran daha iyi anlama sergilediklerine ulaşılmıştır. Castro, programlama yapan öğrencilerin dersin amacı olarak hedef kavramları irdelemeyi değil, bu kavramları incelemede kullanılan yapıları programlama yoluyla oluşturma olarak gördüklerini belirtmiştir.

Sevimli ve Delice (2015) "Teknoloji destekli öğretim teorik farkındalığı geliştirebilir mi?" sorusunu yükseköğretim matematiğinin önemli teoremlerinden biri olan Analizin Temel Teoremi bağlamında değerlendirmek amacıyla bir çalışma yapmıştır. Çalışmada bir öğretim deneyinin etkililiği nitel veri toplama süreçleri üzerinden, var olan durum ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıfında yer alan 84 öğrenciyi iki eşit gruba ayıran Sevimli ve Delice, deney grubunda Bilgisayar Cebiri Sistemi (BCS) destekli yaklaşım, kontrol grubunda ise geleneksel yaklaşım takip edilerek öğretim sürecini yürütmüşlerdir. Öğretim süreci öncesi ve sonrasında uyguladıkları testler ile öğrenim girdi ve çıktılarını değerlendirip, görüşme bulgularından yararlanmışlardır. Bulgulardan elde ettikleri sonuçlara göre kontrol grubundaki öğrenciler, analizin temel teoremini teorik olarak ifade edebilmelerine karşın, teorik bilgilerin gerekliliklerini çözüm sürecine yansıtamamışlardır. Ayrıca süreç sadece analitik değil aynı zamanda görsel çözümler ile desteklendiğinde öğrencilerin daha yüksek teorik farkındalığa sahip olabileceğine ulaşılmıştır.

Bu ve benzeri çalışmalar incelendiğinde sadece projelerde veya grup halinde yapılan çalışmalarda değil matematik araştırmacılarının bireysel çalışmalarında da genel matematikteki birçok kavram hakkında BCS teknolojisinin kullanımı ile ilgili çalışmalara yer verdikleri görülmüştür. Bu çalışmalar genel anlamda değerlendirildiğinde BCS programlarının birçoğunun öğrencilerin genel matematik problemlerini çözmek için sayısal, cebirsel ve grafiksel gösterimleri kullanmalarına fırsat sunduğu konusunda bir uzlaşma olduğu anlaşılmaktadır.

Literatür çalışmalarının ortak sonucuna bakıldığında öğrenciler tarafından güç kavranılan, çoğunlukla yüzeysel olarak öğrenilen ve kavram yanılgılarıyla fazlasıyla karşılaşılan genel matematik konularından birinin limit-süreklilik kavramı olduğunu görmekteyiz. Analiz dersi içerisinde yer alan bu kavramların öğrenciler tarafından iyi düzeyde anlaşılması, kavramların hem geometrik hem de cebirsel boyutuna ilişkin yeterli seviyede soyut düşünme ve anlama geliştirmeleri beklenmektedir. Buradan hareketle, öğrencilerin limit-süreklilik kavramının formal tanımına yönelik iyi seviyede anlama geliştirmeleri için, limit-süreklilik kavramının öğretimi ve BCS'nin öğretim amaçlı kullanımlarını araştıran literatür çalışmaları dikkate alındığında genel olarak genel matematik konularının öğretiminde görselleştirmenin matematiksel kavramları anlamada kolaylaştırıcı bir rolü olduğu yönündeki uzlaşı doğrultusunda BCS kullanımının faydalı ve gerekli olduğuna ulaşmaktayız.

2. 1. 2. 2. Öğrencilerin SOLO ile Değerlendirildiği Çalışmalar

Alan yazında matematik ve istatistik alanında öğrencilerin belli kavramlarla ilgili anlamalarını ve matematiksel düşünme becerilerini tanımlamak ve yorumlamak için SOLO taksonomisini kullanan birçok çalışma yer almaktadır (Akkaş, 2009; Ardıç, Yılmaz ve Demir, 2012; Bağdat ve Anapa-Saban, 2014; Çelik, 2007; Didiş ve Ubuz, 2010; Groth, 2002; Groth ve Bergner, 2006; Jones, Langrall, Thornton ve Mogill, 1997; Jones ve diğ., 2000; Kabaca ve Musan, 2014; Kamol ve Yeap, 2010; Kaplan ve Öztürk, 2014; Koç, Işıksal, Osmanoğlu, Çetinkaya, Aşkun, Bulut, Seviş ve Esen, 2011; Koparan ve Güven, 2014; Lam ve Foong, 1996; Langrall ve Mooney, 2002; Lian ve Idris; 2006; Mooney, 2002; Özdemir ve Göktepe-Yıldız, 2015; Pegg ve Coady, 1993; Pegg ve Davey, 1998; Tuna, 2011; Vallecillos ve Mareno, 2002; Watson ve Moritz, 2000; Wongyai ve Kamol, 2004; Xistouri, 2007). SOLO öğrencilerin belirli görevlere verdikleri cevapları nitelik yönünden analiz etmek için hiyerarşik bir model sunmaktadır (Pegg ve Tall, 2005). Öğrencilerin gelişim evrelerini de dikkate alan SOLO taksonomisinin düşünme evreleri incelendiğinde soyut (formal) evre erken yetişkinlik dönemine denk gelmektedir (Biggs ve Collis, 1982, 2014; Halloway, 2010). Özellikle son dönemlerde yapılan çalışmaların öğrencilerin vermiş olduğu cevapların niteliğini ölçerek o öğrencilerin seviyelerini belirlemeye yönelik olduğu söylenebilir. Ayrıca ilköğretim, ortaöğretim ve yükseköğretim düzeylerinde matematik alanında SOLO taksonomisi kullanılarak yapılan çalışmaların bulunduğu ve bu çalışmaların daha çok nitel çalışmalar olmasının yanı sıra nicel çalışmalara da rastlandığı görülmektedir.

Leikin, Berman ve Zaslavsky (2000), örneklemi ortaöğretim düzeyinde öğrencilerden oluşan çalışmasında öğrencilerin simetri konusunu anlamaya yönelik düşünme düzeylerini tespit etmeyi amaçlamıştır. Mevcut çalışmada öğrencilerin öncelikle yatay ve düşey simetri ekseni kavramlarını oluşturduğu ve ardından eğik simetri kavramını oluşturduğu görülmüştür. Çalışmanın sonunda öğrencilerin öğrenme çıktılarının ve düşünme düzeylerinin daha çok SOLO taksonomisine göre sınıflandırıldığı görülmektedir.

Çalışmalarında cebirsel düşüncenin gelişiminde SOLO modeli ile Dubinsky'nin process-object en-capsulation modelini karşılaştıran Pegg ve Tall (2004), SOLO modelinin farklı sevi-yelerde yer alan öğrencilerin cevaplarının yapısını belirlemek için uygun olduğunu ifade etmiştir. Böylece SOLO modelinin öğrencilerin öğrenmelerini değerlendirmede etkili bir araç olarak kullanılabileceği söylenebilir.

Rider (2004) yükseköğretim düzeyinde iki üniversiteden toplam 313 öğrenci ile çalıştığı yarı deneysel desenli çalışmasında çoklu gösterimlere dayalı müfredatın cebir kavramlarının sembolik, tablo, grafik gösterimler ve aralarındaki ilişkiyi anlamaya etkisini araştırmıştır. Çalışma kapsamında belirlediği konu ile ilgili oluşturduğu beş problemi her iki gruba da ön test ve son test olarak uygulamıştır. Ön test ve son test puanlarını karşılaştıran Rider deney grubu öğrencilerinin lehine sonuçla karşılaşmıştır. Ardından her iki gruptan sekiz öğrenci ile mülâkat yapmış ve elde ettiği nitel verileri SOLO taksonomisine göre incelenmiştir. Sonuç olarak göre deney grubundaki öğrencilerin ilişkileri daha iyi bir şekilde ortaya koyduğuna ulaşmıştır. Çalışmanın sonucunda öğrenci cevaplarının var oldukları düzeyden belirlenen üst düzeylere geçmesinde, kavramlara yükledikleri anlamların işlemsel boyuttan uzaklaşarak daha temsil edici ve daha yorumlayıcı olmasında, öğretmenlerin öğrencilere sundukları öğrenme deneyimleri ve fırsatların önemine vurgu yapılmıştır. Ayrıca bu çalışma gibi geniş bir grupla, grubun belirli görev hakkındaki bilgi, beceri ve anlamasını açığa çıkarmak amacıyla yapılan çalışmalarda SOLO taksonomisini kullanmanın çalışma için uygun olacağı belirtilmiştir.

Lian ve Idris (2006) 10. sınıf seviyesinde öğrenim görmekte olan 40 öğrenciyi örneklem aldığı araştırmasında öğrencilerinin lineer denklemlerin kullanımını içeren cebirsel çözüm becerilerini SOLO Taksonomisi kullanarak değerlendirmiştir. İki bölümde gerçekleşen çalışmanın birinci bölümünde öğrencilere 8 açık uçlu problem içeren yazılı sınav uygulanmıştır. İkinci bölümde ise sınav sonuçlarına göre her bir seviyeden iki öğrenci olmak üzere seçilen toplam sekiz öğrenciye klinik mülakat uygulanmıştır. Araştırmadan elde edilen verilere göre öğrenci cevaplarının büyük bir kısmı Tek Yönlü Yapı (TY) ve Çok Yönlü Yapı (ÇY) düşünme seviyelerinde yer almıştır. Böylece öğrencilerin çoğunun cebirsel semboller kullanarak genellemeleri ifade etmede zorlandıkları fakat üst seviyelerde yer alan öğrencilerin tekrar eden lineer ilişkileri araştırma ve değişkenler arasındaki lineer ilişkileri tanımlamada başarılı olup problemde verilen tüm bilgileri koordineli bir şekilde kullanabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Buna karşın düşük seviyeli öğrenciler değişkenler arasındaki ilişkileri ifade etmek için gerekli cebirsel kavramlarla ilgili anlamalarda zorlanmış olup çizme ve sayma metotlarını kullanmışlardır. Bu çalışmanın sonucu, 10. sınıf gibi üst sınıf seviyesinde bulunan öğrencilerin, kavramlar hakkındaki bilgi ve becerilerini değerlendirmede SOLO taksonomisinin kullanılabileceğini göstermektedir.

Çelik (2007), nitel olarak gerçekleştirdiği çalışmasında üniversitede öğrenim görmekte olan 8 matematik öğretmeni adayının cebirsel düşünme becerilerini SOLO taksonomisi kullanarak karakterize etmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini kullanmasını gerektiren 11 problem hazırlamış ve bu problemleri kısıtlama olmaksızın Derive yazılımı ile çözmelerini sağlamıştır. Ardından bu 11 problem üzerinden klinik mülakatlar gerçekleştirmiştir. SOLO taksonomisine göre yapılan analiz sonucunda, çoğu öğretmen adayı sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma, çoklu gösterimlerden yararlanma ve genellemeleri formül etmede İlişkilendirilmiş Yapı (İY) düşünme seviyesinin altında yer almıştır. Bu durum sahip oldukları bilgi ve becerileri tutarlı bir yapı içerisinde bütünleştiremedikleri tespitini yapmıştır. Ayrıca çalışmada kullanılan SOLO taksonomisi, araştırmacı tarafından matematik öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerini sınıflandırmak açısından uygun bir değerlendirme olarak tanımlanmıştır.

Xistouri (2007), 4-6. sınıf öğrencilerinin simetri bilgilerini incelemeyi amaçladığı çalışmasında öğrenci cevaplarını SOLO taksonomisine göre sınıflandırmıştır. Öğrenci cevaplarının yüzdelik olarak hesaplanıp sınıflandırıldığı bu çalışmanın sonucunda öğrencilerin %16'sının yapı öncesi (prestructural) düzey için hedeflenen soruları çözebildiği, tek yapılı (unistructural) düzeydeki iki sorunun çözülme yüzdesinin %31-%45 aralığında olduğu, çok yapılı (multistructural) düzeyindeki başarının %15-%30 aralığında olduğu, ilişkisel (relational) düzeydeki başarınınsa %1-%14 aralığında olduğunu tespit etmiştir. 4-6. sınıf öğrencilerinin en üst düzey olan kapsamlı soyutlama (extended abstract) düzeyine geçmiş olması beklenmediğinden bu düzey incelenmemiştir. Ayrıca bu çalışma SOLO Taksonomisinin düşünme becerilerini sınıflandırmak açısından uygun bir değerlendirme olduğuna vurgu yapmıştır.

Bağdat ve Anapa-Saban (2014) 8. sınıf öğrencilerinin genellemeleri formüle etme, sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma ve çoklu gösterimlerden yararlanma şeklinde sıralanan cebirsel düşünme becerilerini SOLO Taksonomisi ile incelemeyi amaçladıkları çalışmada nitel araştırma yöntemini kullanmışlardır. Çalışma 2011-2012 Eğitim- Öğretim yılı ikinci döneminde Bursa ili İnegöl ilçesindeki ilköğretim okullarından birinde 15 tane 8. sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmada uzman görüşler doğrultusunda araştırmacılar tarafından hazırlanan sekiz problem kullanılmış ve öğrencilerle bu problemler üzerinde klinik görüşmeler yürütülmüştür. Toplanan veriler betimsel yöntemle analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin çoğunluğunun SOLO Taksonomisine göre ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyesinin altında yer aldığı ve en çok zorlandıkları beceri sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma becerisi olduğu görülmüştür. Öğrencilerin akademik başarılarına göre yapılan analizde ders notu yüksek öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin diğer öğrencilere göre daha yüksek olduğu görülmüştür.

Dinamik matematik yazılımları öğrencilerin deneme yanılmalar yapabileceği ortamlar sunarak matematiksel kavramları kendi kendilerine keşfetmelerine imkân tanıdığı gibi matematiksel anlamanın daha kalıcı ve etkili şekilde desteklenebileceğini belirten Kabaca ve Musan (2014) çalışmalarında dinamik matematik yazılımı destekli ortamda matematik öğrenen öğrencilerin matematiksel anlamalarının nasıl etkilendiğini belirlemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda öğrenci çıktılarını matematiksel anlamayı ölçme yöntemlerinden biri olan SOLO taksonomisine göre sınıflandırmıştır. Yarı deneysel kontrol grupsuz desene göre tasarlanan çalışma tek grup öntest-sontest ve nitel veriler ile desteklenmiştir. 18 adet 8. sınıf öğrencisi oluşan çalışmanın örneklemi ile 4 hafta boyunca denklem ve eşitsizlikler konusunu çalışılmıştır. Öğrenme ortamında, yapılandırmacı bir felsefe ışığında dinamik matematik yazılımlarından (DMY) GeoGebra kullanılmış, özellikle öğrencilerin farklı temsillerden yararlanarak deneme yanılmalar yapmalarına fırsat sunulmuştur. Öğrencilerin matematiksel anlama seviyeleri açık uçlu sorulardan oluşan ön Kavramsal Anlama Tespit Sınavı (ön-test) ve son Kavramsal Anlama Tespit Sınavı (son-test) yardımı ile SOLO sınıflandırmasına göre belirlenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin cevaplarında üzerinde durdukları temel noktaları belirlemek amacıyla öğrencilerin ön-test ve son-test cevapları içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Çalışmanın sonunda, parametrik olmayan testlerden Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi ile öğrencilerin ön-test ve son-test SOLO anlama seviyeleri arasındaki farkın incelenmesi neticesinde anlamlı bir fark bulunmamasına rağmen öğrenci cevaplarının SOLO anlama seviyelerinde bir parça artış gösterdiği ve son-test cevaplarında farklı temsilleri bir arada kullanma eğilimi sergiledikleri gözlemlenmiştir. Böylece, farklı temsiller ışığında öğrenme tecrübesini hiç yaşamamış öğrencilerin matematiksel anlama seviyelerinin doğrudan etkilenmelerinin zor olduğuna ancak farklı temsilleri kullanabilme alışkanlığı kazanmaya başladıklarına ulaşılmıştır.

Yukarıda özetlenen çalışmalarda SOLO taksonomisi kullanımıyla öğrencilerin gelişim evrelerinin dikkate alındığı, belli bir soru ile ilgili yazılı ve/veya sözlü cevaplarından o sorunun gerektirdiği bilgi, beceri ve anlama ilgili düşünme seviyesini tanımlamanın mümkün olduğu görülmektedir. Bununla birlikte geniş veya küçük grupların belli bir görev hakkındaki bilgi, beceri ve anlamasını açığa çıkarmada SOLO taksonomisi kullanımının uygun bir değerlendirme olduğu yapılan çalışmaların ortak sonuçları arasındadır. Ayrıca analiz ve cebir konularının öğretiminde öğrencilerin SOLO ile değerlendirilmesinin önemine vurgu yapıldığı, kavramlarla ilgili olarak öğrencilerin soyut düşünmelerini ve anlamalarını seviye halinde değerlendirmede bu taksonominin güçlü araştırma sonuçları ortaya koyduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmanın MYO öğrencilerinin limit-süreklilik kavramlarını anlamada soyut düşünme seviyelerinin, SOLO taksonomisi ile belirlenmesi yönüyle literatüre önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Öte yandan bu çalışmanın SOLO taksonomisinin potansiyeline vurgu yapacağı düşünülmektedir.

2. 2. Literatür Taramasının Sonucu

Euclid ve Archimedes tarafından düzlem geometri bağlamında eğrisel kenarlara sahip şekillerle ilgili teoremlerde kullanılmış olan limit ve süreklilik kavramları günümüz analiz dalını temel alan Newton ve Leibniz'in çalışmalarında yer aldığı görülmektedir. Analiz dersi içerisinde yer alan türev, integral, yaklaşıklık kuramı (approximation theory), Taylor serileri vb. konuların tanımları, ilk kez Cauchy tarafından Ɛ-δ tanımı olarak da bilinen limit ve süreklilik kavramlarının formal tanımı üzerine inşa edilmiş olması, bu kavramların matematiğin analiz dalının her konusuna değinen en temel kavram olduğunun göstergesidir. Sahip olduğu bu öneme karşın limit- süreklilik kavramlarını öğrenmeye ve öğretmeye ilişkin literatür taraması kısmında referans verilen araştırma raporlarının ortaya koyduğu sonuç, öğrencilerin cebir ve aritmetiksel metotlar kullanarak anlamada en çok zorlandığı kavramların limit ve süreklilik olduğudur (Aztekin, 2012; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Bayar ve Gündüzalp, 1998; Bezuidenhout, 2001; Bukova, 2006; Cornu, 1981, 1991; Çetin, 2009; Dubsinky ve diğ., 1996; Fernandez, 2004; Gürbüz ve Pırtıcı, 2014; Juter, 2006; Kabaca, 2006; Kasten, 1988; Kula ve Güzel, 2015; Özmantar ve Yeşildere, 2008; Parameswaran, 2007; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008; Tall, 2004; Tall ve Vinner, 1981; Yungui ve Guofan, 1995). Yaşanan bu zorluklar ilgili literatür aracılığıyla şöyle özetlenebilir:

1. Tanım içerisinde niceleyicilerin kullanımı ve limitin varlığını ispat etmedeki rolünün öğrenciler için yeni olması,
2. Öğrencilerin önceki matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki karşılıklı etkileşimi anlamaya olanak vermemesi. Sonuç olarak verilen bir limit durumunda gerekli eşitsizlikleri kurmada zorluk yaşanması,
3. Öğrencilerin limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerden değişkenlerin değer aralıklarını bulmada ve ε, δ değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirleme adına eşitsizliklerde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşaması.

Başka bir ifadeyle, öğrenciler limit-süreklilik kavramına ilişkin sahip oldukları kavram imgelerini analiz bağlamında formal teori ile tutarlı olacak şekilde ilişkilendirememektedir. Dolayısıyla öğrencilerin bu süreçte yaşadıkları sıkıntı matematiksel bir kavramı anlamlandırma ve genelleme sorunudur. Daha vahim olan, bu durumun hizmette olan öğretmenlerde de görülmesidir. Çalışmalarda rapor edilen kavram yanılgılarının nedeni analiz bağlamında gereken öğrenmenin gerçekleştirilememesi ve bunun sonucunda limit-süreklilik kavramlarına atfedilen geçersiz özelliklerdir (Akbulut ve Işık, 2005; Barak, 2007; Baştürk ve Dönmez, 2011; Bezuidenhout, 2001; Dönmez, 2009; Duru, Köklü ve Jakubowski, 2010; Elia ve diğ., 2009; Ervynck, 1981; Jordaan, 2005; Özmantar ve Yeşildere, 2008; Swinyard ve Lockwood, 2007; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner; 1981; Williams, 1989, 1990, 2001). Literatürde bu durumun sonucu olarak ortaya çıkan kavram yanılgıları aşağıdaki gibi özetlenebilir;

1. Limit ve süreklilikle ilgili ön kavrayışlara dayalı yanılgılar: Öğrencilerin, öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin önceki matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki karşılıklı etkileşimi anlamaya olanak vermemesi. Sonuç olarak verilen bir limit durumunda gerekli eşitsizlikleri kurmada zorluk yaşanması.
2. Limit değerinin asla ulaşılamayacağı yanılgısı: Öğrencilerin, öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin limit değerinin fonksiyonun olabildiğince yaklaştığı ancak hiçbir zaman ulaşılamayan bir değer olduğu inancı.
3. Limitin istendiği kadar kesin yapılabilecek değer olduğu yanılgısı: Öğrencilerin, öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin aynı sınır değeri olduğu, fonksiyonun limit değeri üstünde değer alamayacağı, bir fonksiyonun birden çok limit değerinin olabileceğini belirtilmesi.
4. Limit almanın fonksiyonda yerine koyma olduğu yanılgısı: Öğrencilerin, öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin limiti fonksiyonda istenen değeri yerine yazma olarak görmeleri hatta $x \to \infty$ için limiti 0'a eşit ise $f(\infty)=0$ olabileceğinin belirtilmesi.
5. Tanımsızlık ve belirsizlik içeren limit durumundaki zorluklar: Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının birbirinden ayırt edilememesi, öğrenci, öğretmen adayı ve öğretmenlerin sonsuzluk kavramını algılamakta zorlanması, sonsuzun limit olarak algılanması sanki fonksiyonun çok uzak bir noktada “sonsuzda” limitinin var olması yanılgısı. Limitin varlığını ispat etmede kullanılan niceleyicilerin rolünün öğrenciler için yeni olması sonucu limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerden ε, δ değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirleme ve değer aralıklarını bulma sürecinde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşanması.
6. Sürekli fonksiyonlara dair kavram yanılgıları: Öğrenci, öğretmen adayı veya öğretmenlerin fonksiyonun bir noktasında limit varsa o noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiği inancı, fonksiyonun grafiğinde sıçrama ve kırılma varsa fonksiyon o noktada tanımlı bile olsa limiti olamaz inancı, fonksiyon grafiğinin el kaldırmadan çizilmesinin süreklilik için ölçüt olarak ele alınması.

Kavrama atfedilen bu geçersiz özelliklerin, geleneksel olarak gerçekleştirilen analiz öğretimi sonucunda öğrencilerin kavram imgelerine yükledikleri anlam yapılan öğretimin bu genelleme sürecini gerçekleştirmede istenen düzeyde etkili olmadığı sonucunu ortaya çıkarmaktadır.

Limit-süreklilik kavramlarının bu denli yoğun ve anlaşılmasının güç olması bazı eğitimcileri bu kavramlarla ilgili informel yaklaşım sergileme eğilimine yöneltmiştir (Fernandez, 2004; Gass, 1992). Bu yönelimin aksine, bazı eğitimciler limit-süreklilik kavramlarının formel tanımını soyut düşünmeye geçişte, formel ve kesin matematiksel ifadelere yönelik anlam çıkarmada ve matematiksel ispat yapabilme becerisi kazanmada bir başlangıç noktası olarak görmektedirler (Ervynck, 1981; Swinyard ve Lockwood, 2007). Belirtilen yaklaşımlardan ilkinin ortaöğretim seviyesinde benimsenmesi uygun olabilir. Fakat ileri matematik eğitiminin amaçları doğrultusunda öğrencilerin soyut düşünme yeteneğinin gelişmesi için formel matematiksel düşünüp, formel ispat yapabilme becerisine sahip olmaları gerekli görülmektedir. Bu bağlamda matematiksel ifadelere yönelik anlam çıkarmada ve formel ispat teknikleri kullanmada başlangıç noktası olduğu düşünülen limit-süreklilik kavramlarının formel tanımına ulaşmada öğrencilerin yeterli bir anlama gerçekleştirmeleri beklenmektedir. Fakat yapılan araştırmaların sonuçlarından beklenen durumun geleneksel öğretim süreçleri sonucunda gerçekleşemediği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrencilere formel teoriden uzaklaşmadan bu süreçte yardım edecek ve daha iyi anlamalar geliştirmelerine olanak sağlayacak farklı öğretim stratejilerinin ve öğrenme ortamlarının tasarlanması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Çalışmamızda farklı öğretim stratejileri ve farklı öğrenme ortamları dikkate alınmasının yanı sıra limit-süreklilik kavramları öğretiminde formel tanımı benimseyen Ervynck (1981), Swinyard ve Lockwood'un (2007) yaklaşımlarından önce öğrencilerde bu kavramlara ilişkin sezgisel yaklaşımın oluşması benimsenmiştir. Buna birinci gerekçe olarak bu çalışmanın lisans ve ön lisans düzeyinde eğitim veren Mesleki ve Teknik Eğitim kurumları ile ortaöğretim kurumlarının hedef aldığı istihdam sahaları arasında kalan boşluğu doldurma işlevini yerine getiren üniversitelerin Meslek Yüksekokulu öğrencileri ile yürütülmüş olmasıdır. İkinci gerekçe ise, yapılan öğretimin amacı doğrultusunda ileri matematik eğitimi bağlamında ister bilgisayar destekli ister farklı bir formda hazırlanan öğrenme ortamı, hiç kuşkusuz, öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin soyut düşünme becerilerini geliştirme ve sezgisel bir anlama kazandırma amacı taşımasıdır. Daha açık olarak MYO öğrencilerinin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin en azından soyut düşünme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan araştırmacı öğretmen, bu kavramların öğretimi ile geliştirilmesi gereken bazı kazanımları da MYO öğrencilerine kazandırmayı amaçlamıştır.

Juter (2006) limit kavramının öğretiminde farklı öğretim stratejileri kullanıldığını, limit kavramının bazen önce sezgisel olarak verildiğini bazen de Weierstrass'ın formal tanımı ile öğretildiğini ifade etmektedir. Ülkemizde ise liselerde limit kavramı sadece sezgisel olarak öğretilmekte ve öğretim programında limitin formal tanımının verilmemesi tavsiye edilmektedir (MEB, 2006). Aşağıdaki aşamaların limit ve süreklilik kavramlarının öğretimi ile geliştirilmesi gerektiği Pedagoji Enstitüsü Yönergeler'ine (Pedagogical Institute Instructions) belirtilmiştir (Elia ve diğ., 2009).

1. Fonksiyonun grafiği verildiğinde x, $x_0 \in R$'ye yaklaşırken fonksiyonun limitini bulma
2. Fonksiyonların limitine ilişkin özelikleri bilme ve bu özellikler yardımıyla bir fonksiyonun limitini bulma
3. Grafiği yardımıyla bir fonksiyonun limitinin sonsuz olduğunu ifade etme
4. Polinom ya da rasyonel fonksiyonların x, +∞ ya da –∞ a yaklaşırken ki limitlerini hesaplama
5. Üstel ve logaritmik fonksiyonların grafiklerini ve bu fonksiyonların limitlerini bilmenin geliştirilmesi

Ülkemiz 2001 Prag Bildirgesi'nden itibaren Bologna Süreci hedeflerini kendisine amaç edinmiş bu doğrultuda 2006'da aktif olmak üzere yükseköğretim ders içeriklerini yenilemiştir. Yükseköğretim matematik ders içeriklerini incelediğimizde ülkemiz Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (OMDÖP) ile paralel olduğu görülmektedir. Bu bağlamda limit alt öğrenme alanına ilişkin kazanımlar da yükseköğretim ile paralellik göstereceğinden bu kazanımlar aşağıdaki gibi belirtilebilir:

(a) Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasını örneklerle açıklar
(b) Bir fonksiyonun bir noktadaki soldan ve sağdan limitini örneklerle açıklayarak fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir
(c) Limit ile ilgili özellikleri belirtir ve uygulamalar yapar
(d) Parçalı tanımlı fonksiyonların ve mutlak değer fonksiyonunun limitleri ile ilgili uygulamalar yapar
(e) Genişletilmiş gerçek sayılar kümesini belirtir, gerçek değişkenli ve gerçek değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit ve sonsuz limit kavramlarını grafik üzerinde açıklar
(f) Trigonometrik fonksiyonların limiti ile ilgili özellikleri belirtir
(g) Belirsizlik durumlarını belirtir ve verilen noktalarda belirsizlik hâlleri $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty$ olan fonksiyonların limitini hesaplar (MEB, 2006).

Yukarıda belirtilen kazanımlara sahip olması beklenen öğrenciler için yetersiz ve uygun olmayan öğretim stratejileri ve öğrenme ortamları kullanıldığında öğrencilerin soyut düşünme becerileri gelişemeyeceği gibi öğrenmenin de gerçekleşemeyeceği açıktır. Ülkemizde de söz konusu kazanımların hangi öğrenme ortamı ve hangi öğretim stratejisi yardımıyla öğrencilere kazandırılabileceğine dair açıklamalar verilmemektedir. Oysa öncelikle çalışılacak olan konu limit-süreklilik kavramlarının öğretimine ilişkin tasarlanacak öğretim ortamı, öğretim yöntemi ve elde edilen öğrenci cevaplarının değerlendirilmesi önem taşımaktadır. Bu çalışmada hazırlanan çalışma yaprakları doğrultusunda öğrencilerin:

1. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme;
2. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme;
3. Fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme;
4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme;
5. Limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme;

ile ilgili kazanımları elde etmeleri sürecinde araştırmacı öğretmen öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin gelişip gelişmediğini incelemeyi ve limit-süreklilik konusu ile ilgili nasıl öğrendiklerini anlayabilmeyi, öğrenmelerini değerlendirmeyi ve yorumlamayı düşünmektedir.

Yapılan araştırmalardan ortaya çıkan bir başka sonuç ise öğrencilerin geleneksel öğretim ortamında limit-süreklilik kavramlarının tanımına ilişkin uygulama ve grafiksel yorum yapmaları gereken durumlarda başarısız olmalarıdır. Oysa Elia ve diğerleri (2009) belirttikleri gibi cebirsel, tablosal ve grafiksel gösterimlerden yararlanma limit-süreklilik kavramlarının kazandırılmasında daha etkilidir. Ayrıca grafikten ve tablodaki f(x) fonksiyonunun aldığı değerlerden limiti tahmin etmek kolaydır. Fakat burada grafiği kolayca çizilmeyecek kadar güç fonksiyonların davranışını sezgisel olarak bulmanın hiç de kolay olmadığını unutmamak gerekir. Dolayısıyla bu durum öğrencilerin grafiksel muhakeme yapmadaki başarısızlıklarına birinci sebep olarak sunulabilir. İkinci sebep ise sunulan grafiksel örneklerin statik yapıda olması sonucu öğrencilerin zihinlerinde geçersiz kavram imgelerinin oluşturulması gösterilebilir. Bu durumdan hareketle öğretim süreçlerinde sunulan grafiksel temsillerin dinamik yapıda olması ve öğrencilere bu yapılar üzerinde eylemler gerçekleştirebilme olanağı sunulması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. İşte bu bağlamda, matematik eğitiminde özel olarak limit-süreklilik kavramlarının öğretiminde teknoloji kullanımı, özellikle de dinamik geometri (DGY), grafik hesap makineleri (GHM) ve bilgisayar cebir sistemi (BCS) gibi yazılımlarının kullanımı üzerinde önemle durulmaktadır.

GHM'nin kullanımı yanı sıra Ellison'un (1993) araştırmasında analiz kavramlarının grafiksel gösterimleri için tasarlanmış farklı bir yazılım kullanması öğretimde GHM'lerin kavramların görsel temsillerini oluşturmaya veya bu temsiller üzerinde eylem yapmaya bilgisayar yazılımları kadar olanak vermediği sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Buradan hareketle öğretimde GHM kullanımının öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin anlam oluşturmada istenen düzeyde yardım edemeyeceği sonucuna ulaşılabilir. DGY'lerin en önemli özelliği oluşturulan şekillerin sürüklenebilmesidir (Hoyles ve Noss, 1994). Oysa DGY, BCS yazılımlarında olduğu kadar cebirsel ifadeler üzerinde işlem gerçekleştiremediği gibi DGY ortamında oluşturulan geometrik yapılar program içerisinde değiştirildiğinde eş zamanlı olarak cebirsel ifadelerin değişimi izlenememektedir. Diğer taraftan BCS yazılımları program içerisinde sembolik olarak girilen matematiksel ifadelerin karşılık geldiği grafik gösterimini ekrana yansıtabilme özelliğine sahiptir. Çalışmamızda kullanılan Derive yazılımı içerisinde bir objenin cebirsel ifadesinde değişiklik meydana geldiğinde eş zamanlı olarak grafiksel gösterimine bu değişikliğin yansımaması dezavantaj gibi gözükse bile yeni bir cebirsel ifade girişi ile MYO öğrencilerinin aynı grafik üzerinde ikinci gösterim ile karşılaşmaları öğrencilerin cebirsel mukayese yapmalarına imkân sunmuş olacaktır.

Limit kavramının öğretimi ve BCS'nin öğretim amaçlı kullanımlarını araştıran literatür çalışmaları dikkate alındığında genel olarak genel matematik konularının öğretiminde BCS kullanımının faydalı olduğuna, özellikle tasarlanan bilgisayar destekli öğrenme ortamında daha da etkili olduğuna ulaşmaktayız. Ayrıca çalışmaların ortak sonuçları arasında öğrencilerin bilgisayar destekli öğrenme ortamında kullanılan BCS yazılımları içerisine rahatça girerek keşfetme, varsayımda bulunma, test etme, reddetme, formülüze etme, açıklama olanaklarına sahip olabilecekleri ve geleneksel ortamlarda görülemeyen, oluşturulamayan birçok ilişkinin, özelliğin ve genellemenin rahatlıkla çalışılabileceğine yer verilmektedir (Güven, 2008).

Yukarıdaki genellemenin aksine Monaghan, Sun ve Tall (1994) çalışma sonucunda Derive programı ile ders gören öğrencilerin limit kavramı içerisinde "yakınsama" ve "sonsuzluk" algılarını göz ardı ettiklerine öğrencilerin program aracılığıyla sadece çözüme odaklandıklarına ve limit kavramının derinlemesine anlaşılmasında BCS'li veya BCS'siz kolay olmadığına ulaşılmıştır. Buna rağmen BCS'nin kullanımını dahil eden alternatif yaklaşımların öğrencilerin daha derinlemesine limit görüşü geliştirmelerine katkıda bulunabileceğine dair öneriler sunmuştur. Bu ve benzeri araştırmalar ise neyi nasıl öğrettiğimizi sorgulayarak çağdaş öğrenme, öğretme ve değerlendirme yaklaşımları hakkında yeterli teorik bilgiye sahip olabilmenin önemini ortaya çıkmaktadır.

Matematik ve istatistik alanında öğrencilerin belli kavramlarla ilgili anlamalarını ve matematiksel düşünme becerilerini tanımlamak ve yorumlamak için SOLO taksonomisinin kullanıldığı birçok çalışma yer almaktadır (Akkaş, 2009; Ardıç, Yılmaz ve Demir, 2012; Çelik, 2007; Didiş ve Ubuz, 2010; Groth, 2002; Groth ve Bergner, 2006; Jones ve diğ., 1997; Jones ve diğ., 2000; Kabaca ve Musan, 2014; Kamol ve Yeap, 2010; Koç ve diğ., 2011; Koparan ve Güven, 2014; Lam ve Foong, 1996; Langrall ve Mooney, 2002; Lian ve Idris; 2006; Mooney, 2002; Pegg ve Coady, 1993; Pegg ve Davey, 1998; Tuna, 2011; Vallecillos ve Mareno, 2002; Watson ve Moritz, 2000; Wongyai ve Kamol, 2004; Xistouri, 2007). Biggs ve Collis tarafından geliştirilen genel bilişim modeli olarak tanımlanan SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes) taksonomisinin, özellikle ilköğretimden üniversiteye öğrencilerin belli kavramlarla ilgili matematiksel düşünme becerilerini tanımlamada ve yorumlamada, bilişsel bilgi ve becerilerini değerlendirmede etkili bir araç olarak çokça kullanıldığı görülmektedir (Pegg ve Davey, 1998; Jones ve diğ., 2000; Vallecillos ve Mareno, 2002; Lian ve Idris; 2006). Ayrıca SOLO öğrencilerin belirli görevlere verdikleri cevapları nitelik yönünden analiz etmek için hiyerarşik bir model sunmaktadır (Pegg ve Tall, 2005).

İlgili literatür incelendiğinde SOLO taksonomisinin özellikle öğrenme ortamlarıyla ilişkili olarak öğrencilerin bilgi ve becerilerini değerlendirmeye yönelik etkili bir model olduğuna ulaşmaktayız (Bigg ve Collis,1991; Pegg ve Tall, 2004; Lian ve Idris, 2006). Özellikle amacı tüm süreci görme isteği ve öğrencilerin vermiş olduğu cevapların niteliğini ölçme olan çalışmalarda öğrencilerin düşünme becerilerini sınıflandırmak açısından SOLO’nun uygun bir değerlendirme olduğu söylenebilir. Bu bağlamda çalışmaların sonucunda öğrenci cevaplarının var oldukları düzeyden belirlenen üst düzeylere geçmesinde, kavramlara yükledikleri anlamların işlemsel boyuttan uzaklaşarak daha temsil edici ve daha yorumlayıcı olmasında, öğretmenlerin öğrencilere sundukları öğrenme ortamlarının, deneyimlerin ve fırsatların önemine değinerek tüm süreci görmeye olanak sunması SOLO taksonomisinin tercih edilmesinde diğer bir etken olmuştur.

Yapılan literatür taraması sonucunda öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin ne öğrendiklerini incelemek için genel olarak deneysel desenin kullanıldığı ve nitel verilerin desteği ile olguların bağlı bulundukları öğrenme ortamlarının yorumlandığı görülmektedir. Bu çalışmaların ortak amaçları öğrencilerin belirtilen ortamlarda ne kadar öğrendiğini ve ne öğrendiğini betimlemek olduğundan bu çalışmalar için seçilen değerlendirmeler makul olabilir. Oysa esas amacın MYO öğrencilerinin ne kadar öğrendiğini ve ne öğrendiğini betimlemekten çok nasıl öğrendiklerini anlamak olan bu çalışmada öğrencilerin öğrenmelerini değerlendirirken ve yorumlarken tercih edilen modelin SOLO Taksonomisi olarak seçilmesi uygun görülmüştür. Böylece öğrenci cevaplarından anlam çıkarırken “ne oldu?, ne oluyor?, ileride ne olacak?, en iyi nasıl anlayabiliriz?, bu bilgiye nasıl ulaşılmıştır?” gibi sorulara cevap aranmasının yanı sıra öğrenme çıktılarının SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık geldiğine de odaklanılacaktır.

SOLO modelinin düşünme evreleri incelendiğinde soyut (formal) evre erken yetişkinlik dönemine denk gelmektedir (Biggs ve Collis, 1982, 2014; Halloway, 2010). Limit-süreklilik kavramlarının anlamlandırılması soyut düşünme becerisi gerektirdiğinden ön lisans öğrencileri olan MYO öğrencilerinin de soyut evrede yer aldığı varsayılmış ve yapılacak olan bu çalışma için uygun görülmüştür.

3. YÖNTEM

Bu çalışmada araştırmacı öğretmen, üniversitelerin meslek yüksekokullarında okutulan genel matematik derslerindeki “limit-süreklilik” konusunun öğretiminde, bilgisayar destekli öğrenme ortamında bilgisayar cebiri sistemlerinden Derive yazılımını kullanan MYO öğrencilerinin “limit-süreklilik” konusunu öğrenmelerini SOLO taksonomisi ile değerlendirmeye çalışmıştır. Bu bölümde, yapılan çalışmanın tasarlanması, araştırmanın yöntemi, örneklemi, veri toplama araçları, verilerin analizi ile ilgili bilgiler sunulmuştur.

3. 1. Araştırma Deseni

Bu çalışmada üniversitelerin meslek yüksekokullarında okutulan genel matematik derslerindeki limit-süreklilik konusu öğretiminde öğrencilerin öğrenmelerini değerlendirmek için bilgisayar cebiri sistemlerinden (BCS) Derive programı ile desteklenmiş öğrenme ortamı oluşturulmuştur. Araştırma, uygulamada karşılaşılan sorunlara çözüm üretme amacı taşıdığından eylem araştırması olarak desenlenmiştir. Nitel araştırma yaklaşımlarından biri olan eylem araştırması diğer bir adı ile araştırmacı öğretmen yöntemi gerçek sınıf ortamında öğretimin niteliğini arttırma ve geliştirmeye yönelik süreç olarak tanımlanmaktadır (Johnson, 2005). Mills’e (2003) göre araştırmacı öğretmen yöntemi, öğrenme/öğretme ortamında öğretmen araştırmacıların, öğrencilerinin daha iyi nasıl öğrenebilecekleri ile ilgili bilgilenmek amacıyla gerçekleştirdikleri sistematik bir araştırma sürecidir. Ayrıca nitel araştırmada vurgulanan “araştırmacının katılımcı rolü ve aynı zamanda veri toplama aracı olması” durumunun araştırmacı öğretmen yönteminde kendini göstermesi (Yıldırım ve Şimşek, 2006) sonucu bu araştırmada en uygun yöntemin araştırmacı öğretmen yöntemi olacağına karar verilmiştir.

Araştırmacı öğretmen yöntemi alan yazında çok farklı biçimlerde tanımlanmaktadır. Karşılaşılan tüm tanımlar incelendiğinde araştırmacı öğretmen yönteminin diğer bir adıyla eylem araştırmalarının amacının “sınıf, program ya da tüm okuldaki mevcut durumun değişimi ya da gelişimini sağlamak” olduğu görülmektedir. Mills (2003), eylem araştırmaları için yaptığı tanıma ek olarak nicel yöntemler kullanılarak istatistiksel anlamlılığın gösterildiği ve sonuçların daha geniş örnekleme genelleştirilip rapor edildiği geleneksel araştırmalarla eylem araştırmalarını karşılaştırıp, eylem araştırmaları ile ilgili şu özelliklere ulaşmıştır:

Tablo 5. Eylem Araştırmalarının Özellikleri (Mills, 2003).

Eylem Araştırması;	
Kendi gözetimindeki öğrenciler üzerinde öğretmenler ve yöneticiler tarafından	Kim?
okullarda ve sınıflarda,	Nerede?
"ne olduğunu" tanımlamak ve yapılan eğitsel girişimlerin (uygulamaların) etkilerini anlamak için nitel yöntemlerin kullandığı,	Nasıl?
araştırma yapılan okul ortamında pozitif eğitsel değişimi etkilemek amacıyla gerçekleştirilen bir süreçtir.	Niçin?

Araştırmacı öğretmen yönteminin, okul ve sınıf gibi yerel seviyelerde değişimin buna bağlı olarak da gelişimin oluşturulabilmesinde en güçlü araştırmalardan birisi olarak karşımıza çıktığını belirten Ekiz (2003), bu yöntemin felsefi olarak eleştirel düşünce içerisine görülmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu bağlamda felsefi olarak, nitel ve nicel yöntemlerden farklı alternatif bir bakış açısı geliştiren eleştirel düşüncenin amacının, sosyal bilimlerde yapılan çalışmaları pozitivist ve yorumlayıcı yaklaşımların eleştirileri ışığında yeniden değerlendirmek olduğunu görmekteyiz (Carr ve Kemmis, 1986'dan aktaran: Ekiz, 2003: 79). Nitel ve nicel araştırma yöntemleri felsefi olarak incelendiğinde, nitel araştırma yöntemlerinin post pozitivizm, rölativizm, yorumlayıcı ve idealizm gibi öznel paradigmalara dayandığını görmekteyiz. Nitel araştırmalar araştırılan konuyu katılımcıların boyutundan anlamaya ve yorumlamaya çalışırken, nicel araştırma yöntemleri pozitivizm, objektivizm, realizm gibi felsefi akımlara dayanarak araştırılan konu hakkında nesnel, genellenebilir, geçerli, güvenilir bilgi elde etmeyi amaçlamaktadır (Kuş, 2003). Oysa eleştirel eğitim araştırmalarının temelinde, uygulamacıların da bilimsel bilgi üretme sürecinde söz hakkı olması, bu sürece aktif katılıp eğitim uygulamalarını geliştirmek için bilimsel araştırma yapmaları gerekliliği vardır. Bu anlamda eleştirel eğitim araştırmaları eleştirel düşünme ile aynı felsefi yaklaşıma dayanmaktadır. Bu bağlamda eylem araştırmaları, gerek akademisyenler gerekse de öğretmen araştırmacılar tarafından aktif olarak kullanılan, eğitimin çeşitli konularında sistematik ve bilimsel olarak bilgi elde edip bilimsel uygulamaları geliştirme ve eleştirme amacıyla yararlanılan bir yöntem olarak görülmektedir (Ekiz, 2003).

Eğitim alanında araştırmacı öğretmen yöntemini (eylem araştırmalarını) incelediğimizde, bu yöntemin amacının eğitim ortamlarında ortaya çıkan gerçekleri sistematik olarak anlamak ve onu değiştirerek geliştirmeye çalışmak olduğunu görmekteyiz. Bu amaca ulaşabilmek için bu yöntemde hem nitel ve hem de nicel veri toplama teknikleri kullanılabilmektedir. Fakat geçerlik ve güvenirliği incelediğimizde, nicel araştırmalarda görülen iç geçerlilik, dış geçerlilik, güvenirlik ve nesnelliğin eylem araştırmalarında doğrudan uygulanamadığını görmekteyiz. Çünkü eylem araştırmalarının verileri kendine özgüdür ve bağlamsaldır. İşte bu anlamda bu yöntemdeki geçerliliği test edecek kriterler "iç geçerlik" yerine "inanılırlık", "dış geçerlik (genelleme)" yerine "aktarılabilirlik", "iç güvenirlik" yerine "tutarlılık" ve "dış güvenirlik (tekrar edilebilirlik)" yerine "doğrulanabilirlik" kavramlarıdır.

Öğretmenler kendi uygulamalarını gözlemlemek, saptadıkları bir problemin olası çözümlerini üretebilmek ve bununla ilgili eylem sürecini açıklayabilmek için eylem araştırmalarını, sistematik düzenli bir yol ve eğitimsel araştırma ile öğretme arasındaki boşluğu doldurabilecek bir köprü olarak görmektedir. Bu bağlamda Johnson'a (2002) göre eylem araştırmaları, gerçek okul ya da sınıf ortamında öğretimin ya da eylemlerin kalitesini anlamak ve geliştirmek amacıyla yapılan bir araştırma süreci ve önceden planlanmış, organize edilmiş ve diğer ilgili kişilerle paylaşılabilen bir araştırma türüdür. Böylece Johnson (2002) eylem araştırmasını 9 adımda incelemiştir;

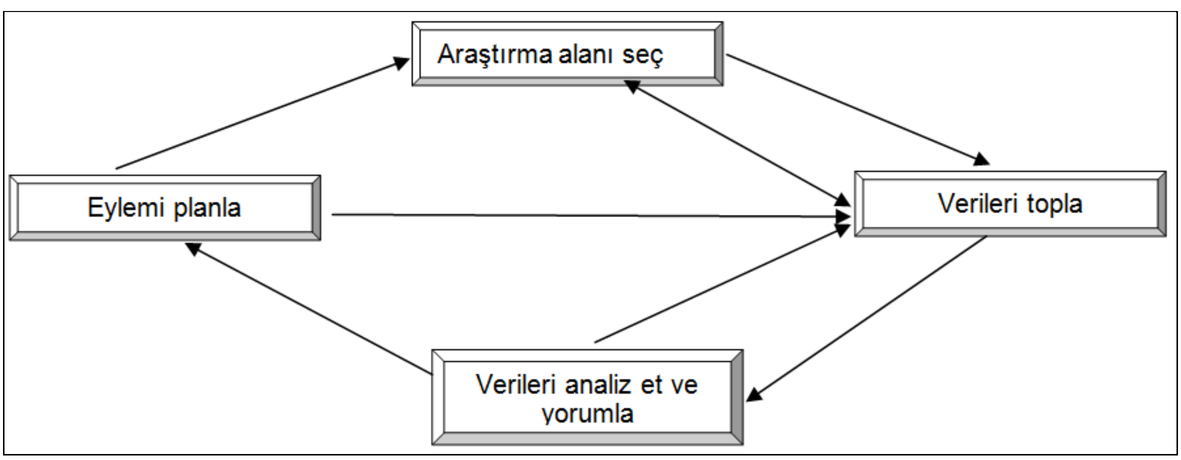
1. Araştırma konusu ya da problemin tanımlanması: araştırmacı merak ettiği konuyu veya ilgi duyduğu alanı belirleyerek bir soru sorar ya da bir problem belirler.
2. Araştırma konusunun ya da problemin kavramsal bir bağlamda ele alınması yani alanyazın taraması. Araştırmacı bu adımda sınıfta gerçekleştireceği uygulama ile kuram arasında bir bağ oluşturabilmek için araştıracağı konu için diğer araştırmacıların neler bulduklarını inceler.
3. Veri toplama sürecinin planlanması adımında ise araştırmacı araştırmaya başlamadan önce ne tür verilerin ne sıklıkla ve nasıl toplanması gerektiğine karar verir.
4. Verilerin toplanması ve analizine başlanmasında ise veriler toplanırken ve analiz edilirken ortaya çıkan temalar ve kategoriler belirlenir.
5. Veri toplama süreci sırasında gerekirse araştırma sorusu veya araştırma probleminin değiştirilmesi.
6. Verilerin analizi ve düzenlenmesi ise sürecin son aşamasıdır ki bu adımda toplam ne kadar kayıt tutulduğu, kaç kategori oluşturulduğu ve her bir kategoride kaç tema bulunduğu belirtilir.
7. Verilerin raporlaştırılması sürecinde elde edilen tanımların ve kategorilerin türü ve sayıları belirtilir. Karşılaşılan önemli olaylar, etkinlikler ve sorulara verilen yanıtlar ayrıntılı bir biçimde aktarılır.
8. Sonuçların ve önerilerin çıkarılması adımında ise tekrar alanyazın taraması dikkate alınarak ulaşılan sonuçlar kuramsal bir bağlamda okuyucuya aktarılır.

9. Son basamak olan eylem planının oluşturulması aşamasında ise sonuç ve önerilere dayalı olarak ne yapılacağına dair bir eylem planı geliştirilerek uygulama sürecinde ne kadar etkili olduğu değerlendirilir.

Jhonson'un eylem araştırmaları için belirlediği bu aşamaların gerekirse sırası değiştirilebileceği gibi gerekirse bazı aşamalar da çıkarılabilir. Bu bağlamada Ekiz'e (2003) göre en çok kullanılan ve kabul gören yaklaşım Elliot'un (1991) beş adımda gerçekleştirdiği eylem araştırmalarıdır. Bu yaklaşıma göre eylem araştırmaları aşağıda verilen beş adımda gerçekleşmelidir;

1. Genel bir düşünceyi tespit etme ve ona açıklık getirme
2. Ön bilgiler edinme
3. Genel planın yapılması
4. Bir sonraki eylem adımlarını gerçekleştirme
5. Bir sonraki eylem adımının uygulanması

Mills (2003) ise eylem araştırmasının diyalektik döngüsünü Şekil 1.'deki gibi dört aşamada belirtmektedir. Meslek yüksekokulu öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında BCS'den Derive yazılımını kullanarak "limit-süreklilik" konusunu öğrenmelerini değerlendirmeyi amaçlayan bu çalışmada, uygulayıcı aynı zamanda araştırmacıdır. Bu bağlamda çalışmada nitel araştırma yaklaşımlarından biri olan araştırmacı öğretmen yöntemi (action research) (eylem araştırması) kapsamında Mills (2003) tarafından belirlenen dört aşamalı eylem araştırması döngüsü kullanılmıştır.



Şekil 9. Eylem araştırmasının diyalektik döngüsü (Mills, 2003)

Araştırmacı öğretmenin bilgisayar kullanmayı bilen MYO Bilgisayar Teknolojileri Programı-1 sınıfı öğrencileri ile yürüttüğü bu çalışma boyunca, Mills (2003) tarafından belirlenen dört aşamalı eylem araştırması döngüsü göz önünde bulundurulmuş olup, tasarlanan eylem araştırması sürecine ait çalışmalar ilgili başlıklar altında sunulmuştur

Odaklanılacak Alanın Belirlenmesi

Eylem araştırmasında odaklanılacak alanın belirlenmesi, araştırılacak problemin ve bu probleme ait alt problemlerin belirtilmesi sürecinin en önemli aşamasıdır (Mills, 2003). Bu aşamada araştırmacı öğretmen uygulama ortamında değiştirmek ya da geliştirmek istediği durum, geliştirilmesi gereken bir süreç ya da yeni bir yaklaşım deneme konularından birini ele alabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Bu araştırmada meslek yüksekokulu öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusunu öğrenmelerini değerlendirmek ve elde edilen öğrenme çıktılarını SOLO taksonomisi ile incelemek amaçlanmıştır. Türkiye'de Derive yazılımının meslek yüksekokullarında kullanılmasına ilişkin araştırmalara pek rastlanmaması ve üniversitelerin matematik dersi öğretim programlarında bu yazılımın kullanılmasına ilişkin vurgunun bulunmaması araştırmanın başlangıç noktasını oluşturmuştur. Bu bağlamda araştırma Yıldırım ve Şimşek'in (2006) belirttiği "yeni bir yaklaşımın denenmesi" başlığı kapsamında ele alınabilir.

Çalışma konusu belirlenirken değiştirilecek ya da geliştirilecek konu "Kim", "Ne", "Ne zaman", "Nerede" ve "Nasıl" soruları ile olabildiğince betimlenmelidir. Bu betimlemeden sonra aynı durum "Niçin" sorusuyla açıklanmaya çalışılmalıdır (Mills, 2003). Açıklamanın ardından araştırma probleminin daha iyi anlaşılıp kuramsal içeriğin başlıklarının oluşturulabilmesi için alanyazın taraması yapılmalıdır. Johnson (2005) araştırmanın daha etkili ve yeterli olabilmesi için alanyazın taramaları ile diğer araştırmacıların deneyimlerinden yararlanılması gerekliliği üzerinde durmuştur.

Araştırmacı öğretmenin sınıf içi ders sürecinde başarılı bulduğu MYO Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerinin dönem sonuna doğru gördükleri limit-süreklilik konusu ile ilgili sahip oldukları bilgilerde limit kavramının kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiğini gözlemlemesi araştırmanın başlangıç noktasını oluşturmuştur.

Araştırmacı öğretmen 2008-2009 öğretim yıllarında doktora ders sürecinde almış olduğu dersler ve yapmış olduğu gözlemlerden teknoloji destekli öğrenme ortamı oluşturabilme, bilgisayar cebiri sistemlerinden Derive yazılımının kullanıldığı bir dersin planlanması ve uygulanması hakkında bilgi sahibi olmuştur. 2010-2011 eğitim-öğretim yılının bahar döneminde araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinden sınıf içi ders sürecinde başarılı bulduğu Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerinin dönem sonuna doğru gördükleri limit konusu ile ilgili sahip oldukları bilgileri gözlemlemiştir. Limit konusu ile ilgili etkinliklerin de tasarlanabildiği bilgisayar cebiri sistemlerinden Derive yazılımı destekli çalışma kâğıtları hazırlamıştır. Bu bağlamda meslek yüksekokulu öğrencilerinin hazırlanan bilgisayar destekli öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusunu öğrenebilmelerine ilişkin düşünce evrelerinin belirlenebilmesi konusunda bir merak uyandırmış ve bunu 2010-2011 eğitim öğretim yılı bahar döneminde yürüttüğü “BP-BIS-106 Matematik-2” dersinde eylem araştırması yöntemiyle bir çalışma yaparak incelemeye karar vermiştir.

Araştırmada incelenen “limit-süreklilik” kavramlarıdır. Genel matematik kavramlarının en temel taşı olan limit kavramının kavramsal anlama boyutunun özellikle üniversitelerin meslek yüksekokullarında ihmal edildiğini gözlemleyen araştırmacı öğretmenin temel amacı, limit-süreklilik kavramlarını öğrencilerin daha etkili ve daha kalıcı öğrenmesini sağlamak olmuştur. Bu nedenle Derive yazılımının limit-süreklilik kavramlarına ilişkin temel özelliklerin grafikselleştirilmesinde kolaylık sağlayacağı düşünülmüştür. Böylece meslek yüksekokulu öğrencilerinin limit-süreklilik konusunu Derive yazılımı yardımıyla daha kolay öğreneceğini düşünen araştırmacı öğretmen bu çalışmanın alanyazına katkı getireceğini düşünmüş ve çalışmanın odak alanını bilgisayar destekli öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin limit ve süreklilik konusunu öğrenmeleri olarak belirlemiştir.

Mills’e (2003) göre konunun belirlenmesi, alanyazın taramasının ardından araştırma sorularının geliştirilmesi odaklanılacak alanın geliştirilmesine ve veri toplama planı için odaklanmaya yardımcı olacaktır. Bu bağlamda eylem araştırma çalışmalarına rehber olacak bir plan oluşturulmalıdır. Planın oluşturulmasının ardından araştırmanın sağlıklı bir şekilde yürütülmesi için grup üyelerinin belirlenmesi, gerekli görüşme izinlerinin alınması, eğitim ortamları, olanaklar gibi kaynakların belirlenmesi ve geliştirilmesi gerekmektedir (Elliot, 1991).

Araştırmacı öğretmen odaklandığı konunun uygulanmasına yönelik araştırmacıya her konuda yardım edebilecek bir okul olması doğrultusunda akademik personeli olduğu Yüzüncü Yıl Üniversitesi Özalp Meslek Yüksek Okulu’nu tercih etmiştir. Ayrıca öğrencilerin yeterli bilgisayar bilgisine sahip olabilmesi Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerini amacına yönelik olarak seçmesinde etkili olmuştur. Bu karar doğrultusunda Bilgisayar Teknolojileri Bölüm başkanından, bilgisayar sınıfından sorumlu hocadan ve MYO müdüründen gerekli araştırma izinleri alınmıştır.

Verilerin Toplanması, Analizi ve Yorumlanması

Veri toplama sürecinde gözlemler, alan notları, çalışma yaprakları, ekran çıktıları ve ders sürecinde gerçekleşen diyaloglar gibi çeşitli veri kaynakları kullanılmıştır. Literatürde veri kaynağı olarak diyaloglardan elde edilen görüşlerin kullanıldığı çoğu çalışmanın genelde belli bir alanda bir öğretme deneyimi veya bu öğretme deneyimi sonucunda öğrencilerin soyut düşünme süreçlerinin analizini içeren çalışmalar olduğu görülmektedir (Akkoç, 2005, 2006; Çelik ve Baki, 2007; Groth ve Bergner, 2006; Güven, 2006; Iseri, 2003; Nilklad, 2004).

Nitel araştırmalarda, her aşamanın kendine özgü özelliklerinin olması, veri analizinin kesin çizgilerle ayrılmasını engellemektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu nedenle nitel araştırmadaki veri analiz yöntemlerinin standart hale getirilmesi oldukça zordur (Strauss, 1987'den aktaran: Yıldırım ve Şimşek, 2005). Veri analizini standartlaştırma çabaları, nitel araştırmacıyı sınırlandırmakla birlikte, araştırmanın eldeki verilere uygun, zengin ve derinlemesine sonuçlar elde etmesini olumsuz yönde etkileyebilir. Nitel araştırma yöntemi olan eylem araştırmalarında da veri analizi süreklilik gösterdiğinden, veri toplama ile veri analizi eş zamanlı yapılır. Veri analizi, toplanan verilerin sonuç ya da bulgularını raporlaştırmaya çalışırken, veriler araştırmacılar tarafından özetlenerek "öyleyse ne?" sorusuna yanıt aranır (Mills, 2003).

Bu araştırmada veriler bilgisayar destekli öğrenme ortamında ders akışı sürecinde uygulanan çalışma yaprakları, öğrencilerin ekran çıktıları, gözlemler, gözlemler sırasında araştırmacı öğretmenin tuttuğu notlar ve ders sürecinde öğrencilerle gerçekleşen diyaloglar yardımıyla toplanmıştır. Söz konusu veri toplama araçları "3.4. Veri Toplama Araçları/Teknikleri" başlığı altında ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır. Ayrıca haftalık döngüler şeklinde toplanan veriler haftalık olarak analiz edilmiştir. Araştırmacı öğretmen, çalışmasını yürüttüğü meslek yüksekokulu öğrencilerine tasarlanan BCS destekli ortamda 1. hafta limit-süreklilikle ilgili kavramsal ipuçları içeren konu özeti yaptıktan sonra Derive Yazılımı Tanıtım Kılavuzu'nu dağıtıp yazılıma kısaca değinmiştir. 2. hafta Derive yazılımı tanıtımı ve yazılım yardımıyla öğrencilerle limit-süreklilik konusuna ilişkin alıştırmalar yapıp, çalışma yapraklarını uygulamadan önce toplam 2 haftalık ders işlemiştir. Bu nedenle çalışma sürecinde öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin öğrenmeleri değerlendirilirken bu durum göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca ders akışı sürecinde elde edilen verilere ilave olarak aynı çalışma yaprakları 2013-2014 yılının ilk yarıyılında dönem dersleri tam başlamadan aynı öğrencilerle 2 hafta yeniden çalışılmış olup bu süreçte geçen diyaloglar da SOLO taksonomisine bağlı olarak analiz edilmiştir.

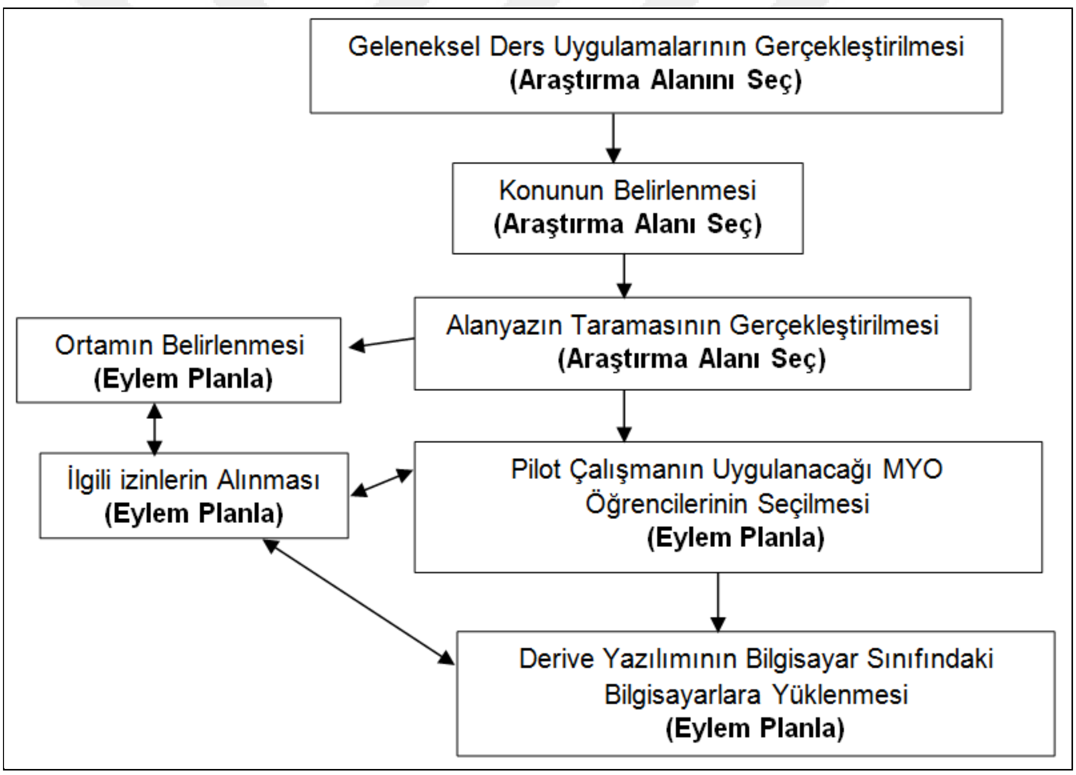
Eylem Planının Geliştirilmesi

Eylem araştırmasının doğal bir aşaması olan eylem planı geliştirme aşamasında araştırmacı;

1. Atılacak adımları, bunların sürelerini ve zamanlarını açık olarak belirler.
2. Veri toplama araçlarını hangi sıklıkla kullanacağını ve verilerini ne kadar süreyle toplayacağını planlar.
3. Topladığı verileri bulgular ve daha sonraki eylem adımları için ipucu niteliğinde kullanır.

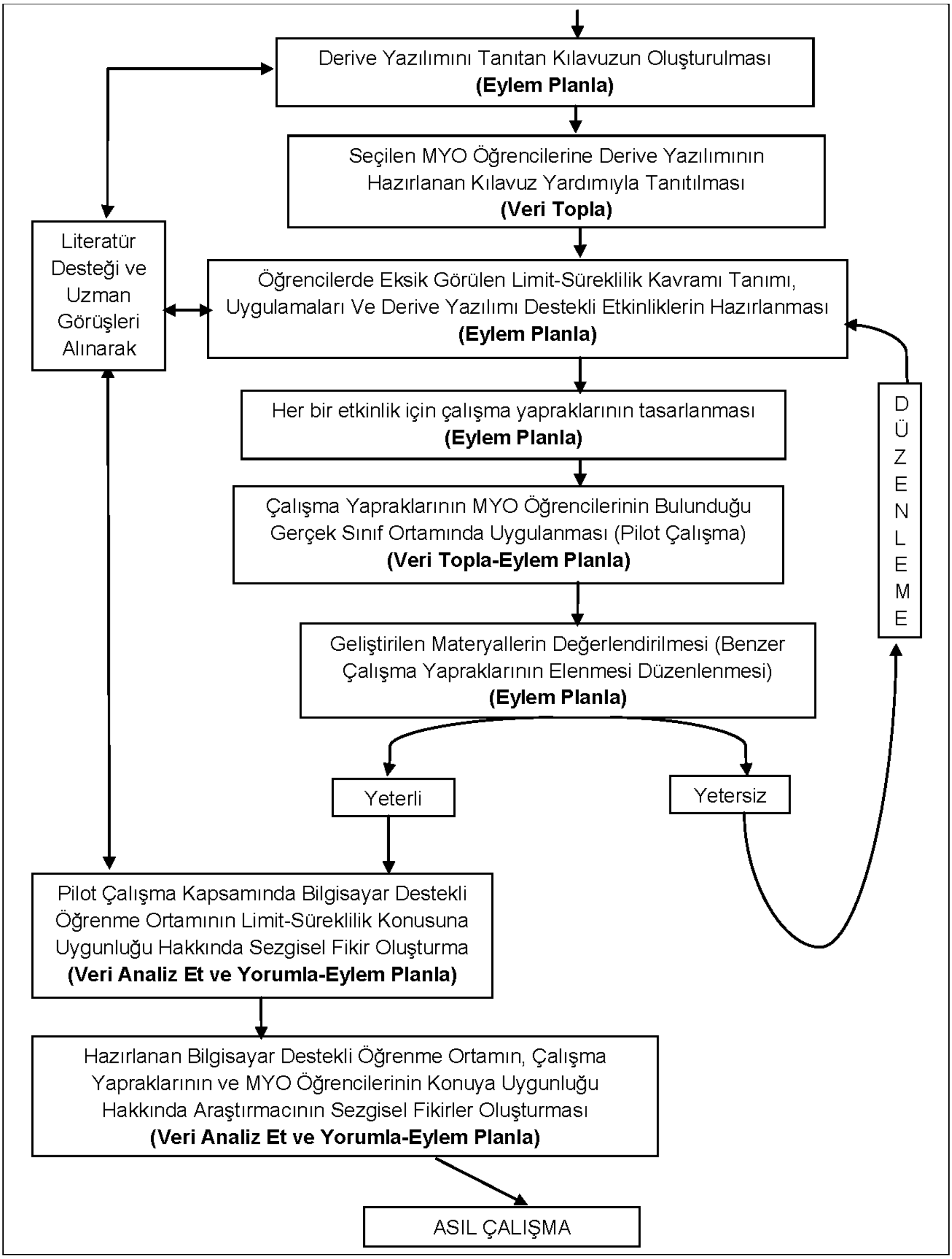
Bu noktada araştırmacılar araştırmanın başında kendilerine rehberlik eden doğru kabul ettikleri tahminleri yansıtmalı ve sonraki alınacak eylemin akışını belirlemelidirler

(Mills, 2003). Bu yüzden eylem araştırması döngüsü, araştırmada önerilen eylemler ve uygulamalarla ilgili tamamıyla yeterli olduğuna inanılıncaya kadar tekrar tekrar kendini yineleyebilir (Mills, 2003). Eylem araştırmalarında örneklem grubunun küçük seçilmesinden dolayı, sonuçların genellemesi yerine mevcut durumların geliştirilmesi amaçlanmaktadır (Çepni, 2007). Bu çalışmada da BCS ile desteklenmiş öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin limit-süreklilik kavramlarını nasıl öğrendiklerini anlamak ve bu kavramları öğrenmelerine ilişkin soyut düşünme becerilerini geliştirmek amaçlanmaktadır. Çalışma boyunca Mills'in (2003) dört aşamalı eylem araştırmasının diyalektik döngüsü göz önünde bulundurulmuş, tasarlanan eylem araştırması sürecine ait yapılan çalışmaları gösteren akış şeması asıl çalışmaya kadar Şekil 10'da, asıl çalışma Şekil 11'de verilmiştir. Bu araştırmada araştırmacı aynı zamanda öğretmen olarak süreçte etkin bir rol oynamıştır.

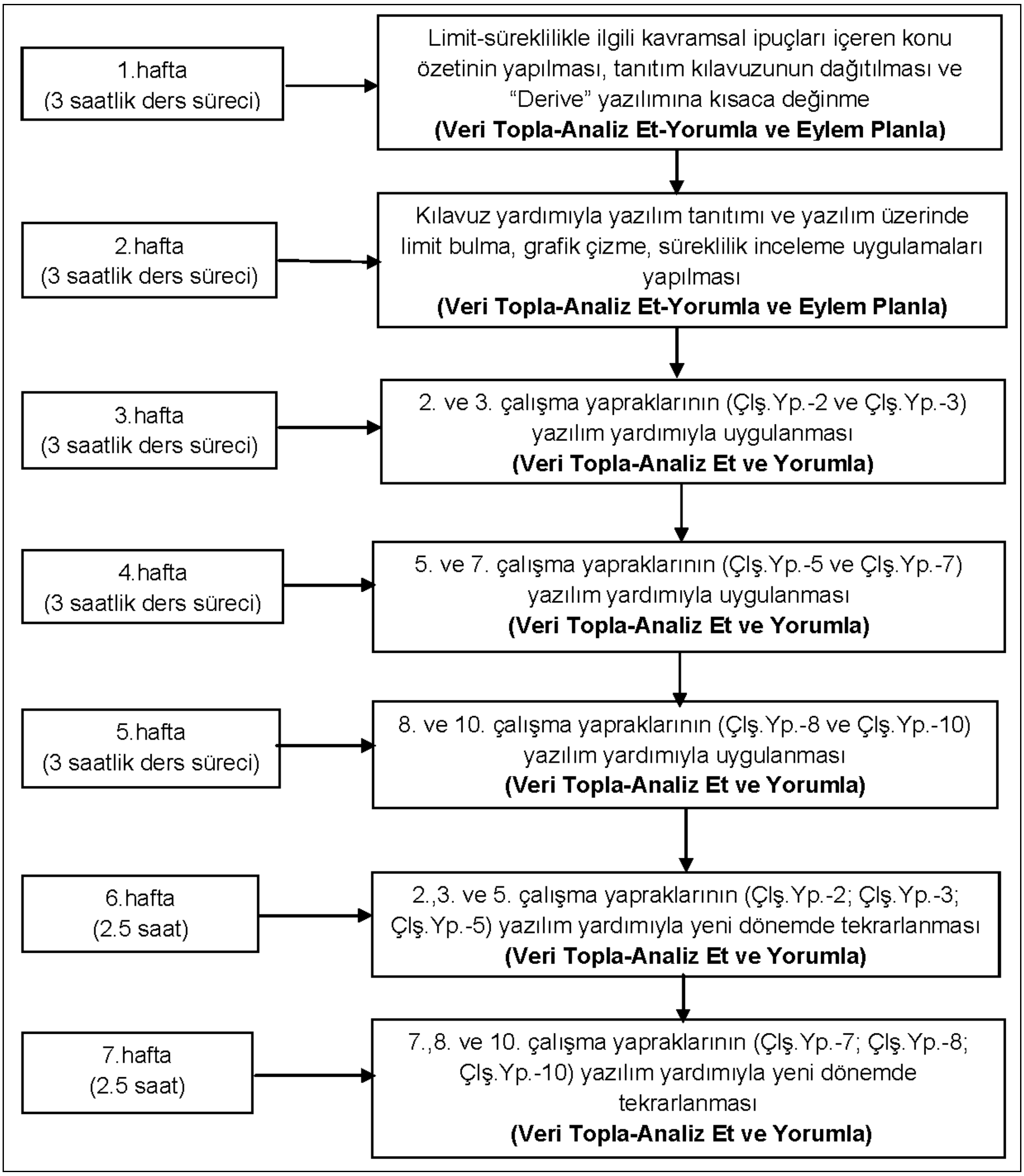


Şekil 10. Eylem araştırması sürecinde asıl çalışmaya kadar yapılan çalışmalara ait akış şeması

Şekil 10'un devamı



Pilot çalışma sonrası eylem planlama aşamasında geliştirilen çalışma yapraklarında öğrencilerin anlamadıkları ve öğrencilerde kavram yanılgısı oluşturabilecek ifadeler tez danışmanı ile kontrol edilerek gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra birbirini tekrar eden çalışma yaprakları elendi ve asıl çalışmada 6 çalışma yaprağı kullanıldı. Bu sürece ilişkin tasarlanan eylem araştırması sürecine ait asıl çalışmada yapılan çalışmaları gösteren akış şeması Şekil 11'de verilmiştir.



Şekil 11. Eylem araştırması sürecinde asıl çalışmada yapılan çalışmalara ait akış şeması

Bu süreçlerde yapılan çalışmalara, değerlendirmelere ve düzeltmelere yönelik bilgiler ilgili bölümlerde ayrıntılı olarak verilmiştir.

3. 1. 1. Pilot Çalışma

Nitel araştırmalarda asıl çalışma öncesi yapılacak olan pilot çalışma, elde edilecek olan sonuçların mantıklı bir şekilde açıklanması için önemlidir. Asıl çalışmada kullanılacak olan veri toplama araçlarının (bilgisayarda kullanılacak olan analiz kavramlarının) şekillendirilmesinde ön çalışmanın önemli olduğu özellikle “limit” kavramına yönelik yapılan çalışmalarda ele alınmıştır (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwinngendorf, Thomas ve Vidakovic; 1996; Dubinsky, Schwingendorf ve Mathews, 1995). Böylece pilot çalışma, araştırmacı öğretmen için elde edeceği verileri analiz edip yorumlamada nasıl bir yol izleyeceği konusunda belirleyici olmuştur.

Pilot çalışma 2010-2011 eğitim öğretim yılı ikinci yarıyılında Van ili Yüzüncü Yıl Üniversitesi Özalp Meslek Yüksek Okulu Bilgisayar Programcılığı Bölümünün 11’i bayan 21’i erkek 32 öğrencisi ile yürütülmüştür. Bu çalışma kapsamında “Derive Yazılımı Kullanılarak Oluşturulan Bilgisayar Destekli Öğrenme Ortamında MYO Öğrencilerinin Limit-Süreklilik Konusunu Öğrenmelerini SOLO ile Değerlendirmek” amaçlanmıştır. Bu amaç kapsamında pilot çalışma asıl çalışma için bir ön çalışma niteliğindedir. Bu çalışma ile meslek yüksekokulu öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında “limit-süreklilik” konusunu öğrenebilmelerine ilişkin görüşleri belirlenerek veri analizinde kullanılacak olan MYO öğrencilerinin düşünce evreleri SOLO taksonomisine göre oluşturulmuştur. Bu açıdan yapılan pilot çalışma araştırmacı öğretmenin elde ettiği verileri SOLO’ya göre nasıl yorumlayacağı konusunda yol gösterici olmuştur. 2011-2012 eğitim-öğretim yılının deprem süreci ile geçmesinden dolayı araştırmacı öğretmen çalışmanın taze kalmasını sağlayabilmek için pilot çalışma yardımıyla ek bir çalışma yayınlamıştır. Bu ek çalışmada uzman ve öğretmen görüşleri alınarak 20 adet açık uçlu mülakat sorusu hazırlanmıştır. Açık uçlu soruları 32 öğrenciye uygulayan araştırmacı öğretmen verilerde karışıklık olmaması için öğrencileri Ö1, Ö2,… Ö32 şeklinde kodlamıştır. Veriler transkript edildikten sonra araştırmacı öğretmen tarafından betimsel ve içerik analizi yöntemleri ile analiz edilmiştir. Her bir soruya ilişkin kaç olumlu, kaç olumsuz, kaç kararsız cevap verildiğini gösteren tablolar oluşturarak tablolarda sorulara ilişkin frekans ve yüzde dağılımlarını veren araştırmacı öğretmen her bir tablonun altında öğrencilerin yazdıkları cevaplardan alınan doğrudan alıntılara da yer vermiştir (Ertem, Kaleli-Yılmaz ve Baki, 2012).

Yapılan pilot çalışmanın asıl çalışmaya ve araştırmacı öğretmene olan katkıları aşağıdaki gibi özetlenebilir;

1. Araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinin ön öğrenmelerinin olduğu bir konuyu anlatacak olmasına rağmen öğrencilerin bu konu ile ilgili eksik oldukları

noktaları görüp çalışma yapraklarında bu noktalara yoğunlaşabilmesinde pilot çalışma aydınlatıcı olmuştur.

2. Pilot çalışma sürecinde öğrencilere verilen "Derive Yazılımının Kullanma Kılavuzu"nda anlaşılmayan bazı fonksiyon tuşları daha anlaşılır şekilde ifade edilerek kılavuza ilave edilmiştir. Örneğin; "Solve – Expression" yerine "So<u>l</u>ve – <u>E</u>xpression (Ctrl+Shift+E)" yazılarak "Ctrl+Shift+E"nin de kullanılabileceğini gösteren alt çizgilere yer verilmiştir.
3. Pilot çalışma sonrasında çalışma yapraklarında öğrencilerin anlamadıkları, öğrencilerde kavram yanılgısı oluşturabilecek ifadeler tez danışmanı ile kontrol edilmiş, gerekli düzenlemelerden geçirildikten sonra birbirini tekrar eden çalışma yaprakları elenerek asıl çalışmada 6 çalışma yaprağı uygulanmıştır.
4. MYO öğrencilerine verilen kavramsal ipuçları yardımıyla çalışma yaprakları için hedeflenen kazanımlar gözden geçirilerek her bir çalışma yaprağına yönelik stratejik hedefler belirlenip öğretmen kılavuzuna ilave edilmiştir.
5. Uygulamada her bir çalışma yaprağı için kullanılabilecek maksimum süre dikkate alınarak araştırmacı öğretmenin kullanacak olduğu öğretmen kılavuzuna "verilen süre: 80 dk." şeklinde ilave edilmiştir.
6. Çalışma yapraklarındaki soruların dağılımında pilot çalışma yardımcı olmuştur. Bu süreçte çalışma problemlerine girişi sağlayan Derive yazılımında fonksiyon tanımlama soruları çalışma yapraklarının giriş soruları olarak ele alınmıştır. Böylece çalışma yapraklarında yer alan soruların konu kapsamındaki dağılımının (fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme; fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme; fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme; fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ve limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme) uygunluğu tekrar kontrol edilmiştir.
7. Pilot çalışmanın önemli olan bir diğer amacı da meslek yüksekokulu öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusunu öğrenebilmeleriyle ilgili öğrenme çıktılarını inceleyerek SOLO taksonomisinin temel özelliklerini belirleyebilmekti. Pilot çalışma sırasında bu temel özelliklerin belirlenmesine de odaklanılmış oldu. Pilot çalışmaya katılan 32 MYO öğrencisinin çalışma yapraklarındaki sorulara vermiş oldukları cevaplardan, bu sırada yapılan mülakatlardan, çalışma yaprakları ve bilgisayar üzerinde yaptıkları tüm çalışmalardan elde edilen veriler birleştirilerek incelenmiştir. Çalışma yapraklarında yer alan her bir probleme MYO öğrencileri tarafından

verilen cevaplar SOLO taksonomisi dikkate alınarak benzerliklerine ve farklılıklarına göre kategorilere ayrılmıştır. Bu kategoriler oluşturulurken verilen cevapların kaç tane ilişkili yön içerdiği, bunların birbiri ile nasıl bütünleştiği dikkate alınarak belirlenen her düşünme seviyesi için nitel bir açıklama verilmiştir. Öğrencilerin cevapları belli bir seviyeyi temsil etmediğinde diğer seviyelerdeki tanımlamalarından yola çıkarak bu seviye için de bir açıklama yapılmıştır. Elde edilen bu açıklamalar asıl çalışmada MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusunu öğrenebilmelerine ilişkin görüşlerinin seviyelerini belirleyebilmek için veri analizinde kullanılmıştır. Bu bağlamda soruları gruplandırılarak asıl çalışmada kullanılmaya hazır hale getirilen çalışma yapraklarındaki soruların SOLO taksonomisine ait seviyelerin özelliklerine göre oluşturulan analiz kriterleri "3.6. Çalışma Yapraklarına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri (Rubrikler)" başlığı altında ayrıntılı olarak verilmiştir.

8. Pilot çalışma sürecinde yapılan gözlemler ve alınan notlar sayesinde asıl çalışmada ders akışı içinde öğrencilerin soyut düşünme becerilerini değerlendirebilmek için nelerin sorulabileceği fikri oluşmuştur.

3. 1. 2. Çalışma Yapraklarını Geliştirme Aşaması

Çalışma yaprakları araştırmada odaklanılacak konular dikkate alınarak BDÖ'ye yönelik hazırlanmıştır (Ek 1). Bu amaçla hazırlanan çalışma yaprakları öğrencilerin kafasında canlandırdığı matematiksel işlemin ekranda bir matematiksel nesne olarak karşılarına çıkmasını sağlayabilecek nitelikte olmalıdır. Böylece öğrencilerde matematiksel düşünme ve soyutlama kapasitesi artacak ve ortaya daha kavramsal bir matematik çıkacaktır (Baki, 2008). Ayrıca bazı çalışmalarda matematik derslerinde öğrencilerin kavram yanılgılarının ortaya çıkarılmasında ve giderilmesinde grup çalışmasının önemine vurgu yapılmıştır (Artzt, 1999; Baki, 2002; Hoyles, 1985). Bu ise çalışma yapraklarında yer alan soruların grup çalışmasına elverişli şekilde hazırlanmasında etkili olmuştur. Çalışma yapraklarının hazırlanmasında dikkat edilmesi gereken diğer bir özellik ise bilginin öğrenciye doğrudan aktarılmadan ipucu niteliğindeki sorularla öğrencileri bilgiyi keşfetmeye ve sonuçlara ulaşarak genelleme yapmaya ulaştırabilir olmasıdır. Bunun için öğrencilerin çalışma yapraklarında yer alan sorular öğrencilerin mevcut bilgilerini sorgulayabilmeli ve öğrencilerin "yaklaşık öğrenme eşiğinde" olabilmeleridir (Vygotsky, 1978).

Çalışmada araştırmacı öğretmenin limit-süreklilik konusunun öğretimi sürecinde öğrencilerin karşılaştıkları problemleri dikkate alarak Derive yazılımı yardımıyla bilgisayar destekli çalışma yapraklarını geliştirme aşamaları aşağıda adım adım sunulmaktadır:

1. Meslek yüksekokulunda ders veren araştırmacı öğretmen öğrencilerinin anlamakta güçlük çektikleri limit-süreklilik konusu ile ilgili eksiklerini tespit etmiştir.
2. Ders akışı sürecinde öğrencilere BDÖ ortamında kavramsal ipuçları veren araştırmacı öğretmen matematik öğretim programını inceleyerek limit-süreklilik ile ilgili eksik algılanan kazanımları belirlemiştir. Bu kazanımlar yükseköğretim programında yer alan hedef kazanımlara göre düzenlenerek her bir çalışma yaprağı için çalışma konusu olmuştur. Ayrıca çalışma yapraklarındaki sorular doğrultusunda hedef kazanımlar biraz daha spesifik hale getirilerek stratejik hedefler belirlenmiştir. Bu doğrultuda her bir çalışma yaprağına ait öğretmen kılavuzunda bu stratejik hedeflere ve ulaşılacak kazanımlara yer verilmiştir. Aşağıdaki tabloda asıl çalışmada kullanılan çalışma yaprakları ile hedeflenen kazanımlar ve stratejik hedeflere yer verilmiştir.

Tablo 6. Çalışma Yaprakları ile Hedeflenen Kazanımlar ve Stratejik Hedefler

Çalışma Yaprağı	Kavramsal İpuçları	Hedef Kazanımlar	Stratejik Hedefler
Çlş.Yp-2	Fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, ∞ kavramı, belirsizlik durumları ve limit kavramı	- Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt eder - Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur - Fonksiyon grafiğini inceler	- Trigonometrik fonksiyonların limitini grafik üzerinde açıklar ve uygulamalar yapar -Verilen noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik durumunu açıklar ve fonksiyonun limitini hesaplar
Çlş.Yp-3	Fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, ∞ kavramı, belirsizlik durumları ve limit kavramı	- Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur - Fonksiyon grafiğini inceler	- Gerçek değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit değerini grafik üzerinde açıklar ve uygulamalar yapar -Verilen noktada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumunu açıklar ve fonksiyonun limitini hesaplar
Çlş.Yp-5	Fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, ∞ kavramı, belirsizlik durumları ve limit kavramı	- Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur - Fonksiyon grafiğini inceler	- Trigonometrik fonksiyonların limitini grafik üzerinde açıklar ve uygulamalar yapar -Verilen noktada $0.\infty$ belirsizlik durumunu açıklar ve fonksiyonun limitini hesaplar

Tablo 6'nın devamı

Çlş.Yp-7	Fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, limit ve süreklilik kavramı	- Fonksiyonun grafiğini inceler ve sürekli olduğu aralıkları bulur - Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyler - Limit ile süreklilik arasında ilişki kurar	- Fonksiyonun verilen bir noktada sürekli ya da süreksiz olduğunu belirler grafik üzerinde açıklar - Fonksiyonun bir aralıkta sürekliliğini grafik üzerinde açıklar - Kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların özelliklerini belirtir ve grafik üzerinde açıklar
Çlş.Yp-8	Fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, belirsizlik durumları, limit ve süreklilik kavramı	- Fonksiyonun grafiğini inceler ve sürekli olduğu aralıkları bulur - Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyler - Limit ile süreklilik arasında ilişki kurar	- Fonksiyonun verilen bir noktada sürekli ya da süreksiz olduğunu belirler grafik üzerinde açıklar - Süreksizlik çeşitlerini hatırlayarak "kaldırılabilir süreksizliği" ifade eder ve grafik üzerinde açıklar
Çlş.Yp-10	Fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, ∞ kavramı, belirsizlik durumları, limit ve süreklilik kavramı	- Fonksiyonun grafiğini inceler ve sürekli olduğu aralıkları bulur - Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyler - Limit ile süreklilik arasında ilişki kurar	- Fonksiyonun verilen bir noktada sürekli ya da süreksiz olduğunu belirler grafik üzerinde açıklar - Süreksizlik çeşitlerini hatırlayarak "sonsuz süreksizliği" ifade eder ve grafik üzerinde açıklar

3. Bu konuda geçen kavramlar ve özellikler incelendiğinde konunun öğretiminde bilgisayar destekli çalışma yapraklarının hazırlanmasının uygun olacağına karar verilmiştir.
4. Ana problem çerçevesinde araştırmacı öğretmen Tablo 6'da belirlediği hedef kazanımlara ve stratejik hedeflere ulaşıldığında limit-süreklilik konusunun genel olarak öğrenileceğine ulaşmıştır. Bu bağlamda çalışma yaprakları; fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme; fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme; fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme; fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ve limit-süreklilik arasında ilişki kurabilme becerilerini kapsayacak şekilde hazırlanmıştır.
5. Hazırlanan çalışma yapraklarının pilot uygulaması Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Özalp Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Programcılığı Bölümünün 11'i bayan 21'i erkek 32 öğrencisine uygulanmıştır. Uygulama bilgisayar laboratuvarında yapılmıştır. Çalışma yaprakları her bir öğrencinin birer çalışma yaprağı olacak şekilde dağıtılmıştır. Ayrıca grup çalışması, Derive yazılımının kullanılması,

çalışma yaprakları üzerine yazıların yazılması ve tartışmaların yapılması serbest bırakılmıştır. Bu süreçte araştırmacı öğretmen, informal mülakatlarla ve tartışmalarla çalışma yapraklarının uygunluğunu ve öğrencilerin etkinliklere katılımını gözlemlemiştir. Uygulamadan sonra uzman ve öğretmen görüşleri alınarak pilot çalışma kapsamında 20 adet açık uçlu soru hazırlanmıştır. Bu sorular bilgisayar destekli öğrenme ortamının öğrenmeye etkisi, matematik öğretimindeki yeri, Derive yazılımını kullanabilme ve Derive yazılımı ile öğrenme ortamının yeterliliği temaları altında toplanmıştır ve her bir temaya ilişkin 5 soru hazırlanmıştır. Veriler transkript edildikten sonra araştırmacı öğretmen tarafından betimsel ve içerik analizi yöntemleriyle analiz edilerek pilot çalışmaya ek çalışma yapılmıştır (Ertem, Kaleli-Yılmaz ve Baki, 2012).

6. Pilot çalışma sonrasında araştırmacı öğretmen hazırlanan çalışma yapraklarında öğrencilerin anlamadıkları, öğrencilerde kavram yanılgısı oluşturabilecek ifadeleri tez danışmanı ile birlikte kontrol ederek gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra çalışma yapraklarına yönelik öğretmen kılavuzunu (Ek 2) oluşturarak çalışma yapraklarını asıl çalışmaya hazır hale getirmiştir.

3. 2. Araştırma Grubu

Pilot çalışma 2010-2011 eğitim öğretim yılının ikinci yarıyılında (bahar dönemi) Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Özalp Meslek Yüksekokulu'na seçilerek gelip Bilgisayar Teknolojileri Programı'nda öğrenim gören ve "BP-BIS-106 Matematik-2" dersini alan 11'i bayan 21'i erkek 32 öğrenci ile yürütülmüştür. Bu süreçte araştırmacı öğretmen öğrencilerin öğrenmede zorlandıkları "limit-süreklilik" konusunu öğrenmelerini sağlayacak bilgisayar destekli çalışma yaprakları hazırlayarak, öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin aktif katılımlarını sağlamaya çalışmıştır. Böylece hazırlanan çalışma yapraklarında öğrencilerin anlamadıkları, öğrencilerde kavram yanılgısı oluşturabilecek ifadeler tez danışmanı ile birlikte kontrol edilip gerekli düzenlemeler yapılarak çalışma yapraklarına yönelik öğretmen kılavuzu oluşturulup çalışma yaprakları asıl çalışmaya hazır hale getirilmiştir. Ayrıca öğrencilerin limit-süreklilik konusu öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinden (BCS) Derive programını kullanabilmelerine yönelik görüşlerinin belirlenebilmesi için 20 adet açık uçlu soru hazırlanarak öğrencilerden elde edilen cevaplarla pilot çalışmaya ek çalışma yapılmıştır (Ertem, Kaleli-Yılmaz ve Baki, 2012).

Pilot çalışmadan sonra ise eksikleri tamamlanan çalışma yaprakları 2012-2013 eğitim öğretim yılının ikinci yarıyılında (bahar dönemi) Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Özalp Meslek Yüksekokulu'nda Bilgisayar Teknolojileri Programı'nda öğrenim gören ve "BP-BIS-

106 Matematik-2" dersini alan 12'si bayan 20'si erkek 32 öğrenci ile yürütülmüştür. Bu aşamada asıl çalışma için hazır hale getirilen çalışma yaprakları ders akışı doğrultusunda "limit-süreklilik" konusunun anlatılacağı zaman bilgisayar destekli öğrenme ortamında uygulanmıştır. Bu ders sürecinde öğrencilerin çalışma yaprakları üzerine yazdıkları, öğrencilerin ekran çıktıları, araştırmacı öğretmen notları ve ders sürecindeki diyaloglar MYO öğrencilerinin "limit-süreklilik" konusunu öğrenmeleri ile ilgili asıl verileri oluşturmuştur. Ayrıca elde edilen bu verileri desteklemek için 2013-2014 eğitim öğretim yılının birinci yarıyılında (güz dönemi) dönem dersleri tam başlamadan aynı öğrenci grubu (12'si bayan 20'si erkek 32 öğrenci) ile aynı çalışma yaprakları 2 hafta yeniden çalışılıp bu süreçte geçen diyaloglar da verilere ilave edilmiştir. Böylece öğrencilerin öğrenme çıktıları ile elde edilen tüm veriler SOLO taksonomisi ile değerlendirilmeye çalışılmıştır. Çalışmada sürece dâhil olan öğrenci isimleri öğrencilerin gerçek isimleri değildir. Diyaloglarda ise öğrencileri temsil etmek amacıyla kullanılan isimlerin baş harfleri kullanılmıştır.

Bu süreçten sonra 2014-2015 ve 2015-2016 eğitim-öğretim yıllarında da aynı dersi yürüten araştırmacı öğretmen dersin içeriğini değiştirmeden hazırladığı çalışma yapraklarını derste uygulayarak gözlemlerine devam etmiştir. Bu süreçlerde araştırmacı öğretmen notlarının haricinde elde ettiği yeni notları da eğitim-öğretim yıllarını belirterek çalışmasına ilave etmiştir.

3. 3. Asıl Çalışma

Pilot çalışmada görülen eksikliklerin giderilmesinin ardından asıl çalışma araştırma problemlerine çözüm getirmek için depremden sonra 2012-2013 eğitim-öğretim yılı bahar dönemi başlayıp 2013-2014 güz döneminde tamamlanmıştır. Çalışma kapsamında araştırmacı öğretmen MYO'da ders akışı içinde başarılı bulduğu Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerinin yılsonuna doğru görmüş oldukları limit-süreklilik konusunu öğrenmede güçlük çektiklerini fark etmesi üzerine öğrenmeyi kolaylaştıracak bilgisayar destekli öğretim ortamı tasarlamayı uygun görmüştür. Bu doğrultuda taramış olduğu literatür desteği ile matematik dersi öğretim programından, matematik ders kitaplarından ve matematik öğretimine yönelik hazırlanmış kitaplardan yararlanarak 10 adet çalışma yaprağı hazırlamıştır. Limit-süreklilik konusu öğrenme alanının kazanımlarını inceleyen araştırmacı öğretmen tasarlanmasını uygun gördüğü bilgisayar destekli öğrenme ortamına uygun olarak hazırladığı çalışma yaprakları doğrultusunda öğrencilerin;

1. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme;
2. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme;
3. Fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme;

4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme;
5. Limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme;

ile ilgili kazanımları elde etmelerini amaçlamıştır.

Uygulama süreci başlamadan önce bilgisayar laboratuvarlarında her dönem formatlanan bilgisayarlara Derive yazılımını yükleyen araştırmacı öğretmen öğrencilerin Derive yazılımını etkili kullanabilmeleri için programın menülerini, menülerdeki araçları ve bu araçların özelliklerini içeren bir kılavuz oluşturmuştur.

Pilot çalışma 2010-2011 eğitim-öğretim yılının ikinci yarıyılında 11'i bayan 21'i erkek 32 öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışma sonucunda öğrencilerin ders akışı içerisinde çalışma yapraklarına verdikleri cevaplar doğrultusunda SOLO taksonomisine göre bilgisayar destekli öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusunu öğrenebilmelerine ilişkin meslek yüksekokulu öğrencilerinin görüşleri için her seviyeye gösterge olan davranışları belirlenmiştir. Ayrıca pilot çalışma sonrasında geliştirilen çalışma yapraklarında öğrencilerin anlamadıkları, öğrencilerde kavram yanılgısı oluşturabilecek ifadeler tez danışmanı ile kontrol edilmiş, gerekli düzenlemelerden geçirildikten sonra birbirini tekrar eden çalışma yaprakları elenerek asıl çalışmada 6 çalışma yaprağı uygulanmıştır.

Asıl uygulama 2012 deprem süreci sonrası eğitim-öğretim şartları düzeltildikten sonra 2012-2013 eğitim-öğretim bahar yarıyılında başlamış olup, 2013-2014 eğitim-öğretim güz yarıyılında tamamlanmıştır. Uygulama süreci yeni dönemde yapılan 2 haftalık ders süreci ile birlikte 2012-2013 eğitim-öğretim bahar yarıyılında 5 hafta 2013-2014 eğitim-öğretim güz yarıyılında 2 hafta olmak üzere toplam 7 hafta sürmüştür. Bu süreçlere ilişkin ilgili tablo aşağıda belirtilmiştir;

Tablo 7. Asıl Çalışma Kapsamında Yer Alan Süreçler

Haftalar	Yapılan Uygulamalar	Uygulama Süresi
1. hafta 30.04.2013	Limit-süreklilik konusu ile ilgili kavramsal ipuçları verilmiştir. "Derive" tanıtım kılavuzu dağıtılmıştır	3 saatlik ders süreci
2. hafta 07.05.2013	Kılavuz yardımıyla yazılım tanıtılarak, öğrencilerle limit bulma, grafik çizme, süreklilik inceleme gibi uygulamaları yapılmıştır.	3 saatlik ders süreci
3. hafta 14.05.2013	2. ve 3. çalışma yaprakları (Çlş.Yp-2 ve Çlş.Yp-3) yazılım yardımıyla uygulanmıştır.	3 saatlik ders süreci
4. hafta 21.05.2013	5. ve 7. çalışma yaprakları (Çlş.Yp-5 ve Çlş.Yp-7) yazılım yardımıyla uygulanmıştır.	3 saatlik ders süreci

Tablo 7’nin devamı

5. hafta 28.05.2013	8. ve 10. çalışma yaprakları (Çlş.Yp-8 ve Çlş.Yp-10) yazılım yardımıyla uygulanmıştır.	3 saatlik ders süreci
6. hafta 17.09.2013	2., 3. ve 5. çalışma yapraklarının yazılım yardımıyla yeni dönemde tekrarlanması	2.5 saat ders süreci
7. hafta 24.09.2013	7., 8. ve 10. çalışma yapraklarının yazılım yardımıyla yeni dönemde tekrarlanması	2.5 saat ders süreci
TOPLAM		20 saat

Bu süreçten sonra 2014-2015 ve 2015-2016 eğitim-öğretim yıllarında da aynı dersi yürüten araştırmacı öğretmen dersin içeriğini değiştirmeden hazırladığı çalışma yapraklarını derste uygulayarak gözlemlerine devam etmiştir. Bu süreçlerde araştırmacı öğretmen notlarının haricinde elde ettiği yeni notları da eğitim-öğretim yıllarını belirterek çalışmasına ilave etmiştir.

3. 3. 1. Çalışma Ortamı (Bilgisayar Laboratuvarı)

Bilginin yapılandırılıp öğrenilmesinde içinde bulunulan ortamın etkisi önemlidir. Öğrenmeyi kolaylaştıracak ortamların daha esnek ve öğrenci merkezli olmasına dikkat edilmelidir (Ersoy, 2005). Öğrenme sürecini daha etkileşimli hale getirebilmek amacıyla bilginin üretilmesi ve sunulmasında öğretim teknolojileri ile donanımlı bir ortam tasarlanmaya çalışıldı. Bu ortam için araştırmacı öğretmen, çalıştığı meslek yüksekokulunun bilgisayar laboratuvarını kullandı. Bu ortamda öğrencinin öğrenmeye etkin katılımı sağlanmaya çalışıldı, öğrenci öğrenmeye motive edilerek öğrenciden öğrenilecek konu ile ilgili çalışma yapraklarını ve etkinlikleri tamamlamaları istendi (Demirel, 2010). Bu çalışmada öğrencilerin limit-süreklilik konusunu öğrenebilmeleri için bilgisayar destekli öğrenme ortamında Derive yazılımı kullanılmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Bilgisayar laboratuvarındaki bilgisayar donanımının Derive yazılımını çalıştırabilecek kapasitede olmasına dikkat edilmiştir. Bu ortamda öğretmenin kullandığı masada biri olmak üzere toplam 31 adet (internet bağlantısının da bulunduğu) bilgisayar bulunmuştur. Her bir bilgisayarın önünde öğrencilerin oturabilecekleri bilgisayar sandalyeleri vardır. “U” şeklinde oturma planına sahip öğrenci masa düzeni, öğrencilerin birbirleriyle iletişim halinde olmalarına ve aktif olarak sürece katılmalarına etkili olmuştur. Öğretmenin kullandığı masanın arkasında bir sınıf tahtası, yanında ise bilgisayara bağlı bir dijital tahta ve bir projeksiyon cihazı yer almaktadır. Ayrıca öğrencilerin yazılanları daha rahat görmeleri için bir ayaklı tahta da araştırmacı öğretmen tarafından laboratuvara getirilmiştir. Laboratuvardaki söz konusu materyaller ve yerleşim düzeni Şekil 12, Şekil 13 ve Şekil 14'te verilmiştir.

Şekil 12. Çalışma ortamındaki (bilgisayar laboratuvarı) yerleşim düzeni

Şekil 13. Çalışma ortamındaki (bilgisayar laboratuvarı) yerleşim düzeni

Şekil 14. Çalışma ortamındaki (bilgisayar laboratuvarı) yerleşim düzeni

3. 3. 2. Ders Akışı Öncesi

Araştırmacı öğretmen MYO'da geleneksel ders uygulamalarını gerçekleştirirken genel olarak başarılı bulduğu Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerinin yılsonuna doğru görmüş oldukları limit-süreklilik konusunu öğrenmede güçlük çektiklerinin farkına varmıştır. Bu durum üzerine alanyazın taramaları gerçekleştiren araştırmacı öğretmen bilgisayar destekli öğrenme ortamının öğrenmeyi kolaylaştırabileceğini düşünmüştür. Bu ortam için en uygun yer olarak belirlediği bilgisayar laboratuvar ortamı "3.3.1. Çalışma Ortamı (Bilgisayar Laboratuvarı)" başlığı altında ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Böyle bir ortamda özellikle MYO öğrencilerinin kullanacağı yazılım karmaşık yapıdan uzak, sade ve dikkat çekici olmalıydı. Bunun üzerine araştırmacı öğretmen lisans ve doktora ders sürecinde tanımış olduğu yazılımları teker teker incelemiştir. Ayrıca alanyazın çalışmalarında cebirsel işlemlerin genelde bilgisayar cebir sistemi yazılımları ile desteklendiğini gördükten sonra "Derive" yazılımının bu süreçte faydalı olabileceği düşünülmüştür. Kullanılacak olan yazılıma karar verildikten sonra çalışma yaprakları ile eş zamanlı olarak Derive yazılımını tanıtan bir kılavuz oluşturulmuştur. Bu kılavuzda Derive yazılımının menü tanıtımı, temel özelliklerinin kullanımı ve öğrencilerin yazılımı hangi konularda kullanabileceğine yer verilmiştir. Geliştirilen bu materyal 30.04.2013 tarihinde limit-süreklilik ile ilgili teorik bilgilerin ve kavramsal ipuçlarının verildiği geleneksel ders akışının sonuna doğru MYO öğrencilerine incelemeleri için dağıtılarak “Derive” yazılımına kısaca değinilmiştir. Bir sonraki derste de yazılım üzerinde grafik çizme, süreklilik inceleme gibi uygulamalarla yazılımın tanıtımı tamamlanmıştır. Ders akışı öncesi yapılan hazırlıklardan bir diğeri ise çalışma yapraklarının hazırlanması idi. Araştırmacı öğretmen çalışma yapraklarını “Derive” yazılımı ile desteklerken öğrencilere yol gösterici aşamalar içermesine dikkat etmiştir. Ayrıca çalışma yapraklarındaki sorular önceki derslerden öğrencilerin limit-süreklilik ile ilgili eksikleri doğrultusunda hazırlanmıştır. Çalışma yapraklarını geliştirme aşaması süreci 3.1.2’de ve çalışma yapraklarının yapısı 3.4.1’de özetlenmiştir.

3. 3. 3. Ders Akışı

Araştırmacı öğretmen geleneksel ders uygulamalarını gerçekleşirken limit-süreklilik konusuna geldiğinde öğrencilerini önceden hazırladığı bilgisayar destekli öğrenme ortamına götürmüştür. Bundan sonraki 5 haftalık ders akışı sürecini bu ortamda devam ettireceklerini belirten araştırmacı öğretmen bu süreçte dersi işlerken aynı zamanda gözlemler yapmış ve alan notları (günlükler) tutmuştur. Günlüklerde geçen öğrenci isimleri öğrencilerin gerçek isimleri değildir. İlk günlüğe baktığımızda öğrencilerin bu ortamda nasıl matematik dersi işleyeceklerine dair şaşırdıklarını görmekteyiz. Bu şaşırma ile ilgili araştırmacı öğretmenin günlüğündeki notlar aşağıdaki gibidir.

Dilan: *Hocam derslerimizi artık bilgisayar da mı işleyeceğiz? Bilgisayarda matematik dersi yapılır mı?*

Harun: *Aslında bilgisayar görmekten bıktık fakat matematik ve bilgisayar ilginç gibi duruyor.*

Engin: *Bilgisayarda matematik ancak hesap makinesi ile olur…. Başka bir şekli yok işte. İş olsun diye geldik bu sınıfa.*

Derya: *Elif hoca boş yere getirmez bizi bu sınıfa. Kesin güzel bir şeyler olacak…*

İsim olarak belirttiğim öğrenciler haricinde diğer öğrencilerden duyduğum cümleler birbirine benzer içeriktedir. Genel olarak öğrenciler bilgisayar ile matematiği ilişkilendirememişlerdir.

Araştırmacı öğretmen için bilgisayar destekli öğrenme ortamına geçilmesiyle verileri toplama süreci başlamıştı. Her hafta 3’er saatlik ders ile toplam 5 haftalık ders akışı 30.04.2013’te başlayıp 28.05.2013’te bitmiştir.

İlk hafta 30.04.2012 tarihinde 3 saatlik ders ile başlamıştır. Araştırmacı öğretmen önceden planlamış olduğu gibi bu derste limit-süreklilik konusu ile ilgili ön bilgi olması açısından bazı hatırlatmalara yer vermiştir. Bu süreçte geleneksel ders akışını sürdüren araştırmacı öğretmen, limit-süreklilik ile ilgili teorik bilgiler ve kavramsal ipuçları vererek önceden anlatmış olduğu fonksiyon kavramı, çarpanlara ayırma, trigonometri gibi birçok konunun limit-süreklilik konusu içinde kullanılacağına değinmiştir. Ayrıca limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrencilerin önceden bilmeleri gereken bazı kazanımlara yönelik uygulamalar ve hatırlatmalar yapmıştır. Araştırmacı öğretmenin bu ders sürecine dair konu anlatımlı ders notlarındaki hatırlatmalar ve uygulamalar aşağıdaki kazanımları içermekteydi:

1. Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasının örneklerle açıklanması (Ɛ-komşuluğu ve δ ile ilişkisi) (küçük-büyük değerlerden yaklaşıldığında elde edilen limitler arası ilişkinin belirtilmesi)
2. Limit ile ilgili özelliklerin belirtilmesi ve genel uygulamalar yapılması
3. Trigonometrik fonksiyonların limiti ile ilgili özelliklerin belirtilmesi
4. Belirsizlik durumlarının $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0.\infty)$ belirtilmesi ve limitlerinin hesaplanması
5. Fonksiyonun bir noktadaki, bir aralıktaki sürekliliğinin belirlenmesi ve grafik üzerinde açıklanması
6. Fonksiyonun süreksizlilik çeşitlerinin hatırlatılması

Bu ders süreci, araştırmacı öğretmenin teorik ders anlatımını, gözlemlerini ve araştırmacı öğretmenin günlüğündeki notları içermektedir. Bu notları incelediğimizde;

Öğrencilerin lise döneminde öğrenmesi gereken limit-süreklilik konusu yine eksik! Öğrencilere limit-süreklilik ile ilgili "bunu hatırlıyor musunuz?" diye sorduğum soruların çoğunda "hayır" cevabını almaktayım. Bu aslında şaşırdığım değil beklediğim cevap. Çünkü her yıl bu konu geldiğinde öğrencilerime yabancı bir dil öğretiyormuşum gibi hissediyorum. Neyse ki bu ders sadece limit-süreklilik ile ilgili özellikleri verdim. Ve bunlarla ilgili bir iki soru çözüp dersi hızlı bir şekilde bitirdim. Öğrencilerin pek bir şey anlamadığını biliyorum. Çünkü çoğu öğrenci anlamadığını dile getirdi. Fakat bu 3 saatlik ders sürecimin sonunda yaptığım açıklama öğrencileri biraz rahatlattı. Yaptığım açıklama şöyleydi;

AÖ: Arkadaşlar anlattıklarımı tam olarak anlamamış olabilirsiniz. Fakat bu daha dersimizin başlangıcı! Bu gün yapmış olduğumuz uygulamaları ve vermiş olduğum özellikleri gelecek haftaya kadar inceleyin. Gelecek hafta dersimizin akışı daha farklı olacak ve yaptığımız birçok şeyi bilgisayar üzerinde denemeye başlayacaksınız. Ayrıca şu anda dağıtacak olduğum "Derive" Yazılımı Tanıtım Kılavuzu'nu da gelecek haftaya kadar incelemenizi istiyorum. Derive, bir BCS olup cebirsel işlemlerin hem sembolik hem de sayısal

> *sonuçlarını elde edebileceğiniz bir yazılımdır. Ayrıca size fonksiyonların grafiklerini de kolaylıkla çizip inceleyebileceğiniz bir ortam sunar. Sizler bilgisayarcısınız ve eminim ki gelecek dersimizde bu kılavuzdakilerden daha fazlasını sizler bana anlatacaksınız.*

Bu açıklamam öğrencilerin derin bir nefes almasını sağlamıştı. Ayrıca "Derive" Yazılımı Tanıtım Kılavuzu'nu eline alan öğrencilerin büyük bir kısmı hemen kılavuzu incelemeye başlamıştı. Hatta ders bitmesine rağmen bilgisayar destekli öğrenme ortamında kalıp kılavuz aracılığıyla bilgisayar üzerinde çalışma yapan öğrencilerim bile oldu. Bu durum beni çok mutlu etmişti. Öğrencilerimi ilk defa derse karşı bu kadar ilgili görüyordum.

Böylece bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusunun öğretimi için ilk haftalık dersimiz tamamlanmış oldu. İkinci hafta gelmeden öğrencilerden bazıları incelemiş oldukları kılavuz ve limit-süreklilik ile ilgili anlamadıkları bazı şeyleri netleştirebilmek için soru sormaya odama gelmişlerdir. Araştırmacı öğretmen gerekli yol göstermelerle öğrencilerin merak ettikleri sorulara yanıt vermeye çalışmıştır.

İkinci hafta 07.05.2013 tarihinde 3 saatlik ders ile başlamıştır. Bu haftada öncelikle "Derive" yazılımı verilen kılavuz aracılığıyla kısaca hatırlatılarak öğrencilerle yazılım üzerinde uygulamalara başlanmıştır. Bu uygulamalar genel olarak limit-süreklilik konusu ile ilgili hazırlanan çalışma yapraklarının uygulanmasından önceki ön çalışma niteliğindeydi. Ders, araştırmacı öğretmenin 1 hafta önceki dersle ilgili öğrencilerin sormak istedikleri bir şeylerinin olup olmadığı sorgulamasıyla başlamıştır. Bu süreci aşağıda anlatırken aralarda verilen yorumlar araştırmacı öğretmenin gözlemler esnasında aldığı notlardan derlenerek yazılmıştır.

AÖ: *Arkadaşlar geçen dersimizde teorik olarak kısaca ipuçları verdiğim limit-süreklilik konusu ve uygulamalarına dair sormak istediğiniz herhangi bir şey var mı?*

Bu soruya karşılık soru yığınlarıyla karşılaşmayı bekliyordum fakat düşündüğüm gibi olmadı. Zaten öğrencilerden derse ilgili olanlar hafta içinde sorularını sormuştu. Diğerlerinin ise 1 hafta önceki derste ne yaptığımıza bakmadıkları açıktı. Buna rağmen kılavuzu inceleyip incelemediklerini sorduğumda öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun kılavuzu incelemiş olduğunu fark ettim.

AÖ: *Peki arkadaşlar vermiş olduğum kılavuzu inceleme fırsatınız oldu mu?*

Harun: *Hocam güzel bir yazılıma benziyor. Bu yazılımda birçok matematiksel işlemler yapabiliriz.*

Harun normalde derse karşı ilgili olmayan fakat saygılı bir öğrencimdi. Dönem başında yanıma gelip lise döneminde yeterli düzeyde matematik eğitimi almadığını ve matematiği anlamadığını belirtmişti. Zaten MYO öğrencilerinin en büyük eksikliği matematikten yoksun yetişmiş olmalarıydı. Ders anlatırken çok düşük seviyelere hitap ettiğimin farkındaydım. Bu durumun beni çok yormasına rağmen öğrenebilmeleri için hep arayış içerisindeydim. Beklide bilgisayar destekli öğrenme ortamı da benim için bu arayışlardan biriydi.

Genel olarak kılavuzu inceleme ile ilgili verdikleri ("Hocam bu yazılımı satın alabilir miyiz?", "Bu yazılımla her çeşit matematik problemi çözebilir miyiz?", " Kullanma kılavuzu olmadan da bunu keşfedebilirdik. Siz yeter ki bize bilgisayar deyin!") gibi cevaplar kılavuzun incelendiğini göstermekteydi.

Bu aşamada yazılımın menüsü kılavuz ve PowerPoint yardımıyla kısaca tanıtıldıktan sonra öğrencilere yazılımı incelemeleri için serbest süre verilmiştir. Bu sürenin ardından öğrencilerin hem yazılımı tanımaları hem de asıl konuya odaklanmaları için yazılım üzerinde limit bulmaya süreklilik incelemeye yönelik uygulamalar yapılmıştır. Araştırmacı öğretmen ikinci haftalık dersine aşağıdaki cümlelerle devam etmiştir.

AÖ: Kılavuzu incelemiş olmanız beni mutlu etti. O halde şimdi bu yazılım ile neler yapabileceğimize biraz bakalım. Mesela geçen dersimizde limit-süreklilik ile ilgili çözmüş olduğumuz bazı örnekleri burada denemeye çalışalım. İlk örneğin çözümünü ben yapacağım fakat bundan sonraki örnekleri sizler birbirinizle yardımlaşarak yapmaya çalışacaksınız. Ben yaptıklarınızı sırayla kontrol edeceğim.

Öğrencilere önceki hafta teorik olarak anlattığı limit-süreklilik konusu ile ilgili yazılım üzerinde grafik çizme, süreklilik inceleme uygulamaları yaptırmayı planlayan araştırmacı öğretmen bir örnek yaptıktan sonra öğrencilere limit bulma ve süreklilik inceleme ile ilgili aşağıda belirtilen fonksiyonları vermiştir. Bu fonksiyonlar ilk hafta teorik olarak çözülen örnekler olup araştırmacı öğretmenin teorik ders notları arasında yer almaktadır. Aşağıda verilen bu örnek soruların "Derive" yazılımı eşliğinde çözülmesi istenerek öğrencilere serbest çalışma süresi tanınmıştır. Böylece araştırmacı öğretmen her bir öğrenci ile ayrı ayrı ilgilenme fırsatı yakalamıştır.

Limitlerini bulunuz;

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = ?$
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-1}{x^2+1} = ?$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3-a^3}{x+a} = ?$
- $\lim\limits_{x \to 1} (x^2-x-4)^6 = ?$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+4x}{x^2+1} = ?$

Verilen noktalarda sürekliliklerini inceleyiniz;

- $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ 2x-1, & x \le 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x > 0 \\ 2x+1, & x \le 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x > 2 \\ 3, & x = 2 \\ a-x, & x < 2 \end{cases}$

Şekil 15. İkinci hafta “Derive” yazılımı üzerinde limit-süreklilikle ilgili çözülmesi istenen sorular

MYO öğrencileri matematik dersinde ilk defa serbest bırakılmıştı. Bu süreçte neler yapıldığını gözlemlemek için her bir öğrenci ile ayrı ayrı ilgilenen araştırmacı öğretmen, genel olarak yönergesi olmayan bu soruların yazılım üzerinde çözümünde öğrencilerin zorlandıklarını görmüştür. Bu ise pilot çalışma öncesinde hazırlanıp sonrasında düzenlenen çalışma yapraklarının önemini göstermektedir.

Bu ders akışında, araştırmacı öğretmenin gözlemler sırasında aldığı notlar ve bazı öğrencileriyle geçen diyaloğu aşağıdaki gibidir;

Öğrencilere limit ile ilgili “bunu hatırlıyor musunuz?” diye sorduğum soruların çoğunda “hayır” cevabını almaktayım. Neyse ki bu derste Derive yazılımının kullanımı ve öğrencilerin teknolojiye olan ilgileri sayesinde limit-süreklilikle ilgili uygulamaların daha dikkat çekici olduğunu görmek mutluluk verici. Öğrenciler verilen fonksiyonların limit-süreklilik çözümlerinden çok yazılımı tanımaya odaklanmışlardır.

AÖ: *Nasıl gidiyor Engin? Yapabiliyor musun?*

Engin: *Hocam aslında yaparım da soru sizin yazdığınız gibi olmuyor.*

AÖ: *Hımm… Acaba fonksiyonu yazarken parantezlere dikkat etsen nasıl olur? Bir de öyle dene bakalım.*

Engin’in yazdığı fonksiyon $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonu olmasına rağmen parantez kullanmadığı için fonksiyon $x^2 - \frac{4}{x} - 2$ şekline gelmişti. Parantezleri denediğinde verilen fonksiyonu yazabilmişti. Limit hesaplama işlemini yaparken “Variabla ne demek?, Limit point ne demek?, Approach Form'da ne yapmam gerek?, Şimdi ne yapmam gerek?" gibi sorular sormuştu. Aslında bu sorular bu yazılımı yeni kullanmaya başlayan bir öğrenci için normaldi. Onun için sorduğu sorulara açıklayıcı cevaplar vererek onun bu süreçte yazılımı tanımasına yardımcı olmaya çalıştım.

Başka bir öğrencim olan Merve'nin yanına uğradığımda $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{x^2+1}=?$ sorusu ile ilgilendiğini gördüm. Aşağıda Merve ile olan diyaloğumuza yer verilmiştir:

AÖ: *Mervecim beğendin mi yazılımı?*

Merve: *Hocam çok ilginç ilk defa bilgisayarda matematik sorusu cevaplıyorum. Yaa çok heyecan verici! Aslında kâğıt kalemle denedim bazılarında x yerine limitin istendiği değeri yazarak yapabildim. Fakat zor olanları yine yapamadım. Oysa bu konu çok dikkatimi çekmişti ve çalışmıştım. Hocam burada x giderken ∞'a limitini bulun demek istiyor değil mi? x sonsuza nasıl gider? Bir türlü anlamıyorum sonsuzlukta işlem yapılır mı?*

AÖ: *Mervecim doğal sayıları belli bir yerden sonra sayamıyoruz ve sonsuza kadar gidiyor diyoruz. Bazı grafiklere baktığımızda ucunu bulamıyoruz fakat sonsuzdaki sonucunu tahmin edebiliyoruz. İşte bu da onun gibi. Hadi bakalım defterinde çözemediğin bu soruyu yazılımda çözebilecek misin?*

Merve: *Verilen ifadeyi yazarken parantez kullanıyoruz. Şimdi limit alıyoruz. x için; buraya ∞ nasıl yazacağız?*

AÖ: *En altta yer alan menüyü bu yazılım içinde rahatça kullanabilirsin.*

Merve: *Evet, ∞ işaretini buldum. Bunu da yerine yazdığımızda işte sonuç "3" yaşasın… Bu sorunun cevabının 3 olabileceğini hayatta düşünmezdim. İnanamıyorum!*

AÖ: *Bundan sonraki derslerimizde bu fonksiyonların grafiklerini de çizeceğiz ve o zaman yaptıkların daha anlamlı olacak. Yaptıklarını yorumlamak daha kolay olacak.*

Merve: *Hocam zaten en çok çalıştığım ders matematik olmasına rağmen en az anladığım ders de matematik!*

Aslında Merve birçok MYO öğrencisi için ortak bir soruna değinmişti. Gerçekten matematik dersi için çalışan MYO öğrencilerinin genel problemi matematik anlamayıp yapamıyor olmalarıydı. Bunun asıl sebebi ise zamanında matematikten mahrum yetişmiş olmalarıydı. Oysa Merve gerçekten de kafasına takılan şeyleri sorgulayan zeki öğrencilerimden biriydi.

Bir başka öğrencim olan Harun'un yanına uğradığımda $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ 2x-1, & x\leq 1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun sürekliliğini incelemeye çalıştığını gördüm. Aşağıda Harun ile aramızda geçen diyaloğa yer verilmiştir.

AÖ: *Harun, nasıl gidiyor? Yapabiliyor musun bir şeyler?*

Harun: *Hocam şimdi ne desem yalan olur. Yazılım sayesinde bir sürü işlem yapıyorum limit alıyorum, türev alıyorum ne bileyim güzel şeyler var. Fakat süreklilik diye bir başlık yok İngilizce süreklilik kelimesine de baktım yok. Acaba ben mi bulamıyorum. Bir de bu fonksiyonu buraya nasıl yazacağım hocam?*

AÖ: *Harun, süreklilik incelemek için özel bir menü yok. Sürekliliği grafikler üzerinde inceleyeceğiz. Önce $f(x)=x^2$ fonksiyonunu yazıp grafiğini çizelim. Daha sonra $f(x)=2x-1$ fonksiyonunu yazıp aynı grafik üzerine grafiğini çizelim. Ve bu grafikte x'in 1'den büyük olduğu yerlerde $f(x)=x^2$ fonksiyonunu ve x'in 1 eşit olup küçük olduğu yerlerde ise $f(x)=2x-1$ fonksiyonunun grafiğini inceleyelim. Böylece hem grafik incelemeyi öğrenebilirsin hem de sürekliliği rahatlıkla bulabilirsin.*

Harun: *Hocam ya bu gerekli miydi? Ben daha toplama yapamıyorum bir de grafik çizeceğim.*

AÖ: *Harun, bunları burada yani yazılım üzerinde yapacaksın. Sen çizim yapmayacaksın. Ayrıca emin ol ki senin için çok zevkli olacak.*

Harun: *Hocam çok zor. Şimdi grafik bu menü ile mi çiziliyor? Söylediklerinizi yaparsak, hocam bu menüden nasıl çıkacağım? Hocam ben bunu yapamayacağım. Başka bir şeyle uğraşsam olur mu?*

AÖ: *Olsun bakalım. Bari verilen fonksiyonların limitini bul. Fakat arkadaşlarından da yardım almayı ihmal etme. Yine hiçbir çalışmamıza bakmamışsın.*

Harun, sınıfımın haylaz ve pratik zekâ öğrencilerinden biriydi. Kendi kendine bırakıldığında ve yanında arkadaşları ile şakalaşmaları olmadığında birçok işin üstesinden gelebilirdi. Bundan dolayı bu öğrencimi çok fazla zorlamadan kendi haline bırakıyordum. Harun gibi birçok öğrencimin parçalı fonksiyonların sürekliliği ile ilgili sorularda zorlandıklarını gördüm. Bu durum beni çalışma yaprakları için seçmiş olduğum soruların MYO öğrencileri için daha uygun olduğu sonucuna götürdü. MYO öğrencilerimin genel olarak sürekliliğin ne olduğunu öğrenebilmeleri bile benim için başarı olacaktı.

Böylece bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusunun öğretimi için ikinci haftamızı da tamamlamış olduk. Haftaları anlatırken vermiş olduğum verilerin tamamı “Bulgular” bölümünde anlatılacağından yukarıda ders akışını özetleyen verilere yer verilmiştir. Bundan sonraki 3., 4. ve 5. haftalardaki ders akışı içerisinde çalışma yaprakları ve Derive yazılımı kullanılmıştır.

Üçüncü hafta 14.05.2013 tarihinde 3 saatlik ders ile başlamıştır. Bu derste araştırmacı öğretmen önceden hazırlamış olduğu çalışma yapraklarından 2. ve 3. çalışma yapraklarını dağıtarak MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarındaki soruları yönergeler yardımıyla çözmelerini istemiştir. Bu iki çalışma yaprağı ile araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinin fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etmesini, fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilmesini ve fonksiyon grafiğini çizip inceleyebilmesini hedeflemiştir. Özel olarak verilen noktalarda $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği içeren bu çalışma yaprakları öğrencilerin en çok korktuğu trigonometrik ifadeleri de içermekteydi. Bu süreci aşağıda anlatırken aralarda verilen yorumlar araştırmacı öğretmenin gözlemler esnasında aldığı notlardan derlenerek yazılmıştır.

AÖ: *Arkadaşlar vermiş olduğum Çalışma Yaprağı-2’deki yönergeler yardımıyla geçen hafta dersimizde yapmış olduğumuz çalışmanın benzerini yapacağız. Bu kez limit ile ilgili bilgilerinizi yoklamak için yanınıza uğrayacağım. Bu çalışma yaprağını bitiren arkadaşlara 3. Çalışma Yaprağını vereceğim. 3. Çalışma Yaprağı bitmeden dersimiz bitmeyecek. Ayrıca yaptıklarınızı bilgisayarlarınıza kaydedeceksiniz ve bunları alıp sizlere not vereceğim. Bakalım hanginiz yazılımı daha iyi kullanabiliyorsunuz ve sorulan soruları anlayabiliyorsunuz?*

Sınıftan yükselen “ya hocam” sözlerine aldırmadan derse başlamıştım onlar da biliyordu ki dersimiz hedefine ulaşmadan asla bitmezdi. Bu süreçte öğrencilerimi yalnız bırakmayıp bir yandan sordukları sorulara yönlendirici cevaplar vermeye çalışırken bir yandan da her biri ile ayrı ayrı ilgilenip not tutmaya çalıştım. Aşağıda bu süreci özetleyen kısa diyaloglara yer verilmiştir:

Okan: *Hocam bir şey sorabilir miyim?*

AÖ: *Evet Okan?*

Okan: *x=1’e küçük değerlerden yaklaşmak soldan limit oluyor değil mi? Zaten “ left” kullanıyoruz.*

AÖ: *Evet Okan. Limit-süreklilik ile ilgili ilk dersimizde bunlara değinmiştim. Bulabildin mi limitini?*

Okan: *Buldum hocam ikisi de aynı right ve left $\frac{2}{3}$ oluyor şimdi bunun limiti vardır diyebilirim. Çünkü ikisi de aynı.*

Bu arada Okan'ın yanında bulunan defter dikkatimi çekmişti. Belli ki soruyu ilk önce defterinde yapmaya çalışmıştı fakat yapamamıştı. Çünkü üzerini bayağı karalamıştı.

AÖ: *Okan, soru için defterinde de uğraşmış gibisin?*

Okan: *Evet hocam aslında size bir şey daha sormak istiyorum burada x=1 için pay sin0 oluyor bu değer 0 değil mi?*

AÖ: *Evet*

Okan: *Payda da 0 oluyor yani belirsizlik var limit var mıdır?*

AÖ: *Yazılımda limiti ara bakalım var mı?*

Okan: *Hocam limit de aynı çıkıyor yani $\frac{2}{3}$ Yazılım limit var diyor. Şimdi belirsizliğin olması limitin olmasını etkilemez diyebilir miyim?*

AÖ: *Diyebilirsin Okan, limitin olması için yaklaştığın noktanın civarında yani ε-komşuluğunda aynı değeri bulman yeterlidir.*

Okan sınıfımın çalışkan ve matematiği iyi olan öğrencilerinden biri olmasına rağmen bu sorusu beni çok mutlu etmişti. Belki de MYO öğrencilerinden bekleyebileceğim en güzel sorulardan biriydi. Bu durum yazılımın öğrencilerimin sorgulama yeteneğini azıcık olsun arttırdığının göstergesiydi. Ayrıca bu diyalog SOLO ile yorumlandığında Okan'ın dersin başında TY seviyesinde verdiği cevapları ÇY ve İY seviyesine gelişmiştir. Yukarıdaki diyalogumuz Okan'ın grafik çizimi ile devam etti.

Okan: *Hocam grafik çizmek hiç bu kadar zevkli olmamıştı. Aynen verdiğiniz grafiğe benzedi. Yani doğru yapmışım. Bu dersten sonra merak ettiğim bütün fonksiyonların grafiğini çizerim herhalde. Şimdi bu grafik üzerinde 1'e nasıl yaklaşacağım?*

AÖ: *Geçen hafta grafik çizimi yaptığınızda "Trace Plots" menüsü sizin grafik üzerinde hareket etmenizi sağlar demiştim hatırlıyorsan. İşte bu menü yardımıyla grafiğin üzerinde hareket ederek x=1 değerine küçük ve büyük değerlerden yaklaşabilirsin. Hatta burada yer alan "Cross" ifadesinden hangi değere ne karşılık geliyor diye de öğrenebilirsin.*

Okan: *Bu mükemmel bir şey. Evet burada 1'in çevresinde aldığım değer hep 0.66666 olarak gözüküyor. Yani limit budur. Hocam, sanki 1 noktasında bir boşluk var. Yoksa yanılıyor muyum?*

AÖ: *Doğru söylüyorsun Okan. O boşluğun sebebi fonksiyonunun o noktada belirsiz olmasından kaynaklanıyor. Bunu grafiğini yaklaştırıp daha net görebilirsin.*

Bu süreçte Okanla geçen diyalogumuz genel olarak en iyi diyaloglardan biriydi. Önceden de belirtmiş olduğum gibi Okan sınıfımın çalışkan ve matematiği iyi olan öğrencilerindendi. Zaten bu durum sorduğu sorularla verdiği cevaplarla da belli oluyordu. Bu ders Okan için hem çok eğlenceli hem de öğretici olmuştu.

Bu haftayı özetleyecek bir başka öğrencimle geçen diyalogum ise aşağıdaki gibi gelişmiştir;

AÖ: *Erdal, nasıl gidiyor? Bir şeyler yapabiliyor musun?*

Erdal: *Fonksiyonu yazdım. Hocam, burada "-∞" gidecek olduğum değer mi yoksa küçük değerlerden yaklaşmak mı?*

AÖ: *Burada "-∞" yaklaşman gereken değerdir. -∞'a hangi taraftan yürüyerek yaklaşabilirsin?*

Erdal: *Anladım galiba büyük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu limit değerini onun için soruyor. Büyük taraftan küçük tarafa -∞'a yürümek anlamına geliyor.*

Aslında Erdal matematik ile ilgili söylenenleri anlamakta güçlük çeken bir öğrencimdi. Onun için kendisine bazı ifadeleri anlatırken onun dilinde konuşmaya çalışıyordum. Limit değerini 2 olarak bulan Erdal, şaşırarak;

Erdal: *O kadar sonsuzluk ile uğraş sonuç 2 olsun! Bu matematik beni hep şaşırtıyor. Oysa hem verilen değeri yerine yazamıyoruz hem de sonsuza gidiyoruz. Eee şimdi ne yapmalıyım? Grafik mi?*

AÖ: *Evet Erdal, şimdi grafiğini çiz ve üzerinde bu söylediklerini yorumlamaya çalışalım.*

Erdal: *Tamamdır, kağıttaki grafiğe benzedi. Demek ki doğru yapmışım. Şimdi sonsuza nasıl gideceğiz ki?*

AÖ: *Grafik üzerinde hareket edip uzun süre -∞ doğrultusunda giderken aşağıda verilen "cross" kısmından alacağın değerleri incele bakalım ne ile karşılaşıyorsun? Tabii ki bu süreçte -∞'a gittiğin için grafiğinin görüntüsünü giderek küçültmen gerekecek.*

Erdal: *2.871, 2.714, 2.542, 2.103, 2.006… Hocam bu giderek küçülüyor. Ya daha da küçük değerler olursa? Olamaz bir anda sıfıra karşılık gelen değere geldi ve 3 oldu. Daha küçülemedi.*

AÖ: *İşte bunun için Erdal, tam olarak -∞'a gidemesek bile ulaşabileceğimiz en uzak noktanın 2 ve çevresi olduğunu görüyoruz bunun için limit değerimiz 2 oluyor.*

Erdal: *Çok ilginç. Pekâlâ, hocam sıfır değerinde neden 3 oluyor?*

AÖ: *Verilen fonksiyona tekrar bakalım istersen x yerine 0 yazdığında aldığın değer ne oluyor?*

Erdal: *Anladım şimdi. Ya bu yazılım benden daha da zeki. Keşke onun gibi matematik çözebilseydim!*

Erdal gerçekten de matematiği anlamakta güçlük çeken bir öğrencimdi. Anlattıklarımın birçoğunu anlamadığını düşünüyordum. Aslında basit bir dille konuşup görsel ifadelerle desteklendiğinde matematik ile ilgili fikir yürütebiliyordu. İşte bu anlamda bilgisayar destekli öğrenme ortamında olmamız ve öğrencilerimle birebir ilgilenebiliyor olmam onların düşünme biçimlerini görmemde bana yardımcı oluyordu.

Böylece bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusunun öğretimi için üçüncü haftamızı da tamamlamış olduk. Bundan sonraki 4. ve 5. haftalardaki ders akışı süreci 3. hafta ile benzer aşamaları içermekteydi. Bu süreçte yapılanlar "Bulgular" bölümünde detaylarıyla ele alınacağından aşağıda sadece haftalara ait olan çalışmalara kısaca değinilecektir.

Dördüncü hafta 21.05.2013 tarihinde 3 saatlik ders süreci ile başlamıştır. Bu derste araştırmacı öğretmen önceden hazırlamış olduğu çalışma yapraklarından 5. ve 7. çalışma yapraklarını dağıtarak MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarındaki soruları yönergeler yardımıyla çözmelerini istemiştir. Üçüncü haftadaki hedefleri doğrultusunda 5. Çalışma Yaprağını tamamlayan MYO öğrencileri 7. Çalışma Yaprağı ile yeni hedefler doğrultusunda çalışmışlardır. Bu hedefler MYO öğrencilerinin; fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulmaları, fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyleyebilmeleri, limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilmeleri şeklindedir. Özel olarak 5. Çalışma Yaprağında $0.\infty$ belirsizlik durumu ve trigonometrik ifadelerin incelenmesine yer verilirken, 7. Çalışma Yaprağında kapalı aralıkta sürekliliğin grafik üzerinde incelenmesi isteniyordu.

Beşinci hafta 28.05.2013 tarihinde 3 saatlik ders süreci ile başlamıştır. Bu derste araştırmacı öğretmen önceden hazırlamış olduğu çalışma yapraklarından 8. ve 10. çalışma yapraklarını dağıtarak MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarındaki soruları yönergeler yardımıyla çözmelerini istemiştir. MYO öğrencileri dördüncü haftadaki 7. Çalışma Yaprağındaki hedefler doğrultusunda 8. ve 10. Çalışma Yapraklarını tamamlamışlardır. Bu hedefler MYO öğrencilerinin; fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulmaları, fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyleyebilmeleri, limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilmeleri şeklindedir. Özel olarak MYO öğrencilerinin süreksizlik çeşitlerinden 8. Çalışma Yaprağında “kaldırılabilir süreksizliği”, 10. Çalışma Yaprağında ise “sonsuz süreksizliği” grafik üzerinde incelemeleri istenmiştir.

Böylece 5 haftalık ders akışı sürecinde verilerin nasıl toplandığına dair süreç kısaca anlatılmaya çalışılmıştır. Genel olarak bu süreçte, bilgisayar destekli öğrenme ortamında öğrencilerin çalışma yaprakları üzerinde çalışmaları sırsında araştırmacı öğretmenin gözlemleri, gözlemler esnasında tuttuğu notlar ve öğrencilerin çalışma yaprakları ön planda olmuştur. Ayrıca öğrencilerin çalışma yaprakları doğrultusunda Derive yazılımında yaptıkları çalışmalar flash bellek yardımıyla toplanmıştır. Bu veriler daha sonra bulgularda kullanılmıştır.

3. 3. 4. Yeni Dönem Ders Akışı

5 haftalık ders akışı sonunda 2012-2013 bahar dönemi dersleri sona ermiştir. Araştırmacı öğretmen elde ettiği verileri güçlendirebilmek ve zamanı verimli kullanabilmek için derslerin yeni başladığı ilk haftalarda 2013-2014 eğitim-öğretim yılının güz döneminin ilk iki haftasında aynı bilgisayar laboratuvarında aynı öğrenci grubuyla aynı çalışma yaprakları tekrarlamıştır.

Yeni dönemin ilk haftası yapılan ders, çalışma verilerinin toplandığı altıncı hafta olup 17.09.2013 tarihinde yapılmıştır. Bu haftada yine aynı öğrenme ortamında (bilgisayar laboratuvarında) aynı öğrenci grubuyla 2., 3. ve 5. çalıma yaprakları tekrarlanmıştır. Yaklaşık 2.5 saat süren bu derste 2., 3. ve 5. çalışma yapraklarının uygulanmamış kopyaları dağıtılmış olup öğrenciler ders akışı boyunca çalışma yapraklarında yer alan sorularla meşgul olurken istedikleri zaman istedikleri şekilde Derive yazılımını kullanma imkânına sahip olmuşlardır. Böylece öğrencilerin konu ile ilgili öğrenmelerini derinlemesine anlamayı düşünen araştırmacı öğretmen, bu derste elde ettiği verileri 2012-2013 bahar döneminde elde ettiği verilere ilave ederek öğrencilerin düşünme biçimlerindeki gelişimi karşılaştırma fırsatı bulmuştur.

Yeni dönemin ikinci haftası yapılan ders, çalışma verilerinin toplandığı yedinci hafta olup 24.09.2013 tarihinde yapılmıştır. Bu haftada yine aynı öğrenme ortamında (bilgisayar laboratuvarında) aynı öğrenci grubuyla 7., 8. ve 10. çalıma yaprakları tekrarlanmıştır. Yaklaşık 2.5 saat süren bu derste 7., 8. ve 10. çalışma yapraklarının uygulanmamış kopyaları dağıtılmış olup öğrenciler ders akışı boyunca çalışma yapraklarında yer alan sorularla meşgul olurken istedikleri zaman istedikleri şekilde Derive yazılımını kullanma imkânına sahip olmuşlardır. Böylece öğrencilerin konu ile ilgili öğrenmelerini derinlemesine anlamayı düşünen araştırmacı öğretmen, bu derste elde ettiği verileri 2012-2013 bahar döneminde elde ettiği verilere ilave ederek öğrencilerin düşünme biçimlerindeki gelişimi karşılaştırma fırsatı bulmuştur.

Yukarıda özetlenen iki haftalık ders akışında önceki haftalarda olduğu gibi araştırmacı öğretmenle öğrenciler arasında geçen diyaloglar esnek bir yapıya sahip olup sohbet ortamı havasında gerçekleştirilmiştir. Böylece yeni döneme ait ders akışı ile devam eden 2 haftalık veri toplama süreci kısaca özetlenmiştir. Genel olarak bu süreçte, bilgisayar destekli öğrenme ortamında öğrencilerin limit-süreklilik konusunu öğrenebilmeleri derinlemesine değerlendirilmeye çalışılmıştır. Bundan önce 2012-2013 bahar döneminde 5 hafta boyunca öğrencilerin çalışma yapraklarına yazdıklarına, ekran çıktılarına, araştırmacı öğretmenle geçen diyaloglarına, araştırmacı öğretmenin gözlemlerine ve tuttuğu notlara, yeni dönemde yapılan iki haftalık ders sürecinde elde edilen veriler ilave edilip incelenerek SOLO taksonomisine bağlı olarak analiz edilmiştir.

Çalışmanın verileri her hafta ortalama 3'er saat olmak üzere toplam 7 haftada en az 20 saatlik zaman sürecinde toplanmıştır. Veri toplama süreci ve uygulama akışına ilişkin bilgilere "3.3. Asıl Çalışma" başlığına ait alt başlıklarda yer verilmiştir.

3. 3. 5. Araştırmacının Rolü

Araştırmacı öğretmen MYO'nda Bilgisayar Teknolojileri Bölümü'nde "BP-BIS-106 Matematik-2" dersini alan 12'si bayan 20'si erkek 32 öğrenciyi ders akışı içinde başarılı bulmuştur. Fakat öğrencilerinin yılsonuna doğru görmüş oldukları limit-süreklilik konusunu öğrenmede güçlük çektiklerini fark etmesi üzerine öğrenmeyi kolaylaştıracak bilgisayar destekli öğretim ortamı tasarlamayı uygun görmüştür. Bilgisayar destekli öğrenme ortamını tasarlamak için çalıştığı MYO'nun bilgisayar laboratuvarını kullanmayı uygun gören araştırmacı öğretmen ders akışı süresince kullanacak olduğu "Derive" yazılımını bilgisayarlara yükleyerek ortamı hazır hale getirdikten sonra öğrencilerin Derive yazılımını etkili kullanabilmeleri için programın menülerini, menülerdeki araçları ve bu araçların özelliklerini içeren bir kılavuz oluşturmuştur. Tasarladığı bu ortamda araştırmacı öğretmen (12'si bayan 20'si erkek) 32 öğrenci ile 5 haftalık ders akışı süreci ile bahar dönemini tamamlamıştır. Bu sürecin sonunda hem elde ettiği verileri güçlendirebilmek hem de öğrencilerin düşünme biçimlerindeki gelişimi derinlemesine inceleyebilmek için 2013-2014 eğitim-öğretim yılının güz döneminin ilk iki haftasında da aynı öğrenci grubuyla aynı çalışma yapraklarını tekrarlamıştır. Yeni dönemde yapılan dersler aynı öğrencilerle yine aynı öğrenme ortamında (bilgisayar laboratuvarında) yürütülmüştür. Öğrencilere aynı çalışma yapraklarının uygulanmamış kopyaları dağıtılmıştır. Ders akışı boyunca çalışma yapraklarında yer alan sorularla meşgul olan öğrenciler istedikleri zaman istedikleri şekilde Derive yazılımını kullanma imkânına sahip olmuşlardır.

Öğrencilerin limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenmelerini derinlemesine anlamayı düşünen araştırmacı öğretmen, 7 haftalık çalışma süresince hem araştırmacı hem de dersin hocası rolünü üstlenmiştir. Bu süreçte araştırmacı öğretmen, öğrencilerin çalışmalarını incelerken gerektiği yerde açıklayıcı bilgiler vermiş olup, bulundukları bilgisayar destekli öğrenme ortamındaki aksaklıkları gidermeye çalışmıştır. Ayrıca araştırmacı öğretmen, MYO öğrencilerinin limit-süreklilik ile ilgili hedeflenen kazanımlar doğrultusunda neleri bildikleri, neleri öğrendikleri, nelere ihtiyaç duydukları ile ilgili derinlemesine bilgi sağlayabilmek için öğrencilerin bu ortamdaki çalışmalarını ve davranışlarını gözlemleyerek gerektiğinde yansıtıcı ve betimleyici notlar tutmuştur.

7 haftalık ders akışı içinde öğrencilerle geçen diyaloglar, araştırmacı öğretmenin yansıtıcı ve betimleyici notları MYO öğrencilerinin konu ile ilgili öğrenmelerini derinlemesine anlamada etkili olmuştur. Ayrıca bilgisayar destekli öğrenme ortamının öğrencilerin öğrenme sürecine nasıl yardım ettiği, konu ile ilgili bilgilerinin şekillenmesinde ne derecede yardımcı olabildiği, konu ile ilgili nasıl düşünmeleri gerektiği ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmada araştırmacı öğretmenin ders akışı süresince elde ettiği verilere de katkı sağlamıştır.

Genel olarak araştırmacı öğretmen asıl çalışmada “BP-BIS-106 Matematik-2” dersi kapsamında anlatılması gereken konu sıralamasının gerekliliklerini yerine getirirken öğrencilerin öğrenmede güçlük çektiği “limit-süreklilik” konusuna geldiğinde tasarlamış olduğu bilgisayar destekli öğrenme ortamında aşağıdaki rolleri üstlenmiştir:

1. Ders akışı öncesi bilgisayar laboratuvarının bilgisayarlarını inceleyerek ders akışında kullanacağı “Derive” yazılımını her dönem formatlanan bilgisayarlara yüklemiştir.
2. Öğrencilerin “Derive” yazılımını etkili kullanabilmesi için programın menülerini, menülerdeki araçları ve bu araçların özelliklerini içeren bir kılavuz oluşturmuştur.
3. Ders akışı kapsamında 1. hafta, limit-süreklilikle ilgili kavramsal ipuçları içeren konu özeti yaptıktan sonra Derive Yazılımı Tanıtım Kılavuzu’nu dağıtıp yazılıma kısaca değinmiştir.
4. Ders akışı kapsamında 2. hafta, öğrencilerin hazırlanan bilgisayar destekli öğrenme ortamına uyum sağlaması ve yazılımı tanıması için oluşturduğu kılavuz yardımıyla limit bulma, grafik çizme, süreklilik inceleme gibi uygulamalar yaptırmıştır. Bu süreçte öğrenciler aktif olarak serbest çalışma yaparken araştırmacı öğretmen yol gösterici rol üstlenmiştir.

5. Ders akışı kapsamında 3., 4. ve 5. haftalar uygulanan çalışma yaprakları ile öğrencilerin belirlenen hedef kazanımlara ulaşmasını sağlamaya çalışmıştır. Bu süreçte araştırmacı öğretmen; ortam ile ilgili aksaklıkları gideren, öğrencilerin öğrenme süreçlerini gözlemleyen, sorulan sorulara göre açıklayıcı ve yol gösterici rolünü üstlenmiştir.
6. Yeni dönem ders akışı kapsamında 6. ve 7. haftalar; araştırmacı öğretmen hem elde ettiği verileri güçlendirebilmek hem de öğrencilerin düşünme biçimlerindeki gelişimi karşılaştırabilmek için yeni döneme ait (güz dönemi) ilk iki hafta aynı öğrenci grubu ile aynı ortamda aynı çalışma yapraklarını tekrar çalışmıştır. Bu süreçte araştırmacı öğretmen çalışmanın tutarlılığını sağlayıcı rol üstlenmiştir.

3. 4. Veri Toplama Araçları / Teknikleri

Eylem araştırmasında veriler gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla toplanır. Bu kategorilerden elde edilen veriler çalışmanın veri setini oluşturur (Philips ve Carr, 2009).

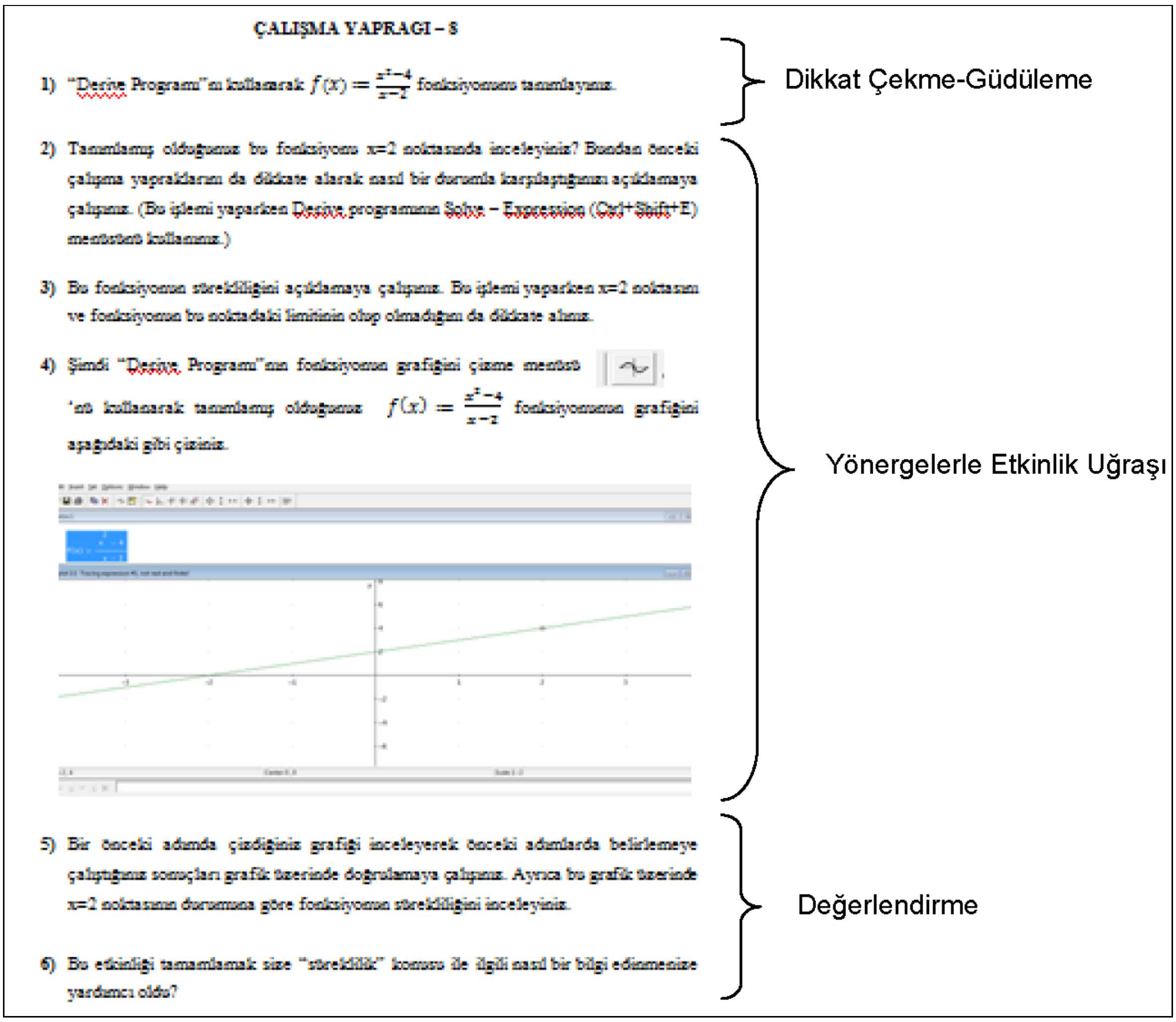
Bu araştırmada veriler öğretim süresince uygulanan çalışma yaprakları (bu çalışma yapraklarındaki öğrenci notları), öğrencilerin bilgisayar ekran çıktıları (Derive yazılımı üzerinde yaptıkları çalışmalar), gözlemler, gözlemler esnasında araştırmacı öğretmenin tuttuğu notlar ve çalışma boyunca öğrencilerle geçen diyaloglar yardımıyla toplanmıştır.

3. 4. 1. Çalışma Yapraklarının Yapısı

Öğrencilerin bilgisayar destekli ortamda limit-süreklilik konusu ile ilgili nasıl öğrendiklerini anlama sürecine rehberlik etmek için bilgisayar ortamında gerçekleştirmeleri gereken eylemler çalışma yaprakları içerisine gömülmüştür. Genel olarak çalışma yapraklarının yapısını incelediğimizde soruların sırasıyla dikkat çekme-güdüleme; verilen yönergelerle etkinlik uğraşı ve son olarak da değerlendirme aşamalarından oluştuğunu görmekteyiz. Bu aşamaları ele aldığımızda;

1. Dikkat çekme-güdüleme: Diğer bir ifade ile öğrencilerde merak uyandıracak isteklilik oluşturacak olan yönergelerdir. Çalışma yapraklarımızı incelediğimizde öğrenciler için “Derive” yazılımında işlem yapmak başlı başına dikkat çekicidir. Ayrıca meslek yüksekokulu öğrencileri için verilen fonksiyonları bu yazılımda tanımlayabilmek merak uyandırıcı ve önemlidir.
2. Etkinlik uğraşı: Bu aşamada MYO öğrencilerinin öğrenme ihtiyaçlarına yönelik grafik çizebilecekleri, hedef kazanımlara ulaşabilecekleri yönergelere yer verilmiştir.

3. Değerlendirme: Bu aşamada MYO öğrencilerinden bir önceki aşamada yapmış oldukları çalışmaları kontrol etmeleri istenerek yaptıklarını özetlemeleri sağlanmıştır. Ayrıca öğrendiklerini yeni bir durum içinde sorgulamalarını sağlayan yönergelere yer verilmiştir.
4. Aşağıda çalışma yapraklarının yapısını gösteren bir örnek olması açısından 8. Çalışma Yaprağı'na yer verilmiştir.



ÇALIŞMA YAPRAGI – 8

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonu x=2 noktasında inceleyiniz? Bundan önceki çalışma yapraklarını da dikkate alarak nasıl bir durumla karşılaştığınızı açıklamaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bu fonksiyonun sürekliliğini açıklamaya çalışınız. Bu işlemi yaparken x=2 noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü 'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.

5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde x=2 noktasının durumuna göre fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

6) Bu etkinliği tamamlamak size "süreklilik" konusu ile ilgili nasıl bir bilgi edinmenize yardımcı oldu?

Şekil 16. Çalışma yapraklarının yapısı ile ilgili örnek

Asıl çalışma kapsamında MYO öğrencileriyle 1 hafta limit-süreklilikle ilgili kavramsal ipuçlarını içeren konu özetinin yapılması ve "Derive Yazılımı Tanıtım Kılavuzu"nun dağıtılması, 1 hafta tanıtım kılavuzu yardımıyla "Derive" yazılımı tanıtılıp yazılım üzerinde limit bulma, grafik çizme, süreklilik inceleme uygulamalarının yapılması; 3 hafta 3'er saatlik ders süreçlerinde çalışılan çalışma yaprakları ve 2 hafta yeni dönem başlangıcında 2.5'ar saat aynı çalışma yapraklarının aynı ortamda (bilgisayar destekli öğrenme ortamında) tekrar çalışılması ile toplam 7 haftalık ders akışı sürdürülmüştür. Ana problem çerçevesinde çalışma yapraklarındaki soruların dağılımı;

1. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme
2. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme
3. Fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme
4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme
5. Limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme becerilerini kapsayacak şekilde hazırlanmıştır.

Bu becerilerin kalıcı olarak öğrenilebilmesi için işlemsel ve kavramsal olarak öğretilmesi gerekliliği öğrencinin aktif olarak bilgiyi kendisinin oluşturabilmesi ile açıklanmaktadır (Baki, 2008). Buradan hareketle limit-sürekliliğin incelenmesi istenilen fonksiyonlar için geliştirilen çalışma yaprakları Bruner'in buluş yoluyla öğretim stratejisi ve Vygotsky'ın "yaklaşık öğrenme eşiği" kuramı dikkate alınarak tasarlanmıştır. Bu bağlamda çalışma yapraklarının hazırlanması sırasında aşağıdaki ilkelere dikkat edilmiştir:

1. Çalışma yaprakları bilgiyi doğrudan aktaran hazır bilgi içeren materyal niteliğinde olmamalıdır.
2. Öğretilmesi istenen özellikler, ilişkiler, kavramlar ve olgular ilgi çekici bir yaklaşımla planlı bir şekilde çalışma yaprağında yer alacak etkinliklerin içerisine keşfetmeye yönelik açık uçlu sorular yardımıyla gizlenmelidir.
3. Etkinliklerin senaryoları bireysel ve grup çalışmaları göz önüne alınarak hazırlanırken öğrencilere matematiksel ifadeleri-sembolleri kullanabilme, soyutlama yapabilme ve mantıksal çıkarımda bulunabilme gibi bilişsel süreçler sağlanmalıdır.
4. Çalışma yapraklarında açık anlaşılır yönergeler kullanılmalıdır. Böylece öğrenci sık sık öğretmenin yardımına ihtiyaç duymaz yani öğrenciye minimum yardım yapılmış olur.
5. Öğretmen uygulama sırasında hüküm verici olmadan öğrencilerin çözüme ulaşmasını sağlamalı. Ayrıca etkinliklerdeki olgular, çözümler, varsayımlar, genelleştirmeler önce öğrenci tarafından grup tartışması sonra da sınıf tartışması ortamında sorgulamaya uygun olmalıdır (Baki, 2008).

3. 4. 2. Gözlemler ve Araştırmacı Notları

Eylem araştırmalarında uygulayıcı veya araştırmacı kendi uygulamasını gözlemleyebilir ya da bir başka uygulayıcı veya araştırmacıdan kendi uygulamasını araştırma soruları çerçevesinde gözlemlemesini isteyebilir. Özellikle gözlenen ortamlarda etkileşimin ayrıntıları veri için önemli ise gözlem yapılırken ses kaydı veya video kayıt cihazı kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Araştırmacı öğretmenin öğretim çalışmalarında matematiği öğretmek için gözlem yapması katılımcıların açıklamalarını, gösterimlerini, hareketlerini ve hesaplamalarını ayrıntılarıyla yansıtması nedeniyle yüksek oranda güvenirliğe sahiptir (Hill, Ball ve Schilling, 2007). Bu nedenle araştırmacı öğretmen katılımcı olduğu bu çalışmada, ders akışında ve yeni döneme ait derslerde öğrencilerle birebir iletişim kurarak MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamındaki çalışmalarını ve davranışlarını gözlemlemeye çalışmıştır. Öğrencileriyle sürekli iletişim halinde olan araştırmacı öğretmen, limit-süreklilik ile ilgili hedeflenen kazanımlar doğrultusunda neleri bildikleri, öğrendikleri ve nelere ihtiyaç duyduklarını gözlemleyebilmek için çalışma yaprakları uygulandıktan sonra öğrencilere serbest zaman vermiştir. Bu serbest zamanda öğrencilerin görüşlerini açıkça ifade edebileceği sınıf ortamında açık-uçlu soruları içeren ders akışı içerisinde olmaları dikkate alınmıştır.

Eylem araştırmalarında sıklıkla kullanılan araştırmacı günlüğü veya araştırmacı notları araştırmanın tüm parçaları ile ilişkili gözlemlerin ve görüşlerin kaydedildiği bir defter veya not kâğıtlarıdır. Araştırma sürecinin her adımında kullanılabilir ve gözlemleri, analizleri, kısa notları, doğrudan alıntıları, öğrenci yorumlarını, öğrenci ile ilgili izlenimleri şeklinde birçok veriyi kapsar (Johnson, 2005). Bu çalışmada katılımcı olan araştırmacı öğretmen, limit-süreklilik konusunu öğrenmeleri doğrultusunda oluşturulan bilgisayar destekli öğrenme ortamında MYO öğrencilerini gözlemlerken bir yandan da yansıtıcı notlar tutmuştur. Araştırmacı öğretmen ders akışında ve ders akışı sonrasında dikkatini çeken her şeyi not almıştır. Özellikle çalışma yapraklarının uygulandığı Derive yazılımının işlevselliği, öğrenme ortamının limit-süreklilik öğrenmeye katkısı, dersin gidişatı, öğrencilerin görüşleri ve öğrenme seviyeleri hakkında önemli bulduğu her şeyi not almıştır.

3. 4. 3. Öğrencilerin Ekran Çıktıları

Araştırmacı öğretmen BCS destekli öğrenme ortamında, çalışma yapraklarının uygulanmasını takip eden her ders öğrencilerin Derive yazılımı üzerinde yaptıkları çalışmaları masaüstüne dosya halinde kaydetmelerini istemiştir. Bu kayıtlar flash belleğe alınarak öğrencilerin çalışma yapraklarına verdikleri cevaplar ile bilgisayarda oluşturdukları cevapları karşılaştırma fırsatı elde edilmiştir. “Derive Yazılımı Tanıtım Kılavuzu” ve araştırmacı öğretmenin limit-süreklilik konusu ile ilgili menüleri örnek sorular üzerinde tanıtması yardımıyla, öğrenciler çalışma yapraklarında yer alan soruları ve grafik çizimlerini görselleştirebilmişlerdir. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile o noktadaki görüntüsünü ayırt etme, belirsizlik durumlarında fonksiyonun limit değerinde nasıl davrandığını görme, grafik üzerinde sürekliliği inceleme, fonksiyonun tanımsız olduğu yerlerde süreklilik inceleme aşamalarında MYO öğrencilerinin davranışları gözlemlenmiş ve öğrencilerin uygulama esnasındaki görüşleri tespit edilmiştir.

3. 4. 4. Ders Sürecinde Gerçekleşen Diyaloglar

Değerlendirilmesi yapılacak konu ile ilgili olarak derinlemesine bilgi elde etmeye yardımcı olan diyaloglar, kişinin öğrenme durumunu ve yaşadıkları problemler hakkında bilgi edinmeyi sağlayan araştırmacı ve birey (görüşülen kişi) arasında yapılan karşılıklı görüşmeler olarak tanımlanabilir (Zazkis ve Hazzan, 1999). Belirlenmiş bir konu, kavram veya probleme odaklanarak yürütülen diyaloglar irdelenen konunun bütün boyutlarını açığa çıkarabilir. Böylece diyalogların amacı, bireyin sahip olduğu kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak konu hakkındaki duygu, düşünce ve inançlarının neler olduğunu keşfetmektir (Çepni, 2007; Zazkis ve Hazzan, 1999).

Ders sürecinde gerçekleşen diyaloglar, belirlenmiş bir konu, kavram veya probleme odaklanarak esnek bir yöntemle yürütülmeye imkân verir. Ayrıca konu ile ilgili derinlemesine bilgiler elde etmeyi sağladığından irdelenen konunun bütün boyutları açığa çıkabilir. Sohbet havasında gerçekleşen diyaloglarda öğrenciler sahip oldukları bilişsel süreçleri rahatça sergileyeceklerinden araştırmacı öğretmen öğrencilerin öğrenmeleri hakkında daha derin bilgi sahibi olabilecektir.

Matematik eğitimi araştırmalarında özellikle öğrencilerin öğrenme süreçlerine odaklanan çalışmalarda diyaloglar özel olarak mülakatlar kullanılmaktadır (Akkoç, 2005; Akkoç, 2006; Çelik ve Baki, 2007; Groth, 2002; Groth ve Bergner, 2006; Güven, 2006; Iseri, 2003; Jones ve diğ., 1997; Jones ve diğ., 2000; Mooney, 2002; Vallecillos ve Mareno, 2002)

Bu çalışmada araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusunu öğrenebilmelerini değerlendirmeye odaklanmıştır. MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusu ile ilgili yeterli olmadıkları alt öğrenme alanlarına ilişkin hazırlanan Derive yazılımı destekli çalışma yapraklarının uygulandığı öğrenme ortamında öğrencilerin soyut düşünme becerilerini SOLO taksonomisi ile değerlendirmede araştırmacı öğretmenle öğrenciler arasında geçen diyaloglar önem taşımaktadır. Ayrıca öğrencilerin konuyu öğrenmeleri doğrultusunda öğrenme ortamının ve Derive yazılımının nasıl yardım ettiğini, konu ile ilgili bilgilerinin şekillenmesinde ne derecede yardımcı olabildiğini, konu ile ilgili nasıl düşünmeleri gerektiğini ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmada diyaloglar önemli bir yere sahiptir. Öğrencilerle gerçekleşen diyaloglarda genel olarak aşağıdaki durumlara açıklık getirilmeye çalışılmıştır:

1. BCS destekli öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusunu öğrenmeye ilişkin düşünme biçimlerinin SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık geldiğinin sorgulanması,
2. MYO öğrencilerinin BCS destekli öğrenme ortamında çalışma yaprakları için seçilen Derive yazılımı üzerinde yaptıkları çalışmaların (yazılımının kullanılabilirliği açısından) SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık geldiğinin sorgulanması,
3. MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarındaki sorulara verdikleri cevaba nasıl ulaştıklarının ve bu cevapların gelişiminin SOLO taksonomisinin hangi düzeylerine karşılık geldiğinin sorgulanması (limit-süreklilik konusu ile ilgili soyut düşünebilmelerini geliştirme),
4. MYO öğrenci cevaplarının SOLO taksonomisi ile yoklanması ("Bu ortam bundan önce vereceğin cevapları ne derecede değiştirdi?" "Bu sonuca nasıl ulaştın?", "Bunu yaparken nasıl düşündün?", "Bu sonuç seni neye ulaştırdı?", "Bununla ne söylemek istedin?" gibi soruların sorulması ile verilen cevaplara SOLO taksonomisi ile açıklık getirilmeye çalışılması),
5. BCS kullanımının MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusundaki öğrenme çıktılarının niteliğini ve yapısını nasıl etkilediğinin sorgulanması.

Ders akışı boyunca öğrencilerle gerçekleşen diyaloglar, öğrencilerdeki değişimi destekleme ve konu ile ilgili öğrenmelerini derinlemesine sorgulayabilmede bir yol niteliği taşımıştır. Veri kaybını önlemek için bazı diyaloglar ses kaydına alınmıştır. Ayrıca diyaloglar boyunca öğrencilerin önünde ders akışında kullandıkları çalışma yaprakları ve bir bilgisayar mevcut olup, sorulan sorularla meşgul olurken istedikleri zaman istedikleri şekilde Derive yazılımını kullanma imkânına sahip olmuşlardır. Böylece diyaloglar araştırmacı öğretmene, hazırlanan öğrenme ortamında öğrencilerin limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenmelerini derinlemesine anlamaya imkân sunmuştur. Öğrencilerle yapılan diyaloglara doğrudan alıntı yapılarak çalışma içerisinde yer verilmiştir.

Derive yazılımı destekli çalışma yaprakları yardımıyla tamamlanan 7 haftalık ders süreci sonunda öğrencilerin limit-süreklilik konusunu öğrenmelerini derinlemesine değerlendirmede araştırmacı öğretmen, öğrenci ile diyaloglarından, öğrenci ile ilgili gözlemlerinden, öğrencilerin çalışma yapraklarından ve öğrencilerin ekran çıktılarından elde ettiği öğrenci çıktılarını değerlendirilerek, öğrencinin bu ortamda konuyla ilgili öğrenmelerini SOLO seviyesine bağlı olarak anlamaya çalışmıştır. Böylece öğrencinin öğrenme çıktısının neden o seviyede olduğuna ulaşılmıştır.

3. 5. Verilerin Analizi

Nitel çalışma yapan araştırmacılar veri analizinin nasıl yapılacağı konusunda farklı yollar önermektedirler. Strauss (1987) nitel araştırmadaki veri analiz yöntemlerinin standart hale getirilemeyeceğini ve veri analizini standartlaştırmanın nitel araştırmacıyı sınırlandıracağını vurgulamıştır. Ayrıca standartlaşmış veri analizinin, eldeki nitel verilerden zengin ve derinlemesine sonuçlar elde edilmesini olumsuz yönde etkileyeceğini de belirtmiştir. Atkinson (1996) da benzer bir yaklaşımı sergilemiştir (Atkinson, 1996'dan aktaran: Yıldırım ve Şimşek, 2006:76). Wolcott (1994), nitel veri analizinde toplanan verinin özgün formuna mümkün olduğu kadar sadık kalınarak, gerektiğinde katılımcıların söylediklerinden doğrudan alıntı yaparak, açıklayıcı sonuçlara ulaşmak amacıyla bazı temalar ve temalar arası ilişkiler belirlenerek sistematik analiz yapılması gerektiğini önermiştir (Wolcott, 1994'ten aktaran: Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Genel olarak nitel veri analizi ile ilgili önerilerde ortak olan ve en çok göze çarpan nokta, verilerin betimlenmesi ve temaların ortaya çıkarılmasına verilen önemdir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu önem dikkate alınarak elde edilen nitel veriler üç grupta analiz edilmiştir.

3. 5. 1. MYO Öğrencilerinin Çalışma Yapraklarındaki Her Bir Çalışma Adımında Limit-Süreklilik ile İlgili Öğrenme Seviyelerinin Belirlenmesinde İzlenen Yol

Bu çalışma için temel veriler öğrencilerin ders akışı boyunca çalıştıkları çalışma yaprakları, ekran çıktıları, araştırmacı öğretmenin aldığı notlar ve ders sürecinde gerçekleşen diyaloglar sonucu öğrencilerin öğrenme çıktılarından elde edilen verilerdir. Bu süreçte çalışma yapraklarına verilen cevaplar araştırma sorularına cevap bulabilmek için gruplandırılan her bir adımda ayrı ayrı incelenmiştir. Aşağıda çalışma yapraklarında yer alan soruların gruplandırılmasına ilişkin tabloya yer verilmiştir:

Tablo 8. Çalışma Yapraklarında Yer Alan Soruların Gruplandırılması

Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri İle Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Birbirinden Ayırt Etme İle İlgili Sorular	Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerini Bulabilme İle İlgili Sorular	Fonksiyon Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulabilme İle İlgili Sorular	Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Düşünebilme İle İlgili Sorular	Limit İle Süreklilik Arasında İlişki Kurabilme İle İlgili Sorular
Çlş.Yp.-2: 2, 3, 4, 5	Çlş.Yp.-2: 6, 7	Çlş.Yp.-2: 8, 9	Çlş.Yp.-7: 2, 3	Çlş.Yp.-7: 6
	Çlş.Yp.-3: 2, 3, 4	Çlş.Yp.-3: 7, 8, 9	Çlş.Yp.-8: 6	Çlş.Yp.-8: 2, 3
	Çlş.Yp.-3: 5, 6	Çlş.Yp.-5: 6, 7	Çlş.Yp.-10: 6	Çlş.Yp.-10: 2, 3
	Çlş.Yp.-5: 2, 3, 4	Çlş.Yp.-7: 4,5		
	Çlş.Yp.-5: 5	Çlş.Yp.-8: 4,5		
		Çlş.Yp.-10:4,5		

Tablo 8. dikkatlice incelendiğinde çalışma yapraklarında yer alan soruların kendi içinde gruplandırıldığı görülmektedir. Toplam 18 çalışma sorusu olarak ele alınan bu sorular (çalışma yapraklarındaki sorular) çalışma problemine cevap bulacak şekilde 5 ana grup altında toplanmıştır. 5 soru grubunun oluşturulması araştırmacı öğretmene veri analizini yapmada ve bulguları sunmada kolaylık sağlamıştır. Bu soru gruplarının çalışma yapraklarındaki sorulara göre karşılığı aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 9. Soru Gruplarının Çalışma Yapraklarındaki Karşılığı ve Hedef Kazanımları

Soru Grubun Adı	Çalışma Yaprağı	Soru No	Soru Grubunun Hedef Kazanımı
Birinci Soru Grubu	2	2, 3, 4, 5	Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri İle Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Belirler ve Aralarındaki İlişkiyi Yorumlar
İkinci Soru Grubu	2	6, 7	Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerini Bulur
	3	2, 3, 4	
	3	5, 6	
	5	2, 3, 4	
	5	5	
Üçüncü Soru Grubu	2	8, 9	Fonksiyon Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulur
	3	7, 8, 9	
	5	6, 7	
	7	4, 5	
	8	4, 5	
	10	4,5	
Dördüncü Soru Grubu	7	2, 3	Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Söyler ve Yorumlar
	8	6	
	10	6	
Beşinci Soru Grubu	7	6	Limit İle Süreklilik Arasında İlişki Kurar
	8	2, 3	
	10	2, 3	

Bu gruplandırma dikkate alınarak ders akışı sürecinde öğrencilerin çalışma yapraklarındaki sorulara verdikleri cevaplar, ekran çıktıları, ders sürecinde gerçekleşen diyaloglar ve araştırmacı öğretmenin notlarından elde edilen veriler yazıya dönüştürülerek araştırma soruları doğrultusunda defalarca okunmuştur. Araştırma sorularına cevap olabilecek veriler veri setinden seçilmiştir. Bir soruya başka sorularda cevap olabilecek yanıtlar, ilgili olduğu grubun altında toplanmıştır. Bu işlem yapılırken araştırmacı öğretmen ders sürecinde yaptığı gözlemler ve aldığı notlar ışığında yazıya açıklayıcı notlar ("heyecanlı olması cümleleri toparlayamamasına neden olmuştur" gibi) eklemiştir. Araştırma sorularına yanıt olmayan cevaplar ise "anlaşılmayan durum" olarak dikkate alınmıştır. Verilerin incelenmesi sürecinde her bir öğrencinin vermeye çalıştığı mesajlar kodlanarak anlam bazında ortak temalar gruplandırılmıştır. Böylece her öğrenci için her problem durumunu kapsayan *vignetler* yazılmıştır (Baki, 1994; Çelik, 2007). Daha sonra bu vignetler her bir soru grubu için bir araya getirilerek karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiş ve tablolaştırılmıştır. Bu tablolara bağlı olarak bulgular oluşturulmuştur.

Araştırmanın veri analizi sürecinde Miles ve Huberman'ın (1994) belirttiği "verinin işlenmesi", "verinin görsel hale getirilmesi" ve "sonuç çıkarma ve teyit etme" aşamaları dikkate alınmıştır. Ayrıca Miles ve Huberman (1994) tarafından tanımlanan çift-kodlama yöntemi (double-coding prosedure) kullanılarak araştırmanın iç geçerliliği sağlanmıştır. Bu süreçte araştırmacı öğretmen ile birlikte, SOLO taksonomisi hakkında bilgi sahibi olan bir başka araştırmacı rol almıştır. Araştırmacı öğretmen ile diğer araştırmacı birbirinden bağımsız şekilde, araştırmacı öğretmenin pilot çalışmadan elde ettiği tanımlamaları içeren rubriklerden yararlanarak MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarındaki her bir aşama ile ilgili cevaplarını vignetler ışığında bir seviyeye atamıştır. Böylece araştırmacı öğretmenin araştırma problemi doğrultusunda gruplandırdığı çalışma yapraklarındaki adımlara verilen cevaplar, öğrencilerin ekran çıktıları ve ders sürecindeki diyaloglardan elde edilen veriler, diğer araştırmacı ile tekrar okunarak MYO öğrencileri için en uygun düşünme seviyesi belirlenmiştir.

MYO öğrencilerinin cevaplarını SOLO taksonomisinin seviyelerine atama işleminde, araştırmacı öğretmenin ve diğer araştırmacının karşılaşacağı durumlar: (1) incelenen cevap rubrik yardımı ile bir seviyeye atanabilir, (2) incelenen cevap rubrikteki tanımlama ile uymamaktadır, (3) incelenen cevaba uygun bir tanımlama rubrikte yer almamaktadır (Çelik, 2007). Bu durumlar ayrı ayrı incelendiğinde birinci durum rubrikteki tanımlamanın geçerli olduğunu gösterirken ikinci ve üçüncü durum rubrikteki tanımlamanın öğrencinin düşünmesini karakterize etmede yeterli olmadığını gösterir. İkinci ve üçüncü durumla karşılaşılan tanımlamalarda bir değişikliğe gidilmesi veya yeni bir tanımlama eklenmesi gerekmektedir (Çelik, 2007). Araştırmacı öğretmen çalışma yapraklarındaki adımlara verilen cevaplarda, ekran çıktılarında veya diyaloglarda bu gibi bir durumla karşılaştığında cevapları bir bütün olarak ele alıp inceleyerek rubrikteki tanımlamalarını düzenlemiştir. Böylece öğrencilerin cevaplarından elde ettiği düşünme seviyelerini, düzenlediği tanımlamalar sonucunda yenilediği seviyelere atamıştır. Oluşturulan seviyelendirmeler araştırmacı öğretmen ve diğer araştırmacı ile tekrar kontrol edilirken anlaşmazlığa düştükleri (cevabın farklı seviyelere yerleştirilmesi) durumlarda her iki araştırmacı cevabın en uygun olduğu seviyede uzlaşıncaya kadar tartışmaya devam etmiştir. Ayrıca SOLO taksonomisi hakkında bilgi sahibi olan bir başka uzmanın görüşlerine danışarak uzlaştıkları seviyeyi doğrulamışlardır. Çünkü ayrı ayrı belirlenen seviyelerin ortalamasını almak öğrencinin gerçek anlamdaki seviyesini temsil etmiş olmayacaktı (Çelik, 2007).

Araştırmacı öğretmen ve diğer araştırmacı arasındaki güvenirliğin araştırılmasında Miles ve Huberman'ın (1994) güvenirlik formülü;

$$\text{Güvenirlik} = \frac{\text{Görüş Birliği}}{\text{Görüş Birliği} + \text{Görüş Ayrılığı}}$$

şeklinde kullanılarak anlaşma yüzdesi hesaplanmıştır.

Çalışma 32 öğrenci ile yapılmış olup 5 soru grubu altında incelenen toplam 18 çalışma sorusu ve toplam (32*18=576) 576 durum sınıflandırılmaya çalışılmıştır. Görüş ayrılığı sayısı: 87 olup toplam görüş birliği (576-87=489) 489'dur. Böylece bu çalışmanın anlaşma yüzdesi %85 olarak hesaplanmıştır. Miles ve Huberman'a (1994) göre %70 ve üzerinde bir yüzdenin güvenilir bir kodlama olduğu düşünüldüğünde, bu çalışmada SOLO taksonomisinin seviyeleri temel alınarak geliştirilen rubriğin tutarlı ve güvenilir seviyelendirme yapmaya uygun olduğunu görmekteyiz.

3. 5. 2. MYO Öğrencilerinin Limit-Süreklilik ile İlgili Öğrenmelerinin Ortalama Seviyesinin Belirlenmesinde İzlenen Yol

Nitel veri analiz sürecinin temel işlevi veri setinde doğrudan görülmeyen, ancak kavramsal kodlama ve sınıflama yoluyla elde edilen temalar arası anlamlı ilişkilerin ortaya çıkarılmasıdır. Bu aşamada elde edilen bilgiler incelenerek anlamlı bölümlere ayrılmaya ve her bölümün kavramsal olarak ne anlam ifade ettiği bulunmaya çalışılır. Böyle bir süreçte nitel veriler belli bir düzeyde sayılara indirgenebilir (Çelik, 2007; Yıldırım ve Şimşek, 2006). Buradaki amaç istatistiksel yöntemlerle genelleme yapmak veya değişkenler arasında ilişki aramak değildir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Nitel verilerin sayısallaştırılmasındaki temel amaçlardan birkaçı; güvenirliği arttırmak, yanlılığı azaltmak, veri analiz sürecini daha iyi kontrol edebilmek, veri analiz sürecine esneklik katabilmek ve elde edilen sonuçların daha geniş çaplı anket çalışmaları ile tekrar sınanmasına fırsat sunmak şeklinde açıklanabilir (Miles ve Huberman, 1994; Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Nitel veriler temelde basit yüzde hesapları ve sözcük sıklık hesapları olarak iki yöntemle sayısallaştırılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada araştırmacı öğretmen, MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında “limit-süreklilik” konusunu öğrenebilmelerine ilişkin genel bir bakış sunmaktadır. Bu genel bakışı daha esnek sunabilmek amacıyla aşağıda açıkladığı şekilde basit hesaplamalardan yararlanmıştır.

Kodlamalar anlam bazında ortak temalar halinde gruplandırılırken oluşturulan vignetlerdeki veriler yardımıyla dikkatli bir şekilde tamamlanan analiz sürecinde öğrencilerin çalışma yapraklarına verdikleri cevaplar SOLO taksonomisine bağlı rubrikler olarak sayısal bir ölçekleme (1-5) yardımı ile sınıflandırılmıştır (Çelik, 2007; Mooney, 2002; Rider, 2004). Rubriklerde 1 yapı öncesi seviyesindeki, 2 tek yönlü yapı seviyesindeki, 3 çok yönlü yapı seviyesindeki, 4 ilişkilendirilmiş yapı seviyesindeki ve 5 soyutlanmış yapı seviyesindeki bir cevabı göstermektedir (Çelik, 2007). Bu seviyeler MYO öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusunu öğrenebilmeleriyle ile ilgili ortalama seviyelerini belirlemede yardımcı olacaktır.

Asıl çalışmadan önce pilot çalışma yapılırken öğrenci cevaplarından bazılarının SOLO seviyesine ilişkin özellikleri taşıdığı halde sınıflandırmanın altında ya da üstünde kaldığı görülmüştür. Bu tip cevapları belirli hale getirebilmek için seviyenin altında olan cevapların sayısal kodunun önüne “-“ işareti; seviyenin üstünde olan cevapların sayısal kodunun önüne “+” işareti konmuştur. Bu sayısal olarak 0.25 puan artışını veya azalışını göstermiş olacaktır. Örneğin, düşük ilişkilendirilmiş yapı seviyesindeki bir cevap 4- ile gösterilecek ve hesaplamalarda 3.75 puan olarak alınacaktır. Benzer şekilde yüksek ilişkilendirilmiş yapı seviyesindeki bir cevap 4+ ile gösterilecek ve hesaplamalarda 4.25 puan olarak alınacaktır (Çelik, 2007; Mooney, 2002; Rider, 2004).

Limit-süreklilik konusu öğrenme alanları doğrultusunda MYO öğrencilerinin elde etmesi amaçlanan 5 kazanım, veri analizi sürecinde 5 ayrı grup olarak ele alınmıştır. Belirlenen her bir grup ile ilgili MYO öğrenci sayıları ve cevap seviyelerine atanan kodlar alınarak o grup ile ilgili öğrenmelerinin hangi seviyede olduğu grafiklerle gösterilmiştir. Limit-süreklilik konusunu öğrenebilmelerine yönelik belirlenen herhangi bir grup için belli bir MYO öğrencisinin belirlenen düşünme seviyesi, aynı öğrencinin aynı grup ile ilgili her soruda aynı seviyede cevap vereceği anlamına gelmemektedir. Bu ise, MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusunu öğrenebilmeleri ile ilgili seviyeleri hakkında genel bir bakış elde edebilmeyi sağlamaktadır.

3. 5. 3. Diyaloglardan Elde Edilen Verilerin Analizi

Araştırmacı öğretmen toplamış olduğu verileri desteklemek ve limit-süreklilik konusunun öğretimi için seçilen bilgisayar destekli öğrenme ortamında öğrencilerin yaşadığı öğrenme deneyimlerini derinlemesine değerlendirebilmek için ders sürecinde öğrencileri ile sürekli diyalog halinde olmuştur. Bu süreçte gerektiğinde açıklayıcı notlar ve ses kaydı almıştır. Bu notlar ve kayıtlar defalarca okunup dinlenerek araştırmanın amacı doğrultusunda gerekli olan veriler yazılmıştır. Bu veriler gerekli olan yerlerde doğrudan alıntı şeklinde kullanılmış ve SOLO taksonomisinin hangi düzeyine karşılık geldiği yorumlanmıştır. Bu kullanımda MYO öğrencilerinin ders sürecinde çalışma yapraklarına verdikleri cevaplardan, ekran çıktılarından, araştırmacı öğretmenin aldığı notlardan, gözlemlerden ve diyaloglardan elde edilen öğrenme çıktıları karşılaştırmalı olarak dikkate alınmıştır. Ayrıca MYO öğrencileriyle gerçekleşen diyaloglarda öğrencilerin limit-süreklilik konusundaki öğrenme çıktılarının BCS kullanımı ile nasıl gelişim gösterdiğine odaklanılmıştır. Bu gelişim BCS destekli öğrenme ortamında MYO öğrencileriyle gerçekleşen diyaloglardan elde edilen doğrudan alıntılarla desteklenmiş ve SOLO taksonomisinin hangi düzeylerine karşılık geldiği rubrikler yardımıyla yorumlanmıştır.

3. 6. Çalışma Yapraklarına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri (Rubrikler)

Çalışma yapraklarına yer alan sorulara verilen cevaplar incelendiğinde bazı cevapların araştırma problemi doğrultusunda birden fazla kazanım içerisinde yer alabildiği görülmüştür. Örneğin, "limit ile süreklilik arasında ilişki kurar" kazanımı ile ilgili sorulan Çlş.Yp.-8: 2, 3 ve Çlş.Yp.-10: 2, 3 sorularında limiti ve sürekliliği incelenmesi istenen noktaları öğrencilerin fonksiyonda yerine yazmış olması "fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü belirler ve aralarındaki ilişkiyi yorumlar" kazanımı ile de ilişkilidir. Araştırmacı öğretmen böyle durumlarla karşılaştığında gerekli notları alıp bu durumu tartışmıştır. Fakat söz konusu sorular veri analizleri yapılırken ve bulgular yazılırken Tablo 9'da oluşturulan gruplandırma doğrultusunda ele alınmıştır.

MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarında yer alan sorulara verdiği cevapları, söz konusu soru ile ilgili muhtemel cevapları ve öğrenme çıktıları düşünülerek hazırlanan rubrikler Tablo 9'da yer alan gruplandırma doğrultusunda aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Birinci Soru Grubu: Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri ile Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Birbirinden Ayırt Etme ile İlgili Sorular

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 2

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun x=1 için alacağı değeri bulunuz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonun x=1'e küçük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü ve bu menüdeki "left"i kullanınız.)

4) Derive programı yardımıyla 3. adımda küçük değerler ile yaklaşarak bulduğunuz değer gibi şimdi de x=1'e büyük değerlerden yaklaşırken f(x) fonksiyonun alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü ve bu menüdeki "right"i kullanınız.)

5) Şimdi de aynı fonksiyon için x=1'e iki taraftan da yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki değeri	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına yaklaşırken aldığı limit değeri**

Şekil 17. Birinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-2'nin 2., 3., 4., 5. soruları

Tablo 10. Çalışma Yaprağı-2'nin 2., 3., 4., 5. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan parantez içi açıklanmalara odaklanarak "Ctrl+Shift+E, Find Limit, right, left" ifadelerinin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca sistematik bir yaklaşımı olmadan soruları çözmeye çalışarak tabloyu doldurmakla uğraşır.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Tanımlamış olduğu fonksiyonda x gördüğü yere "1" yazarak sonucu elde etmeye çalışır. Fakat fonksiyona yaklaşmanın ne demek olduğunu farkında değildir. Özellikle verilen $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonu için istenen limit değerlerinin verilen noktaya küçük değerlerden ve büyük değerlerden yaklaşmak olduğunu farkında değildir. Böylece limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsü arasında ilişki kuramaz.

Tablo 10'un devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Sayı doğrusu bilgisinden yola çıkarak öğrenci x=1 noktasına yaklaşırken küçük değerlerin ne olduğunu büyük değerlerin ne olduğunu farkındadır. Fonksiyonun bu noktada aldığı değerle bu noktaya küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken alacağı değerin farklı olabileceğini farkındadır. Fakat bu değerleri bulmakta ve birleştirmekte başarılı olamaz. Yine limit değerinin fonksiyonun aynı noktada alacağı değer olduğu fikrinden kurtulamadığı için "limit" ile ilgili kavramsal anlamada zorlanır.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Limitin sembolik gösterimini kullanarak verilen fonksiyonun x=1 noktasında tanımlı olmadığını açıklayabilir. Böylece öğrenci; • Trigonometrik fonksiyonların limiti ile ilgili özellikleri hatırlar. • Limit konusundaki belirsizlik durumlarını belirtir. • Verilen noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali olan fonksiyonun limitini hesaplar.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	• Öğrenci f(x) fonksiyonunun alacağı değerlerin; x=1'e çok yaklaştığında fakat x=1 olmadığında aynı olduğunu görebilir ve bunun nedenini açıklayabilir. • Böylece "x, a gibi bir değere yakınsarken f(x)'in limiti b'dir" tanımı yapıldığında öğrenci "x, a'ya giderken" demenin "x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demekle aynı anlama geldiği genellemesine varabilir. • Ayrıca limitten yola çıkarak fonksiyonun verilen a noktasında tanımlı olmamasını "a sayısı f fonksiyonunun tanım kümesinde yer almamaktadır" şeklinde ilişkilendirebilir. • Verilen noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali ile karşılaştığında genellikle özdeşlikler kullanarak çarpanlara ayırma ile gerekli sadeleştirmeleri yapması gerektiğini görebilir. Ya da verilen fonksiyonda trigonometrik ifade yer alıyorsa ona ait olan bir özelliği kullanması gerekeceğini düşünür.

İkinci Soru Grubu: Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerini Bulma İle İlgili Sorular

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 2

6) Bu etkinliği tamamlayarak "limit" konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi düşünüyorsunuz?

7) Küçük ve büyük değerlerle yaklaşmaya çalıştığınız x=1 noktası aynı olduğu halde yaklaşırken alınan değerler ile x=1 noktasında alınan değerin arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız.

Şekil 18. İkinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-2'nin 6., 7. soruları

Tablo 11. Çalışma Yaprağı-2'nin 6., 7. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan tanımsızlık dikkate alınmadan x=1'e iki taraftan yaklaşırken ifadesine odaklanır. Asıl istenen "limit" konusu ile ilgili herhangi bir açıklamada bulunamaz. Ayrıca Derive yazılımını dikkate almadan ve konu ile ilgili sistematik bir yaklaşımı olmadan cevaplar verir.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Tanımlamış olduğu fonksiyonda x gördüğü yere "1" yazarak sonucu elde etmeye çalışır. Derive yazılımını kullanmadan kağıt kalem ile x=1 için bulacağı değerin limit olduğu düşüncesi hakimdir. Bu değeri verilen $f\ (x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunda yerine yazdığında asıl görmesi gereken $(\frac{0}{0})$ belirsizliğini dikkate almadan limit hesaplama ile ilgilenir. Böylece belirsizlik durumunda limit bulma ile ilgili verilen cevaplar sınırlı kalır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Fonksiyonun x=1 için alacak olduğu değeri $(\frac{0}{0})$ bulan öğrenci Derive yazılımında çözüm yaptığında verilen noktadaki değerin "false" olduğunu görerek bu noktada bir belirsizlik olduğuna ulaşabilir. Ayrıca verilen noktada fonksiyonun $(\frac{0}{0})$ belirsizliği olabileceğini söylemesine rağmen bunun nereden geldiğini tam olarak ifade edemez. Fonksiyonun tanımsız olduğu x=1 noktasında elde ettiği belirsizliği ortadan kaldırıp limit değerini bulabilmek için sahip olduğu bilgiler birbirinden kopuk ve yetersizdir.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Limitin sembolik gösterimini kullanarak verilen fonksiyonun x=1 noktasında tanımlı olmadığını açıklayabilir. Böylece öğrenci; • Trigonometrik fonksiyonların limiti ile ilgili özelliklerinden $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ve $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$ hatırlar. • Limit konusundaki belirsizlik durumlarını belirtir. • Verilen noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali olan fonksiyonun limitini; x-1=t diyelim. x→1 ⇒ x-1= t→0 olduğundan; $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \frac{2}{3}$ şeklinde hesaplayarak bu limitin $\frac{2}{3}$ olduğunu söyleyebilir.

Tablo 11'in devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	• Öğrenci f(x) fonksiyonunun alacağı değerlerin; x=1'e çok yaklaştığında fakat x=1 olmadığında aynı olduğunu görebilir ve bunun nedenini açıklayabilir. • Böylece "x, a gibi bir değere yakınsarken f(x)'in limiti b'dir" tanımı yapıldığında öğrenci "x, a'ya giderken" demenin "x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demekle aynı anlama geldiği genellemesine varabilir. • Ayrıca limitten yola çıkarak fonksiyonun verilen a noktasında tanımlı olmamasını "a sayısı f fonksiyonunun tanım kümesinde yer almamaktadır" şeklinde ilişkilendirebilir. • Verilen noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali ile karşılaştığında genellikle özdeşlikler kullanarak çarpanlara ayırma ile gerekli sadeleştirmeleri yapması gerektiğini görebilir. Ya da verilen fonksiyonda trigonometrik ifade yer alıyorsa ona ait olan bir özelliği kullanması gerekeceğini düşünür. • Şayet bu çözümler yeterli olmuyorsa $\frac{0}{0}$ belirsizliğinden kurtulmak için pay ve paydanın türevini alır yani L'Hospital Kuralı kullanabileceğini düşünür.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 3

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonda x yerine -∞ yazdığınızda (neredeyse -∞ olduğunda) karşılaştığınız durumu belirtiniz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonu için x'in -∞'a büyük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to-\infty^+}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü kullanınız.)

4) Şimdi de aynı fonksiyon için x'in $-\infty$ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu, x'in -∞'a büyük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu ve x'in -∞'un çok yakınlarında (-∞'un ε-komşuluğunda) gezinirken alacak olduğu değerleri dikkate alarak $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunda x'in -∞ olduğu düşünüldüğünde fonksiyonun alacağı değer	**f(x) fonksiyonunun x'in -∞'a büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değeri**	**f(x) fonksiyonunun x, -∞'un ε-komşuluğunda dolaşırken aldığı limit değeri**

Şekil 19. İkinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-3'ün 2., 3., 4. soruları

Tablo 12. Çalışma Yaprağı-3'ün 2., 3., 4. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan parantez içi açıklanmalar olan "Ctrl+Shift+E, Find Limit, -∞'un ε-komşuluğu" ifadelerine odaklanır. Dolayısıyla sistematik bir yaklaşımı olmadan soruları çözmeye çalışarak tabloyu doldurmakla uğraşır.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Verilen fonksiyonda x yerine -∞ ifadesini nasıl yazacağını düşünür. -∞ olmanın ne anlama geldiğini farkında değildir. ∞'u bir nokta gibi görür. Yazılımda tanımladığı $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonun ekran çıktısına odaklanarak fikir yürütmeye çalışır. Bir belirsizliğin olduğunu düşünüp ona odaklanır. Fakat nasıl ortadan kaldıracağını bilemez.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci -∞'a sadece büyük değerlerden yaklaşabileceğini ve bu değerlerin neler olabildiğini farkındadır. Ayrıca x yerine -∞ yazıldığında $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğunu görebilmektedir. Verilen $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunda pay ve paydayı çarpanlara ayırma ile uğraşır. Limit ile ilgili bilgisi "verilen noktanın çevresinde olmak" ile kısıtlıdır. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit hesaplama ile ilgili bilgileri birbirinden kopuk ve yeterli değildir.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Limitin sembolik gösterimini bir noktanın ε-komşuluğunu farkına vararak; • Genişletilmiş gerçek sayılar kümesi üzerinde gerçek değişkenli ve gerçek değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit kavramını açıklar. Yani; $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}, \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}, \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} \to 0$ olduğunu bilir. • Limit konusundaki belirsizlik durumlarını belirtir. • Böylece istenen limit değerini ararken $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik hali ile karşılaşır. Fonksiyonu $\frac{2x^3(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}$ parantezine alıp x^3'leri sadeleştirirerek bu belirsizlikten kurtardığı fonksiyonun limitini 2 olarak bulur.

Tablo 12'nin devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	• Öğrenci -∞'un ε-komşuluğunda sadece -∞'dan büyük değerler olabileceğini sayı doğrusunu hatırlayarak farkına varabilir. Ayrıca fonksiyonda x yerine -∞ yazdığında $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumu ile karşılaşmasına rağmen bu belirsizliği ortadan nasıl kaldırabileceğini görerek bu belirsizlik durumlarında pay ve paydayı en büyük dereceli bilinmeyene bölerek katsayının limit değeri olacağı genellemesine varabilir. • Böylece verilen bir noktada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaştığında öğrenci aşağıdaki genellemeye varabilir; $m, n \epsilon N \text{ olmak üzere};$ $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$ $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \\ \infty \text{ veya} -\infty, & n > m \end{cases}$$

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 3

5) Bu etkinliği tamamlayarak "limit" konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi düşünüyorsunuz?

6) Yaklaşmaya çalıştığınız -∞ değeri aynı olduğu halde, x'in -∞ olduğu düşünüldüğünde fonksiyonda karşılaşılan durum ile x'in -∞'a çok yaklaştığında (yani ε-komşuluğunda) fonksiyonun alacağı değer arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız.

Şekil 20. İkinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-3'ün 5., 6. soruları

Tablo 13. Çalışma Yaprağı-3'ün 5., 6. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan "ε-komşuluğu" ifadesini anlamaya çalışan öğrenci limit ile ilgili öğrendiklerine dikkat etmektense ∞'un (-) ile çarpılıp -∞ olmasına odaklanır.

Tablo 13'ün devanı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Verilen fonksiyonda x yerine -∞ ifadesini nasıl yazacağını düşünür. Neredeyse -∞ olmanın ne anlama geldiğini farkında değildir. Özellikle verilen $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunda x= -∞ olduğunda fonksiyonun bir değer alamayacağına odaklanır. Kısacası fonksiyonun belirsizlik durumu ile ilgili bilgi sahibi değildir.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci x yerine -∞ yazıldığında fonksiyonda bir tanımsızlığın olduğunu belirtir. Ayrıca bu tanımsızlığın $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğunu farkındadır. Verilen $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunda pay ve paydayı çarpanlara ayırma ile uğraşır. Öğrenci $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinde limit değerini bulmada birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Fonksiyonun limit değerini bulabilmek için verilen ∞'un ε-komşuluğunu sezgisel olarak öğrenen öğrenci $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaştığını farkına varır. Öğrenci için fonksiyonda x'in ∞'a yaklaşırken aldığı değerlerin 2 olması bu belirsizlik durumunda da limit değerinin olduğunun göstergesidir. Kısacası birbiri ile tutarlı cevaplar veren öğrenci fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda limit değeri aranabileceğini bilir ve özellikle $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumunda limit değerini hesaplayabilir.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	• Fonksiyonda x yerine -∞ yazdığında $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumu ile karşılaşmasına rağmen bu belirsizliği ortadan nasıl kaldırabileceğini görerek bu belirsizlik durumlarında pay ve paydayı en büyük dereceli bilinmeyene bölerek katsayının limit değeri olacağı genellemesine varabilir. • Böylece öğrenci fonksiyonu tanımsız yapan bir noktada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaştığında aşağıdaki genellemeye varabilir; $m, n \epsilon N \text{ olmak üzere};$ $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$ $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \\ \infty \text{ veya } -\infty, & n > m \end{cases}$$

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 5

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonda x yerine ∞ yazdığınızda (neredeyse ∞ olduğunda) karşılaştığınız durumu belirtiniz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonu için x'in ∞'a küçük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü kullanınız.)

4) Şimdi de aynı fonksiyonun için x'in ∞'a küçük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu değer ile x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değeri dikkate alarak $\lim_{x\to\infty} x.sin\frac{2}{x}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunun x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değer	**f(x) fonksiyonunun x, ∞'a küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x, ∞'a yaklaşırken aldığı limit değeri**

Şekil 21. İkinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-5'in 2., 3., 4. soruları

Tablo 14. Çalışma Yaprağı-5'in 2., 3., 4. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan parantez içi açıklanmalar olan "Ctrl+Shift+E, Find Limit, neredeyse ∞ olduğunda" ifadelerine odaklanır. Ayrıca trigonometrik bir fonksiyonda x yerine ∞ yazılamayacağını düşünerek sorunun yanlış olabileceği üzerinde odaklanır.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Verilen fonksiyonda x yerine ∞ yazabilmek için çaba sarf eden öğrenci $\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x}$ limitini hesaplama sorusunu dikkate almadan sadece fonksiyonun ∞ değerinde alması gereken sonuç ile ilgilenir. Limit bilgisi sadece fonksiyonun verilen noktadaki değeri olarak algılanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Fonksiyonu parçalayarak ∞'a yaklaşırken x değerinin ∞ olduğunu ve $\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu bulur. Ayrıca x, ∞'a yaklaşırken $sin\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu da söyleyebilir. Kısacası (∞.0) belirsizliğini bulmasına rağmen bulması gereken limit değeri ile ilgili daha ileri derecede fikir yürütemez ve bilgilerini birleştirmede başarılı olamaz.

Tablo 14'ün devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	• Limitin sembolik gösterimini kullanabilir. • Verilen noktadaki limit değerini bulabilmek için bu noktaya sayı doğrusunda bir noktaya yaklaşmak gibi küçük ve büyük değerlerden yaklaşılması gerektiğini farkındadır. Ayrıca bu soruda ∞'a küçük değerlerden yaklaşması gerektiğini farkındadır. • Limit konusundaki belirsizlik durumlarını hatırlayarak verilen fonksiyon için x, ∞'a yaklaşırken $0.\infty$ belirsizlik durumunun olduğunu söyler. • Birden fazla fonksiyonun çarpımın limitini ayrı ayrı limitlerin çarpımı şeklinde bulabileceğini farkındadır. Bu işlemi yaparken trigonometrik fonksiyonların limitini bulmayı da hatırlamaktadır. Böylece verilen fonksiyonun limitini bulmak için öncelikle; $\lim_{x\to\infty}(x.\sin\frac{2}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$ şeklinde yazıp $\frac{0}{0}$ belirsizliğini elde eder. Daha sonra trigonometrik fonksiyonların limitini hatırlayarak limiti; $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(2.\frac{1}{x})}{(1.\frac{1}{x})} = \frac{2}{1} = 2$ olarak bulur. • Sorulara verdiği cevaplar birbiriyle ilişkilidir. Kısacası kavramsal anlama söz konusudur.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	• "f(x).g(x)" gibi bir foksiyonun limitinin ayrı ayrı fonksiyonların limitleri çarpımı olduğunu bilen öğrenci elde ettiği $0.\infty$ belirsizliğini ortadan kaldırması gerektiğini farkındadır. Bu belirsizliğin $0.\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ veya $0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ şeklinde ifade edilebileceğini farkında olan öğrenci elde ettiği belirsizliği ortadan kaldırmak için önceden öğrenmiş olduğu $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinin çözümünü kullanarak sonuca varabileceği genellemesine ulaşır. • Şayet bu çözümler yeterli olmuyorsa $\frac{0}{0}$ belirsizliğinden kurtulmak için pay ve paydanın türevini alır yani L'Hospital Kuralı kullanabileceğini düşünür.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 5

5) Yaklaşmaya çalıştığınız ∞ değeri aynı olduğu halde x, ∞'a yaklaşırken alınan değer ile x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alınan değer arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız. Bunu yaparken limit konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi de sorgulayınız.

Şekil 22. İkinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-5'in 5. sorusu

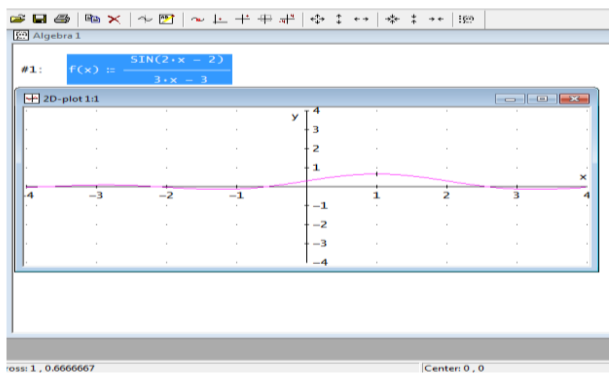
Tablo 15. Çalışma Yaprağı-5'in 5. Sorusuna Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan ∞'a küçük değerlerden yaklaşmanın ne demek olduğunu sorgular ve tablo ile ilgilenir.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Verilen fonksiyonda x yerine ∞ yazabilmek için çaba sarf eden öğrenci $\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x}$ limitini hesaplarken belirsizlik durumlarını dikkate almadan sadece fonksiyonun ∞ değerinde alması gereken sonuç ile ilgilenir. Ayrıca fonksiyonun bu belirsizlik durumunun nasıl kaldırılacağı ile ilgili bir çabası yoktur.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Fonksiyonu parçalayarak ∞'a yaklaşırken x değerinin ∞ olduğunu ve $\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu bulur. Ayrıca x, ∞'a yaklaşırken $sin\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu da söyleyebilir. Kısacası (∞.0) belirsizliğini bulmasına rağmen bu belirsizlik durumunda bulması gereken limit değeri ile ilgili daha ileri derecede fikir yürütemez ve bilgilerini birleştirmede başarılı olamaz.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	• Birden fazla fonksiyonun çarpımın limitini ayrı ayrı limitlerin çarpımı şeklinde bulabileceğini hatırlayan öğrenci x→∞ yaklaşımında $0.\infty$ belirsizlik durumu olduğunu farkına varır. • Ayrıca trigonometrik fonksiyonların limitini bulmayı da hatırlayarak bu belirsizliği ortadan kaldırmak için yapması gerekenleri hatırlamaktadır. • Sorulara verdiği cevaplar birbiriyle ilişkilidir. Kısacası kavramsal anlama söz konusudur.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	• "f(x).g(x)" gibi bir fonksiyonun limitinin ayrı ayrı fonksiyonların limitleri çarpımı olduğunu bilen öğrenci bu çarpımın limitini bulabilmek için elde ettiği $0.\infty$ belirsizliğini ortadan kaldırması gerektiğini farkındadır. • Bu belirsizliğin $0.\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ veya $0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ şeklinde ifade edilebileceğini farkında olan öğrenci elde ettiği belirsizliği ortadan kaldırmak için önceden öğrenmiş olduğu $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinin çözümünü kullanarak sonuca varabileceği genellemesine ulaşır.

Üçüncü Soru Grubu: Fonksiyonun Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulabilme İle İlgili Sorular

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 2

8) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



9) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak önceki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız.

Şekil 23. Üçüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-2'nin 8., 9. soruları

Tablo 16. Çalışma Yaprağı-2'nin 8., 9. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

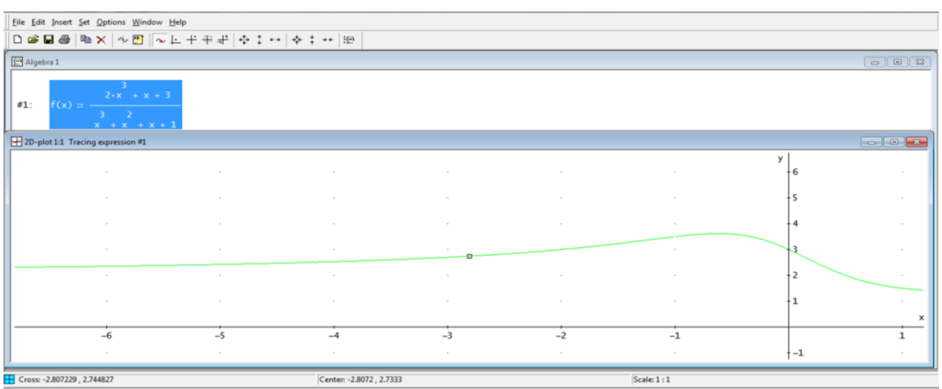
DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan  işaretine odaklanarak bu işaretin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca örnek olarak verilen çizimi incelemekle uğraşarak aynı şekli bulmak zorunda olup olmadığını sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenciler "Derive " programındaki fonksiyon çizme menüsünün sadece $(burada\ verilen\ f\ (x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}\ )$ fonksiyonların grafik çiziminde kullanılabileceğini düşündüğünden önceki adımlara bakmadan grafik çizimine odaklanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci sürekliliği incelemek için fonksiyonun grafiğinin gerekli olduğunu farkındır. Fakat grafikte kopuk olan noktaların ne anlama geldiğini net bir şekilde kavrayamaz. Ona göre limit için de grafik gereklidir ve bir noktaya yaklaşmayı bu grafik sağlar. Kısacası vermiş olduğu bilgiler birbirinden kopuktur.

Tablo 16'nın devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci sürekliliği incelemeden önce limitin sembolik gösterimini kullanarak verilen fonksiyonun x=1 noktasında tanımlı olmadığını açıklayabilir. Ayrıca bu noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali ile karşılaştığını bilen öğrenci bu noktada fonksiyonun sürekli olmadığını da farkındadır. Çünkü öğrenci sürekliliğin olabilmesi için fonksiyonun grafiğinde kopuk noktaların olmaması gerektiğini de bilir. Ayrıca verilen fonksiyonun x=1 noktası dışında sürekli olduğunu söyleyebilir.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulduktan sonra; "A⊂R ve f:A→R bir fonksiyon ve a∈R olmak üzere; a) f fonksiyonu x=a'da tanımlı b) f fonksiyonu x=a'da limiti olan ve c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu, x=a noktasında süreklidir" genellemesine ulaşabilir. Ayrıca öğrenci grafiği verilen fonksiyonlar için; "Grafik istenen noktada el kaldırılmadan çiziliyorsa fonksiyon o noktada süreklidir" genellemesini de yapabilir. Böylece fonksiyonun grafiğini inceleyen öğrenci sürekli olduğu aralıklar hakkında bir genellemeye varabilir.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 3

7) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



8) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak önceki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız.

9) 2. adımda çalışmalarınızı gözden geçirirken x=-1 noktasını dikkate alarak fonksiyonun bu noktadaki değerini ve x= -1'e yaklaşırken alacak olduğu limit değerini çizmiş olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

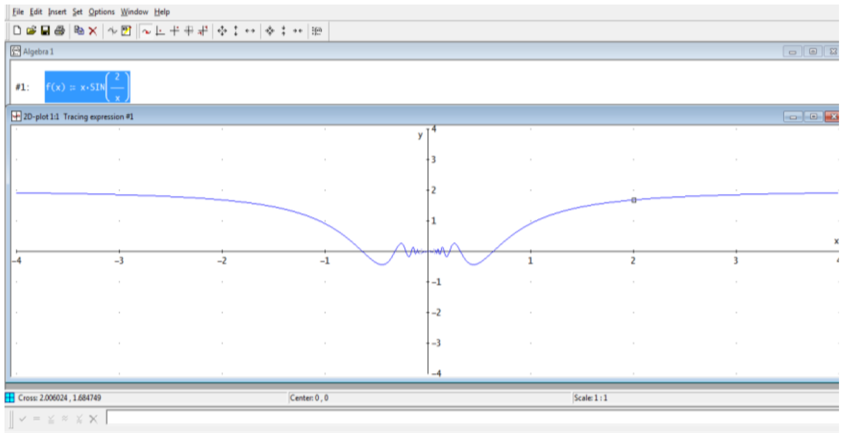
Şekil 24. Üçüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-3'ün 7., 8., 9. soruları

Tablo 17. Çalışma Yaprağı-3'ün 7., 8., 9. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan  işaretine odaklanarak bu işaretin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca örnek olarak verilen çizimi incelemekle uğraşarak aynı şekli bulmak zorunda olup olmadığını sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenciler "Derive " programındaki fonksiyon çizme menüsünün sadece $(burada\ verilen\ f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1})$ fonksiyonların grafik çiziminde kullanılabileceğini düşündüğünden çalışma yaprağında yer alan önceki adımlara bakmadan grafik çizimine odaklanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkındır. Fakat bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmediğinden limit-süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendiremez. Kısacası vermiş olduğu bilgiler birbirinden kopuktur.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci fonksiyonun x=-1 noktasına yaklaşırken alacak olduğu noktaları incelemeden önceki adımları incelemeye çalışır. Bu inceleme sırasında $\lim_{x\to-\infty^+} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1} = 2$ limitini "Derive" yazılımı sayesinde kolayca görür ve grafik üzerinde bu çalışmalarını doğrular. Ayrıca çalışmanın diğer aşaması için fonksiyonun x=-1 noktasında tanımlı olmadığını açıklayabilir ve bu noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali ile karşılaştığını farkına varır. Öğrenci grafik üzerinde sürekliliği açıklarken fonksiyonun grafiğinde kopuk noktaların olmaması gerektiğini de bilir. Böylece verilen fonksiyonun x=-1 noktası dışında sürekli olduğunu söyleyebilir.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulduktan sonra; "A⊂R ve f:A→R bir fonksiyon ve a∈R olmak üzere; a) f fonksiyonu x=a'da tanımlı b) f fonksiyonu x=a'da limiti olan ve c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu, x=a noktasında süreklidir" genellemesine ulaşabilir. Ayrıca öğrenci grafiği verilen fonksiyonlar için; "Grafik istenen noktada el kaldırılmadan çiziliyorsa fonksiyon o noktada süreklidir" genellemesini de yapabilir. Böylece fonksiyonun grafiğini inceleyen öğrenci sürekli olduğu aralıklar hakkında bir genellemeye varabilir.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 5

6) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



7) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak önceki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu doğrulamayı yaparken x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde bu fonksiyonun alacak olduğu değeri ve x, ∞'a yaklaşırken alacak olduğu limit değerini çizmiş olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

Şekil 25. Üçüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-5'in 6., 7. soruları

Tablo 18. Çalışma Yaprağı-5'in 6., 7. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

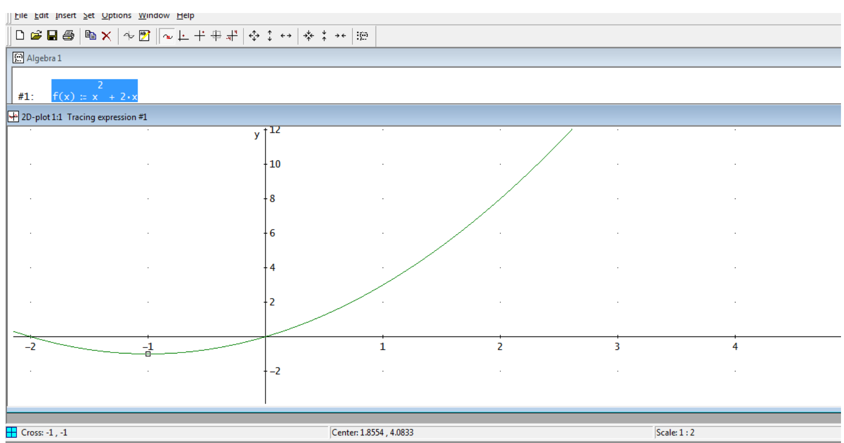
DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan  işaretine odaklanarak bu işaretin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca örnek olarak verilen çizimi incelemekle uğraşarak aynı şekli bulmak zorunda olup olmadığını sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenciler "Derive " programındaki fonksiyon çizme menüsünün sadece $(burada\ verilen\ f(x) := x.sin\frac{2}{x})$ fonksiyonların grafik çiziminde kullanılabileceğini düşündüğünden çalışma yaprağında yer alan önceki adımlara bakmadan grafik çizimine odaklanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkındır. Fakat bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmediğinden limit-süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendiremez. Kısacası vermiş olduğu bilgiler birbirinden kopuktur.

Tablo 18'in devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci çalışma yaprağında yer alan önceki adımları grafik üzerinde doğrulayabilir ve x, ∞'a yaklaşırken alacak olduğu limit değerinin 2 olduğunu kolayca görür. Ayıca öğrenci grafiği incelerken x=0 noktasında limitin varlığından bahsedebilmesine rağmen fonksiyonun kopuk olduğunu farkındadır ve süreklilik için R\{0}'ın olması gerektiğini düşünmektedir. Kısacası öğrenci grafik üzerinde sürekliliği açıklarken fonksiyonun grafiğinde kopuk noktaların olmaması gerektiğini bilir.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulduktan sonra; "A⊂R ve f:A→R bir fonksiyon ve a∈R olmak üzere; a) f fonksiyonu x=a'da tanımlı b) f fonksiyonu x=a'da limiti olan ve c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu, x=a noktasında süreklidir" genellemesine ulaşabilir. Ayrıca öğrenci grafiği verilen fonksiyonlar için; "Grafik istenen noktada el kaldırılmadan çiziliyorsa fonksiyon o noktada süreklidir" genellemesini de yapabilir. Böylece fonksiyonun grafiğini inceleyen öğrenci sürekli olduğu aralıklar hakkında bir genellemeye varabilir.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 7

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak 1. adımda tanımlamış olduğunuz $f(x) := x^2 + 2x$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek 1., 2. ve 3. adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca fonksiyonun tanım kümesi dışında başka aralıklardaki sürekliliğini de bu grafik yardımıyla incelemeye çalışınız.

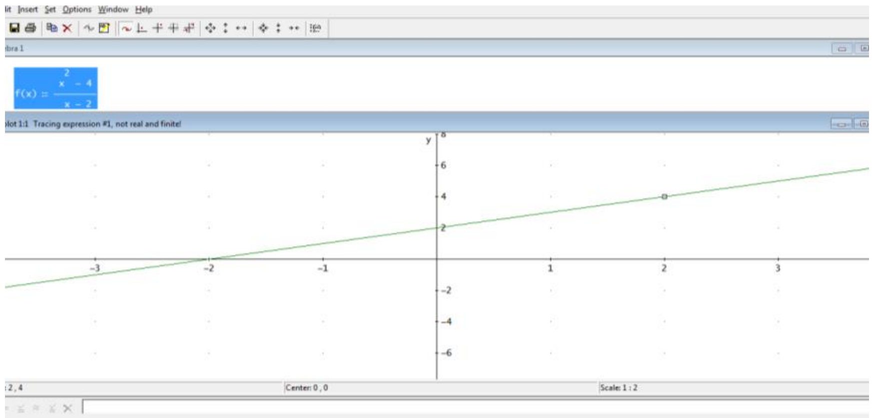
Şekil 26. Üçüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-7'nin 4., 5. soruları

Tablo 19. Çalışma Yaprağı-7'nin 4., 5. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan  işaretine odaklanarak bu işaretin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca örnek olarak verilen çizimi incelemekle uğraşarak aynı şekli bulmak zorunda olup olmadığını sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenciler "Derive " programındaki fonksiyon çizme menüsünün sadece $(f:[-1,2] \to R, f(x) := x^2 + 2x)$ fonksiyonların grafik çiziminde kullanılabileceğini düşündüğünden çalışma yaprağında yer alan 1., 2. ve 3. adımlara bakmadan grafik çizimine odaklanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkındır. Fakat bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmediğinden süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendiremez. Kısacası vermiş olduğu bilgiler birbirinden kopuktur.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci 1., 2. ve 3. adımlardaki çalışmalarını grafik üzerinde doğrularken fonksiyonun tanım kümesine dikkat eder. f(x)=0 için çözüm kümesinde -2'nin olmaması gerektiğini farkındadır. Bu bağlamda öğrenci fonksiyonun sürekliliğini incelerken tanım kümesini dikkate alabilmektedir. Fonksiyon grafiğini inceleyebilen öğrenci yorumları doğrultusunda $[-1,2]$ kapalı aralığında tanımlanan bu fonksiyonun sürekli olduğunu görebilir.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci grafiğini incelediği fonksiyonun sürekli olduğu farklı aralıkları inceledikten sonra verilen fonksiyon için $f(-1).f(2) < 0$ olduğunu görüp $f(x_0) = 0$ gerekliliğini hatırlar. Fonksiyonda bu sayının $x_0 = 0$ olduğunu bulur. Böylece öğrenci "f fonksiyonu x eksenini x=0'da keser ve $0 \in [-1,2]'dır$" sonucuna ulaşıp fonksiyonun sürekli olduğu aralıklar hakkında aşağıdaki genellemeye varır; $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ise; i. "f" fonksiyonu sınırlıdır. Yani, $\forall x \in [a,b] için \; \lvert f(x) \rvert \le k$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. ii. $f([a,b]) = [m,M]$ olacak şekilde m ve M reel sayıları vardır. Burada $x \in [a,b] için$,f(x)'in en küçük (minimum) değeri m ve en büyük değeri (maksimum) değeri M'dir. iii. $f(a).f(b) < 0 \;\; ise \; f(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ vardır.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 8

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde x=2 noktasının durumuna göre fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

Şekil 27. Üçüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-8'in 4., 5. soruları

Tablo 20. Çalışma Yaprağı-8'in 4., 5. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

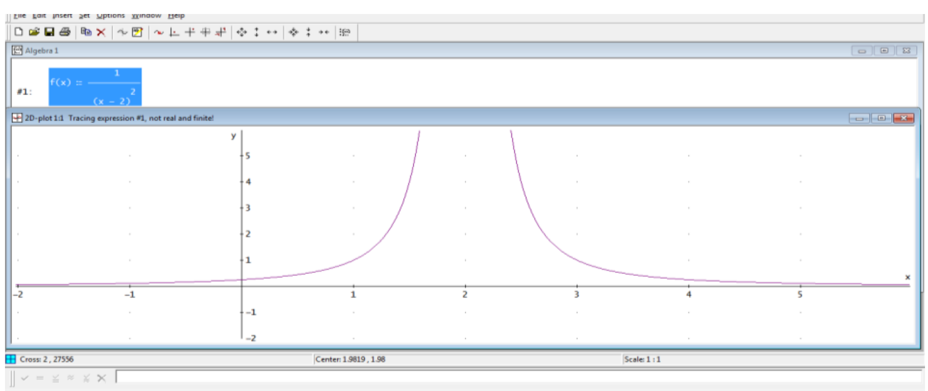
DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan  işaretine odaklanarak bu işaretin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca örnek olarak verilen çizimi incelemekle uğraşarak aynı şekli bulmak zorunda olup olmadığını sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenciler "Derive " programındaki fonksiyon çizme menüsünün sadece $(\,burada\ verilen\ f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}\,)$ fonksiyonların grafik çiziminde kullanılabileceğini düşündüğünden çalışma yaprağında yer alan 1., 2. ve 3. adımlara bakmadan grafik çizimine odaklanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkındır. Fakat bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmediğinden süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendiremez. Kısacası vermiş olduğu bilgiler birbirinden kopuktur.

Tablo 20'nin devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci 1., 2. ve 3. adımlardaki çalışmalarını grafik üzerinde doğrularken x=2 noktasında f(x) fonksiyonunu incelediğinde $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ olduğunu görür ve bu fonksiyonun x=2 noktasında tanımlı olmadığını belirtir. Buna rağmen x=2 noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyon grafiğinin aldığı değerlerin birbirine eşit (4) olduğunu gören öğrenci x=2 noktasında limitin varlığından söz edebileceğini belirtir. Ayrıca sürekliliğin olması için fonksiyonun bu noktada da tanımlı olması gerektiğini hatırlayan öğrenci tanım kümesi için R\{2} tanımı yapıldığında fonksiyonun sürekli olabileceğine ulaşır.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci grafiğini incelediği fonksiyonun tek bir noktada süreksiz olduğunu farkına varıp bunun kaldırılabilir süreksizlik olduğunu belirtebilir. Ayrıca öğrenci bu etkinlik sayesinde x=2 noktası gibi tek noktada tanımlı olmayan bu ve benzeri fonksiyonların sürekliliği ile ilgili "f:A→R fonksiyonu için a∈A olmak üzere, f(a) tanımlı, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ve f(a)≠L ise f fonksiyonunun x=a noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır" genellemesine ulaşır.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 10

4) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde $x = 2$ noktasının durumunu da dikkate alarak fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

Şekil 28. Üçüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-10'un 4., 5. soruları

Tablo 21. Çalışma Yaprağı-10'un 4., 5. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan  işaretine odaklanarak bu işaretin Derive programında nerede olabileceğine bakar. Ayrıca örnek olarak verilen çizimi incelemekle uğraşarak aynı şekli bulmak zorunda olup olmadığını sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenciler "Derive " programındaki fonksiyon çizme menüsünün sadece $(burada\ verilen\ f(x) := \frac{1}{(x-2)^2})$ fonksiyonların grafik çiziminde kullanılabileceğini düşündüğünden çalışma yaprağında yer alan 1., 2. ve 3. adımlara bakmadan grafik çizimine odaklanmıştır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkındır. Fakat bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmediğinden süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendiremez. Kısacası vermiş olduğu bilgiler birbirinden kopuktur.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci 1., 2. ve 3. adımlardaki çalışmalarını grafik üzerinde doğrularken $x = 2$ noktasında f(x) fonksiyonunu incelediğinde $"f(2) = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow tanımsız."$ olduğunu görür ve bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında tanımlı olmadığını belirtir. Ayrıca öğrenci $x = 2$ noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyon grafiğinin aldığı değerlerin birbirine eşit (+∞) olduğunu görür. Böylece limitin varlığından söz edebileceğini belirten öğrenci x=2 noktasında tanımsız olan bu fonksiyon için süreklilikten bahsedilemeyeceğini vurgular.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci grafiğini incelediği fonksiyonun $x = 2$ noktasında herhangi bir değer almadığını görür. Ayrıca $x = 2$ doğrusunun çizilen fonksiyonun grafiğine paralel olduğunu da göstererek fonksiyonun bu noktada sonsuz süreksizliğe sahip olduğunu belirtir. Böylece "f:A→R fonksiyonu için a∊A olmak üzere; x=a'ya küçük-büyük değerlerden yaklaşıldığında limitlerden en az biri +∞ veya -∞ ise, f fonksiyonunun x=a noktasında sonsuz süreksizliği vardır" genellemesine ulaşır.

Dördüncü Soru Grubu: Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Düşünebilme İle İlgili Sorular

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 7

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun tanım kümesindeki değerlerini de dikkate alarak bu fonksiyonun f(x)=0 çözümünü bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bir önceki adımda bulmuş olduğunuz değerlerden hangisinin tanım kümesi aralığında kaldığını bularak fonksiyonun x eksenini kesip kesmediğini belirlemeye çalışınız. Bu fonksiyonun bu aralıktaki sürekliliğini inceleyerek nedeni ile açıklamaya çalışınız.

Şekil 29. Dördüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-7'nin 2., 3. soruları

Tablo 22. Çalışma Yaprağı-7'nin 2., 3. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Çalışma sorularında yer alan parantez içi açıklamaya odaklanan öğrenci Derive programı menüsü içinde "Solve – Expression"ı aramaya odaklanmıştır. Ayrıca klavye tuşlarını kullanmanın cazip olduğunu düşünen öğrencilerin bir kısmı (Ctrl+Shift+E) tuşlarını kullanmakla ilgilenmiştir.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenci 2. adımda sorulan f(x)=0 çözümünü bulmaya odaklandığından asıl amacı olan kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun özelliğini inceleme eğiliminde değildir.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci fonksiyonun f(x)=0 çözüm kümesi ile x eksenini kesip kesmediğini bulabileceğini farkındadır. Verilen fonksiyonun tanım kümesinin kapalı bir aralık olup bu kapalı aralıkta $f(-1).f(2) = -8 < 0$ olduğunu bulmuştur. Ayrıca verilen tanım kümesi aralığında fonksiyonun x eksenini mutlaka en az bir noktada kesmesi gerektiğini de bilen öğrenci bu bilgi parçalarını birleştirmede başarılı olamaz.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci fonksiyonun tanımsız olduğu aralıklarda süreklilik aranmayacağını bildiğinden $[-1, 2]$ kapalı aralığında tanımlanan bu fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmesi için bu kapalı aralıkta fonksiyonun negatif değer alıp almadığını bulması gerektiğini bilir. Şayet fonksiyon verilen aralıkta negatif bir değer alıyorsa sürekli olması için bu aralıkta mutlaka x eksenini kesmesi (f(x)=0 için en az bir değer olması) gerektiğini açıklar.

Tablo 22'nin devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci verilen fonksiyonun tanımsız olduğu herhangi bir aralık olmadığını bulduktan sonra sürekliliği incelemek için aşağıdaki genellemeye varır; $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ise; i. "f" fonksiyonu sınırlıdır. Yani, $\forall x \in [a,b] için\ \|f(x)\| \leq k$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. ii. $f([a,b]) = [m,M]$ olacak şekilde m ve M reel sayıları vardır. Burada $x \in [a,b] için$,f(x)'in en küçük (minimum) değeri m ve en büyük değeri (maksimum) değeri M'dir. iii. $f(a).f(b) < 0\ ise\ f(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ vardır.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 8

6) Bu etkinliği tamamlamak size "süreklilik" konusu ile ilgili nasıl bir bilgi edinmenize yardımcı oldu?

Şekil 30. Dördüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-8'in 6. sorusu

Tablo 23. Çalışma Yaprağı-8'in 6. Sorusuna Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Sorulan sorunun ne istediğini anlayamaz. Öğrenciye göre süreklilik el kaldırmadan çizilen grafiktir.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenci çalışma yaprağında yer alan soruları incelemeden tek bu soruya odaklanarak sürekliliğin sezgisel tanımını yapar. Bu sorudan önceki sorularla ilişki kurmadığından cevap sınırlı kalır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci önceki aşamalarda verilen soruları tekrar gözden geçirerek x=2 noktasında limitin varlığından söz edilebileceğini belirtir. Bu noktada fonksiyonun tanımsız olduğunu da farkındadır. Buna rağmen sürekliliği incelemek için ne yapması gerektiğini düşünür. Kısacası bilgilerini birleştirmede başarılı olamaz.

Tablo 23'ün devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranmayacağını bildiğinden x=2 noktasında tanımsız olan bu fonksiyon için bu noktada süreklilikten bahsedilemeyeceğini belirtir. Ayrıca bu noktanın dışında fonksiyonun sürekli olduğunu da farkına varır.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci verilen fonksiyonun tek bir noktada tanımsız olduğunu bulduktan sonra bu fonksiyonun süreksizliğinin kaldırılabilir süreksizlik olduğunu belirterek; $f: A \to R$ fonksiyonu için a∈A olmak üzere, f(a) tanımlı, $\lim_{x\to a} f(x) = L\ ve\ f(a) \neq L$ ise f fonksiyonunun x=a noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır genellemesine varabilir.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 10

6) Bu etkinliği tamamlamak "süreklilik" konusu ile ilgili hangi bilginize ulaşmanıza yardımcı oldu?

Şekil 31. Dördüncü soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-10'un 6. sorusu

Tablo 24. Çalışma Yaprağı-10'un 6. Sorusuna Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Sorulan sorunun ne istediğini anlayamaz. Öğrenciye göre süreklilik el kaldırmadan çizilen grafiktir.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenci çalışma yaprağında yer alan soruları incelemeden tek bu soruya odaklanarak sürekliliğin sezgisel tanımını yapar. Bu sorudan önceki sorularla ilişki kurmadığından cevap sınırlı kalır.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci önceki aşamalarda verilen soruları tekrar gözden geçirerek $x = 2$ noktasında fonksiyonun tanımsız olduğunu farkına varır. Bu noktada limitin var olduğunu gören öğrenci fonksiyonun tanımsız olduğunu dikkate almadan sürekliliği incelemek için ne yapması gerektiğini düşünür. Kısacası bilgilerini birleştirmede başarılı olamaz.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranmayacağını bildiğinden $x = 2$ noktasında tanımsız olan bu fonksiyon için süreklilikten bahsedilemeyeceğini belirtir. Sürekliliğin olabilmesi için gerekli olan limitin var olmasına rağmen bu noktada fonksiyonun tanımsız olmasının sürekliliğin olmasını engellediğini bilir.

Tablo 24'ün devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci verilen fonksiyonun grafiğini incelediğinde x=2 noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken limitin + ∞ olduğunu görerek şu genellemeye varır: $f: A \to R$ fonksiyonu için a∈A olmak üzere, x=a'ya küçük-büyük değerlerden yaklaşıldığında limitlerden en az biri +∞ veya -∞ ise, f fonksiyonunun x=a noktasında sonsuz süreksizliği vardır.

Beşinci Soru Grubu: Limit İle Süreklilik Arasında İlişki Kurabilme İle İlgili Sorular

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 7

6) Bu etkinliği tamamlayarak "süreklilik" konusu ile ilgili ne öğrenmiş oldunuz?

Şekil 32. Beşinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-7'nin 6. sorusu

Tablo 25. Çalışma Yaprağı-7'nin 6. Sorusuna Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Sorulan sorunun ne istediğini anlayamaz. Öğrenciye göre süreklilik el kaldırmadan çizilen grafiktir.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenci çalışma yaprağında yer alan soruları incelemeden tek bu soruya odaklanarak sürekliliğin sezgisel tanımını yapar. Bu sorudan önceki sorularla ilişki kurmadığından limit ile süreklilik arasında herhangi bir ilişki kuramaz.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci çalışma yaprağındaki diğer sorularda yer alan f(x)=0 çözüm kümesi ile fonksiyonun x eksenini kesip kesemediğini bulabileceğini farkındadır. Ayrıca verilen fonksiyonun tanım kümesinin kapalı bir aralık olduğunu da farkında olan öğrenci bu aralıkta fonksiyonun limitinin varlığından söz edebilmesi için aralığın sınır noktalarını incelemesi dikkat çekici olup bu aralıkta süreklilik ile nasıl bir ilişki kuracağı merak konusudur.

Tablo 25'in devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Limit olmadan sürekliliğin olamayacağını bilen öğrenci herhangi bir aralıkta tanımsız olan bir noktada limitin varlığından söz edilebilip, sürekliliğin incelenmesi gerektiğini farkındadır. Bundan dolayı öğrenci $[-1, 2]$ kapalı aralığında tanımlanan bu fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmesi için bu kapalı aralıkta fonksiyonun negatif değer alıp almadığını bulması gerektiğini bilir. Şayet fonksiyon verilen aralıkta negatif bir değer alıyorsa sürekli olması için bu aralıkta mutlaka x eksenini kesmesi (f(x)=0 için en az bir değer olması) gerektiğini açıklar.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci verilen fonksiyonun limit ile ilgili herhangi bir sorununun olmadığını gördükten sonra tanımlana aralıkta fonksiyonun tanımsız olup olmadığını inceler. Bu aşamadan sonra sürekliliği incelemek için aşağıdaki genellemeye varır; $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ise; i. "f" fonksiyonu sınırlıdır. Yani, $\forall x \in [a,b] için\ \lvert f(x)\rvert \leq k$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. ii. $f([a,b]) = [m,M]$ olacak şekilde m ve M reel sayıları vardır. Burada $x \in [a,b] için$,f(x)'in en küçük (minimum) değeri m ve en büyük değeri (maksimum) değeri M'dir. iii. $f(a).f(b) < 0\ ise\ f(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ vardır.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 8

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonu x=2 noktasında inceleyiniz? Bundan önceki çalışma yapraklarını da dikkate alarak nasıl bir durumla karşılaştığınızı açıklamaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bu fonksiyonun sürekliliğini açıklamaya çalışınız. Bu işlemi yaparken x=2 noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

Şekil 33. Beşinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-8'in 2., 3. soruları

Tablo 26. Çalışma Yaprağı-8'in 2., 3. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Soruda yer alan parantez içi açıklamaya odaklanarak Solve-Expression'un Ctrl+Shift+E ile aynı anlama gelip gelmediğini sorgular.

Tablo 26'ın devamı

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenci soruda x=2 noktasındaki çözümü bulmaya çalışarak elde ettiği $\frac{0}{0}$ belirsizliğine odaklanır. Çalışma yaprağında yer alan soruları incelemeden tek bu soruya odaklandığından limit-süreklilik ilişkisine ulaşmada başarılı olamaz.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci önceki aşamalarda verilen soruları tekrar gözden geçirerek x=2 noktasında fonksiyonun belirsiz olduğunu görür. Ayrıca bu noktaya küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken aldığı değerlerin eşit ve 4 olduğunu söyleyen öğrenci bu noktada limitin varlığından söz edilebileceğini belirtir. Limit koşulunu sağlayan fonksiyonun bu noktadaki belirsizliğini incelemeye çalışan öğrenci süreklilik ile limit arasında ilişki kurması için gerekli olan bilgilerini birleştirmede başarılı olamaz.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci bu fonksiyonda sürekliliğin incelenebilmesi için verilen x=2 noktasında fonksiyonun limitinin olması gerektiğini bilir. Bu noktada limitin olduğunu gören öğrenci süreklilik için gerekli olan diğer koşulun; "fonksiyonun bu noktada alacak olduğu değer ile limit değerinin eşit olmasıdır" diye belirtir. Limit olmasına rağmen x=2 noktasında belirsiz olan bu fonksiyon için bu noktada süreklilikten bahsedilemeyeceğini söyleyen öğrenci süreklilik için limitin gerek koşul olduğunu fakat yeterli olmadığını vurgular.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Verilen fonksiyonun tek bir noktada tanımsız ve limitli olması öğrenciyi, fonksiyonun süreksizliğinin kaldırılabilir süreksizlik olduğunu belirterek; $f: A \rightarrow R$ fonksiyonu için a∈A olmak üzere, f(a) tanımlı, $\lim_{x \to a} f(x) = L \; ve \; f(a) \neq L$ ise f fonksiyonunun x=a noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır genellemesine ulaştırır.

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 10

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında alacak olduğu değeri inceleyiniz? (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Şimdi tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz. Bu işlemi yaparken $x = 2$ noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

Şekil 34. Beşinci soru grubunda incelenen çalışma yaprağı-10'un 2., 3. soruları

Tablo 27. Çalışma Yaprağı-10'un 2., 3. Sorularına Verilen Cevapların SOLO'ya Göre Analiz Kriterleri

DS	Seviyelerin Genel Karakteristiği	Çalışma Sorularının Nasıl Değerlendirildiğine İlişkin Açıklamalar
YÖ (1)	Çalışılan sorunun cevabı ile ilgili olmayan yönleri daha çok dikkat çeker ve öğrenci kendisine verilen görevden daha çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanır.	Soruda yer alan parantez içi açıklamaya odaklanarak Solve-Expression'un Ctrl+Shift+E ile aynı anlama gelip gelmediğini sorgular.
TY (2)	Çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanma olduğundan cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmaz böylece soruyla ilgili verilen cevap sınırlı kalır.	Öğrenci soruda $x = 2$ noktasındaki çözümü bulmaya çalışarak elde ettiği $\frac{1}{0}$ tanımsızlığına odaklanır. Çalışma yaprağında yer alan soruları incelemeden tek bu soruya odaklandığından limit-süreklilik ilişkisine ulaşmada başarılı olamaz.
ÇY (3)	Öğrenci cevaba ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın kullandığı için birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemeden öteye gidemez.	Öğrenci önceki aşamalarda verilen soruları tekrar gözden geçirerek x=2 noktasında fonksiyonun tanımsız olduğunu görür. Ayrıca bu noktaya küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken aldığı değerlerin eşit ve +∞ olduğunu söyleyen öğrenci bu noktada limitin varlığından söz edilebileceğini belirtir. Limit koşulunu sağlayan fonksiyonun bu noktadaki tanımsızlığını incelemeye çalışan öğrenci süreklilik ile limit arasında ilişki kurması için gerekli olan bilgilerini birleştirmede başarılı olamaz.
İY (4)	Öğrenci cevaba ilişkin tüm yönlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve bütün içindeki yerini kavradığından cevap tutarlıdır. Kavramsal anlama vardır.	Öğrenci bu fonksiyonda sürekliliğin incelenebilmesi için verilen x=2 noktasında fonksiyonun limitinin olması gerektiğini bilir. Bu noktada limitin olduğunu gören öğrenci süreklilik için gerekli olan diğer koşulun; "fonksiyonun bu noktada alacak olduğu değer ile limit değerinin eşit olmasıdır" diye belirtir. Limit olmasına rağmen x=2 noktasında tanımsız olan bu fonksiyon için bu noktada süreklilikten bahsedilemeyeceğini söyleyen öğrenci süreklilik için limitin gerek koşul olduğunu fakat yeterli olmadığını vurgular.
SY (5)	Öğrenci daha ileri düşünerek genellemeler yaparak elinde bulunan verilerin ötesinde akıl yürütebilir.	Öğrenci verilen fonksiyonun grafiğini incelediğinde x=2 noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken limitin + ∞ olduğunu görmesi süreklilik ile ilgili ön koşulun sağlandığını göstermesine rağmen bu noktadaki tanımsızlıktan şu genellemeye varır: $f: A \to R$ fonksiyonu için a∈A olmak üzere, x=a'ya küçük-büyük değerlerden yaklaşıldığında limitlerden en az biri +∞ veya -∞ ise, f fonksiyonunun x=a noktasında sonsuz süreksizliği vardır.

3. 7. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Nitel araştırmaların geçerlik ve güvenirlikleri nicel araştırmalardan farklıdır. Nicel araştırmalarda görülen iç geçerlik, dış geçerlik, güvenirlik ve nesnelliğin eylem araştırmalarında doğrudan uygulanmadığını görmekteyiz. Çünkü eylem araştırmalarının verileri kendine özgüdür ve bağlamsaldır. İşte bu anlamda bu yöntemdeki geçerliliği test edecek kriterleri Lincoln, Lynham ve Guba (2011) iç geçerlik yerine inanılırlık, dış geçerlik yerine aktarılabilirlik (transfer edilebilirlik), iç güvenirlik yerine tutarlılık ve dış güvenirlik yerine ise doğrulanabilirlik (teyit edilebilirlik) kavramlarını kullanarak düzenlemişlerdir.

Bu çalışmada inanırlığı sağlamak için çalışma boyunca MYO öğrencilerinin yaşantıları ve ortamdaki etkileşimlere ait gözlemler araştırmacı notları olarak kaydedilmiş aynı zamanda ders süresince öğrencilerle yapılan diyalogların bazıları ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmış, bunun yanında öğrencilerin ders süresince üzerinde çalıştığı çalışma yaprakları ve ekran çıktıları araştırmacı öğretmen tarafından derinlemesine incelenip saklanmıştır. Ayrıca öğrenme ortamında yaşananların betimlenmesinde ve yorumlanmasında araştırmacı öğretmen ön yargılarından arınmaya gayret göstermiş ve nesnel olmaya dikkat etmiştir. Aktarıabilirliği (transfer edilebilirliği) sağlamak amacı ile yapılan çalışmalar, uygulandığı ortam, araştırma grubu ve uygulama süreci mümkün olduğunca ayrıntılı olarak betimlenmeye çalışılmıştır. Bunun yanında bulgular doğrudan alıntılarla desteklenerek yaşanan süreç canlandırılmaya çalışılmıştır. Benzer bağlamda benzer uygulamaların yapılabilmesi amacıyla veriler detaylı şekilde raporlaştırılmıştır. Diğer taraftan tutarlılığı sağlamak amacıyla bu çalışmada MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusu ile ilgili soyut düşünme becerilerinin geliştirilebilmesi için bilgisayar destekli öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Bu öğrenme ortamında öğrencilerle ders sürecinde geçen diyaloglardan, öğrencilerin çalışma yapraklarından, ekran çıktılarından, araştırmacı öğretmenin öğrenci ile ilgili gözlemlerinden ve notlarından elde edilen veriler incelenip öğrencilerin limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenmeleri SOLO seviyelerine bağlı olarak anlaşılmaya çalışılmış ve tartışılmıştır. Doğrulanabilirliği (teyit edilebilirliği) sağlamak amacıyla da tüm süreç, veri toplama araçları, analiz süreci ayrıntılı açıklanmış, elde edilen bulgular ve sonuçlar doğrudan alıntılarla desteklenerek teyit edilebilirlik sağlanmaya çalışılmıştır.

4. BULGULAR

Meslek yüksekokulu öğrencilerinin BCS ile desteklenmiş öğrenme ortamında "limit-süreklilik" konusundaki öğrenme çıktılarını SOLO taksonomisine göre değerlendirmeyi amaçlayan bu çalışmanın bulguları çalışma yapraklarındaki soruların dağılımına göre;

1. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme,
2. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme,
3. Fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme,
4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme,
5. Limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme,

alt başlıkları altında sunulmuştur. Bu alt başlıklar altında meslek yüksekokulu öğrencilerinin bilgisayar destekli öğrenme ortamında limit-süreklilik konusunu öğrenebilmelerine ilişkin düşünce evrelerini belirleyebilmek ve ortamın bu öğrenme sürecine katkısını ortaya koyabilmek amaçlanmıştır. Bu amaçla öğrencilerin verdiği cevapların betimsel analizi ve SOLO taksonomisine göre hangi seviyeye yerleştirildiği gerekçeleri ile birlikte sunulmuştur.

Çalışma kapsamında geçen MYO öğrenci isimleri MYO öğrencilerinin gerçek isimleri değildir. Bu öğrencileri temsil etmek için kullanılan isimler araştırmacı öğretmen tarafından belirlenmiştir. Okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunmak ve kendi yorumlarını yapma fırsatı verilmesi açısından ders sürecinde yapılan çalışmalarda araştırmacı öğretmen ve MYO öğrencileri arasında geçen karşılıklı diyaloglarda doğrudan alıntılara yer verilmiştir (Çelik, 2007; Yıldırım ve Şimşek, 2006). Diyaloglarda araştırmacı öğretmene ait konuşmaları temsil etmek için "AÖ", katılımcı MYO öğrencilerine ait konuşmaları temsil etmek için ise o öğrencinin isminin baş harfi kullanılmıştır. Öğrencinin konuşmasına ara verdiği veya düşündüğü süreçler ise diyaloglarda "……." şeklinde gösterilmiştir.

4. 1. Birinci Soru Grubu: Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri ile Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Birbirinden Ayırt Etme ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında birinci soru grubundaki sorulara verilen cevaplar incelenmiştir. Her bir soru için MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yapraklarına yazdıkları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle aralarında geçen diyalogları ayrı ayrı incelenerek MYO öğrencilerinin fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü ayırt etmeleri doğrultusunda verdikleri cevaplar ortaya çıkarılmıştır. Bu cevaplar incelenip birbirine benzer olan ve aynı ifadeleri içeren öğrenci cevapları seçilerek bulgular oluşturulmuştur. Aşağıda birinci soru grubundaki sorulara örnek olarak seçilen öğrenci cevaplarına yer verilmektedir.

2. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 2., 3., 4. 5. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonu tanımlamada zorluk çekmediği görülmüştür. Buna karşın ders sürecinde geçen diyaloglarda MYO öğrencilerinin bu soru grubundaki $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunun x=1'deki değerinin $\frac{\sin(0)}{0}$ olduğunu gördüklerinde *"hocam burada payda sıfır oluyor bu fonksiyon yanlış verilmiş herhalde"* şeklindeki ifadeleriyle fonksiyonun yanlış olup olmadığını sorguladıkları görülmüştür. Bunun dışında MYO öğrencilerine göre fonksiyonun verilen noktadaki limitini bulmak için Derive yazılımının kullanılmış olması fonksiyonun bu noktadaki limit değerine ulaşılmasında yardımcı olmuştur.

Bu sorular ile ilgili Okan ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

O: *Hocam bu fonksiyonda bir yanlışlık var mı?(Okan burada öğretmeninin soruyu yanlış yazabilme ihtimalini düşünürken bir yandan da çekingen bir duruş sergilemekteydi.). Ya da ben yanlış yapıyorum.*

AÖ: *Neden Okan?*

O: *Çünkü fonksiyonda x yerine 1 yazdığım zaman payda sıfır oluyor. Siz bize payda sıfır olduğunda çözüm kümesi yoktur demiştiniz.*

AÖ: *Peki böyle durumlarda fonksiyon için ne söylenir?*

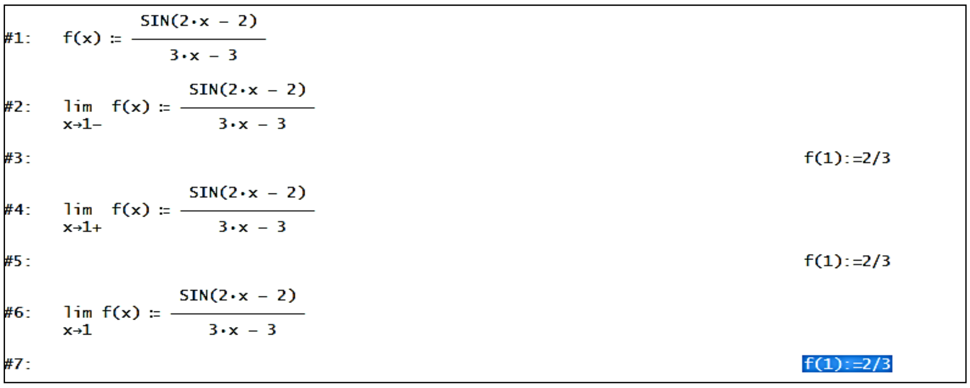
O: *Tanımsız bir fonksiyondur.*

AÖ: *İlk adımda sorulan sorunun cevabını bulamıyorsan diğer adımlarla ilgilenebilirsin.*

O: *Hocam bu fonksiyon tanımsız olduğu için diğer adımlara bakmamız doğru olur mu? (Okan bu süreçte sadece kâğıt-kalem çalışması yapıyordu.)*

AÖ: *Bilemiyorum Okan, istersen çalışma yapraklarının yönlendirdiği gibi yazılımı kullanarak cevaplara ulaşmaya çalış.*

O: *Peki... (Derive de aşağıdaki işlemleri yaptı)*



Şekil 35. Okan'ın 2. çalışma yaprağının "birinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

O: *Gerçekten de bir değer çıkıyormuş. Oysa ben verilen x=1 noktasını yerine yazdığımda elde ettiğim tanımsızlığı görünce yanlış yaptığımı düşünüyordum demek ki verilen noktayı yerine yazmak limitin tanımı değilmiş.*

AÖ: *Limitin tanımı nedir o halde?*

O: *Eeee… Limit bir noktada tanımsız olsa bile o noktada sağdan ve soldan limitlerin olmasıymış.*

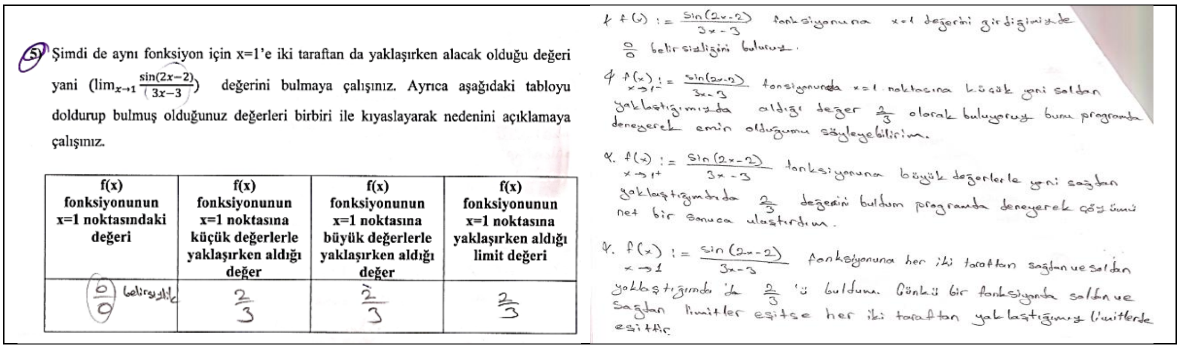
AÖ: *Sağdan ve soldan limit ne demektir?*

O: *Sağdan yaklaşmak, soldan yaklaşmak demektir……….limite sağdan yaklaşırken soldan yaklaşırken aynı değerleri almaktır galiba……ya hocam burada anladığım kadarıyla verilen noktanın değeri illaki de limit değeri olmak zorunda değilmiş. Noktaya yaklaşmak ayrı bir şey noktadaki değeri bulmak ayrı bir şeymiş….*

AÖ: *O halde aralarındaki farkın ne olduğunu belirtebilir misin? Sesli düşünmeni istiyorum*

O: *……..Aslında limit bir sınır gibi bir şey o sınıra yaklaşıyorsun bu limit oluyo….. Eee noktadaki değeri ne oluyor? Kafam karıştı… O noktadaki değeri limit olmuyo fakat sağdan soldan yaklaşınca limit oluyor. Aslında sayı doğrusunu düşünürsek bir noktanın sağında solunda aynı değerin olması gibi bir şey bu…Fakat böyle bir şey olamaz, çünkü o zaman noktanın değeri de aynı olur……… Off bana kalsa burada limitin var olduğunu da söylemezdim fakat Derive'de işlem yapınca bir değer bulunuyor!!!*

Okan bu düşünme sürecinde hem Derive yazılımında yaptığı çalışmaya bakıyor hem de kafasındaki bilgileri toparlamaya çalışıyordu. Ders sürecinde çalışma yaprağında yaptığı yorumlar ise şu şekilde idi:



5) Şimdi de aynı fonksiyon için x=1'e iki taraftan da yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki değeri	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına yaklaşırken aldığı limit değeri
$\frac{0}{0}$ belirsizlik	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

4 $f(x) := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonuna x=1 değerini girdiğimizde $\frac{0}{0}$ belirsizliğini buluruz.

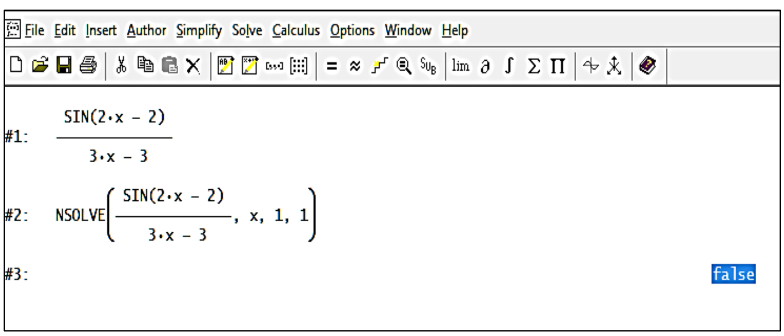
4 $\underset{x\to 1^-}{f(x)} := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonsiyonunda x=1 noktasına küçük yani soldan yaklaştığımızda aldığı değer $\frac{2}{3}$ olarak buluyoruz bunu programda deneyerek emin olduğumu söyleyebilirim.

4. $\underset{x\to 1^+}{f(x)} := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonuna büyük değerlerle yani sağdan yaklaştığımdada $\frac{2}{3}$ değerini buldum programda deneyerek çözümü net bir sonuca ulaştırdım.

4. $\underset{x\to 1}{f(x)} := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonuna her iki taraftan sağdan ve soldan yaklaştığımda'da $\frac{2}{3}$'ü buldum. Çünkü bir fonksiyonda soldan ve sağdan limitler eşitse her iki taraftan yaklaştığımız limitlerde eşittir.

Şekil 36. Okan'ın "birinci soru grubu" sorularıyla ilgili 2. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Aslında Okan'ın çalışma yaprağına yazdıkları ve verdiği cevaplar incelendiğinde öğrencinin bu soru grubunda sayı doğrusu bilgisinden yola çıkarak x=1 noktasına yaklaşabilme fikri dikkat çekicidir. Bu düşüncesi konu ile ilgili bilgi sahibi olduğunu göstermektedir. Ayrıca fonksiyonun bu noktada aldığı değerle, bu noktaya küçük-büyük değerlerden yaklaşırken alacağı değerin farklı olduğunu da farkında olan Okan'ın en büyük problemi bu bilgi parçalarını birleştirememesidir. Limit olarak beklediği değer o noktadaki görüntü olacağıdır. Bu süreçte Derive yazılımı verilen noktadaki değerin bulunmasında öğrenciye yardımcı olmasına rağmen öğrenci elde ettiği belirsizlikten dolayı şüphe içindedir. Limiti bulmadan önce verilen noktada çözüm arayan Okan'ın yazılım üzerinde yaptığı işlemler aşağıdaki gibidir.



Şekil 37. Okan'ın 2. çalışma yaprağının "birinci soru grubu" sorularıyla ilgili limit bulmadan önce derive yazılımı üzerinde yaptığı çözüm

O: *Hocam noktayı verilen fonksiyonda yerine yazdığımızda bilgisayar bile "false" diyor. Yani yanlış! O halde limit bulamayız değil mi? Zaten az öce "x" gördüğüm yere "1" yazıp çözdüğümde payda sıfır olmuştu!*

Bunlara ilave soruların en başında fonksiyonun limiti ile ilgili herhangi bir çalışma yapmadan (küçük büyük değerlerden yaklaşmaya gerek duymadan) bu ifadenin limit değerinin olmadığını söyleyen Okan, fonksiyonun verilen bir noktadaki değerini ve limit değerini ayırt etmede başarılı olmamıştır. Kısacası bilgi parçalarını birleştirmekte güçlük çekmiştir. Bu açıdan bakıldığında Okan'ın cevapları ifadenin belirsizliği etrafında şekillendiği ve sorunun sadece bir yönüne odaklanıldığı için *"tek yönlü yapı", "TY"* seviyesine yerleştirilmiştir.

Bütün öğrencilerin verdiği cevaplar incelendiğinde genel olarak Okan'ın cevaplarına benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Bu ifadeler aşağıdaki şekildedir;

"bu nokta burada $\frac{sin(0)}{0}$ belirsizliğine ulaşmamızı sağlar."

"payda sıfır bunun çözümü yoktur"

"belirsizlik var ama programda limit var"

"ama right-left limiti var"

Okan gibi diğer öğrencilerden Engin, Songül, Eyüp, Ferhat ve Ozan'ın verilen noktayı yerine yazamayacaklarını belirttikleri görülmüştür. Ayrıca fonksiyonun verilen bir noktaya yaklaşmasının ne demek olduğunu farkında olmayan bu altı kişi sadece Derive yazılımı ile limit değeri bulabilmiştir. Buldukları limit değeri ile ilgili nasıl bulunabileceğine dair herhangi bir fikir yürütememiştir. Böylece limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsü arasında ilişki kuramamışlardır. Bu açıdan bakıldığında bu öğrencilerin çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklandıkları ve soru grubuyla ilgili cevaplarının sınırlı kaldığı görüldüğünden bu cevaplar *"tek yönlü yapı" , "TY" seviyesine* yerleştirilmiştir. Bu duruma Engin'in çalışma yaprağına yazdığı *"noktayı yerine yazamayacam"* ifadesi örnek olarak verilebilir;

f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki değeri	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına yaklaşırken aldığı limit değeri
noktayı yerine yazamayacam	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Şekil 38. Engin'in "birinci soru grubu" sorularıyla ilgili 2. çalışma yaprağı üzerine yazdıkları

Genel olarak; fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle diyalogları derinlemesine incelendiğinde, beklenen öğrenmenin gerçekleşemediği görülmüştür. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, aynı sorular Derive ortamına taşınıp etkinliğin tamamlanması ve diyaloglar sonucu ÇY seviyesine dönüştüğü görülmüştür. Hatta bilgisayar destekli öğrenme ortamı ile ilk defa karşılaşan MYO öğrencilerinin bazı düşüncelerinin, ders sürecindeki diyaloglarda geliştiği görülmüştür. Aşağıda bu gibi durumlara örnek olması açısından Harun ve araştırmacı öğretmen arasında 2. Çalışma yaprağının Birinci Soru Grubunda yer alan 2., 3., 4., 5. sorularında geçen diyaloğa yer verilmiştir;

Dersin başlangıcında yazılıma alışma sürecinde;

H: *Hocam verdiğiniz değere yaklaşırken fonksiyonda x yerine o değeri yazıp çözmem gerekmez mi?*

AÖ: *Öyle kabul edelim!*

H: *O halde burada x=1 için alacak olduğu değeri neden tekrar sordunuz? (2. Çalışma yaprağının 2. sorusunu gösteriyor)*

AÖ: *Peki şöyle soralım x'in 1'e yaklaşması ve x'in 1'e eşit olması aynı ifadeler mi?*

H: *Hocam ya burada sinüs var ben x gördüğüm yere 1 yazsam bile sonuç bulamam! (kâğıt-kalem kullanarak fonksiyonda x gördüğü yere 1 yazıyor) Burada çözüm sıfır. Çünkü payda sıfır oluyor!*

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin verdiği cevaplar sorunun tek bir yönüne odaklanarak limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsü arasında ilişki kurmadığından öğrencinin tek yönlü yapı "TY" sevisinde düşündüğü söylenebilir. Bundan sonraki süreçte aynı soruları Derive ortamına taşıyan Harun ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

AÖ: *Harun, bulamadığın sonuçlar için yazılımı kullanabilirsin.*

H: *Doğru ya, aslında burada Derive'yi kullanarak çözüm yap diyor! (Çalışma yaprağını gösterip 1.grup sorularında yer alan fonksiyonu yazılım üzerinde tanımlar ve x=1 için çözüm yapar) İşte burada "false" buldum yani yanlış!*

AÖ: *Sesli düşünerek çalışmanın devamını getirebilir misin?*

H: *Devam edersem "find limit" "imit point" 1 yazalım. Sonuç $\frac{2}{3}$! Şimdi "left", "right" için de bulalım. Yine aynı sonuç $\frac{2}{3}$!*

AÖ: *Böyle bir durumda ne söyleyebilirsin?*

H: *Limit, sağ limit, sol limit hep aynı! Sadece x=1 değerindeki çözümü "false"! (Çalışma yaprağında yer alan tabloya bulduğu değerleri yazar)*

AÖ: *Peki bu durum için ne söyleyebilirsin?*

H: *Şimdi x=1 noktasında sonuç olmasa bile fonksiyonun limiti vardır. Hem de sağdan, soldan limiti de vardır. Yani 1 noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşabiliriz!*

Bu diyalog, Harun'un Derive yazılımına taşınan bu grup sorularına verdiği cevapların etkinliğin tamamlanması ile birbirinden kopuk bilgi parçaları içerdiğini gösterdiğinden öğrencinin bu süreçte çok yönlü yapı "ÇY" sevisinde düşündüğü söylenebilir. Ayrıca aynı soru grubu için yeni dönem ders sürecinde Harun ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir:

AÖ: *Harun* $f\ (x) = \frac{sin(2x-2)}{3x-3}$ *fonksiyonun 1 için limitini inceleyebilir misin?*

H: *Hocam öncelikle verdiğiniz bu fonksiyonu Derive yazılımında tanımlayalım. Sonra left ve right limitlerini bulalım…..(Harun bu soru grubu ile karşılaşır karşılaşmaz önünde bulunan bilgisayara yönelip yazılımı kullanmıştır)*

Harun ile araştırmacı öğretmenin bilgisayar destekli öğrenme ortamında ders sürecinde geçen diyaloğu ile yeni dönem ders sürecinde geçen diyaloğu arasında büyük fark olmamasına rağmen, ders süreci içerisinde sorulan sorularda öncelikle kâğıt-kalem kullanmaya yönelen Harun'un, yeni dönem ders sürecinde öncelikle yazılımı kullandığı görülmüştür.

Yukarıda örnek olarak verilen diyaloglara ilave olarak araştırmacı öğretmenin ders sürecinde aldığı notlardan Derive yazılımı kullanımının anlaşılır ve BCS ortamının öğrenmeye teşvik edici olduğu görülmüştür. MYO öğrencileri ile geçen diyaloglarda araştırmacı öğretmenin aldığı bu notlardan bazıları aşağıda örnek olarak verilmiştir:

"matematik dersi bu sınıfta bilgisayarla yapılacağı için çok merak ettim hocam…"

"yazılım çok kullanışlı ve kolay, matematikle ilgili her işlemin sonucuna kolayca ulaşabiliyorum…"

"hocam siz tahtaya yazdığınızda ben arkadaşıma yazdırıyordum sonra ondan alıyordum. Fakat bu derslerde ben de bir şeyler yapmaya çalıştım…"

"bu sınıfta ders yapmayı seviyorum…"

"Derive ile işlem yapmak çok zevkli… hatta fonksiyonu yazıyorsun ve limit buluyorsun…."

"fonksiyonda x gördüğümüz yere verilen noktayı koymamıza gerek yok yazılım zaten limiti buluyor…"

"çalışma yapraklarında verilen soruların cevabını Derive olmazsa kesinlikle bulamazdım. Hiç düşünmeye bile gerek olmadan limiti bulabiliyorsun…."

Yukarıdaki öğrenci cevaplarından bilgisayar destekli öğrenme ortamının öğrencilerin derse katılımı sürecinde etkili olduğunu görmekteyiz. Bunun yanı sıra kullanılan Derive yazılımının öğrenciler için dikkat çekici ve eğlenceli olduğu da açıktır.

Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, Derive yazılımındaki çalışmaları ve araştırmacı öğretmenle gerçekleşen diyaloglarının tamamı incelendiğinde, öğrencilerde beklenen öğrenmenin gerçekleşmediği görülmüştür. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, etkinliğin tamamlanması ve diyaloglarla ÇY seviyesine çıkması sonucu 6 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY) seviyesine yerleştirilirken 26 öğrencinin cevapları ise çok yönlü yapı (ÇY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Özet

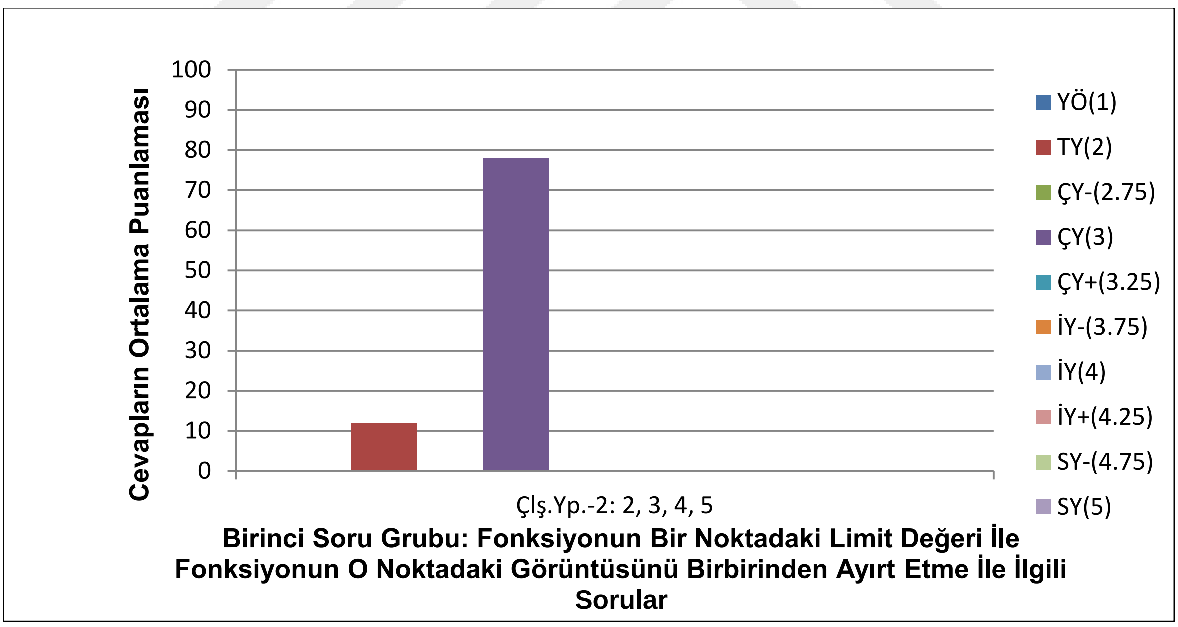
Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme ile ilgili Birinci Soru Grubu sorularını incelediğimizde MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarında, ekran çıktılarında ve diyaloglarda verdikleri cevapların genel olarak çok yönlü yapı (ÇY) seviyesinde olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tabloda MYO öğrencilerinin fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etmeyi öğrenmelerine yönelik vermiş oldukları cevapların SOLO taksonomisine göre seviyelerinin öğrenci cevap sayısı belirtilmiştir. Tabloda yer alan (-) işareti zayıf yapıları, (+) işareti ise güçlü yapıları temsil etmektedir. Bu seviyeler altında verilen öğrenci cevap sayıları o öğrencilerin ulaştıkları en üst seviyeyi göstermektedir. Böylece bu grupta yer alan sorulara verilen cevapların seviyesi genel olarak temsil edilmektedir.

Tablo 28. Birinci Soru Grubu: SOLO Seviyesine Göre Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri ile Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Birbirinden Ayırt Etme ile İlgili Öğrenci Cevap Sayısı

Soru Grubunun Adı	Çalışma Yaprağı	Soru No	SOLO Seviyeleri														
			-	YÖ (1)	+	-	TY (2)	+	-	ÇY (3)	+	-	İY (4)	+	-	SY(5)	+
Birinci Soru Grubu	2	2, 3, 4, 5					6			26							

Yukarıdaki tablo incelendiğinde 2. Çalışma Yaprağının Birinci Soru Grubu soruları olan 2., 3., 4. ve 5. sorulara verilen cevaplardan toplam 6 öğrenci cevabının tek yönlü yapı (TY,2) ve 26 öğrenci cevabının da çok yönlü yapı (ÇY, 3) seviyesinde olduğu görülmektedir. Böylece fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etmeyle ilgili incelenen bu sorularda, MYO öğrencilerinin verdikleri cevapların genel olarak çok yönlü yapı (ÇY, 3) seviyesinde olduğu belirtilebilir. Bu durum MYO öğrencilerinin bu soru gruplarında bir veya birden fazla doğru çıkarımda bulunmasına rağmen bunları birbiri ile tutarlı bir şekilde ilişkilendirmede başarılı olamadığını ortaya çıkarmaktadır.

Tablo 28'de verilen veriler ve bu verilere ait veri analizleri incelenerek MYO öğrencilerinin bu kazanım ile ilgili her bir çalışma sorusuna verdikleri cevapların ortalama seviyesi belirlenmiştir. Ortaya konan bu ortalama seviye ilgili başlık altındaki her soruya bu seviyede cevap verileceği anlamına gelmese de genel bir bakış açısı sunmaktadır. Bu doğrultuda diğer başlıklar arasında kıyas yapabilmeyi kolaylaştırmak ve genel bir bakış sunmak açısından öğrenci sayıları doğrultusunda SOLO seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması aşağıdaki grafik ile özetlenmiştir.



Grafik 1. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme ile ilgili solo seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması

Grafik 1 incelendiğinde fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme ile ilgili 6 öğrenci cevabının tek yönlü yapı (TY,2) seviyesinde olması ortalama 12 (TY) puanlamasına ve 26 öğrenci cevabının da çok yönlü yapı (ÇY, 3) seviyesinde olması 78 (ÇY) puanlamasına karşılık geldiği görülmektedir.

Yukarıda bu grubu özetlemek için verilen tablo, grafik ve diyaloglar süreçler halinde incelendiğinde, yazılımı kullanmaya başlamadan önce kâğıt-kaleme yönelen öğrencilerin, soruların bir yönüne odaklanan cevaplar verdiği, yazılımın kullanılmasıyla verilen cevapların geliştiği ve birbirinden bağımsız anlamlı bilgi parçalarını içerdiği görülmüştür. Bu durum başlangıçta tek yönlü düşünme seviyesinde verilen öğrenci cevaplarının bilgisayar destekli öğrenme ortamında gelişerek çok yönlü düşünme seviyesinde olduğunu göstermektedir. Bu anlamda BCS ortamı, MYO öğrencilerinin "fonksiyonun limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsü arasında ilişki kurma" ile ilgili öğrenme sürecine katkı sağlamıştır. Ayrıca yeni dönem ders sürecinde öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları çözmek için doğrudan yazılıma yönelmiştir. Derive yazılımı olmadan limit bulmakta güçlük çeken öğrencilerin yazılıma yönelmeleri öğrenme sürecinde teknolojiye olan eğilimin arttığını göstermektedir.

4. 2. İkinci Soru Grubu: Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerini Bulabilme ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında İkinci Soru Grubu soruları ve sürece etkisi ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir soru grubu için MYO öğrencilerinin ders akışı sürecindeki çalışma yapraklarına yazdıkları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle aralarında geçen diyalogları ayrı ayrı incelenerek MYO öğrencilerinin fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilmeleri doğrultusunda verdikleri cevaplar ortaya çıkarılmıştır. Bu cevaplar incelenip birbirine benzer olan ve aynı ifadeleri içeren öğrenci cevapları seçilerek bulgular oluşturulmuştur. Aşağıda İkinci Soru Grubu sorularına örnek olarak seçilen öğrenci cevaplarına yer verilmektedir.

2. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 6., 7. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen noktayı fonksiyonda yerine yazmalarına rağmen $(\frac{0}{0})$ belirsizliğini bulmada güçlük çektikleri görülmüştür. Bunun yanı sıra 2. çalışma yaprağını tekrar inceleyen öğrenciler verilen $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunda trigonometrik ifadeye odaklanmıştır. Ayrıca MYO öğrencileri $(\frac{0}{0})$ belirsizliğinde limitin nasıl bulunacağını sorgulamaktan ziyade limitin sezgisel tanımını yaparak Derive yazılımında buldukları limit değerini sorgulamışlardır.

Bu sorular ile ilgili Devrim ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

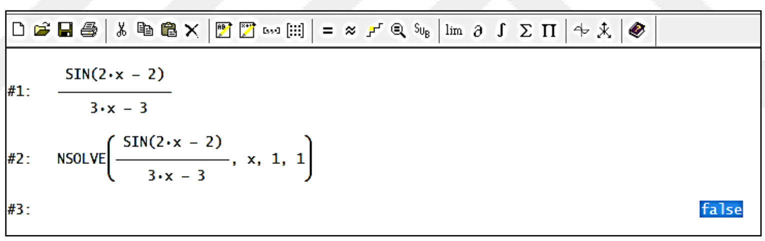
D: *Hocam burada limitin tanımını vermemiz yeterli değil mi? (Devrim burada limitin sezgisel tanımı olan eğer f fonksiyonsa bu fonksiyon için x a'ya yaklaşırken f(x)'in belli bir sayıya çok yakın olmasını ifade etmeye çalışmıştır)*

AÖ: *Bence soruyu tekrar oku Devrim. Bu tanım yeterli gelecek mi?*

D: *… Evet, hocam haklısınız limitin tanımını değil yeni olarak ne öğrendiğimizi soruyor. Ayrıca 7. soruda benim size sorduğum soruyu soruyor. Bu iş giderek zorlaşmaya başladı… Neyse öncelikle şu fonksiyonun aldığı limit değerine tekrar bakalım. Bir limit değeri var ve bu limit değeri verilen noktaya sağdan ve soldan yaklaşırken yani sizin tabirinizle küçük ve büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun alacak olduğu değer ile aynıdır. Oysa bu noktada bir ($\frac{0}{0}$) belirsizlik var. O zaman burada limit var mıdır?*

AÖ: *Nasıl yani?*

D: *Bilmiyorum. Hocam Derive yazılımında bu fonksiyonun x=1 noktasında aldığı değeri bulmaya çalıştığımda "false" yazıyor. Acaba bu yanlış mı? (Bu süreçte Derive yazılımında yapmış olduğu çalışmalar aşağıdaki gibidir)*



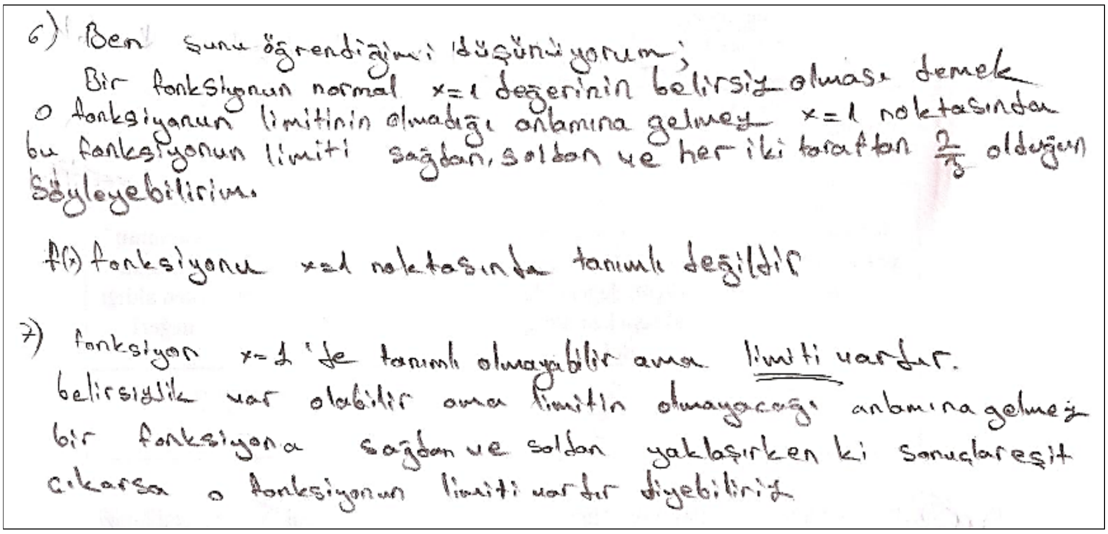
Şekil 39. Devrim'in 2. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Devrim kafanın çok karışmasını istemiyorum. Az önce bu noktada bir belirsizlik olduğunu belirtmiştin. Belki de yazılım bunu doğruluyordur ne dersin?*

D: *Hımm… Haklısınız hocam, bir an kafam karıştı. Acaba şöyle söylemek doğru olur mu?*

AÖ: *Nasıl?*

D: *Şimdi verilen x=1 noktasında belirsizlik var fakat bu belirsizlik fonksiyonun bu noktada limitinin olmasına engel değil. Yani limit var fakat fonksiyon bu noktada tanımlı değil. (Devrim söyledikleri doğrultusunda çalışma yaprağına bir şeyler yazmıştır)*


6) Ben şunu öğrendiğimi düşünüyorum;
Bir fonksiyonun normal x=1 değerinin belirsiz olması demek o fonksiyonun limitinin olmadığı anlamına gelmez x=1 noktasından bu fonksiyonun limiti sağdan, soldan ve her iki taraftan 2/3 olduğunu söyleyebilirim.
f(x) fonksiyonu x=1 noktasında tanımlı değildir
7) fonksiyon x=1'de tanımlı olmayabilir ama limiti vardır.
belirsizlik var olabilir ama limitin olmayacağı anlamına gelmez
bir fonksiyona sağdan ve soldan yaklaşırken ki sonuçlar eşit çıkarsa o fonksiyonun limiti vardır diyebiliriz

Şekil 40. Devrim'in "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 2. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

D: *Demek ki verilen noktada tanımsız olan bir fonksiyonda aynı noktaya iki taraftan yaklaşırken alınan değer aynı olursa limit var oluyor. Zaten Derive yazılımı da limitin olduğunu gösteriyor.*

AÖ: *Doğru. Fakat bu limiti Derive yazılımı olmadan nasıl bulabilirsin?*

D: *Hocam bu limiti Derive yazılımı olmadan bulamam. İçinde hem trigonometri var hem limit var, hem de $(\frac{0}{0})$ belirsizliği var. Bu kadar yorum yapabilmeme ben bile şaşırıyorum. Bunun sebebi de Derive yazılımı olsa gerek.*

Derive yazılımında fonksiyonun tanımsız olduğu nokta için çözüm yapan Devrim'in verdiği cevaplar incelendiğinde bulmuş olduğu "false" ifadesinin kafasını karıştırdığı görülmektedir. Limit değeri için bu noktayı inceleme konusunda fikir sahibi olamayan Devrim'in çalışmadan önceki cevaplarının ÇY seviyesinde olduğu söylenebilir. Yazılımı kullanıp çalışmasına devam eden Devrim, verilen noktada elde ettiği $(\frac{0}{0})$ belirsizliğine rağmen limitin var olabileceğini belirterek cevaplarının bir adım daha geliştiğini göstermektedir. Buna rağmen verilen fonksiyonun belirsiz olduğu noktada yazılım olmadan limit değerini bulamayacağını söyleyen Devrim, $(\frac{0}{0})$ belirsizliğinde ve trigonometrik fonksiyonlarda limitin nasıl hesaplanabileceği hakkında başarılı olamamıştır. Oysa çalışma yaprağına yazdığı yorumlar incelendiğinde diyaloglara oranla daha ileri düzeyde cevaplar yazdığı görülmektedir. Bu ise, elde edilen belirsizlik durumunu ortadan kaldırmadan yazılım desteği ile limitin varlığına ulaşan Devrim'in sahip olduğu bilgi parçalarının birbiriyle olan ilişkilerini farkında olduğunu fakat kavramsal anlamada yeterli olmadığını göstermektedir. Bu açıdan bakıldığında birbiri ile tutarlı cevaplar veren

Devrim'in cevapları kavramsal anlamadan uzak olan fakat birden fazla yöne odaklanılan cevapları içeren "(güçlü) çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir.

2. çalışma yaprağının 6., 7. sorularına verilen bütün öğrenci cevapları incelendiğinde genel olarak 20 öğrenci cevabında Devrim'in cevaplarına benzer ifadelerle karşılaşılmış olmasına rağmen cevapların içerisinde ilişki kurulmaksızın birden fazla veriyi içeren ifadeler görülmüştür. Dolayısıyla bu 20 öğrenci cevabında birbirinden kopuk bilgi parçaları içeren ifadeler yer aldığından bu öğrencilerin "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesinde düşündüğü söylenebilir. Bu ifadeler aşağıdaki şekildedir;

"yeni olarak limit öğrendik…"

"bu nokta burada $\frac{sin(0)}{0}$ *belirsizliğine ulaşmamızı sağlar."*

"payda sıfır bunun çözümü yoktur"

"belirsizlik var"

"limit var"

"trigonometrik fonksiyonun limitini öğrendik"

Geri kalan 11 öğrencinin cevaplarının ise birbirine yakın ve TY seviyesinde olduğu görülmüştür. Aşağıda TY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından Veysel ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

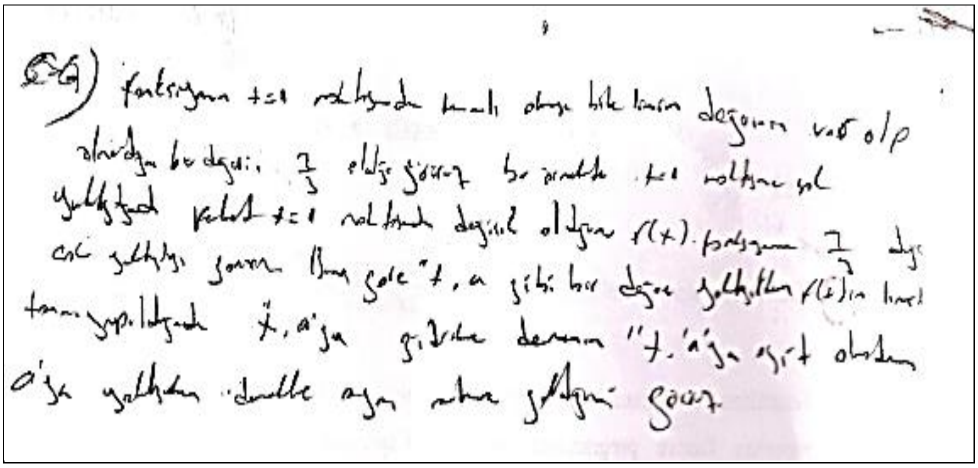
V: *Şimdi biz bu etkinlikte limit'i öğrendik.*

AÖ: *Limiti öğrendik derken neyin limitini öğrendik?*

V: *x yerine 1 yazdığımızda verilen fonksiyonun limitinin olduğunu öğrendik.*

AÖ: *x yerine 1 yazdığında limit değerini hemen bulabiliyor musun, Veysel?*

V: *…Bulamıyorduk değil mi hocam! Doğru x, a'ya küçük değerlerden giderken bir limit olacak; x, a'ya büyük değerlerden giderken bir limit olacak o zaman limiti bulmuş olacağız. (Bu sürece dair Veysel'in çalışma yaprağına yazmış oldukları aşağıdaki gibidir)*



Şekil 41. Veysel'in "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 2. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: Peki, limiti bulabildin mi?

V: Evet hocam, limit $\frac{2}{3}$ Derive'da buldum. Limiti var.

$(\frac{0}{0})$ belirsizlik durumunda limit değerini bulabilmeyle ilgili cevap beklenen bu soru grubuna, Veysel limitin sezgisel tanımını yaparak yanıt vermiştir. Veysel, x yerine 1 yazılması gerektiğini belirterek belirsizlik durumu dikkate almamıştır. Bu soru grubuna benzer şekilde cevaplar veren Adem, Seher, Üzeyir, Songül, Engin, Mansur, Ferhat, Resul, Harun ve Ahmet'in cevapları da "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir.

2. Çalışma yaprağının İkinci Soru Grubu içinde yer alan 6., 7. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 11 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 20 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY) ve 1 öğrencinin cevabı ise güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

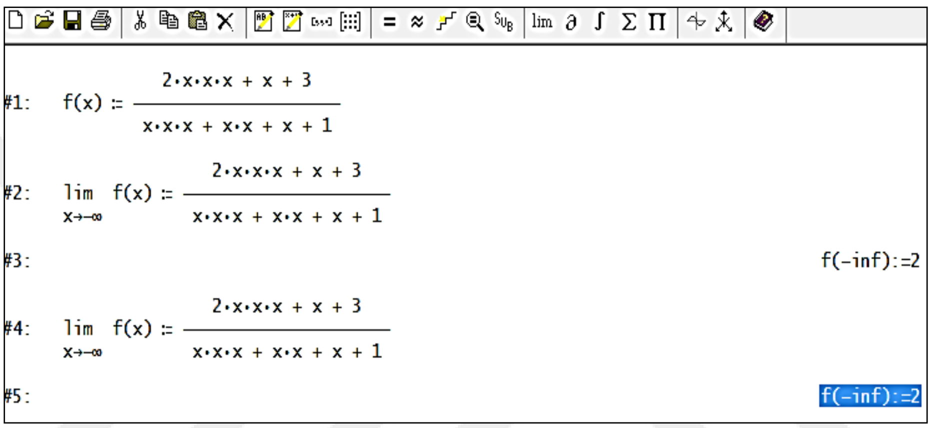
3. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 2., 3., 4. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonu tanımlamada zorluk çekmediği görülmüştür. Buna karşın MYO öğrencileri bu soru grubunda verilen $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunun x, $-\infty$'a yaklaşırken alacağı değer hakkında net bir fikir yürütememiştir. MYO öğrencilerine göre limit ile ilgili sorularda sonsuzluk (∞) ifadesine sıkça yer verilmesi limit kavramının anlaşılmasını güçleştirmiştir. Derive yazılımı olmadan bu fonksiyonun limitine ulaşamayacaklarını belirten öğrenciler matematikte bir takım kuralları ezberlemekten sıkıldıklarını ve yazılım kullanımı ile ezber yapmaktan azıcık olsun uzaklaştıklarını dile getirmiştir.

Bu sorular ile ilgili Mansur ve araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

M: *Yine mi sonsuzluk (∞) !!!*

AÖ: *Neden Mansur?*

M: *Hocam bu ifadeyi ne zaman görsem soruyu çözemiyorum……. Aslında burada limiti bulmak kolay fakat (-∞) ifadesi olduğu için biraz düşünmem lazım… Hımm ben en iyisi Derive yazılımını kullanayım… Evet tahmin ettiğim gibi limit değeri 2, fakat x neredeyse -∞ olduğunda bu fonksiyonun ne olabileceğini düşünemiyorum… Yine tanımsız mı olur hocam? (Derive'de aşağıdaki işlemleri yaptı)*

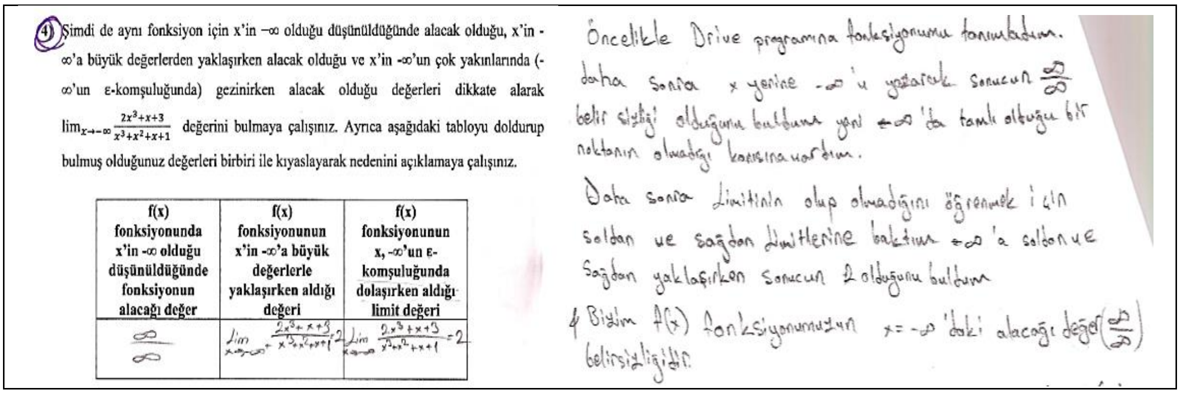


Şekil 42. Mansur'un 3. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Buna sen karar vereceksin. Fakat şöyle bir yardımım dokunabilir limit ile ilgili konu anlatımı yaparken elde ettiğimiz belirsizlikleri hatırla!*

M: *Evet.. Bu belirsizlikti… Hem de* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliği çünkü x yerine ∞, yani -∞ yazacak olursam bu pay ve payda ∞ oluyor.*

AÖ: *x yerine -∞ mu yazdın? (Bu süreçte Mansur'un çalışma yaprağında yapmış olduğu yorumlar ve çalışmalar aşağıda verilmiştir)*



4) Şimdi de aynı fonksiyon için x'in −∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu, x'in -∞'a büyük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu ve x'in -∞'un çok yakınlarında (-∞'un ε-komşuluğunda) gezinirken alacak olduğu değerleri dikkate alarak $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunda x'in -∞ olduğu düşünüldüğünde fonksiyonun alacağı değer	f(x) fonksiyonunun x'in -∞'a büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değeri	f(x) fonksiyonunun x, -∞'un ε-komşuluğunda dolaşırken aldığı limit değeri
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to-\infty^+}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}=2$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}=2$

Öncelikle Drive programına fonksiyonumu tanımladım.
daha sonra x yerine -∞'u yazarak sonucun $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğunu buldum yani -∞'da tanlı olduğu bir noktanın olmadığı kanısına vardım.
Daha sonra limitinin olup olmadığını öğrenmek için soldan ve sağdan limitlerine baktım -∞'a soldan ve sağdan yaklaşırken sonucun 2 olduğunu buldum
4 Bizim f(x) fonksiyonumuzun x = -∞'daki alacağı değer $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ belirsizliğidir.

Şekil 43. Mansur'un "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 3. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

M: *Şöyle yani hocam -∞'a çok yaklaştım fakat -∞ olamadım. Zaten olamam da!!!.... Çok değişik hem böyle ilginç bir ifade ($\frac{\infty}{\infty}$) ile karşılaşıyoruz hem de limit arıyoruz… Aslında burada limit falan aramamak gerekir. Yani ∞'da limit olur mu? Fakat Derive öyle demiyor hesaplamalar öyle demiyor… İlla ki limit var ve "2'dir" diyor!...Ne yalan söyleyeyim bu program olmasa sadece (-∞) ifadesini görüp bu ifade nedir ki der fonksiyonu çarpanlarına ayırmaya çalışırdım. Limit ile ilgili hiçbir şey düşünmezdim bile…*

Mansur'un bu çalışmaları ve yorumları incelendiğinde öğrencinin çalışmadan önceki görüşleri ile çalışmadan sonraki görüşleri arasındaki fark kolayca görülebilmektedir. Çünkü Mansur çalışma yaprağını eline alır almaz ilk yaptığı *"ya yine mi ∞"* ifadesi yorumu ve fonksiyonu çarpanlara ayırmak için uğraşması öğrencinin çalışmadan önce TY seviyesinde olduğunu göstermektedir. Fakat çalışma sürecinde Derive yazılımı desteği ile vermiş olduğu cevaplar öğrencinin tek yönlü yapıdan çok yönlü yapıya doğru gelişim gösterdiğini göstermektedir. Mansur soru grubunda yer alan -∞ ifadesine nereden yaklaşması (büyük değerlerden) gerektiği hakkında bilgi sahibidir. Ayrıca x yerine -∞'un nasıl yazılabileceği hakkında bilgi verebilen Mansur, karşılaştığı belirsizliğin $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğunu söyleyebilmiştir. Buna rağmen limitin bulmasında Derive yazılımı olmadan çözüm yapamamıştır. Elde edilen belirsizlik durumunu ortadan kaldırmadan yazılım desteği ile limitin varlığına ulaşan Mansur'un cevapları hesaplama odaklı olduğundan sahip olduğu bilgi parçalarını birleştirmede başarılı olamamıştır. Bu açıdan bakıldığında Mansur'un cevapları, aralarında ilişki kurulmaksızın birden fazla veriyi içerdiğinden *"çok yönlü yapı", "ÇY"* seviyesine yerleştirilmiştir.

3. çalışma yaprağının 2., 3., 4. sorularına verilen bütün öğrenci cevapları incelendiğinde genel olarak Mansur'un cevaplarına benzer cevaplarla karşılaşılmıştır. Bu cevaplardan bazıları aşağıdaki gibidir;

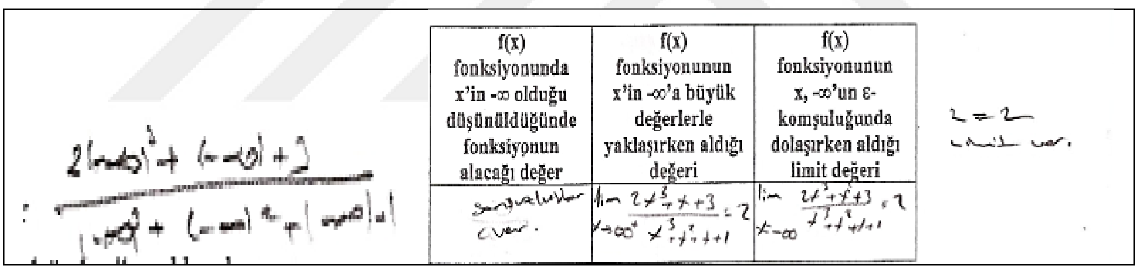
“hocam burada -∞’u yerine mi yazacağız?”

“burada -∞’un ε komşuluğu nedir? -∞’a büyük değerlerden yaklaşmak mıdır?

“hocam -∞’u yerine yazmadan Derive’den limiti bulsam daha kolay oluyor. “Sonsuzluk ifadesi ile ilgili hiçbir şey yapamıyorum”

“yine belirsizlik var herhalde”

Bu genellemenin dışında kalan Songül, Ozan, Seher, Remzi, Eyüp, Nevim, Ahmet ve Erdal limit değerini bulmadan önce x yerine ∞ yazarak *“sonsuzluğu fonksiyonda yerine yazdığımızda burada sonsuzluk olur ve limit de ∞ olur”* demişlerdir. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulmak yerine fonksiyonda x gördükleri yere ∞ yazan bu 8 öğrenci Derive yazılımıyla buldukları limit değerine çok şaşırmışlardır. Bu açıdan bakıldığında bu öğrencilerin çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklandıkları ve soru grubuyla ilgili cevaplarının sınırlı kaldığı görüldüğünden bu cevaplar *“tek yönlü yapı”*, *“TY” seviyesine* yerleştirilmiştir. Bu 8 öğrencinin durumuna ders sürecindeki diyaloglarda *“ya hocam hani ∞’a gidiyorduk limit nasıl 2 oldu?”* sorusu ile durumu sorgulayıp “-∞”u fonksiyonda yerine yazmaya çalışan Remzi’nin çalışma yaprağı örnek olarak verilebilir;



f(x) fonksiyonunda x’in -∞ olduğu düşünüldüğünde fonksiyonun alacağı değer	f(x) fonksiyonunun x’in -∞’a büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değeri	f(x) fonksiyonunun x, -∞’un ε-komşuluğunda dolaşırken aldığı limit değeri
sonsuzluk var.	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+1} = 2$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+1} = 2$

Şekil 44. Remzi’nin “ikinci soru grubu” sorularıyla ilgili 3. çalışma yaprağı üzerinde yaptığı işlemler

3. Çalışma yaprağının İkinci Soru Grubu içinde yer alan 2., 3., 4. Sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 8 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY) seviyesine yerleştirilirken 24 öğrencinin cevapları ise çok yönlü yapı (ÇY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

3. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 5., 6. sorularını incelediğimizde cevapların genelinde limit aranan herhangi bir fonksiyonda sonsuzlukla ilgili bir durumla karşılaşıldığında MYO öğrencilerinin ($\frac{\infty}{\infty}$) belirsizliği olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Böyle cevapların ezbere bilgi parçası olduğu söylenebilir. MYO öğrencileri bu sorularda yer alan ($\frac{\infty}{\infty}$) belirsizliğinde limitin nasıl bulunacağını düşünmeden yazılımda buldukları limit değerini cevap olarak yeterli bulmuşlardır.

Bu sorular ile ilgili Samet ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

S: *Hocam bu çalışma yaprağında fonksiyonun sonsuzluktaki limiti isteniyor. O halde sonsuza gidersek sonuç sonsuz olur.*

AÖ: *Emin misin Samet?*

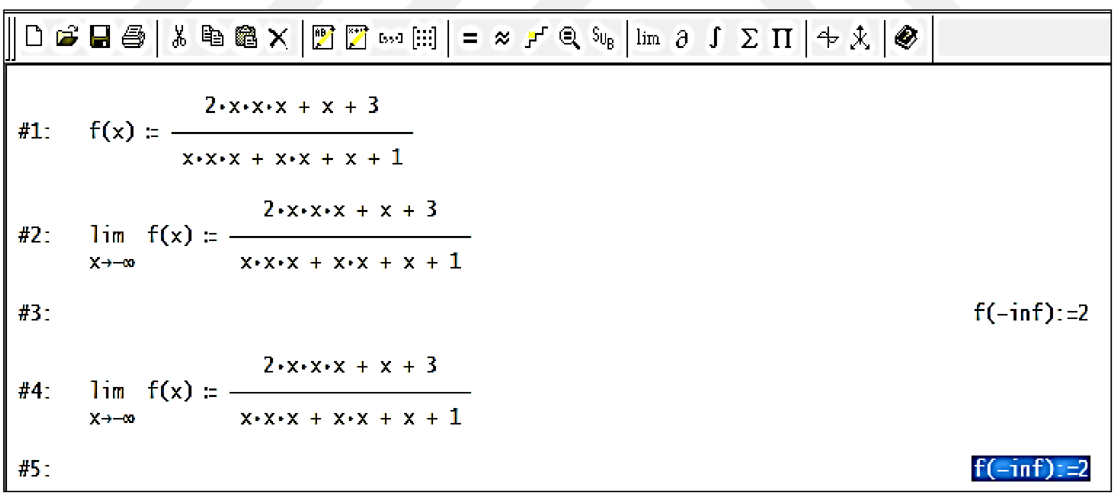
S: *Değilim hocam. Demek ki başka bir şey bulmam gerekiyor. Yoksa burada çözüm yapamadığız ($\frac{\infty}{\infty}$) mu var?*

AÖ: *Niçin çözüm yapamıyorsun?*

S: *Şimdi, hocam x'in -∞ olduğunu düşünürsem… x yerine -∞ yazarsam olmaz ki… Onun için çözüm olmaz.*

AÖ: *Böyle durumlarda ne yapabiliriz? Biraz sesli düşünerek bilgilerini yokla bakalım!*

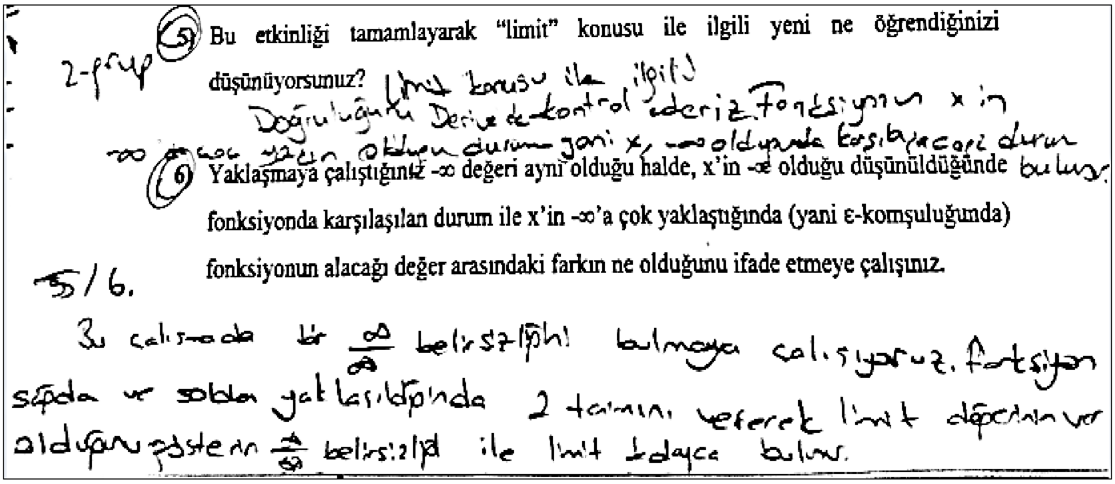
S: *Şimdi Derive'de fonksiyonu az önce yazdığımız gibi yazarız ve limitini bul deriz. Böyle değil mi hocam? İşte limit var ve 2! (Derive yazılımında fonksiyonun -∞ limitini bulur)*



Şekil 45. Samet'in 3. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Bu sonuca Derive olmasaydı nasıl ulaşacaktın? Nasıl bir yol izleyecektin?*

S: *Şimdi -∞'a ε kadar yaklaşırız ve belirsizlik buluruz. Sonra Derive'den sonuç 2 çıkar. Böylece limiti bulmuş oluruz. (Samet çalışma yaprağına düşüncelerini yazar)*



Şekil 46. Samet'in "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 3. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

($\frac{\infty}{\infty}$) belirsizliğinde limit değerini bulabilmeyle ilgili cevap beklenen bu soru grubunda, sonsuzluk ifadesiyle karşılaşan Samet limitin ∞ olması gerektiğini belirtmiştir. Limit olmasa bile burada mutlaka bir belirsizliğin olduğunu vurgulayan Samet'in cevapları ilk önce TY seviyesinde başlamıştır. Yazılımı kullandıkça -∞'da çözüm yapamayacağını belirten Samet'in ($\frac{\infty}{\infty}$) belirsizliğine rağmen limitin var olabileceğini söyleyebilmesi cevaplarının bir adım daha geliştiğini göstermektedir. Buna rağmen Derive yazılımı olmadan istenen limiti bulamayan Samet, ($\frac{\infty}{\infty}$) belirsizliğinde limitin nasıl hesaplanabileceği hakkında başarılı olamamıştır. Bu ise, elde edilen belirsizlik durumunu ortadan kaldırmadan yazılım desteği ile limitin varlığına ulaşan Samet'in sahip olduğu bilgi parçalarını birleştirmede başarılı olamadığını göstermiştir. Bu açıdan bakıldığında Samet'in cevapları, aralarında ilişki kurulmaksızın birden fazla veriyi içerdiğinden "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir.

3. çalışma yaprağının 5., 6. sorularına verilen bütün öğrenci cevapları incelendiğinde 21 öğrencinin cevaplarında Samet'in cevaplarına benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Bu ifadeler aşağıdaki şekildedir;

"yeni olarak Derive'da limit bulmayı öğrendik…"

"burada sonsuzluk olduğu için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine ulaşmamızı sağlar."

"sonsuzlukta çözüm yoktur"

"belirsizlik var"

"limit var"

Geri kalan öğrencilerden Hülya, Veysel, Derya, Ferhat, Üzeyir, Nevim, Harun, Ozan ve Resul'ün verdiği cevapların birbirine benzer ve "tek yönlü yapı", "TY" seviyesinde olduğu görülmüştür. Merve ve Okan'ın verdiği cevapların ise birbirine yakın ve "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesinde olduğu görülmüştür. Aşağıda ÇY+ seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından ders sürecinde Okan ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

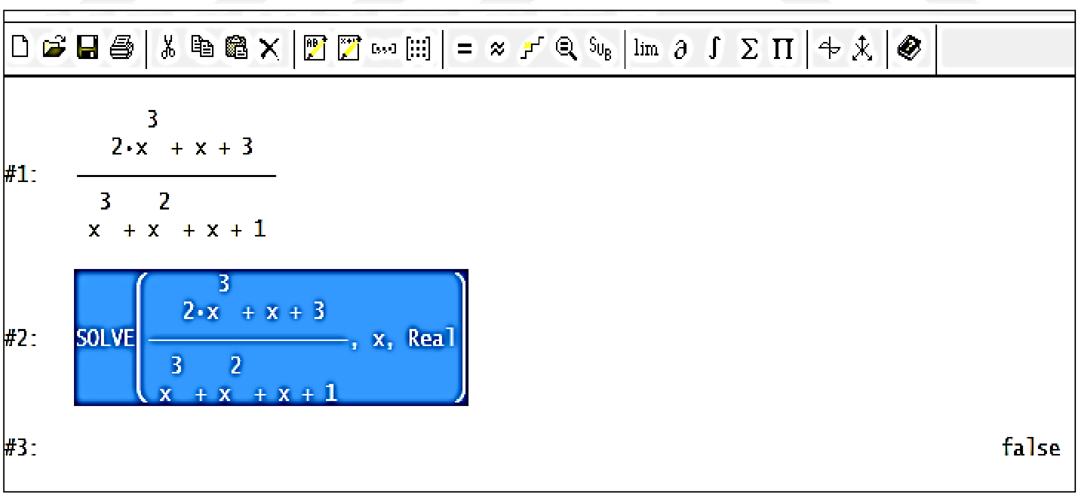
O: *Bu soru grubunun yer aldığı çalışma yaprağında verilen* $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ *fonksiyonunun limitini aramamız istenmişti.*

AÖ: *Neredeki limiti istenmişti?*

O: *Hocam x, -∞'a sağdan yaklaşırken var olan limiti istenmişti. Bunun için yapılması gereken -∞'un ε-komşuluğunda dolaşırken ve -∞ olmadan fonksiyonun alacak olduğu değeri bulmaktır. Bu limit değerini de Derive yazılımı ile bulabiliyorduk. Bu değer 2 olarak karşımıza çıkıyor.*

AÖ: *Peki, fonksiyonun -∞'daki değeri ile ilgili ne söyleyebilirsin?*

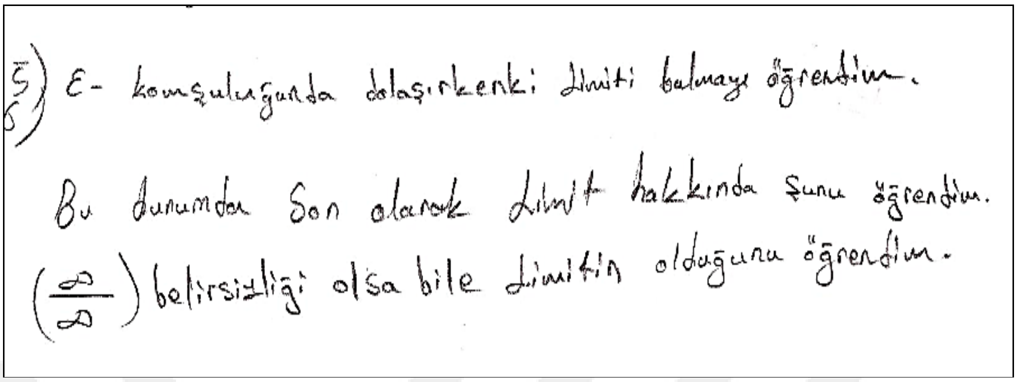
O: *İşte burada tıkanıyorum. (Derive yazılımında aşağıda verilen işlemleri yaptıktan sonra)*



Şekil 47. Okan'ın 3. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

O: *Burada da belirsizlik var çünkü Derive yine "false" dedi. Bu belirsizlik ise* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğidir. Zaten bunu daha önceden de bulmuştum. Limit var 2, belirsizlik var* $\frac{\infty}{\infty}$*… Şimdi bana limiti nasıl bulduğumu soracaksınız biliyorum! Derive yazılımının haricinde tabiî ki de…* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğinin bir çözüm kuralı vardı…*

Hatırladığım kadarıyla x^3'lerin katsayısını bölüyorduk işte limit burada budur "2". Bu tip bir şeydi işte hocam… $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinde limit var ve bulunabilir. (Söylediklerini çalışma yaprağına yazar)



Şekil 48. Okan'ın "İkinci soru grubu" sorularıyla ilgili 3. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Neden x^3'lerin katsayısını böldün?*

O: *Hocam çünkü bir şeylerin katsayısını bölme kuralı vardı burada da Derive yazılımı limiti 2 buldu. O halde x^3'lerin katsayısını bölmem gerekir diye düşündüm.*

AÖ: *Teşekkürler.*

Fonksiyonun sonsuzdaki çözümünü yazılım üzerinde yapıp "false" ifadesiyle karşılaşan Okan, bir önceki soru grubunda da aynı ifadeyle karşılaştığından şaşırmamıştır. Bu soru grubunda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğunu söyleyebilmiştir. Araştırmacı öğretmenin bir sonraki adımda soracak olduğu soruyu farkında olan Okan'ın doğru mantıkla açıkladığı kural ve kuralın doğruluğu dikkat çekicidir. Bu kurala ulaşmasında Derive yazılımının katkısının olması etkileyicidir. Birbiri ile tutarlı cevaplar veren öğrenci, fonksiyonun $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumunda limit değerini hesaplayabilmiştir. Kuralın kavramsal açıklamasını yapmada güçlük çeken Okan'ın cevapları İY'den uzaklaştırmıştır.

Bu soru grubuna benzer cevaplar veren Merve'nin cevapları da Okan'ın cevaplarıyla kavramsal anlamadan uzak olan fakat birden fazla yöne odaklanılan cevapları içeren "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir.

3. Çalışma yaprağının İkinci Soru Grubu içinde yer alan 5., 6. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 9 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 21 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY) ve 2 öğrencinin cevapları ise güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

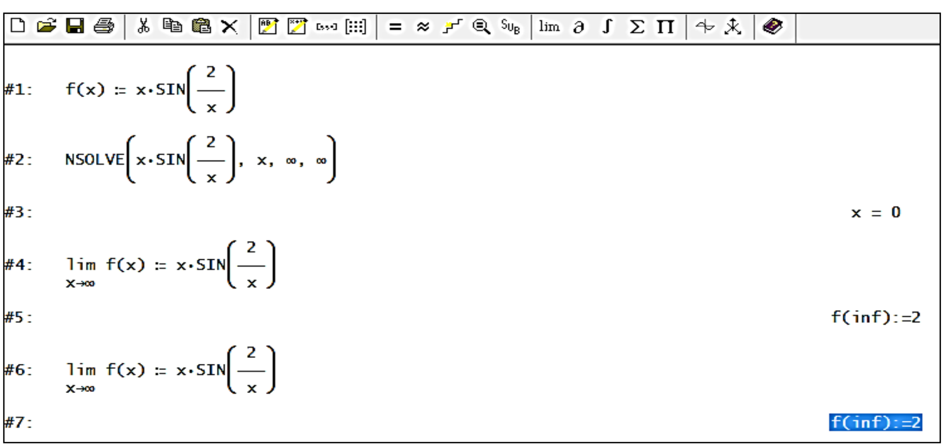
5. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 2., 3., 4. soruları incelendiğinde; MYO öğrencileri bu sorularda yer alan fonksiyonu Derive yazılımında tanımlamada zorluk çekmemiştir. Buna karşın birçoğu verilen $f(x) = x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunun x, ∞'a yaklaşırken alacağı değer hakkında herhangi bir fikir yürütememiştir. Bundan önce de belirtildiği gibi MYO öğrencileri limit ile ilgili sorularda sonsuzluk (∞) ifadesine sıkça yer verilmesinin limit kavramının anlaşılmasını güçleştirdiği düşüncesindeydiler. Ayrıca onlar için sorularda yer alan trigonometrik ifade bu anlaşılmazlığı daha da arttırmaktaydı.

Burada yer alan sorular incelendiğinde öğrencilerin yarısından çoğunun verdikleri cevapların tek yönlü yapıdan çok yönlü yapıya doğru yöneldiği görülmüştür. Bu çeşit cevaplara örnek olarak verilen Merve ve araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

M: *Hocam bu kez hem trigonometri hem de sonsuzluk (∞)… bu da olmaz ki!!! Herhalde bu soru benim için şimdiden bitmiştir… (Merve burada verilen soru hakkında fikir yürütemediğini dile getirmeye çalışıyordu)*

AÖ: *Bence sen bu soruyu çözebilecek kapasitedesin. İstersen önceki çalışmalarında yaptığın gibi her bir çalışma adımını sesli yorumlayarak aşama aşama yapmaya çalış.*

M: *Peki hocam… Yine x yerine ∞ ifadesini yazmaya çalıştığımızda bir belirsiz ifade ile karşılaşıyoruz. İşte bakın hocam bu ifadede de bir belirsizlik var. Şimdi Derive yazılımında bunun limitine bakalım. (Derive'de aşağıdaki işlemleri yaptı)*

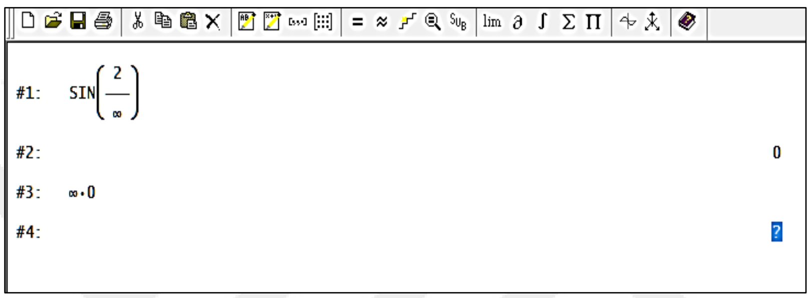


Şekil 49. Merve'nin 5. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

M: *İşte hocam bunun da limiti var ve limit değeri 2. Oysa burada hem sinüs var hem de x var…*

AÖ: *Evet söylediklerin doğru Merve, peki az önce burada bir belirsizliğin olduğunu söyledin bu belirsizlik hakkında biraz bilgi verebilir misin?*

M: *Hımm… Şöyle düşünürsek limit olmazsa x ve $sin\frac{2}{x}$ iki tane ayrı fonksiyon olarak alınabilir. Evet, burada x yerine ∞ yazarsak x=∞ ve $sin\frac{2}{\infty}$ elde edilir. Derive'de işlemleri ayrı ayrı yapmaya çalışıp çözüm bulsak mesela! (Merve bunları söylerken bir yandan da Derive'de aşağıdaki işlemleri yaptı)*



Şekil 50. Merve'nin 5. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemlerin devamı

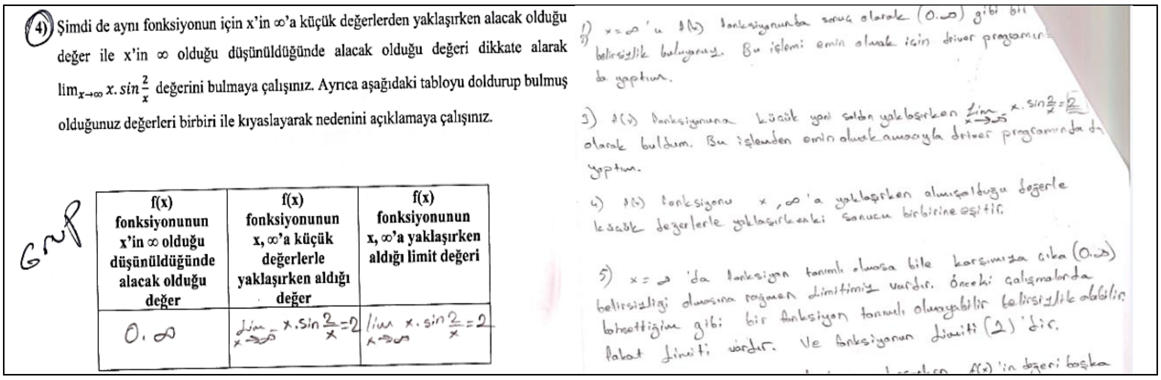
M: *Hocam sonsuzluk için bunlar yeterli zaten limiti bir kenara attığımızda 0 ve ∞'un çarpımı "?" oluyor. Eee şimdi ne yapabilirim hocam?*

AÖ: *İstersen şu kenara attığın limit değerini $\frac{2}{\infty}$ ifadesi için düşünmeye çalış!*

M: *Anladım bu ifadede ($\frac{2}{x}$), x'in ∞ için limitini aldığımızda sonuç sıfır (0) oluyordu. Şimdi "sin 0" değerini incelediğimizde "sin 0=0"dır. Doğru söylüyorum değil mi hocam? (Yaptığı çalışmaları ayrıca çalışma yapraklarına yazmaya çalışan Merve attığı her adımın doğruluğunun onaylanmasını bekliyordu)*

AÖ: *Doğru Merve, doğru! Devam et… bulacak olduğun belirsizliği merak ettim?*

M: *Hocam işte belirsizlik $x.sin\frac{2}{x}$ = ∞.0 … Başka bir şey düşünemiyorum. Daha soru sormayın lütfen hocam bunun limitini de Derive yazılımı buldu işte. O da 2. Fonksiyon istenen noktada hiçbir şey olmazken limit alıyorsun ve 2 gibi net bir değer çıkıyor. Matematik işte… Ne olacağı belli değil. (bu aşama ile çalışma yaprağında bu soru grubuna dair yaptığı çalışmalar ve yorumları aşağıdaki gibidir)*



(4) Şimdi de aynı fonksiyonun için x'in ∞'a küçük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu değer ile x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değeri dikkate alarak $\lim_{x\to\infty} x.\sin\frac{2}{x}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunun x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değer	f(x) fonksiyonunun x, ∞'a küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x, ∞'a yaklaşırken aldığı limit değeri
0. ∞	$\lim_{x\to\infty} x.\sin\frac{2}{x}=2$	$\lim_{x\to\infty} x.\sin\frac{2}{x}=2$

1) x = ∞'u f(x) fonksiyonunda sonuç olarak (0.∞) gibi bir belirsizlik buluyoruz. Bu işlemi emin olmak için driver programında da yaptım.

3) f(x) fonksiyonuna küçük yani soldan yaklaşırken $\lim_{x\to\infty} x.\sin\frac{2}{x}=2$ olarak buldum. Bu işlemden emin olmak amacıyla driver programında da yaptım.

4) f(x) fonksiyonu x, ∞'a yaklaşırken almış olduğu değerle küçük değerlerle yaklaşırkenki sonucu birbirine eşittir.

5) x = ∞ 'da fonksiyon tanımlı olmasa bile karşımıza çıkan (0.∞) belirsizliği olmasına rağmen limitimiz vardır. Önceki çalışmalarda bahsettiğim gibi bir fonksiyon tanımlı olmayabilir belirsizlik olabilir fakat limiti vardır. Ve fonksiyonun limiti (2)'dir.

Şekil 51. Merve'nin "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 5. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: Teşekkürler Mervecim.

Merve'nin bu soru grubu ile ilgili çalışmaları ve yorumları incelendiğinde ders başlangıcındaki görüşleri ile etkinliğin tamamlanmaya yaklaşması ve diyaloglar sonucundaki görüşleri arasındaki fark kolayca görülebilmektedir. Çünkü Merve çalışma yaprağını eline alır almaz trigonometrik bir ifade ile ∞'luk ifadesini bir arada görünce soruyla ilgili herhangi bir fikir yürütemeyeceğini belirmiştir. Ayrıca x yerine ∞ yazarak elde edeceği değerle ilgilenen Merve'nin cevaplarının öncelikli olarak TY seviyesinde olduğunu görmekteyiz. Çalışma sürecinde Derive yazılımı desteği ile vermiş olduğu cevaplar öğrencinin bir adım daha ilerlediğini göstermektedir. Merve bu soru grubunda istenen limiti bulabilmek için fonksiyonu parçalayabilmiştir. Ayrıca fonksiyonun limitini bir kenara bırakarak parçaladığı bu fonksiyonu incelemeyi düşünürken araştırmacı öğretmenin verdiği ufak bir yönerge ile ∞'a yaklaşırken x değerinin ∞ olduğunu, $\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu ve $sin\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu bulabilmiştir. Böylece verilen noktada fonksiyonun tamamı düşünüldüğünde bir belirsizlik olduğuna ve bu belirsizliğin (∞.0) olduğuna ulaşabilmiştir. Buna rağmen limiti bulmak için Derive yazılımı olmadan çözüm yapamayışı öğrencinin bu konuda desteğe ihtiyacının olduğunu göstermektedir. Merve verilen noktada fonksiyonun belirsizlik durumuna ulaşmış olsa bile bu noktada bulmuş olduğu limit ile ilişkilendirmede başarılı olamamıştır. Bu ise, elde edilen belirsizlik durumunu ortadan kaldırmadan yazılım desteğiyle limitin varlığına ulaşan Merve'nin, sahip olduğu bilgi parçalarını birleştirmede başarılı olamadığını göstermiştir. Bu açıdan bakıldığında ve çalışma yaprağına yazdıkları dikkate alındığında Merve'nin cevapları, aralarında ilişki kurulmaksızın birden fazla veriyi içerdiğinden "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir.

5. çalışma yaprağının 2., 3., 4. sorularına verilen bütün öğrenci cevapları incelendiğinde 19 öğrenci Merve'nin cevaplarına benzer cevaplar vermiştir. Diğer

öğrencilerden 11’inin verdiği cevapların da birbirine yakın ve “tek yönlü yapı”, “TY” seviyesinde olduğu görülmüştür. Geri kalan 2 öğrenci ise soru grubunun cevabı ile ilişkili olmayan noktalara odaklanmıştır.

Aşağıda TY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından Ozan ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

O: *Hocam zaten matematikten bir şey anlamıyorum bu sorudan ne anlayabilirim ki? Sinüs var, ∞’luk var, limit var….. Hocam ben bunu imkânsız yapamam.*

AÖ: *Lütfen Ozan, birazcık azimli olursan bu soruları anlayabilecek olduğunu düşünüyorum. Öncelikli olarak soruları sırayla okur musun? Zaten verilen yönergeler seni yönlendirecektir.*

O: *Peki hocam, şimdi x yazan yerlere ∞ mu yazacam? (Ozan bu süreçte çalışma yaprağında yer alan tabloyu doldurmaya başlamıştı.)*

AÖ: *Ozan, şimdi Derive yazılımını kullanarak limit değerini de bulabilir misin?*

O: *Hocam limit dedik, ∞ dedik….. aaa buldu! 2 budu! Bu limit mi? (Ozan bulmuş olduğu 2 değerinin limit olmasına şaşırmıştı. Çünkü O’na göre x, ∞’a yaklaşıyorsa limit ∞ olmalıydı. Bu aşamada çalışma yaprağında doldurduğu tablo ve çalışma yaprağının kenarlarına aldığı notlar aşağıdaki gibidir.)*

f(x) fonksiyonunun x’in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değer	f(x) fonksiyonunun x, ∞’a küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x, ∞’a yaklaşırken aldığı limit değeri
$\infty \cdot \sin\frac{2}{\infty} = \infty$	$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{2}{x} = 2$	$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{2}{x} = 2$

∞ olduğunu düşününce değer yok.
Limit var Derive kullanınca.

Şekil 52. Ozan’ın “ikinci soru grubu” sorularıyla ilgili 5. çalışma yaprağı üzerinde yaptığı işlemler

Çalışma yaprağını eline alır almaz trigonometrik bir ifade, ∞’luk ve limitle karşılaşan Ozan, bu soru grubu ile ilgili herhangi bir fikir yürütemeyeceğini belirmiştir. Bu süreçte yapı öncesi seviyesinde verdiği cevapları x yerine ∞ yazarak elde edeceği değerle ilgilenmeye çalışmasıyla gelişmeye başlamıştır. Ayrıca araştırmacı öğretmenin yönlendirmesi ve Derive yazılımı yardımıyla limit değerini bulan Ozan’ın cevapları TY seviyesine yerleştirilmiştir. Ayrıca Songül, Seher, Resul, Eyüp, Nevim, Ahmet, Engin, Ferhat, Erdal ve Remzi’nin de cevapları benzer cevaplar olup TY seviyesine yerleştirilmiştir.

Çalışılan soruda limit aramaktan çok soru ile ilişkisi olmayan noktalara odaklanan Derya ve Hülya ise sorunun yanlış olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Derive yazılımında rastgele işlemler yapmaya çalışmıştır. Araştırmacı öğretmeni gördüklerinde soru ile ilgilenmeye başlayan bu iki öğrencinin verdikleri cevaplar “yapı öncesi”, “YÖ” seviyesine yerleştirilmiştir.

5. çalışma yaprağının İkinci Soru Grubu içinde yer alan 2., 3., 4. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 2 öğrencinin cevapları yapı öncesi (YÖ), 11 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY) ve 19 öğrencinin cevapları ise çok yönlü yapı (ÇY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

5. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 5. sorusunu incelediğimizde MYO öğrencilerinin $\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x}$ çözümünde belirsizlik durumunu dikkate almadan x yerine ∞ yazmaya çalıştığı görülmüştür. Sorunun yer aldığı 5. çalışma yaprağını inceleyerek limitle ilgili yeni öğrenilen şeyin ne olduğunu düşünen öğrencilerin çoğu ∞’luk ifadesinden hoşlanmadığını belirtmiştir. (∞.0) belirsizliğine ulaşmada başarılı olamamıştır.

Bu soru ile ilgili Nevim ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

N: *Hocam burada x=∞ için bir değer yok. Zaten sin fonksiyonu var ve buradan sonuç ∞ olur… (söylediklerinin onaylanmasını bekleyen Nevim, araştırmacı öğretmenin gözlerine bakıyordu)*

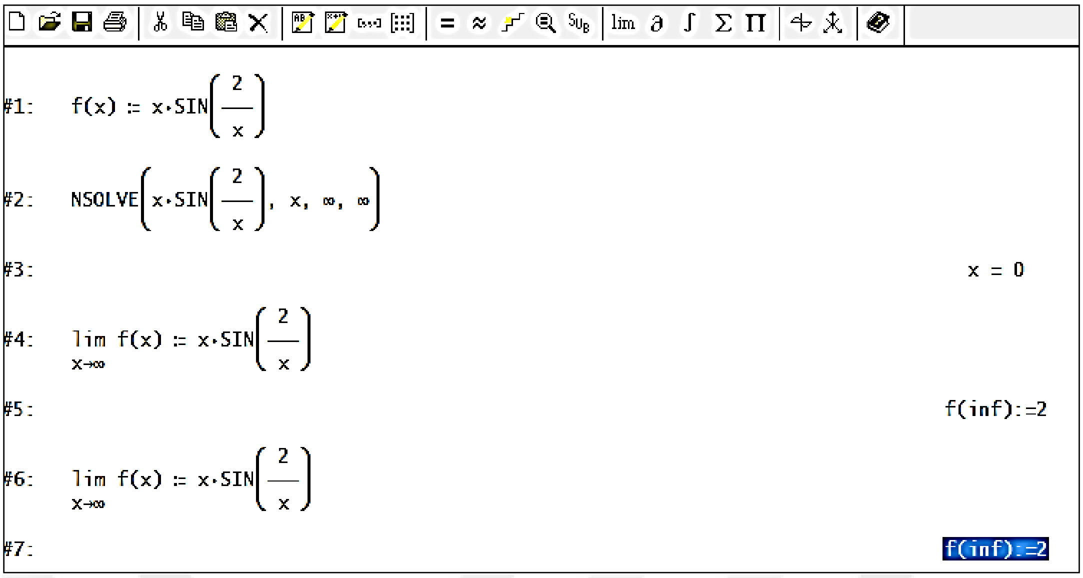
AÖ: *Nevim! Bu söylediğinin doğru olabilmesi için bu fonksiyonda “$sin\frac{2}{x}$” olmalıydı değil mi?*

N: *Evet… Anlıyorum hocam burada $sin\frac{2}{\infty}$ olamaz. Bu bir belirsizliktir. Burada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği mi vardı?... Herhalde yanlış söyledim…(∞.∞)! (Nevim, soru grubunda yer alan belirsizliği bulmada zorluk çekmesine rağmen belirsizlik çeşitlerini sıralarken doğru belirsizliğe ulaşmıştır)*

N: *… En iyisi belirsizlik çeşitlerini saymak… ($\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,\ldots 0.\infty$) evet burada (∞.0) belirsizliği vardı…*

AÖ: *Peki, bu fonksiyonun limiti var mıdır?*

N: *Hocam mutlaka vardır. Şimdi bunu Derive’de yaparsak limiti buluruz. (Nevim yazılımda fonksiyonu tanımlayarak ilk önce verilen fonksiyonun ∞ için çözüm kümesini bulduktan sonra x, ∞’a yaklaşırken limit değerini aşağıdaki gibi belirledi.)*



Şekil 53. Nevim'in 5. çalışma yaprağının "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

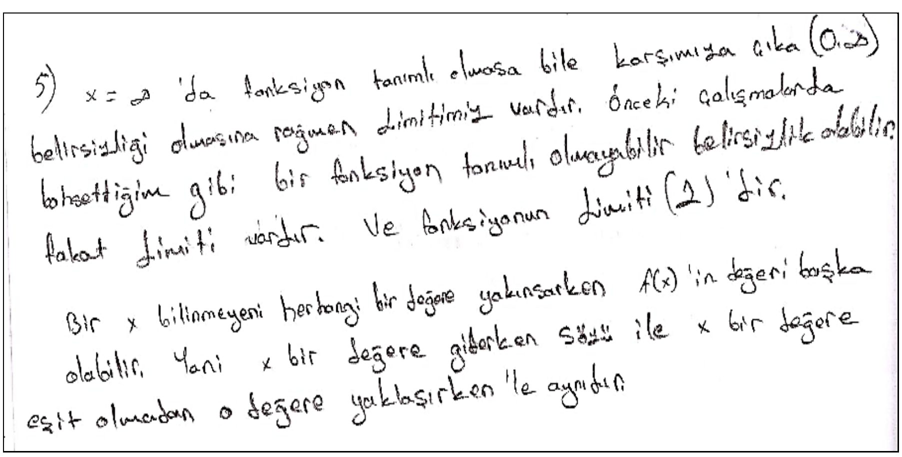
N: *Söylemiştim limiti var ve 2.*

AÖ: *Belirsizliğe ne oldu?*

N: *Zaten bu belirsizliklerden bir şey anlamıyorum. Limit var fakat belirsiz! (∞.0) belirsizliği!… Hocam bu sorularda neden değerleri yerine yazamıyoruz?*

AÖ: *Peki değeri yerine yazamıyorsak bunun limitini nasıl hesaplıyoruz? Bilgi verebilir misin? Yani yeni olarak ne öğrendin, Nevim? Öğrendiklerini çalışma yaprağına yazabilir misin?*

N: *Şimdi yeni olarak… (Bu sürece dair Nevim'in çalışma yaprağına yazmış oldukları aşağıdaki gibidir)*


5) x = ∞ 'da fonksiyon tanımlı olmasa bile karşımıza çıka (0.∞) belirsizliği olmasına rağmen limitimiz vardır. Önceki çalışmalarda bahsettiğim gibi bir fonksiyon tanımlı olmayabilir belirsizlik olabilir fakat limiti vardır. Ve fonksiyonun limiti (2)'dir.

Bir x bilinmeyeni herhangi bir değere yakınsarken f(x)'in değeri başka olabilir. Yani x bir değere giderken sözü ile x bir değere eşit olmadan o değere yaklaşırken 'le aynıdır.

Şekil 54. Nevim'in "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 5. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Bulduğun 2 değerini nasıl elde ettiğine dair yazılım haricinde bilgi verebilir misin?*

N: *… bilemiyorum hocam! Bir yöntemi var fakat ne olduğunu hatırlayamıyorum.*

Nevim'in verdiği cevaplar incelendiğinde fonksiyonun ∞'luktaki belirsizliği bulmakta zorlandığını görmekteyiz. Aklına gelen belirsizlik çeşitlerini sıralayıp sorudaki belirsizliğe ulaşmaya çalışan Nevim, verdiği cevapların TY seviyesinde olduğunu göstermektedir. Oysa Nevim'in yazılım üzerinde yaptığı çalışmalar sonucu verdiği cevaplar incelendiğinde x, ∞'a yaklaşırken $sin\frac{2}{x}$ değerinin 0 olduğunu söyleyebilmesi, yazılım üzerinde yaptığı işlemler ve çalışma yaprağına yazdıkları cevaplarının ÇY seviyesinde olmasa da ÇY seviyesinden biraz daha alt derecede olduğunu göstermektedir. Bu açıdan bakıldığında Nevim tarafından verilen cevaplar belirsizlikteki limit değerini bulmaya yönelik ilişki kurulmayan verileri içerdiğinden, bu cevaplar "zayıf çok yönlü yapı", "ÇY-" seviyesine yerleştirilmiştir.

5. çalışma yaprağının 5. sorusuna verilen cevapların tamamı incelendiğinde 18 öğrencinin cevaplarında Nevim'in cevaplarına benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Geri kalan öğrencilerden 13'ünün cevaplarının birbirine yakın "tek yönlü yapı", "TY" seviyesinde olduğu ve 1 öğrenci cevabının ise TY seviyesinde başlayan cevaplarının diyaloglar sonucu "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine geliştiği görülmüştür. Aşağıda TY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından Engin ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloğa yer verilmiştir.

E: *Şimdi biz bu etkinlikte limit'i öğrendik.*

AÖ: *Limiti öğrendik derken neyin limitini öğrendik?*

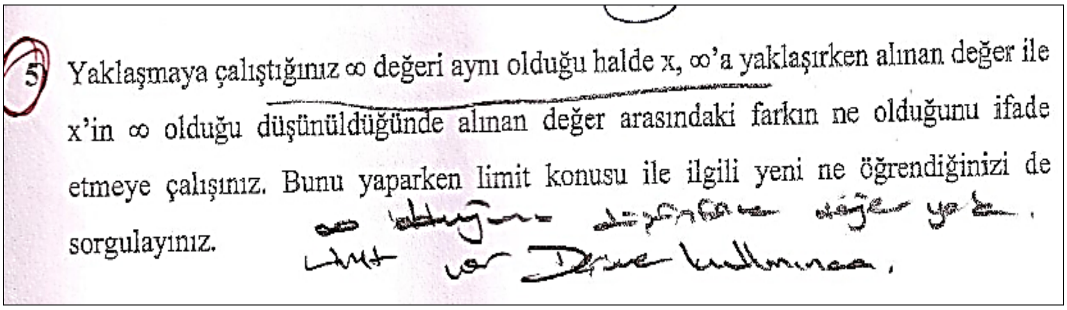
E: *Hocam burada ∞'a yaklaşırken limit değerini bulmayı öğrendik. Çünkü sonsuz olunca çözüm olmuyor.*

AÖ: *Peki Engin, burada çözüm yoksa limit nasıl oluyor?*

E: *…. Limit yok mudur hocam?*

AÖ: *Az önceki çözümünde limit bulamadın mı?*

E: *Evet! Derive'de limit var. ∞ olduğu düşünüldüğünde değer yok. Yaa hocam bu sonsuzluk olunca hiçbir şey yapamıyorum. (Bu sürece dair Engin'in çalışma yaprağına yazdıkları aşağıdaki gibidir.)*


5) Yaklaşmaya çalıştığınız ∞ değeri aynı olduğu halde x, ∞'a yaklaşırken alınan değer ile x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alınan değer arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız. Bunu yaparken limit konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi de sorgulayınız.

∞ olduğundan değer yok. Limit var Derive kullanınca.

Şekil 55. Engin'in "ikinci soru grubu" sorularıyla ilgili 5. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Belirsizlik durumlarından (∞.0) belirsizliğinde limitin nasıl bulunması gerektiği ile ilgili bilgi verilmesi beklenen bu soru grubunda Engin'in ∞'luk ifadesi ile ilgilendiği görülmüştür. Ayrıca verilen fonksiyon için önceki aşamada bulmuş olduğu limit değerinden bağımsız ifadeler kullanan Engin, Derive olmasa limit değerinin bulunamayacağını belirtmiştir. Belirsizlik durumuna değinmeyen Engin'in vermiş olduğu cevaplar sorunun tek bir yönüne odaklandığından "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir. Bu soru grubuna benzer şekilde cevaplar veren Remzi, Erdal, Hacer, Hazal, Eyüp, Derya, Ferhat, Songül, Üzeyir, Resul, Hülya ve Ahmet'in cevapları da "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir.

5. çalışma yaprağının İkinci Soru Grubu içinde yer alan 5. sorusuna ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 13 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 18 öğrencinin cevapları zayıf çok yönlü yapı (ÇY-) ve 1 öğrencinin cevabı ise çok yönlü yapı (ÇY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Genel olarak; fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle diyalogları derinlemesine incelendiğinde, beklenen öğrenmenin gerçekleşemediği görülmüştür. Sonsuzluk ifadesi ile karşılaştıklarında çözüm yapamayacaklarını belirten öğrenciler belirsizlik durumlarına ulaşmada güçlük çekmiş olup cevapları limit tanımı ile sınırlı kalmıştır. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, aynı sorular Derive ortamına taşınıp etkinliğin tamamlanması ve diyaloglar sonucu ÇY seviyesine dönüştüğü görülmüştür. Yazılımı kullanılmadan önce belirsizlik durumu hakkında fikir yürütemeyen öğrenciler, yazılımı kullanıp limit değerine ulaştıklarında "çözümü olmayan fonksiyonların da limiti olabilir" şeklinde doğru ifadeler kullanmaya başlamışlardır. Verdikleri cevaplar birbirinden kopuk bilgi parçası olmaktan öteye geçemese bile BCS destekli öğrenme ortamında çalışan MYO öğrencilerinin bazı düşüncelerinin, ders sürecindeki diyaloglarda geliştiği görülmüştür. Aşağıda bu gibi durumlara örnek olması açısından Sadullah ve araştırmacı öğretmen arasında 5. çalışma yaprağının İkinci Soru Grubunda yer alan 5. sorusunda geçen diyaloğun bazı bölümlerine yer verilmiştir;

Dersin başlangıcında yazılıma alışma sürecinde;

S: *Hocam burada ∞ eksi ile çarpılacak mı? Ya da limit sonsuzluktur diyebilir miyiz?*

AÖ: *Soruyu tekrar incele istersen.*

S: *"limit" ile ilgili yeni öğrendiğim şeyi soruyor. (5. Çalışma Yaprağının 5. sorusunu gösterir)*

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin verdiği cevaplar sorunun tek bir yönüne odaklanarak fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit bulmayla ilgili herhangi bir ifadeye rastlanmadığından öğrencinin tek yönlü yapı "TY" sevisinde düşündüğü söylenebilir. Bundan sonraki süreçte aynı çalışma yaprağının sorularını Derive ortamına taşıyan Sadullah ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

AÖ: *O halde yeni öğrendiğin şey nedir? Sesli olarak düşünebilir misin?*

S: *Derive yazılımında limit bulabiliyoruz. Grafik çizebiliyoruz. Mesela bunun limiti 2'dir. (verilen fonksiyonun limitini yazılımda bulur)*

AÖ: *Sadece bunlar mı?*

S: *Hayır hocam mesela burada -∞ var ve fonksiyon çok karışık. Bu -∞ x yerine yazılmaz. Yazsak bile bir sonuç bulamayız. Oysa bu yazılım bizim limit bulmamızı ve grafik çizmemizi sağlıyor. Belirsiz bile olsa fonksiyonların limitini olduğunu bulabiliyoruz. Grafiğini çizip küçültüp-büyütebiliyoruz.*

Bu diyalogda Sadullah'ın verdiği cevaplar belirsizlik durumunu incelemeye yönelik olmasa da birbirinden kopuk bilgi parçaları içerdiğinden çok yönlü yapı "ÇY" sevisinde düşündüğü söylenebilir. Ayrıca aynı çalışma sorusu için yeni dönem ders sürecinde Sadullah ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir:

AÖ: *Sadullah, geçen dönem incelemiş olduğun* $f(x)=\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ *fonksiyonunu -∞ için inceleyebilir misin? Burada yeni olarak neler öğrenmiştin?*

S: *Evet hocam bu fonksiyonu hatırlıyorum. Limitini bulmuştuk grafiğini de incelenmiştik. (Sadullah bu çalışma sorusu ile karşılaşır karşılaşmaz önünde bulunan bilgisayara yönelip yazılımı kullanmıştır) Aslında bu fonksiyon belirsiz hem de* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizi! Buna rağmen limitinin olabileceğini öğrenmiştik.*

Sadullah ile araştırmacı öğretmenin bilgisayar destekli öğrenme ortamında ders sürecinde geçen diyaloğu ile yeni dönem ders sürecinde geçen diyaloğu arasında büyük fark olmamasına rağmen, ders süreci içerisinde sorulan sorularda Sadullah sözel ifadeler kullanırken, yeni dönem ders sürecinde öncelikle yazılımı kullandığı görülmüştür.

Yukarıda örnek olarak verilen diyaloglara ilave olarak araştırmacı öğretmenin ders sürecinde aldığı notlardan Derive yazılımı kullanımının anlaşılır ve BCS ortamının öğrenmeye teşvik edici olduğu görülmüştür. MYO öğrencileri ile geçen diyaloglarda araştırmacı öğretmenin aldığı bu notlardan bazıları aşağıda örnek olarak verilmiştir:

“belirsiz durumlarda limit olabilirmiş…”

“çözümü olmayan fonksiyonların limiti olabilir…”

“çözüm olmayınca Derive’dan limiti var mı diye bakıyoruz ve limiti oluyor…”

“Sonsuzda belirsizlikler vardır ve bu belirsizlikler $(\frac{\infty}{\infty})$, $(\infty.0)$, $(\frac{0}{0})$ *gibidir. Bunlarda çözüm yapamayınca Derive’da limit var mı diye bakabiliriz.” “Derive ile işlem yapmak çok zevkli… hatta fonksiyonun çözümü olmasa bile Derive’da yazıyorsun ve limit buluyorsun…”*

“fonksiyonda x gördüğümüz yere sonsuz yazınca çözüm olmuyor. Böyle durumlarda x, a’ya yaklaşırken limit bulmamız gerekir. Bunun için formüller var fakat Derive sonucu hemen görmemizi sağlıyor.”

“bazen yanımdaki arkadaşımla iddiaya girerek çalışma yapraklarındaki sorular için Derive’da değişik değişik limitler bulduk… Mesela o limit 1 dedi ben ∞ dedim ve Derive’da limit hesaplayıp kontrol ettik.”

Yukarıdaki cevaplar bulundukları ortamda birbirleriyle fikir alış-verişi yapabilen MYO öğrencileri için, bilgisayar destekli öğrenme ortamının derse katılımı sağlamada etkili olduğunu göstermektedir. Öğrenciler Derive yazılımı ile yakından ilgilenmiştir. Teorik olarak anlatılan derslerde uyuyan bazı öğrencilerin bu öğrenme ortamında uyumadan Derive yazılımı ile ilgilendiği görülmüştür. Bu bağlamda Derive yazılımının öğrenciler için dikkat çekici ve eğlenceli olduğu açıktır.

Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, Derive yazılımındaki çalışmaları ve araştırmacı öğretmenle geçen diyaloglarının tamamı incelendiğinde, öğrencilerde beklenen öğrenmenin gerçekleşmediği görülmüştür. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, etkinliğin tamamlanması ve diyaloglarla ÇY seviyesine çıktığı görülmüştür. Sonuç olarak İkinci Soru Grubu sorularına verilen cevapların tümü SOLO ile değerlendirildiğinde öğrencilerin verdiği cevaplardan 2’si yapı öncesi (YÖ), 52’si tek yönlü yapı (TY), 18’i zayıf çok yönlü yapı (ÇY-), 85’i çok yönlü yapı (ÇY) ve 3’ü ise güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Özet

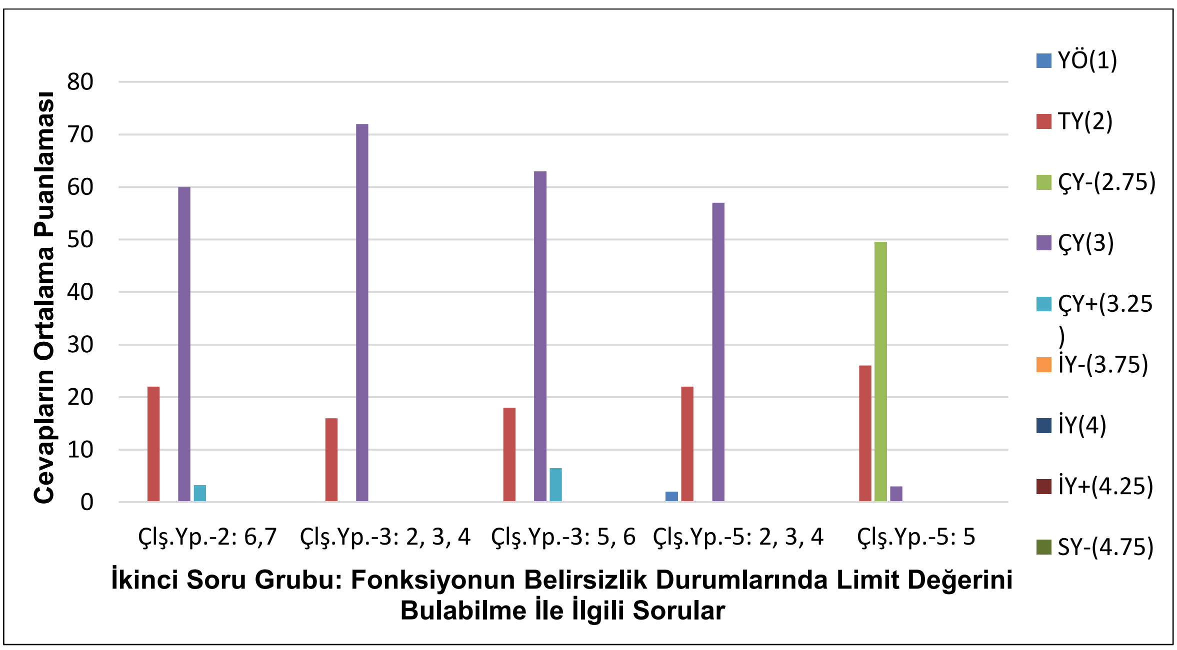
Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili İkinci Soru Grubu sorularını incelediğimizde MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarında, ekran çıktılarında ve diyaloglarda verdikleri cevapların genel olarak tek yönlü yapı (TY) ile çok yönlü yapı (ÇY) seviyelerinde olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tabloda MYO öğrencilerinin fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulmayı öğrenmelerine yönelik vermiş oldukları cevapların SOLO taksonomisine göre seviyelerinin öğrenci cevap sayısı belirtilmiştir. Tabloda yer alan (-) işareti zayıf yapıları, (+) işareti ise güçlü yapıları temsil etmektedir. Bu seviyeler altında verilen öğrenci cevap sayıları o öğrencilerin ulaştıkları en üst seviyeyi göstermektedir. Böylece bu grupta yer alan sorulara verilen cevapların seviyesi genel olarak temsil edilmektedir.

Tablo 29. İkinci Soru Grubu: SOLO Seviyesine Göre Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerini Bulabilme ile İlgili Öğrenci Cevap Sayısı

Soru Grubunun Adı	Çalışma Yaprağı	Soru No	SOLO Seviyeleri														
			-	YÖ (1)	+	-	TY (2)	+	-	ÇY (3)	+	-	İY (4)	+	-	SY (5)	+
İkinci Soru Grubu	2	6, 7					11			20	1						
	3	2, 3, 4					8			24							
	3	5, 6					9			21	2						
	5	2, 3, 4		2			11			19							
	5	5					13		18	1							

Yukarıdaki tablo incelendiğinde 2. Çalışma Yaprağının 6., 7. soruları, 3. Çalışma Yaprağının 2., 3., 4., 5., 6. soruları ve 5. Çalışma Yaprağının 2., 3., 4., 5. sorularının İkinci Soru Grubu içerisinde değerlendirildiği görülmektedir. Öğrencilerin bu sorulara verdiği cevaplardan toplam 2 yapı öncesi (YÖ, 1), 52 tek yönlü yapı (TY, 2), 18 zayıf çok yönlü yapı (ÇY-, 2.75), 85 çok yönlü yapı (ÇY, 3) ve 3 güçlü çok yönlü yapı (ÇY+, 3.25) seviyesinde öğrenme çıktısı elde edilmiştir. Böylece fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda elde edilen belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili incelenen bu sorularda MYO öğrencilerinin verdikleri cevapların genel olarak tek yönlü yapı (TY, 2) ile çok yönlü yapı (ÇY, 3) seviyelerinde olduğu belirtilebilir. Bu durum MYO öğrencilerinin, belirsiz durumlarda limit bulunabilmesine yönelik sorulan soru gruplarında sorunun tek bir yönüne odaklandığını ve birbirinden kopuk bilgi parçalarını birbiriyle tutarlı şekilde ilişkilendirmede başarılı olamadığını ortaya çıkarmaktadır.

Tablo 29'da verilen veriler ve bu verilere ait veri analizleri incelenerek MYO öğrencilerinin bu kazanım ile ilgili her bir çalışma sorusuna verdikleri cevapların ortalama seviyesi belirlenmiştir. Ortaya konan bu ortalama seviye ilgili başlık altındaki her soruya bu seviyede cevap verileceği anlamına gelmese de genel bir bakış açısı sunmaktadır. Bu doğrultuda diğer başlıklar arasında kıyas yapabilmeyi kolaylaştırmak ve genel bir bakış sunmak açısından öğrenci sayıları doğrultusunda SOLO seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması aşağıdaki grafik ile özetlenmiştir.



Grafik 2. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili solo seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması

Grafik 2, fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme ile ilgili 2. Çalışma Yaprağının 6., 7. sorularına verilen cevaplardan 11'inin tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 22 (TY), 20'sinin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 60 (ÇY), 1'inin güçlü çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 3.25 (ÇY+) puanlamasına; 3. Çalışma Yaprağının 2., 3., 4. sorularına verilen cevaplardan 8'inin tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 16 (TY), 24'ünün çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 72 (ÇY) puanlamasına; 3. Çalışma Yaprağının 5., 6. sorularına verilen cevaplardan 9'unun tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 18 (TY), 21'inin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 63 (ÇY), 2'sinin güçlü çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 6.5 (ÇY+) puanlamasına; 5. Çalışma Yaprağının 2., 3., 4. sorularına verilen cevaplardan 2'sinin yapı öncesi seviyesinde olmasının ortalama 2 (YÖ), 11'inin tek yönlü yapı seviyesinde olması ortalama 22 (TY), 19'unun çok yönlü yapı seviyesinde olması ortalama 57 (ÇY) puanlamasına; 5. Çalışma Yaprağının 5. sorusuna verilen cevaplardan 13'ünün tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 26 (TY), 18'inin zayıf çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 49.5 (ÇY-) ve 1'inin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 3 (ÇY) puanlamasına karşılık geldiğini göstermektedir.

Yukarıda bu grubu özetlemek için verilen tablo, grafik ve diyaloglar süreçler halinde incelendiğinde, yazılımı kullanmaya başlamadan önce kâğıt-kaleme yönelen öğrencilerin, soruların bir yönüne odaklanan cevaplar verdiği, yazılımın kullanılmasıyla verilen cevapların geliştiği ve birbirinden bağımsız anlamlı bilgi parçalarını içerdiği görülmüştür. Bu durum başlangıçta tek yönlü düşünme seviyesinde verilen öğrenci cevaplarının bilgisayar destekli öğrenme ortamında gelişerek çok yönlü düşünme seviyesinde olduğunu göstermektedir. Bu anlamda BCS ortamı, MYO öğrencilerinin "fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulma" ile ilgili öğrenme sürecine katkı sağlamıştır. Ayrıca yeni dönem ders sürecinde öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları çözmek için doğrudan yazılıma yönelmiştir. Derive yazılımı olmadan limit bulmakta güçlük çeken öğrencilerin yazılıma yönelmeleri öğrenme sürecinde teknolojiye olan eğilimin arttığını göstermektedir.

4. 3. Üçüncü Soru Grubu: Fonksiyonun Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulabilme ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında Üçüncü Soru Grubu soruları ve sürece etkisi ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir soru için MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yapraklarına yazdıkları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle aralarında geçen diyalogları ayrı ayrı incelenerek MYO öğrencilerinin fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilmeleri doğrultusunda verdikleri cevaplar ortaya çıkarılmıştır. Bu cevaplar incelenip birbirine benzer olan ve aynı ifadeleri içeren öğrenci cevapları seçilerek bulgular oluşturulmuştur. Aşağıda Üçüncü Soru Grubu sorularına örnek olarak seçilen öğrenci cevaplarına yer verilmektedir.

2. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 8., 9. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonun grafiğini Derive yazılımında yer alan grafik çizme menüsü  yardımıyla çizmekte zorluk çekmediği görülmüştür. Ayrıca bu sorularda yer alan fonksiyonun x=1'de tanımsız olması grafik çiziminde MYO öğrencilerinin merakını arttırmıştır. Grafik çiziminden önce bulmuş oldukları limit değerini grafik üzerinde görüp-göremeyeceklerini merak etmişlerdir.

Bu sorular ile ilgili Medine ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

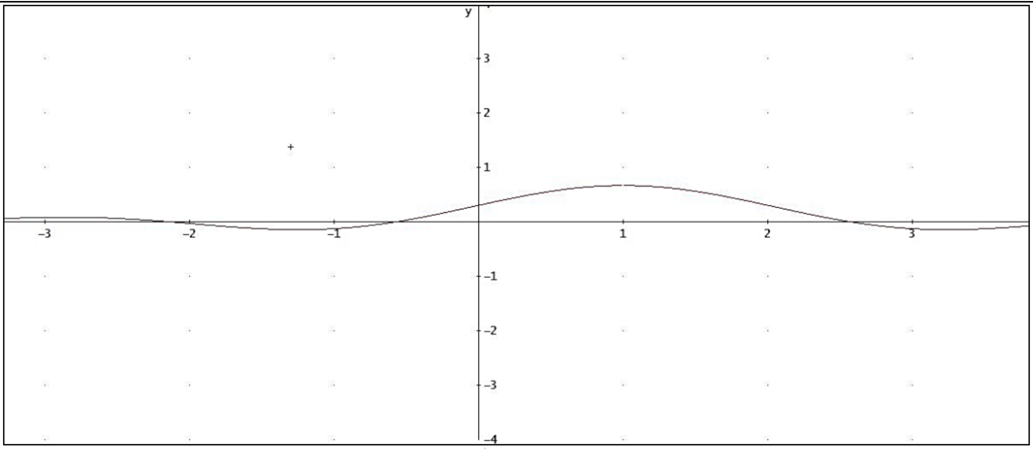
M: *Hocam bu fonksiyonun grafiği sinüs fonksiyonunun grafiğine benziyor mu?*

AÖ: *Bilemiyorum, sen ne düşünüyorsun?*

M: *…Bence benzemeli, çünkü burada sinüs ifadesinden başka 3x-3 var. (Medine bu düşüncesini belirtirken araştırmacı öğretmenden onay bekliyordu. Oysa en başında böyle bir düşüncesinin olması bile araştırmacı öğretmenin MYO öğrencisinden beklemediği bir düşünceydi. Bu durum MYO öğrencilerini düşünmeye yöneltmenin faydalarından biri olarak gösterilebilir.)*

AÖ: *Devam et Medine!*

M: *Ben en iyisi Derive ile grafiği bulayım. Bu tanımladığım fonksiyonu işaretli bırakıyorum veee işte işte grafik…(Bu süreçte Derive yazılımı yardımıyla aşağıda verildiği gibi fonksiyonun grafiğini çizen Medine, grafik üzerinde hareket ederek istenen x=1 noktasına ulaşmaya çalışır ve çalışma yaprağında aşağıdaki yorumlara yer verir)*

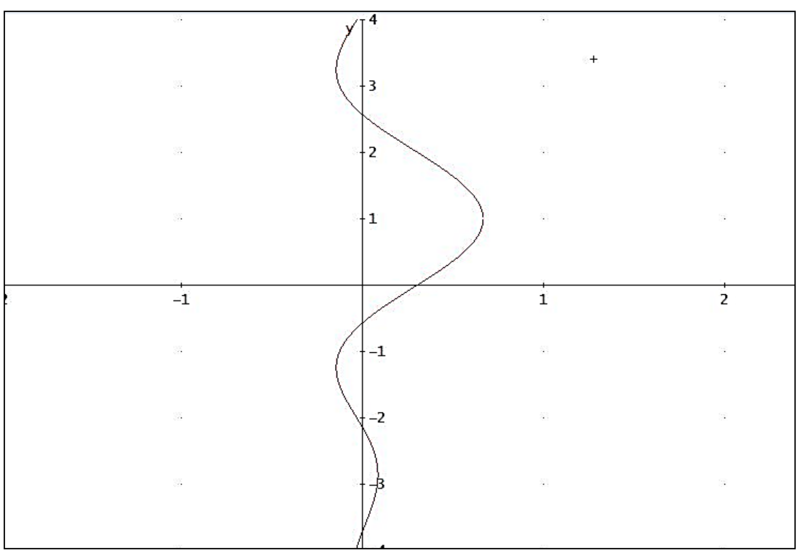


Bu grafikte fonksiyona soldan ve sağdan yaklaşırken almış olduğu değerleri görsel olarak grafik üzerinde ifade edebiliriz.

tam tersi olarak $y=\frac{2}{3}$ doğrusunuda çizerek emin olmak istedim ve sonucu yine net bir şekilde gördüm grafik y ekseninde 'de aynı sonucu veriyor.

Şekil 56. Medine’nin 2. çalışma yaprağının “üçüncü soru grubu” sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizimler ve çalışma yaprağına yazdığı yorumlar

(Medine’nin verdiği cevaplardan tam tersi demekle fonksiyonun limitinin grafiğini çizmek istemesi güzel bir tercih olmasına rağmen, oluşturduğu ikinci grafikten fonksiyonun y değişkenine göre grafiğini bulduğunu görmekteyiz)



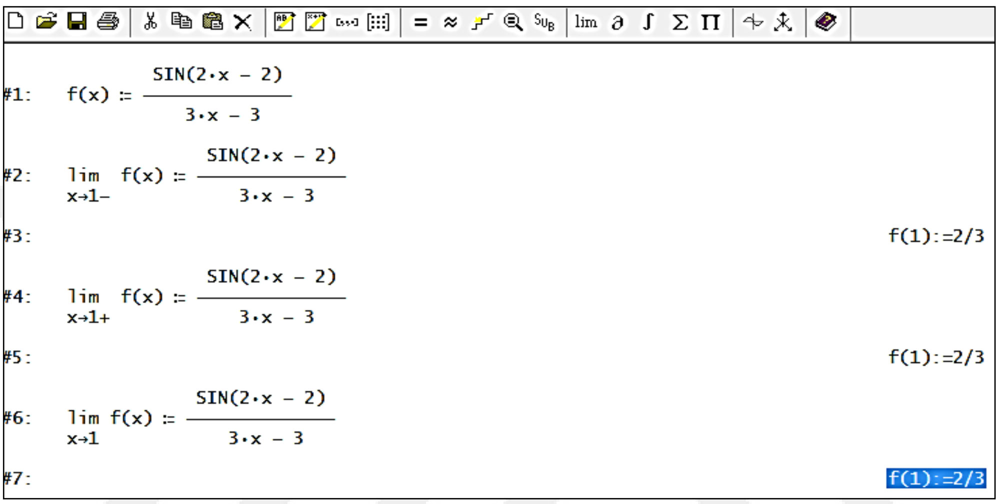
Şekil 57. Medine’nin 2. çalışma yaprağının “üçüncü soru grubu” sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizim

AÖ: *Medine, bulduğun bu grafik neyin grafiği?*

M: *…. Hocam ben limit değerini bulacaktım. Aslında x=1 değerindeki limit değerinin bu grafiği nerede kestiğini bulmak istemiştim. Galiba olmadı!*

AÖ: *Anlıyorum. Peki limit değerine başka nasıl ulaşabilirsin?*

M: *Zaten Derive bu değeri hesaplıyor. Bakın… (Medine bu süreçte Derive yazılımında aşağıdaki işlemleri yaptı)*



Şekil 58. Medine'nin 2. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

M: *1'e küçük değerlerden yaklaştım, büyük değerlerden yaklaştım hep aynı sonuç…. İşte burada limit var bu da* $\frac{2}{3}$*…*

AÖ: *Peki bu fonksiyon istenen x=1 noktasında sürekli midir?*

M: *Aslında burada tanımsızlık vardı. Fakat limit değeri var. Hatırladım!... Sürekli olması için o noktada da aynı değer olmalı… Bu değer de aynı gibi gözüküyor…. Süreklidir!!!*

AÖ: *Tanımsızlığın olması önemli değil öyle mi?*

M: *Önemli değil. Önemli olan bu noktada aynı değeri almasıdır. (Medine verdiği cevaptan emin bir şekilde konuşuyordu. Oysa grafiği incelerken dikkate almadığı x=1 noktası için çözüm yaptığında verdiği cevabın doğru olmadığını görebilecekti)*

AÖ: *Emin miyiz, Medine?*

M: *Aslında kafam karıştı noktayı yerine yazamıyorum… Yerine yazıp hangi değeri alabileceğini görsem belki daha iyi olurdu.*

AÖ: Derive yazılımı yardımcı olabilir mi acaba?

M: Evet bir de onunla hesap yapmaya çalışayım. …. x=1 için çözüm yok. Anladığım kadarıyla bu noktada süreklilik yok… doğru mu hocam?

AÖ: Söylediklerini dikkate alacam. Doğruluğunu sonra tartışırız.

Fonksiyonun grafiğini çizmeden grafiğin nasıl olabileceğini doğru yorumlayan Medine'nin diyaloglar ilerledikçe cevaplarının ÇY seviyesinin üzerinde olacağı gözüküyordu. Fonksiyonun grafiğini çizmede problem yaşamayan Medine çalışma yaprağının önceki aşamalarında yer alan soruları doğrulayabilmek için çizmiş olduğu grafikte hareket ederek x=1 noktasını incelemeye çalışmıştır. Medine burada net olarak göremediği limit değerini yeniden hesaplayıp bulduğu $\frac{2}{3}$ ifadesinin limit olduğunu belirtmiştir. Ayrıca bu değeri grafik üzerinde gösterdiğinde x=1 için limit değerinin gözükeceğini düşünmesi yine doğru ve olumlu bir düşüncedir. Fakat grafik çiziminde fonksiyonun x değişkenine göre değil de tersine y değişkenine göre çizmiş olması limit arayan Medine'nin limite ulaşabilmek için tersine işlem yapması gerektiği ile ilgili bir yanılgısının olduğunu göstermiştir. Süreklilik hakkında bilgi vermekte başarılı olan Medine, fonksiyonun sürekliliğini incelerken x=1 noktası için yeterli bilgi verememesine rağmen grafiğin genel anlamda sürekli olduğunu belirtebilmesi Medine'nin cevaplarının bu sorulara ilişkin birden fazla özellik içeren kavramsal anlamaya sahip olmasına rağmen bazı eksiklerinin olduğunu göstermektedir. Böylece bu cevaplar "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" içerisinde sınıflandırılmıştır.

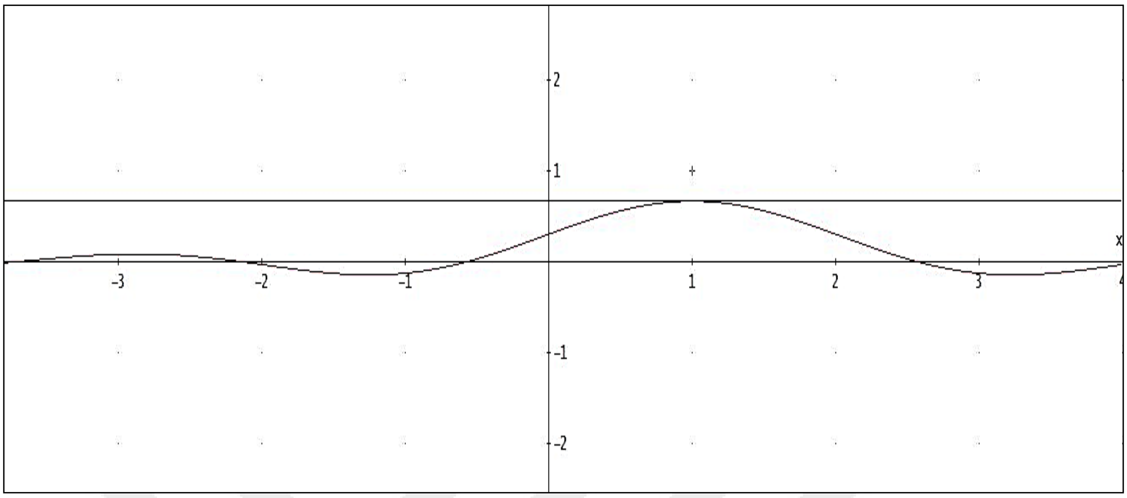
2. çalışma yaprağının 8., 9. sorularına verilen cevapların tamamı incelendiğinde Merve, Okan, Fatma, Devrim, Samet, Özcan, Sadullah ve Kadir'in cevaplarında da Medine'nin ifadelerine benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Diğer öğrencilerden 21'inin verdiği cevaplar ise birbirine benzer olup birbirinden kopuk bilgi parçalarını içerdiği görülmüştür. Bu cevaplar ÇY seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda ÇY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından ders sürecinde Remzi ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

R: Şimdi grafiği bulmak için bu fonksiyonu seçeriz ve grafik menüsü ile işte grafiği buluruz. Şimdi neye bakmalıyız?

AÖ: Eğer grafiğinden eminsen bundan önce yaptığımız çalışmaları bu grafik üzerinde gösterebilir misin?

R: Evet hocam bu grafik üzerinde hareket edebiliyorduk. Limit için istenen noktaya doğru gidip limiti bulabilmemiz gerekir. Hatta biz limiti $\frac{2}{3}$ olarak bulmuştuk. Çizdiğimiz grafikte bunu da gösterirsek x=1 noktasına giderken limiti *görebiliriz. (Remzi'nin bu süreçte Derive yazılımında yaptığı çizim aşağıdaki gibidir)*



Şekil 59. Remzi'nin 2. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizim

AÖ: *Peki Remzi süreklilik hakkında ne söyleyebilirsin?*

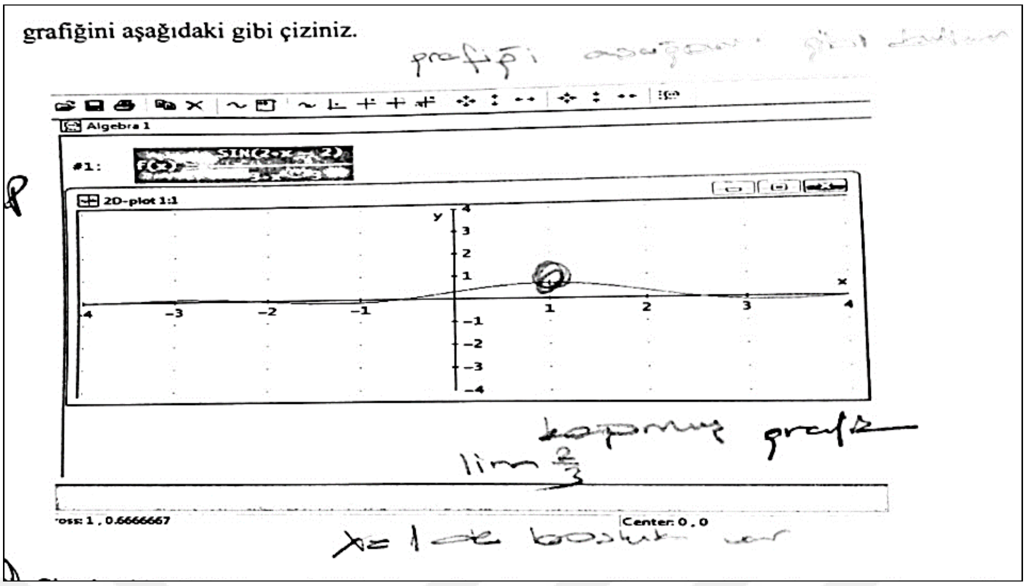
R: *Aslında pek bir şey söylemeye gerek yok grafiği çalışma yaprağındakine benzer şekilde buldum. Limit de vardı burada. Süreklilik de vardır herhalde!*

AÖ: *Bu bilgiler süreklilik için yeterli mi? x=1 noktasında dikkatini çeken bir şey yok mu? Grafiği büyütebilirsin.*

R: *Hımm evet hocam… Grafiği büyüttüğümüzde x=1 noktasında boşluk var. Yani bu kopmuş grafiktir.*

AÖ: *Yani?*

R: *Kopmuş grafiklerde de limit vardır. (Remzi'nin bu süreçte çalışma yaprağına yazdıkları aşağıdaki gibidir)*



Şekil 60. Remzi’nin “üçüncü soru grubu” sorularıyla ilgili 2. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Remzi’nin vermiş olduğu cevaplar, çalışma yaprağına yazmış oldukları ve ekran çıktıları incelendiğinde önceki adımları dikkate alarak x=1 noktasına yaklaşmanın limit olduğunu farkında olduğunu görülmektedir. Ayrıca fonksiyonun grafiğinden limit değerine ulaşabileceğini farkında olan Remzi’nin grafiği incelerken kopuk noktaların ne anlama geldiği hakkında net bir bilgi verememiş olması verilen cevapların birbirinden kopuk bilgi parçalarını birleştirmede başarılı olamadığını göstermiştir. Bu ve benzeri cevapları içeren 21 öğrenci cevabı “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleştirilmiştir.

Çalışılan soru grubunda Hülya ve Fırat Derive yazılımı yardımıyla verilen fonksiyonun sadece grafik çizimine odaklanmış olup verdikleri cevaplar grafik çiziminden öteye geçememiştir. Böylece bu cevaplar “tek yönlü yapı”, “TY” seviyesine yerleştirilmiştir.

2. çalışma yaprağının 3. Grup içinde yer alan 8., 9. Sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 2 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 21 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY) ve 9 öğrencinin cevapları ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

3. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 7., 8., 9. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonun grafiğini Derive yazılımında yer alan grafik çizme menüsü  yardımıyla çizmekte zorluk çekmediği görülmüştür. Önceki aşamalarda -∞’da limit değerinin bulunması istenen fonksiyon için 9. aşamada ek olarak x=-1’de incelenmesi istenmiştir. Bu durum x=-1’de $\frac{0}{0}$ belirsizliği olan bu fonksiyonun grafik çiziminde MYO öğrencilerinin merakını arttırmıştır. Grafik çiziminden önce fonksiyonun

limit değerini bulmak için x yerine -1 yazdıklarında özellikle paydanın sıfır olması ile ilgili grafik üzerinde ne göreceklerini merak etmişlerdir.

Bu sorular ile ilgili Sadullah ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

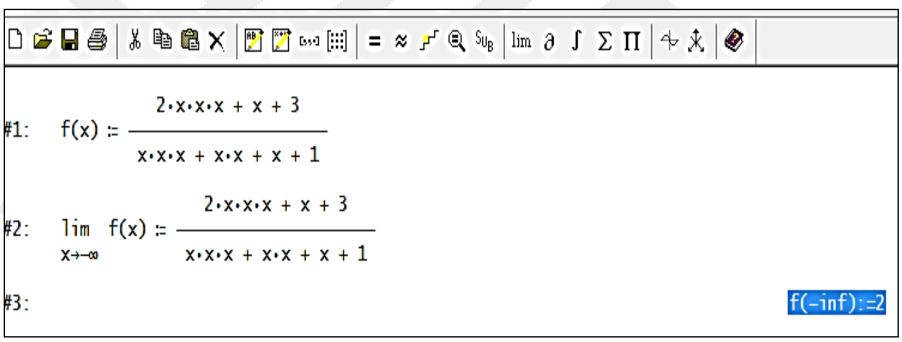
S: *Hocam bu grafikte x, -∞'a giderken ifadesini nasıl göstereceğiz?*

AÖ: *Grafik üzerinde hareket edebildiğine göre -∞'un yönüne doğru gidebilirsin.*

S: *… hocam şimdi bu yön -∞, bu yöne gidersem… sonu yok böle devamlı gidiyor…*

AÖ: *İstersen limit değerini bulmaya çalış!*

S: *Limit değerini zaten hesaplamıştım. 2 değil mi? Bunu fonksiyonun grafiğinde nasıl gösterebilirim? Sorunuz bu değil mi? (Sadullah bunu söylerken Derive yazılımında yapmış olduğu hesaplamayı yeniden açmıştı)*



Şekil 61. Sadullah'ın 3. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Evet, sorumuz bu aslında. Acaba bulduğun limit değerinin grafiğini aynı grafik üzerinde göstersen sana yardımcı olur mu?*

S: *Hocam o zaman grafik üzerinde fonksiyonun grafiği, limitin grafiği bulunur. Fakat -∞'u nasıl gösterecem. Kafam karıştı… ben sonraki adımdaki sorulara baksam olmaz mı?*

AÖ: *Olur Sadullah, neden olmasın!*

S: *O zaman x=-1 olduğunda bakalım fonksiyonun sonucu ne oluyor? (bu işlemi Derive yazılımı üzerinde yapan Sadullah burada bulduğu sonuçtan da hoşnut değildi)*

#1: $\text{NSOLVE}\left(f(x) := \dfrac{2 \cdot x \cdot x \cdot x + x + 3}{x \cdot x \cdot x + x \cdot x + x + 1}, x, -1, -1\right)$

#2: false

Şekil 62. Sadullah'ın 3. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemlerin devamı

S: *Hocam burada da sorun var. Off yine "false" geldi… Şimdi limite bakalım. Yine limit var.(Sadullah, bu limit hesabını Derive yazılımının limit menüsü yardımıyla yapmıştı) Herhalde bu da -∞ gibi olacak…*

#1: $f(x) := \dfrac{2 \cdot x \cdot x \cdot x + x + 3}{x \cdot x \cdot x + x \cdot x + x + 1}$

#2: $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) := \dfrac{2 \cdot x \cdot x \cdot x + x + 3}{x \cdot x \cdot x + x \cdot x + x + 1}$

#3: $f(-1) := 7/2$

#4: $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) := \dfrac{2 \cdot x \cdot x \cdot x + x + 3}{x \cdot x \cdot x + x \cdot x + x + 1}$

#5: $f(-1) := 7/2$

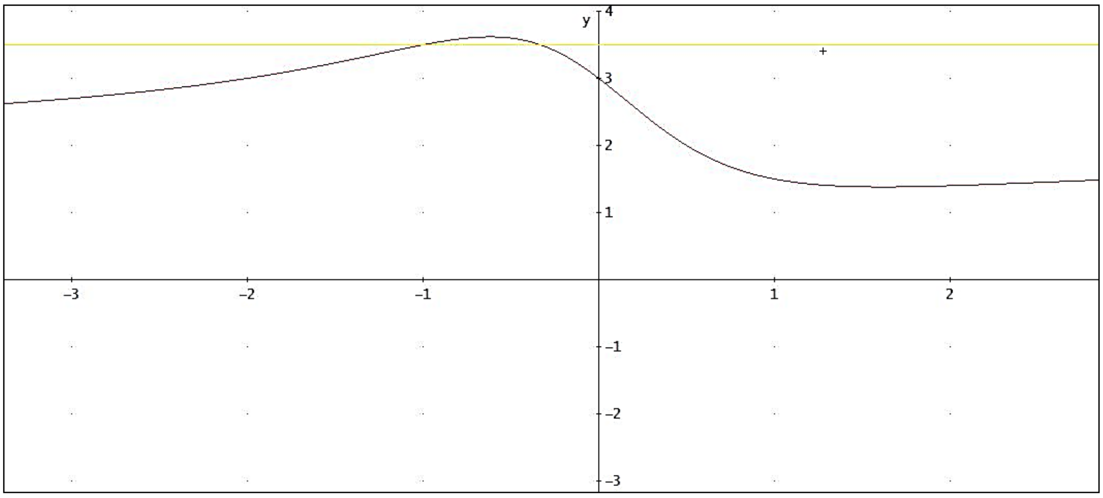
Şekil 63. Sadullah'ın 3. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemlerin devamı

AÖ: *Neden böyle düşünüyorsun, Sadullah?*

S: *Çünkü -∞'da da limit vardı yine belli bir sonuç bulamamıştım ve grafiğini inceleyemedim. Bunda da limit var… Eksiden-artıdan limit 7/2, off bundan önce de "false" vardı. Grafiği kesin inceleyemeyeceğim. Hocam neden hep belirsiz, anlamsız şeylerle uğraşıyoruz?*

AÖ: *Sadullah istersen x=-1 için bulduğun limit değerinin grafiğini incelemeye çalış belki düşündüğün gibi olmaz.*

S: *Tamam hocam… İşte grafik üzerinde bulunan 7/2 limit grafiği… Şimdi ne yapmalıyım?*



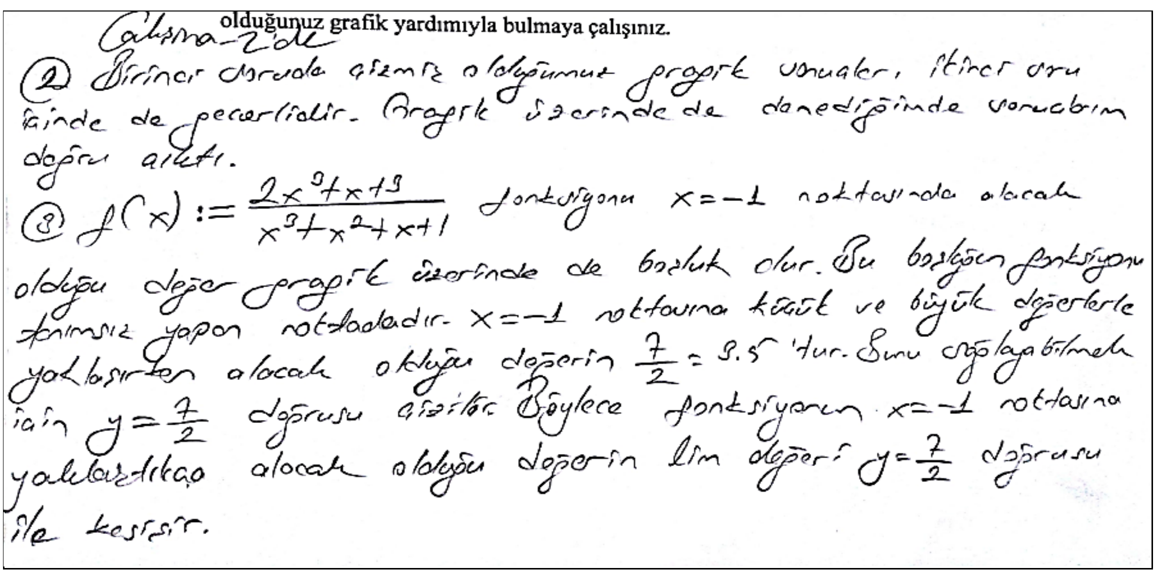
Şekil 64. Sadullah'ın 3. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizim

AÖ: *Bulduğu limit değeri hangi nokta içindi?*

S: *-1*

AÖ: *O zaman o noktanın çevresini grafik üzerinde incele bakalım!*

S: *Anladım galiba… Şimdi grafik üzerinde hareket edip -1'e yaklaşacaktım. Zaten -1'de 3.5 oluyor… Evet 7/2=3.5, şimdi ne yaptığımı daha iyi anlamaya başladım… (Bunları söyleyen Sadullah çalışma yaprağında aşağıdaki yorumlara yer verir)*


olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

Çalışma-2'de

(2) Birinci soruda çizmiş olduğumuz grafik yorumları, ikinci soru için de geçerlidir. Grafik üzerinde de denediğimde sorumların doğru çıktı.

(3) $f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonu $x=-1$ noktasında alacak olduğu değer grafik üzerinde de boşluk olur. Bu boşluğun fonksiyonu tanımsız yapan noktadadır. $x=-1$ noktasına küçük ve büyük değerlerle yaklaşırken alacak olduğu değerin $\frac{7}{2} = 3.5$'tur. Bunu sağlayabilmek için $y=\frac{7}{2}$ doğrusu çizdik. Böylece fonksiyonun $x=-1$ noktasına yaklaştıkça alacak olduğu değerin lim değeri $y=\frac{7}{2}$ doğrusu ile kesişir.

Şekil 65. Sadullah'ın "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 3. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Bu noktadaki sürekliliği incelemeni istesem neler söylersin?*

S: *Hocam önceki soruda düşündüğüm gibi düşünürsem! Burada da limit olmasına rağmen sürekli değildir diyebilir miyiz?*

AÖ: *Limit olmasına rağmen derken ne demek istiyorsun?*

S: *Hocam normalde limit varken sürekli olması için noktanın da aynı değeri alması gerekiyordu… O zaman burada noktanın değerine bakmam gerek… Grafikte -1 noktası için bir değerin olmadığını görüyoruz… Sürekli olmaz! (Sadullah bu cevapları verirken kendinden emin olamıyordu her cümlesinde araştırmacı öğretmenin onayını bekliyordu)*

Fonksiyonun grafiğini çizmede problem yaşamayan Sadullah, önceki aşamaları doğrulayabilmek için çizmiş olduğu grafikte hareket ederek -∞'a yaklaşmaya çalışmıştır. Sadullah burada net olarak göremediği limit değerini yeniden hesaplayarak bulduğu 2 değerinin limit olduğunu belirtmiştir. Bu değeri grafik üzerinde göstermekte zorlanan Sadullah sonraki adımlarla ilgili yorumlar yapmak istediğini belirtmiştir. x=-1 noktasının diğer noktalar gibi problemli olduğunu düşünen Sadullah, bu noktadaki limit değerini bulduktan sonra bu değerin grafiğini fonksiyonun grafiği üzerinde göstermiştir. Böylece Sadullah'ın başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapları ekran çıktıları, grafiği yorumlaması, çalışma yaprağına yazdıkları ve diyaloglarının sonucu ÇY seviyesinin üzerinde sınıflandırılmıştır. Fakat fonksiyonun sürekliliğini incelerken x=-1 noktası için yeterli bilgi verememesi Sadullah'ın cevaplarının soru grubuna ilişkin birden fazla özellik içeren kavramsal anlamaya sahip olmasına rağmen bazı eksiklerinin olduğunu göstermektedir. Böylece bu cevaplar "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" içerisinde sınıflandırılmıştır.

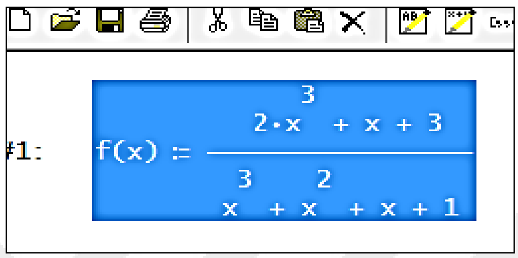
3. çalışma yaprağının 7., 8., 9. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde Merve, Okan, Fatma, Devrim, Özcan ve Medine'nin cevaplarında da Sadullah'ın ifadelerine yakın ifadelerle karşılaşılmıştır. Diğer öğrencilerden limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkında olup bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmeyen 19 öğrencinin, limit-süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendirmede başarılı olamadığı görülmüştür. Birbirine yakın ifadeler içeren bu 19 öğrenci cevapları birbirinden kopuk bilgi parçaları şeklinde olduğundan ÇY seviyesine yerleştirilmiştir. Geri kalan Hülya, Fırat, Derya, Resul, Ozan ve Hacer ise daha çok grafik çizimine ve grafiğin görselliğine odaklı cevaplar vermişlerdir. Sorunun tek bir yönüne odaklanılan bu cevaplar TY seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda TY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından Hacer ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

H: *Hocam zaten matematikten bir şey anlamıyorum. Burada şimdi ne yapmalıyım?*

AÖ: *Lütfen Hacer, birazcık azimli olursan bu soruları anlayabilecek olduğunu düşünüyorum. Sonuçta Derive yazılımında fonksiyon tanımlamayı biliyorsun.*

H: *Peki hocam, şimdi fonksiyonu yazalım!(Hacer bu süreçte Derive yazılımında aşağıdaki gibi fonksiyonu yazmış ve araştırmacı öğretmenin yönergesini bekliyordu)*



Şekil 66. Hacer'in 3. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

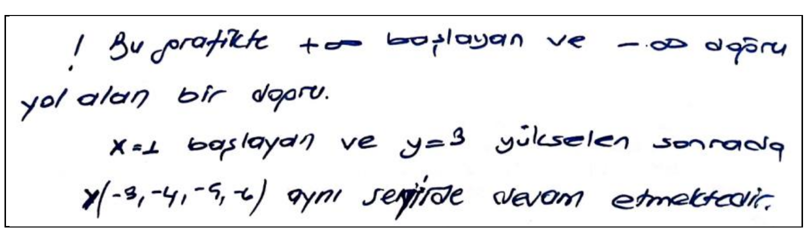
H: *Evet hocam! Şimdi ne yapmalıyım grafik mi bulmalıyım? Soruda grafik çizmem isteniyor.*

AÖ: *Soruda grafik isteniyorsa sen grafik bulmayı da biliyorsun değil mi Hacer!*

H: *Fonksiyon işaretli iken grafik çizme menüsü tıklanır ve grafik çizilir. İşte grafiği buldum hocam.*

AÖ: *Şimdi önceki çalışmalarını limit ve süreklilik hakkında bilgi vererek grafik üzerinde yapmaya çalışabilir misin?*

H: *Hocam orada sonsuzlukta limit bulmamamız istenmişti. Şimdi bu grafiğe baktığımızda sonsuza doğru giden bir grafik görmekteyiz… (Hacer bu süreçte süreklilik ve limit hakkında bilgi vermeden sadece grafiği yorumlamaya çalışıyordu. Bu sürece dair Hacer'in çalışma yaprağına yazdıkları aşağıdaki gibidir)*



Şekil 67. Hacer'in "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 3. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Hacer'in ekran çıktıları, çalışma yaprağına yazmış oldukları ve araştırmacı öğretmenle geçen diyalogda verdiği cevaplar incelendiğinde Derive yazılımı yardımıyla çizmiş olduğu grafiği inceleyemediği görülmüştür. Ayrıca verdiği cevaplar öğrencinin limit-süreklilik ile ilişki kurmadan grafiği görsel olarak incelediğini göstermiştir. Bu ve benzeri cevaplar veren 6 öğrenci cevabı "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir.

3. çalışma yaprağının Üçüncü Soru Grubu içinde yer alan 7., 8., 9. sorularına ders sürecinde verilen cevaplar incelendiğinde 6 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 19 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY) ve 7 öğrencinin cevapları ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

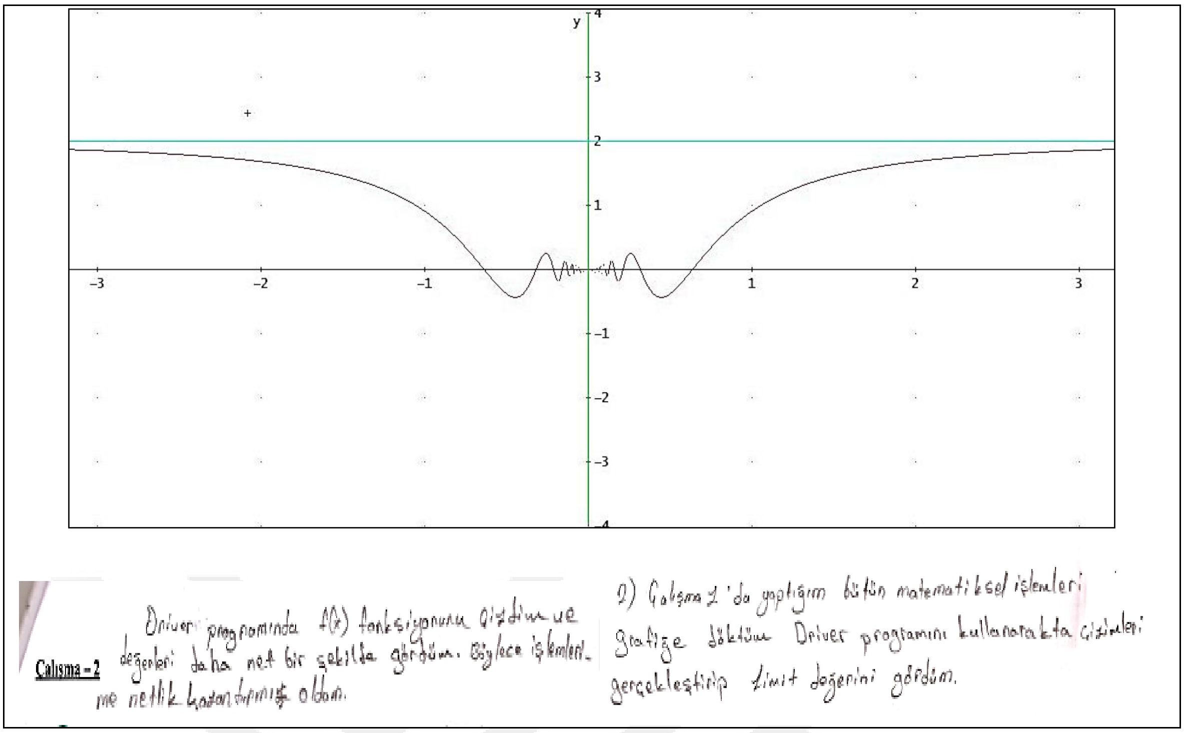
5. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 6., 7. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonun grafiğini Derive yazılımında yer alan grafik çizme menüsü  yardımıyla çizmekte zorluk çekmediği görülmüştür. Ayrıca bu sorularda yer alan fonksiyon grafiğinin x=0 noktasında yoğunlaşmış olması MYO öğrencilerinin merakını arttırmıştır.

Bu sorular ile ilgili Özcan ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

Ö: *Hocam bu karışık fonksiyonun grafiğini inanın ki çok merak ediyorum.*

AÖ: *Neden?*

Ö: *Aslında şu ana kadar grafik çizimi ile ilgili hiçbir bilgi sahibi olmayan biri olarak bütün fonksiyonların grafiğini merak ediyorum. Fakat bu sorulardaki fonksiyonun ∞.0 gibi dikkat çekici bir belirsizliği vardı… Belki de ondan bu grafiği daha çok merak etmişimdir.(Bu süreçte Derive yazılımı yardımıyla aşağıda verildiği gibi fonksiyonun grafiğini çizen Özcan, grafik üzerinde hareket ederek istenen ∞'luğa yaklaşmaya çalışırken çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlara yer verir)*



Şekil 68. Özcan'ın 5. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizimler ve çalışma yaprağına yazdığı yorumlar

Ö: *Bakın hocam şu anda x, ∞'a yaklaşırken limit durumunu görmek için zorlanıyoruz. Fakat ben ne yaptım limit noktasının grafiğini de aynı grafik üzerinde çizerek limit değerinin gerçekten de 2 olduğunu bulabildim… Yaptıklarım doğru di mi hocam? (Özcan verdiği cevaplar ve çizdiği grafikler sayesinde kendinden emin bir şekilde doğruluğunun onaylanmasını bekliyordu)*

AÖ: *Evet Özcan, bunlar doğru adımlar.*

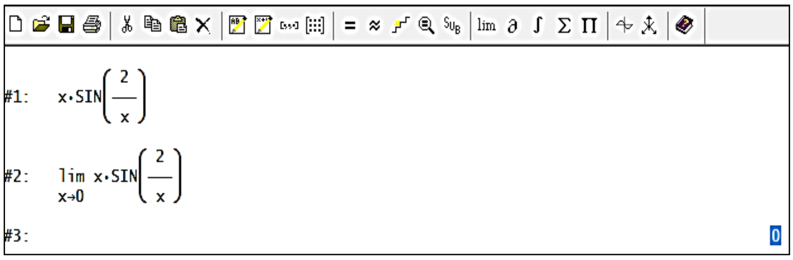
Ö: *Hocam bu grafik çizme menüsü harika bir şey burada sıfır (0)'ın bulunduğu nokta aynen kalp atışları gibi… İnsanın dikkatini çekiyor…*

AÖ: *İstersen o noktayı inceleyebilirsin. Tabiî ki bunu yaparken yorumlarını sesli yapacaksın!*

Ö: *Hocam şimdi grafik üzerinde hareket ederek sıfır (0) noktasına yaklaşalım. Aslında bu noktaya sağdan ve soldan yaklaşırken fonksiyonun alacak olduğu değer aynı gibi gözüküyor… (Bu süreçte Özcan grafik üzerinde hareket ederek sıfır değerine küçük ve büyük değerlerden yaklaşıyordu. Ayrıca grafik menünsün altında yer alan değerleri de sesli bir şekilde okuyordu) …vee sıfır!!! Hocam burada da limit değeri sıfır oluyor galiba!*

AÖ: *Derive yazılımında bunu gösterebilirsin. O zaman bana sormak zorunda kalmazsın.*

Ö: *O halde bu fonksiyonun x sıfıra yaklaşırken aldığı limit değerini mi bulmam gerek? (Özcan bu süreçte araştırmacı öğretmenin kafa işaretiyle onayını aldıktan sonra Derive yazılımında aşağıdaki işlemleri yaptı)*



Şekil 69. Özcan'ın 5. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

Ö: *İşte hocam buldum! Ben buldum! Sıfır grafiği incelerken söylediğim gibi… Çok mutluyum. Bu grafik sayesinde anlattığınız sürekliliği bile inceleyebilirim.*

AÖ: *O halde bu fonksiyonun grafiğini inceleyerek nerelerde sürekli olabileceği hakkında biraz bilgi verebilir misin?*

Ö: *Hocam! Söylediğim her şeyi bana soru olarak soruyorsunuz! Fakat bu sefer bunu kendim bulacağım. Bir defa süreklilik için fonksiyonun grafiğinde boşluk olmaması gerekmektedir. Bu grafiği incelediğimde sıfıra yaklaşıncaya kadar problem yok gibi gözüküyor fakat sıfıra çok yaklaştıkça tam olarak bir yorum yapamıyorum… Bu noktanın (sıfırın) çevresi biraz karışık! Neyse en azından sıfırın çevresinin dışında sürekli olduğunu söyleyebilirim. Bütün bunları Derive sayesinde söyleyebiliyorum!*

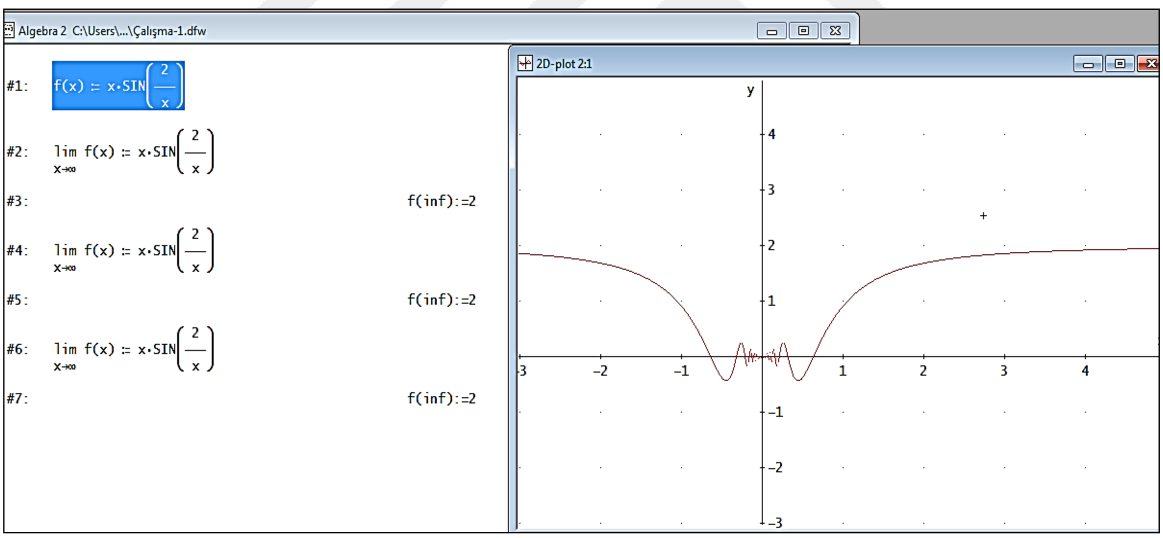
AÖ: *Teşekkürler, Özcan.*

Özcan'ın verdiği cevaplar incelendiğinde fonksiyonun grafiğini çizmede problem yaşamadığını görmekteyiz. Ayrıca fonksiyonun grafiğine limite ait grafiği ilave etmesi önceki aşamaların doğrulanması açısından çok önemlidir. Özcan verdiği cevaplardan emin olduğu için araştırmacı öğretmenin onayını alırken artık sorularını çekimser sormuyordu. Bu grafikte sıfır noktası ilgi çekici bir nokta olduğundan bu noktayı incelemek isteyen Özcan, süreklilik hakkında bilgi vermekte başarılı olmuştur. Böylece grafik üzerinde süreklilik ararken fonksiyonun kopuk olmaması gerektiğini vurgulayan Özcan, sıfır notası ile ilgili net bilgi verememesine rağmen bu noktanın dışında fonksiyonun sürekli olduğunu belirtmiştir. Özcan'a göre Derive yazılımı kâğıt üzerinde gösteremediği grafiklerin çizimi için mükemmel bir ortamdı ve grafik üzerinde hareket etmek O'nun için dikkatini çeken her noktayı inceleyebilmesine olanak sunuyordu. Böylece Özan'ın cevapları soru grubuna ilişkin birden fazla özelliği içerip kavramsal anlamayı içerdiğinden “ilişkilendirilmiş yapı”, “İY” seviyesi içerisinde sınıflandırılmıştır.

5. çalışma yaprağının 6., 7. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde Merve, Okan, Fatma ve Devrim’in cevaplarında da Özcan’ın ifadelerine benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Geri kalan öğrenciler limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkında olup bulmuş olduğu grafiği yorumlamada güçlük çekmişlerdir. Bu öğrenci cevapları incelendiğinde sorulan sorularla ilişkili fakat birbirinden kopuk bilgi parçalarını içerdiği görüldüğünden “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda ÇY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından Seher ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloğa yer verilmiştir.

S: *Hocam şimdi Derive’de $f(x) := x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. (Seher bu süreçte Derive yazılımında önceki adımlarda yapmış olduğu işlemlerden fonksiyonu işaretleyip grafik çizimini aşağıdaki gibi yapmıştır.)*



Şekil 70. Seher’in 5. çalışma yaprağının “üçüncü soru grubu” sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

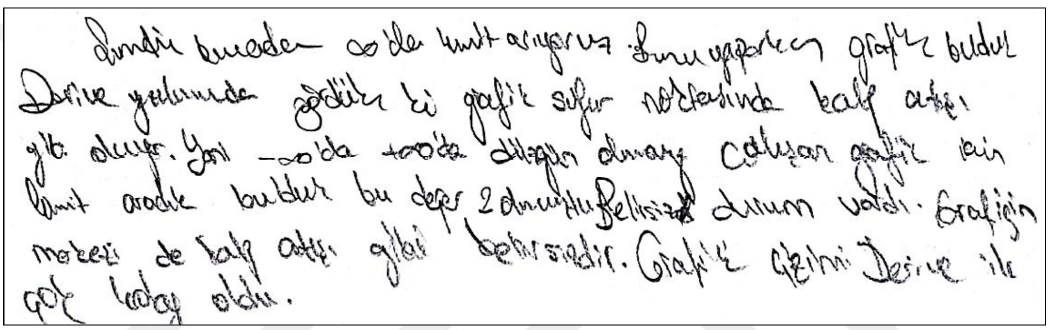
S: *Hocam bu ne kadar güzel bir grafik! Çok beğendim. Şimdi ne yapmam gerekiyor?*

AÖ: *Az önce yapmış olduğun çözümleri burada göstermen isteniyor.*

S: *Evet az önce sonsuzda limit bulmuştuk. Grafik üzerinde sonsuz! Şimdi limit 2’dir. 2 burada! Grafik düzgün gidiyor. Oysa merkeze doğru kalp atışı gibi* *çizgiler var. Burası sıfır noktası! Hocam grafik düzgün giderken sıfıra doğru yoğunlaşma var.*

AÖ: *Peki bu yoğunlaşmayı inceleyebilir misin? Ayrıca bu grafikte süreklilik hakkında ne söyleyebilirsin?*

S: *Şimdi grafik sonsuza kadar gidiyor. Düzgün bir grafik ve sıfır noktasında yoğunlaşıyor. Sonsuza kadar düzgün gittiği için sürekli mi oluyor? Fakat bu fonksiyonda belirsizlik vardı! Ya hocam ben tam anlayamadım galiba! Sürekli mi? Limit var 2. (Seher söylediklerinden emin olmadan araştırmacı öğretmenin onayını bekliyordu. Bu süreçte çalışma yaprağına yazmış olduğu cevaplar aşağıdaki gibidir)*


Şimdi burada ∞'de limit arıyoruz. Bunu yaparken grafiği buldu[illegible] Derive yolunda gördük ki grafik sıfır noktasında kalp atışı gibi oluyor. Yani -∞'da +∞'da düzgün olmayıp çalışan grafik bir limit orada bulduk bu değer 2 [illegible] belirsiz durum vardı. Grafiğin merkezi de kalp atışı gibi belirsizdir. Grafiği çizimi Derive ile çok kolay oldu.

Şekil 71. Seher'in "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 5. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Seher'in bu soru grubu ile ilgili çalışmaları ve yorumları incelendiğinde çalışma boyunca kendinden emin olmadığı görülmüştür. Oysa grafik çizimi yapabilen Seher çalışma yaprağında yapmış olduğu önceki adımlar sayesinde belirsiz bir durumun olduğunu ve burada limitin ne olması gerektiğini biliyordu. Buna rağmen Seher'in verdiği cevaplarda grafik üzerinde ∞'a yaklaşırken limit durumunu gösterememiş olması ve grafiğin sıfır noktasına dikkat çekmesi birbirinden kopuk bilgi parçalarını içerdiğinden bu ve benzeri cevaplar "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir.

İlişkilendirmiş yapı seviyesi dışında kalan 27 öğrenci cevabı incelendiğinde öğrencilerin genel olarak Seher'in cevaplarına benzer cevaplar verdiği görülmüştür. Ayrıca tek yönlü yapı seviyesinde başlayan bazı cevapların ise sorulan sorular, grafik incelemeleri ve diyaloglar sonucu çok yönlü yapı ve ilişkilendirilmiş yapı seviyesine yerleştirilebilecek düzeye çıktığı görülmüştür.

5. çalışma yaprağının Üçüncü Soru Grubu içinde yer alan 6., 7. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 5 öğrencinin cevapları ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyesinde yer alırken geri kalan 27 öğrenci cevabı ise çok yönlü yapı (ÇY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

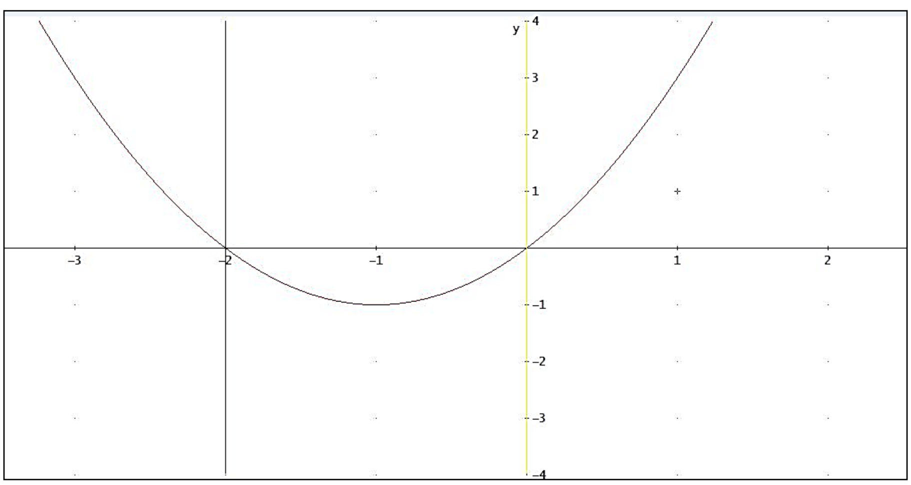
7. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 4., 5. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonun grafiğini Derive yazılımında yer alan grafik çizme menüsü  yardımıyla çizmekte zorluk çekmediği görülmüştür. Ayrıca bu sorularda yer alan $f:[-1,2] \rightarrow R, f(x) \coloneqq x^2 + 2x$ fonksiyonun tanım kümesi öğrenciler için dikkat çekici olmuştur. MYO öğrencilerinin çoğu fonksiyonun tanımlandığı aralığı grafikte nasıl göstereceklerini merak etmişlerdir.

Bu sorularla ilgili Fatma ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

F: *Hocam bu yazılım olmadan önce x'e değişik değerler vererek bulmaya çalıştığım grafik bu yazılım sayesinde hemen karşımda yer alıyor. Bu müthiş bir icat! Hatta önceki adımlarda fonksiyonun çözüm kümesini bulmak için yapmış olduğum işlemlerin doğru olup olmadığını burada doğrulayabiliyorum. Gerçi bu sorudan önce verilen adımlarda fonksiyonun tanım kümesi ile ilgili bir şeyler de vardı.*

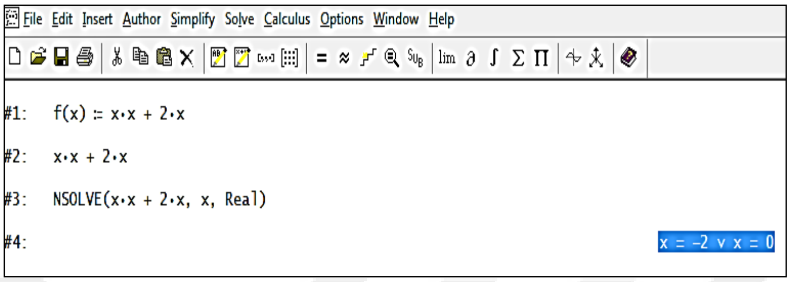
AÖ: *Neydi onlar?*

F: *Hocam hani [-1, 2] aralığı vardı ya… O aralık bu grafikte nasıl gösterilir? (Bu süreçte Fatma verilen fonksiyonun grafiğini aşağıdaki gibi çizmiş olup üzerinde Derive'nin grafik menülerinden olan (trace plots) ile hareket ediyordu)*



Şekil 72. Fatma'nın 7. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizim

F: *Hocam siz grafik üzerinde yürümeyi göstermiştiniz. Burada da galiba -1'den başlayıp 2'ye kadar grafiğin üzerinde yürümek gerekir! Buralarda fonksiyonun grafiğinde herhangi bir kopukluk yok. O halde fonksiyon bu aralıkta süreklidir diyebilirim. Hocam bunu bulmak zor olmadı fakat f(x)=0 için çözüm kümesini* *neden bulmam gerektiğini göremiyorum! Derste fonksiyonu sıfır yapan noktalar gerekli olacak diye göstermiştiniz. Onun için ben de Derive yazılımında işlem yaptığımız kısmında fonksiyonun çözüm kümesini yani 0 ve -2 değerlerini bulmuştum. (Fatma bu çalışma yaprağına ait önceki adımlarda Derive yazılımında aşağıdaki işlemleri yapmıştı)*



Şekil 73. Fatma'nın 7. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Anlıyorum. O halde seni birkaç soru ile yönlendirmeye çalışalım. Burada fonksiyonun* $[-1,2]$ *kapalı aralığında tanımlandığını biliyorsun.*

F: *Evet.*

AÖ: *Bu tanım kümesi için dikkat ettiğin eksen hangi eksendir?*

F: *Yani x, y gibi mi?*

AÖ: *Evet.*

F: *Anladım galiba x ekseni tanım kümesi, y ekseni değer kümesi söylemiştiniz. Fakat bu ne işe yarayacak? Zaten tanım kümem belli* $[-1,2]$ *aralığı…*

AÖ: *Doğru. Peki değer kümen ne olabilir?*

F: *Herhalde 0 ve -2 değerleri olacaktır! Diye düşünüyorum! Değil mi? Çünkü o zaman sıfır olur. Doğru ya 0 ve -2 değerleri fonksiyonun sıfır olmasını sağlayan çözüm kümeleridir. Benden fonksiyonun değerinin hep sıfır olması (f(x)=0) isteniyor. Yani alacak olduğum değerin sıfır olması gerekir. Grafiğimiz üzerinde hareket ettiğimizde fonksiyonun 2 yerde sıfır olduğunu görmekteyiz. İşte bunlar da 0 ve -2 değerleridir! (Fatma bu süreçte Derive yazılımında çizdiği grafiğe x=0 ve x=-2 fonksiyonlarının grafiklerini de ekledi) Şimdi oldu herhalde! Oldu mu hocam?*

AÖ: *Fatmacım verdiğin cevaplar doğru. Fakat burada bir tanım aralığının vermesinin nedeni ne olabilir?*

F: *Ne olabilir! Zaten fonksiyonun çözüm kümesi bu tanım aralığında istenmiş! Bence şu şekilde düşünülebilir. Ben bu fonksiyonun tanımlandığı aralıkta dolaşırken fonksiyonumun sıfır olmasını sağlayan değerler bu aralıktaki çözüm kümeme dâhil olur… Fakat bu aralık dışında olup fonksiyonumu sıfır yapan değerler çözüm kümemde olmaz! Doğru mu hocam?*

AÖ: *Söylediklerini uygulayıp bir sonuç bulmaya çalışırsan daha kolay karar verebilirim.*

F: *Şimdi tanım kümem -1'den başladığına göre fonksiyonumu sıfır yapan -2 değeri bu aralıkta olmaz! Evet, oysa sıfır noktası bu aralıkta yer almaktadır. Ayrıca -1'de -1 değerini alıyorum, 2'de ise 8 değerini alıyorum! Böylece bu aralık için fonksiyonun sürekli olduğunu da söyleyebilirim. Çünkü grafik üzerinde bu aralıkta yürürken hiçbir boşlukla karşılaşmadım. Bütün bunları benim söylediğime inanamıyorum. Oysa derste çok sıkıcı gibi gözüken bu konular ne kadar da zevkliymiş!*

AÖ: *Teşekkürler.*

Fatma'nın verdiği cevaplar incelendiğinde fonksiyonun grafiğini çizmede hiçbir problem yaşamadığını görmekteyiz. Ayrıca çalışmanın önceki adımlarını doğrulayabilmek için x=-2 ve x=0 değerlerini çizmiş olması yaptığı çalışmaların kavramsal olarak anlaşılması açısından çok önemlidir. Fatma önceki adımlardaki çalışmalarını grafik üzerinde doğrularken fonksiyonun tanım kümesine dikkat etmede başarılı olabilmiştir. f(x)=0 için çözüm kümesinde -2'nin olmaması gerektiğini bulmuştur. Fonksiyonun sürekliliğini incelerken tanım kümesine dikkat etmesi gerektiğini hatırlayan Fatma, Derive yazılımı sayesinde fonksiyon grafiğini incelerken kendi yorumları doğrultusunda $[-1, 2]$ kapalı aralığında tanımlanan bu fonksiyon için sürekli olduğunu söyleyebilmiştir. Burada Derive yazılımı kâğıt üzerinde gösterilemeyen grafiklerin çizimi için mükemmel bir ortam olarak grafik üzerinde hareket eden Fatma'nın her noktayı inceleyebilmesine olanak sunuyordu. Böylece Fatma'nın cevapları soru grubuna ilişkin birden fazla özelliği içerip kavramsal anlamayı içerdiğinden "ilişkilendirilmiş yapı", "İY" içerisinde sınıflandırılmıştır.

7. çalışma yaprağının 4., 5. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde Merve, Okan, Özcan ve Kadir'in cevaplarında da Fatma'nın ifadelerine benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Diğer öğrencilerden fonksiyon grafiğinin limit-süreklilik için gerekli olduğunu farkında olmasına rağmen bulduğu grafiği yorumlayamayan 23 öğrencinin, çalışma yaprağında yapmış oldukları matematiksel işlemleri fonksiyonun grafiği ile ilişkilendirmede başarılı olamadığı görülmüştür. Bu 23 öğrenci cevabı birbiriyle ilişkili olmayan bilgi parçaları içerdiğinden "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir. Geri kalan Hülya, Resul, Fırat ve Songül ise verilen fonksiyonun grafik

çizimine odaklanarak çalışma yaprağında yer alan sorularla ilgili yeterli cevaplar vermediklerinden bu cevaplar “tek yönlü yapı”, “TY” seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda örnek olması açısından öğrenci cevaplarının çoğunlukta yer aldığı “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesinde verilen cevaplardan Engin ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloğa yer verilmiştir.

E: *Hocam burada fonksiyon* $f(x) \coloneqq x^2 + 2x$*’dur. Bu fonksiyonun grafiğini Derive’da çizeriz. (Engin bu süreçte fonksiyonun grafiğini çizmede sorun yaşamamıştır)*

AÖ: *Evet Engin, şimdi bu grafikte neleri incelemeliyiz?*

E: *Bu grafikte acaba grafik sürekli mi değil mi diye incelememiz gerekir. Bunu da Derive’da trace plots menüsü ile gösteririz.*

AÖ: *Nasıl yani trace plots menüsü süreklilik ile ilgili bilgi veriyor mu?*

E: *Yani şöyle hocam grafik üzerinde hareket etmemizi sağlıyor. Böylece biz de grafik sürekli mi değil mi diye öğreniyoruz.*

AÖ: *Grafik üzerinde hareket edince sürekli olup olmadığını nereden anlıyorsun?*

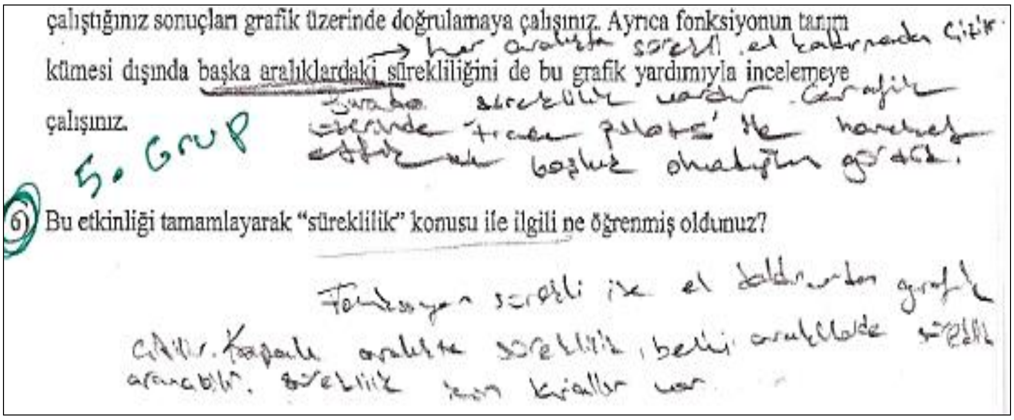
E: *Grafiği genişletiyoruz. Eğer grafikte boşluk varsa böyle yerlerde süreklilik olmaz. Çünkü sürekli olması için grafiği elimizi kaldırmadan çizmemiz gerekir.*

AÖ: *Peki bu grafik sürekli midir? Ya da nerelerde süreklidir? Yani belli bir aralığı var mı?*

E: *Evet süreklidir hocam. Çünkü grafikte her yer devam ediyor. Boşluk yok ve elinizi kaldırmadan grafiği çizebiliyorsunuz.*

AÖ: *Belli bir aralık verebilir misin?*

E: *Burada -2 var 0 var. Grafik ekseni kesiyor. Mesela oralarda sürekli yani kapalı bir aralıkta süreklidir. Zaten matematikte bununla ilgili kurallar vardır. (Engin bu cevapları verdikten sonra çalışma yaprağına aşağıdaki ifadeleri yazmıştı)*


çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca fonksiyonun tanım kümesi dışında başka aralıklardaki sürekliliğini de bu grafik yardımıyla incelemeye çalışınız.

5. Grup

6) Bu etkinliği tamamlayarak "süreklilik" konusu ile ilgili ne öğrenmiş oldunuz?

Şekil 74. Engin'in "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 7. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Engin'in bu soru grubuna verdiği cevaplar incelendiğinde grafiği yorumlarken ve süreklilik ile ilişkilendirirken basit bir dil kullandığı görülmektedir. Bu cevapları verirken teorik işlenen derslere ait bir şeyler hatırladığı görülmesine rağmen verdiği cevaplar ezbere bilgi parçalarından öteye geçememiştir. Bu ve benzeri cevapları içeren 23 öğrenci cevabı "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir.

7. çalışma yaprağının Üçüncü Soru Grubu içinde yer alan 4., 5. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 4 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 23 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY) ve 5 öğrencinin cevapları ise ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

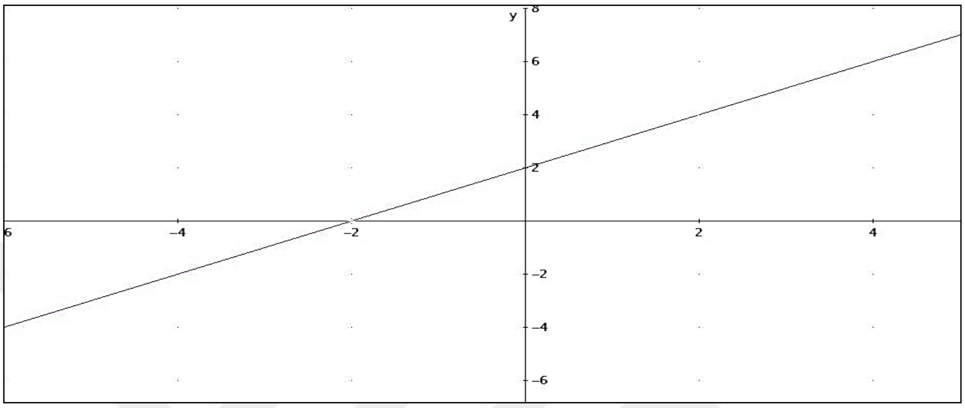
8. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 4., 5. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonun grafiğini Derive yazılımında yer alan grafik çizme menüsü  yardımıyla çizmekte zorluk çekmediği görülmüştür. Bu sorularda yer alan fonksiyonun x=2'de tanımsız olması grafik çiziminde MYO öğrencilerinin merakını arttırmıştır. Grafik çiziminden önce bulmuş oldukları limit değerini grafik üzerinde görüp-göremeyeceklerini merak etmişlerdir.

Bu sorular ile ilgili Okan ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

O: *Hocam, önceden grafik görmekten korkarken şimdi grafiği çizdiğimizde cevaba daha kolay ulaşacağımı düşünüyorum. Şimdi bu fonksiyonun 2 noktasında bir değerinin olmadığı açık! Çünkü paydada x-2 değeri var. Zaten bu noktadaki sürekliliğin incelenmesi isteniyor. Buradan da anlaşılıyor ki bu nokta sorunlu!*

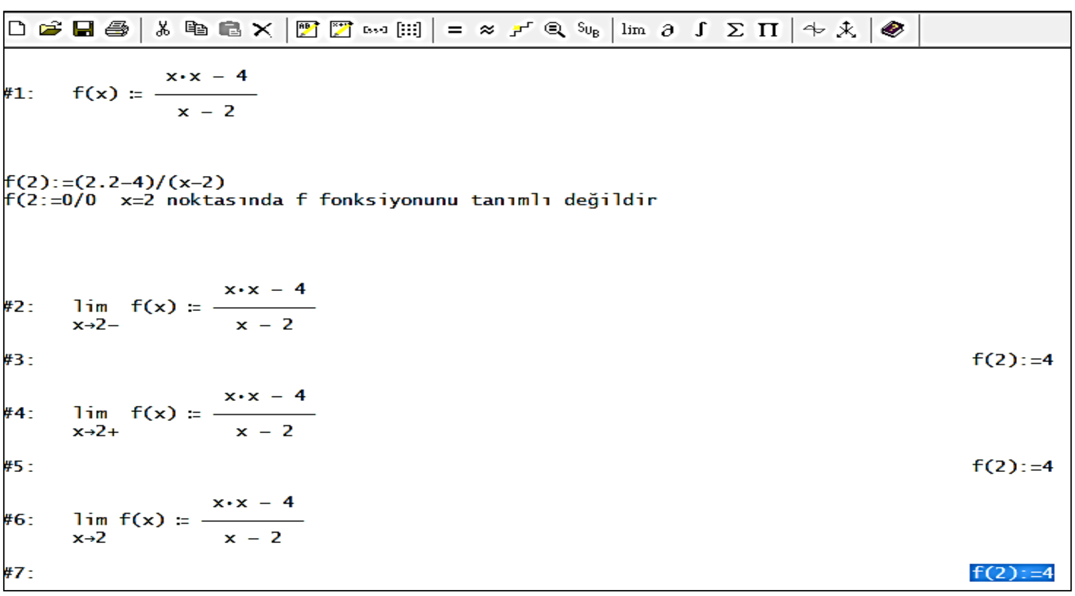
AÖ: *Peki Okan, sürekliliği x=2 noktasında incelemen istendiği için mi bu nokta sorunlu?*

O: *Hocam aslında payda sıfır olduğu için demek istedim. Ayrıca önceki çalışma yapraklarında buna benzer çalışmalar yaptığımızda da sorunlu noktaların sorulması benim daha iyi anlamamı sağladı. Tabi ki bana en çok desteği olan Derive'yi unutmamak gerekir. (Bunları söylerken bir taraftan da grafik çizimine odaklanan Okan, aşağıdaki çizimleri yaparak grafik üzerinde Derive'nin grafik menülerinden olan (trace plots) ile hareket ediyordu)*



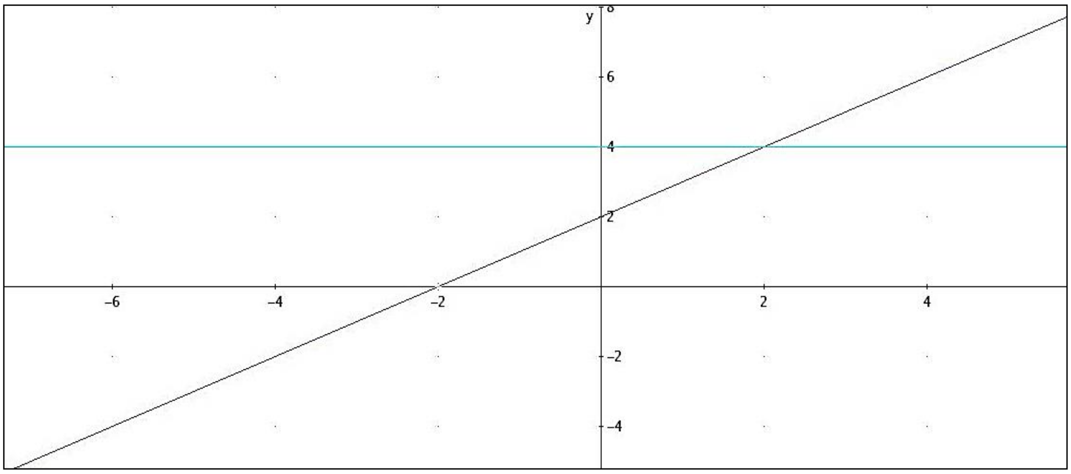
Şekil 75. Okan'ın 8. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizim

O: *Hocam şimdi x=2 noktasındaki limit değerine bakalım. Sonra onu aynı grafikte çizelim.(Okan Derive yazılımında aşağıdaki işlemleri yaparak çalışma yaprağına bulduğu cevapları yazdı)*



Şekil 76. Okan'ın 8. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler ve çizimin devamı

Şekil 76'nın devamı



4) $f(x)$ fonksiyonunu driver programında çizdim, ve grafik üzerinde bilgi sahibi oldum. Bu durumda bulmuş olduğum sonuçların doğruluğunu netleştirmiş oldum.

5) 1., 2. ve 3. aşamada yaptığım çalışmaları grafiğe aktardım ve limitin olduğu noktanın doğruluğunu kesinleştirdim.
$f(x)$ fonksiyonu $x=2$ noktasında tanımlı değil. Ama Limiti vardır.
Fakat bir fonksiyonun sürekli olabilmesi için hem tanımlı olmalı hemde limiti olmalıdır. Bu durumda $x=2$ noktası tanımlı olmadığı için fonksiyon $x=2$ noktasında süreksizdir.

Şekil 77. Okan'ın "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 8. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Başka süreksiz olduğu yerler var mı?*

O: *Hocam grafik bu noktanın dışında dümdüz bir çizgi. Elimizi kaldırmadan grafiği çizebiliriz yani. Bence diğer yerlerde süreklidir? (Okan bunları söylerken bir cevap bekliyormuş gibi araştırmacı öğretmenin onayını bekliyordu.)*

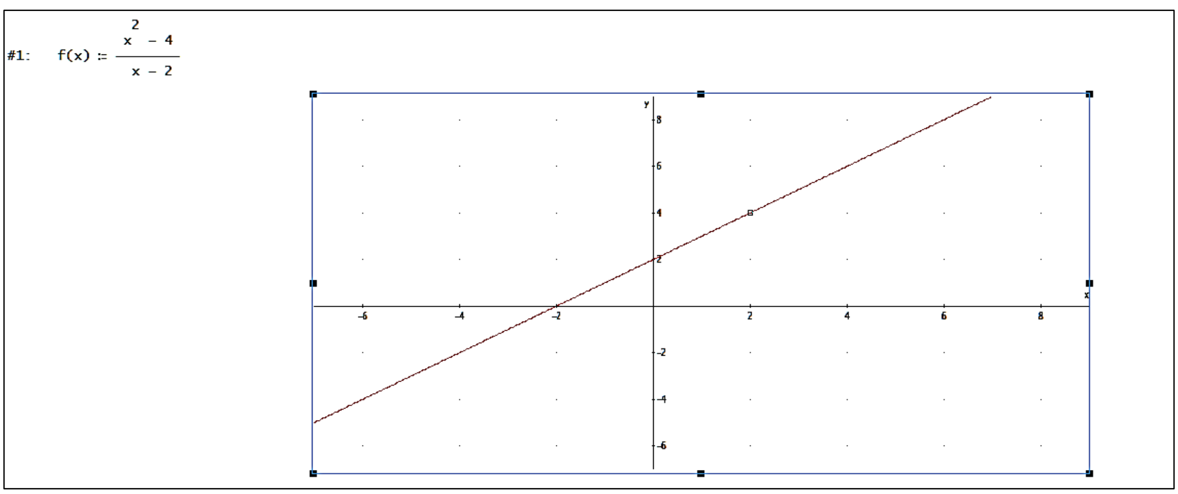
AÖ: *Teşekkürler Okan.*

Okan'ın verdiği cevaplar incelendiğinde fonksiyonun grafiğini çizmede hiçbir problem yaşamadığını görmekteyiz. Ayrıca çalışmanın önceki adımlarını doğrulayabilmek için x=2 noktasındaki limit değerini bulan Okan'ın bulduğu limit değerini aynı grafik üzerinde gösterebilmesi yaptığı çalışmaların öğrenilmesi açısından çok önemlidir. x=2 noktasında tanımlı olmayan bu fonksiyonun sürekli olabilmesi için bu noktada da tanımlı olması gerektiğini belirten Okan, süreklilik ile ilgili doğru tanımlamalar yaparak grafiğin bu nokta haricinde R\{2} her yerde sürekli olduğunu söyleyebilmiştir. Böylece Okan'ın cevapları soru grubuna ilişkin birden fazla özelliği içerip kavramsal anlamayı içerdiğinden "ilişkilendirilmiş yapı", "İY" seviyesi içerisinde sınıflandırılmıştır.

8. çalışma yaprağının 4., 5. sorularına verilen cevapların tamamı incelendiğinde Merve, Fatma, Devrim, Özcan, Sadullah, İsmail, Seher ve Medine'nin cevaplarında da Okan'ın ifadelerine benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Geri kalan 23 öğrenci limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkında olup bulmuş olduğu grafiği yorumlamada ve limit-süreklilikle ilişkilendirmede başarılı olamadığı görülmüştür. Birbirine benzer ifadeler içeren bu 23 öğrenci cevapları birbirinden kopuk bilgi parçaları şeklinde olduğundan "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda ÇY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından Çiğdem ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloğa yer verilmiştir:

Ç: *Hocam şimdi Derive'de* $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ *fonksiyonunun grafiğini çizelim (Çiğdem bu süreçte Derive yazılımında önceki adımlarda yapmış olduğu işlemlerden fonksiyonu işaretleyip grafik çizimini aşağıdaki gibi yapmıştır)*

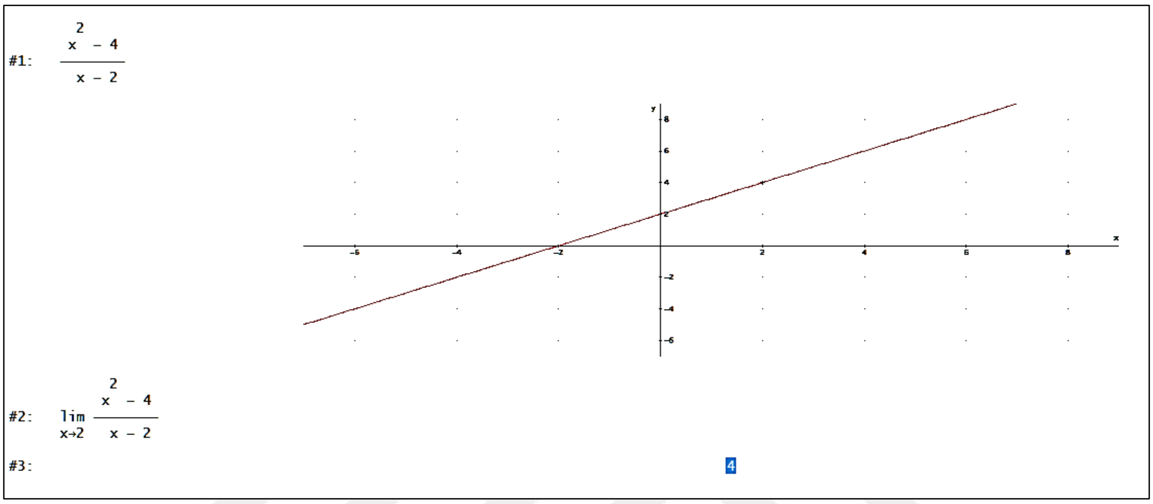


Şekil 78. Çiğdem'in 8. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

Ç: *Hocam grafik dümdüz çizgi oldu! Grafik olunca limiti görmek daha kolay oluyor!*

AÖ: *Neden böyle düşünüyorsun?*

Ç: *Çünkü grafiği genişletebiliyoruz istenen noktada hangi değeri aldığını görebiliyoruz. Grafiğin rengini de değiştirebiliyoruz. (Grafiğin rengini değiştirir) Burada 2'de sürekliliği incelemem istenmiş. Onu incelemesem mesela bu x=2 noktasında 4 değerini alıyor değil mi hocam? Buraya 4 yazıyor. Şimdi limiti de 4 olurmuş! (grafiğin altında 2'ye karşılık 4 yazan değeri gösterir ve yazılım üzerinde fonksiyonu tekrar seçen Çiğdem 2 için limiti 4 olarak bulur)*



Şekil 79. Çiğdem'in 8. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemlerin devamı

Ç: *İşte hocam söylemiştim. Buldum, ben söyledim 4 olabilir dedim! Doğru buldum.*

AÖ: *Peki başka ilave etmek istediğin bir şeyler var mı?*

Ç: *Grafik çok güzel! Ben hayatta bu grafiği çizemezdim. Hem de limit bulmak! Bunları benim yaptığıma inanamıyorum… zaten 2'yi burada yerine yazamazdım bile! Çünkü çözüm yok ki!*

Diyalog, Çiğdem'in grafiği incelemede, yorumlamada ve grafikle limit-sürekliliği ilişkilendirmede başarılı olamadığını göstermektedir. Çiğdem gibi cevap veren diğer öğrenciler de fonksiyon grafiğinin önemini farkında olmasına rağmen grafiği yorumlamakta zorlanmışlardır. Böylece 23 öğrenci cevaba ilişkin bilgi parçalarını birleştirmekte başarılı olamadığından cevapları "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir.

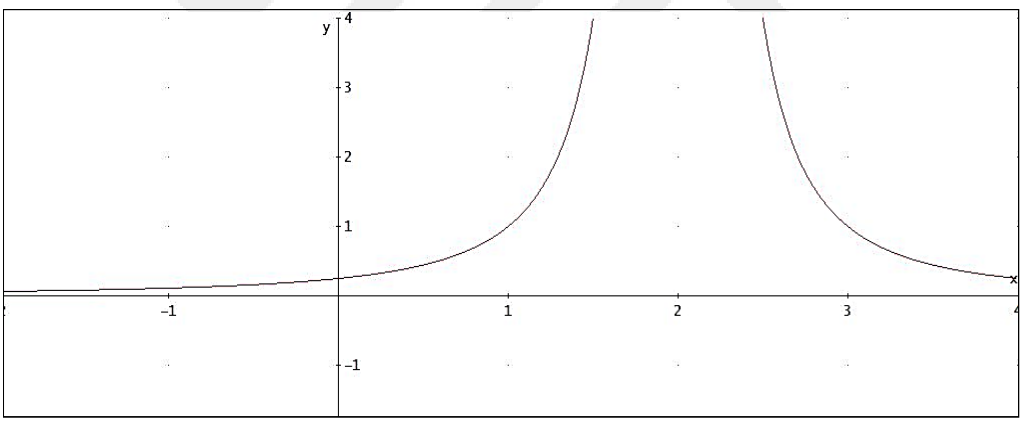
8. çalışma yaprağının Üçüncü Soru Grubu içinde yer alan 4., 5. sorularına ders sürecinde verilen cevaplar incelendiğinde 23 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY), 9 öğrencinin cevapları ise ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

10. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 4., 5. sorularını incelediğimizde genel olarak MYO öğrencilerinin verilen fonksiyonun grafiğini Derive yazılımında yer alan grafik çizme menüsü  yardımıyla çizmekte zorluk çekmediği görülmüştür. Sorularda x=2'de tanımlı olmayan fonksiyon verilmiş olup sürekliliğinin grafik üzerinde incelenmesi istenmiştir. Bu sürece dair Merve ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

M: *Hocam bu grafik ne kadar güzel… Böyle bir grafikle karşılaşacağımı düşünmemiştim. Peri bacası gibi! Yukarıya doğru uzanan 2 ayrı grafik gibi…*

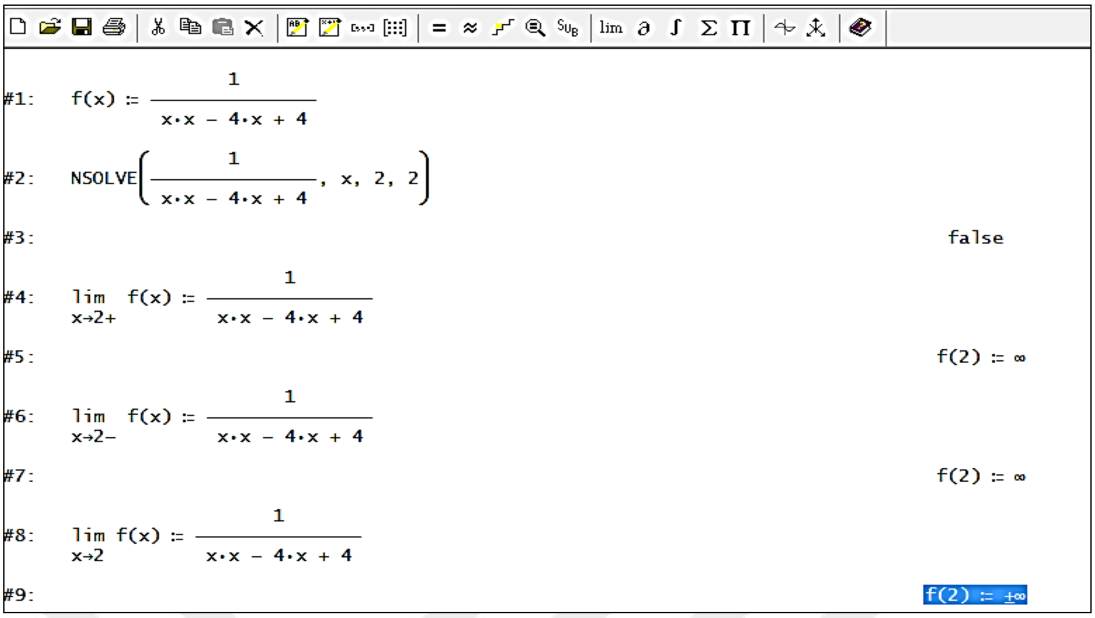
AÖ: *Peki ayrı 2 grafik olması mümkün mü?*

M: *Olmaz herhalde sonuçta bir fonksiyon için çizilen grafik… Sonu yok böle devamlı gidiyor…(Merve verilen fonksiyonun grafiğini aşağıdaki gibi çizmiş olup üzerinde Derive'nin grafik menülerinden olan (trace plots) ile hareket ediyordu)*



Şekil 80. Merve'nin 10. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizim

M: *Şimdi önceden yaptığımız işlemleri bu grafik üzerinde göstermeliyim. Bunun için öncelikle limiti bulmam gerek… Tekrar işlem moduna dönelim. (Merve bunları söylerken bir taraftan Derive yazılımında aşağıdaki işlemleri yapıyordu. Bu süreçte paydayı açarak yazması dikkat çekiciydi)*



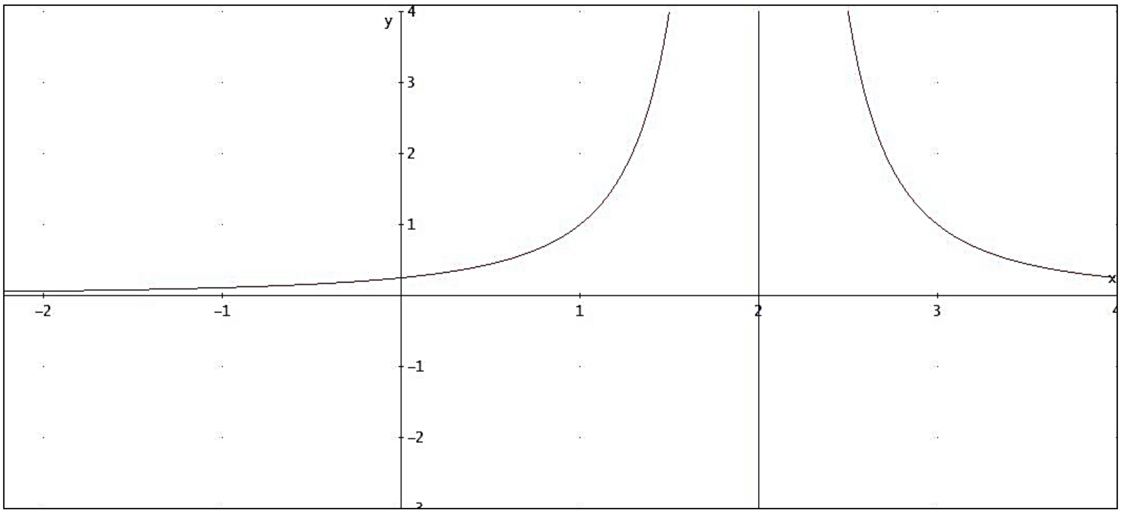
Şekil 81. Merve'nin 10. çalışma yaprağının "üçüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Paydayı açarak yazmandaki amacın ne olduğunu merak ettim? Bu durum sonuçlarını etkilemez mi acaba?*

M: *Paydayı açarsam sonuçlara daha kolay ulaşacağımı düşündüm… Aslında aynı şeyler oluyordu değil mi?*

AÖ: *Belki limit değerini etkileyebilir? (Merve değişikliğin olmayacağı konusunda kararlı gibi gözüküyordu. Oysa çift katlarda parantezler limit değerinin işareti için önem arz eder)*

M: *Hocam yine ∞ oldu. Ayrıca çözümü de false çıktı. Şimdi grafikte inceleyelim. Önceki çalışmalarımızda yaptığımız gibi aynı grafikte x=2 noktasını çizersek… Limitini daha kolay görmüş oluruz. (Merve bunları söylerken bir yandan aynı grafik üzerinde x=2 grafiğini çiziyordu. Bunun sebebi önceki çalışmalarımızda limit ararken bu grafikleri çizmemizdi)*



Şekil 82. Merve’nin 10. çalışma yaprağının “üçüncü soru grubu” sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı çizimin devamı

AÖ: *Merve x=2 grafiği sana hangi konuda yardımcı olacak?*

M: *x=2 değerine yaklaşırken limiti bulmamda yardımcı olacak… Burada ∞’luk var ve limit budur. Fakat tanımsızdır.*

AÖ: *Burada sürekliliğe bakman isteniyor. Limit sorulmamış!*

M: *İşte bu noktada tanımsız olduğu için sürekli değildir. Sürekli olsaydı noktada da tanımlı olması gerekirdi.*

AÖ: *Grafiğin diğer noktalarında da aynı durum geçerli mi?*

M: *Bakalım… Grafik bu nokta ve çevresi hariç el kaldırmadan çizilebiliyor. O halde bu nokta ve çevresi haricinde sürekli olabilir. (Bunları söyleyen Merve, çalışma yaprağına aşağıdaki yorumları yazmıştır)*

4) Driver programını kullanarak grafiği çizdim ve yaptığım işlemlerden emin oldum.

5) Bu aşamada çizmiş olduğum f(x) fonksiyonuna x=2 noktasını ekledim. Ve x=2 noktasına yaklaşırken limitinin olduğunu ve $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ = x=2 'ye büyük ve küçük değerlerden yaklaşırken sonucunu = $+\infty$ olarak buldum. Fakat f fonksiyonu x=2 noktasında tanımsız olduğu için sürekli değildir.

Şekil 83. Merve’nin “üçüncü soru grubu” sorularıyla ilgili 10. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Merve bu sonuca ulaşmanda grafiğin sana katkısı ne oldu?*

M: *Hocam Derive çözemeyeceğim soruları çözmemi sağlıyor. Grafik ise bu çözdüklerimin doğruluğunu görmemi sağlıyor. Bu harika bir program… Asla öğrenmemem dediğim limit ve sürekliliği anlamaya başladım. Ayrıca bu şekildeki grafiklerin nasıl oluştuğunu hep merak ediyordum. Mesela bu grafik peri bacası, bundan önce kalp atışı bulmuştuk. Bunlar çok güzel. Eğer boşluk yoksa sürekli… İşte hepsini bunlardan öğrendim.*

Fonksiyonun grafiğini çizmede problem yaşamayan Merve, x=2 noktasındaki limiti bulabilmiştir. Fakat limiti bulurken fonksiyonun paydasındaki $(x-2)^2$ ifadesini açarak bulacak olduğu limit değerinin işaretinin değişebileceğini düşünememiştir. Ayrıca limit değerine ulaştıktan sonra yaptıklarını grafik üzerinde gösterebilmek için bulduğu limitin grafiğini değil de verilen noktanın (x=2) grafiğini çizmiş olması önceki çalışma yapraklarında yaptığı bazı adımları ezberlemiş olduğunu göstermektedir. Bu süreçte Merve'nin cevapları tutarlı olmasına rağmen ezbere bilgi parçalarını içerdiği söylenebilir. Oysa Merve grafikle ilgili ÇY seviyesinin üzerinde düşünceler ifade etmiştir. Soru grubuna ilişkin birden fazla özellik içeren cevapların yanı sıra yukarıda belirtilen eksiklere sahip olan cevapları içermesi Merve'nin cevaplarının "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" içerisinde sınıflandırılmasına sebep olmuştur.

10. çalışma yaprağının 4., 5. sorularına verilen cevapların tamamı incelendiğinde Çiğdem, Okan, Fatma, Devrim, Sadullah ve Kadir'in cevaplarında Merve'nin ifadelerine benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Diğer öğrencilerden limit-süreklilik için fonksiyon grafiğinin gerekli olduğunu farkında olup bulmuş olduğu grafiği nasıl yorumlayacağını bilmeyen 21 öğrencinin, limit-süreklilik ile fonksiyon grafiğini ilişkilendirmede başarılı olamadığı görülmüştür. Birbirine benzer ifadeler içeren bu 21 öğrenci cevabı, aralarındaki ilişkileri kavramadan birden fazla veriyi bütün içinde kullanabildiğinden "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir. Geri kalan Hülya, Fırat, Derya ve Resul ise daha çok grafik çizimine ve grafiğin görselliğine odaklı cevaplar vermişlerdir. Bazen soru ile ilgili kopuk bilgi parçaları içeren ifadeler kullanan bu 4 öğrenci cevabı "zayıf çok yönlü yapı", "ÇY-" seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda ÇY+ seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından grafik çizimini tamamlayan Hazal ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

H: *Hocam bu grafikte kocaman boşluk var hatta bu boşluk sonsuza kadar gidiyor. Bence sürekli değildir. Zaten 2 noktasında limiti sonsuzdu!*

AÖ: *Başka yerlerde sürekli olabilir mi?*

H: Aslında grafiğin şurasında ve şurasında boşluk yok kaydırak gibi! Belki buralar sürekli olabilir.

Hazal'ın bu süreçte verdiği cevaplar bazı bilgi parçalarını birleştirmekte güçlük çektiğini göstermektedir. Oysa bütün hakkında bilgi sahibi olan bu öğrenci bilgiyi parçalarını birleştirmekte zorlanmıştır. Bu ve benzeri cevaplar "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir. Bütün hakkında bilgi sahibi olmadan sadece bilgi parçalarını ifade eden öğrenci cevapları ise "zayıf çok yönlü yapı", "ÇY-" seviyesine yerleştirilmiş olup aşağıda örneklendirilmiştir:

"Grafik var, limit sonsuz sürekli olması için grafik kopmamalı fakat burada grafik ayrı"

"2 tane grafik var fakat bir fonksiyona ait. Ayrı ayrı bakarsak elimizi kaldırmadan çizebiliriz. İşte "trace plots" ile üzerinde hareket edip hangi değerleri aldığını görebiliriz."

Yukarıda öğrenci cevaplarından örnek olarak seçilen grafiğin görselliğiyle ilgili ifadeler ve kopuk bilgi parçaları "zayıf çok yönlü yapı", "ÇY-" seviyesine yerleştirilmiştir.

10. çalışma yaprağının Üçüncü Soru Grubu içinde yer alan 4., 5. sorularına ders sürecinde verilen cevaplar incelendiğinde 4 öğrencinin cevapları zayıf çok yönlü yapı (ÇY-), 21 öğrencinin cevapları güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) ve 7 öğrencinin cevapları ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Genel olarak; fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle diyalogları derinlemesine incelendiğinde, beklenen öğrenmeye yaklaşıldığı görülmüştür. Grafik çizme menüsü olmadan fonksiyonun grafiğini çizemeyeceklerini ve sürekliliği inceleyemeyeceklerini belirten öğrenciler yazılım üzerinde buldukları grafikleri incelemede başarılı olmalarına rağmen verdikleri cevapları ilişkilendirmede beklenen başarıyı gösterememişlerdir. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, aynı sorular Derive ortamına taşınıp etkinliğin tamamlanması ve diyaloglar sonucu ÇY ve İY seviyelerine dönüştüğü görülmüştür. Yazılımı kullanılmadan önce grafik ve süreklilikle ilgili fikir yürütemeyen öğrenciler, yazılımı kullanıp grafiğe ulaştıklarında "kopuk noktalar yoksa süreklilik vardır", "limit için grafik çizdim" şeklinde doğru ifadeler kullanmaya başlamışlardır. Verdikleri cevaplarda kavramsal anlama olmasa bile BCS destekli öğrenme ortamında çalışan MYO öğrencilerinin bazı düşüncelerinin, ders sürecindeki diyaloglarda geliştiği görülmüştür. Aşağıda bu gibi durumlara örnek olması açısından Medine ve araştırmacı öğretmen arasında 5. çalışma yaprağının Üçüncü Soru Grubunda yer alan 6., 7. Sorularında geçen diyaloğun bazı bölümlerine yer verilmiştir;

Dersin başlangıcında yazılıma alışma sürecinde;

M: *Hocam burada fonksiyonun grafiği istenmiş. Derive olmasa çizebilir miyim diye düşündüm. Tabi ki imkansız zaten fonksiyonda sinüs var kesir var!... Grafiği çizdim!*

AÖ: *Şimdi grafiğini incele bakalım sürekli mi değil mi?*

M: *Hocam burada süreklilik incelemem için bir menü göremedim.(Yazılım üzerinde yer alan menüleri gösterir)*

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin verdiği cevaplar grafik çizimi ve yazılım odaklı olduğundan tek yönlü yapı “TY” sevisinde düşündüğü söylenebilir. Bundan sonraki süreçte aynı grafiği yazılım üzerinde limit-süreklik için inceleyen Medine ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

AÖ: *Süreklilik incelemen için öyle bir menü olması gerekmez! Başka şeyler düşünmeye çalış ve düşüncelerini sesli ifade et.*

M: *Evet “trade plots” ile grafik üzerinde hareket edebiliyorduk. Eğer boşluk varsa sürekli değil boşluk yoksa sürekli olur. Grafiği büyüttüğümüzde sıfır noktasında boşluk olduğunu görüyoruz. Yani burada sürekli olmaz. O halde sürekli değil.*

AÖ: *Peki sonsuzdaki limitini grafik üzerinde inceleyebilir misin?*

M: *Grafik sağa sola doğru sonsuza kadar gidiyor fakat boşluk var bence limitini inceleyemem.*

Bu diyalogda Medine’nin verdiği cevaplar grafik üzerinde limit-süreklilik durumunu incelemeye yönelik olsa bile birbirinden kopuk bilgi parçaları içerdiğinden çok yönlü yapı “ÇY” sevisinde düşündüğü söylenebilir. Ayrıca aynı soru grubu için yeni dönem ders sürecinde Medine ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir:

AÖ: *Medine, ders içinde incelemiş olduğun* $f(x) \coloneqq x.sin\frac{2}{x}$ *fonksiyon grafiğini x, ∞’a yaklaşırken inceleyebilir misin?*

M: *(Önünde bulunan bilgisayara yönelen Medine Derive’de grafiği çizer) İşte bu grafik benim en çok sevdiğim grafik buydu. Kalp atışları gibi! Sıfır noktasında boşluk olduğu için grafik sürekli değil! Hocam burada sonsuzda limitine de bakabiliriz (yazılım üzerinde fonksiyonun sonsuz için limitini 2 olarak bulur) Hocam bu şunu söylüyor grafiğin kolları sonsuza giderken 2’ye yaklaşıyormuş!*

Medine ile araştırmacı öğretmenin bilgisayar destekli öğrenme ortamında ders sürecinde geçen diyaloğu ile yeni dönem ders sürecinde geçen diyaloğu arasında büyük fark olmamasına rağmen, ders süreci içerisindeki sorulan sorulara verilen cevapların yeni dönem ders sürecinde giderek daha rahat cevaplara dönüştüğü görülmüştür. Ayrıca yazılımı kullanmadan önce grafik çizmeyle ilgili verdiği cevapları TY seviyesine yerleştirilirken yazılımın kullanımı ve diyaloglar sonucu İY seviyesine gelişmiştir. Medine önceki ders süreçlerinde sorulan sorularda sözel ifadeler kullanırken, BCS ortamında öncelikle yazılımı kullandığı görülmüştür. Medine'nin çalışma yaprakları ilerledikçe sorularda karşılaştığı fonksiyonları görür görmez bilgisayarına ve Derive yazılımına yönelmesi BCS ortamının öğrenme sürecinde teknolojiye olan eğilime etkisini göstermektedir. Derive yazılımı olmadan grafik çizimi yapamayan öğrenciler, yazılım sayesinde grafik çizimi yapıp, üzerinde limit-süreklilik inceleyerek yorum yapabilecekleri güzel bir ortam bulmuştur.

Yukarıda örnek olarak verilen diyaloglara ilave olarak araştırmacı öğretmenin ders sürecinde alığı notlardan BCS ortamının, öğrencilerin grafiği inceleyip fonksiyonun sürekli olduğu aralıkları bulmalarında öğrenmeye katkı sağladığı görülmüştür. MYO öğrencileri ile geçen diyaloglarda araştırmacı öğretmenin aldığı bu notlardan bazıları aşağıda örnek olarak verilmiştir:

"belirsiz durumlarda limit olabilirmiş…"

"…sürekli olması için grafik incelenir ve elimizi kaldırmadan çizim yapıyorsak süreklilik vardır deriz."

"Grafik çizmek çok zevkli… Hatta fonksiyonun çözümü olmasa bile grafik çizebiliyoruz…"

"… kalp atışı, peri bacası, kaydırak, dağ gibi grafiklerimiz oluyor bunları incelerken "trade plots" ile üzerinde hareket ediyoruz. Sonra limit bulup grafiğini üzerinde çizebiliyoruz. Bazen düz çizgi gibi gördüğümüz grafiklerde boşluklar oluyor…"

Bulundukları ortamda birbirleriyle fikir alış-verişi yapabilen MYO öğrencileri için, BCS ortamı derse katılımı sağlamada etkili olmuştur. Öğrenciler Derive yazılımı ile yakından ilgilenmiştir. Teorik olarak anlatılan derslerde uyuyan bazı öğrencilerin bu öğrenme ortamında uyumadan Derive yazılımı ile ilgilendiği görülmüştür. Bu bağlamda Derive yazılımının öğrenciler için dikkat çekici ve eğlenceli olduğu açıktır.

Fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, Derive yazılımındaki çalışmaları ve araştırmacı öğretmenle geçen diyaloglarının tamamı incelendiğinde, öğrencilerde beklenen öğrenmeye yaklaşıldığı görülmüştür. Buna rağmen bazı öğrencilerin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, etkinliğin tamamlanması ve diyaloglarla ÇY ve İY seviyesine çıktığı görülmüştür. Sonuç olarak Üçüncü Soru Grubu sorularına verilen cevapların tümü SOLO ile değerlendirildiğinde öğrencilerin verdiği cevaplardan 12’si tek yönlü yapı (TY), 4’ü zayıf çok yönlü yapı (ÇY-), 113’ü çok yönlü yapı (ÇY), 21’i güçlü çok yönlü yapı (ÇY+), 23’ü zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) ve 19’u ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Özet

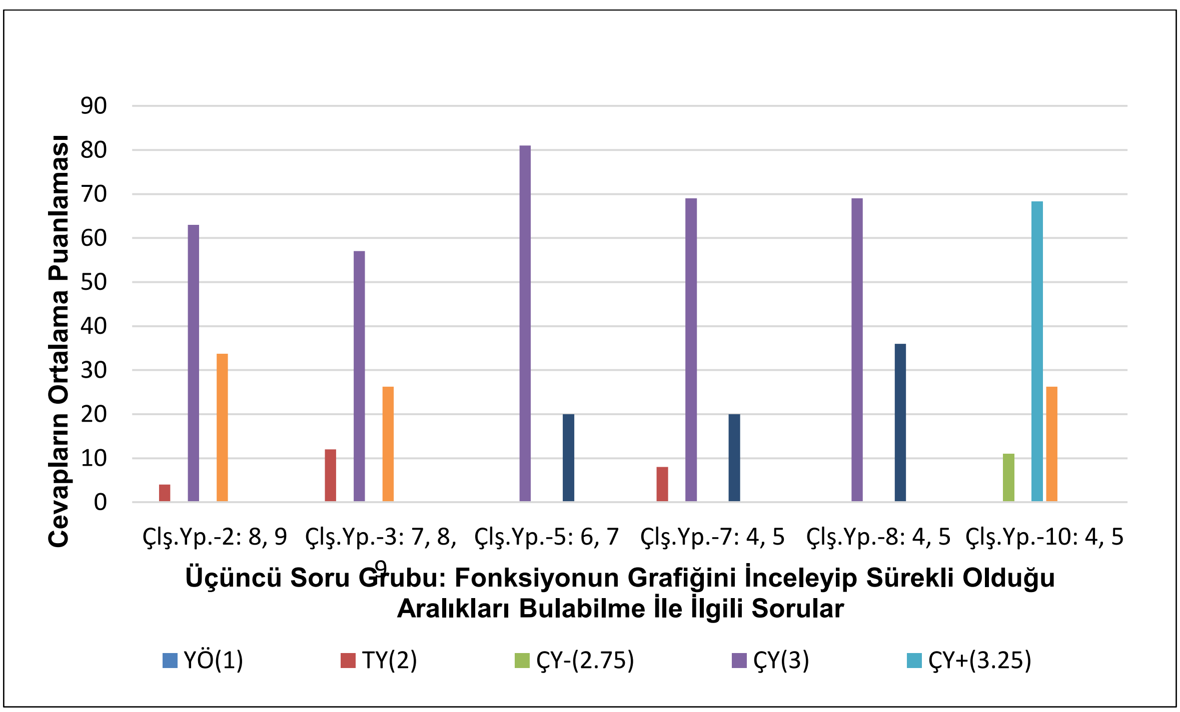
Fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili Üçüncü Soru Grubu sorularını incelediğimizde MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarında, ekran çıktılarında ve diyaloglarda verdikleri cevapların genel olarak çok yönlü yapı (ÇY) ile ilişkilendirilmiş yapı (İY) seviyeleri arasında olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tabloda MYO öğrencilerinin fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulmayı öğrenmelerine yönelik vermiş oldukları cevapların SOLO taksonomisine göre seviyelerinin öğrenci cevap sayısı belirtilmiştir. Tabloda yer alan (-) işareti zayıf yapıları, (+) işareti ise güçlü yapıları temsil etmektedir. Bu seviyeler altında verilen öğrenci cevap sayıları o öğrencilerin ulaştıkları en üst seviyeyi göstermektedir. Böylece bu soru gruplarına verilen cevapların seviyesi genel olarak temsil edilmektedir.

Tablo 30. Üçüncü Soru Grubu: SOLO Seviyesine Göre Fonksiyonun Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulabilme ile İlgili Öğrenci Cevap Sayısı

Soru Grubunun Adı	Çalışma Yaprağı	Soru No	SOLO Seviyeleri														
			-	YÖ (1)	+	-	TY (2)	+	-	ÇY (3)	+	-	İY (4)	+	-	SY (5)	+
Üçüncü Soru Grubu	2	8, 9,					2			21		9					
	3	7, 8, 9					6			19		7					
	5	6,7								27			5				
	7	4, 5					4			23			5				
	8	4, 5								23			9				
	10	4, 5							4		21	7					

Yukarıdaki tablo incelendiğinde 2. Çalışma Yaprağının 8., 9. soruları, 3. Çalışma Yaprağının 7., 8., 9. soruları, 5. Çalışma Yaprağının 6., 7. soruları ve 7., 8., 10. Çalışma Yapraklarının 4., 5. sorularının Üçüncü Soru Grubu içerisinde değerlendirildiği görülmektedir. Öğrencilerin bu sorulara verdiği cevaplardan toplam 19 ilişkilendirilmiş yapı (İY, 4); 23 zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-,3.75); 21 güçlü çok yönlü yapı (ÇY+,3.25); 113 çok yönlü yapı (ÇY,3); 4 zayıf çok yönlü yapı (ÇY-,2.75) ve 12 tek yönlü yapı (TY,2) seviyesinde öğrenme çıktısı elde edilmiştir. Böylece fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili incelenen bu sorularda, MYO öğrencilerinin verdikleri cevapların genel olarak çok yönlü yapı (ÇY,3) ile ilişkilendirilmiş yapı (İY,4) seviyeleri arasında olduğu belirtilebilir. Bu durum MYO öğrencilerinin, grafik üzerinde limit-süreklilik inceleyebilmelerine yönelik sorulan soru gruplarında bilgi parçalarını tüm yönleriyle ilişkilendirmede başarılı olamasalar da tutarlı ifadeler kullandıklarını ortaya çıkarmaktadır.

Tablo 30'da verilen veriler ve bu verilere ait veri analizleri incelenerek MYO öğrencilerinin bu kazanım ile ilgili her bir soru grubuna verdikleri cevapların ortalama seviyesi belirlenmiştir. Ortaya konan bu ortalama seviye ilgili başlık altındaki her soruya bu seviyede cevap verileceği anlamına gelmese de genel bir bakış açısı sunmaktadır. Bu doğrultuda diğer başlıklar arasında kıyas yapabilmeyi kolaylaştırmak ve genel bir bakış sunmak açısından öğrenci sayıları doğrultusunda SOLO seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması aşağıdaki grafik ile özetlenmiştir.



Grafik 3. Fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili solo seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması

Grafik 3, fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili 2. Çalışma Yaprağının 8., 9. sorularına verilen cevaplardan 2'sinin tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 4 (TY), 21'inin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 63 (ÇY), 9'unun zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 33.75 (İY-) puanlamasına; 3. Çalışma Yaprağının 7., 8., 9. sorularına verilen cevaplardan 6'sının tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 12 (TY), 19'unun çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 57 (ÇY), 7'sinin zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 26.25 (İY-) puanlamasına; 5. Çalışma Yaprağının 6., 7. sorularına verilen cevaplardan 27'sinin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 81 (ÇY), 5'inin ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 20 (İY) puanlamasına; 7. Çalışma Yaprağının 4., 5. sorularına verilen cevaplardan 4'ünün tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 8 (TY), 23'ünün çok yönlü yapı seviyesinde olması ortalama 69 (ÇY), 5'inin ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olması ortalama 20 (İY) puanlamasına; 8. Çalışma Yaprağının 4., 5. sorularına verilen cevaplardan 23'ünün çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 69 (ÇY), 9'unun ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 36 (İY) puanlamasına; 10. Çalışma Yaprağının 4., 5. sorularına verilen cevaplardan 4'ünün zayıf çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 11 (ÇY-), 21'inin güçlü çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 68.25 (ÇY+) ve 7'sinin zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 26.25 (İY-) puanlamasına karşılık geldiğini göstermektedir.

Yukarıda bu grubu özetlemek için verilen tablo, grafik ve diyaloglar süreçler halinde incelendiğinde, yazılımı kullanmaya başlamadan önce kâğıt-kaleme yönelen öğrencilerin, soruların bir yönüne odaklanan ve birbirinden bağımsız anlamlı bilgi parçaları içeren cevaplar verdiği, yazılımın kullanılmasıyla verilen cevapların geliştiği, cevaba ilişkin bazı yönlerin birbiriyle olan ilişkilerinin ifade edildiği ve bütün içindeki yerine değinildiği görülmüştür. Bu durum başlangıçta tek yönlü ve çok yönlü düşünme seviyesinde verilen öğrenci cevaplarının bilgisayar destekli öğrenme ortamında güçlü çok yönlü yapı ve ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesine geliştiğini göstermektedir. Bu anlamda çalışma yaprakları ve BCS ortamı, MYO öğrencilerinin "fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulma" ile ilgili öğrenme sürecine katkı sağlamıştır. Ayrıca yeni dönem ders sürecinde öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları çözmek için doğrudan yazılıma yönelmiştir. Derive yazılımı olmadan fonksiyonun grafiği ve sürekliliği ile ilgili hiçbir fikri olmayan öğrencilerin yazılıma yönelmeleri, BCS'nin öğrenme sürecinde öğrencilerin soyut düşünmelerine katkı sağladığını göstermektedir.

4. 4. Dördüncü Soru Grubu: Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Düşünebilme ile İlgili Bulgular

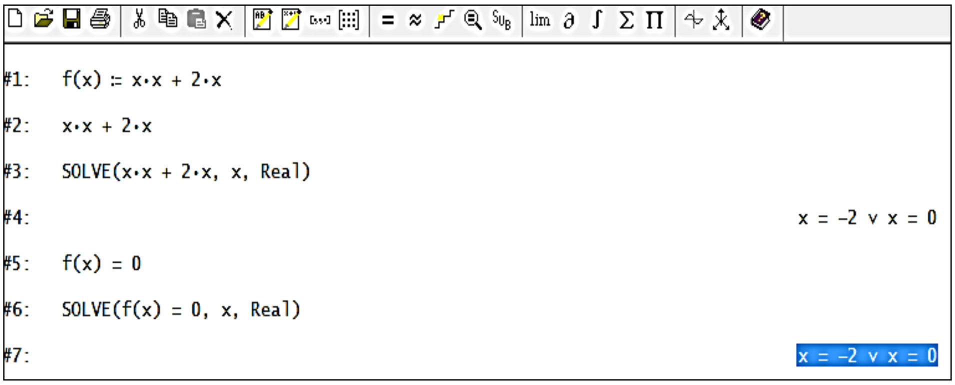
Bu başlık altında Dördüncü Soru Grubu soruları ve sürece etkisi ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir soru grubu için MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yapraklarına yazdıkları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle aralarında geçen diyalogları ayrı ayrı incelenerek MYO öğrencilerinin fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilmeleri doğrultusunda verdikleri cevaplar ortaya çıkarılmıştır. Bu cevaplar incelenip birbirine benzer olan ve aynı ifadeleri içeren öğrenci cevapları seçilerek bulgular oluşturulmuştur. Aşağıda Dördüncü Soru Grubu sorularına örnek olarak seçilen öğrenci cevaplarına yer verilmektedir.

7. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 2., 3. sorularında MYO öğrencilerinden verilen $f\colon[-1,2] \to R, f(x) \coloneqq x^2 + 2x$ fonksiyonu tanımladıktan sonra f(x)=0 için çözüm bulmaları istenmiştir. Burada fonksiyonun belli bir tanım aralığı vardır ve grafik çizilmeden belli bir aralıkta sürekliliğin açıklanabilmesi için fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağının bilinmesi gerekir. Bu soruların kağıt-kalem ile kolayca çözülebileceğini düşünen öğrencilerden bazıları Derive yazılımını kullanma gereği hissetmemiştir. Bulduğu çözümlerin doğruluğunu gösterebilmek için Derive yazılımını kullanan Remzi ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

R: *Hocam burada benden f(x)=0 için çözüm istenmiş. Bu bizim sınıflarda yaptığımız çözüm gibi mi bulunacak? Çözüm kümesi mi bu? (limit-süreklilik konusunu bilgisayar laboratuvarında çalıştığımız için Remzi'nin sınıf olarak ifade ettiği geleneksel derslerimizi işlediğimiz sınıflardı)*

AÖ: *Evet Remzi bu fonksiyonun f(x)=0 için çözüm kümesidir.*

R: *Bunu programda yapmasam… (Remzi bunu söylerken bir yandan çalışma yaprağında fonksiyonun çözümünü yaparak ÇK={0,-2} bulmuş olup, bir yandan da Derive yazılımında sonuç bulmaya çalışıyordu). Soruda Derive programını kullanmamı istemiş bir bakalım o da benim gibi 0 ve -2 bulacak mı?*



Şekil 84. Remzi'nin 7. çalışma yaprağının "dördüncü soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

R: *Hocam bu süper bir program. Yaptığım her şeyin doğru olup olmadığını ispatlayabilirim…*

AÖ: *3. soruyu cevaplamaya geçebilirsin!*

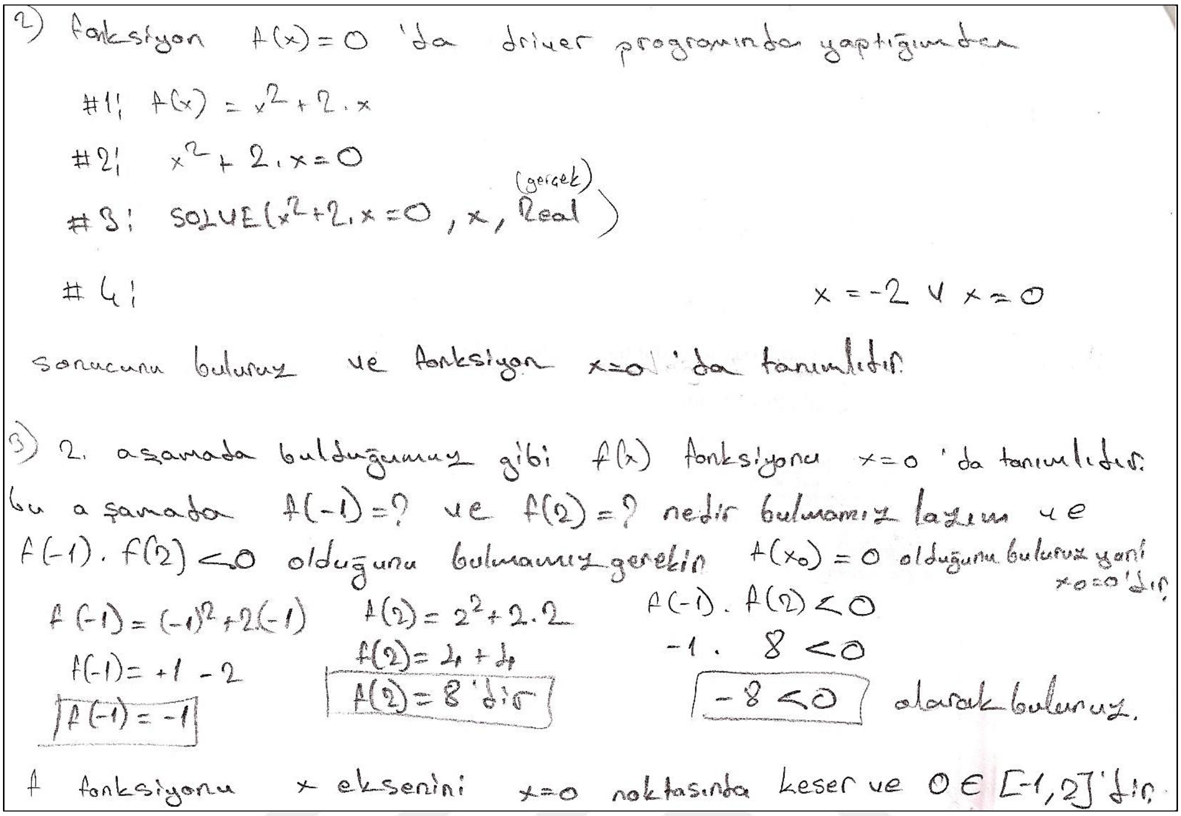
R: *Hangisi tanım kümesi aralığında kaldı x eksenini keser mi diye soruyor bunu neden soruyor ki? Biz süreklilikle ilgilenmeyecek miydik?*

AÖ: *Önceki bilgilerini yoklayarak neden sorduğunu hatırlamaya çalış.*

R: *Hımm… Bir aralık varsa o aralıktaki değerleri bulmamız gerekiyordu. Sonra sıfırdan küçük mü büyük mü diye bakıyorduk… Öyle değil mi hocam?*

AÖ: *Peki devam et.*

R: *Bunu tam olarak anlayamadım ve ne için yaptığımı da bilmiyorum. Şöyle bir şeyler yapmıştık. Kapalı bir aralık varsa sınır noktalarının değerlerini bulup çarpıyoruz… İşte öyle devam ediyoruz…(Remzi bunları söylerken çalışma yaprağına 2. ve 3. soruların çözümünü aşağıdaki gibi yapmıştı).*



2) fonksiyon $f(x)=0$ 'da driver programında yaptığımdan

#1: $f(x) = x^2+2.x$

#2: $x^2+2.x=0$

#3: SOLVE($x^2+2.x=0$, x, Real (gerçek))

#4: $x=-2 \vee x=0$

sonucunu buluruz ve fonksiyon $x=0$'da tanımlıdır.

3) 2. aşamada bulduğumuz gibi $f(x)$ fonksiyonu $x=0$'da tanımlıdır. bu aşamada $f(-1)=?$ ve $f(2)=?$ nedir bulmamız lazım ve $f(-1).f(2)<0$ olduğunu bulmamız gerekir $f(x_0)=0$ olduğunu buluruz yani $x_0=0$'dır

$f(-1)=(-1)^2+2(-1)$ $f(2)=2^2+2.2$ $f(-1).f(2)<0$

$f(-1)=+1-2$ $f(2)=4+4$ $-1 . 8<0$

$\boxed{f(-1)=-1}$ $\boxed{f(2)=8'\text{dir}}$ $\boxed{-8<0}$ olarak buluruz.

f fonksiyonu x eksenini $x=0$ noktasında keser ve $0\in[-1,2]$'dir.

Şekil 85. Remzi'nin "dördüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 7. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Remzi biz bunları ne için yapmıştık?*

R: *Soruda sürekliliği inceleyin demiş ya… İşte kapalı aralıkta tanımsızlık varsa bizim bunu görmemiz gerekir ki sürekliliği bulalım. Bunu da bulabilmek için bunları yapıyoruz diye düşünüyorum. (Okan bunları söylerken kendinden emin olmadığı araştırmacı öğretmenden beklediği onayda belli oluyordu.)*

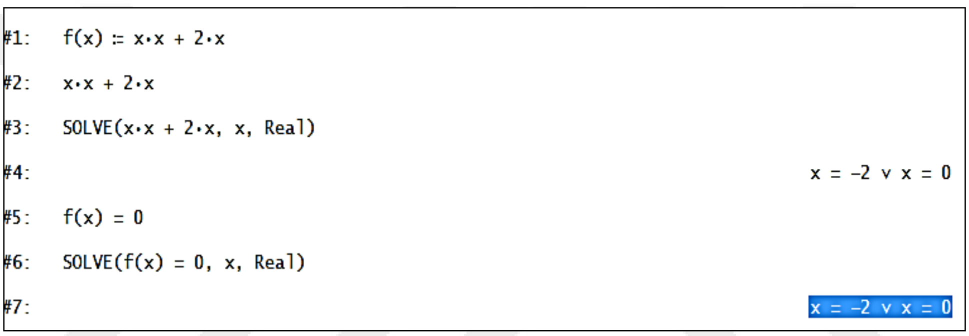
Remzi'nin yukarıda verdiği cevaplarını incelediğimizde başlangıçta basit gibi gördüğü sorular için ileri aşamalarında zorlandığını ve verdiği cevaplardan çekindiğini görmekteyiz. Remzi'nin cevapları belli başlı bilgi parçalarını içeren ve kavramsal anlamaya yakın cevaplar olduğundan çok yönlü yapının üzerinde cevaplar olduğu açıktır. Buna rağmen verdiği cevaplardaki bilgi parçalarını kavramsal olarak birleştirmeyen Remzi verilen kapalı aralıkta fonksiyonun sürekliliği ile ilgili yeterli de cevap verememiştir. Remzi'nin bu sorulara yönelik cevapları kavramsal anlamadan uzak ezbere bilgi parçalarını içerdiğinden "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir.

7. çalışma yaprağının 2., 3. sorularına verilen cevapların tamamı incelendiğinde Hülya, Devrim, Özcan, Okan ve Medine'nin cevaplarında Remzi'nin ifadelerine benzer ifadelerle karşılaşılmıştır. Diğer öğrencilerden kapalı aralıkta sürekliliğin nasıl incelenmesi gerektiği hakkında bilgi veremeyen fakat f(x)=0 için çözüm bulmaya çalışan 19 öğrenci

cevabı sorunun tek bir yönüne odaklandığından bu cevaplar “tek yönlü yapı”, “TY” seviyesine yerleştirilmiştir. Sürekliliği incelemeye çalışmalarına rağmen sıfır için fonksiyon çözümüne odaklanan Sadullah, Merve, Fatma, Derya, Hazal, İsmail ve Kadir’in cevapları ise “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleştirilmiştir.

Aşağıda ÇY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından İsmail ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyaloga yer verilmiştir.

İ: *Hocam bu sorulardan bir şey anlamadım. Şimdi f(x)=0 için çözüm bulmak için fonksiyonu sıfıra eşitleriz. Sonra tanım kümesinde kalan noktayı neden bulmaya çalışacağız ki? (yazılım üzerinde fonksiyonun sıfır için çözümünü bulur)*



Şekil 86. İsmail’in 7. çalışma yaprağının “dördüncü soru grubu” sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

AÖ: *Dersimizin konusu ile ilişkilendirebilirsin.*

İ: *Süreklilikle mi?*

AÖ: *Olabilir.*

İ: *Hocam burada x’in real çözümünde -2 ve 0 var. Burada sürekliliğe bakmak için grafik çizeriz. Bu noktalara bakarız. Sürekli olup olmadığını anlarız. (araştırmacı öğretmenin onayını bekliyor)*

AÖ: *Peki burada bir aralık verilmesinin sebebi ne olabilir? Nasıl ilişkilendirirsin?*

İ: *Fonksiyonun sürekli olup olmadığını görmemiz için aralık verilmiş. Grafikte [-1,2] aralığına bakarız elimizi kaldırmadan çizim yapabiliyorsak süreklidir.*

İsmail’in kapalı aralıkta süreklilik incelemeye yönelik verdiği cevaplar yeterli olmasa da f(x)=0 için çözüm bulmuş olması ve bu çözümünü sorgulaması verdiği cevapların “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleşmesinde etkili olmuştur. İsmail’in cevaplarına benzer ifadeler kullanan Sadullah, Merve, Fatma, Derya, Hazal ve Kadir’in cevapları da “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleştirilmiştir. Geri kalan 19 öğrenci sorunun tek bir yönüne odaklanıp f(x)=0 için çözüm bulmayla ilgili ifadeler kullanmışlardır. Bu ifadeleri içeren cevaplar "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda TY seviyesinde verilen cevaplara örnek olması açısından bazı öğrencilerin ifadelerine yer verilmiştir:

"Derive kullanmadan f(x)=0'ı bulabiliriz…"

"Hocam burada x yerine sıfır mı yazacağız?"

"x eksenini kesip kesmediğini nasıl bulacağız ki…."

"Bundan önceki derste yapığımız çalışma yaprağı daha güzeldi. Burada Derive'yi daha az kullanıyoruz…"

7. çalışma yaprağının Dördüncü Soru Grubu içinde yer alan 2., 3. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 19 öğrencinin cevapları tek yönlü yapı (TY), 7 öğrencinin cevapları çok yönlü yapı (ÇY) ve 6 öğrencinin cevapları ise güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 6. sorusunda MYO öğrencilerinden önceki adımlarda grafiğini çizmiş oldukları $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu özellikle x=2 noktasında inceleyerek süreklilikle ilgili neler öğrendiklerini ifade etmeleri istenmiştir. Böylece öğrencilerin fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını öğrenmeleri beklenmiştir. Çalışma yaprağının önceki adımlarını tamamladıktan sonra fonksiyonun grafiğini inceleyip süreklilikle ilgili cevap veren öğrencilerden Derya ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

D: *Burada önceden çizmiş olduğumuz $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyon grafiğini incelediğimizde; x=2 noktasında f(x) fonksiyonun $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ olduğunu görüp bu fonksiyonun x=2 noktasında tanımlı olmadığını söylemiştim. (Bu süreçte Derya Derive yazılımında önceden çizmiş olduğu grafiği tekrar çizerek incelemeye başlamıştır)*

AÖ: *Evet…*

D: *Şimdi benden istenen bu fonksiyonun sürekli olup olmadığı değil herhalde? Çünkü bundan önceki çalışmalarda süreklilik tanımını vererek fonksiyonun sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili bir sürü soru çözdük. (Derya burada süreklilik tanımını önceden yapmış olduğu için tekrarlamak istemiyordu. Çünkü bu soruda mutlaka yeni bir şey öğrenmesi gerektiğini farkındaydı)*

AÖ: *Doğru düşünüyorsun. Zaten bu soru "Bu etkinliği tamamlamak size süreklilik konusu ile ilgili nasıl bir bilgi edinmenize yardımcı oldu" dikkatli incelediğinde bu etkinlik sayesinde kazanmış olduğun yeni bir bilgiden bahsetmen istenmiştir. Lütfen bütün düşündüklerini sesli bir şekilde ifade etmeye çalış.*

D: *Anladım hocam, yine yeni bir şey bulmamız gerekiyor… Kesinlikle limit ve sürekliliğin bitmek bilmeyen kurallarından birini daha bulmamı bekliyorsunuz!*

AÖ: *Bu kez sadece süreklilikle ilgili yeni bir şey bekliyorum!*

D: *Bu soru grubu içeriğini ilgilendiren* $f(x) \coloneqq \frac{x^2-4}{x-2}$ *fonksiyonu tekrar incelediğimizde x=2 noktasında tanımsız olan bu fonksiyonun grafiğinde bu noktada bir boşluk olduğunu görmekteyiz. Oysa sürekli bir fonksiyonun grafiğini incelediğimizde grafiğin hiçbir yerinde boşluğun olmaması gerektiğini biliyoruz. Fakat bu durum fonksiyonun tamamının sürekli olması durumunda geçerli bir kuraldır. Oysa bu soru ile ilgili fonksiyonu tamamen incelediğimizde sadece x=2 için bir tanımsızlıkla karşılaşmaktayız… (Derya bu esnada söylediklerine yönelik araştırmacı öğretmenin onayladığı birtakım yorumları çalışma yaprağına yazıyordu)*

AÖ: *Evet Derya, doğru yolda ilerliyorsun. Devam edebilirsin. Süreklilik ile ilgili çeşitleri hatırlamaya çalış!*

D: *Hımm… Şimdi daha iyi anladım burada bir süreklilik çeşidi var… Fakat x=2 noktasında bu fonksiyon tanımlı olmadığı için süreklik çeşidi değil süreksizlik çeşidi vardır…*

AÖ: *Güzel!*

D: *Fonksiyona tekrar bakıp bütün değerler için incelediğimizde sorunlu olan tek bir nokta vardır. O da x=2 noktası… Ayrıca önceki aşamalarda bu nokta için limit değerini aldığımızda limit vardır ve bu limit değeri 4'tür diye söylemiştik. İşte sorunlu olan tek bir noktanın olması fonksiyonun tek bir noktada süreksiz olması anlamına gelmektedir… Kısacası bu tek noktada limit var fakat süreklilik olmadığından bu tek noktayı düşünmediğimizde fonksiyon her yerde sürekli olacaktır.*

AÖ: *Peki bu tip süreksizliklere ne denir?*

D: *Kalkan süreksizlik gibi bir şey denirdi…*

AÖ: *Teşekkürler.*

Derya başlangıçta ne ile ilgili yanıt vermesi gerektiğini karıştırmış olsa da önceki adımlarda yapmış olduğu çalışmaları derinlemesine incelediğinde x=2 noktasındaki soruna odaklanabilmiştir. Buradaki tanımsızlığı incelediğinde fonksiyonun bu noktada limit değerinin olmasına rağmen süreksiz olduğunu gören Derya, bu noktanın dışında fonksiyonun her yerde sürekli olduğunu başarılı bir şekilde açıklayabilmiştir. Söylediklerini önceki adımlarda çizmiş olduğu grafik üzerinde gösterebilen Derya bu fonksiyon ile ilgili teorik olmayan fakat öğrenmeye yönelik tanım yapmaya çalışmıştır. Bu tanıma göre fonksiyonda “kalkan süreksizlik” vardır. Derya’nın cevapları tam olarak kavramsal anlamayı içermese bile limit-süreklilik ve grafik yorumuyla ilgili öğrendiklerini kendi ifadeleri ile aktardığından “zayıf ilişkilendirilmiş yapı”, “İY-“ seviyesine yerleştirilmiştir. Bu cevaplara benzer ifadeler içeren Sadullah, Merve, Okan ve Remzi’nin cevapları da “zayıf ilişkilendirilmiş yapı”, “İY-” seviyesine yerleştirilmiştir. Öğrenci cevaplarından benzer ifadeler içermesine rağmen sürekliliği herhangi bir aralık incelemekte güçlük çeken ve bilgi parçalarını birleştiremeyen 11 öğrenci cevabı ise “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda 11 öğrencinin ders sürecinde kullandığı ifadelerden bazılarına yer verilmiştir:

“Derive kullanmadan x=2 noktası için çözüm yapamayız…”

“Hocam x=2 noktasında tanımlı olmasa bile limiti vardır…”

“… süreklilik için dümdüz çizebildiğimiz grafikler süreklidir. Eğer boş nokta varsa sürekli değildir. Burada 2 noktası boşluktur.”

“bu nasıl bir süreklilik düz çizgi olduğu için düz süreklilikir. 2 hariç…”

“x=2’de limit bulmuştuk fakat boşluk olduğu için sürekli değil…”

Geri kalan 16 öğrencinin verdiği cevaplar ise çalışma yaprağının önceki adımlarıyla ilişkili olmayan klasik süreklilik tanımı şeklindedir. Bu ve benzeri cevapları içeren ifadeler “tek yönlü yapı”, “TY” seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda TY seviyesinde cevap veren 16 öğrenciden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

“Süreklilik konusu ile ilgili elimizi kaldırmadan grafik çizmemiz gerektiğini öğrendim”

“… yukarıya doğru eğimli olan bu grafik elimizi kaldırmadan çizebildiğimizde sürekli olur”

“… Hocam Derive ile süreklilik inceleyebileceğimizi öğrendik…”

“… boşluk yoksa sürekli boşluk varsa süreksizdir. Burada 2 noktasında boşluk var. Başka boşluk yok”

8. çalışma yaprağının Dördüncü Soru Grubu içinde yer alan 6. sorusuna ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 16 öğrenci cevabı tek yönlü yapı (TY), 11 öğrenci cevabı çok yönlü yapı (ÇY) ve 5 öğrenci cevabı ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilmiştir.

10. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 6. sorusunda MYO öğrencilerinden önceki adımlarda grafiğini çizmiş oldukları$f(x) \coloneqq \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunu özellikle x=2 noktasında inceleyerek süreklilikle ilgili neler öğrendiklerini ifade etmeleri istenmiştir. Böylece

öğrencilerin fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını öğrenmeleri beklenmiştir. Çalışma yaprağının önceki adımlarını tamamladıktan sonra fonksiyonun grafiğini inceleyip süreklilikle ilgili cevap veren öğrencilerden Özcan ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

Ö: *Şimdi bu soru grubu ile ilgili önceki çalışmalarımı incelersem burada fonksiyonun grafiğine de baktığımızda tanımsızlığın olduğunu görüyorduk… Burada sorumuz süreklilik ile ilgili yeni ne öğrenmiş olduğum. Oysa bu sürekli değildir ki hocam…*

AÖ: *Bütün aralıklarda da sürekli olmadığını mı söylemek istiyorsun?*

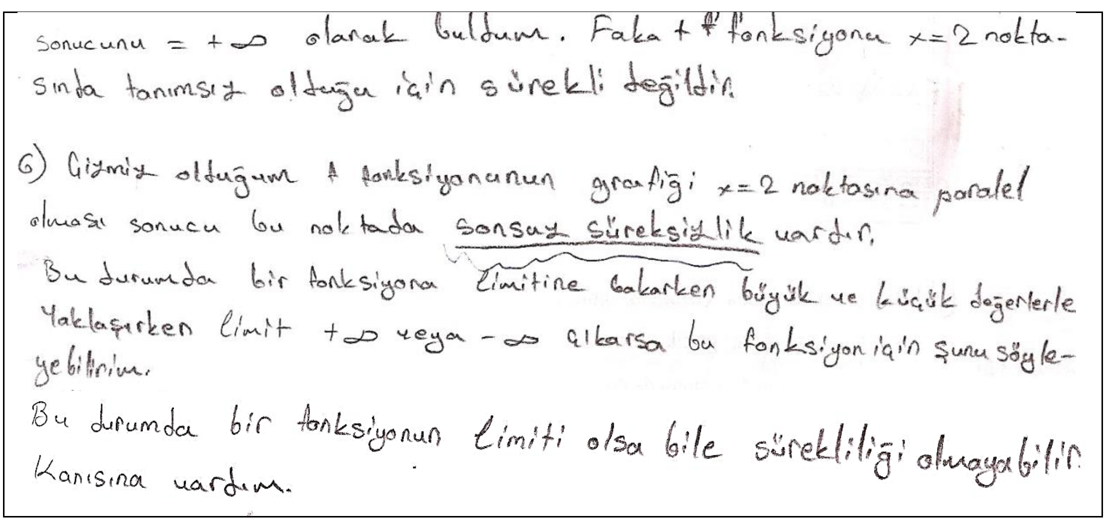
Ö: *Aslında grafikten de gözüktüğü gibi x=2 noktasında tanımsız… Sürekli değil… Limit var… Diğer yerlerde… Hocam sürekli değildi. Şimdi süreklilikle ilgili yeni ne öğrendiğimi soruyorsunuz… (Özcan bu süreçte çalışma yaprağının önceki aşamalarında verdiği cevapları tekrar gözden geçirerek yanıt vermeye çalışmaktadır)*

AÖ: *Bu senin yeni öğrenmiş olduğun bir terimi açıklaman için olabilir!*

Ö: *Sonsuzluk demek istiyorum da tam olarak ifadeyi hatırlayamıyorum. (Özcan araştırmacı öğretmenin onayını bekliyor)*

AÖ: *Devam edebilirsin… Süreklilik ile ilgili çeşitleri hatırlamaya çalış!*

Ö: *Öteki çalışma yapraklarında böyle bir şey yapmıştık. Burada "Sonsuzluk süreksizliği" var… Çünkü boşlukta grafiğe paralel bir doğru vardı… (Özcan bunları söylerken bir yandan da çalışma yaprağına aşağıdaki ifadeleri yazıyordu)*


Sonucunu $= +\infty$ olarak buldum. Fakat f fonksiyonu $x=2$ nokta-
sında tanımsız olduğu için sürekli değildir.

6) Çizmiş olduğum f fonksiyonunun grafiği $x=2$ noktasına paralel
olması sonucu bu noktada sonsuz süreksizlik vardır.
Bu durumda bir fonksiyona limitine bakarken büyük ve küçük değerlerle
yaklaşırken limit $+\infty$ veya $-\infty$ çıkarsa bu fonksiyon için şunu söyle-
yebilirim.
Bu durumda bir fonksiyonun limiti olsa bile sürekliliği olmayabilir
kanısına vardım.

Şekil 87. Özcan'ın "dördüncü soru grubu" sorularıyla ilgili 10. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Sonsuz süreksizlik demek istiyorsun herhalde?*

Ö: *Evet hocam sürekli değil fakat limit var. Buradan limit olsa bile fonksiyonun sürekli olamayacağını öğrendim.*

Özcan önceki adımlarında çizmiş olduğu grafiği inceleyip fonksiyonun sürekli olmadığını söylemiştir. Fonksiyonun x=2 noktasında tanımsız olduğunu ve limit olmasına rağmen sürekliliğin olmadığını söylemesi Özcan'ın cevaplarının ÇY seviyesinin üzerinde olduğunu göstermektedir. Ayrıca x=2 doğrusunun boşlukta grafiğe paralel bir doğru olduğunu belirten Özcan limitin ∞ olduğunu söyleyebilmiştir. Bu fonksiyon ile ilgili teorik olmasa da kendi ifadeleriyle tanım yapmaya çalışmıştır. Bu tanıma göre fonksiyonda "sonsuzluk süreksizliği" vardır. Özcan'ın cevapları tam olarak kavramsal anlamayı içermese bile limit-süreklilik ve grafikle ilgili öğrendiklerini kendi ifadeleriyle anlatmaya çalıştığından "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" düşünme seviyesine yerleştirilmiştir. Bu cevaplara benzer ifadeler içeren Derya, Fatma, Çiğdem ve Devrim'in cevapları da "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" seviyesine yerleştirilmiştir. Öğrencilerden 17'si bulduğu grafiği beklenen şekilde yorumlayamayıp sürekliliğin tanımına odaklanmıştır. Bu öğrencilerin verdiği cevaplar "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda ÇY seviyesinde cevap veren öğrenciden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

"x=2 noktası için çözüm yapamayız çünkü burada $\frac{1}{0}$ belirsizliği var ve sürekli olamaz… "

"…limitin olması çok önemli değil burada kocaman bir boşluk var yani sürekli değil… "

"bu grafik iki taraftan yukarıya uzanıyor ve birbirini kesmiyor yani boşluk var süreklilik yok…"

"ayrı ayrı incelersek iki grafik de sürekli değildir…"

"…sonsuza kadar uzanan iki kol şeklinde grafikler vardır ve bunlar süreklidir…"

"… uzayıp giden kollar arasında sonsuz boşluk vardır. Sürekli olamaz yani sonsuzluk süreksizliği"

Geri kalan 10 öğrencinin verdiği cevaplar ise çalışma yaprağının önceki sorularıyla ilişkili olmayan klasik süreklilik tanımı şeklindedir. Bu ve benzeri cevapları içeren ifadeler "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda TY seviyesinde cevap veren 10 öğrenciden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

"Süreklilik bilgisini öğrendim"

"Derive'de grafik çizmeyi öğrendim… grafikte boş noktaları gördüm…"

"Elimizi kaldırmadan grafik çizdiğimizde süreklilik olur bunu trade plots ile bulabiliriz"

“Süreklilik ile ilgili Derive’de sürekliliği inceleyebileceğimizi gördük. Limit bulduk.”

“Süreklilik grafik olunca incelenebilir…”

10. çalışma yaprağının Dördüncü Soru Grubu içinde yer alan 6. sorusuna ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 10 öğrenci cevabı tek yönlü yapı (TY), 17 öğrenci cevabı çok yönlü yapı (ÇY) ve 5 öğrenci cevabı ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilmiştir.

Genel olarak; fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle diyalogları derinlemesine incelendiğinde, beklenen öğrenmenin gerçekleşemediği görülmüştür. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda sürekliliğin nasıl incelenmesi gerektiği ile ilgili bilgilerin kavramsal anlama boyutunu ihmal eden MYO öğrenci cevapları grafik üzerinde süreklilik tanımı ile sınırlı kalmıştır. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların aynı sorular Derive ortamına taşınıp etkinliğin tamamlanması ve diyaloglar sonucu bazen ÇY bazen de İY- seviyesine geliştiği görülmüştür. Yazılımı kullanılmadan önce fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik incelemekte güçlük çeken öğrenciler, yazılımı kullanıp grafik çizdiklerinde süreklilik bulma ile ilgili daha doğru ifadeler kullanmaya başlamışlardır. Verdikleri cevaplar ezbere bilgi parçası olmaktan öteye geçemese bile BCS destekli öğrenme ortamında çalışan MYO öğrencilerinin bazı ifadelerinin ders sürecindeki diyaloglarda geliştiği görülmüştür. Aşağıda bu gibi durumlara örnek olması açısından Sadullah ve araştırmacı öğretmen arasında 7. çalışma yaprağının Dördüncü Soru Grubunda yer alan 2., 3. sorularında geçen diyaloğun bazı bölümlerine yer verilmiştir;

Dersin başlangıcında yazılıma alışma sürecinde;

S:	*Hocam burada neden f(x)=0 için çözüm bulmaya çalışıyoruz. Yine limit mi bulacağız?*
AÖ:	*Hayır. Şimdi sürekliliği inceleyeceksin.*
S:	*Süreklilik için Derive’de çizdiğimiz grafik yeterli olmaz mı?*
AÖ:	*Her zaman grafik bulamayabilirsin. Grafik olmadan bir fonksiyonun sürekli olup olmadığını nasıl sorgularsın?*
S:	*(Düşünüyor) bilmiyorum.*

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin verdiği cevaplar sorunun tek bir yönüne odaklanarak fonksiyonun sürekliliği ve grafik arasında kalmıştır. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda sürekliliğin nasıl bulunacağı hakkında herhangi bir ifadeye rastlanmadığından öğrencinin tek yönlü yapı “TY” sevisinde düşündüğü söylenebilir. Bundan sonraki süreçte aynı soru grubunu yazılımda inceleyen Sadullah ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

AÖ: *O halde sürekliliği grafik üzerinde incelemeye çalış.*

S: *Burada grafik sonsuza uzayıp giden bir grafiktir. Elimizi kaldırmadan çizim yapabiliriz. Trade Plots ile üzerinde hareket ettiğimizde grafik süreklidir.*

AÖ: *Bütün aralıklar için bunu söyleyebilir misin?*

S: *[-1,2] aralığı verilmiş, f(x)=0 için çözüm istemiş. Demek ki bu aralıkta bir şeyler vardır! (araştırmacı öğretmenin onayını bekliyor)*

AÖ: *Belki de grafik olmadan süreklilik bulman içindir.*

S: *Hocam kesin öyledir de ben fonksiyonu bile anlamazken Derive olmadan limit bulamazken süreklilik nasıl bulacam? Zaten x eksenini kesip kesmediğini bile grafiği görünce anlıyorum.*

Bu diyalogda Sadullah’ın verdiği cevaplar fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağına yönelik olmasa da cevapları soru ile ilişkili kopuk bilgi parçalarını içerdiğinden çok yönlü yapı “ÇY” seviyesinde düşündüğü söylenebilir. Ayrıca aynı sorular için yeni dönem ders sürecinde Sadullah ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir:

AÖ: *Sadullah, önceki sorularda incelemiş olduğun* $f\colon[-1,2] \to R, f(x) \coloneqq x^2 + 2x$ *fonksiyonu için f(x)=0 da çözümünü nedenleriyle sesli düşünerek bulabilir misin?*

S: *(Düşünür) Hocam bu aralık inceleme sorusu değil mi? (Sadullah hemen önünde bulunan bilgisayara yönelip Derive’de grafik çizimi yapmıştır) Burada grafiği el kaldırmadan çizebildiğimiz için süreklidir.*

Sadullah’ın bilgisayar destekli öğrenme ortamında ders sürecindeki ifadeleri ile yeni dönem ders sürecindeki ifadeleri arasında büyük fark olmamasına rağmen, ders sürecinin başlangıcında sorulan sorularda sözel ifadeler kullanıp “TY” seviyesinde cevaplar verdiği ders sürecinin sonunda ve yeni dönem ders sürecinde yazılıma yönelip “ÇY” seviyesinde cevaplar verdiği görülmüştür.

Yukarıda örnek olarak verilen diyaloglara ilave olarak araştırmacı öğretmenin ders sürecinde aldığı notlardan Derive yazılımı kullanımının anlaşılır ve BCS ortamının öğrenmeye teşvik edici olduğu görülmüştür. MYO öğrencileri ile geçen diyaloglarda araştırmacı öğretmenin aldığı bu notlardan bazıları aşağıda örnek olarak verilmiştir:

"… grafikte boşluklu noktalar varsa kalkan sürekli yoksa süreklidir."

"…eğer grafikte boşluk varsa burası tanımsızdır"

"Derive ile grafik çizmek çok zevkli… fonksiyon ile ilgili hiçbir fikrim olmasa bile grafik sayesinde sürekliliğini inceleyebiliyorum."

"süreklilik incelemek için f(x)=0'ı inceledik. Fakat sebebini bilmiyorum"

"Hocam hiç bu kadar grafik incelememiştim"

"bu yazılımı satabilir miyiz?"

"belirsiz şeylerin çözümünde Derive kullanırız…"

Bulundukları ortamda birbirleriyle fikir alış-verişi yapabilen MYO öğrencileri için, bilgisayar destekli öğrenme ortamı derse katılımı sağlamada etkili olmuştur. Öğrenciler Derive yazılımı ile yakından ilgilenmiştir. Teorik olarak anlatılan derslerde uyuyan bazı öğrencilerin bu öğrenme ortamında uyumadan Derive yazılımı ile ilgilendiği görülmüştür. Bu bağlamda Derive yazılımının öğrenciler için dikkat çekici ve eğlenceli olduğu açıktır.

Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, Derive yazılımındaki çalışmaları ve araştırmacı öğretmenle gerçekleşen diyaloglarının tamamı incelendiğinde, öğrencilerde beklenen öğrenmenin gerçekleşmediği görülmüştür. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların, etkinliğin tamamlanması ve diyaloglarla ÇY ve İY- seviyelerine geliştiği görülmüştür. Sonuç olarak Dördüncü Soru Grubu sorularına verilen cevapların tümü SOLO ile değerlendirildiğinde öğrencilerin verdiği cevaplardan 45'i tek yönlü yapı (TY), 35'i çok yönlü yapı, 6'sı güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) ve 10'u zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Özet

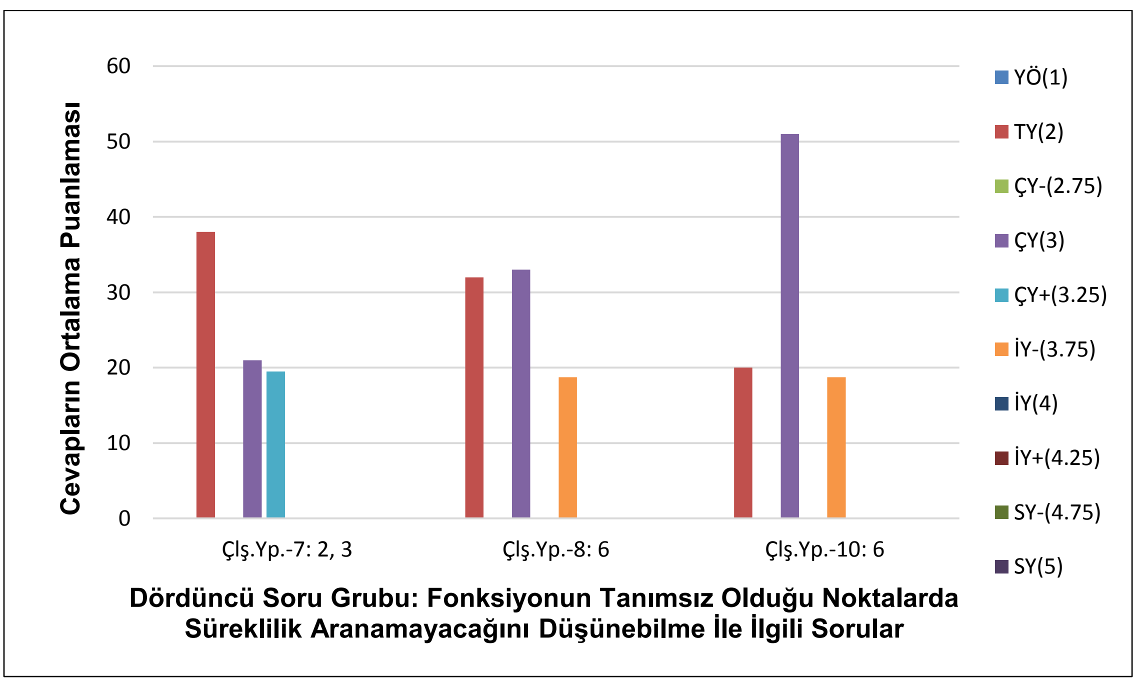
Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili Dördüncü Soru Grubu sorularını incelediğimizde MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarında, ekran çıktılarında ve diyaloglarda verdikleri cevapların genel olarak tek yönlü yapı (TY) ve çok yönlü yapı (ÇY) seviyelerinde olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tabloda MYO öğrencilerinin fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını öğrenmelerine yönelik vermiş oldukları cevapların SOLO taksonomisine göre seviyelerinin öğrenci cevap sayısı belirtilmiştir. Tabloda yer alan (-) işareti zayıf yapıları, (+) işareti ise güçlü yapıları temsil etmektedir. Bu seviyeler altında verilen öğrenci cevap sayıları o öğrencilerin ulaştıkları en üst seviyeyi göstermektedir. Böylece bu soru gruplarına verilen cevapların seviyesi genel olarak temsil edilmektedir.

Tablo 31. Dördüncü Soru Grubu: SOLO Seviyesine Göre Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Düşünebilme ile İlgili Öğrenci Cevap Sayısı

Soru Grubunun Adı	Çalışma Yaprağı	Soru No	SOLO Seviyeleri														
			-	YÖ (1)	+	-	TY (2)	+	-	ÇY (3)	+	-	İY (4)	+	-	SY (5)	+
Dördüncü Soru Grubu	7	2, 3					19			7	6						
	8	6					16			11		5					
	10	6					10			17		5					

Yukarıdaki tablo incelendiğinde 7. Çalışma Yaprağının 2., 3. soruları, 8. Çalışma Yaprağının 6. sorusu ve 10. Çalışma Yaprağının 6. sorusunun Dördüncü Soru Grubu içinde değerlendirildiği görülmektedir. Öğrencilerin bu sorulara verdiği cevaplardan toplam 45 tek yönlü yapı (TY, 2), 35 çok yönlü yapı (ÇY, 3), 6 güçlü çok yönlü yapı (ÇY+, 3.25) ve 10 zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-, 3.75) seviyesinde öğrenme çıktısı elde edilmiştir. Böylece fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili incelenen sorularda MYO öğrencilerinin verdikleri cevapların genel olarak tek yönlü yapı (TY, 2) ve çok yönlü yapı (ÇY, 3) seviyesinde olduğu belirtilebilir. Bu durum MYO öğrencilerinin, fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilmelerine yönelik sorulan sorularda sorunun tek bir yönüne odaklandığını ve kavramsal anlama oluşmadığından bilgi parçalarını ilişkilendirmede başarılı olamadığını ortaya çıkarmaktadır.

Tablo 31'de verilen veriler ve bu verilere ait veri analizleri incelenerek MYO öğrencilerinin bu kazanım ile ilgili her bir çalışma sorusuna verdikleri cevapların ortalama seviyesi belirlenmiştir. Ortaya konan bu ortalama seviye ilgili başlık altındaki her soru grubuna bu seviyede cevap verileceği anlamına gelmese de genel bir bakış açısı sunmaktadır. Bu doğrultuda diğer başlıklar arasında kıyas yapabilmeyi kolaylaştırmak ve genel bir bakış sunmak açısından öğrenci sayıları doğrultusunda SOLO seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması aşağıdaki grafik ile özetlenmiştir.



Grafik 4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili solo seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması

Grafik 4, fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyleyebilme ve yorumlama ile ilgili 7. Çalışma Yaprağının 2., 3. sorularına verilen cevaplardan 19'unun tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 38 (TY), 7'sinin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 21 (ÇY), 6'sının güçlü çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 19.5 (ÇY+) puanlamasına; 8. Çalışma Yaprağının 6. sorusuna verilen cevaplardan 16'sının tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 32 (TY), 11'inin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 33 (ÇY), 5'inin zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 18.75 (İY-) puanlamasına; 10. Çalışma Yaprağının 6. sorusuna verilen cevaplardan 10'unun tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 20 (TY), 17'sinin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 51 (ÇY) ve 5'inin zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 18.75 (İY-) puanlamasına karşılık geldiğini göstermektedir.

Yukarıda bu grubu özetlemek için verilen tablo, grafik ve diyaloglar süreçler halinde incelendiğinde, yazılımı kullanmaya başlamadan önce kâğıt-kaleme yönelen öğrencilerin, soruların bir yönüne odaklanan ve birbirinden bağımsız bilgi parçaları içeren cevaplar verdiği, yazılımın kullanılmasıyla verilen cevapların geliştiği, cevaba ilişkin bazı yönlerin birbiriyle olan ilişkilerinin ezbere ifade edildiği görülmüştür. Bu durum başlangıçta tek yönlü düşünme seviyesinde verilen öğrenci cevaplarının bilgisayar destekli öğrenme ortamında çok yönlü düşünme seviyesine geliştiğini göstermektedir. Bu anlamda çalışma yaprakları ve BCS ortamı, MYO öğrencilerinin "fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyleme ve yorumlama" ile ilgili öğrenme sürecine katkı sağlamıştır. Ayrıca yeni dönem ders sürecinde öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları çözmek için doğrudan yazılıma yönelmiştir. Derive yazılımı olmadan fonksiyonun grafiği ve sürekliliği ile ilgili hiçbir fikri olmayan öğrencilerin yazılıma yönelmeleri, BCS'nin öğrenme sürecinde öğrencilerin soyut düşünmelerine katkı sağladığını göstermektedir.

4. 5. Beşinci Soru Grubu: Limit ile Süreklilik Arasında İlişki Kurabilme ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında Beşinci Soru Grubu ve sürece etkisi ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir soru grubu için MYO öğrencilerinin ders akışı sürecindeki çalışma yapraklarına yazdıkları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle diyalogları ayrı ayrı incelenerek MYO öğrencilerinin limit-süreklilik arasında ilişki kurabilmeleri doğrultusunda verdikleri cevaplar ortaya çıkarılmıştır. Bu cevaplar incelenip birbirine benzer olan ve aynı ifadeleri içeren öğrenci cevapları seçilerek bulgular oluşturulmuştur. Aşağıda Beşinci Soru Grubu sorularına örnek olarak seçilen öğrenci cevaplarına yer verilmektedir.

7. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 6. sorusu MYO öğrencilerinin limit-süreklilik arasında ilişki kurmalarıyla ilgili öğrenmelerini incelemeye yardımcı olmuştur. Öğrenciler teorik olarak ifade edemese de limitin olmadığı yerde sürekliliğin olmayacağının farkına varmıştır.

Bu soru ile ilgili Seher ve araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

S: *Hocam bu çalışma yaprağında süreklilikle ilgili yeni ne öğrenmiş olduğumuz sorulmuş. Sürekliliğin tanımından bahsetmem yeterli olur mu? (Seher burada sürekliliğin sezgisel tanımdan bahsetmektedir)*

AÖ: *Sürekliliğin tanımını daha önce yapmıştın bu yeterli olmaz. Buna ilave olarak yeni öğrenmiş olduğun bilgi sorulmuş.*

S: *Burada kapalı bir aralık vardı. Fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmek için çözüm kümesini bulmaya çalıştık.*

AÖ: *Çözüm kümesini bulmak süreklilik ile ilgili yeni olarak neyi öğrenmene yardımcı oldu?*

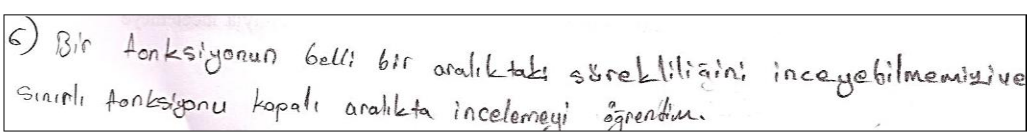
S: *Aslında grafiği incelerken gördüm ki çözüm kümesine gerek yokmuş. Çünkü grafikten hem sürekliliği hem de çözüm kümesini bulabileceğimizi öğrendim. Çözüm kümesi x eksenini kestiği noktalar olur. Belli bir aralık varsa o aralıkta fonksiyonun üzerinde elini kaldırmadan hareket edebiliyorsan o zaman süreklidir.*

AÖ: *Peki sürekli olmadığı zaman nasıl bir grafik olur?*

S: *Boşluklu grafik olur. Hatta bu boşluklarda limit olmaz…*

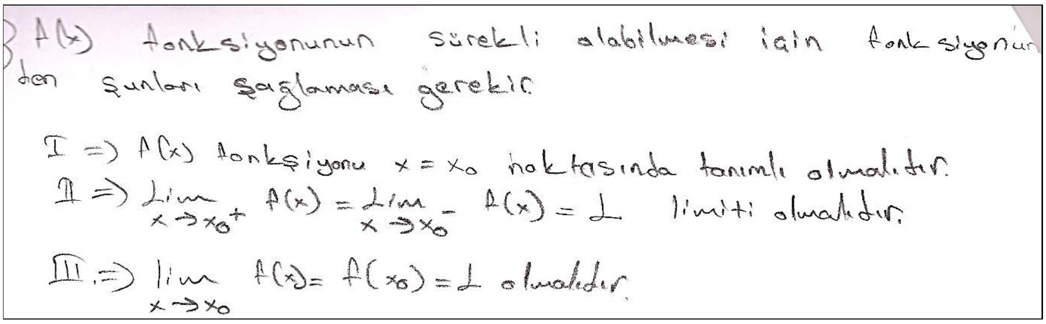
AÖ: *Limit olmaz derken neyi ifade etmeye çalışıyorsun?*

S: *Hocam şimdi fonksiyonun bu aralıktaki çözüm kümesine bakarız, limitine bakarız, sınırlarını inceleriz. Sonra sürekli olup olmadığına karar veririz.(Seher bunları söylerken bir yandan da çalışma yaprağına aşağıdaki cevapları yazıyordu.)*


6) Bir fonksiyonun belli bir aralıktaki sürekliliğini inceyebilmemizi ve sınırlı fonksiyonu kapalı aralıkta incelemeyi öğrendim.

Şekil 88. Seher'in "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili 7. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

Şekil 88’in devamı


3) $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olabilmesi için fonksiyonun
-den şunları sağlaması gerekir

I ⇒ $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında tanımlı olmalıdır.

II ⇒ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ limiti olmalıdır.

III ⇒ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = L$ olmalıdır.

AÖ: *O halde limit ile sürekliliğin birbiri ile ilişkisinden bahsedebilir misin?*

S: *Limit varsa süreklilik de vardır.*

AÖ: *Doğru mu sence?*

S: *Hocam limit sürekliliği incelerken önemli bir adımdır.*

Seher, bu soruya verdiği cevaplarda öncelikle sürekliliğin tanımını yapıp limit ile ilgili herhangi bir noktaya değinmemiştir. Cevapların devamında teorik olmasa bile öğrendiklerini kendi ifadeleriyle aktarmayı başaran Seher’in limit-süreklilik arasındaki ilişkiyi genel olarak kavradığı söylenebilir. Beklenen öğrenmeyi gerçekleştiremese de limit olmadan sürekliliğin olamayacağını ifade eden ve Seher’in cevaplarına benzer ifadeler içeren 11 öğrenci cevabı “zayıf ilişkilendirilmiş yapı”, “İY-“ seviyesine yerleştirilmiştir. $f(x)=0$ için çözüm yaptıklarında grafiğin x eksenini kesen noktaları bulacağını ifade edebilen öğrencilerden 15’i limit olmayan yerde süreklilik aranmayacağını belirtebilmiştir. Buna rağmen yazılım olmadan limit bulamayan, grafik olmadan sürekliliği inceleyemeyen ve grafik üzerinde sorulan aralıkları gösteremeyen bu 15 öğrenci cevabı “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda (ÇY) seviyesinde cevap veren öğrencilerden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

“Çalışma yaprağını tamamladığımda limit ve sürekliliği öğrendim. Bunlardan biri olmadan diğeri olmaz.”

“Grafik çizip üzerinde hareket ediyoruz. Boşluk olsa bile limit oluyor. Fakat sürekli olmuyor….”

“… aralık veriliyor bu aralık elini kaldırmadan çiziliyorsa süreklidir. Burada limit vardır”

“… hocam verdiğiniz rakamları bulamıyorum” (öğrenci grafiği büyütmüş, verilen aralığın hangi eksen üzerinde olması gerektiğini bilmiyor ayrıca bu aralığı grafik üzerinde arıyor) “Hocam [-1,2] aralığını grafik üzerinde trade plots ile gidince bulamıyorum…. dikey sütun da mı yoksa yatay sütunda mı bulacağız?”

"… [-1,2] bu aralıkta limit vardır değil mi hocam? Çünkü elimi kaldırmadan grafik çizebiliyorum" (herhangi bir nokta belirtmeyen bu öğrenci limit ve sürekliliği karıştırmıştır)

"Hocam, süreklilik varsa mı limit vardır yoksa limit varsa mı süreklilik vardır?" (öğrenci ezbere bilgi parçalarını söylemekten öteye gidememiştir)

Geri kalan 6 öğrenci, bu çalışma yaprağının 6. sorusundan önceki sorularla ilişkili olmayan fakat limit-süreklilik ile ilgili doğru ifadeler içeren cevaplar vermiştir. Bu cevaplarda öğrenciler limit ve süreklilik tanımını ayrı ayrı ifade etmelerine rağmen f(x)=0 için çözüm bulmalarının nedenini açıklayamamışlardır. Sorunun cevabına ilişkin birden fazla veriyi içermesine rağmen çoğu ezbere olan bu ifadeler "zayıf çok yönlü yapı", "ÇY-" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda (ÇY-) seviyesinde cevap veren 6 öğrenciden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

"Sürekliliğin limit olmadan olamayacağını öğrendim…"

"f(x)=0 için çözüm buluruz sürekliliği inceleriz..." (nasıl inceleriz sorusuna "bilmiyorum" yanıtını verir)

"limit ve süreklilik ayrılmaz ikilidir. Biri olmadan diğeri olamaz"

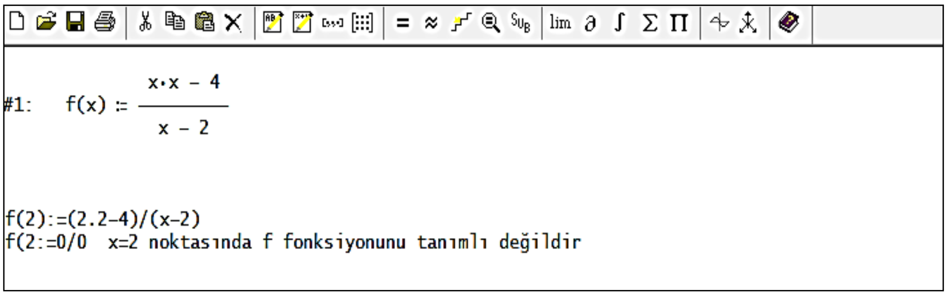
"grafik olmadan çözüm yapılmaz. Süreklilik bulunmaz süreklilik bulamasak bile limit bulunur…"

7. çalışma yaprağının Beşinci Soru Grubu içinde yer alan 6. sorusuna ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 6 öğrenci cevabı zayıf çok yönlü yapı (ÇY-), 15 öğrenci cevabı çok yönlü yapı (ÇY) ve 11 öğrenci cevabı ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilmiştir.

8. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 2., 3. sorularında MYO öğrencilerinden grafiğini çizmiş oldukları $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun x=2 noktasını limit-süreklilikle ilişkilendirip incelemeleri istenmiştir. Böylece bu sorular öğrencilerin limit-süreklilik arasında ilişki kurmalarıyla ilgili öğrenmelerini incelemeye yardımcı olmuştur. Öğrenciler teorik olarak ifade edemese de limitin olmadığı yerde sürekliliğin olmayacağının farkına varmıştır.

Bu sorular ile ilgili Engin ve araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

E: Hocam önceki çalışma yapraklarında limit ile ilgili bilgileri incelemiştik. Grafikleri incelemiştik. Burada da önceki çalışma yapraklarındaki gibi düşünürsek burada x=2 noktası sorunlu bir nokta… yani… (Engin bunları söylerken Derive yazılımında aşağıdaki işlemleri yapıyordu)

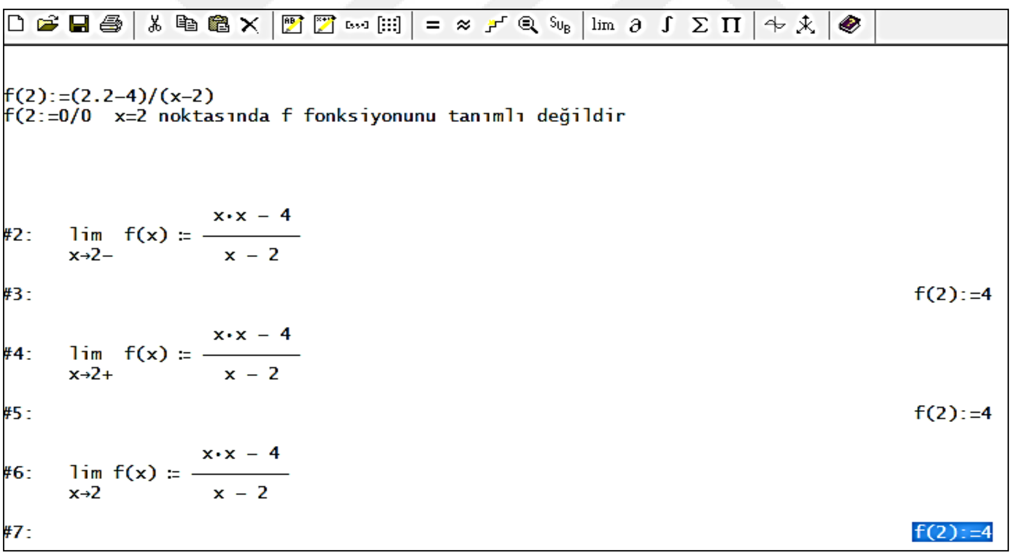


Şekil 89. Engin'in 8. çalışma yaprağının "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

E: *İşte hocam x=2 noktasında fonksiyon tanımlı değil. Şimdi neye bakmalıyım?*

AÖ: *Limit inceledik, süreklilik inceledik hangisini istersen ona bak!*

E: *Önce limite bakalım… (Derive yazılımında fonksiyonun x=2 noktasındaki limitini bulup işlemlerine devam eder)*

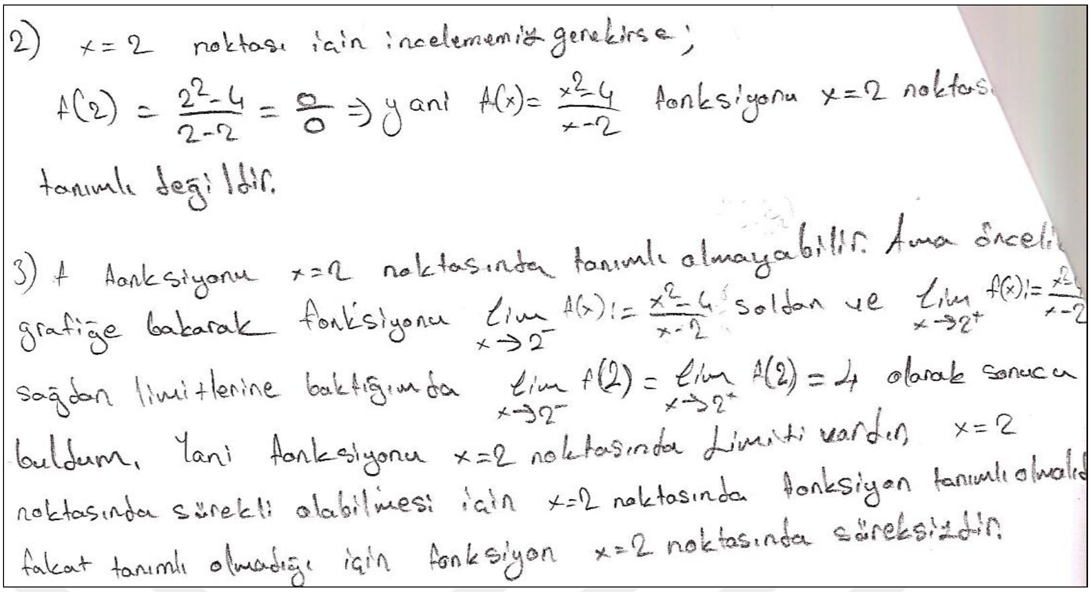


Şekil 90. Engin'in 8. çalışma yaprağının "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemlerin devamı

E: *İşte limit var ve 4. Fakat sürekli değildir… Değil di mi hocam? (Engin'in verdiği cevaplar doğru olmasına rağmen bazı durumlarda araştırmacı öğretmenden onay beklemesi verdiği cevaplardan emin olmadığının göstergesidir)*

AÖ: *Devam edebilirsin, Engin! Sürekli olmama sebebi nedir?*

E: *Bu noktada tanımlı olmadığından sürekli de olamaz…(Engin çalışma yaprağına aşağıdaki yorumları yazmıştır)*


2) $x=2$ noktası için incelememiz gerekirse;

$f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ yani $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonu $x=2$ noktas

tanımlı değildir.

3) f fonksiyonu $x=2$ noktasında tanımlı olmayabilir. Ama önceli

grafiğe bakarak fonksiyonu $\lim_{x\to 2^-} f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ soldan ve $\lim_{x\to 2^+} f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$

sağdan limitlerine baktığımda $\lim_{x\to 2^-} f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(2) = 4$ olarak sonucu

buldum. Yani fonksiyonu $x=2$ noktasında limiti vardır. $x=2$

noktasında sürekli olabilmesi için $x=2$ noktasında fonksiyon tanımlı olmalı

fakat tanımlı olmadığı için fonksiyon $x=2$ noktasında süreksizdir.

Şekil 91. Engin'in "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili 8. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

E: Hocam burada sürekliliğin olmadığını grafikte daha kolay gösteririz. Zaten grafiğin çizimini de istiyor. Aslında süreklilik ile limit birlikte incelenmeli. Süreklilik varsa limit vardır.

Engin'in bu sorulara verdiği cevaplar incelendiğinde x=2 noktasını fonksiyonda yerine yazıp $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile karşılaştığında "x=2 noktası tanımlı değildir" ifadesini belirttiği görülmektedir. Ayrıca Derive yazılımı ile fonksiyonun x=2 için çözümünü yaptığında "false" sonucu ile karşılaşan Engin belirttiği ifadenin doğru olduğunu tekrarlamıştır. Aslında bu noktada belirsiz olan fonksiyonun tanımsız olduğunu belirten Engin fonksiyonun sürekliliğinden önce limitini inceleyerek sağ-sol limitlerin eşit olup olmadığına bakmıştır. Bu durum belirsizlik ve tanımsızlığı ayırt etmede başarılı olamayan Engin'in limit ve süreklilik ile ilgili bilgi sahibi olduğunu göstermektedir. Böylece Engin'in vermiş olduğu cevaplar limit olmadan sürekliliğin olamayacağı düşüncesini destekler niteliktedir. Limit ve süreklilik arası ilişki kurabilen Engin'in bazı cevaplarının ezbere olması ve tam anlamıyla kavramsal nitelikte olmaması sebebiyle verdiği cevaplar "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" seviyesine yerleştirilmiştir. Beklenen öğrenmeyi gerçekleştiremese de Engin'in cevaplarına benzer ifadeler içeren 13 öğrenci cevabı "zayıf ilişkilendirilmiş yapı", "İY-" seviyesine yerleştirilmiştir.

Geri kalan 19 öğrenci ise fonksiyonu x=2 noktasında incelemek için öncelikle grafik çizimi yapmıştır. Grafik çizimi yapmadan limit-süreklilik arasındaki ilişkiye değinmeyen bu 19 öğrenci cevabı birbirinden kopuk bilgi parçalarını içerdiğinden "çok yönlü yapı", "ÇY" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda (ÇY) seviyesinde cevap veren öğrencilerden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

"x=2 noktasında limit var ve 4'tür. Burada süreklilik incelememiz için grafik gerekli grafikte düz çizgidir ve sürekli olabilir" (grafik çizer)

"Öncelikle limiti bulalım limit var ve 4. x=2 noktasında fonksiyonu incelersek fonksiyonun burasında boşluk var buradan düşeriz… Sürekli gidemeyiz…" (yazılım üzerinde grafiği çizer ve büyütüp grafik üzerindeki boşluğu gösterir)

"süreklilik varsa limit vardır limit varsa sürekli olmayabilir (düşünüyor) ya da tam tersi" (ezbere bilgi parçaları)

"limiti bulup sürekliliği inceleriz."

"grafik olmadan çözüm yapılmaz. Süreklilik bulunmaz süreklilik bulamasak bile limit bulunur…"

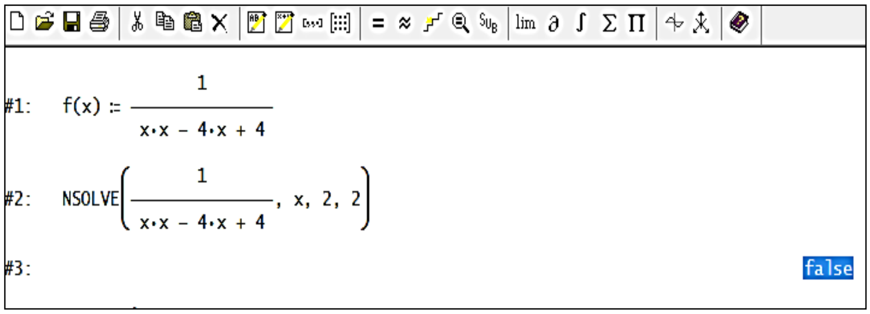
"Hocam x=2 için çözüm yapınca false çıktığı için süreklilik olmaz…"

8. çalışma yaprağının Beşinci Soru Grubu içinde yer alan 2., 3. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 19 öğrenci cevabı çok yönlü yapı (ÇY) ve 13 öğrenci cevabı ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilmiştir.

10. çalışma yaprağının bu grupta yer alan 2., 3. sorularında MYO öğrencilerinden grafiğini çizmiş oldukları $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun x=2 noktasını limit-süreklilikle ilişkilendirip incelemeleri istenmiştir. Böylece bu sorular öğrencilerin limit-süreklilik arasında ilişki kurmalarıyla ilgili öğrenmelerini incelemeye yardımcı olmuştur. Öğrenciler teorik olarak ifade edemese de limitin olmadığı yerde sürekliliğin olmayacağının farkına varmıştır.

Bu sorular ile ilgili İsmail ve araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir;

İ: *Şimdi bu fonksiyonun x=2 noktasında alacak olduğu değeri incelemek için Derive yazılımını kullandığımızda… İşte yine "false" bunu önceki çalışmalarda da elde etmiştik. (Derive yazılımı üzerinde fonksiyonun x=2 için çözümünü yaptığında aşağıdaki sonuçları elde eder)*



Şekil 92. İsmail'in 10. çalışma yaprağının "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemler

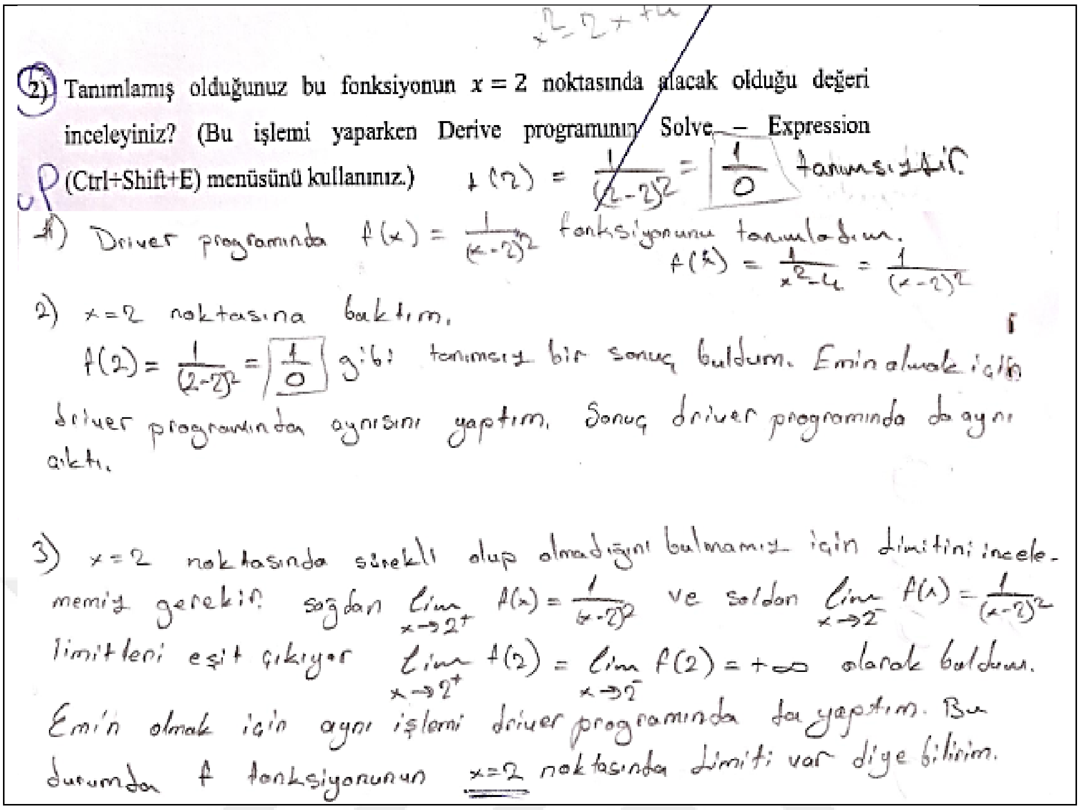
AÖ: Bu durumda ne dememiz gerekir?

İ: Tabiî ki tanımsız bir fonksiyondur dememiz gerekir… Yani verilen noktada tanımsızdır diyorduk… Şimdi bu nokta için limit ve süreklilik yoktur diyebilir miyim?

AÖ: Emin misin İsmail? İstersen yazılımı tekrar kullan! Belki fikrin değişir. (İsmail fonksiyonun x=2 noktasında limitini bulmak için Derive yazılımında yaptığı işlemlere aşağıdaki gibi devam etmiştir)

Şekil 93. İsmail'in 10. çalışma yaprağının "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili derive yazılımı üzerinde yaptığı işlemlerin devamı

İ: Özür dilerim hocam! Süreklilikle karıştırdım. Limit varmış… Ayrıca bu limit değeri "∞" muş. (İsmail'in çalışma yaprağına yazdığı yorumlar aşağıdaki gibidir)



5) 2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında alacak olduğu değeri inceleyiniz? (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.) $f(2) = \frac{1}{(2-2)^2} = \boxed{\frac{1}{0}}$ tanımsızlık

1) Driver programında $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunu tanımladım. $f(x) = \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)^2}$

2) $x=2$ noktasına baktım. $f(2) = \frac{1}{(2-2)^2} = \boxed{\frac{1}{0}}$ gibi tanımsız bir sonuç buldum. Emin olmak için driver programından aynısını yaptım. Sonuç driver programında da aynı çıktı.

3) $x=2$ noktasında sürekli olup olmadığını bulmamız için limitini incelememiz gerekir. sağdan $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ve soldan $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ limitleri eşit çıkıyor $\lim_{x \to 2^+} f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(2) = +\infty$ olarak buldum. Emin olmak için aynı işlemi driver programında da yaptım. Bu durumda f fonksiyonunun $x=2$ noktasında limiti var diye bilirim.

Şekil 94. İsmail'in "beşinci soru grubu" sorularıyla ilgili 10. çalışma yaprağı üzerine yazdığı yorumlar

AÖ: *Şimdi sürekliliğini incelemeye çalış bakalım.*

İ: *Hocam bu soruda fonksiyonun verilen noktada limitinin olduğunu bulabildim fakat grafik çizimi olmadığından sürekli olup olmadığı hakkında kesin bir yargıya varamıyorum… Fonksiyon verilen noktada $\frac{1}{0}$ olduğu için tanımsızdır bunu da bulabiliyorum. Keşke sürekli olduğunu bilsem limit vardır diyebilirdim fakat limitin varlığından sürekliliği inceleyebileceğimi zannetmiyorum. Herhalde grafik olmadan sürekliliği bulamam… Grafik olunca hem limiti hem de sürekliliği daha kolay inceleyebilirdim.*

AÖ: *Teşekkürler, İsmail!*

İsmail'in bu soru grubuna verdiği cevaplar incelendiğinde x=2 noktasını fonksiyonda yerine yazarak elde ettiği $\frac{1}{0}$ ifadesinin bir tanımsızlık olduğunu belirtmekte başarılı olduğu görülmektedir. İsmail Derive yazılımı üzerinde fonksiyonun x=2 için çözümünü yaptığında "false" sonucunu elde ederek bir anda, bu noktada tanımsız olan fonksiyonun limit ve sürekliliğinin olmadığını düşünmesi araştırmacı öğretmen için hayal kırıklığı oluşturmuştur. Ayrıca x=2 değerinde limit değerini bulmasına rağmen İsmail, grafik çizimi olmadan süreklilik hakkında bilgi vermekte başarılı olamamıştır. Bu durum İsmail'in limit-süreklilik arasındaki ilişki ile ilgili vermiş olduğu cevapların grafiğe bağlı, ezbere ve belli sınırlar içerisinde kaldığını göstermektedir. Bütün ifadeleri göz önünde bulundurulduğunda İsmal'in bu sorular ile ilgili cevapları "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir. Beklenen öğrenmeyi gerçekleştiremese de limit olmadan sürekliliğin olmayacağını ifade eden ve İsmail'in cevaplarına benzer ifadeler içeren 23 öğrenci cevabı "güçlü çok yönlü yapı", "ÇY+" seviyesine yerleştirilmiştir.

Fonksiyonun x=2 için tanımsız olduğunu farkına varan öğrencilerden 8'i ettiği $\frac{1}{0}$ tanımsızlığına odaklanır. Grafik çizimi olmadan sürekliliği inceleyemeyeceklerini belirten bu 8 öğrenci "limit ve süreklilik birbirinden ayrılmaz ikisi birlikte incelenmelidir" gibi kopuk ezbere bilgi parçaları içeren cevaplar verdiğinden bu ifadeler "zayıf çok yönlü yapı", "ÇY-" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda (ÇY-) seviyesinde cevap veren 8 öğrenciden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

"$f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun x=2 noktasında aldığı değeri bulmak için x yerine 2 yazarız. Paydası sıfır olur burada tanımsızlık vardır. Şimdi Derive de limit buluruz" (önceki çalışma yapraklarında yapılan işlemler ezberlenmiş)

"burada x=2 noktasını incelememiz ve süreklilikle ilişkilendirmemiz istenmiş. Grafiğini çizmeden sürekliliği inceleyemeyiz. Fakat limitini bulabiliriz. Grafikte noktaya yaklaşmak limittir."

"limit ve süreklilik birbirinden ayrılamaz birbirini tamamlar" (öğrenci fonksiyonun grafiğini yazılım üzerinde çizer ve hiçbir nokta incelemez cevapları ezberedir)

"bu fonksiyonda $\frac{1}{0}$ belirsizliği var. Bunu incelemek için belirsizliği yok ederiz" (öğrenci bulduğu tanımsızlığı önceki çalışmalarında incelediği belirsizliklerle karıştırır. Cevapları ezberedir)

"x=2 noktasında limit var çözüm yapınca false çıkıyor" (limit-süreklilik arası ilişki sorulduğunda "biri varsa diğeri vardır" cevabını verir)

Ozan, Adem ve Hülya bu gruba ait önceki çalışma sorularını dikkate almadan fonksiyonda x gördükleri yere 2 yazmakla yetinmişlerdir. Elde ettikleri $\frac{1}{0}$ tanımsızlığını incelemekle meşgul olan ve limit-süreklilik konusuna değinmeyen bu 3 öğrenci cevabı, sorunun tek yönüne odaklanan ifadeler içerdiğinden bu cevaplar "tek yönlü yapı", "TY" seviyesine yerleştirilmiştir. Aşağıda (TY) seviyesinde cevap veren bu 3 öğrenciden seçilen bazı ifadelere yer verilmiştir;

“x=2 noktasında alacak olduğu değer yok burası bence boşluktur ve grafikte de boştur. Hocam bu fonksiyon tanımsız yani belirsizdir. (öğrenci önceki çalışmalarında çözümünü yaptığı belirsizlik durumları ile tanımsızlığı ayırt edememiştir)

“Fonksiyonunun çözümü yoktur false geliyor. Bu gibi fonksiyonlar sorunludur fakat limitini bulunca limit de sonsuz…”

“limit-süreklilik kardeş gibidir” (limit-süreklilik arası ilişki sorulunca öğrencinin verdiği cevaptır)

“limiti hemen buluruz süreklilik için grafik gerek” (limit-süreklilik arası ilişki sorulduğunda öğrencinin verdiği cevap)

10. çalışma yaprağının Beşinci Soru Grubu içinde yer alan 2., 3. sorularına ders sürecinde verilen cevapların tamamı incelendiğinde 3 öğrenci cevabı tek yönlü yapı (TY), 8 öğrenci cevabı zayıf çok yönlü yapı (ÇY-) ve 21 öğrenci cevabı ise güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) seviyesine yerleştirilmiştir.

Genel olarak; limit-süreklilik arasında ilişki kurabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, ekran çıktıları ve araştırmacı öğretmenle diyalogları derinlemesine incelendiğinde, beklenen öğrenmenin gerçekleşemediği görülmüştür. MYO öğrenci cevapları birbiri ile ilişkili olmayan ezbere bilgi parçaları ile sınırlı kalmıştır. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY seviyesinde verdiği cevapların aynı sorular Derive ortamına taşınıp etkinliğin tamamlanması ve diyaloglar sonucu ÇY veya İY-seviyesine dönüştüğü görülmüştür. Yazılım kullanılmadan önce limit-süreklilik ile ilgili sezgisel tanım bile yapamayan öğrenciler, yazılımı kullanıp grafik çizdiklerinde limit-süreklilik ile ilgili daha doğru ifadeler kullanmaya başlamışlardır. Verdikleri cevaplar birbirinden kopuk bilgi parçası olmaktan öteye geçemese bile BCS destekli öğrenme ortamında çalışan MYO öğrencilerinin bazı ifadelerinin ders sürecindeki diyaloglarda geliştiği görülmüştür. Aşağıda bu gibi durumlara örnek olması açısından Medine ve araştırmacı öğretmen arasında 8. çalışma yaprağının Beşinci Soru Grubunda yer alan 2., 3. sorularında geçen diyaloğun bazı bölümlerine yer verilmiştir;

Dersin başlangıcında yazılıma alışma sürecinde;

M: *Hocam burada neden x=2 için çözüm bulmaya çalışıyoruz ki zaten 2 yazsak sıfır oluyor. Sonuç sıfır değil midir?*

AÖ: *Bundan önceki çalışmalarımızda öyle mi olmuştu? Yine limit mi bulacağız?*

M: *O zaman burada limit vardır. Bu matematik ne değişik bir ders!... İnanamıyorum 2 yazınca sıfır oluyor limit bulunca 4 oluyor. (yazılımda tanımladığı fonksiyonun limitine bakıyor)*

AÖ: *Acaba sebebini açıklayabilir misin?*

M: (Düşünüyor) açıklayamam.

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin verdiği cevaplar fonksiyonun x=2 için çözümünde elde edilen $\frac{0}{0}$ belirsizliğine yani sorunun tek bir yönüne odaklanmıştır. Cevaplarında süreklilikle ilgili herhangi bir ifadeye yer vermeyen Medine, yazılım üzerinde bulduğu limiti incelemede yeterli olamamıştır. Buraya kadar öğrencinin “tek yönlü yapı”, “TY” sevisinde düşündüğü söylenebilir. Bundan sonraki süreçte aynı soruları yazılımda inceleyen Medine ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog şu şekildedir:

AÖ: O halde sürekliliği ve limiti grafik üzerinde incelemeye çalış.

M: Dümdüz çizgi gibi gözüküyor. Elimizi kaldırmadan çizim yaparsak sürekli olur. Burada boşluk mu var? (x=2 noktasını gösteriyor)

AÖ: İncelemeye devam et bakalım. Sürekli midir, limit neredeyse? Sesli düşünerek yanıt ver.

M: x=2 yazınca belirsiz bir durum oluyor fakat belirsiz olsa bile limit bulabiliyoruz. Derive limit bulmada bize yardımcı oluyor. Bir de grafik çizebiliyoruz bu grafik üzerinde trade plots ile hareket ettiğimizde büyütüp boş nokta varsa görüyoruz. Buralar sürekli olmaz. Fakat limit olabilir. Sağ-sol limit alabiliyoruz. İşte burada da sağ-sol aynı 4. (Yazılım üzerinde fonksiyonun x=2 için sağdan ve soldan limitini bulur)

Bu diyalogda Medine’nin verdiği cevaplar limit-süreklilik arası ilişki kurmaya yönelik yeterli olmasa da soru ile ilişkili kopuk bilgi parçalarını içerdiğinden öğrencinin “çok yönlü yapı”, “ÇY” seviyesinde düşündüğü söylenebilir. Ayrıca aynı sorular için yeni dönem ders sürecinde Medine ile araştırmacı öğretmen arasında geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir:

AÖ: Medine, $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu x=2 noktasında limit-süreklilik arası ilişki kurarak inceleyebilir misin? Bunu yaparken sesli düşünmeni istiyorum. (Medine hemen önünde bulunan bilgisayara yönelip Derive’de grafik çizimi yapmıştır)

M: Hocam bu grafiği hatırlıyorum. Burada bir tane boşluk vardı. O da fonksiyonun tanımsız olduğu 2 noktasındaydı. (grafiği büyütüp x=2 noktasını gösterir). Burada bir nokta sürekliliği bozmasın diye süreklidir fakat 2 noktası olmazsa diyorduk. Bir de limite bakınca (yazılımda limit bulur) 4 olduğunu görüyoruz. Limit var süreklilik de 2 olmazsa var.

Medine’nin bilgisayar destekli öğrenme ortamında ders sürecinde geçen diyaloğu ile yeni dönem ders sürecinde geçen diyaloğu arasında büyük fark olmamasına rağmen, ders süreci içerisinde sorulan sorulara kendinden emin olmadan verdiği cevapların yeni dönem ders sürecinde kendine güvenen cevaplara geliştiği görülmüştür.

Yukarıda örnek olarak verilen diyaloglara ilave olarak araştırmacı öğretmenin ders sürecinde aldığı notlardan Derive yazılımı kullanımının anlaşılır ve BCS ortamının öğrenmeye teşvik edici olduğu görülmüştür. MYO öğrencileri ile geçen diyaloglarda araştırmacı öğretmenin aldığı bu notlardan bazıları aşağıda örnek olarak verilmiştir:

“Hocam Derive harika… biz grafik çiziyoruz. İşlem yapıyoruz. Limit-süreklilik öğreniyoruz….”

“Önceden dersten hiçbir şey anlamıyordum. Oysa matematik öğrenmek güzelmiş…”

“Derive güzel fakat süreklilik bulmuyor. Bazı işlemleri yapmakta güçlük çekiyorum. Aslında bütün derslerde kullansak daha güzel öğrenebilirim…”

“…hocam burada bütün matematik sorularını çözemeyiz değil mi? Mesela problemleri yazsak cevabını gösterse…”

“Matematik derslerine bu sene katıldığım kadar önceden hiç katılmamıştım… bu program çok dikkat çekici…”

“ bilgisayar olunca limit-süreklilik belirsizlik her şeyi çözebiliyoruz…”

Bulundukları ortamda birbirleriyle fikir alış-verişi yapabilen MYO öğrencileri için, BCS ortamı derse katılımı sağlamada etkili olmuştur. Öğrenciler Derive yazılımı ile yakından ilgilenmiştir. Teorik olarak anlatılan derslerde uyuyan bazı öğrencilerin bu öğrenme ortamında uyumadan Derive yazılımı ile ilgilendiği görülmüştür. Bu bağlamda Derive yazılımının öğrenciler için dikkat çekici ve eğlenceli olduğu açıktır.

Limit-süreklilik arası ilişki kurabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin ders sürecindeki çalışma yaprakları, Derive yazılımındaki çalışmaları ve araştırmacı öğretmenle geçen diyaloglarının tamamı incelendiğinde öğrencilerde beklenen öğrenmenin gerçekleşmediği görülmüştür. Buna rağmen bazı MYO öğrencilerinin başlangıçta TY veya ÇY seviyesinde verdiği cevapların etkinliğin tamamlanması ve diyaloglarla ÇY veya İY- seviyesine çıktığı görülmüştür. Sonuç olarak Beşinci Soru Grubu sorularına verilen cevapların tümü SOLO ile değerlendirildiğinde öğrencilerin verdiği cevaplardan 3’ü tek yönlü yapı (TY), 14’ü zayıf çok yönlü yapı (ÇY-), 34’ü çok yönlü yapı (ÇY), 21’i güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) ve 24’ü ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilebilmiştir.

Özet

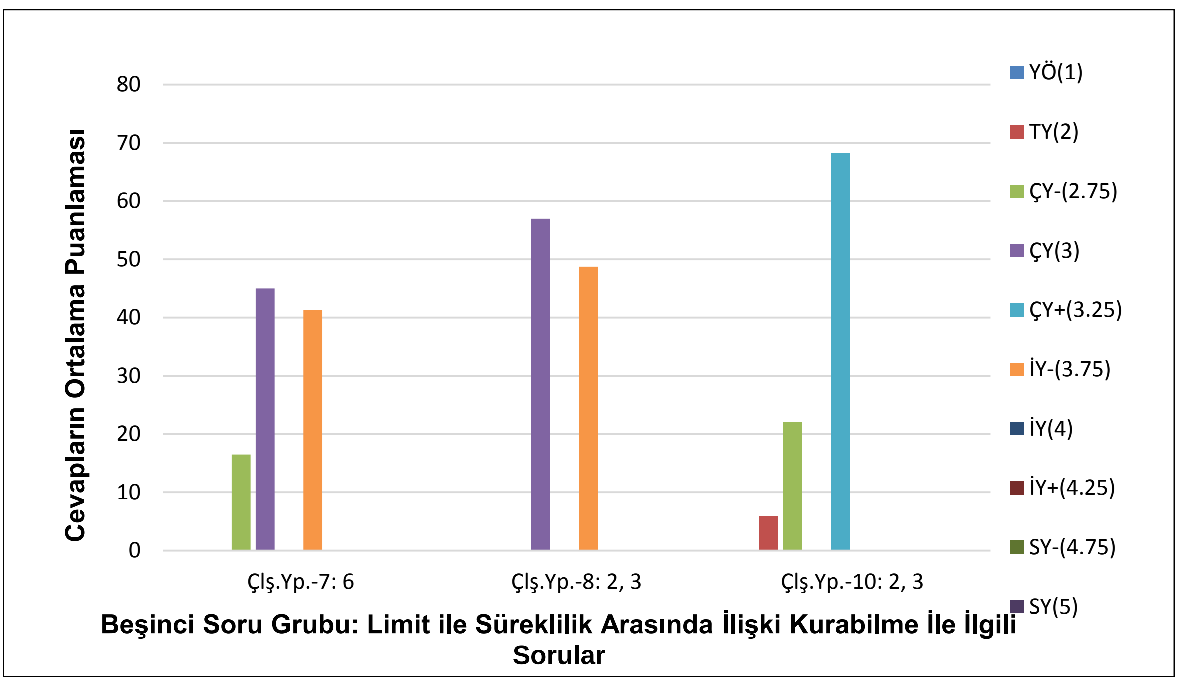
Limit ve süreklilik arasında ilişki kurabilme ile ilgili Beşinci Soru Grubu sorularını incelediğimizde MYO öğrencilerinin çalışma yapraklarında, ekran çıktılarında ve diyaloglarda verdikleri cevapların genel olarak çok yönlü yapı (ÇY) seviyesinin çevresinde olduğu söylenebilir. Aşağıdaki tabloda MYO öğrencilerinin limit-süreklilik arasında ilişki kurabilmeyi öğrenmelerine yönelik vermiş oldukları cevapların SOLO taksonomisine göre seviyelerinin öğrenci cevap sayısı belirtilmiştir. Tabloda yer alan (-) işareti zayıf yapıları, (+) işareti ise güçlü yapıları temsil etmektedir. Bu seviyeler altında verilen öğrenci cevap sayıları o öğrencilerin ulaştıkları en üst seviyeyi göstermektedir. Böylece grupta yer alan sorulara verilen cevapların seviyesi genel olarak temsil edilmektedir.

Tablo 32. Beşinci Soru Grubu: SOLO Seviyesine Göre Limit-Süreklilik Arasında İlişki Kurabilme ile İlgili Öğrenci Cevap Sayısı

Soru Grubunun Adı	Çalışma Yaprağı	Soru No	SOLO Seviyeleri														
			-	YÖ (1)	+	-	TY (2)	+	-	ÇY (3)	+	-	İY (4)	+	-	SY (5)	+
Beşinci Soru Grubu	7	6							6	15		11					
	8	2, 3								19		13					
	10	2, 3					3		8		21						

Yukarıdaki tablo incelendiğinde 7. Çalışma Yaprağının 6. sorusu, 8. Çalışma Yaprağının 2., 3. soruları ve 10. Çalışma Yaprağının 2., 3. sorularının Beşinci Soru Grubu içerisinde değerlendirildiği görülmektedir. Öğrencilerin bu sorulara verdiği cevaplardan toplam 3 tek yönlü yapı (TY, 2), 14 zayıf çok yönlü yapı (ÇY-, 2.75), 34 çok yönlü yapı (ÇY,3), 21 güçlü çok yönlü yapı (ÇY+, 3.25) ve 24 zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-, 3.75) seviyesinde öğrenme çıktısı elde edilmiştir. Böylece limit-süreklilik arasında ilişki kurabilme ile ilgili incelenen bu sorularda, MYO öğrencilerinin verdikleri cevapların genel olarak çok yönlü yapı (ÇY, 3) seviyesi çevresinde yoğunlaştığı söylenebilir. Bu durum, MYO öğrencilerinin bu sorulara ilişkin bir veya birden fazla doğru çıkarımda bulunmasına rağmen bunları birbiri ile tutarlı şekilde ilişkilendirmede yeterli beceriye ulaşamadığını göstermektedir. Buna rağmen beklenen öğrenme gerçekleşmese bile limit-süreklilik konusu ile ilgili genel bilgiye ulaşılmıştır.

Tablo 32'de verilen veriler ve bu verilere ait veri analizleri incelenerek MYO öğrencilerinin bu kazanım ile ilgili her bir çalışma sorusuna verdikleri cevapların ortalama seviyesi belirlenmiştir. Ortaya konan bu ortalama seviye ilgili başlık altındaki her soruya bu seviyede cevap verileceği anlamına gelmese de genel bir bakış açısı sunmaktadır. Bu doğrultuda diğer başlıklar arasında kıyas yapabilmeyi kolaylaştırmak ve genel bir bakış sunmak açısından öğrenci sayıları doğrultusunda SOLO seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması aşağıdaki grafik ile özetlenmiştir.



Grafik 5. Limit-süreklilik arasında ilişki kurabilme ile ilgili SOLO seviyelerine karşılık gelen cevapların ortalama puanlaması

Grafik 5, limit ile süreklilik arasında ilişki kurma ile ilgili 7. Çalışma Yaprağının 6. sorusuna verilen cevaplardan 6'sının zayıf çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 16.5 (ÇY-), 15'inin çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 45 (ÇY), 11'inin zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 41.25 (İY-) puanlamasına; 8. Çalışma Yaprağının 2., 3. sorularına verilen cevaplardan 19'unun çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 57 (ÇY), 13'ünün zayıf ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olmasının ortalama 48.75 (İY-) puanlamasına; 10. Çalışma Yaprağının 2., 3. sorularına verilen cevaplardan 3'ünün tek yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 6 (TY), 8'inin zayıf çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 22 (ÇY-) ve 21'inin güçlü çok yönlü yapı seviyesinde olmasının ortalama 68.25 (ÇY+) puanlamasına karşılık geldiğini göstermektedir.

Yukarıda bu grubu özetlemek için verilen tablo, grafik ve diyaloglar süreçler halinde incelendiğinde, yazılımı kullanmaya başlamadan önce kâğıt-kaleme yönelen öğrencilerin, soruların bir yönüne odaklanan ve birbirinden bağımsız bilgi parçaları içeren cevaplar verdiği, yazılımın kullanılmasıyla verilen cevapların geliştiği, cevaba ilişkin bazı yönlerin birbiriyle olan ilişkilerinin ezbere ifade edildiği görülmüştür. Bu durum başlangıçta tek yönlü düşünme seviyesinde verilen öğrenci cevaplarının bilgisayar destekli öğrenme ortamında çok yönlü ve ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesine geliştiğini göstermektedir. Bu anlamda çalışma yaprakları ve BCS ortamı, MYO öğrencilerinin "limit ile süreklilik arasında ilişki kurma" ile ilgili öğrenme sürecine katkı sağlamıştır. Derive yazılımı olmadan fonksiyonun limitini ve sürekliliğini incelemekte güçlük çeken öğrenciler grafik çizimi sayesinde limit ve sürekliliği ilişkilendirebilmişlerdir. Ayrıca yeni dönem ders sürecinde öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları çözmek için doğrudan yazılıma yönelmiştir. Öğrencilerin yazılıma yönelmeleri, BCS'nin öğrenme sürecinde öğrencilerin soyut düşünmelerine katkı sağladığını göstermektedir.

5. TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde, ana problem çerçevesinde çalışma yapraklarındaki soruların dağılımı olan;

1. Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme
2. Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme
3. Fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme
4. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme
5. Limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme

ile ilgili öğrencilerin öğrenme çıktıları SOLO taksonomisine göre ele alınıp tartışılmıştır. BCS yazılımının kullanıldığı ortamda MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusundaki öğrenmelerini değerlendirme ana amacı çerçevesinde öğrencilerin limit-süreklilik ile ilgili öğrenmeleri çalışma içerisinde ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu bağlamda yürütülen çalışma sonucunda elde edilen bulgular bu bölümde her bir araştırma problemine yönelik başlıklar altında tartışılacaktır.

5. 1. Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri ile Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Birbirinden Ayırt Etme ile İlgili Tartışma

Ders sürecinde MYO öğrencilerinin çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleştirdikleri diyaloglar ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar incelendiğinde genel olarak öğrenci cevaplarının SOLO taksonomisine göre çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanan ve cevabın diğer yönlerle ilişkisi olmayan (TY) veya birbirinden kopuk ezbere bilgi parçaları içeren (ÇY) seviyelerine karşılık geldiği görülmüştür. Kavramsal anlamaya yakın olmayan bu cevaplar beklenen öğrenmenin gerçekleşmediğini göstermektedir. Bu kategoride yer alan sorular hazırlanırken fonksiyonun bir noktaya pozitif ve negatif yönden yaklaşırken alacağı değerlerin eşitliği (limit değeri) ile o noktadaki görüntüsünü bulup karşılaştırabilmeye yönelik olmasında dikkat edildi. Bu bağlamda seçilen fonksiyonların belirtilen noktalarda belirsiz olmaları ve bu noktalarda incelendikten sonra aynı noktaya küçük-büyük değerlerden yaklaşırken tekrar incelenmesi, MYO öğrencilerinin fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt edip edemediği hakkındaki öğrenmelerini değerlendirmeye katkı sağladı.

2. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 2., 3., 4., 5. sorularında verilen $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyon $x = 1$'de $\frac{0}{0}$ belirsizlik halini içermekteydi. Çalışmanın başlangıcında çalışma yapraklarıyla ilk kez karşılaşan MYO öğrencilerinin çoğu yazılımı kullanmadan kâğıt-kaleme yönelerek $x = 1$ değerini fonksiyonda yerine yazıp $\frac{\sin(0)}{0}$ elde etmişti. Buldukları sonucun yanlış olduğunu belirten öğrenci cevaplarından anlaşılacağı gibi kâğıt-kalem ortamında öğrencilerin çoğu $x = 1$ noktasını fonksiyonda yerine koymakta başarılı olamadı. Soru grubu ile ilgili "hocam bu fonksiyonda bir yanlışlık var mı?, x yerine 1 yazdığım zaman payda sıfır oluyor" ifadeleri bu durumu özetleyebilir. Sonraki sorularda Derive üzerinde çalışmaya başlayan öğrencilerin, çalışmanın başlangıcında belirsizlik durumuna odadaklanarak TY seviyesinde verdikleri cevabın giderek birbirinden kopuk ezbere bilgi parçaları içeren ÇY seviyesindeki ifadeler içerdiği görüldü. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 6'sının TY, 26'sının ÇY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

Başka gruplarda yer almasına rağmen verilen noktada fonksiyonun sürekliliğinin incelenmesi ve limitle ilişkilendirilmesi istenen bazı sorularda MYO öğrencilerinin noktayı fonksiyonda yerine yazdığı görülmektedir. Örneğin, 8. çalışma yaprağının 2., 3., 6. sorularında $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun, 10. çalışma yaprağının 2., 3., 6. sorularında $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun x=2 noktasında sürekliliğinin incelenmesi ve limitle ilişkilendirilmesi istenmesine rağmen öğrencilerin bu noktayı fonksiyonda yerine yazmış olup buldukları sonucu limit ile ilişkilendirmeye çalıştıkları görülmüştür. Benzer şekilde 3. çalışma yaprağının 9. sorusunda $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasında grafiğinin incelenmesi istenmesine rağmen bu noktayı fonksiyonda yerine yazan öğrencilerin buldukları $\frac{0}{0}$ belirsizliğini incelemeden fonksiyonun yanlış olduğunu veya limitin olmadığını belirtikleri görülmüştür. Bu örneklerden de anlaşılacağı üzere başka gruplarda yer alan benzer soruların başlangıcında öğrenci cevaplarının yaklaşık olarak aynı ve sorunun tek bir yönüne odaklanan TY seviyesinde olduğu söylenebilir. Sorular ile ilgili çalışmalar ilerledikçe sorunun tek bir yönüne odaklanan TY seviyesindeki cevapların azalması bir gelişim olarak görülmesine rağmen birbirinden kopuk bilgi parçaları içeren ÇY seviyesindeki cevapların üstüne çıkmamıştır. Bu doğrultuda fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile o noktadaki görüntüsünü ayırt etmede MYO öğrencileri beklenen kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirememiştir.

Yukarıda belirtilen sorular ele alındığında "fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt etme" ile ilgili MYO öğrencilerinde beklenen öğrenme gerçekleşmese de öğrencilerin öğrenme çıktılarından öğrenci ifadelerinin geliştiği ve bu gelişimde teknolojiye eğilimin olduğu söylenebilir. Yazılımın kullanımına alışan MYO öğrencileriyle ders sürecinde geçen diyaloglarda sorular ilerledikçe öğrencilerin önlerinde bulunan bilgisayara yöneldiği, derse odaklanıp matematikle daha çok ilgilendiği, matematik dersini bilgisayarla yapacak olmanın merakını taşıdığı ve yazılım olmadan etkinliklerdeki çalışmaları yapamayacakları görülmüştür. Örneklendirmek gerekirse önceki derslerde tahtaya yazılanları takip etmekte ve dersi anlamakta zorlandıkları için arkadaşlarıyla dönüşümlü olarak not tuttuklarını belirten öğrencilerin Derive yazılımı üzerinde cebirsel işlemleri arkadaşlarıyla etkileşimli olarak yapmaya çalışmaları, Derive olmasa limit bulamayacaklarını ifade etmeleri bu çıkarımı destekleyebilir. Ayrıca fonksiyonda x gördükleri yere verilen noktayı yazmaya bile gerek kalmadan yazılımda yaptıkları cebirsel işlemlerle payda sıfır olsa bile yazılımın limit bulduğunu belirten öğrenci ifadeleri de bu çıkarım içerisinde sorunun tek bir yönüne odaklanan TY ve birbiri ile ilişkili olmayan ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY- seviyesinde olduğu yorumlanmıştır. Matematik eğitimi literatüründe BDÖ ortamlarında görsel temsillerin kavramsal anlamayı ve muhakeme yeteneğini geliştirerek öğrenmeye etkisi ile ilgili çalışmalarla karşılaşmak mümkündür (Camacho, Depool ve Santos-Trigo, 2010; Çıldır, 2012; Hutkemri, 2014; Özyurt, Özyurt, Baki ve Güven, 2013; Swidan, 2013). Teknolojinin öğrenmeye olumlu etki sağlaması için kullanılacak yazılımın uygunluğu ve hazırlanacak etkinlik içeriklerinin önemi çalışmaların ortak sonuçları arasındadır. Dolayısıyla bu çalışmanın bulgularında öğrencilerin öğrenme sürecinde yazılımın tahtadan daha etkili bir rol üstlendiği görülmesine rağmen öğrenme-öğretme sürecini destekleyecek teknoloji destekli içeriklerin oluşturulması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu gereklilik Sevimli ve Delice'nin (2015) çalışma sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Araştırmacı öğretmen ders sürecinde geçen diyaloglardan ve aldığı notlardan, görsel öğelerin kullanılmadığı ortamların öğrencileri ezbere sevk ettiğine ulaşmıştır. Ayrıca kavram bilgileri sağlam olmadan sınıf geçmenin ve sadece ortaöğretim matematik bilgilerinin MYO öğrencileri için yeterli olmadığını görmüştür. Böylece araştırmacı öğretmene göre yükseköğretim matematiğine temel oluşturan limit konusunun görsel ve kavramsal ilişkilerle öğrencilere sunulması önemlidir. Özellikle MYO öğrencilerinin lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı (TY ve ÇY- seviyesinde) matematik bilgisi için bu durum önem taşımaktadır. Öğrencilerin ders sürecinde, ortaöğretim limit hesaplamalarında yer almasına rağmen, verilen noktaya küçük-büyük değerlerden yaklaşıp limit bulma ve fonksiyonun bir noktadaki limiti ile o noktadaki görüntüsü ayırt etmede zorlandığı görülmüştür. Bu durum, Biber ve Argün'ün (2015) matematiksel kavram bilgileri sağlam olmadan yükseköğretime başlayan öğrencilerin matematik bilgilerinin yetersiz olduğu sonucu; Aygün, Durukan, Aydın ve Diril'in (2015) okul başarısındaki en önemli pay okulun öğrencilerine ait olduğu sonucu; Sıvacı'nın (2003) matematik başarısının mezun olunan lise türüne göre farklılaştığı sonucu; Baştürk ve Dönmez'in (2011) limitin sağdan-soldan tanımına yönelik öğretim programı ile ilgili bulguları ile tutarlılık göstermiştir.

Öğrenme çıktılarının SOLO ile değerlendirildiği bu çalışmada fonksiyonun bir noktadaki limit değerini görüntüsünden ayırt etmede MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar, işlemsel ve ezbere bilgi parçalarını içeren TY ve ÇY seviyesinden öteye gidememiştir. Nitekim öğrenciler soru gruplarında yer alan fonksiyonların verilen noktalardaki limitini inceleme sürecinde, önceki ezbere bilgileri doğrultusunda x yerine verilen noktayı yazmaya çalışmışlardır. Çalışmanın başlangıcında fonksiyonun değerinin tam olarak limit değerine eşit olması gerektiği yanılgısına sahip olan MYO öğrencileri bir değere ulaşmanın, yakınlaşmanın ne olabileceğini farkında değildi. Başlangıçta verdikleri cevaplar sorunun tek bir yönüne odaklanmış olsa da çalışma ilerledikçe ifadelerin ezbere ve birbirinden kopuk bilgi parçalarına dönüştüğü kısacası, TY seviyesinde başlayan cevapların ÇY seviyesinde cevaplara dönüştüğü söylenebilir. Ayrıca öğretim süreci sonuna doğru MYO öğrencilerinin bazılarında fonksiyonun bir noktadaki limitinin o noktadaki görüntüsüne eşit olma yanılgısının giderildiği görülmüştür.

5. 2. Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerinin Bulunması ile İlgili Tartışma

Çalışma yapraklarında yer alan sorular fonksiyonun belirsizlik durumunda limit bulma ile ilgili "İkinci Soru Grubu: 2. Çalışma Yaprağının 6.,7.; 3. Çalışma Yaprağının 2., 3., 4., 5., 6.; 5. Çalışma Yaprağının 2., 3., 4., 5. soruları" şeklinde gruplandırılarak incelendi. Bu sorular hazırlanırken fonksiyonun verilen noktada limiti olmasına rağmen belirsiz olmasına dikkat edildi. Böylece MYO öğrencilerine bulacakları belirsizlikte limit değerine ulaşma imkânı sağlanmıştı. Öğrencilerin ders sürecinde çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleştirdikleri diyaloglar ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar incelendiğinde genel olarak öğrenci cevaplarının SOLO taksonomisine göre çalışılan sorunun tek bir yönüne odaklanan TY ve birleştirici unsur kullanılmayan kopuk bilgi parçaları içeren cevapların yer aldığı ÇY seviyelerine karşılık geldiği görülmektedir. Belirsizlik durumlarına ulaşmada kavramsal anlamaya yakın olmayan bu cevaplar beklenen öğrenmenin gerçekleşmediğini göstermektedir. Derive yazılımı yardımıyla verilen fonksiyonu tanımlamakta, limit bulmakta güçlük çekmeyen MYO öğrencileri, limit aranan noktaları yerine yazmakta ve elde edilen belirsizliği tanımlamakta zorlandı.

2. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 6., 7. sorularında verilen $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\sin(2\mathrm{x}-2)}{3\mathrm{x}-3}$ fonksiyonu $\mathrm{x} = 1$'de $\frac{0}{0}$ belirsizlik halini içermekteydi. MYO öğrencilerinden, $\mathrm{x} = 1$ noktasına küçük-büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun alacak olduğu değer ve o noktadaki görüntüsü arasında ilişki kurulması istendi. MYO öğrencilerinin çoğu yazılımı kullanmadan kâğıt-kaleme yönelerek x=1 değerini fonksiyonda yerine yazıp $\frac{\sin(0)}{0}$ elde etmişti. Elde ettikleri bu ifadenin yanlış olduğunu belirten öğrenciler $\frac{0}{0}$ belirsizlik durumunu tanımlamada güçlük çekmiştir. Bu belirsizliği tanımlamadan cevap olarak Derive yazılımı üzerinde buldukları limit değerini söyleyen MYO öğrencilerinin benzeri cevapları sorunun tek yönüne odaklı olduğundan TY seviyesine yerleştirildi. MYO öğrencilerinin çalışma yaprakları üzerinde kağıt-kalem kullanarak yaptıkları çözümde limit değerine ulaşamadığı ve limitin olmadığını belirttiği, yazılım kullanımı ile limit değerine ulaştıklarında ise şaşırdığı görülmüştür. Soru grubu ile ilgili verilen cevaplar ilerledikçe sorunun tek yönüne odaklanan TY seviyesindeki ifadelerin kavramsal anlamanın olmadığı ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY veya ÇY+ seviyesine doğru geliştiği görülmektedir. Fonksiyon verilen nokta tanımsız olsa bile Derive yazılımı üzerinde aynı noktaya iki yönden yaklaştıklarında aynı sonuçla karşılaşmanın limit olduğunu belirten öğrenci cevapları ve benzeri cevaplar bu durumun göstergesi olarak yorumlanabilir. Soru grubu ile ilgili çalışmalar tamamlandığında öğrencilerden ortalama olarak 11'inin TY, 20'sinin ÇY, 1'inin ÇY+ seviyesinde ifadeler kullandığına ulaşılmıştır.

3. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 2., 3., 4. sorularında $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{2\mathrm{x}^3+\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}$ fonksiyonu verilmiş olup bu fonksiyonun $-\infty$ için limitinin incelenmesi istenmişti. İster pozitif, ister negatif, ister büyük değerlerden, ister küçük değerlerden yaklaşmak olsun fonksiyonun ∞'daki limiti 2 olmasına rağmen $-\infty$'un incelenmesi öğrencilerde işaret farkındalığı sağladı. MYO öğrencilerinin sayı doğrusu bilgisinden yola çıkarak $-\infty$'a büyük değerlerden yaklaşmaya çalışması, $-\infty$'un ε komşuluğunu sorgulaması verilen cevapların birbiri ile ilişkili olmayan bilgi parçalarını içereren ÇY seviyesine yerleşmesinde etkili olmuştu. Çalışmanın başlangıcında sonsuzluk ifadesinden korkan, x yerine ∞ yazmaya çalışıp sorunun tek yönüne odaklanarak TY seviyesinde cevap veren MYO öğrencilerinin çoğunun giderek birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde ifadeler kullandığı görülmektedir. Nitekim çalışma ilerledikçe $-\infty$'a büyük sayılardan çok yaklaştığını fakat $-\infty$ olamadığını belirten öğrenci ifadeleri bu durumu örneklemektedir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 8'inin TY, 24'ünün ÇY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

3. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 5., 6. sorularında $\mathrm{f(x)} = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonu ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine yer verildi. MYO öğrencilerinden fonksiyonun $-\infty$'a yaklaşırken alacak olduğu değer ve $-\infty$'daki çözümünü karşılaştırmaları istendi. Sonsuzluk ifadesi ile karşılaşan MYO öğrencilerinin zorlandığı ve sorulara ilişkin "$-\infty$'un küpü eksidir ve sonuç kesin $-\infty$'dur", "belirsiz $\frac{\infty}{\infty}$ olabilir burada", " burada sonsuzluk olduğu için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine ulaşmamızı sağlar" şeklinde ezbere cevaplar verdiği görülmüştür. Bu ve benzeri cevaplar MYO öğrencilerinin birbiri ile ilişkili olmayan ezbere bilgi parçalarına sahip olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca fonksiyonun belirsizlik durumunu açıklayamayan MYO öğrenci cevapları sorunun tek yönüne odaklandığında TY, birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalarını içerdiğinde ÇY seviyesine yerleştirildi. Soru grubu ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 9'unun TY, 21'inin ÇY, 2'sinin ÇY+ seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

5. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 2., 3., 4. sorularında $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}.\sin\frac{2}{\mathrm{x}}$ fonksiyonunun sonsuza yaklaşırken alacağı değer ile ∞'daki limitinin incelenmesi istenmişti. MYO öğrencilerinin karşılaşmaktan en çok korktuğu soruların trigonometri ve sonsuzluk kavramı içeren ifadeler olduğu görülmektedir. Bu ifadelerle karşılaşan MYO öğrencileri verilen fonksiyonun anlaşılmaz ve incelenemez olduğunu belirtmiştir. "∞.0" belirsizliğinin yer aldığı bu soru grubu için öğrencilerin "…bu kez hem trigonometri hem de sonsuzluk (∞)…bu soru benim için şimdiden bitmiştir…" ifadeleri durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. Sorunun tek yönüne odaklanarak TY seviyesinde cevaplarla başlayan öğrenci ifadelerinin birbiri ile ilişkili olmayan bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesindeki ifadelere doğru gelişim gösterdiği ve bu gelişimde BDÖ'nün ve Derive'nin etkili olduğu söylenebilir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 2'sinin YÖ, 11'inin TY ve 19'unun ÇY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

5. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 5. sorusunda $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}.\sin\frac{2}{\mathrm{x}}$ fonksiyonunun sonsuza yaklaşırken alacağı değer ile ∞'daki limitinin incelenmesi istenmişti. Böylece MYO öğrencilerinin $\infty.0$ belirsizliğine ulaşıp bu belirsizlik durumunda limit bulma ile ilgili öğrenmelerini değerlendirmek amaçlandı. Soruya verilen cevaplardan MYO öğrencilerinin trigonometri ve sonsuzluk kavramı içeren ifadelerden kaçındığı görülmektedir. Sonsuza yaklaşırken limitinin incelenmesi istenen sinüs fonksiyonu için sonsuzlukta çözümün olmayacağını ve trigonometrik ifadelerin sonsuzda sonsuz olacağını belirten öğrenci ifadeleri, MYO öğrencilerinin çoğunun trigonometri ve sonsuzluk kavramlarından kaçındığının göstergesi olarak yorumlanmıştır. Bu gruba ait önceki

sorularda sorunun tek yönüyle ilişkili TY seviyesinde cevaplarla başlayan öğrenci ifadelerinin birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY seviyesine doğru gelişim gösterdiği vurgulanmıştı. Oysa bu soruya yönelik bulgular incelendiğinde öğrenci cevaplarının birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY seviyesine ulaşmakta zorlandığı ve ÇY seviyesinde verilen cevapların da soruya ilişkin ezbere bir-iki bilgi parçası içeren zayıf çok yönlü yapıda ifadeler olduğu görülmektedir. Bu durumun MYO öğrencilerinin trigonometri ve sonsuzluk ifadesi korkularından kaynaklandığı düşünülmektedir. Örneklendirmek gerekirse öğrencilerin "…ya burada sinüs var ben x gördüğüm yere 1 yazsam bile sonuç bulamam!", "…zaten matematikten bir şey anlamıyorum bu sorudan ne anlayabilirim ki? Sinüs var, ∞'luk var, limit var… ben bunu imkânsız yapamam!" şeklindeki cevapları ve benzeri cevaplar bu durumun göstergesi olarak yorumlanıp sorunun tek yönüne odaklanma olduğundan TY seviyesine yerleştirilmiştir. Böylece belirsizlik durumlarını dikkate almadan sadece trigonometrik ifadeye ve fonksiyonun ∞ değerinde alması gereken sonuca odaklanan MYO öğrencilerinin, verilen fonksiyonun belirsizlik durumunu ve limitini bulmada beklenen öğrenmeyi sergileyemediği ve cevaplarının TY ve ÇY- seviyesinde olduğu belirlenmiştir. Soru grubu ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 13'ünün TY, 18'inin ÇY-, 1'inin ÇY seviyesinde ifadeler kullandığına ulaşılmıştır.

Yukarıda belirtilen sorular ele alındığında "fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulabilme" ile ilgili öğrenmenin gerçekleşmesi için MYO öğrenci cevaplarının birbiri ile ilişkili kavramsal anlamanın olduğu İY seviyesinde olması gerektiği düşünüldüğünde beklenen öğrenmenin gerçekleşmediği açıktır. Çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrencilerinin en çok zorlandıkları soruların bu grupta olduğu ortaya çıkmıştır. Bunun sebebi limit-süreklilik konusu ve belirsizliklerle ilgili eksiklerden ziyade, MYO öğrencilerindeki bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksiklikleri olarak gösterilebilir. Literatür taraması kısmında yer verilen belirsizlik durumlarını, limit öğretimini, limit bulmayı ve limit-sürekliliğin zorluğunu inceleyen araştırmaların bazılarında (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Aztekin, 2012; Biber ve Argün, 2015; Çelik ve Akşan, 2013; Çetin, 2009; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Hutkemri, 2014; Kula ve Bukova-Güzel, 2015; Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu, 2014; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015) öğrencilerin sonsuzluğu belirli (genellikle çok büyük) bir sayıya eş tuttuğu veya bir sayı olarak algıladığı, her matematiksel işlemin sayısal bir sonucu olması gerektiği şeklindeki inançları doğrultusunda sıfır ile bölmenin neden tanımsız olduğunu anlamlandıramamaları, özellikle limit kavramı ile ilişkili belirsizliklerde sıfıra bölme, sıfırın sıfıra bölümü ve sonsuzda limit hesaplamalarındaki başarısızlıkları öğrencilerin eksikleri olarak tespit edilmiştir. Bu doğrultuda bu çalışmada elde edilen MYO öğrencilerinin sonsuzu bir sayı gibi algılamaları, tanımsızlığı ve belirsizliği anlamlandıramamaları, fonksiyon kavramı eksikliği, trigonometrik fonksiyonlarda, sonsuzda ve belirsizlik durumlarında limit hesaplamalarındaki başarısızlıkları gibi eksikler (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Aztekin, 2012; Biber ve Argün, 2015; Çelik ve Akşan, 2013; Çetin, 2009; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Hutkemri, 2014; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall ve Viner 1981; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015) bu araştırmaların sonuçları ile paralellik göstermektedir. Araştırmacı öğretmenin ders sürecinde gerçekleşen diyaloglardan ve öğrenci cevaplarından aldığı notlardan, MYO öğrencilerinin belirsizlik durumlarında limit bulmaya yönelik verdiği cevapların öğrenme için yeterli olmasa bile çalışmalar ilerledikçe öğrenme çıktılarının geliştiği ve ifadelerinin teknoloji eğilimli olduğu çıkarımına ulaşılabilir. Örneklendirmek gerekirse etkinliklerde yer alan fonksiyonlar için limit hesaplaması yapamayan, yazılım üzerinde limit değerine ulaşan ve Derive'de işlem yapmanın çok zevkli olduğunu belirten MYO öğrencilerinin "Sonsuzda belirsizlikler vardır ve bu belirsizlikler $(\frac{\infty}{\infty})$, $(\infty.0)$, $(\frac{0}{0})$ gibidir… çözüm yapamayınca Derive'da limit var mı diye bakabiliriz… bazen yanımdaki arkadaşımla iddiaya girerek çalışma yapraklarındaki sorular için Derive'da değişik değişik limitler bulduk… Mesela o limit 1 dedi ben ∞ dedim ve Derive'da limit hesaplayıp kontrol ettik" şeklindeki sorunun tek yönüne odaklı TY ve birbirinden kopuk ezbere bilgi parçaları içeren ÇY seviyesindeki ifadeleri bu çıkarımın göstergesi olarak yorumlanmıştır. Teknoloji destekli matematik eğitimi literatüründe yer alan araştırmalar belirsizlik durumları ve limit kavramı gibi öğrencilerin anlamada zorlandığı karmaşık konuların öğretiminde görsel temsiller etkili olurken geleneksel öğretim yöntemlerinin etkisinin daha kısıtlı olduğu belirtilmekte olup, çalışmanın bulgularıyla paralellik göstermektedir (Anıl ve Küçüközer, 2007; Aztekin, 2012; Baglivo, 1995; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Çekmez, 2013; Hutkemri, 2014; Sevimli ve Delice; 2015). Araştırmacı öğretmen ders sürecindeki diyaloglardan ve aldığı notlardan, görsel öğelerin kullanılmadığı ortamların öğrencileri ezbere sevk ettiğine ulaşmıştır. Böylece araştırmacı öğretmene göre yükseköğretim matematiğine temel oluşturan limit konusunun görsel ve kavramsal ilişkilerle öğrencilere sunulması önemlidir. Özellikle MYO öğrencilerinin lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik bilgisi için bu durum önem taşımaktadır. Limit hesaplamalarındaki belirsizliklerden bazılarının $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ve $0.\infty)$ yer aldığı bu çalışmada MYO öğrencileri bu soru grubundaki sorularla ortaöğretimde karşılaşmış olmasına rağmen belirsizlik durumlarını anlamlandırmada verdikleri cevapların sorunun tek yönüne odaklı TY ve ezbere kopuk bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde kaldığı görülmüştür. Bu durum, Biber ve Argün'ün (2015) matematiksel kavram bilgileri sağlam olmadan yükseköğretime başlayan öğrencilerin matematik bilgilerinin yetersiz olduğu sonucu; Sıvacı'nın (2003) yapmış olduğu matematik başarısının mezun olunan lise türüne göre farklılaştığı sonucu, Çelik ve Akşan'ın (2013) matematik öğretmeni adaylarının belirsizlik durumunu tanımlamalarına rağmen nedenini açıklamakta zorlandıkları sonucu ile tutarlılık göstermiştir.

Öğrenme çıktılarının SOLO ile değerlendirildiği bu çalışmada fonksiyonun belirsizlik durumlarını ifade edip bu belirsizlik durumlarında limit bulabilmeyle ilgili öğrencilerinin verdiği cevaplar işlemsel ve ezbere bilgi parçası olmaktan öteye gidememiştir. MYO öğrencileri çalışmanın başlangıcında bu gruba ait sorularda yer alan fonksiyonların belirsizlik durumlarını bulmakta zorlanırken bu belirsizlik durumunda limitin nasıl bulunacağına dair cevap vermeden Derive ile limit bulmaya yönelmişlerdi. Başlangıçta sorunun tek yönüne odaklı olup TY seviyesine yerleştirilmesi uygun görülen cevapların çalışma ilerledikçe tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde ifadelere geliştiği görülmektedir. Oysa verilen cevaplar araştırmacı öğretmenin notları, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazılan yorumlar ve diyaloglar doğrultusunda derinlemesine incelendiğinde ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde verilen cevapların bazen zayıf yapıda olduğu söylenebilir. Özetle MYO öğrencilerinin araştırma sorularında belirlenen kazanımlar içerisinde en çok zorlandıkları "fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur" kazanımı olmasında öğrencilerin belirsizlik durumları, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı ve reel sayı kavramı eksiklikleri sebep olarak görülmektedir. Literatür taraması kısmında yer verilen çalışmalardan bazılarında (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Aztekin, 2012; Biber ve Argün, 2015; Çelik ve Akşan, 2013; Çetin, 2009; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Hutkemri, 2014; Kula ve Güzel, 2015; Özmantar ve Yeşildere, 2008; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall ve Viner 1981; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015) öğrencilerin ve öğretmen adaylarının sonsuz kavramını anlamlandıramadığı, belirsizlik durumlarını, limit, fonksiyon ve reel sayı kavramlarını kavrayamadığı ve öğrencilerin limit kavramını diğer kavramlarla ilişkilendirmede yaşadıkları güçlüklere öğretim yöntemlerindeki ilişkisel-görsel öğelerin yetersiz kullanımının sebep olduğu şeklindeki sonuçlara ulaşılmıştır. Dolayısıyla bu sonuçlar, çalışmada ulaştığımız eksiklerle paralellik göstermektedir. Öğrenci cevaplarının sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesinden, tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesine gelişimi ve görselleri tercih etmesi de teknolojinin süreçteki destekli oluşum rolünü açığa çıkarmaktadır. Matematik eğitimi literatüründe teknoloji destekli ortamlarda görsel temsillerin kavramsal anlamayı ve muhakeme yeteneğini geliştirerek öğrenmeye etkisi ile ilgili çalışmalar bu çıkarımı desteklemektedir (Camacho, Depool ve Santos-Trigo, 2010; Çıldır, 2012; Hutkemri, 2014; Özyurt, Özyurt, Baki ve Güven, 2013; Swidan, 2013).

5. 3. Fonksiyon Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulabilme ile İlgili Tartışma

Çalışma yapraklarında yer alan sorular fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili “Üçüncü Soru Grubu: 2. Çalışma Yaprağının 8., 9.; 3. Çalışma Yaprağının 7., 8., 9.; 5. Çalışma Yaprağının 6., 7.; 7. Çalışma Yaprağının 4., 5.; 8. Çalışma Yaprağının 4., 5. ve 10. Çalışma Yaprağının 4., 5. soruları” şeklinde gruplandırılarak incelendi. Bu sorular hazırlanırken fonksiyonun grafiğinin incelenebilir olmasına, grafikte kopuk noktaların yer almasına ve bu kopuk noktalarda limitin olmasına dikkat edildi. Böylece MYO öğrencilerinde sürekli olmayan fonksiyonların limiti olabileceği farkındalığının sağlanması amaçlandı. Çalışma yapraklarında yer alan fonksiyonun grafik çizimini yazılım üzerinde yapan öğrencilerden, çizdikleri grafik üzerinde önceki adımları tekrarlaması istendi. MYO öğrencileri önceki adımları tekrarlarken grafiği derinlemesine inceleme fırsatına sahip oldu. Bu durum araştırmacı öğretmenin ders sürecinde gözlemler esnasında önceki sorularda aldığı notlara yenilerini ilave etme ve eski bölümleri yeniden değerlendirme imkânı sundu. Öğrencilerin ders sürecinde çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleştirdikleri diyaloglar ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar incelendiğinde öğrenci cevaplarının SOLO taksonomisine göre birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve giderek birbiri ile ilişkilendirilmiş kavramsal anlamaya yakın cevapların olduğu İY seviyesinde çıktığı görülmektedir. Bu ise Derive yazılımı üzerinde grafik çiziminde sorun yaşamayan öğrencilerin fonksiyonların grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulmada ve grafik üzerinde verilen noktadaki limiti incelemede beklenen öğrenmeye yaklaştığını göstermektedir.

2. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 8., 9. sorularında $x = 1$ noktasında $\frac{0}{0}$ belirsizliği olan $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi istendi. Fonksiyon $x = 1$ noktasında sürekli olmamasına rağmen diğer aralıklarda sürekli ve x, 1’e yaklaşırken limiti $2/3$ olan bir fonksiyondu. Yazılım üzerinde grafik çizimi yapan öğrencilerden çalışma yaprağının önceki sorularında yapmış oldukları işlemleri tekrarlamaları istendi. Bu aşamadan sonra ise grafik yardımıyla fonksiyonun sürekli olmadığı $x = 1$ noktasına yaklaşırken alacak olduğu değeri yani limiti bulmaları ve bu noktada sürekliliği incelemeleri istendi. MYO öğrencileri fonksiyonun grafiğini yazılım üzerinde çizmede problem yaşamadı. Sürekliliğin incelenmesi istenen $x = 1$ noktası için çalışmanın başlangıcında Derive üzerinde limit bulan öğrenciler gereken cevabı verdiklerini zannetmişlerdir. Fonksiyonun limitini bulan öğrencilerden sürekliliği incelemeleri istendiğinde çalışma yaprağındaki grafiğe benzer grafik bulan öğrencilerin

çalışmanın başlangıcında limit olan yerde süreklilik olacağı şeklinde sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesindeki ifadeleri bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. Diğer soru gruplarına verilen cevaplar en fazla ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY seviyesinde ifadeler içerirken fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları göstermede öğrenci cevaplarının zayıf olsa da kavramsal anlamaya yaklaşan tutarlı cevapların yer aldığı İY seviyesine doğru gelişim gösterdiği görülmektedir. MYO öğrencilerinin süreklilikle ilgili daha tutarlı cevaplar vermesinin nedeni grafik gösterimi kullanımı olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerden bazılarının yazılım üzerinde fonksiyonun grafik çizimini yaptıktan sonra buldukları limit değerinin grafiğini çizmek istediği görülmüştür. Medine'nin verilen fonksiyonun grafiğini bulduktan sonra "tam tersi olarak $y = 2/3$ doğrusunu çizerek limitten emin olmak istedim" ifadesi bu duruma örnek olarak verilebilir. Oysa Medine istediği limit grafiği yerine fonksiyonun y değişkenine göre grafiğini çizmişti. Bu durum sorgulandığında öğrencinin $\mathrm{x} = 1$ için limit değerinin grafiğini çizip fonksiyonun grafiği ile nerede kesiştiğini bulmak istediği görülmüştür. Bu durum başlangıçta etkileyici olmasına rağmen limit grafiği için tersine işlem yapan öğrencinin fonksiyonun tanım-değer kümesi ile ilgili yanılgısı olduğunu göstermektedir. Bu yanılgıya rağmen MYO öğrencilerinin süreklilikle ilgili grafik incelemede daha anlamlı ifadeler kullandığı, ezbere bilgi parçacıklarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesinde cevaplar verdiği söylenebilir. Yazılım üzerinde 1'e küçük-büyük değerlerden yaklaştığında aynı sonucu bulan ve süreklilik için bu noktada fonksiyonun aldığı değerin de aynı olması gerektiğini belirten öğrenci cevapları bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. Soruların sonuna doğru $\mathrm{x} = 1$ noktasının belirsiz olduğunu, bu noktanın dışında sürekliliğin olabileceğini belirten MYO öğrencileri, verilen fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilmede beklenen öğrenmeye yaklaşmış olup cevapları ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine dâhil edilmiştir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 2'sinin TY, 21'inin ÇY ve 9'unun İY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

3. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 7., 8., 9. sorularında $\mathrm{x} = -1$ noktasında $\frac{0}{0}$ ve ∞'da ise $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olan $\mathrm{f(x)} = \frac{2\mathrm{x}^3+\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}$ fonksiyonun grafiğinin çizilmesi istendi. Fonksiyon $\mathrm{x} = -1$ noktasında sürekli olmamasına rağmen diğer aralıklarda sürekli ve x, -1'e yaklaşırken limiti $7/2$; x, $-\infty$'a yaklaşırken ise limiti 2 olan bir fonksiyondu. Yazılım üzerinde grafik çizimi yapan öğrencilerden çalışma yaprağının önceki sorularında yapmış oldukları işlemleri tekrarlamaları istendi. Bu aşamadan sonra ise grafik yardımıyla fonksiyonun sürekli olmadığı $\mathrm{x} = -1$ noktasındaki çözümünü, bu noktaya yaklaşırken alacak olduğu değeri yani limiti bulmaları ve bu noktada sürekliliği

incelemeleri istendi. Böylece MYO öğrencilerinin aynı fonksiyon üzerinde önceki çalışma yaprağında incelemiş oldukları $0/0$ belirsizliğini, bu belirsizlik noktasında limitin olduğunu fakat sürekliliğin olmadığının farkına varmaları beklendi. Ayrıca $x = -1$ noktasındaki limiti grafik üzerinde bulmaları istenerek MYO öğrencilerinin görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişim gözlemlendi. MYO öğrencileri fonksiyonun grafiğini yazılım üzerinde çizmede problem yaşamadı. Önceki soruları tekrarlamaya çalışan öğrenciler grafik üzerinde $-\infty$'a nasıl yaklaşabilecekleri hakkında fikir yürütmede zorlandılar. Ayrıca sürekliliği incelenmesi istenen $x = -1$ noktası için Derive üzerinde çözüm yapan MYO öğrencilerinin buldukları "false" sonucu ile kafalarının karıştığı görülmektedir. Çalışmanın başlangıcında cebirsel çözümde "false" ile karşılaşan öğrencilerin "böyle belirsiz anlamsız şeyler olunca grafik de inceleyemeyiz" şeklinde sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesinde verdikleri cevaplar bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. Buna rağmen önceki soru gruplarında en fazla birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalaının yer aldığı ÇY seviyesinde ifadelere rastlanırken fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları belirlemede öğrenci cevaplarının zayıf da olsa kavramsal anlamaya yakın tutarlı cevapların yer aldığı İY seviyesine doğru gelişim gösterdiği görülmektedir. Yazılım üzerinde soru grubuna ait fonksiyonun grafiğini inceleyen MYO öğrencilerinin soru grubunun sonuna doğru -1 noktası için grafikte çözüm olmadığını ve çözüm olmadığı için sürekli olamayacağını belirtmesi bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. MYO öğrencilerinin süreklilikle ilgili daha anlamlı cevaplar vermesinin nedeni grafik gösterimi kullanımı olduğu düşünülmektedir. Öğrenciler verilen fonksiyonun grafiğini yazılım üzerinde çizdikten sonra grafiği oklarla büyütüp küçülterek $x = -1$'de var olan kopukluğu farkına varmıştır. Böylece süreklilikle ilgili ifadeleri daha anlamlı olmuştur. Bazı öğrencilerin yazılım üzerinde grafik çizimini yaptıktan sonra fonksiyonun $x = -1$ noktasına yaklaşırken alacak olduğu limit değerinin grafiğini de çizmek istediği görülmüştür. Bunun nedeni sorgulayan araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinden beklemediği kadar anlamlı ifadelerle karşılaşmıştır. Örneğin, Sadullah'ın "hocam $x = -1$ için çözüm yok false oluyor. Grafikte limiti görmek için $x = -1$'de gerçekten de $7/2$ oluyor mu diye bakarız ve $7/2 = 3.5$ grafikte $x = -1$ için değer 3.5 olur. Yani doğru" ifadeleri bunu doğrular niteliktedir. Soru grubunun sonuna doğru $x = -1$ noktasının dışında sürekliliğin olabileceğini belirten MYO öğrencileri, verilen fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilmede beklenen öğrenmeye yaklaşmış olup cevapları ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY-seviyesine dâhil edilmiştir. Soru grubu ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 6'sının TY, 19'unun ÇY ve 7'sinin İY- seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

5. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 6., 7. sorularında x, ∞'a yaklaşırken $\infty.0$ belirsizliği olan $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}.\sin\frac{2}{\mathrm{x}}$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi istendi. Fonksiyon, sıfır noktası hariç sürekli ve sıfır noktasına doğru yoğunlaşıp kopan bir grafiğe sahipti. Sonsuza yaklaşırken limiti 2 ve sıfıra yaklaşırken limiti 0 olan bu fonksiyonun grafiği yoğunlaştığı sıfır noktasında dikkat çekiciydi. Yazılım üzerinde grafik çizimi yapan öğrencilerden çalışma yaprağının önceki sorularında yapmış oldukları işlemleri tekrarladıktan sonra grafik yardımıyla fonksiyonun sonsuza giderken alacak olduğu değer ile fonksiyonun sürekli olduğu aralıkların bulunması istendi. Böylece MYO öğrencilerinin fonksiyonun sıfır noktası hariç diğer bütün aralıklarda sürekli olduğunun farkına varmaları beklendi. Ayrıca x, ∞'a yaklaşırken grafik üzerinde limit bulmaları istenerek MYO öğrencilerinin görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişim gözlemlendi. MYO öğrencileri fonksiyonun grafiğini yazılım üzerinde çizmede problem yaşamadı. Önceki soruları tekrarlamaya çalışan öğrenciler grafik üzerinde ∞'a nasıl yaklaşabilecekleri hakkında fikir yürütmede zorlanmış olup çalışmanın başlangıcında sorunun tek yönüne odaklı TY ve ezbere tutarsız bilgi parçalarının yer aldığı ÇY seviyesinde cevaplar verdi. Sürekliliği incelerken genel olarak sıfır noktasına takılan MYO öğrencilerinin buradaki limiti merak ettikleri ve sıfırdaki yoğunlaşmayı kalp atışına benzettikleri görülmektedir. Grafiğin sıfır noktasında dikkat çekici olması öğrencilerin grafiği inceleme isteğini arttırmıştır. Yazılımda bu nokta için limiti sıfır bulan öğrencilerin grafik ile ilgili yorumları sorunun tek yönüne odaklı TY ve tutarsız ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY seviyesinden ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın tutarlı cevapların yer aldığı İY seviyesine doğru gelişim göstermiştir. Önceki soru gruplarında ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY seviyesinin üzerinde ifadelere rastlanmazken fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları belirlemeye yönelik öğrenci cevaplarında giderek daha tutarlı az da olsa kavramsal anlamaya yakın İY seviyesinde ifadelerin olduğu görülmektedir. Öğrencilerin kavramsal anlamaya yakın İY seviyesinde cevaplar vermesinin görsel temsilleri tercih etmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğrencilerin soruların sonuna doğru süreklilik için grafikte boşluğun olmaması gerektiğini belirtmesi, fonksiyonun grafiğini inceleyip yoğunlaşma noktası olan sıfır noktasının dışında sürekli olduğunu yorumlaması bunu doğrular nitelikte olup bu tutarlı cevaplar kavramsal anlamanın yer aldığı İY seviyesine yerleştirilmiştir. MYO öğrencilerinin süreklilikle ilgili daha anlamlı cevaplar vermesinin nedeni grafik gösterimi kullanımı olduğu düşünülmektedir. Öğrenciler verilen fonksiyonun grafiğini yazılım üzerinde çizdikten sonra grafiği oklarla büyütüp küçülterek $x = 0$'da var olan kopukluğu farkına varmıştır. Burada fonksiyon sürekli olmasa bile limitin olabileceğini belirten bazı MYO öğrencilerinin süreklilikle ilgili cevapları daha anlamlı olup bu cevaplar da kavramsal anlama içeren İY seviyesine yerleştirilmiştir. Bazı

öğrencilerin yazılım üzerinde grafik çizimi yaptıktan sonra fonksiyonun ∞'a yaklaşırken alacak olduğu limit değerinin grafiğini çizmek istediği görülmüştür. Bunun nedeni sorgulayan araştırmacı öğretmen MYO öğrencilerinin anlamlı ifadeleriyle karşılaşmıştır. Örneklendirmek gerekirse x, ∞'a yaklaşırken fonksiyonun grafiğinde limit durumunu görmekte zorlanan öğrencilerin buldukları limit değerinin grafiğini aynı grafik üzerine çizdikleri görülmüştür. Daha sonra fonksiyon grafiğinin sonsuza doğru limit grafiğine yaklaşıp yaklaşmadığına bakacaklarını belirtmeleri, öğrencilerin anlık değişimi görsel olarak incelediklerinin göstergesi olarak cevapları ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamanın yer aldığı İY seviyesinde yorumlanmıştır. Soruların sonuna doğru grafiğin sıfır noktası dışında sürekli olabileceğini belirten MYO öğrencileri, verilen fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilmede beklenen öğrenmeye yaklaşmış olup cevapları çok yönlü yapı ve ilişkilendirilmiş yapı seviyesine dâhil edilmiştir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 27'sinin ÇY ve 5'inin İY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

7. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 4., 5. sorularında $\mathrm{f}: [-1, 2] \rightarrow \mathrm{R}$, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$ fonksiyonu verilip tanımlanan kapalı aralıkta sürekliliğin grafik üzerinde incelenmesi istendi. Bundan önceki soru gruplarında önce limit daha sonra süreklilik incelenmişti. Bu sorularda ise öğrencilerin sadece sürekliliğe odaklanıp kapalı aralıkta sürekli fonksiyonun özelliklerini hatırlamaları amaçlandı. Bu amaçla çalışma yaprağının önceki sorularında $\mathrm{f(x)} = 0$ için çözümü $-2, 0$ bulan MYO öğrencilerinin bu aralıkta çözüm kümesinde -2'nin olmaması gerektiğini görmeleri beklendi. Ayrıca bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda verilen teorik ders kapsamında fonksiyonun sürekli olması için $\mathrm{f(a).f(b)} < 0$ ise $\mathrm{f(x_0)} = 0$ olacak şekilde en az bir $\mathrm{x_0} \in (\mathrm{a, b})$ olması gerektiğini ifade etmeleri beklendi. Bu tanımı ifade edebilen MYO öğrencilerinden $[-1, 2]$ kapalı aralığında tanımlanan $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$ fonksiyonunun aynı aralıkta sürekli olduğunu grafik üzerinde göstermeleri istendi. Bu doğrultuda öğrencilerin yazılımda çizdikleri grafik üzerinde hareket edip, anlık değişimden faydalanarak $\mathrm{f(x)} = 0$ için fonksiyonun alacak olduğu değerleri bulmaya çalıştığı görülmektedir. Grafik üzerinde hareket ederek fonksiyonun iki ayrı noktada sıfır olduğunu belirten bazı öğrenci cevapları ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın tutarlı cevapların yer aldığı İY seviyesinde yorumlanmış olup grafik üzerindeki anlık değişimden faydalandıklarını doğrular niteliktedir. Önceki çalışmalarında fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra aynı grafik üzerinde limit grafiğini çizen MYO öğrencilerinin bu grafik üzerinde ise $\mathrm{f(x)} = 0$ için buldukları çözüm değerlerinin grafiğini çizmek istedikleri görülmektedir. Ayrıca öğrencilerin çalışma sürecinde verilen fonksiyonun tanım-değer kümelerini farkına vardığı ve grafiği tanımlanan aralıkta incelemeleri gerektiği gibi

kavramsal anlamanın olduğu İY seviyesinde ifadeler kullandıkları görülmüştür. Bu durum MYO öğrencilerinin görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişim şeklinde yorumlanmıştır. Sürekliliği incelerken genel olarak $\mathrm{f(x)} = 0$ çözümüne odaklanan öğrenciler bu çözümü niçin yaptıklarını belirtmede başarılı olamasa da grafik üzerinde sürekliliği göstermede başarılı olduklarından cevaplarının ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde olduğu söylenebilir. Bazı öğrencilerin kapalı aralıkta süreklilik inceleme ile ilgili verdiği cevapların birbiriyle ilişkili olup anlamlı ifadeler içerdiği görülmektedir. Öğrencilerin tanım kümesi -1'den başladığı için fonksiyonu sıfır yapan -2 değerinin bu aralıkta olmayacağını ve fonksiyonun $[-1, 2]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu yorumlaması bu durumu örnekler niteliktedir. Bu gibi anlamlı ifadeler içeren, kavramsal anlamaya yakın ve tutarlı cevaplar İY seviyesine yerleştirilmiş olup, öğrencilerin yazılım içerisinde grafik üzerinde görerek elde ettikleri sonuçları tanım içindeki şartlarla ilişkilendirmede öğrenme ortamının ve dinamik süreçlerin olumlu etkisi olarak yorumlanmıştır. Soruların sonuna doğru grafik üzerinde herhangi bir boşlukla karşılaşmadığını belirten MYO öğrencileri, fonksiyonun grafiğini inceleyip verilen kapalı aralıkta sürekli olduğunu belirterek beklenen öğrenmeye yaklaşmış olup cevapları daha çok ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın tutarlı cevapların yer aldığı İY seviyesine dâhil edilmiştir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 4'ünün TY, 23'ünün ÇY ve 5'inin İY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

8. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 4., 5. sorularında verilen $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^2-4}{\mathrm{x}-2}$ fonksiyonunun yazılım üzerinde grafiğinin çizilmesi istendi. Bu fonksiyon $\mathrm{x} = 2$ noktasında tanımsız olmasının yanı sıra bu noktada $0/0$ belirsizliğine sahipti. Bundan önceki soru gruplarında fonksiyonun belirsiz olduğu noktalarda limit incelenirken bu soru grubunda öğrencilerin sürekliliğe odaklanmaları sağlandı. Ayrıca bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda verilen teorik ders kapsamında fonksiyonun $\mathrm{x} = 2$ noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahip olduğunu görüp "$\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu için $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ olmak üzere, f(a) tanımlı, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ve $\mathrm{f(a)} \neq \mathrm{L}$ ise f fonksiyonunun $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır" tanımı ile ilişkilendirmeleri beklendi. Bu tanımı ifade edebilen MYO öğrencilerinden $\mathrm{R} \backslash \{2\}$'de fonksiyonunun sürekli olduğunu grafik üzerinde göstermeleri istendi. Bu doğrultuda öğrencilerin yazılımda çizdikleri grafik üzerinde hareket edip, anlık değişimden faydalanarak fonksiyonun tanımsız (paydası $\mathrm{x} - 2$) olduğu $\mathrm{x} = 2$ noktasında grafiğin alacak olduğu değeri merak ettikleri görülmektedir. Bu cevaplar başlangıçta birbiri ile ilişkili olmayan cevapları içeren ÇY seviyesinde yorumlanmıştır. Önceki çalışmalarında fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra aynı grafik üzerinde buldukları limit değerinin grafiğini çizen MYO öğrencilerinin bu

grafik üzerinde de benzer şekilde verilen fonksiyonda x, 2'ye yaklaşırken limit değerini bulduğu ve bu değerin grafiğini çizmek istediği görülmektedir. Soru grubuna ait çalışma yapraklarının önceki aşamalarını tamamlayan öğrencilere göre grafik üzerinde limit daha kolay bulunuyordu. Öğrencilerin cebirsel çözümde buldukları limit değeri grafiğini fonksiyonun grafiği üzerine ilave ettikleri, grafiği genişleterek limiti istenen noktanın fonksiyonun grafiği ile kesişip kesişmediğini inceledikleri, grafikte boşluk olduğu için fonksiyonun bu noktada tanımlı olmadığını belirttikleri ve grafiklerin renklerini değiştirmekten mutluluk duydukları görülmüştür. Bu durum MYO öğrencilerinin görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişim şeklinde yorumlanmıştır. Sürekliliği incelerken genel olarak $x = 2$ noktasına odaklanan öğrenciler, bu noktada fonksiyonun tanımlı olmadığını belirtip süreklilik için hem tanımlı hem de limitin olması gerektiğini söylemişlerdi. Bu noktanın dışında sürekliliğin incelenmesi istendiğinde grafiğin 2 dışında düz bir çizgi olup sürekli olduğunu belirttikleri görülmektedir. Fonksiyonun sürekli olduğu aralıkları bulma sürecinde öğrencilerin yazılımda çizdikleri grafik üzerinde görerek elde ettikleri sonuçları tanım içindeki şartlarla ilişkilendirebilmeleri, öğrenci cevaplarının kavramsal anlamaya yaklaşıp, tutarlı olmaya başladığını kısacası İY seviyesine gelişimini göstermiştir. Bu gelişim öğrenme ortamının ve dinamik süreçlerin olumlu etkisi olarak yorumlanmıştır. Bu gibi birbiriyle ilişkili bilgi parçalarını içeren MYO öğrenci cevapları, fonksiyonun grafiğini inceleyip verilen kapalı aralıkta sürekli olduğunu belirtebildiğinden beklenen öğrenmeye yaklaşmış olup cevapları ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın tutarlı cevapları içeren İY seviyesine dâhil edilmiştir. Soru grubu ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 23'ünün ÇY ve 9'unun İY seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

10. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 4., 5. sorularında $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonu verilip yazılım üzerinde grafiğinin çizilmesi istendi. Bu fonksiyon $x = 2$ noktasında tanımsız olan bir fonksiyondu. Ayrıca $x = 2$ noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşıldığında limiti "∞" olan fonksiyon, bu noktada "sonsuz süreksizliği"ne sahipti. Bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda verilen teorik ders kapsamında fonksiyonun grafik çizimini yazılım üzerinde yapan öğrencilerden $x = 2$ noktasına odaklanarak bu noktadaki süreksizliği inceleyip "$f: A \to R$ fonksiyonu için $a \in A$ olmak üzere; $x = a$ daki küçük ve büyük değerlerdeki limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise, f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sonsuz süreksizliği vardır" tanımı ile ilişkilendirmeleri beklendi. Bu tanımı ifade edebilen MYO öğrencilerinden 2'nin çevresinde fonksiyonun sürekli olmadığını fakat 2'den uzaklaştıkça sürekli olabileceğini grafik üzerinde göstermeleri istendi. Bu doğrultuda öğrencilerin yazılımda çizdikleri grafik

üzerinde hareket edip, anlık değişimden faydalanarak fonksiyonun tanımsız olduğu $x = 2$ noktasında grafiğin alacak olduğu değeri merak ettikleri görülmektedir. Grafik çiziminde problem yaşamayan öğrencilerden bazılarının limit sorulmamasına rağmen $x = 2$ noktası için limit bulmaya çalıştıkları görülmüş olup bu cevaplar tutarsız ezbre bilgi parçalarını içeren ÇY- seviyesinde yorumlanmıştır. Bu durumun sebebi öğrencilerin kural temelli ve ezbere öğrenmeye eğilimli olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Önceki çalışmalarında fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra aynı grafik üzerinde limit grafiğini çizen MYO öğrencileri bu defa grafiğin görünümüne odaklanarak aynı grafik üzerinde $x = 2$ doğrusunu çizmişlerdi. Öğrencilere göre $x = 2$ noktasında iki koldan sonsuza uzayan bu grafik dikkat çekiciydi. Sürekliliği incelemeden önce görsel olarak iki ayrı grafik elde ettiklerini düşünen öğrenciler buldukları grafiği peri bacasına benzetmiş olup çalışmanın başlangıcında verdikleri cevaplar sorunun tek yönüne odaklı olduğundan TY seviyesinde yorumlanmıştır. Grafik üzerinde "trace plots" yardımıyla hareket edip sürekliliği incelemeye başladıklarında ise grafiğin ayrı ayrı iki grafik olmadığını sadece $x = 2$ noktası ve çevresinde sonsuza doğru uzandığını ve $x = 2$ doğrusuna paralel olduğunu farkına varan öğrenci cevapları ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine doğru gelişim göstermiştir. Öğrencilerin yazılım üzerinde buldukları grafiği günlük yaşamda karşılaştıkları görsellerle ilişkilendirdikleri görülmüştür. MYO öğrencilerinin grafiğin yukarıya doğru uzanan birbirine paralel iki kolu olduğunu, grafik üzerinde hareket ettiklerinde trace plots'un grafiğin iki koluna atladığını ve grafiğin peri bacasına benzediğini belirtmesi bu durumu örneklemektedir. Bu durum MYO öğrencilerinin görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişim şeklinde yorumlanmıştır. Grafiği incelerken genel olarak 2 noktasına odaklanan öğrencilerin fonksiyonun sürekli olduğu aralıkları belirlemede zorlandığı görülmektedir. Grafiği el kaldırmadan çizemeyeceklerini belirten bu öğrencilere göre fonksiyon hiçbir yerde sürekli değildi. Bu cevaplar başlangıçta sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesinde olmasına rağmen çalışma ilerledikçe tutarsız ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY- ve ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde yorumlanmıştır. Ayrıca $x = 2$'deki sonsuzluğu görüp bu noktanın çevresi hariç fonksiyonun sürekli olabileceğini belirten bazı öğrenci cevaplarının başlangıçta tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY- seviyesinde olduğu, çalışma ilerledikçe fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları göstermede kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine gelişim gösterdiği söylenebilir. $x = 2$ noktası için sonsuzluğun ve süreksizliğin olduğunu söyleyen fakat bu nokta haricinde el kaldırmadan çizilen fonksiyonun sürekli olduğunu belirten öğrenci cevapları bu duruma örnek gösterilebilir. Bu gibi anlamlı ifadeler içeren cevaplar, öğrencilerin yazılım içerisinde grafik üzerinde görerek elde ettikleri sonuçları tanım içindeki şartlarla ilişkilendirmede öğrenme ortamının ve dinamik süreçlerin olumlu etkisi olarak yorumlanmıştır. Böylece fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili beklenen öğrenmeye yaklaşan öğrenci cevapları ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY seviyesine dâhil edilmiştir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 4'ünün ÇY-, 21'inin ÇY ve 7'sinin İY- seviyesinde ifadeler kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

Yukarıda belirtilen sorular ele alındığında "fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme" ile ilgili MYO öğrencilerinde beklenen öğrenmeye yaklaşıldığı görülmektedir. BCS yazılımlarından Derive ile desteklenen çalışma yapraklarının kullanıldığı BDÖ ortamında öğrenciler için en dikkat çekici olan grafik üzerinde yaptıkları çalışmalar olmuştu. Bu durum MYO öğrencilerinin öğrenme sürecinde teorik ifadeler yerine görsel temsilleri tercih etmesi ile ilişkilendirilebilir. Özel olarak yükseköğretim kurumları arasında yer alan MYO öğrencileri için çok zor gibi gözüken birçok matematik konusunun BDÖ ortamında özellikle fonksiyonların grafikleri ve bu grafikler üzerinde hareket edip anlık değişimden faydalanarak limit-sürekliliğin öğrenilmesi geleneksel öğretim yöntemine nazaran daha etkili olduğu görülmektedir. Böylece öğrencilerin beklenen öğrenmeye yaklaşabilmesi görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişimin etkisi olarak gösterilebilir. Literatür taraması kısmında yer verilen araştırmalardan bazıları (Cnop, 1997; Çekmez, 2013; Dubinsky, Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas ve Vidakovic, 1996; Hoyles ve Noss, 1994; Hughes-Hallet, 1991; Hutkemri, 2014; Kabaca, 2006; Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu, 2014; Porizo, 1994; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008; Sevimli ve Delice, 2015; Thompson ve Silverman, 2008; Turan ve Erdoğan, 2016) grafik üzerinde hareket edebilme gibi görsel temsillerin öğrenmeye olumlu etkilerine değinmişlerdir. Bu doğrultuda bu çalışmaların sonuçları ile çalışmada görsel temsillerin kullanımı ile ilgili yukarıda belirtilen olumlu sonuçlar paralellik göstermektedir.

Yazılım üzerinde grafik çizimiyle ilgili problem yaşamayan öğrencilerden bazılarının limit sorulmayan bazı soru gruplarında limit bulmaya çalıştıkları ve buldukları limitin grafiğini fonksiyonun grafiği üzerine ilave ettikleri görülmektedir. Bu durumun sebebi önceki soru gruplarında fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra aynı grafik üzerinde limit grafiğini göstermeleriyle ilişkilendirilmiş olup, öğrencilerin kural temelli ve ezbere öğrenmeye eğilimli olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu durum, Alcock ve Inglish'in (2010) yapmış olduğu çalışmanın görsel öğelerin kullanılmadığı geleneksel içerik ve yaklaşımların öğrencileri kural temelli düşünmeye ve ezbere sevk ettiği sonucu ile tutarlılık göstermektedir. Ayrıca teknoloji destekli matematik eğitimi literatüründe yer alan araştırmalar belirsizlik durumları, limit-süreklilik kavramı gibi öğrencilerin anlamda zorlandığı karmaşık konuların öğretiminde görsel temsiller etkili olurken geleneksel öğretim yöntemlerinin etkisinin daha kısıtlı olduğu belirtilmekte olup, çalışmanın bulgularıyla paralellik göstermektedir (Anıl ve Küçüközer, 2007; Aztekin, 2012; Baglivo, 1995; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Çekmez, 2013; Biber ve Argün, 2015; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Kula ve Bukova-Güzel, 2015; Sevimli ve Delice, 2015).

Monaghan, Sun ve Tall (1994) BCS'den Derive programı kullanımı sonucu öğrencilerin limit kavramı ile ilgili "yakınsama" ve "sonsuzluk" algılarını göz ardı ettiğini ve öğrencilerin sadece çözüme odaklandığını belirtmişlerdi. Buna karşın bu çalışmada sadece çözüme odaklanan MYO öğrenci cevaplarının çalışma ilerledikçe özellikle Derive yazılımında grafik üzerinde limit-süreklilik inceleme ile ilgili yapılan çalışmaların öğrencilerin "yakınsama" ve "sonsuzluk" algılarını öğrenmeleri üzerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin grafik üzerinde hareket edip süreksizlik noktalarına ulaşarak yakınsamayı, grafiği küçültüp-büyüterek sonsuza doğru uzanan kolları inceleyerek ise sonsuzluğu anlamlandırdıkları görülmüştür. Monaghan, Sun ve Tall'ın (1994) değerlendirmesi dikkate alındığında yazılımın cebirsel kısmından ziyade anlık değişimlerin incelenebildiği grafik kullanımının öğrenmede daha etkili olduğu söylenebilir.

Araştırmacı öğretmen ders sürecinde geçen diyaloglardan ve aldığı notlardan, görsel öğelerin öğrencilerin öğrenme sürecinde etkili olduğu sonucuna ulaşmıştır. Özellikle MYO öğrencilerinin yazılım üzerinde çizdikleri her bir grafiği günlük yaşamda karşılaştıkları "kaydırak, kalp atışı, peri bacası, sonsuza giden kollar" gibi somut şekillerle ilişkilendirmesi, öğrencilerin soyut düşünme becerilerini geliştirerek süreklilik aralıklarını bulmalarında ve bu aralıkları limit-süreklilik bağlamında incelemelerinde etkili olmuştur. Böylece araştırmacı öğretmene göre yükseköğretim matematiğine temel oluşturan limit-süreklilik konusunun görsel ve kavramsal ilişkilerle öğrencilere sunulması önemlidir.

Öğrenme çıktılarının SOLO ile değerlendirildiği bu çalışmada fonksiyon grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilmeyle ilgili MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar kavramsal anlamaya tam olarak ulaşmış olmasa da öğrenmeye ilişkin bütünün içinden ifadelere yer verildiği görülmüştür. MYO öğrencilerinden grafik çiziminin ardından önceki soru gruplarında limit ile ilgili yaptıkları çalışma adımlarını tekrarlayıp fonksiyonun sürekli olduğu aralıkları belirlemesi istenmişti. Başlangıçta grafik üzerinde limite nasıl ulaşacakları, sürekli aralıkları nasıl bulacakları hakkında fikir yürütmekte güçlük çeken sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesinde cevaplar veren öğrencilerin, grafiğin üzerinde hareket edip anlık değişimi gördükçe değişik fikirler ürettiği cevaplarının kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine geliştiği görülmüştür. Öğrenciler, fonksiyonların limitiyle ilgili çalışmalar yaparken fonksiyonun grafiğine buldukları limit grafiğini ilave ederek limit aranan değerin bu grafik ile kesişip kesişmediğini dikkate almışlardı. Bu durum araştırmacı öğretmen için MYO öğrencilerinin "yakınsama" ve "sonsuzluk" algılarını öğrenmeleri açısından oldukça önemli bir gelişim olarak kavramsal anlamaya yakın cevpları içeren İY- seviyesinde yorumlanmıştır. Bu aşamadan sonra öğrencilerin süreklilik incelerken grafikleri "kaydırak, kalp atışı, peri bacası, sonsuza giden kollar" gibi somut şekillerle ilişkilendirmesi de oldukça dikkat çekicidir. Buna rağmen süreklilik incelerken "grafik üzerinde el kaldırmadan çizilen yerler süreklidir" ifadeleri beklenen öğrenme için sınırlı kalmıştır. Bu anlamda verilen cevapların ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde başlayıp kavramsal anlamanın olduğu tutarlı cevapları içeren İY seviyesinde ifadelere dönüştüğü söylenebilir. Kavramsal anlamanın olduğu İY seviyesinde verilen cevapların bazıları zayıf olsa bile öğrencilerde fonksiyonun sürekli olduğu aralıkları grafik üzerinde göstermeyle ilgili öğrenmenin geliştiği açıktır. MYO öğrencilerinin öğrenme sürecinde yazılımda yer alan görsel temsilleri tercih etmesi ve teknolojinin süreçteki desteği bu gelişimin önemli bir göstergesi olarak yorumlanmıştır.

5. 4. Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Düşünebilme ile İlgili Tartışma

Çalışma yapraklarında yer alan sorular fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilme ile ilgili "Dördüncü Soru Grubu: 7. Çalışma Yaprağının 2., 3.; 8. Çalışma Yaprağının 6. ve 10. Çalışma Yaprağının 6. sorusu" şeklinde gruplandırılarak incelendi. Bu sorular hazırlanırken sürekliliğin aranacağı noktalarda fonksiyonun tanımsız olmasına dikkat edildi. Böylece MYO öğrencilerine elde edecekleri tanımsızlıkta sürekliliğin olamayacağını farkında olmaları ve bu süreksizliği ifade edebilmeleri için imkân sağlanmıştı. Öğrencilerin ders sürecinde çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleştirdikleri diyaloglar ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar incelendiğinde genel olarak grafik yardımıyla fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik olmadığını belirtmelerine rağmen öğrenci cevapları SOLO taksonomisine göre sorunun tek yönüne odaklı TY ve ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde olduğu için süreksizlik ile ilgili yeterli bilgi veremedikleri ve beklenen başarıyı gösteremedikleri görülmektedir. Derive yazılımı yardımıyla fonksiyonun tanımsız olduğu noktalardaki çözümü bulmakta güçlük çekmeyen MYO öğrencileri, sürekliliğin incelenmesi istendiğinde grafik çizimi olmadan elde edilen süreksizliği tanımlamakta zorlandıkları gözlenmiştir.

7. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 2., 3. sorularında $\mathrm{f}: [-1, 2] \rightarrow \mathrm{R}$, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$ fonksiyonu verilip tanımlanan kapalı aralıkta sürekliliğin incelenmesi istendi. Bu fonksiyon sürekli olup MYO öğrencilerinin [-1,2] kapalı aralığının dışında fonksiyonun tanımsız olduğu herhangi bir aralık olmadığını belirtmesi ve kapalı aralıkta

sürekli fonksiyonun özelliklerini hatırlaması amaçlandı. Bu amaçla $f(x) = 0$ için çözümü $-2, 0$ bulan öğrencilerin bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda yapılan teorik ders kapsamında çözüm kümesinde -2'nin olmaması gerektiğini görmeleri ve $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli ise $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a, b)$ olması gerektiğini ifade etmeleri beklendi. Bu tanımı ifade edebilen MYO öğrencilerinden $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun $[-1, 2]$ kapalı aralığında tanımsız olmadığını ve sürekli olduğunu belirtmeleri istendi. Bu doğrultuda öğrencilerin $f(x) = 0$ çözümü için öncelikle kâğıt-kalem kullandıkları daha sonra yazılım kullanarak çözüm kümesine ulaştıkları fakat buldukları çözümü nerede kullanabilecekleriyle ilgili yeterli fikre sahibi olamadıkları görülmektedir. Öğrencilerin yazılım üzerinde $f(x) = 0$ çözümünü yapıp x'in real çözümünde -2 ve 0'ın olduğunu bulduktan sonra tanım kümesinde kalan noktayı neden bulmaları gerektiğini sorgulamaları ve önceki çalışmaların daha güzel olduğunu belirtmeleri bu durumu doğrulamaktadır. Çalışmayı teorik bilgileriyle ilişkilendiremeyen ve anlamlandıramayan sorunun tek yönüne odaklı öğrenci cevapları TY seviyesinde yorumlanmıştır. Bu cevaplara ilave olarak fonksiyonun sürekliliğinden çok buldukları çözüme odaklanan ve grafik olmadan sürekliliği inceleyemeyeceğini belirten bazı öğrenci cevapları da sorunun tek yönüyle ilişkili olduğundan TY seviyesine yerleştirildi. Sorular ile ilgili verilen cevaplar çalışma ilerledikçe sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesinden, ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve bazen de birbiri ile ilişkili ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY+ seviyesine doğru geliştiği görülmektedir. Kapalı aralıkta tanımsızlığı inceleme sebebinin süreklilikle ilişkisi olduğunu anlamlandıran bazı öğrenci cevapları bu gelişimin göstergesi olarak yorumlanabilir. Soru grubu ile ilgili çalışmalar tamamlandığında öğrencilerden ortalama olarak 19'unun TY, 7'sinin ÇY, 6'sının ÇY+ seviyesinde ifadeler kullandığına ulaşılmıştır.

8. çalışma yaprağının 6. sorusunda $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonu için yazılım üzerinde grafik çizimi yapan MYO öğrencilerinden yaptıkları çalışmalar doğrultusunda süreklilikle ilgili nasıl bir bilgiye sahip oldukları, nelere ulaştıkları istendi. Fonksiyon $x = 2$ noktasında tanımsız olmasının yanı sıra bu noktada $0/0$ belirsizliğine sahipti. Çalışma yaprağının önceki sorularında bu duruma ulaşacak olan MYO öğrencilerinden fonksiyonun $x = 2$ noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahip olduğunu görüp bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda yapılan teorik ders kapsamında "$f: A \rightarrow R$ fonksiyonu için $a \in A$ olmak üzere, $f(a)$ tanımlı, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ve $f(a) \neq L$ ise f fonksiyonunun $x = a$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır" tanımı ile ilişkilendirmeleri beklendi. Bu tanımı ifade edebilen MYO öğrencilerinden fonksiyonun tanımsız olduğu $x = 2$ noktasında sürekliliğin aranamayacağını ancak $R \backslash \{2\}$'de fonksiyonunun sürekli

olduğunu belirtmeleri istendi. Bu doğrultuda öğrencilerin yazılımda inceledikleri grafik sayesinde fonksiyonun $x = 2$ noktasında sürekli olmadığını buldukları fakat süreklilikle ilgili yeni olarak neyi ifade etmeleri gerektikleri konusunda yeterli bilgiye ulaşamadıkları ve cevaplarının en fazla kavramsal anlamaya yakın fakat yeterince tutarlı olmayan İY- seviyesinde gelişim gösterdikleri görülmektedir. Öğrencilerin süreklilik ile ilgili yeni ne öğrenmiş oldukları sorgulandığında, dümdüz çizilen grafiklerin sürekli olduğu ve 2 noktasında boşluk olduğu için fonksiyonun sürekli olamayacağı şeklinde cevaplar ile karşılaşılmıştır. Bu ve benzeri cevaplar sorunun tek yönüyle ilişkili olduğundan TY seviyesine yerleştirildi. Oysa bu soru grubu doğrultusunda süreklilikle ilgili yeni olarak ne öğrendiğini sorgulayan beş MYO öğrenci cevabı incelendiğinde cevaba ilişkin kavramsal anlamaya yakın birbirinden kopuk bilgi parçalarıyla karşılaşılmıştır. Bu beş öğrencinin $x = 2$ noktası hariç diğer yerlerde grafiğin kopuk olmadığını yorumladığı, bu tek nokta düşünülmediğinde fonksiyonun sürekli olabileceğini düşündüğü görülmüştür. Ayrıca cevaplarında “kalkan süreksizlik” tanımı ile karşılaşılmış olup benzeri ifadeleri içeren bu beş öğrenci cevabı kavramsal anlmaya yakın İY- seviyesinde yorumlanmıştır. Sorulara yönelik verilen cevaplardaki ifadeler grafik ile ilişkilendirildikçe sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesindeki cevaplar, ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine doğru gelişim göstermektedir. Bu durum MYO öğrencilerinin görsel temsilleri kullanmalarındaki gelişim şeklinde yorumlanmıştır. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında öğrencilerden ortalama olarak 16’sının TY, 11’inin ÇY, 5’inin İY- seviyesinde ifadeler kullandığına ulaşılmıştır.

10. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 6. sorusunda $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonu için yazılım üzerinde grafik çizimi yapan MYO öğrencilerinden yaptıkları çalışmalar doğrultusunda süreklilikle ilgili nasıl bir bilgiye sahip oldukları, nelere ulaştıkları istendi. Fonksiyon $x = 2$ noktasında tanımsız olmasının yanı sıra bu noktaya küçük ve büyük değerlerden yaklaşıldığında limiti “∞” olup bu noktada “sonsuz süreksizliği”ne sahipti. Çalışma yaprağının önceki sorularında bu duruma ulaşacak olan MYO öğrencilerinden, fonksiyonun $x = 2$ noktasında sonsuz süreksizliğine sahip olduğunu görüp bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda yapılan teorik ders kapsamında “$f: A \to R$ fonksiyonu için $a \in A$ olmak üzere; $x = a$’ya küçük ve büyük değerlerden yaklaşıldığında alacak olduğu limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise, f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sonsuz süreksizliği vardır” tanımı ile ilişkilendirmeleri beklendi. Bu tanımı ifade edebilen MYO öğrencilerinden fonksiyonun tanımsız olduğu $x = 2$ noktasında sürekliliğin aranamayacağını belirtmeleri beklendi. Bu doğrultuda öğrencilerin yazılımda inceledikleri grafik sayesinde fonksiyonun $x = 2$ noktasında sürekli

olmadığını buldukları fakat süreklilikle ilgili yeni olarak neyi ifade etmeleri gerektikleri konusunda yeterli bilgiye ulaşamadıkları görülmektedir. Yazılım üzerinde grafik çizimi yapan öğrencilerin iki koldan yukarıya doğru uzanan ortası boşluk olan grafiğin sürekli olamayacağı ve limitin aranması gerektiği şeklindeki yorumları bu durumu doğrular niteliktedir. Bu ve benzeri cevaplar sorunun cevabına ilişkin birden fazla veriyi aralarındaki ilişkileri kavramaksızın birbirinden kopuk ezbere bilgi parçaları içerdiğinden ÇY seviyesine yerleştirildi. Oysa bu soru doğrultusunda süreklilikle ilgili yeni olarak ne öğrendiğini sorgulayan beş MYO öğrenci cevabı incelendiğinde cevaba ilişkin kavramsal anlamaya yakın birbirinden kopuk bilgi parçalarıyla karşılaşıldığı görülmektedir. Bu beş öğrenci cevabında $x = 2$ grafiğinin boşlukta fonksiyonun grafiğe paralel bir doğru olduğu ve sonsuza gittiği şeklinde ifadeler ortaya çıkmıştır. Ayrıca bu öğrenci cevaplarında "sonsuz süreksizlik" tanımı ile karşılaşılmış olup kavramsal anlamaya yakın bu cevaplar İY-seviyesinde yorumlanmıştır. Yazılımda çizdikleri grafik yardımıyla fonksiyon için teorik olmasa da kendi ifadeleriyle tanım yapmaya çalışan bu öğrenci cevaplarının gelişiminde grafik kullanımının etkili olduğunu düşünülmektedir. Sorulara yönelik verilen cevaplardaki ifadeler grafikle ilişkilendirilip görsel temsillerin kullanımı arttıkça, sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesindeki cevaplar, ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın ifadeleri içeren İY- seviyesine doğru gelişim göstermektedir. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında öğrencilerden ortalama olarak 10'unun TY, 17'sinin ÇY, 5'inin İY- seviyesinde ifadeler kullandığına ulaşılmıştır.

Yukarıda belirtilen sorular ele alındığında "fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilmeleri" ile ilgili öğrenmenin kavramsal anlamayı içeren İY seviyesinde olması gerektiği düşünüldüğünde MYO öğrencilerinde beklenen öğrenmenin gerçekleşmediği açıktır. Çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrencilerinin belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili sorulardan sonra en çok bu gruba ait sorularda zorlandığı ortaya çıkmıştır. Buna sebep fonksiyonların tanımsız olmasının yanı sıra MYO öğrencilerinin süreklilikle ilgili eksik bilgileri gösterilebilir. Literatür taraması kısmında limitle ilgili yer verilen araştırmalardan bazıları (Barak, 2007; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Davis ve Vinner, 1986; Foley, 1986; Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu, 2014; Özmantar ve Yeşildere, 2013; Sevimli ve Delice, 2015; Tall ve Vinner,1981; Turan ve Erdoğan, 2016) sürekliliğe yeterince değinmiş olmasa da süreklilik bilgisinin eksik olmasına ve gerekçe olabilecek bazı konulara değinmiştir. Özellikle fonksiyonun tanımlı olup olmadığını kontrol etmeden "limitin olduğu yerlerde sürekliliğin olduğunu" belirten MYO öğrencilerinin bu ifadeleri Baştürk ve Dönmez'in (2011) matematik öğretmeni adaylarının limit-süreklilikle ilgili kavram yanılgılarını incelediği çalışmasında elde ettikleri sonuçlardan "fonksiyonun limiti varsa fonksiyon o noktada tanımlı ve süreklidir” yanılgısı ile paralellik göstermektedir. MYO öğrencilerinin fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını belirtebilmelerine yönelik verdikleri cevaplar genel olarak sorunun tek yönüne odaklı TY ve tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde olup öğrenme için yeterli olmamasına rağmen yazılımda çizdikleri grafik üzerinde yaptıkları çalışmalarda öğrencilerin sürekliliği daha anlaşılır şekilde ifade ettiği görülmüştür. Bu doğrultuda verilen cevapların teknoloji eğilimli olduğu söylenebilir. Araştırmacı öğretmenin ders sürecinde gerçekleşen diyaloglardan ve aldığı notlardan öğrencilerin grafik çizimi olmadan sürekliliği inceleyemedikleri, grafik üzerinde trade pilots ile hareket ederek cross’daki değerleri inceledikleri ve grafik üzerinde boşluk aradıkları şeklindeki ifadeler bu çıkarımı destekleyebilir. Yazılım üzerinde grafik çizimi yapan MYO öğrencilerinin elde ettiği grafik tek parça olduğunda sürekliliği incelerken sorun yaşamadıkları oysa fonksiyon grafiği parçalı olduğunda süreklilikle ilgili kullandıkları ifadelerde “grafikte boşluk varsa tanımlı değil, limit yok, sürekli değil” gibi kavram yanılgılarına rastlanmış olup bu cevaplar Baştürk ve Dönmez’in (2011) çalışmasının bulgularıyla paralellik göstermektedir. Araştırmacı öğretmen MYO öğrencileri ile çalışmaları süresince benzeri yanılgılara fazlasıyla rastlamış olup bunun sebebini başta MYO öğrencilerinin lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik bilgisi olmak üzere, limit-süreklilik konusu, belirsizlikler, matematiksel semboller, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksiklikleri olarak not almıştır. Limit-süreklilik konusunu ve belirsizlik durumlarını inceleyip öğrencilerin eksiklerini tespit eden araştırmalardan bazılarında (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Aztekin, 2012; Biber ve Argün, 2015; Çelik ve Akşan, 2013; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades ve Zoulinaki, 2009; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015) öğrencilerin belirsizlik durumlarını, sonsuz kavramını, reel sayı kavramını, fonksiyon kavramını ve limit kavramını anlamlandıramadığı sonuçlarına ulaşılmıştır. Dolayısıyla bu eksikler çalışma boyunca araştırmacı öğretmenin aldığı notlar ve öğrencilerden elde ettiği bulgular ile paralellik göstermektedir. Araştırmacı öğretmen ders sürecinde aldığı notlarda bu eksikleri gidermede geleneksel öğretim yöntemlerinin yeterli olmadığını, öğrencilerin öğrenmelerini destekleyecek öğrenme ortamlarının oluşturulması gerektiğini vurgulayarak özellikle görsel öğelerin kullanılmadığı ortamların öğrencileri ezbere sevk ettiğine yer vermiştir. Teknoloji destekli matematik eğitimi literatüründe öğrencilerin anlamada zorlandığı karmaşık konuların öğretiminde görsel temsillerin etkili olurken geleneksel öğretim yöntemlerinin etkisinin daha kısıtlı olduğunu belirten çalışmalar (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Anıl ve Küçüközer, 2007; Aztekin, 2012; Baglivo, 1995; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Çekmez, 2013; Hutkemri, 2014; Sevimli ve Delice; 2015) araştırmacı öğretmenin elde ettiği bulgularıyla paralellik göstermektedir. Böylece araştırmacı öğretmene göre yükseköğretim matematiğine temel oluşturan limit-süreklilik konusunun görsel ve kavramsal ilişkilerle öğrencilere sunulması öğrencilerin bu kavramlarla ilgili soyut düşünme becerilerini geliştirmede önemlidir. Özellikle MYO öğrencilerinin lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik bilgisi için bu durum önem taşımaktadır. Öğrencilerin; meslek lisesi çıkışlı olduklarını, limit-süreklilik konusunun matematik dersine ait olduğunu bildiklerini fakat bu konulara ait hiçbir çalışma yapmadıklarını, sözel veya eşit ağırlık çıkışlı olduklarını belirtmeleri bu önemin göstergesidir. Sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesinde olan bu ifadeler öğrencilerin fonksiyonun tanımsız olduğu noktaları inceleyip süreklilik aranamayacağını ifade etmede eksik olmalarının bir diğer etkisi olarak yorumlanmıştır.

Öğrenme çıktılarının SOLO ile değerlendirildiği bu çalışmada fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını düşünebilmeleriyle ilgili öğrencilerinin verdiği cevaplar sorunun tek yönüne odaklı TY ve işlemsel, ezbere dayanan bilgi parçaları içeren ÇY seviyesinden öteye gidememiştir. MYO öğrencileri sorularda yer alan fonksiyonların tanımsız olduğu noktalarda sürekliliği incelemede zorlanırken Derive yazılımı yardımıyla önceki aşamalarda çizmiş oldukları grafik üzerinde verdikleri cevapların daha anlamlı olduğu görülmektedir. Böylece başlangıçta sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesine yerleştirilmesi uygun görülen bazı cevapların çalışma ilerledikçe ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY veya birbiri ile ilişkili olmasa da kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesinde ifadeler içerdiği söylenebilir. Genel olarak öğrencilerin ders sürecinde çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleşen diyalogları ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar derinlemesine incelendiğinde öğrenci cevapları sorunun tek yönüne odaklı TY ve tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesine yerleştirilmiştir. Özetle MYO öğrencilerinin araştırma soruları içerisinde “fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit bulabilmeyi öğrenmelerinden” sonra en çok zorlandıkları grubun “fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda sürekliliğin aranamayacağını düşünebilme” ile ilgili olduğu görülmüştür. Bu duruma, başta MYO öğrencilerinin lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik bilgisi olmak üzere, limit-süreklilik konusu, belirsizlikler, bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksiklikleri sebep olarak görülmektedir. Sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesindeki bazı öğrenci cevaplarının ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY veya kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine doğru gelişimi ve görselleri tercih etmesi ise teknolojinin süreçteki destekleyici rolünü açığa çıkarmaktadır.

5. 5. Limit ile Süreklilik Arasında İlişki Kurabilme ile İlgili Tartışma

Çalışma yapraklarında yer alan sorular limit-süreklilik arasında ilişki kurabilme ile ilgili "Beşinci Soru Grubu: 7. Çalışma Yaprağının 6.; 8. Çalışma Yaprağının 2., 3.; 10. Çalışma Yaprağının 2., 3. soruları" şeklinde gruplandırılarak incelendi. Limit-süreklilik arası ilişki kurulabilmesi açısından bu sorularda bazen kapalı bir aralıkta, bazen belirsizliğin olduğu bir noktada, bazen de sonsuz süreksizliğin olduğu boşluklarda önce limitin daha sonra da sürekliliğin incelenmesi istenecek şekilde hazırlandı. Ayrıca limit-süreklilik arası ilişkiyi grafik üzerinde yorumlayabilmek için verilen fonksiyon grafiklerinin incelenebilir olmasına dikkat edildi. Böylece grafikte kopuk noktaların yer alması ve bu kopuk noktalarda limitin olması MYO öğrencilerinde sürekli olmayan fonksiyonların limiti olabileceği farkındalığını sağladı. Önceki çalışma yapraklarında özellikle belirsizlik durumlarında limit ile ilgili uygulamalar yapan öğrencilerin 7., 8. ve 10. çalışma yapraklarında limit durumunu süreklilikle ilişkilendirerek incelemeleri istendi. MYO öğrencilerinin bu sorularda limit ve sürekliliği ilişkilendirmek için de öncelikli olarak grafik çizimini yapmış oluğu görüldü. Araştırmacı öğretmen, bu durumu gözlemler esnasında aldığı notlarına "öğrencilerin öğrenme sürecinde görsel temsilleri tercih edip teknolojiyi kullanmaları limit-süreklilik kavramlarını ilişkilendirme ile ilgili öğrenme seviyelerinin gelişiminde etkili olmuştur" şeklinde ekledi. Öğrencilerin ders sürecinde çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleştirdikleri diyaloglar ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar incelendiğinde MYO öğrenci cevapları SOLO taksonomisine göre işlemsel, ezbere bilgi parçalarının yer aldığı ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY-seviyesinde çıktığı için limit-süreklilik konusunu ilişkilendirme ile ilgili hedeflenen öğrenme gerçekleşmese bile genel bilgiye ulaşıldığı görülmektedir.

7. çalışma yaprağının önceki sorularında kapalı aralıkta süreklilikle ilgili uygulama yapan MYO öğrencilerine bu soru grubunda yer alan 6. sorusunda süreklilik konusuna ilişkin yeni olarak ne öğrendikleri soruldu. MYO öğrencilerinden kapalı aralıkta fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmeleri için öncelikli olarak limite bakmaları gerektiğini, limite baktıktan sonra süreklilik inceleyebileceklerini ve herhangi bir aralıkta tanımsız olan bir noktada limitin varlığından söz edilebileceğini belirtebilmeleri beklendi. Bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda yapılan teorik ders kapsamında öğrencilerden $[-1, 2]$ kapalı aralığında tanımlanan fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmesi için fonksiyonun bu aralıkta negatif değer alıp almadığını bulması, şayet fonksiyon verilen aralıkta negatif bir değer alıyorsa sürekli olması için bu aralıkta mutlaka x eksenini kesmesi ($f(x) = 0$ için en az bir değer olması) gerektiğini inceleyip limit-süreklilik arası ilişki kurması istendi. MYO öğrencileri başlangıçta cevap olarak sürekliliğin

sezgisel tanımını yapmanın yeterli olacağını düşünmüştür. Limit ve sürekliliğin sezgisel tanımını yapmaya çalışan öğrenci cevapları çalışmanın başlangıcında sorunun tek yönüne odaklandığından TY seviyesinde yorumlanmıştır. Bazı öğrencilerin süreklilik ile ilgili grafik incelemeyi öğrendiklerini, grafik olmadan sürekliliği inceleyemeyeceklerini, limit ve sürekliliğin ayrılmaz ikili olduğunu belirten cevapları soru ile ilgili kopuk bilgi parçalarını içermesinin yanı sıra soruda yer alan kapalı aralıkta limit ve süreklilik incelemeyle ilişkilendirilmediğinden bu cevaplar işlemsel ve ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY- seviyesine yerleştirildi. Öğrencilere göre limit ve süreklilik ayrılmaz bir ikili olup biri olmadan diğeri olamazdı veya limit olabilirdi. Ayrıca limit olsa bile grafik olmadan süreklilik bulunamazdı. Öğrenci cevaplarında karşılaşılan bu ve benzeri genel ifadeler soruda yer alan kapalı aralıkta limit ve süreklilik incelemeyle ilgili olmayıp tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY- seviyesinde yorumlanmıştır. Bazı öğrencilerin ise çalışma yaprağında yer alan fonksiyonun grafiğini çizdiği ve önceki sorularda yaptığı çalışmaları tekrarladığı görülmüştür. Çalışmanın başlangıcında yer alan bu cevaplar sorunun tek yönüne odaklı olduğundan TY seviyesinde yorumlanmıştır. Araştırmacı öğretmene göre bu cevaplar alt yapı itibariyle kural temelli düşünmeye alışkın olan MYO öğrencilerinin ezbere bilgi parçalarından kurtulamadığına işaret etmektedir. Buna rağmen çalışma yapraklarına ilk başladıklarında konu ile ilgili fikir yürütemeyen MYO öğrencilerinin yazılım ve grafik çizimi ile "kapalı aralığı incelersek, grafiği yaklaştırırsak, limite bu aralıkta bakarsak, sürekli olması için limiti olmalıdır" gibi ifadeleri görsel temsillerin öğrenme sürecinde öğrencilerin zihinlerinde yeni oluşumların oluşmasında etkili olduğuna ulaştırmaktadır. Soru ile ilgili çalışmalar tamamlandığında bazı öğrenci cevaplarının giderek daha anlamlı olması sonucu bu cevaplardan 6'sının ÇY-, 15'inin ÇY, 11'inin İY- seviyesine yerleştirilmesinde etkili olmuştur.

8. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 2., 3. sorularında MYO öğrencilerinden tanımlamış oldukları $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^2-4}{\mathrm{x}-2}$ fonksiyonunun $\mathrm{x} = 2$ noktasını limit-süreklilikle ilişkilendirip incelemeleri istendi. Sorularda yer alan fonksiyon $\mathrm{x} = 2$ noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahipti. Fonksiyonun tek bir noktada tanımsız ve limitinin var olması MYO öğrencilerini limit-süreklilik ilişkisi ile fonksiyonun süreksizliğinin kaldırılabilir süreksizlik olduğuna ve bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda yapılan teorik ders kapsamında "$\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{R}$ fonksiyonu için $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ olmak üzere, $\mathrm{f(a)}$ tanımlı, $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}$ ve $\mathrm{f(a)} \neq \mathrm{L}$ ise f fonksiyonunun $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır" genellemesine ulaştıracaktı. Bu doğrultuda MYO öğrencilerinden fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmeleri için öncelikli olarak limite bakmaları gerektiğini, limite baktıktan sonra süreklilik inceleyebileceklerini ve herhangi bir tanımsızlık noktasında limitin varlığından söz edilebilmesine rağmen süreklilikten bahsedemeyeceklerini

belirtebilmeleri beklendi. Önceki çalışma yapraklarında limit ile ilgili uygulamaları yaparken grafik inceleyen MYO öğrencileri bu grup sorularında da grafik çizimi yapıp grafiği incelemeye yöneldi. Çalışma yaprağının ilk sorusunda fonksiyonu tanımlayan bazı öğrencilerin grafik çizimi yapıp önceki çalışma yapraklarında yaptıkları gibi grafiği genişletip inceleyerek $x = 2$ noktasının sorunlu olduğunu belirtmeleri bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. Bunun gibi sorunun cevabına ilişkin kopuk bilgi parçalarını içeren fakat birbiri ile ilişkilendirilmeyen cevaplar ÇY seviyesine yerleştirildi. Çalışma sürecinde fonksiyonun $x = 2$ noktasında tanımlı olmadığının farkına varan, limit olmadan sürekliliğe bakmayan, sürekliliği incelemek için grafik çizimi yapan öğrencilerin verdiği cevaplar limit-süreklilik ile ilişkili doğru ifadeler olmasına rağmen grafik olmadan sürekliliği incelememesi ve fonksiyonun belirsizlik noktasında süreklilik incelemesi bu öğrencilerin ezbere bilgi parçalarını birleştiremediğine işaret etmektedir. Araştırmacı öğretmen limit-süreklilik arası ilişki kurulmasına rağmen önceki çalışmaları tekrarlayan, yazılım üzerinde limit bulup grafik çizimi yapan, limit olmayan yerde süreklilik olamayacağını ve limiti bulduktan sonra süreklilik için grafiğe bakıp grafikte boşluk yoksa sürekliliğin olabileceğini belirten ezbere fakat ilişkili ifadelerin yer aldığı öğrenci cevaplarını kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesinde yorumlamıştır. Çalışma yapraklarında yer alan her bir fonksiyon için grafik çizme eğiliminde olan ve ezbere bilgi parçalarından kurtulamayan MYO öğrenci cevapları araştırmacı öğretmene göre, alt yapı itibariyle görsel öğelerin kullanılmadığı geleneksel içerik ve yaklaşımların yer aldığı öğrenme ortamlarında öğrencilerin kural temelli düşünmeye ve ezbere sevk edilmesinin sonucudur. Buna rağmen araştırmacı öğretmen, limit-süreklilik konusunun başlangıcında konu ile ilgili fikir yürütemeyen MYO öğrencilerinin yazılım ve grafik çizimi ile "$x = 2$ için false çıktı süreklilik olmaz, grafiği yaklaştırırsak, bu noktada limite bakarsak, sürekli olması için limiti olmalıdır" gibi ifadeleriyle görsel temsillerin öğrenme sürecinde öğrencilerin zihinlerinde yeni oluşumların oluşmasında etkili olduğuna ulaşmıştır. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında bazı öğrenci cevaplarının giderek daha anlamlı ve tutarlı olması sonucu bu cevaplardan 19'unun ÇY, 13'ünün İY- seviyesine yerleştirilmesinde etkili olmuştur.

10. çalışma yaprağının bu soru grubunda yer alan 2., 3. sorularında MYO öğrencilerinden tanımlamış oldukları $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasını limit-süreklilikle ilişkilendirip incelemeleri istendi. Soru grubunda yer alan fonksiyon $x = 2$ noktasında sonsuz süreksizliğine sahipti. Fonksiyonun bu noktada tanımsız olması ve reel bir değere eşit olması gereken limit değerinin $+\infty$ olarak bulunması MYO öğrencilerini limit-süreklilik ilişkisi ile fonksiyonun süreksizliğinin sonsuz süreksizlik olduğuna ve bilgisayar destekli etkinlikler verilmeden önce limit-süreklilik konusunda yapılan teorik ders

kapsamında "$f: A \rightarrow R$ fonksiyonu için $a \in A$ olmak üzere, $x = a$'ya küçük ve büyük değerlerden yaklaşıldığında limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise, f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sonsuz süreksizliği vardır" genellemesine ulaştıracaktı. Bu doğrultuda MYO öğrencilerinden fonksiyonun sürekliliğini inceleyebilmeleri için öncelikli olarak limite bakmaları gerektiğini, limite baktıktan sonra süreklilik inceleyebileceklerini ve reel bir değere eşit olması gereken limit değerini sonsuz olarak bulduklarında bu değeri sorgulamaları ve burada sürekliğin olmadığını belirtmeleri beklendi. MYO öğrencileri önceki çalışma yapraklarında limit ile ilgili uygulamalar yaparken grafik inceledikleri için bu soru grubunda da öncelikli olarak grafik çizimi yapmış olup fonksiyonun bu noktada tanımsızlığını önceki çalışma yapraklarında inceledikleri belirsizliklerle ilişkilendirmiştir. Fonksiyonun $x = 2$ noktası için çözümünde false sonucu ile karşılaştığında fonksiyonun çözümünün olmadığını, grafikte bu noktanın boşluk olacağını, fonksiyonun sorunlu ve limitinin sonsuz olduğunu belirten öğrenci ifadeleri bu durumun göstergesi olarak yorumlanmıştır. Bunun gibi sorunun tek bir yönüne odaklanan ve cevabın diğer yönlerle ilişkisini incelemeyen öğrenci cevapları TY seviyesine yerleştirildi. Beklenen öğrenme gerçekleşmese de limit olmadan sürekliliğin olamayacağını ifade eden, yazılım üzerinde $x = 2$ için çözüm yaptıktan sonra "false" ifadesini bulup bu noktada tanımsızlığın olduğunu belirten ve grafik çizimi olmadan sürekliliği inceleyemeyen bazı öğrenci ifadeleri cevaba ilişkin birbirinden kopuk bilgi parçalarını söylemekten öteye gidemediğinden bu ve benzeri cevaplar ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY+ seviyesine yerleştirildi. Çalışma yaprağında yer alan fonksiyonu tanımlayan bazı öğrencilerin limit-süreklilik ile ilgili yetersiz ifadeler kullanması, grafik olmadan sürekliliği inceleyememesi ve fonksiyonun tanımsız olduğu noktada süreklilik araması bu öğrencilerin birbirinden kopuk ezbere bilgi parçalarını birleştiremediğine işaret etmektedir. Bu öğrenci cevapları tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY- seviyesinde yorumlanmıştır. Çalışma yapraklarında yer alan her bir fonksiyon için grafik çizme eğiliminde olan ve çalışmanın başlangıcından itibaren limit-süreklilikle ilgili ezbere bilgi parçalarından kurtulamayan MYO öğrenci cevapları araştırmacı öğretmene göre, alt yapı itibariyle görsel öğelerin kullanılmadığı geleneksel içerik ve yaklaşımların yer aldığı öğrenme ortamlarında öğrencilerin kural temelli düşünmeye ve ezbere sevk edilmesinin sonucudur. Buna rağmen araştırmacı öğretmen, limit-süreklilik konusunun başlangıcında konu ile ilgili fikir yürütemeyen MYO öğrencilerinin çoğunun yazılım üzerinde cebirsel işlemler ve grafik çizimi ile fonksiyonun $x = 2$ noktasında belirsiz olmasına rağmen limitinin olabileceğini, limit ile sürekliliğin birbirini tamamladığını ve grafik olmadan sürekliliğe bakılamayacağını ifade ettiklerini görmüştür. Araştırmacı öğretmen bu ifadeleri, öğrenme sürecinde öğrencilerin zihinlerinde yeni fikirlerin oluşmasında görsel temsillerin etkili olduğu şeklinde yorumlamıştır. Sorular ile ilgili çalışmalar tamamlandığında ortalama olarak öğrencilerden 3 ‘ünün sorunun tek yönüne odaklı TY, 8’inin tutarsız ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY-, 21’inin daha anlamlı ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY+ seviyesinde ifadeler kullandığı görülmektedir.

Yukarıda belirtilen sorular ele alındığında “limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilmeleri” ile ilgili MYO öğrencilerinde beklenen öğrenmenin gerçekleşemediği görülmektedir. Ayrıca çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılıma göre incelendiğinde MYO öğrencilerinin bu gruba ait sorulara cevap verirken önceki çalışmaların etkisinde kaldığı ve bazı kavram yanılgılarına sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Buna sebep çalışma yapraklarında yer alan fonksiyonların incelenmesi istenen noktalarda tanımsız veya belirsiz olmasının yanı sıra alt yapı olarak MYO öğrencilerinin kural temelli ve ezbere öğrenmeye alışkın olmaları gösterilebilir. Literatür taraması kısmında yer verilen araştırmalardan bazıları (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Aztekin, 2012; Biber ve Argün, 2015; Çetin, 2009; Dane, Çetin, Bas ve Sağırlı, 2016; Ervynck, 1981; Fernandez, 2004; Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu, 2014; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008; Roh, 2007; Swinyard ve Larsen, 2012; Swinyard ve Lockwood, 2007; Tangül, Barak ve Özdaş, 2015; Turan ve Erdoğan, 2016) öğrencilerin limit ve süreklilikle ilgili kavramsal ilişki kurmada ayrıca limit kavramının formal tanımını anlamada zorlandığına değinmiştir. Özellikle görsel öğelerin kullanılmadığı geleneksel içerik ve yaklaşımların yer aldığı öğrenme ortamlarında öğrenim gören ve yükseköğretime başlayan MYO öğrencilerinin kural temelli, ezbere düşündüğünü gözlemleyen araştırmacı öğretmenin bu çıkarımı Sevimli ve Delice’nin (2015) teknoloji destekli öğretimin teorik farkındalığı geliştirebileceği sonucuyla paralellik göstermektedir. Araştırmacı öğretmen bu dersi gözlemlediği her dönem MYO öğrencilerinde limit-süreklilik ile ilgili kavram yanılgılarına rastlamıştır. Özellikle öğrencilerin “grafik dışında sürekliliği inceleyememesi”, “sonsuzu limit değeri olarak algılaması”, “belirsizliklerin veya tanımsızlıkların olduğu yerlerde limitin olamayacağı inancı”, “tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını birbirinden ayırt edememesi”, “bir noktada birden çok limit değerinin olabileceği düşüncesi” ve “süreklilik için fonksiyonun tanımlı ve limit değerinin fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olması gerekliliğini dikkate almaması” gibi kavram yanılgıları diğer araştırmacılar (Akbulut ve Işık, 2005; Aztekin, 2012; Baştürk ve Dönmez, 2011; Çelik ve Akşan, 2013; Özmantar ve Yeşildere, 2008; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981) tarafından tespit edilenlerle oldukça benzerlik göstermektedir. MYO öğrencileriyle çalışmaları süresince benzeri yanılgılara fazlasıyla rastlayan araştırmacı öğretmen bunun sebebini başta MYO öğrencilerinin lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik bilgisi olmak üzere, limit-süreklilik konusu, belirsizlikler, bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksiklikleri olarak not almıştır. Araştırmacı öğretmen ders sürecinde gerçekleşen diyaloglardan ve aldığı notlarda bu eksikleri gidermede geleneksel öğretim yöntemlerinin yeterli olmadığını, öğrencilerin öğrenmelerini destekleyecek öğrenme ortamlarının oluşturulması gerektiğini vurgulayarak özellikle görsel öğelerin kullanılmadığı ortamlarda öğrencilerin öğrenme güçlüklerini aşamadıklarına yer vermiştir. Teknoloji destekli matematik eğitimi literatüründe öğrencilerin anlamada zorlandığı karmaşık konuların öğretiminde görsel temsillerin etkili olurken geleneksel öğretim yöntemlerinin etkisinin daha kısıtlı olduğunu belirten çalışmalar (Arıkan, Özkan ve Ünal, 2014; Anıl ve Küçüközer, 2007; Aztekin, 2012; Baglivo, 1995; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Çekmez, 2013; Hutkemri, 2014; Sevimli ve Delice, 2015) araştırmacı öğretmenin çalışma süresince elde ettiği görsel öğelerin kullanıldığı dinamik ortamların öğrencilerin öğrenme süreçlerindeki olumlu katkısıyla ilgili bulgularla paralellik göstermektedir. Bu bulgular doğrultusunda MYO öğrencilerinin limit ve sürekliliği ilişkilendirmeyle ilgili verdikleri cevapların beklenen öğrenme düzeyi için yeterli olmadığı görülmüştür. Buna rağmen öğrencilerin limit-süreklilik konusunun başlangıcında konu ile ilgili fikir yürütemezken yazılım üzerinde cebirsel işlemler ve grafik çizimi ile limit olmadan sürekliliğin olmayacağını, süreklilik için grafiği incelemek gerektiğini, grafikte boşluk olunca sürekliliğin olmadığını, fonksiyonun belirsiz ve tanımsız olduğu noktalarında limit-süreklilik inceleme ile ilgili şüpheye düştüklerini belirten ifadeleri, öğrenme ortamının öğrencilerin zihinlerinde yeni fikirlerin oluşmasında etkili olduğunu göstermektedir. Bu durum araştırmacı öğretmenin çalışmanın başlangıcında ortaya koyduğu "BCS destekli ortamda MYO öğrencileri zihinlerinde yeni fikirler oluşturup, cevaplarını teknolojiye dayalı olarak verebilir" varsayımını doğrular niteliktedir. Böylece araştırmacı öğretmene göre yükseköğretim matematiğine temel oluşturan limit-süreklilik konusunun görsel ve kavramsal ilişkilerle öğrencilere sunulması öğrencilerin bu kavramlarla ilgili soyut düşünme becerilerini geliştirmede önemlidir. Özellikle MYO öğrencilerinin lise yıllarında aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik eğitimi için bu durum önem taşımaktadır. Çalışma sürecinde öğrenciler meslek lisesi çıkışlı olduklarını, ortaöğretim matematik derslerinde limit-süreklilik konusunu işlemediklerini, sözel ve eşit ağırlık çıkışlı olduklarını belirtmiştir. Öğrencilerin limit-süreklilik arasında kavramsal ilişki kurabilmede yetersiz kalan, sorunun tek yönüne odaklı TY sevindeki bu ifadeleri lise eğitimleri boyunca aldıkları matematik öğretiminin önemini ortaya çıkarmıştır.

Öğrenme çıktılarının SOLO ile değerlendirildiği bu çalışmada limit-süreklilik arası ilişki kurabilmeyle ilgili öğrencilerinin verdiği cevaplar sorunun tek yönüne odaklı TY ve ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyelerinden öteye gidememiştir. MYO öğrencilerinin sorularda yer alan fonksiyonları yazılım üzerinde tanımladıktan sonra limit-sürekliliği ilişkilendirmekten ziyade önceki uygulamalarda yaptıkları gibi grafik çizimine yöneldiği ve limit-sürekliliğin sezgisel tanımını yapmaya çalıştığı görülmektedir. Böylece başlangıçta sorulan soruların tek yönüne odaklı TY seviyesine yerleştirilmesi uygun görülen bazı cevapların çalışma ilerledikçe ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesinde ifadeler içerdiği söylenebilir. MYO öğrencilerinin öğrenme sürecinde yazılımda yer alan görsel temsilleri tercih etmesi ve teknolojinin süreçteki desteği bu gelişimin önemli bir göstergesi olarak yorumlanmıştır. Genel olarak öğrencilerin ders sürecinde çalışma yaprakları doğrultusunda bilgisayarda yaptıkları çalışmalar, ekran çıktıları, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplar, araştırmacı öğretmenle gerçekleşen diyalogları ve araştırmacı öğretmenin aldığı notlar derinlemesine incelendiğinde öğrenci cevapları çoğunlukla ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesine yerleştirilmiştir. Ayrıca sorunun tek yönüne odaklı TY seviyesindeki MYO öğrenci cevaplarının, ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine gelişim gösterdiği görülmüştür.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6. 1. Sonuçlar

Bu çalışmanın amacı MYO öğrencilerinin bir BCS yazılımının kullanıldığı ortamda limit-süreklilik konusunda ne öğrendiğini / ne kadar öğrendiğini betimlemekten çok nasıl öğrendiklerini anlamaktı! Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen bu çalışmada MYO öğrencilerinin gözlenen öğrenme çıktıları değerlendirilirken ve yorumlanırken SOLO taksonomisi tercih edilmiştir. Çalışmayı yürüten araştırmacı öğretmen çalışmanın başlangıcında BCS yazılımının kullanılacağı ortamda Derive yazılımı kullanım kılavuzunu dağıtmadan önce MYO öğrencileri ile limit-süreklilik konusuna ilişkin teorik ders işlemiş olup öğrencilere konu ile ilgili hatırlatmalarda bulunup kavramsal bilgiler vermeye çalışmıştır. BCS yazılımı kullanımında MYO öğrencileri ile yapılan teorik ders dikkate alınarak öğrencilerin limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenme çıktıları pilot çalışma sonrası hazırlanıp asıl çalışmada şekillenen rubrikler yardımıyla çalışmanın problemi doğrultusunda ele alınan 5 ayrı kazanım altında değerlendirilmiştir. SOLO taksonomisinin kullanılmış olması nedeniyle belirlenen araştırma problemine cevap aranırken MYO öğrencilerinin her bir kazanıma ilişkin öğrenme çıktılarının SOLO taksonomisinin hangi seviyesine karşılık geldiği hakkında detaylı bilgi verilmiştir. Bu doğrultuda çalışmada elde edilen sonuçlar BCS yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusunu öğrenmeleri ile ilgili incelenen 5 ayrı kazanım altında ele alınmıştır.

6. 1. 1. BCS Yazılımının Kullanıldığı Ortamda MYO Öğrencilerinin Fonksiyonun Bir Noktadaki Limit Değeri ile Fonksiyonun O Noktadaki Görüntüsünü Birbirinden Ayırt Etme ile İlgili Öğrenme Çıktıları ÇY Seviyesinde Değerlendirilmektedir

Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayıt etme ile ilgili olarak MYO öğrencilerinin verdiği cevapların büyük bir çoğunluğu ÇY seviyesine gelişim göstermiştir. Bu seviyenin altında TY seviyesinde cevaplar olmasına rağmen üst seviyede yer alan cevaplarla karşılaşılmamıştır. MYO öğrencilerinin ağırlıklı olarak çok yönlü yapı seviyesinde cevap vermesi fonksiyonun limit değeri ile o noktadaki görüntüsünü ayırt edebilmeleri ve soyut düşünme becerileri açısından sahip oldukları anlamları tutarlı bir yapı içinde bütünleştirmede başarılı olamadıklarını ortaya çıkarmıştır.

MYO öğrencileri belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili bazı sorularda yer alan ∞ ifadesini de bir nokta gibi düşünüp fonksiyonda yerine yazmıştır. Ders sürecinin başlangıcında yazılıma alışmadan önce bazı MYO öğrencileri limit-süreklilik konusunun sadece matematikle ilgili olduğunu bildiklerini, eşit ağırlık ve sözel çıkışlı oldukları için konuyu bilmediklerini belirtmiştir. Sayısal çıkışlı bazı MYO öğrencileri ise fonksiyonun bir noktadaki limitinin fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olduğunu ve verilen noktada tanımsızlık durumu söz konusu ise fonksiyonun limitinin bu fonksiyonun hiçbir zaman ulaşamayacağı (sonsuz) bir değer olduğunu belirtmiştir. Bu öğrenciler yazılımı kullanmadan verilen fonksiyonun belli bir değere yaklaşmasını irdelemeksizin yaklaşılan değeri fonksiyonda basitçe yerine koyarak limit değerine ulaşılacağını düşünmüştür. MYO öğrencilerinin bazıları noktayı fonksiyonda yerine yazıp buldukları tanımsızlıkta ayrıca elde ettikleri belirsizlikte, sonucun veya verilen fonksiyonun yanlış olduğunu söylemiştir. Bu tür öğrenciler için limit ile fonksiyon kavramları neredeyse aynı işleve sahiptir. Çalışmanın başlangıcında yer alan ve soru ile ilgili olmayan bu cevaplar MYO öğrencilerinin mezun olunan lise türü ve lise eğitimleri boyunca aldıkları yetersiz, ezbere dayalı matematik eğitiminin sonucudur.

BCS yazılımı kullanımı ile MYO öğrencilerinin çoğu verilen bir fonksiyonun belli bir noktada limitinin tanımını teorik (ε-δ bağlamında) olarak yapamasa da fonksiyonun o noktadaki görüntüsünün limit olmadığını ve fonksiyonun limiti için verilen noktaya küçük-büyük değerlerden yaklaşıldığında elde edilen limitlerinin eşit olması gerektiğini anlamıştır. Ayrıca grafik çizimi yapıp üzerinde “trade pilots” yardımı ile hareket ederek limit aranan noktayı inceleyen öğrencilerin grafiksel verilerden hareketle fonksiyonun belli bir noktadaki limiti hakkındaki cevapları geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha tutarlıdır. Bu durum yazılımın kullanımına alışıp yazılım üzerinde limit değerini bulan öğrencilerin başlangıçta soru ile ilgili olmayan tutarsız cevaplarının tutarlı bir yapı içinde bütünleşmese de geliştiğini ortaya koymuştur. Bunun sonucunda BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamı formel tanım için olmasa da MYO öğrencilerinin soyut düşünme ve sorgulama becerilerinde geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir. Öğrenci cevapları SOLO ile değerlendirildiğinde ders süreci başlangıcında soru ile ilgili olmayan TY seviyesindeki tutarsız cevaplara yazılım kullanımı arttıkça daha az rastlanmıştır.

MYO öğrencileri BCS yazılımı ile verilen fonksiyonu tanımlama ve limit bulma ile ilgili cebirsel işlemleri rahatlıkla yapmıştır. BCS yazılımı olmadan limitin varlığından söz edemeyeceğini belirten MYO öğrencileri “verdiğiniz noktayı yerine yazdığımızda payda sıfır bile olsa Derive limiti buluyor demek ki burada limit noktayı yerine yazma ile olmuyormuş” şeklindeki ifadeleri BCS yazılımı kullanılmış öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin ezbere bilgilerini sorgulamaları yanı sıra soyut düşünmelerinde de etkili olduğunu göstermektedir.

6. 1. 2. BCS Yazılımının Kullanıldığı Ortamda MYO Öğrencilerinin Fonksiyonun Belirsizlik Durumlarında Limit Değerini Bulabilmeleri ile İlgili Öğrenme Çıktıları TY ve ÇY Seviyelerinde Değerlendirilmektedir

Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulma ile ilgili olarak MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar TY ve ÇY seviyelerinde kalmıştır. Çok yönlü yapı seviyesinde yer alan cevaplar ise zayıf ve güçlü çok yönlü yapı (ÇY-, ÇY, ÇY+) seviyesi aralığına dağılmıştır. Belirsizlik durumlarında limit değerini bulma ile ilgili öğrenmenin SOLO taksonomisinde ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olması gerektiği düşünüldüğünde MYO öğrencilerinin bu yeterlilikte olmadığı açıkça görülmektedir.

Öğrenci çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrencilerinin en çok zorlandıkları sorular bu gruptadır. Bu gruba ait sorulardan özellikle $0.\infty$ belirsizliğinin yer aldığı 5. çalışma yaprağında verilen $\mathrm{f(x) = x.\sin\frac{2}{x}}$ fonksiyonunun $x \to \infty$ için limiti sorgulandığında öğrenci cevaplarında yapı öncesi YÖ seviyesinde cevaplarla karşılaşılmıştır. Aslında öğrencilerden, bir salınımı temsil ettiği için yatay asimptotu olmayan $\sin(\mathrm{x})$ fonksiyonunun (-1,1) arasındaki değerleri tekrar edebileceğini düşünmeleri gibi üst düzey kavramsal bilgi beklenmemiştir. Özellikle öğrencilerin verilen fonksiyonu parçalayarak ayrı ayrı fonksiyonların çarpımının f(x).g(x) limitlerinin de ayrı ayrı çarpımlarından elde edilebileceğini görmeleri, $0.\infty$ belirsizliğini elde ederek bu belirsizliği ortadan kaldırmak için önceki çalışma yapraklarından bildikleri $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlikleri kullanabilmeleri beklenmiştir. Buna rağmen MYO öğrenci cevaplarından bütün sorular içinde sadece bu soruda yapı öncesi YÖ seviyesi ile karşılaşılması bu sorunun özellikle MYO öğrencileri için zor bir soru olduğunu sonucunu ortaya çıkarmıştır. Ders sürecinin başlangıcında fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili soruların çözümünde MYO öğrencilerinde sonsuzluğu bir sayıya eş tutma, sıfır ile bölmenin neden tanımsız olduğunu anlamlandıramama, belirsizliklerde limit bulamama (sıfırın sıfıra bölümü, sonsuzun sonsuza bölümü, sonsuzda limit hesaplamalarda başarısızlık) gibi eksikler tespit edilmiştir. Bu durum limit-süreklilik konusu ve belirsizliklerle ilgili eksiklerin yanı sıra, MYO öğrencilerindeki teorik bilgi, matematiksel semboller, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksiklerinin sonucudur.

BCS yazılımı kullanımı ile MYO öğrencileri fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili teorik olarak bilgi veremese de yazılım üzerinde yaptıkları cebirsel işlemler aracılığıyla fonksiyonda kendilerince anlamlandıramadıkları sonuçların ($0.\infty$, $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$) belirsizlik olduğunu, belirsizlik olmasına rağmen fonksiyonun limitinin olabileceğini, bu limite ulaşmak için buldukları belirsizliği kaldırmaları gerektiğini anlamıştır. Ayrıca bazı MYO öğrencileri yazılım üzerinde yaptığı cebirsel çözümlerde belirsizlik durumlarında “false” sonucu ile karşılaşmalarına rağmen fonksiyonun limitinin olduğunu görünce grafik çizimi yapıp üzerinde “trade pilots” ile hareket ederek fonksiyonun belirsiz olduğu yerleri yakınlaştırıp “trade pilots ve cross” yardımı ile fonksiyonun yakınsayacağı değerleri tasavvur ederek gerekçelendirebilmiştir. Bu öğrenci cevapları ÇY+ seviyesine yerleştirilmiştir. Bu durum yazılımın kullanımına alışıp grafik üzerinde belirsizlik durumlarını inceleyen öğrencilerin başlangıçta soru ile ilgili olmayan tutarsız TY seviyesindeki cevaplarının tutarlı bir yapı içinde bütünleşmese de geliştiğini ortaya koymuştur. Bunun sonucunda BCS yazılımı ile desteklenen öğrenme ortamında görsel öğelerin kullanımı, belirsizlik durumlarını teorik olarak açıklama için yeterli olmasa da MYO öğrencilerinin soyut düşünme ve sorgulama becerilerinin gelişiminde geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir. Öğrenci cevapları SOLO ile değerlendirildiğinde sadece bu grup sorularında 2 öğrencinin verdiği cevaplar YÖ seviyesinde yer almış olup en çok zorlanılan soru grubu bu grup olmuştur. Buna rağmen ders süreci başlangıcında soru ile ilgili olmayan TY seviyesindeki tutarsız cevap sayısı yazılım kullanımı arttıkça azalmıştır.

MYO öğrencilerinin çoğu BCS yazılımı ile verilen fonksiyonu tanımlama, fonksiyonun belirsizlik durumunda cebirsel çözüm ile “false” sonucuna ulaşma ve limit bulma ile ilgili cebirsel işlemleri rahatlıkla yapmıştır. BCS yazılımı olmadan verilen fonksiyonun belirsizlik durumunda fonksiyonun yanlış olduğunu, limitin olamayacağını belirten bazı MYO öğrencileri, yazılım üzerinde cebirsel çözüm yapıp limiti bulduklarında “demek ki fonksiyon false olsa bile limiti olabiliyormuş şimdi burada (grafik üzerinde boşluklar) belirsizlikler mi var” şeklindeki sorgulayan ifadeleri BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamının MYO öğrencilerinin ezbere bilgilerini sorgulamaları yanı sıra kavramları ilişkilendirme konusunda etkili olduğunu göstermektedir.

6. 1. 3. BCS Yazılımının Kullanıldığı Ortamda MYO Öğrencilerinin Fonksiyonun Grafiğini İnceleyip Sürekli Olduğu Aralıkları Bulabilmeleri ile İlgili Öğrenme Çıktıları ÇY ve İY Seviyelerine Ulaşmıştır

Fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar ÇY ve İY seviyesine doğru bir gelişim göstermiştir. Bu grupta yer alan sorulara verilen cevapların ortalama seviyeleri ele alındığında toplam 12 cevap tek yönlü yapı, 115 cevap çok yönlü yapı, 42 cevap ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesindedir. Çok yönlü yapı seviyesinde yer alan cevaplar zayıf ve güçlü çok yönlü yapı (ÇY-, ÇY, ÇY+) seviyesi aralığına dağılmıştır. İlişkilendirilmiş yapı seviyesindeki cevaplarda ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesinde cevaplar varken, güçlü ilişkilendirilmiş yapı (İY+) seviyesinde cevaplara rastlanmamıştır. Çalışma yapraklarında verilen fonksiyonlar için yazılım üzerinde grafik çizimi yapma ve limit-süreklilik sorularını grafik üzerinde ele alıp inceleme ile ilgili öğrenmenin SOLO taksonomisinde ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olduğu düşünüldüğünde MYO öğrencileri bu yeterliğe yaklaşmıştır. Çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrenci cevaplarının en fazla gelişim gösterdiği sorular bu gruptadır.

Yazılım üzerinde grafik çizimiyle ilgili problem yaşamayan MYO öğrencilerinden bazıları limit sorulmayan bazı sorularda limit bulup, buldukları limit değerinin grafiğini fonksiyonun grafiği üzerine ilave etmiştir. Bu öğrencilerin çözüme ilişkin yürüttükleri stratejiler önceki soru gruplarında fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra aynı grafik üzerinde limit grafiğini göstermeleriyle ilişkili olup, öğrencilerin kural temelli ve ezbere öğrenmeye eğilimli olduğunu göstermektedir. Buna rağmen bazı öğrencilerin ise fonksiyonun grafiğine buldukları limit değerinin grafiğini ilave ederek limit aranan değerin bu grafik ile kesişip kesişmediğini inceledikleri görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin yazılım içerisinde gerçekleştirdikleri eylemlerin onlara dinamik problem çözme stratejileri kazandırdığını göstermektedir.

Ders sürecinin başlangıcında grafik üzerinde limite nasıl ulaşacakları, sürekli aralıkları nasıl bulacakları hakkında fikir yürütmekte güçlük çeken öğrencilerin, grafiğin üzerinde hareket edip anlık değişimi gördükçe değişik fikirler ürettiği görülmüştür. MYO öğrencilerinden bazılarının yazılım üzerinde çizdikleri grafikleri günlük yaşamda karşılaştıkları “kaydırak, kalp atışı, peri bacası, sonsuza giden kollar” gibi somut şekillerle ilişkilendirdiği; grafik üzerinde hareket edip süreksiz olduğu noktalarına ulaşarak yakınsamayı anlamlandırdığı; grafiği küçültüp-büyüterek sonsuza doğru uzanan kolları inceleyerek ise sonsuzluğu anlamlandırdığı görülmüştür. Bu durum diğer gruplarda yer alan sorularda limit-süreklilik ile ilgili cebirsel ağırlıklı çözümlerle ilgilenirken soru ile ilgili olmayan tutarsız cevaplar veren MYO öğrencilerinin, grafik üzerinde yaptıkları çalışmalarda daha başarılı olduklarını ortaya koymuştur. Bunun sonucunda BCS yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamı özellikle grafik üzerinde (görsel temsiller, dinamik işlemler, trade pilots, cross kullanımı) limit-süreklilik inceleme ile ilgili yapılan çalışmalarda MYO öğrencilerinin öğrenmelerinde geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir. Öğrenci cevapları SOLO ile değerlendirildiğinde ders sürecinin başlangıcında soru ile ilgili olmayan TY seviyesindeki tutarsız cevaplara grafik üzerindeki çalışmalar ilerledikçe rastlanmamıştır. Ayrıca verilen cevapların ÇY seviyesinde başlayıp, kavramsal anlamaya yakın birbiriyle tutarlı İY seviyesinde ifadelere dönüştüğü görülmüştür. Buna rağmen süreklilik incelerken “grafik üzerinde el kaldırmadan çizilen yerler süreklidir” ifadeleri beklenen öğrenme için sınırlı kalmıştır. Bunun sonucunda İY seviyesinde verilen cevapların bazıları zayıf seviyede kalmıştır.

MYO öğrencileri BCS yazılımı ile verilen fonksiyonları tanımlayıp grafiğini çizme ile ilgili işlemleri rahatlıkla yapmıştır. Buna rağmen öğrencilerin çoğu çalışma yapraklarında yer alan önceki sorular doğrultusunda cebirsel işlemlerden elde ettikleri limit-süreklilik çözümlerini grafik üzerinde tekrarlama ve yorumlamada yeterince başarılı olamamıştır. Fonksiyonun sürekli olduğu aralıklar hakkında yeterli cevaplar veremeseler de "şuralarda (grafiğin kopuk olmadığı yerler) süreklidir" şeklinde ifadeler kullanmışlardır. Fonksiyonun grafiği olmadan sürekli olduğu aralıklar ile ilgili teorik ve cebirsel işlem yapamayan MYO öğrencileri grafik üzerinde trade pilots yardımıyla hareket ederek grafiksel verilerin değişimini cross yardımı ile incelemiş olup grafik üzerinde boşluğun olduğu yerlerde grafiğin kopuk olduğunu sürekli olmadığını yorumlayabilmiştir. Ayrıca MYO öğrencileri grafiksel verilerin yeterli veri sunduğu durumlarda sürekliliği incelemek ve limit bulmak için fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç hissetmemişlerdir. Bunun sonucunda verilen cevaplar incelendiğinde grafik üzerinde hareket ederek süreksiz olan noktalara ulaşabilen MYO öğrencilerinin fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulabilmesi için gerekli yardım araçları Derive yazılımda yeterince yer almaktadır. Bu durum BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamının MYO öğrencilerinin ezbere bilgilerini sorgulamalarının yanı sıra soyut düşünmelerinde etkili olduğunu göstermektedir. Ayrıca öğrencilerde fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları grafik üzerinde göstermeyle ilgili öğrenmenin tek yönlü ve çok yönlü yapıdan ilişkilendirilmiş yapıya geliştiği açıktır. Bu gelişim MYO öğrencilerinin görsel temsilleri tercih etmesinin ve teknolojinin süreçteki desteğinin önemli bir göstergesi olarak ortaya çıkmış olup bu grup sorularında elde edilen bir başka sonuçtur.

6. 1. 4. BCS Yazılımının Kullanıldığı Ortamda MYO Öğrencilerinin Fonksiyonun Tanımsız Olduğu Noktalarda Süreklilik Aranamayacağını Düşünebilmeleri ile İlgili Öğrenme Çıktıları TY ve ÇY Seviyelerinde Kalmıştır

Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranmayacağını düşünebilme ile ilgili MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar TY ve ÇY seviyelerinde kalmıştır. Bu grupta yer alan sorulara verilen cevapların ortalama seviyeleri ele alındığında toplam 45 cevap tek yönlü yapı, 41 cevap çok yönlü yapı, 10 cevap ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesindedir. Çok yönlü yapı seviyesinde yer alan cevaplarda güçlü çok yönlü yapı (ÇY+) seviyesinde cevaplar varken, zayıf çok yönlü yapı (ÇY-) seviyesinde cevaplara rastlanmadığı gibi, ilişkilendirilmiş yapı seviyesindeki cevaplarda ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesinde cevaplar varken, güçlü ilişkilendirilmiş yapı (İY+) seviyesinde cevaplara rastlanmamıştır. MYO öğrencilerinin ağırlıklı olarak tek yönlü yapı ve çok yönlü yapı seviyesinde cevap vermesi, fonksiyonun tanımsız olduğu yerleri inceleyip buralarda süreklilik aranamayacağını belirtmeleri ve yorumlamaları açısından sahip oldukları anlamları tutarlı bir yapı içinde bütünleştirmede başarılı olamadıkları sonucuna götürmektedir. Çalışma yapraklarında verilen fonksiyonlar için tanımsız olduğu noktalarda sürekliliğin aranamayacağını yorumlayabilme ile ilgili öğrenmenin SOLO taksonomisinde ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olduğu düşünüldüğünde MYO öğrencilerinin bu yeterlikte olmadığı açıkça görülmektedir. Çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrencilerinin belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili ikinci soru grubu sorularından sonra en çok bu gruba ait sorularda zorlandığı ortaya çıkmıştır.

Sürekliliğinin incelenmesi istenen fonksiyonu yazılım üzerinde tanımlamada problem yaşamayan MYO öğrencileri genel olarak tanımladıkları fonksiyonun grafik çizimini yapmıştır. Bu durum MYO öğrencilerinin, süreklilik kavramının günlük hayattaki kullanımından hareketle, sürekli bir fonksiyonun grafiğinde kırıklık ya da kopukluk olmaması gerektiği şeklinde bir düşünce geliştirdiklerini göstermektedir. Ayrıca sürekliliği incelenmesi istenen noktalarda tanımsız olan fonksiyonların tanımlı olup olmadığını kontrol etmeyen MYO öğrencileri "grafikte boşluk varsa tanımlı değil, limit yok, sürekli değil", "limitin olduğu yerde süreklilik vardır" şeklinde cevaplar vermiştir. Bunun sonucunda süreklilik kelimesini aralıksız ya da boşluksuz olma şeklinde anlayan ve kavram imajını bu anlayışa göre oluşturmuş olan MYO öğrencilerinin söz konusu kavramı matematiksel kavram olarak yapılandıramadığı, süreklilik kavramını formal tanımından ziyade informal tanımlamanın üzerine inşa ettiği görülmüştür. Ayrıca MYO öğrencilerinde "fonksiyonun limiti varsa fonksiyon o noktada tanımlı ve süreklidir" yanılgısı tespit edilmiştir.

Ders sürecinin başlangıcında fonksiyonun tanımsız olduğu yerlerde sürekliliği incelemekten ziyade cebirsel çözümde buldukları false sonucuna odaklanarak fonksiyonun yanlış olduğunu, limitin olamayacağını buna bağlı olarak sürekliliğin olamayacağını belirten birçok MYO öğrencisinin ifadeleri TY seviyesinde yer alırken, bazı öğrencilerin BCS yazılımı kullanımı ile grafik çizimi yaptıktan sonra "grafikte boşluk varsa buralar tanımlı değildir, süreklilik yoktur" şeklindeki ifadeleri ÇY seviyesindeki ifadelere dönüşmüştür. Ayrıca tek noktada tanımsız olan fonksiyon grafiğini incelerken "kalkan süreksizlik", bir noktaya küçük veya büyük değerlerden yaklaşıldığında limiti $\pm\infty$ olan fonksiyonun grafiğini incelerken "kollar yukarı doğru birleşmiyor boşluk sonsuza kadar, fonksiyon sonsuz süreksizdir" şeklindeki bazı öğrenci cevapları teorik olmasa da bu öğrencilerin grafik üzerinde süreksizlik çeşitlerini tasavvur ettiğini göstermektedir. Bu cevaplar kavramsal anlama boyutuna ulaşmış olmasa da zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilmiştir. Bu durum yazılımın kullanımına alışıp fonksiyonun tanımsız olduğu noktaları grafik üzerinde inceleyen ve süreksizlik çeşitlerine ulaşan öğrencilerin başlangıçta soru ile ilgili olmayan tutarsız cevaplarının tutarlı bir yapı içinde bütünleşmese de geliştiğini ortaya koymuştur. Bunun sonucunda BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamında verilen cevapların gelişiminde görsel temsiller etkili olurken geleneksel yöntemlerin etkisinin daha kısıtlı olduğu görülmüştür. Ayrıca BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamı formel tanım için olmasa da fonksiyonun süreksizlik çeşitlerini inceleme sürecinde MYO öğrencilerinin çözüme ilişkin yürüttükleri stratejilerde ezbere dayalı bilgilerini sorguladıkları ve soyut düşünme becerilerini geliştirdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum öğrencilerin yazılım içerisinde gerçekleştirdikleri eylemlerin onlara dinamik problem çözme stratejileri kazandırdığını ve görsel temsillerin geleneksel öğrenme ortamına nispeten fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda sürekliliğin aranamayacağı ile ilgili öğrenmelerinde daha etkili olduğunu ortaya çıkarmaktadır.

6. 1. 5. BCS Yazılımının Kullanıldığı Ortamda MYO Öğrencilerinin Limit ile Süreklilik Arasında İlişki Kurabilmeleri ile İlgili Öğrenme Çıktıları ÇY Seviyesinde Olduğu Değerlendirilmektedir

Limit ile süreklilik arasında ilişki kurabilme ile ilgili MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar ÇY seviyesinde kalmıştır. Bu grupta yer alan sorulara verilen cevapların ortalama seviyeleri ele alındığında toplam 3 cevap tek yönlü yapı, 69 cevap çok yönlü yapı, 24 cevap ilişkilendirilmiş yapı düşünme seviyesindedir. Çok yönlü yapı seviyesinde yer alan cevaplar zayıf ve güçlü çok yönlü yapı (ÇY-, ÇY, ÇY+) seviyesi aralığına dağılmıştır. İlişkilendirilmiş yapı seviyesindeki cevaplarda ise zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesinde cevaplar varken, ilişkilendirilmiş ve güçlü ilişkilendirilmiş yapı (İY, İY+) seviyesinde cevaplara rastlanmamıştır. MYO öğrencilerinin ağırlıklı olarak çok yönlü yapı seviyesinde cevap vermesi, limit ile süreklik arasında ilişki kurabilmeleri ve ilgili kavramlar arası ilişkiyi yorumlamaları açısından sahip oldukları anlamları tutarlı bir yapı içinde bütünleştirmede yeterince başarılı olamadıkları sonucuna götürmektedir. Çalışma yapraklarında verilen fonksiyonların limit ve sürekliliğini inceleyip arasındaki ilişkiyi yorumlama ile ilgili öğrenmenin SOLO taksonomisinde ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olduğu düşünüldüğünde, MYO öğrencilerinin tam olarak bu yeterlikte olmadığı görülmektedir. Çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrenci cevaplarının bu grupta yer alan sorularda ÇY seviyesinde gelişim gösterdiği ortaya çıkmıştır.

Limit-süreklilik arası ilişki kurulabilmesi açısından bu grup soruları bazen kapalı bir aralıkta, bazen belirsizliğin olduğu bir noktada, bazen de sonsuz süreksizliğin olduğu boşluklarda önce limitin daha sonra da sürekliliğin incelenmesi istenecek şekilde hazırlandı. Ayrıca limit-süreklilik arası ilişkiyi grafik üzerinde yorumlayabilmek için verilen fonksiyon grafiklerinin incelenebilir olmasına dikkat edildi. Böylece grafikte kopuk noktaların yer alması ve bu kopuk noktalarda limitin olması MYO öğrencilerinde sürekli olmayan fonksiyonların limiti olabileceği farkındalığını sağladı. Önceki çalışma yapraklarında özellikle belirsizlik durumlarında limit ile ilgili uygulamalar yapan öğrencilerin 7., 8. ve 10. çalışma yapraklarında limit durumunu süreklilikle ilişkilendirerek incelemeleri istendi. MYO öğrencilerinin bu gruba ait sorulara cevap verirken önceki çalışmaların etkisinde kaldığı, çalışma yapraklarında yer alan fonksiyonların limitini aradığı, verilen noktaları fonksiyonda yerine yazarak elde ettikleri belirsizliklerde ne yapacaklarını sorguladıkları, limit-sürekliliğin sezgisel tanımını yapmaya çalıştığı ve limit-süreklilik arası ilişki kurabilmek için yine grafik çizimi yapmış olukları görüldü. Bu durumun sebebi alt yapı itibariyle görsel öğelerin kullanılmadığı geleneksel içerik ve yaklaşımların yer aldığı öğrenme ortamlarının MYO öğrencilerini kural temelli düşünmeye ve birbirinden kopuk bilgi parçalarını ezberlemeye sevk etmesidir. Ayrıca MYO öğrencilerinde "sonsuzu bir sayı olarak ve limit değeri olarak algılama", "belirsizliklerin veya tanımsızlıkların olduğu yerlerde limitin olamayacağı inancı", "tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını birbirinden ayırt edememe", "bir noktada birden çok limit değerinin olabileceği düşüncesi", "grafik dışında sürekliliği inceleyememe" ve "süreklilik için fonksiyonun tanımlı ve limit değerinin fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olması gerekliliğini dikkate almama" gibi kavram yanılgıları tespit edilmiştir. Bu durum MYO öğrencilerinin lise yıllarında aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı temel matematik eğitimi başta olmak üzere, limit-süreklilik konusu, belirsizlikler, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı gibi bilgilerde eksik olmasının sonucudur.

MYO öğrencilerinin limit ve sürekliliği ilişkilendirmeyle ilgili verdikleri cevaplar beklenen öğrenme düzeyi için yeterli olmamasına rağmen ders sürecinin başlangıcında limit-süreklilik konusu ile ilgili fikir yürütemezken yazılım ve grafik çizimi ile "limit-süreklilik birbirini tamamlar, limit olmadan süreklilik olmaz, belirsizlik veya tanımsızlık var, süreklilik için grafiği incelersek, bu fonksiyon bu noktada false oluyor demek ki limit yok, grafikte sadece burada boşluk oluyor o halde sadece burada süreklilik yok, şimdi fonksiyonun grafiğini incelersek" gibi ifadeleri BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamının öğrencilerin zihinlerinde yeni oluşumların oluşmasında etkili olduğunu göstermektedir. Ayrıca bazı MYO öğrencileri cebirsel olarak buldukları limit değerinin grafiğini verilen fonksiyonun grafiği üzerine çizerek bu iki grafiğin kesişip kesişmediğini sorgulamış ve limit ile ilişkilendirmiştir. Bu öğrenciler grafiğin dinamik özelliğinden yararlanarak grafikte kopuk olan yerlerde limit olsa bile süreklilik için limitin gerek koşul olduğunu fakat yeterli olmadığını grafiksel verilerden hareketle muhakeme edebilmiştir. Bu muhakemeyi yaparken fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda cebirsel çözümde false sonucu ile karşılaştıklarında limitin olması için verilen değere küçük ve büyük değerlerden yaklaşıldığında ulaşılan limitlerin eşit olması gerektiğini belirten öğrenciler, süreklilik için grafik çizimi yapıp fonksiyonun tanımsız olduğu aynı noktada grafik üzerinde boşluk olduğundan sürekliliğin olamayacağını yorumlayabilmişlerdir. Bu öğrenci cevapları teorik ve kavramsal anlama boyutuna ulaşmamış olsa da zayıf ilişkilendirilmiş yapı (İY-) seviyesine yerleştirilmiştir. Bununla birlikte ders süreci başlangıcında soru ile ilgili olmayan TY seviyesindeki tutarsız cevaplara yazılım kullanımı arttıkça rastlanmamıştır. Ortaya çıkan bu gelişimde yazılımın sunduğu olanaklar temel etken olurken, öğrencilerin öğrenme sürecinde görsel temsilleri tercih etme isteği bir başka etken olarak teknolojinin öğrenme sürecindeki etkisini ortaya çıkarmıştır. Bunun neticesinde BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamında verilen cevapların gelişiminde görsel temsiller etkili olurken geleneksel yöntemlerin etkisinin daha kısıtlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. BCS yazılımı kullanımı ile öğrenme ortamı formel tanım için olmasa da limit-süreklilik arası ilişki kurmada MYO öğrencilerinin çözüme ilişkin yürüttükleri stratejilerde, ezbere bilgilerini sorgulamalarında ve soyut düşünme becerilerini geliştirmelerinde etkili olmuştur. Bu durum öğrencilerin yazılım içerisinde gerçekleştirdikleri eylemlerin onlara dinamik problem çözme stratejileri kazandırdığını ve öğrencilerin limit-süreklilik arası ilişki kurabilmeleriyle ilgili öğrenmelerinde görsel temsillerin geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkili olduğunu ortaya çıkarmıştır. Böylece MYO öğrenci cevapları hedeflenen öğrenme seviyesine ulaşmamış olsa da genel bilgiyi yorumlayabilecek seviyeye gelişim göstermiştir.

6. 1. 6. BCS Yazılımının Kullanıldığı Ortamda MYO Öğrencilerinin Limit-Süreklilik Konusu ile İlgili Öğrenme Çıktıları SOLO Taksonomisine Göre İY Seviyesinin Altında Olarak Değerlendirilmektedir

Limit ve süreklilik konusunu öğrenme ile ilgili MYO öğrencilerinin verdiği cevaplar genel olarak İY seviyesinin altında kalmıştır. Limit-süreklilik konusu ile ilgili öğrenmenin SOLO taksonomisinde ilişkilendirilmiş yapı seviyesinde olması gerektiği düşünüldüğünde MYO öğrenci cevapları hedeflenen öğrenme seviyesine ulaşmış olmasa da cevapların genel bilgiyi yorumlayabilecek seviyeye gelişim gösterdiği görülmüştür. Öğrencilerin BCS destekli ortamda çalışmalar ilerledikçe limit-süreklilik konusunu öğrenmeleri doğrultusunda verdikleri cevaplarda YÖ seviyesinde cevaplara pek rastlanamamış olmasına rağmen “fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur” kazanıma ait sorularda 2 öğrenci cevabının YÖ seviyesinde kaldığı görülmüştür. Ayrıca öğrenci cevaplarının en az gelişim gösterdiği kazanımın da bu kazanım olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışma yapraklarında yer alan sorular dağılımına göre incelendiğinde MYO öğrencilerinin belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili sorulardan sonra en çok fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını yorumlamaya ait sorularda zorlandığı ortaya çıkmıştır. Bu sorulara verilen cevaplar TY ve ÇY seviyesine gelişim göstermiş olup belirsizlik durumlarında limit bulma ile ilgili sorulara verilen cevaplara nispeten daha yüksek seviyededir. MYO öğrencilerinin bu iki soru grubunda zorlanmalarının sebebi limit-süreklilik konusu, belirsizlikler, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksikliklerinin sonucudur.

Limit-süreklilik konusunu öğrenme ile ilgili MYO öğrenci cevaplarının en fazla gelişim gösterdiği soruların “fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulur” kazanımına ait soru grubunda olduğu görülmüştür. Bu soru grubuna verilen cevaplar ÇY ve İY seviyesine gelişim göstermiş olup hedeflenen öğrenmeye yaklaşılmıştır. Bu durum diğer gruplarda yer alan sorularda limit-süreklilik ile ilgili cebirsel ağırlıklı çözümlerle ilgilenirken soru ile ilgili olmayan tutarsız cevaplar veren MYO öğrencilerinin grafik üzerinde yaptıkları çalışmalarda daha başarılı olduklarını ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin grafiksel verilerden hareketle limit-süreklilik kavramlarını ilişkilendirme konusunda muhakeme yeteneğinin ve soyut düşünme becerilerinin geliştiği görülmüştür. Bunun sonucunda BCS yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamı özellikle grafik üzerinde (görsel temsiller, dinamik işlemler, trade pilots, cross kullanımı) limit-süreklilik inceleme ile ilgili yapılan çalışmalarda MYO öğrencilerinin öğrenmelerinde geleneksel öğrenme ortamına nispeten daha etkilidir.

MYO öğrencilerinin fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü belirleme ve aralarındaki ilişkiyi yorumlama ile ilgili öğrenmeleri, limit-süreklilik arasında ilişki kurma ile ilgili öğrenmelerine kıyasla daha düşük seviyededir. Buna rağmen öğrencilerin bu soru gruplarına verdikleri cevaplar ÇY seviyesinde yoğunlaşmış olup ortalama bir gelişim göstermiştir. Bu soru grupları ile ilgili hedeflenen öğrenme gerçekleşmiş olmasa da öğrenci cevaplarının genel bilgiyi yorumlayabilecek seviyeye gelmelerinde BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamının katkı sağladığı tespit edilmiştir.

BCS yazılımı ile desteklenen öğrenme ortamında yazılımın etkisini inceleme bu çalışmanın amacı olmamasına rağmen elde edilen sonuçlar limit-süreklilik konusunu öğrenme ile ilgili MYO öğrenci seviyelerinin gelişimde Derive yazılımı kullanımının olumlu etkilerini ortaya çıkarmıştır. Özellikle cebirsel hesaplamalardaki ve grafik kullanımındaki görsel temsiller YÖ ve TY seviyesindeki soru ile ilişkili olmayan tutarsız öğrenci cevaplarının çalışmalar ilerledikçe azalmasında etkili olmuştur. Böylece öğrenciler ezbere bilgilerini sorgulayıp, limit-süreklilik kavramlarını ilişkilendirme konusunda cevaplarını ÇY ve İY seviyesine doğru geliştirmiştir. Özellikle BCS yazılımı öğretime yardımcı bir araç olarak öğrenme-öğretme sürecinde yer almış olup MYO öğrencilerinin bilişsel ve bireysel farklılıklarının dikkate alınmasında etkili olmuştur. Bu durum MYO öğrencilerinin öğrenme sürecinde analitik ve görsel muhakemeleri ilişkilendirmesine yardımcı olup limit-süreklilik konusunun öğretiminde yaşadıkları zorlukları azaltmıştır.

Bu çalışmanın amacı olmasa da; BCS yazılımı ile desteklenen öğrenme ortamı, çarpım tablosunu dahi bilmeyen MYO öğrencilerinin derse katılımında etkili olup limit-süreklilik gibi üst düzey düşünme becerisi gerektiren konuları öğrenmeye çalışmaları önemli bir gözlem olarak ortaya çıkmıştır.

6. 1. 7. BCS Yazılımı Kullanımı, MYO Öğrencilerinin YÖ ve TY Seviyesindeki Öğrenme Çıktılarının Niteliğinin ve Yapısının SY Seviyesi Hariç ÇY ve İY Seviyelerine Doğru Gelişim Gösterebileceği Değerlendirilmektedir

MYO öğrencilerinin niteliği dikkate alındığında matematiğin temel bilgilerinden yoksun oldukları, bu bilgileri ortaöğretimde öğrenemedikleri ve MYO’lara başladıklarında çok zorlandıkları görülmüştür. Temel matematik bilgilerinden yoksun bu öğrencilerin öğrenme niteliğini yükseltebilmek için öğretim sürecinde işe koşulacak teknolojilerin önemi ve bu teknolojilerin kullanıldığı ortamda öğrencilerin nasıl öğrendiğini, nasıl düşündüğünü anlamak önemlidir. Bu bağlamda hazırlanan öğrenme ortamında elde edilen öğrenci çıktılarının niteliğini ve yapısını incelemek önemli görülmüştür. Dolayısıyla bu çalışmada öğrencilerin nasıl öğrendiğini anlamak amacıyla BCS yazılımının kullanıldığı ortamda özel olarak en çok zorlandıkları limit-süreklilik konusu SOLO taksonomisi çerçevesinde ulaştıkları seviyeler dikkate alınarak incelendi. Farklı temsiller ışığında öğrenme tecrübesini hiç yaşamamış MYO öğrencilerinin YÖ ve TY seviyesindeki matematiksel anlama, soyut düşünme seviyelerinin doğrudan etkilenmesinin zor olduğuna ancak BCS yazılımı kullanımı ile farklı temsilleri kullanabilme alışkanlığı kazanmaya başladıkları ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı öğretmenin önceki deneyimlerinden ve gözlemlerinden, MYO öğrencilerinin geleneksel ortamda ders işlenirken limit-süreklilik konusu ile ilgili çalışılan sorunun cevabı ile ilişkili olmayan niteliksiz YÖ ve sorunun tek bir yönüne odaklanan diğer yönlerle ilişkisini düşünmeyen TY seviyesinde cevaplar verdiği elde edilmiştir. Bu öğrencilerin sadece limit-süreklilik değil temel matematik konuları ile ilgili öğrenme çıktıları tamamen YÖ ve TY seviyesinde olup gelişime oldukça dirençli olduğu görülmüştür. Oysa öğrencilerin en çok zorlandığı limit-süreklilik konusu BCS yazılımı kullanımını destekleyen esnek yönergelere sahip çalışma yapraklarıyla ele alındığında MYO öğrencilerinin öğretim sürecine aktif katıldıkları, çalışma yapraklarında yer alan soruları birbirleriyle etkileşimli olarak yaptıkları, farklı temsilleri kullanabilme alışkanlığı kazanmaya başladıkları ve zihinlerinde yeni fikirler üretmeye başladıkları görülmüştür. Dolayısıyla çalışma öncesi geleneksel öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin soru ile ilgili olmayan tutarsız YÖ ve TY seviyesinde verdikleri cevapların BCS yazılımı ile desteklenen öğrenme ortamında konu ile ilgili ancak birbirinden kopuk bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesindeki cevaplara veya tüm yönleri birbiriyle ilişkilendirebilecek kavramsal anlamaya yakın İY seviyesindeki cevaplara ulaşabildikleri görülmüştür. Derive yazılımı matematiksel ifadelerin kullanımına olanak sağlayan cebirsel işlemler ve görsel temsillerin kullanımını destekleyen menüsü ile yapılan işlemleri hem grafiksel hem de sayısal olarak yorumlamaya elverişli olup öğrencilerin ezber bilgilerini sorgulamasında ve öğrenme çıktılarının İY seviyesine gelişiminde etkili olmuştur. Öğrenci cevaplarının var oldukları düzeyden belirlenen üst düzeylere geçmesini, kavramlara yükledikleri anlamların işlemsel boyuttan uzaklaşarak daha temsil edici ve daha yorumlayıcı olmasını sağlamıştır. Ayrıca BCS yazılımı öğretime yardımcı bir araç olarak öğrenme-öğretme sürecinde yer alıp MYO öğrencilerinin öğrenme seviyelerinin derinlemesine incelenmesinde de etkili olmuştur. Öğrencilerin öğrenme çıktılarından elde edilen seviyeler dikkate alındığında YÖ ve TY seviyesindeki MYO öğrenci cevaplarının aslında gelişime açık olduğunun görülmesi, limit-süreklilik gibi üst düzey düşünme ve soyutlamayı gerektiren konularda SOLO ile ilgili SY seviyesi hariç diğer seviyelere doğru gelişim gösterebilmesi matematik öğretiminde görselleştirmenin önemini ortaya çıkaran bir sonuçtur.

6. 2. Öneriler

MYO öğrencilerinin bir BCS yazılımının kullanıldığı ortamda limit-süreklilik konusunda nasıl öğrendiklerini anlamayı amaçlayan bu çalışmada gözlenen öğrenme çıktıları SOLO taksonomisi ile değerlendirip yorumlandığında çoğu öğrenci seviyesinin limit-süreklilik konusuna ilişkin öğrenme ile ilgili cevaplarının ilişkilendirilmiş yapı İY seviyesi altında yer aldığı belirlenmiştir. BCS yazılımı kullanılan öğrenme ortamı MYO öğrenci cevaplarını hedeflenen öğrenme seviyesine ulaştırmamış olsa da cevapların genel bilgiyi yorumlayabilecek seviyeye gelişim göstermesine katkı sağladığı tespit edilmiştir. Bu kısımda varılan sonuçlar ışığında öneriler sunulmuştur.

6. 2. 1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

Matematik dersinin mantık ve düşünmeye yön veren özelliklerin gelişmesinde etkili olması, bireyler tarafından kazanılması gereken mesleki gelişim açısından önemli görülmektedir. Mesleki gelişim yeterliğine sahip olan birey, nitelikli iş gücü sayesinde iyi bir performans sergilemenin yanı sıra düşünen, öğrenen ve üretendir. Nitelikli iş gücüne sahip olmanın yolunda ise iyi planlanmış mesleki eğitim yatmaktadır. Bu anlamda lisans ve ön lisans düzeyinde eğitim veren kurumlar ile ortaöğretim kurumları arasındaki boşluğu doldurma işlevini yerine getiren üniversitelerimizin Meslek Yüksekokullarına önemli rol düşmektedir. Nitelikli eleman yetiştirmede soyut düşünme becerilerinin gelişimi için genel matematik konuları öğretimi ve öğreniminin önemine önceki bölümlerde değinilmiştir. Bu bağlamda düşünmeyi geliştirdiği bilinen matematik öğretimi ve öğrenimi önem kazanmaktadır. Dolayısıyla ülkemizde ortaöğretim eğitimini tamamlayıp üniversite giriş sınavında başarı gösteren öğrencilerin %40'lık diliminin ön lisans programlarına devam ettiği düşünüldüğünde meslek yüksekokullarımızda okutulmakta olan genel matematik dersinin içeriğinde yer alan kavramların öğretiminin ele alınması kaçınılmazdır. Bu doğrultuda genel matematiğin soyut bir yapıya sahip olan analiz dersi içerisinde ele alınan kavramların somutlaştırılması ve hazırlanan öğrenme-öğretme etkinliklerinin ortaya konuş biçiminin önemi ortaya çıkmaktadır. Hâlbuki bu önem dikkate alınmadan ortaöğretim kurumlarında yer alan ve geleneksel olarak yürütülen analiz öğretiminde kavramlar ağırlıklı olarak cebirsel formda sunulmakta, uygulamalarda cebirsel işlem gerektiren problemlere ağırlık verilmekte ve kavramsal anlama boyutu ihmal edilmektedir. Nihayetinde bu durum meslek yüksekokuluna yerleşecek olan soyutlama yeteneği sınırlı öğrencilerin matematik derslerinde ele alınan analiz kavramlarına ilişkin anlamlı öğrenme gerçekleştirmeden cebirsel işlemleri ve sembolleri ezberlemelerine sebep olmaktadır. Literatürde hemfikir olunan görüş, analiz dersi çerçevesinde ele alınan kavramların öğrenme ve öğretilmesinde somutlaştırmanın ve görsel düşünmenin önemli olduğu, görselleştirme ve somutlaştırma yapılmayan bir öğretimin kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirme açısından başarılı olamayacağıdır. Bu görüşten hareketle bu çalışmada Meslek Yüksekokullarında okutulan ve kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiği gözlemlenen analiz dersinin temel konuları niteliğinde olan limit, türev ve integral konularının kavramsal temelini oluşturan limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin tasarlanan BCS destekli öğrenme ortamında öğrencilerin öğrenme çıktıları yardımıyla nasıl öğrendiklerine odaklanılarak soyut düşünme becerileri geliştirilmeye çalışılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar, ders süreci başlangıcında (BCS yazılımına alışmadan önce) öğrencilerin limit-süreklilik konusuna ilişkin SOLO taksonomisine göre sorulan soruların tek yönüne odaklı TY seviyesindeki yetersiz öğrenme çıktılarının BCS yazılımının etkin kullanımı ile ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamaya yakın İY- seviyesine geliştiğini, öğrencilerin soyut düşünme becerilerini geliştirerek daha iyi anlamalar gerçekleştirdiklerini göstermiştir. Bu sebepten kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiği düşünülen matematiğin soyut kavramlarını somutlaştırarak daha iyi anlamalar gerçekleştirme adına öğretim süreçlerinde BCS kullanımı önerilmektedir.

Genel olarak analiz öğretiminde kullanılan ve bir BCS olan DERİVE yazılımı MYO öğrencilerine limit-süreklilik konusu öğretiminde çalışma yapraklarında yer alan fonksiyonlar için cebirsel (sayısal-sembolik) hesaplar yapabilme, fonksiyonların iki-üç boyutlu grafiklerini oluşturma ve grafik üzerinde hareket edebilme gibi olanaklar sunmuştur. Bu olanaklar öğrencilerin limit-süreklilik konusunu teorik ve kavramsal öğrenmelerinde yeterli olmasa da konuyu sezgisel olarak anlamalarına ve yorumlamalarına yardımcı olmuştur. Oysa DERIVE, içerisine sembolik olarak girilen matematiksel ifadelerin karşılık geldiği gösterimleri ekrana yansıtabilen özelliğe sahip olmasına rağmen grafik sayfasının ayrı olması ve cebirsel ifadede değişiklik yapıldığında eş zamanlı olarak grafiksel gösterime bu değişikliğin yansımaması gibi sınırlıkları olan bir yazılımdır. Bu sınırlılıklar dezavantaj gibi görünse de bu ekran, çalışma sürecinde öğrencilerle yapılan diyaloglarda MYO öğrencilerinin fikirlerini yansıtıp yorumlayabilecekleri zamanı sunmuş olup, bu durumun avantaja dönüşmesine katkı sağlamıştır. Dolayısıyla limit-süreklilik konusu öğretimi sürecinde bir BCS olan DERİVE yazılımından faydalanılması önerilmektedir. Ayrıca cebirsel işlemler ve grafik üzerinde anlık değişimden faydalanmayı sağlayan DMY kullanımı da önerilebileceği gibi, cebirsel işlemler ile grafiğin aynı ekranda olduğu bir BCS olan LiveMath yazılımı kullanımı da önerilebilir.

Literatürde fonksiyon, sonsuz, limit-süreklilik gibi kavramların formel tanımlarının soyut düşünmeye geçişte, formel ve kesin matematiksel ifadelere yönelik anlam çıkarmada, tanımsızlık ve belirsizlik durumlarını anlamlandırıp limit hesaplamada ve formel ispat tekniklerini kullanmada başlangıç noktası olduğu bilinmektedir. Bu durum göz önüne alındığında ilgili kavramların formel tanımlarının anlaşılması bir önceki cümlede belirtilen yeterlilikleri kazanmada olumlu katkı sağlayacaktır. Araştırmanın sonuçları ders sürecinde MYO öğrencileri ile geçen diyaloglarda öğrencilerin anlamada en çok zorlandıkları kazanımların belirsizlik durumlarında limit hesaplama, tanımsızlık durumlarında süreklilik inceleme ve formel tanımdan yola çıkarak limit-süreklilik arası ilişki kurabilme olduğunu göstermiştir. Bu kazanımlarla ilgili elde edilen öğrenme çıktıları ders başlangıcında sorulan sorunun tek yönüne odaklı TY hatta soru ile ilişkisi olmayan cevapları içeren YÖ seviyesinde yer almıştır. Ders süreci ilerledikçe ve BCS yazılımı etkin kullanıldıkça elde edilen öğrenme çıktılarında soeunun tek yönüne odaklı TY ve ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesine doğru gelişim gösterdiği ortaya çıkmıştır. Araştırmada ortaya çıkan bu durumun iki etkenden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bunlardan ilki mezun olunan ortaöğretim türü ve MYO öğrencilerinin ortaöğretim eğitimleri boyunca geleneksel öğretim yöntemleri ile aldıkları yetersiz ve ezbere dayalı matematik bilgisine bağlı olarak limit-süreklilik konusu, belirsizlikler, bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı, reel sayı kavramı eksiklikleridir. Diğer etken olarak, limit-süreklilik öğretimi için hazırlanan BCS destekli öğrenme ortamında çalışma yapraklarının uygulanması öncesi teorik olarak işlenen ilk dersin bu eksikleri giderme için yeterli olmayışı olarak düşünülmektedir. Bu durum ilgili konulara ilişkin MYO öğrencilerinin ön bilgilerinin çok yetersiz oluşunu araştırmacı öğretmenin ön görmemiş olmasıdır. Bu doğrultuda iki ayrı öneri sunulabilir. Bunlardan ilki mezun olunan ortaöğretim öğretim programlarında limit-süreklilik kavramlarının öğretimine ve öğretim yöntemlerine ilişkin konuların formel tanımları ve kavramsal anlama boyutu ihmal edilmeden, teknolojinin ve görsel öğelerin kullanımını hedef alan yeniliklerin yapılmasıdır. Oysa son zamanlarda ortaöğretim programında yapılan değişikliklerde bazı belirsizlik durumlarının ve limit-süreklilik konusuna ilişkin bazı konuların çıkarıldığı görülmektedir. Bu durumda çıkarılan bu konularla ilgili öğrencilerde beklenen ön öğrenmelerin olmayacağı açıktır. Dolayısıyla bu duruma bağlı ikinci olarak yükseköğretim sistemleri arasında uluslararası ilişkilendirmeyi sağlamak, yükseköğretim sistemlerinin birbirini tanımasını kolaylaştırmak, öğrenenlerin ve mezunların hareketliliğini arttırmak amacıyla Bologna sürecinde ele alınan ders içerikleri ve işleyişleri yeniden ele alınıp öğrencilerin ilgili konulara ilişkin formel tanımları ve kavramsal anlamalarını destekleyecek şekilde düzenlenmesi önerilebilir.

Araştırmada fonksiyonun grafiğini inceleyip sürekli olduğu aralıkları bulma kazanımı özellikle limit-süreklilik konusu ile ilgili ele alınan diğer kazanımlara ilişkin çalışmaların grafik üzerinde tekrarlanmasını sağlamada ve cebirsel işlemlerden sonra grafik üzerinde limit-süreklilik arasındaki ilişkileri oluşturmada ve yorumlamada MYO öğrencilerine olumlu katkı sağlamıştır. Araştırmanın sonuçları MYO öğrenci cevaplarının en çok gelişim gösterdiği soruların bu kazanıma ilişkin olduğunu göstermiştir. Bu kazanımla ilgili öğrenme çıktıları ders başlangıcında sorunun tek yönüne odaklı TY ve ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY seviyesinde iken BCS yazılımı etkin kullanılıp ders süreci ilerledikçe, öğrenme çıktılarının ezbere bilgi parçalarını içeren ÇY ve kavramsal anlamayı içeren İY seviyesine gelişim gösterdiği ve öğrencilerin grafikleri “kaydırak, kalp atışı, peri bacası, sonsuza giden kollar” gibi somut şekillerle ilişkilendirdiği ortaya çıkmıştır. Bu sonucun ortaya çıkmasındaki en büyük etken BCS ile tasarlanmış bir öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin fonksiyon grafiklerini yazılım içerisinde kolayca oluşturabilmeleri ve bu grafikler üzerinde istedikleri noktanın aldığı değerleri ve değişimi dinamik bir şekilde izleyebilmeleridir. Oysa süreklilik incelerken “grafik üzerinde el kaldırmadan çizilen yerler süreklidir” ifadeleri beklenen öğrenme için sınırlı kalmıştır. Bu durum önceki öneride önemine değinildiği gibi MYO öğrencilerinin limit-süreklilik ilişkisini formel tanımlama çerçevesinde yorumlayamamış ve kavramsal anlamayı oluşturamamış olmasının sonucudur. Buna rağmen ilgili kazanıma ilişkin soyut düşünme becerisi oluşmaya başlayan öğrenci cevaplarının matematiksel gerçekleri anlama ve yorumlama sürecinde görsel muhakemeyi daha fazla tercih ettikleri ve beklenen öğrenmeye doğru gelişim gösterdikleri görülmüştür. Bu gelişim MYO öğrencilerinin görsel temsilleri tercih etmesinin ve teknolojinin süreçteki desteğinin önemli bir göstergesidir. Bu noktada teknoloji destekli öğretim yaklaşımları, öğrencilerin bilişsel ve bireysel farklılıkları için daha fazla alternatif sunmakta olup; teknolojinin amaç değil öğretime yardımcı bir araç olarak öğrenme-öğretme sürecinde yer alması faydalı olacaktır. Bundan hareketle MYO öğrencilerinin soyut düşünme becerilerini geliştirme ve öğrencilere kavramların, cebirsel işlemlerin altında yatan anlamı kazandırma amacıyla görsel temsillerle yürütülen limit-süreklilik konusu gibi genel matematiğin tüm konularının öğretim sürecinde de BCS'den faydalanılması önerilmektedir.

Matematik öğrenim hayatları boyunca MYO öğrencileri limit-süreklilik kavramları ile farklı öğrenim seviyelerinde ve bağlamlarda karşılaşmaktadır. Araştırmanın sonuçları öğrencilerin limit-süreklilik kavramlarına ilişkin "sonsuzu bir sayı olarak ve limit değeri olarak algılama", "belirsizliklerin olduğu yerlerde limitin olamayacağı inancı", "tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını birbirinden ayırt edememe", "süreklilik için fonksiyonun tanımlı ve limit değerinin fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olması gerekliliğini dikkate almama" gibi geçersiz özellikleri benimsediklerini göstermiştir. Benimsenen bu geçersiz özelliklerin ders süreci başlangıcında daha fazla olduğu BCS'nin etkin kullanımı ile azaldığı görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin zihinlerinde yapılandırdıkları limit-süreklilik kavramlarını temsil eden geçersiz özellikler ve formel tanımlamada sembolik formlarla ilgili anlamalarda çok yüzeysel ve kural tabanlı olduğu sonucundan hareketle bu kavramlar ve ilişkili sembolik formların (özellikle sonsuz sembolü kullanılarak tanımlanan işlemlerin) asıl anlamları üzerine gerek matematik eğitimcilerine, gerek öğretim teknoloji uzmanlarına kavramlara atfedilen bu geçersiz özellikleri değiştirerek tutarlı kavram imajları oluşturacak öğrenme-öğretme sürecini görsel temsillerle destekleyecek e-içerikler üzerinde çalışmalar önerilmektedir. Ayrıca MYO öğrencilerinin limit-süreklilik kavramlarının asıl anlamları üzerine ortaöğretim düzeyinde aldıkları öğretim sürecinden itibaren durulmalıdır. Bu süreçte öğrencilere bu kavramlara atfettikleri özelliklerin geçersiz olduğunu belirtmek ve geçersiz olduğunu gösteren görsel ve kavramsal ilişkilerle örneklemeler yaparak farkındalıklarını geliştirmek gerekmektedir. Bu bağlamda BCS yazılımı gibi öğrencilerin kavramsal anlamalarına yardımcı olan yazılımların kullanımının ortaöğretim kademsinde yaygınlaştırılması gerekirse bu yazılımların kullanımı ile ilgili bir ders okutulması bir diğer öneri olarak sunulabilir.

Araştırma boyunca elde edilen veriler MYO öğrencilerinin bilgisayarda yaptıkları çalışmalardan, ekran çıktılarından, çalışma yapraklarına yazdıkları cevaplardan, araştırmacı öğretmenin notlarından ve öğrencilerin ders sürecindeki diyaloglarından derlenmiştir. Bu süreçte görsel öğeler kadar çalışma yapraklarının ve diyaloglarla sağlanan sözel iletişimin de eğitim-öğretim sürecinin ayrılmaz bir parçası olduğu görülmüştür. Çalışma yapraklarındaki sorular bilgisayar ortamında öğrencilerin çalışmalarını yönlendirmede, BCS ile soyutlama becerilerini geliştirerek limit-süreklilik ile ilgili hedeflenen kazanıma ulaşmalarında etkili olmuştur. Ayrıca ders süreci boyunca öğrencilerle gerçekleşen diyaloglar, öğrencilerin matematiğin soyut kavramlarını tanımlamak veya açıklamak için kullandıkları ifadeler kavram imgelerinin oluşumunda veya şekillenmesinde verdikleri cevapları derinlemesine incelemeye yardımcı olmuştur. Bu bağlamda hazırlanan BCS destekli öğrenme ortamlarında kullanılacak olan etkinlikler, bilginin etkin kullanılmasında analiz, sentez ve değerlendirme düzeyindeki soruları içererek öğrencilere rehberlik edecek nitelikte olmalıdır. Bununla birlikte öğrenciler etkinlikler boyunca yapılan diyaloglarla bilgiyi kullanışlı hale nasıl getireceğini öğrenmelidir. Dolayısıyla öğrenci seviyesi dikkate alınarak matematiğin temelinde yer alan soyut kavramların öğrenciler için nasıl anlamlı hale getirilebileceği konusunda görsel öğeleri ve sözel iletişimi destekleyen etkinlikler hazırlanmalı, örnekler sunulmalı ve tartışılmalıdır.

6. 2. 2. İleride Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

Ülkemizde genel olarak YGS sınavı ile seçilen MYO öğrencilerinin ileri matematik düzeyinde ele alınan konularda eksik olduğu bilinmektedir. Bunun sonucunda MYO öğrencileri ile yapılan ileri matematik düzeyindeki çalışmalarda zorluklar yaşanmaktadır. Bu çalışmada araştırmacı öğretmen, sınıf içi ders sürecinde başarılı bulduğu MYO Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerinin dönem sonuna doğru gördükleri limit-süreklilik konusu ile ilgili sahip oldukları bilgilerde ilgili kavramların kavramsal anlama boyutunun ihmal edildiğini gözlemlemiş olup Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerini örneklem olarak seçmiştir. Bununla birlikte MYO’da yer alan diğer bölümlerde okutulmakta olan genel matematik derslerinde limit-süreklilik kavramları anlatılmakta ve Bilgisayar Teknolojileri Bölümü öğrencilerine nispeten daha büyük sorunlarla karşılaşılmaktadır. Bu noktadan hareketle MYO’da yer alan diğer bölüm öğrencilerini örneklem alan çalışmalar yürütülebilir.

Bu çalışmada genel matematik konularında yer alan ve MYO öğrencilerinin en çok zorlandığı limit-süreklilik konusunu genel olarak ele almayı sağlayan beş kazanım üzerinde durulmuştur. Bu alanda ileride yapılacak olan çalışmalar bu kazanımlardan birine yoğunlaşabileceği gibi başka bir kazanımı da ele alabilir. Örneğin; “fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda limitin aranabileceğini düşünebilme” durumu da araştırmaya değerdir. Bu çalışmanın nitel bir çalışma olması öğrenci eylemlerinin ve açıklamalarının derinlemesine incelenmesini gerektirmektedir. Bu durum kazanımlara ilişkin sınırlı sayıda soru sormaya neden olmaktadır. Dolayısıyla kazanımlardan birine odaklanmak suretiyle kazanım ile ilgili daha çok soru sorma, daha çok veri elde etme ve karşılaştırma imkânı doğacaktır.

Çalışma süresince MYO öğrencilerinde limit-süreklilik konusuna ilişkin kavram yanılgılarına rastlanmış olup bu yanılgıların sebebinin öğrencilerin önceki konularla ilgili geçersiz öğrenmelerinin değişime dirençli olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bağlamda yapılacak başka bir çalışmada MYO öğrencilerinin geçersiz öğrenmelerindeki direncin ortadan kaldırılıp kaldırılamayacağı araştırılabilir. Ayrıca limit-süreklilik gibi genel matematiğin temelini oluşturan fonksiyon konusu ele alınarak yapılacak benzer bir çalışmada MYO öğrencilerinin fonksiyon konusundaki öğrenmeleri ve soyut düşünme becerileri değerlendirilebilir.

Yapılan bu çalışmada araştırmacı öğretmen tasarladığı BCS destekli öğrenme ortamında MYO öğrencilerinin nasıl öğrendiklerini ve bu ortamın öğrencilerin öğrenmeleri üzerindeki etkisini eylem araştırması yöntemiyle anlamaya çalışmıştır. Yapılacak benzer çalışmalarda BCS destekli tasarlanan öğrenme ortamının MYO öğrencilerinin öğrenmeleri üzerindeki etkisine odaklanılıp deneysel yöntemle ele alınabilir.

Araştırmada her ne kadar BCS destekli öğrenme ortamının etkisi dolaylı olarak ele alınsa da araştırma sonucunda MYO öğrencilerindeki görselleştirmeyi, keşfetmeyi ve matematiksel fikirler üretmeyi geliştirdiği açıktır. Çalışmada ele alınan limit-süreklilik kavramları sembolik, cebirsel işlemleri içeren ve grafik ile desteklenmesi gereken anlaşılması güç üst düzey kavramlardandır. Bu kavramların anlamlandırılmasında BCS’lerden Derive yazılımının seçilmesi uygun görülmüş olup MYO öğrencilerinin soyut düşünme becerilerinin gelişimine katkı sağladığı açıktır. Derive yazılımı gibi bilgi teknolojilerinin matematik eğitime entegrasyonu ile ezbere bilginin ortadan kalkacağı ve öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin gelişeceği düşüncesinden hareketle MYO’larda ele alınan genel matematiğin soyut kavramlarının öğretimine ilişkin hazırlanacak öğrenme ortamlarında uygun konu eşliğinde uygun yazılım kullanımını konu alan bir araştırma gerçekleştirilebilir. Ayrıca araştırmanın odağı ve örneklemin MYO olması gereği teknolojinin soyutlama, modelleme ve ispat yapma gibi üst matematiksel becerileri nasıl etkilediğine değinilmemiştir. Bu alanda örneklem değiştirilerek örneğin matematik öğretmen adayları ele alınarak yapılacak bir çalışma ileri matematiksel düşünme süreçleri için bir çerçeve oluşturacağından ve alan yazına katkı sunacağından önerilebilir.

Bu çalışmada dersi yürüten araştırmacı, geleneksel ders anlatımı sürecinde karşılaştığı soruna çözüm üretmek, öğretimin niteliğini arttırmak ve geliştirmek amacıyla araştırmacı öğretmen (eylem araştırması) yöntemini kullanmıştır. Yapılacak benzer çalışmalarda MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusunu öğrenmeleri, tasarlanacak olan başka bir öğrenme ortamı ile geleneksel öğrenme ortamında (deney-kontrol gruplu) kıyaslanarak deneysel tasarımın benimsendiği bir çalışma yürütülebilir.

Yapılan bu çalışmada veri analizi SOLO taksonomisine dayalı olarak yapılmıştır. SOLO taksonomisi MYO öğrencilerinin limit-süreklilik konusundaki öğrenme çıktılarını değerlendirme açısından elverişli bir yöntem sunmuştur. Bu açıdan öğrenme sürecini değerlendirmeye yönelik çalışma yapmak isteyenler için önerilebilir. Ayraca bu çalışmada SOLO taksonomisinin orijinal şekli kullanılmıştır (Biggs ve Collis, 1991). Ancak belli bir seviyede sınıflandırılan bazı öğrenme çıktılarının, genel olarak bu seviyenin tanımlamasına uymasına rağmen odaklandığı yön ve doğru çıkarımlar açısından bu seviyedeki diğer cevaplara kıyasla daha zayıf ya da güçlü kalmıştır. Yapılan bu çalışmada özellikle çok yönlü yapı ve ilişkilendirilmiş yapılarda buna örnek durumlara rastlanmış olup bu gibi cevaplar bulundukları seviyenin başına zayıf veya güçlü sıfatı eklenerek sınıflandırılmıştır. Dolayısıyla öğrenme sürecinde duyarlı bir değerlendirme yapmak isteyenlere çalışmalarında bu durumu dikkate alması önerilmektedir.

7. KAYNAKLAR

Akbulut, K. ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 13*(2), 497-512.

Akkaş, E. N. (2009). 6- 8. sınıf öğrencilerinin istatistiksel düşüncelerinin incelenmesi. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramanın çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*(30), 1-10.

Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoğul temsiller ve tanımsal özellikler. *Eğitim Araştirmalari Dergisi, 5*(20), 14-24.

Akkoyunlu, A., Güler, M., Uğurel, I. ve Alan, E. (2002). *Ortaöğretimde limit kavramının oluşturulmasına yönelik bir çalışma.* 11 Mayıs 2012 tarihinde http://www.matder.org.tr/bilim/oolkoybc.asp adresinden erişilmiştir.

Aksoy, Y. (2007). Türev kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi. Yayınlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aktümen, M. ve Kaçar, A. (2008). Bilgisayar cebiri sistemlerinin matematiğe yönelik tutuma etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 35*(35), 13-26.

Aktümen, M. (2007). Belirli integral kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi. Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Alcock, L. and Inglish, M. (2010). Visual considerations in the presantation of mathematical proofs. seminar.net-International journal of media. *Technology and Lifelong Learning, 6*, 43-59.

Anıl, Ö. ve Küçüközer, H. (2007). Meslek Yüksekokulu öğrencilerinin teknolojinin bilimsel ilkeleri dersine yönelik geliştirdiği tutumlar. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9*(1), 19-31.

Ardıç, E. Ö., Yılmaz, B. ve Demir, E. (2012, Haziran). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin merkezi eğilim ve yayılım ölçüleri hakkındaki istatistiksel okuryazarlık düzeylerinin solo taksonomisine göre incelenmesi.* X. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Niğde Üniversitesi, Niğde.

Arıkan, E. E., Özkan, E. M. ve Ünal, H. (2014). L'hospıtal kuralının uygulamasında incelenen kavram yanılgıları. *Journal of Educational Science, 2*(3), 18-31.

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus: What can be learnt from education research and curricular changes in France? *CBMS Issues in Mathematics Education, 8,* 1-15.

Artzt, A. F. (1999). Cooperative learning in mathematics teacher education. *The mathematics teacher, 92*(1), 11.

Atherton, J. S. (2002). *Learning and teaching: Piaget's developmental psychology.* Retrieved October 16, 2012 from http://www.dmu.ac.uk/~jamesa/learning/piaget.htm

Aygün, M., Durukan, S., Aydın, İ. ve Diril, H. Z. (2015). Meslek yüksekokulu matematik müfredatı ile DGS soruları arasındaki korelasyon. *Journal of Research in Education and Teaching, 4*(3), 31.

Aztekin, S. (2012). Determining the understandings about the limit subject in mathematics by using repertory grid technique. *International Online Journal of Educational Sciences, 4*(3), 659-671.

Baglivo, J. (1995). Computer algebra systems: Maple and mathematica. *The American Statistician, 49*(1), 86-92.

Bağdat, O. ve Anapa-Saban, P. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. *International Journal of Social Science, 26*, 473-496.

Baki, A. (1994). Breaking with tradition: A study of Turkish student teachers' experiences within a Logo-based mathematical environment. Doctoral dissertation, University of London, London.

Baki, A. (1996). Matematik öğretiminde bilgisayar her şey midir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12*, 135-143.

Baki, A. (2000). Preparing student teachers to use computers in mathematics classroom through a long-term pre-service course in Turkey. *Journal of Information Technology for Teacher Education, 9*(3), 343–362.

Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi, 149*(91), 26-31.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik.* İstanbul: Tübitak Bitav-Ceren Yayınları.

Baki, A. (2004). Problem solving experiences of student mathematics teachers through Cabri: A case study. *Teaching Mathematics and Its Applications, 23*(4), 172-180.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (Genişletilmiş 4.baskı). Ankara: Derya Kitabevi.

Baki, A. ve Çelik, D. (2005). Grafik hesap makinelerinin matematik derslerine adaptasyonu ile ilgili matematik öğretmenlerinin görüsleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 4*(4), 146-162.

Baki, M. ve Çekmez, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 3*(2), 81-98.

Barak, B. (2007). Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi. Yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions at Spanish High Schools. In beyond the apparent banality of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 235-268.

Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(1), 225-249.

Baştürk, S. and Dönmez, G. (2011). Mathematics student teachers' misconceptions on the limit and continuity concepts. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(1), 225-249.

Bayar, E. ve Gündüzalp, Y. (1998). *Analiz I*. Trabzon: KTÜ Basımevi.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500.

Biggs, J. B. and Collis, K. F. (2014). *Evaluation the quality of learning: the SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome)*. New Jersey: Academic Press.

Biggs, J. B. and Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. Rowe (Ed.), *İntelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc.

Biber, A. Ç. and Argün, Z. (2015). The relations between concept knowledge related to the limits concepts in one and two variables functions of mathematics teachers candidates. *Bartın University Journal of Faculty of Education, 4*(2), 501-515.

Bozkurt, A. ve Akalın, S. (2010). Matematik öğretiminde materyal geliştirmenin ve kullanımının yeri, önemi ve bu konuda öğretmenin rolü. *Dumlupınar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 27*, 47-56.

Bukova, E. (2006). Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme. Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Büyükköroglu, T., Düzce, S. A., Çetin, N., Mahir, N., Deniz, A. and Üreyen, M. (2006). The effect of computers on teaching the limit concept. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 3*, 396-408.

Camacho, M., Depool, R. and Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *Issues in Mathematics Education, 16*, 29-61.

Castro, C. H. (2011). Assesing the impact of computer programming in understandinglimits and derivatives in a secondary mathematics classroom. Unpublished doctoral dissertation, Georgia State University, Atlanta.

Chang, Y. K. and Li, W. T. (2005). Existence results for second order impulsive functional differential inclusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 301*(2), 477-490.

Charlwood, K. (2002). Some uses of maple in the teaching of modern algebra. In E. Hibbard (Ed.), *Innovations in teaching abstract algebra* (pp.91-96). Washington DC: Mathematical Association of America.

Clements, D. H. and Sarama, J. (1997). Computers support algebraic thinking. *Teaching Children Mathematics, 3*, 320-325.

Cnop, I. (1997, May). *Implementing abstract mathematical concepts using computer algebra packages.* Paper presented at International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 3), University of Koblenz, Koblenz.

Cnop, I. (2001). *New insight in mathematics by live CAS documents.* Retrieved October 21, 2013 from http://eric.ed.gov/?id=ED460012

Cooley, L. A. (1997). Evaluating student understanding in a calculus course enhanced by a computer algebra system. *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 7*(4), 308-316.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modeles spontanes at modeles propres. *In Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME, 277*(2), 322-326.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (2002). *Limits in advanced mathematical thinking.* Netherlands: Springer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Cunningham, S. and Zimmermann, W. (1991). What is mathematical visualization. In W. Zimmermann (Ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). America: Mathematical Association of America.

Çekmez, E. (2013). Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi. Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Çelik, D. (2007). Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Çelik, D., ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamaları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 7*(1), 166-190.

Çelik, D. ve Baki, A. (2007, Mayıs). *Öğretmen adaylarının cebirde çoklu gösterimlerden yararlanma durumları üzerine bir çalışma.* 7 th International Educational Technology Conference'da sunulan bildiri, Near East Universty, Lefkoşa.

Çepni, S. (2007). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (3. baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Çetin, İ. (2009). Students' understanding of limit concept: An APOS perspective. Doktoral dissertation, Middle East Technical University, Ankara.

Çıldır, S. (2012). Limit konusunun bilgisayar ortamında görselleştirilmesi ve fizik öğretmen adaylarının konu hakkındaki görüşleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 42*(42), 143-153.

Çoker, D., Özer, O. ve Taş, K. (1989). *Genel matematik* (2. baskı). Ankara: Verso Yayıncılık.

Çolak, H. (2002). *Limit öğretiminde iki farklı öğretim durumunun karşılaştırılması*. Ankara: Gazi Üniversitesi.

Dane, A., Çetin, Ö. F., Bas, F. and Sağırlı, M. Ö. (2016). A conceptual and procedural research on the hierarchical structure of mathematics emerging in the minds of university students: An example of limit-continuity-ıntegral-derivative. *International Journal of Higher Education, 5*(2), 82.

Davis, R. B. and Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281-303.

Demirel, Ö. (2010). *Eğitimde program geliştirme: Kuramdan uygulamaya*. Ankara: Pegem Akademi.

Didiş, M.G. ve Ubuz, B. (2010, Ekim). *Öğrencilerin simetri konusundaki anlamalarının SOLO taksonomisine gore değerlendirilmesi*. 9. Matematik Sempozyumu Sergi ve Şenlikleri'nde sunulan bildiri, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Domingos, A. (2009, January). *Learning advanced mathematical concepts: The concept of limit*. Paper presented at Proceedings of CERME, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade, Lyon France.

Dönmez, G. (2009). Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin öğretim programı bilgisi bağlamında incelenmesi. Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Dubinsky, E., Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Dubinsky, E. and Schwingendorf, K. (2004). *Calculus, concepts, computers and cooperative learning (C4L)*. (The Purdue Calculus Reform Project). Purdue University, West Lafayette.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K. E. and Mathews, D. M. (1995). *Calculus, concepts and computers.* New York: McGraw-Hill Education.

Duru, A., Köklü, Ö. and Jakubowski, E. (2010). Pre-service mathematics teachers' conceptions about the relationship between continuity and differentiability of a function. *Scientific Research and Essays, 5*(12), 1519-1529.

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metodlarına giriş: Nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. and Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(4), 765-790.

Elliot, J. (1991). *Action research for educational change.* New York: McGraw-Hill Education.

Ellison, M. J. (1993). The effect of computer and calculator graphics on students' ability to mentally construct calculus concepts. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota, Twin Cities.

Erbaş, A. K. (2005). Çoklu gösterimlerle problem çözme ve teknolojinin rolü. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 4*(4), 88-92.

Ersoy, A. (2005). İlkögretim bilgisayar dersindeki sınıf yerleşim düzeni ve ögretmen rolünün yapılandırmacı öğrenmeye göre değerlendirilmesi. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 4(*4), 170-181.

Ersoy, Y. (1997). *Bilgisayarın matematik eğitiminde kullanılması: Ortaöğretim matematik öğretimi* (2. baskı). Ankara: YÖK-Dünya Bankası.

Ersoy, Y. (2003). Teknoloji destekli matematik eğitimi-II: Hesap makinesinin matematik etkinliklerinde kullanımı. *İlköğretim-Online E-Dergi, 2*(2), 35-60.

Ertem, E., Kaleli-Yılmaz, G. ve Baki, A. (2012, Temmuz). *"Limit-süreklilik" konusunun öğretiminde Derive yazılımı kullanılarak oluşturulan bilgisayar destekli öğrenme ortamına ilişkin MYO öğrencilerinin görüşleri*. I. International Dynamic, Explorative and Active Learning (IDEAL) Conference'da sunulan bildiri, Bayburt Eğitim Fakültesi, Bayburt.

Ervynck, G. (1981, May). *Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function.* Paper presented at Proceedings of the

Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Charles University, Prague.

Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 14*(1), 43-54.

Ferrini-Mundy, J. and Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In J. Kaput and E. Dubsinky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and result* (pp. 31-45). Washington DC: Mathematical Association of America.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Netherlends: Springer Science.

Foley, G. D. (1986). Using infinitesimals to introduce limits and continuity in a community college calculus course (Hyperreal Numbers). Doctoral dissertation, The University of Texas, Austin.

Gass, F. (1992). Limits via graphing technology. *Primus, 2*(1), 9-15.

Ghosh, J. B. (2003). Visualizing solutions of systems of equations through mathematica. *Australian Senior Mathematics Journal, 17*(2), 13-28.

Gillman, L. (1997). Order relations and a proof of L'hopital's rule. *The College Mathematics Journal, 28*(4), 288-292.

Girard, R. N. (2002). Students' representational approaches to solving calculus problems: examining the role of graphing calculators. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Gökmen, A., Budak, A. ve Ertekin, E. (2015). İlköğretim öğretmenlerinin matematik öğretiminde somut materyal kullanmaya yönelik inançları ve sonuç beklentileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 24*(3), 859-874.

Graham, K. G. and Ferrini-Mundy, J. (1989, March). *An exploration of student understanding of central concepts in calculus*. Paper presented at Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Groth, R. E. (2002, March). *Characterizing secondary students' understanding of measures of central tendency and variation*. Paper presented at Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens, Georgia.

Groth, R. E. and Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(1), 37-63.

Günüç, S., Odabaşı, H. F. ve Kuzu, A. (2012). Yaşam boyu öğrenmeyi etkileyen faktörler. *University of Gaziantep Journal of Social Sciences, 11*(2), 309-325.

Gürbüz, R. ve Pırtıcı, Z. (2014). Aritmetikten cebire geçişi sağlayacak etkinliklerin tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 8*(1), 178-203.

Gürbüz, R., Toprak, Z., Yapıcı, H. ve Doğan, S. (2011). Ortaöğretim matematik müfredatında zor olarak algılanan konular ve bunların nedenleri. *University of Gaziantep Journal of Social Sciences, 10*(4), 1311-1323.

Güven, B. (2002). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek geometri öğrenme. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Güven, B. (2006). Öğretmen adaylarının küresel geometri anlama düzeylerinin karakterize edilmesi. Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Güven, B. (2008). Using dynamic geometry software to convey real-world situations into the classroom: The experience of student mathematics teachers with a minimum network problem. *Teaching Mathematics and its Applications, 27*(1), 24-37.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2003). Dinamik geometri yazilimi Cabri ile geometri öğrenme: Öğrenci görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 2*(2), 67-78.

Halloway, W. (2010). *Quality learning with reference to the SOLO model*. Retrieved October 12, 2012 from http://www.une.edu.au/education/research/bhutan/publications/bhutansolohalloway.pdf

Harris, G. A. (2000). The use of a Computer Algebra System in capstone mathematics courses for undergraduate mathematics majors. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 7*(1), 33.

Hattie, J. A. and Brown, G. T. (2004). *Cognitive processes in asTTle: The SOLO taxonomy*. (asTTle Technical Report, 43). University of Auckland, Ministry of Education.

Hazzan, O. and Goldenberg, E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(3), 263-291.

Heid, M. K. (1984). An exploratory study to examine the effects of resequencing skills and concepts in an applied calculus curriculum through the use of the microcomputer. *Dissertation Abstracts International, 46*, 1548A.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 3-25.

Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education, 106*(1), 5-57.

Heid, M. K. (2002), Computer algebra systems in secondary mathematics classes: The time to act is now! *The Mathematics Teacher, 95*(9), 662.

Heid, M. K., Hollebrands, K. F. and Iseri, L. W. (2002). Reasoning and justification, with examples from technological environments. *The Mathematics Teacher, 95*(3), 210.

Herwaarden, O. A. and Gielen, J. L. (2002). Linking computer algebra systems and paper-and-pencil techniques to support the teaching of mathematics. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 9*(2), 139.

Hill, H. C., Ball, D. L. and Schilling, S. G. (2007). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hofe, R. V. (1997). *Problems with the limit concept-on a case study of a calculus lesson within a computer-based learning environment*. Retrieved June 16, 2012 from http://www.fmd.uniosnabrueck. de/ebooks/gdm/PapersPdf1997/vomHofe.pdf.,

Hofe, R. V. (1998). *Epistemological problems with the limit concept: A case study on communication and argumentation within a computer-based learning environment*. Retrieved June 21, 2012 from http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_vomHofe_cerme3.pdf

Hoyles, C. (1985). What is point of group discussions in mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 205-214.

Hoyles, C and Noss, R. (1999). Dynamic geometry environments: What's the point? *Mathematics Teacher, 87*(9), 716-717.

Hoyles, C. and Noss, R. (2003). *What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?* Netherlands: Springer.

Hughes-Hallet, D. (1991). "Where is the mathematics?" Another look at calculus reform. In F. D. Demana, B. K. Waits, and J. Harvey (Eds.), *Proceedings of the second annual conference on technology in collegiate mathematics* (pp. 31-33). Reading, MA: Addison-Wesley.

Hutkemri, E. Z. (2014). Impact of using GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge of limit function. *Mediterranean Journal of Social Sciences, 5*(23), 873.

Hyang, S. K. and Young-Mi, K. (2005). Models of ınstruction technology for mathematics. *Trans tech publications, 277*, 219-225.

Iseri, L. (2003). Algebra students' developing symbolic reasoning in the context of a computer algebra system. Doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, Pennsylvania.

Işık, C. (2007). Bilgisayarla görselleştirmenin iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının öğretiminde öğrenci başarısına etkisi. *Journal of Qafqaz University,19*, 132-141.

Jakuncy, R. and Kerr, K. (2002). Getting started with computer algebra system: Our story. *Mathematics Teacher, 95*(8), 628-632.

Johnson, A. P. (2002). *A short guide to action research*. Boston: Pearson Education.

Johnson, A. P. (2005). *A short guide to action research* (2nd edition). Boston: Pearson Education.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. and Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children’s thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 101-125.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B. and Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(4), 269-307.

Jordaan, T. (2005). Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students. Unpublished master’s thesis, University of South Africa.

Juter, K. (2006). Students’ attitudes to mathematics and performance in limits of functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(2), 91-110.

Kabaca, T. (2006). Limit kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Kabaca, T. and Musan, M. S. (2014). The effect of dynamic mathematics learning environment on the SOLO understanding levels for equations and ınequalities of 8th graders. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 11*(26), 195-207.

Kabaca, T., Çontay, E. G. ve İymen, E. (2011). Dinamik matematik yazılımı ile geometrik temsilden cebirsel temsile: Parabol kavramı. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*(30), 101-110.

Kahng, B. (2005). *Division of science and mathematics.* (Computer Assisted Calculus Education Project), University of Minnesota, Twin Cities.

Kamol, N. and Yeap, B. H. (2010, July). *Upper primary school students' algebraic thinking*. Paper presented at 33rd Mathematics Education Research Group of Australasia, Freemantle, Western Australia.

Kaplan, A. ve Öztürk, M. (2014). 2-8. Sınıf öğrencilerinin simetri kavramını anlamaya yönelik düşünme yaklaşımlarının incelenmesi. *İlköğretim Online, 13*(4), 1502-1515.

Karakuş, C. (2013). Meslek yüksekokulu öğrencilerinin yaşam boyu öğrenme yeterlikleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(3), 26-35.

Karadeniz, M. H. ve Kelleci, D. (2015). Meslek yüksekokulu öğrencilerinin matematik dersine ilişkin tutumlarının başarıya etkisi. *Karadeniz Sosyal Bilimler Dergisi, 7*(14), 1-16.

Kasten, M. (1988). *The role of calculus in college mathematics.* ERIC Clearing for Science Mathematics and Environmental Education Columbus OH. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 321 970).

Kendal, M. (2001). Teaching and learning introductry differential calculus with a computer algebra system. Doctoral dissertation, The University of Melbourne, Melbourne.

Kendal, M., and Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(2), 143-165.

Kidron, I. and Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. The *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9*(3), 205-228.

Klein, A. M. (2005). The effects of computer assisted instruction on college algebra students at Texas Tech University. Unpublished doctoral dissertation, Texas Tech University, Texas.

Klein, R. and Kertay, P. (2002). An introduction to simple linear equations: CASs with the TI-89. *The Mathematics Teacher, 95*(8), 646.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 137-174.

Koç, Y., Işıksal, M., Osmanoğlu, A., Çetinkaya, B., Aşkun, C. S., Bulut, S., Seviş, S. ve Esen, Y. (2011). *SOLO modeli ile uzamsal görselleştirme becerilerinin incelenmesi.* X. Matematik Sempozyumu'nda sunulan bildiri, ODTÜ, Ankara.

Koparan, T. ve Güven, B. (2014). According to the M3ST model analyze of the statistical thinking levels of middle school student. *Eğitim ve Bilim, 171*(39), 37-50.

Kokol-Voljc, V. (2000). Examination questions when using CAS for school mathematics teaching. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 7*(1), 63-75.

Köse, N. Y. ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim 5. sınıf öğrencileri geometrik şekillerdeki simetri doğrularını Cabri geometri yazılımı yardımıyla nasıl belirliyorlar? *İlköğretim Online, 8*(1), 159-175.

Kramarski, B. and Hirsch, C. (2003). Effects of computer algebra system (CAS) with metacognitive training on mathematical reasoning. *Educational Media International, 40*(3-4), 249-257.

Krishnamani, V. and Kimmins, D. (2001). *Using technology as a tool in abstract algebra and calculus: The MTSU experience*. Retrieved November 16, 2012 from http://archives.math.utk.edu/ICTCM

Kula, S. and Bukova-Güzel, E. (2015). Reflections of mathematics student teachers' knowledge related to the purposes of the curriculum on their limit teaching. *Journal of Theoretical Educational Science, 8*(1), 28-49.

Kuş, E. (2003). *Sosyal bilimlerde araştırma teknikleri nitel mi nicel mi?* Ankara: Anı Yayıncılık.

Kutluca, T. ve Akın, M. F. (2013). Somut materyallerle matematik öğretimi: Dört kefeli cebir terazisi kullanımı üzerine nitel bir çalışma. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 4*(1), 48-65.

Kutzler, B. (2000). The algebraic calculator as a pedogogical tool for teaching mathematics. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Educations, 7*(1), 5-23.

Laborde, C. (2001). Intergration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Lam, P. and Foong, Y. (1996). *Rasch analysis of math SOLO taxonomy levels using hierarchical items in testlets*. ERIC Clearing for Science Mathematics and Environmental Education Columbus OH. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 398 271).

Langrall, C. W. and Mooney, E. S. (2002, October). The development of a framework characterizing middle school students' statistical thinking. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the sixth ınternational conference on teaching statistics* (pp. 14-17). USA: Illinois State University Press.

Lauten, A. D., Graham, K. and Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 225-237.

Leikin, R., Berman, A. and Zaslavsky, O. (2000). Applications of symmetry to problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 31*(6), 799-809.

Leinbach, C. (2005). *Using computer algebra to extract meaning from parameters*. Retrieved November 17, 2012 from http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/gleinba.pdf

Leinbach, C., Pountney, D. C. and Etchells, T. (2002). Appropriate use of a CAS in the teaching and learning of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33*(1), 1-14.

Lian, L. H. and Idris, N. (2006). Assessing algebraic solving ability of form four students. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 1*(1), 55-76.

Lincoln, Y. S., Lynham, S. A. and Guba, E. G. (2011). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences, revisited. *The Sage Handbook of Qualitative Research, 4*, 97-128.

Mahoney, J. F. (2002). Computer algebra systems in our schools: Some axioms and some examples. *The Mathematics Teacher, 95*(8), 598.

Mayes, R. (2001). Current state of research into CAS in mathematics education. In J. Berry, M. Kronfellner, J. Monaghan and B. Kutzler (Eds.), *The state of computer algebra in mathematics education* (pp. 171-189). Lund, Sweden: Chartwell-Bratt.

Miles, M. B. and Huberman, A. M. (1994). Q*ualitative data analysis: An expanded sourcebook*. London: Sage.

Mills, G. E. (2003). *Action research a guide for the teacher researcher.* (2nd. edition), New Jersey: Pearson Education.

Mcdonalds, (2005). *Using multiple ıntelligence activities to ıntroduce limits*. Retrieved December 12, 2012 from http://www.math.montana.edu/mathed/distance/capstone/mcdonald/index.html

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *Matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu: 9-12. sınıflar*. Ankara: MEB Basımevi.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2006). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı.* Ankara: MEB Basımevi.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Monaghan, J., Sun, S. and Tall, D. O. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. *Psychology of Mathematics Education,18*, 279-286.

Mooney, E. S. (2002). A framework for characterizing middle school students' statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(1), 23-63.

Muhundan, A. (2005). Effects of using graphing calculators with a numerical approach on students' learning of limits and derivatives in an applied calculus course at a community college. Unpublished doctoral dissertation, University of South Florida, Tampa.

Nair, G. S. (2010). College students' concept images of asymptotes, limits, and continuity of rational functions. Doctoral dissertation, The Ohio State University, Ohio.

Nilklad, L. (2004). College algebra students' understanding and algebraic thinking and reasoning with functions. Doctoral dissertation, Oregon State University, Oregon.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics national council of teachers of mathematics.* Retrieved November 19, 2013 from http://standards.nctm.org/document/chapter7/geom.htm

Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* The Netherlands: Kluwer Academic Publicshers.

Nusantari, E. (2014). Genetics misconception on high school textbook, the impact and importance on presenting the order of concept through reorganization of genetics. *Journal of Education and Practice, 5*(36), 20-28.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal For Research in Mathematics Education, 29*(1), 21-40.

Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Özdaş, A. (1998). *Matematik öğretimi.* Eskişehir: TC Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Özdemir, A. S. and Göktepe-Yıldız, S. (2015). The analysis of elementary mathematics preservice teachers' spatial orientation skills with SOLO model. *Eurasian Journal of Educational Research, 61*, 217-236.

Özkaya, M., Işık, A. and Konyalıoğlu, A. (2014). Proofing and counter-exampling performances of students in the elementary mathematics education department for continuous functions. *Middle Eastern and African Journal of Educational Research,11*, 26-42.

Özmantar, M. F. ve Yeşildere, S. (2008). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları ve çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 181-221). Ankara: Pegem A.

Özyurt, Ö., Özyurt, H., Baki, A. and Güven, B. (2013). Integration into mathematics classrooms of an adaptive and intelligent individualized e-learning environment: Implementation and evaluation of UZWEBMAT. *Computers in Human Behavior, 29*(3), 726-738.

Palmiter, J. R. (1991). Effects of computer algebra systems on concept and skill acqisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 151-156.

Parameswaran, R. (2007). On understandig the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(2), 193-216.

Parks, V. W. (1995). Impact of a laboratory approach supported by 'Mathematica' on the conceptualization of limit in a first calculus course (computer algebra system). Doctoral dissertation, Georgia State University, Georgia.

Pegg, J., and Coady, C. (1993, July). Identifying SOLO levels in the formal mode. Paper presented at Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Tsukuba, Ibaraki-Japan.

Pegg, J. and Davey, G. (1998). Interpreting Student Understanding in Geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer and D. Chazen (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.109-135). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pegg, J. and Tall, D. (2004). *Fundamental cycles in learning algebra: An analysis*. Retrieved October 19, 2012 from http://www.warwick.ac.uk\staff\David.Tall\drafts\dot2001z-pegg-icmialgebra.pdf

Pegg, J. and Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education, 37*(6), 468-475.

Philips, K. D. and Carr, K. (2009). Dilemmas of trustworthiness in preservice teacher action research. *Action Research, 7*(2), 207-226.

Pierce, R. U. (2001). An exploration of algebraic ınsight and effective use of computer algebra systems. Doctoral dissertation, The University of Melbourne, Melbourne.

Pierce, R. U. and Stacey, K. C. (2002). Algebraic insight: The algebra needed to use computer algebra systems. *The Mathematics Teacher, 95*(8), 622.

Porzio, D. T. (1994). The effects of differing technological approaches to calculus on students' use and understanding of multiple representations when solving problems. Doctoral dissertation, The Ohio State University, Ohio.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132.

Quesada, A., Richard, L. and Wiggins, M. (2008). The ımpact of the graphical approach on students' understanding of the definition of limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 15*(3), 95-102.

Renshaw, C. E. and Taylor, H. A. (2000). The educational effectiveness of computer-based instruction. *Computers and Geoscienes, 26*(6), 667-682.

Rıder, R. L. (2004). The effect of multi-representational methods on students' knowledge of function concepts in developmental college mathematics. Doctoral dissertation, Graduate Faculty of North Carolina State University, North Carolina.

Roh, H. K. (2007). An activity for development of the understanding of the concept of limit. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park and D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the ınternational group: Psychology of mathematics education* (pp. 105-112). Seoul: PME.

Ruthven, K., Rousham, L. and Chaplin, D. (1997). The long-term influence of a 'calculator-aware' number curriculum on pupils' mathematical attainments and attitudes in the primary phase. *Research Papers in Education,12*(3), 249-282.

Sanchez, R. A. (1996). Teacher's and students' mathematical thinking in a calculus classroom: the concept of limit. Doctoral dissertation, Florida State University, Florida.

Semiha, K. ve Güzel, E. B. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının öğretim programının amaçlarına yönelik bilgilerinin limit öğretimlerine yansımaları. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi, 8*(1), 28-49.

Senemoğlu, N. (2005). *Anlamlı öğrenme ve öğretme strateji ve teknikleri (Constructivism: teaching models and strategies)*. Ankara: Gazi Kitapevi.

Sevimli, E. and Delice, A. (2015). Can technology-assisted instruction improve theoretical awareness? The case of fundamental theorem of calculus. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6*(1), 68-92.

Sıvacı, S. Y. (2003). Sınıf öğretmenliği son sınıf öğrencilerinin matematik alan ve meslek bilgisi yeterlilikleri ile derse yönelik tutumları. Yayınlanmamış doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), 371-397.

Slomer, D. (1999). Numerical zooming on the limits. *The Mathematics Teachers, 92*(5), 448.

Stephens, L. J. and Konvalina, J. (1999). The use of computer algebra software in teaching intermediate and college algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(4), 483-488.

Strauss, A. L. (1987). *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge: Cambridge University Press.

Swidan, O. (2013). *Perceiving calculus ideas in a dynamic and multi-semiotic environment-The case of the antiderivative*. Paper presented at CERME 8, Manavgat-Side, Antalya, Turkey.

Swinyard, C. and Lockwood, E. (2007). *Research on students' reasoning about the formal definition of limit: An evolving conceptual analysis*. Retrieved October 13, 2012 from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.583.7246&rep=rep1&type=pdf

Szydlik. J. (2000). Mathematics beliefs and conceptual understanding of limit of function. *Journal Research in Mathematics Education, 31*(3), 258-276.

Tall, D. O. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.495-511). New York: Macmillian Publishing Company.

Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 29-32.

Tall, D. and Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Tangül, K., Barak, B. ve Özdaş, A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 5*(1), 88-114.

Tatar, E., Okur, M. ve Tuna, A. (2008). Ortaöğretim matematiğinde öğrenme güçlüklerinin saptanmasına yönelik bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 16*(2), 507-516.

Thompson, P. W. and Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. *Research and Teaching in Undergraduate Mathematics, 73*, 43-52.

Todorov, T. D. (2001). Back to classics: Teaching limits through infinitesimals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(1), 1-20.

Tuluk, G. ve Kaçar, A. (2007). Bilgisayar cebiri sistemlerinin (BCS) fonksiyon kavramının öğretiminde etkisi. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi, 15*(2), 661-674.

Tuna, A. (2011). Trigonometri öğretiminde 5E öğrenme döngüsü modelinin öğrencilerin matematiksel düşünme ve akademik başarılarına etkisi. Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Turan, S. B. ve Erdoğan, A. (2016). Matematik öğretmen adaylarının “süreklilik” ile ilgili kavramsal yapıları. *Journal of Research in Education and Teaching, 5*(3), 19.

Ubuz, B. (1999a). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,16*(17), 95-104.

Ubuz, B. (1999b). Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları. *Matematik Dünyası, 5*, 9-11.

Ubuz, B. (2002). Development of calculus concepts through a computer based learning environment. *Teaching of Mathematics, 1*, 1-10.

Ubuz, B. (2004). Figural and conceptual aspects in defining and identifying polygons. *Eurasian Journal of Educational Research,16*, 15-26.

Ubuz, B., Üstün, I. and Erbaş, K. (2009). Effect of dynamic geometry environment on ımmediate and retention level achievements of seventh grade students. *Eurasian Journal of Educational Research, 35*, 147-164.

Uyhan, S. (2002). İlginç limit problemleri. *Matematik Dünyası, 2*, 15-15.

Ünal, E. ve Köksal, K. (2007). Okuduğunu anlama ve sorular. *Üniversite ve Toplum/Bilim, Eğitim ve Düşünce Dergisi, 7*(4), 1-13.

Van Eck, R. and Dempsey, J. (2002). The effect of competition and contextualized advisement on the transfer of mathematics skills a computer-based instructional simulation game. *Educational Technology Research and Development, 50*(3), 23-41.

Vallecillos, A. and Moreno, A. (2002). Framework for instruction and assessment on elementary inferential statistics thinking. *Teaching of Mathematics,7*, 1-6.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Boston: Kluwer.

Vlachos, P. and Kehagias, A. (2000). A computer algebra system and a new approach for teaching business calculus. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 7*(2), 87.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental process.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Watson, J. M. and Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 11-50.

Wiest, L. R. (2001). The role of computers in mathematics teaching and learning. *Computers in the Schools, 17*(1-2), 41-55.

Williams, S. (1989). Understanding of the limit concept in college calculus students. Doctoral dissertation, The University of Wisconsin, Madison.

Williams, S. (1990). The understanding of limit: Three perspectives. In G. Booker, P. Cobb and T. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Meeting of the PME* (pp. 101-108). Mexico: Collected Works.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 219-236.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 343-367.

Wongyai, P. and Kamol, N. (2004). *A framework in characterizing lower secondary school students' algebraic thinking*. Retrieved December 23, 2012 from http://www.icme-organisers.dk/tsg09/

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yükseköğretim Kurulu [YÖK]. (2006). *Eğitim fakülteleri öğretmen yetiştirme programlarının yeniden düzenlenmesi raporu.* 17 Ekim 2010 tarihinde http://www.yok.gov.tr/egitim/ogretmen/ortaogretim_alan.pdf adresinden erişilmiştir.

Yungui, L. and Guofan, Z. (1995). A new approach to structural system reliability. *Journal of Civil Engineeing, 26*(5), 70-75.

Xistouri, X. (2007, February). *Students' ability in solving line symmetry tasks.* Paper presented at Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, University of Cyprus, Cyprus.

Zaskıs, R. and Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(4), 429.

Zaslavsky, O. and Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

8. EKLER

Ek 1. Çalışma Yaprakları

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 2

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun x=1 için alacağı değeri bulunuz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonun x=1'e küçük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü ve bu menüdeki "left"i kullanınız.)

4) Derive programı yardımıyla 3. adımda küçük değerler ile yaklaşarak bulduğunuz değer gibi şimdi de x=1'e büyük değerlerden yaklaşırken f(x) fonksiyonun alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü ve bu menüdeki "right"i kullanınız.)

5) Şimdi de aynı fonksiyon için x=1'e iki taraftan da yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

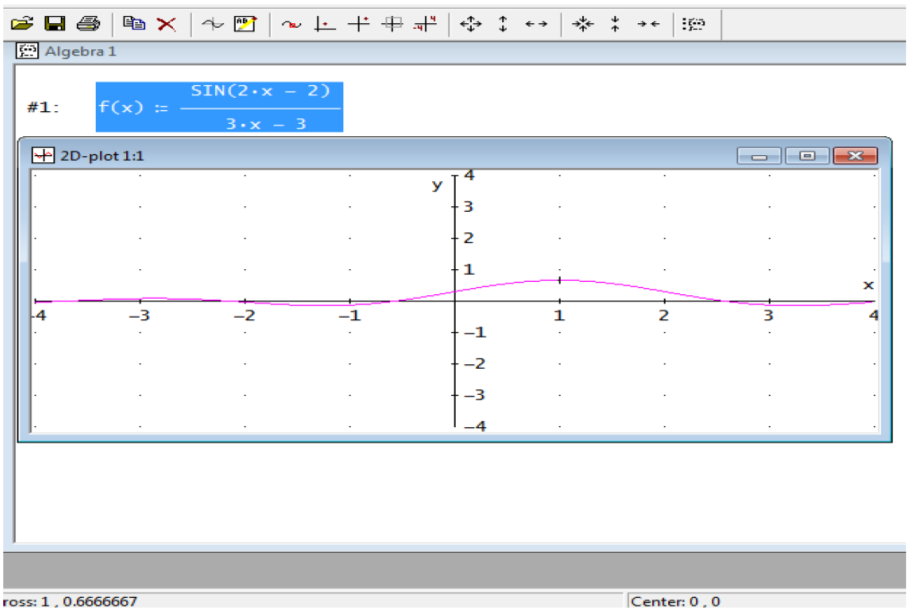
f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki değeri	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına yaklaşırken aldığı limit değeri**

6) Bu etkinliği tamamlayarak "limit" konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi düşünüyorsunuz?

Ek 1'in devamı

7) Küçük ve büyük değerlerle yaklaşmaya çalıştığınız x=1 noktası aynı olduğu halde yaklaşırken alınan değerler ile x=1 noktasında alınan değerin arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız.

8) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



9) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak yukarıdaki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız.

Ek 1'in devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 3

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonda x neredeyse -∞'a yaklaştığında karşılaştığınız durumu belirtiniz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonu için x'in -∞'a büyük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x \to -\infty^+} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü kullanınız.)

4) Şimdi de aynı fonksiyon için x'in −∞'a yaklaşırken alacak olduğu, x'in -∞'a büyük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu ve x'in -∞'un çok yakınlarında (-∞'un ε-komşuluğunda) gezinirken alacak olduğu değerleri dikkate alarak $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

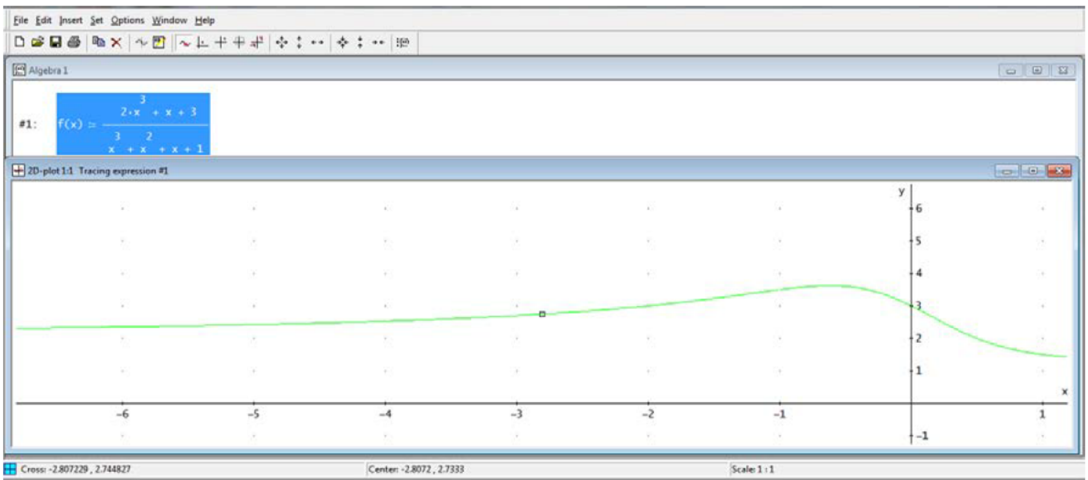
f(x) fonksiyonu için x'in -∞'a yaklaşırken alacağı değer	**f(x) fonksiyonunun x'in -∞'a büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değeri**	**f(x) fonksiyonunun x, -∞'un ε-komşuluğunda dolaşırken aldığı limit değeri**

5) Bu etkinliği tamamlayarak "limit" konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi düşünüyorsunuz?

6) Yaklaşmaya çalıştığınız -∞ değeri aynı olduğu halde, x, -∞'a yaklaşırken alınan değeri fonksiyonda x'in -∞ için (ε-komşuluğunda) limit değeri ile kıyaslayınız. Fonksiyonda karşılaştığınız durumu ifade etmeye çalışınız.

Ek 1'in devamı

7) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



8) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak yukarıdaki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız.

9) 2. adımda çalışmalarınızı gözden geçirirken x=-1 noktasını dikkate alarak fonksiyonun bu noktadaki değerini ve x= -1'e yaklaşırken alacak olduğu limit değerini çizmiş olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

Ek 1'in devamı

ÇALIŞMA YAPRAĞI – 5

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) := x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonda x, neredeyse ∞'a yaklaştığında karşılaştığınız durumu belirtiniz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonu için x'in ∞'a küçük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü kullanınız.)

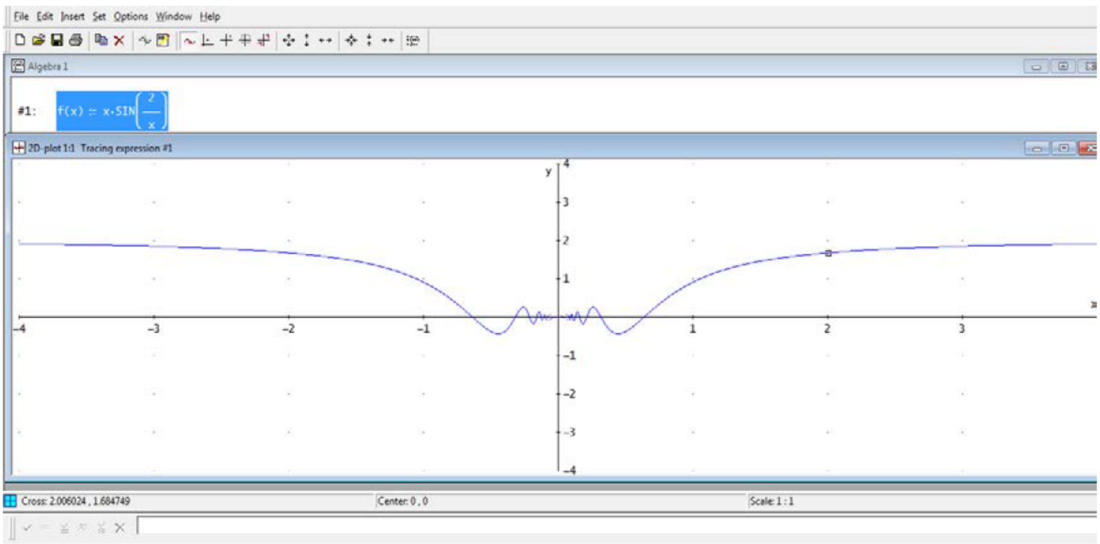
4) Şimdi de aynı fonksiyonun için x'in ∞'a küçük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu değer ile x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değeri dikkate alarak $\lim_{x\to\infty} x.sin\frac{2}{x}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonu için x'in ∞'a yaklaşırken alacak olduğu değer	**f(x) fonksiyonunun x, ∞'a küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x, ∞'a yaklaşırken aldığı limit değeri**

5) Yaklaşmaya çalıştığınız ∞ değeri aynı olduğu halde x, ∞'a yaklaşırken alınan değer ile x'in ∞ için limiti düşünüldüğünde alınan değerler arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız. Bunu yaparken limit konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi de sorgulayınız.

Ek 1'in devamı

6) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



7) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak yukarıdaki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu doğrulamayı yaparken x'in ∞'a yaklaştığı düşünüldüğünde bu fonksiyonun alacak olduğu değeri ve x, ∞'a yaklaşırken alacak olduğu limit değerini çizmiş olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

Ek 1'in devamı

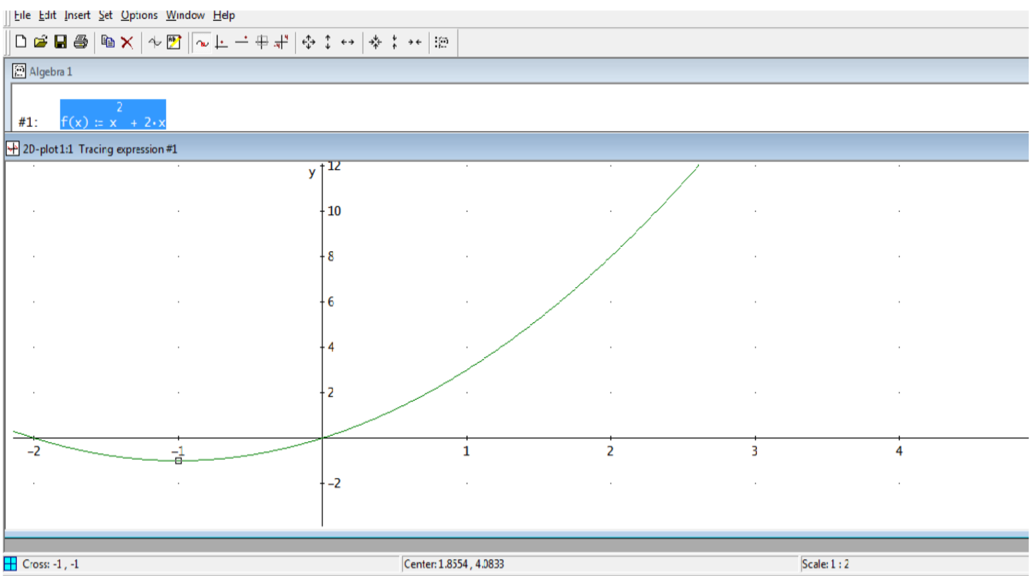
ÇALIŞMA YAPRAĞI – 7

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f: [-1, 2] \rightarrow R, f(x) := x^2 + 2x$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun tanım kümesindeki değerlerini de dikkate alarak bu fonksiyonun f(x)=0 çözümünü bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bir önceki adımda bulmuş olduğunuz değerlerden hangisinin tanım kümesi aralığında kaldığını bularak fonksiyonun x eksenini kesip kesmediğini belirlemeye çalışınız. Bu fonksiyonun bu aralıktaki sürekliliğini inceleyerek nedeni ile açıklamaya çalışınız.

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak 1. adımda tanımlamış olduğunuz $f(x) := x^2 + 2x$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek 1., 2. ve 3. adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca fonksiyonun tanım kümesi dışında başka aralıklardaki sürekliliğini de bu grafik yardımıyla incelemeye çalışınız.

6) Bu etkinliği tamamlayarak "süreklilik" konusu ile ilgili ne öğrenmiş oldunuz?

Ek 1'in devamı

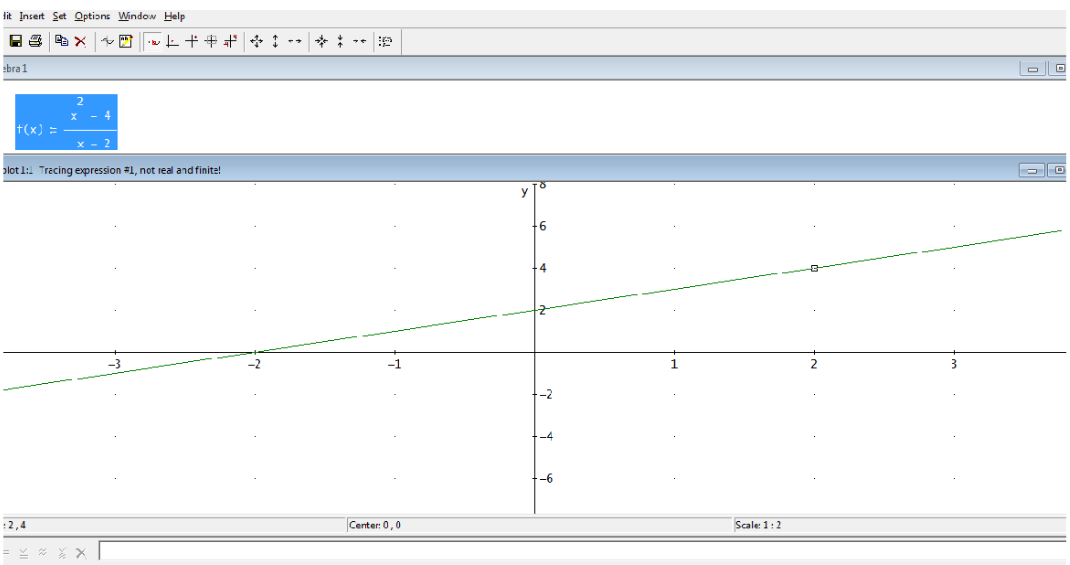
ÇALIŞMA YAPRAĞI – 8

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonu x=2 noktasında inceleyiniz? Bundan önceki çalışma yapraklarını da dikkate alarak nasıl bir durumla karşılaştığınızı açıklamaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bu fonksiyonun sürekliliğini açıklamaya çalışınız. Bu işlemi yaparken x=2 noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde x=2 noktasının durumuna göre fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

6) Bu etkinliği tamamlamak size "süreklilik" konusu ile ilgili nasıl bir bilgi edinmenize yardımcı oldu?

Ek 1'in devamı

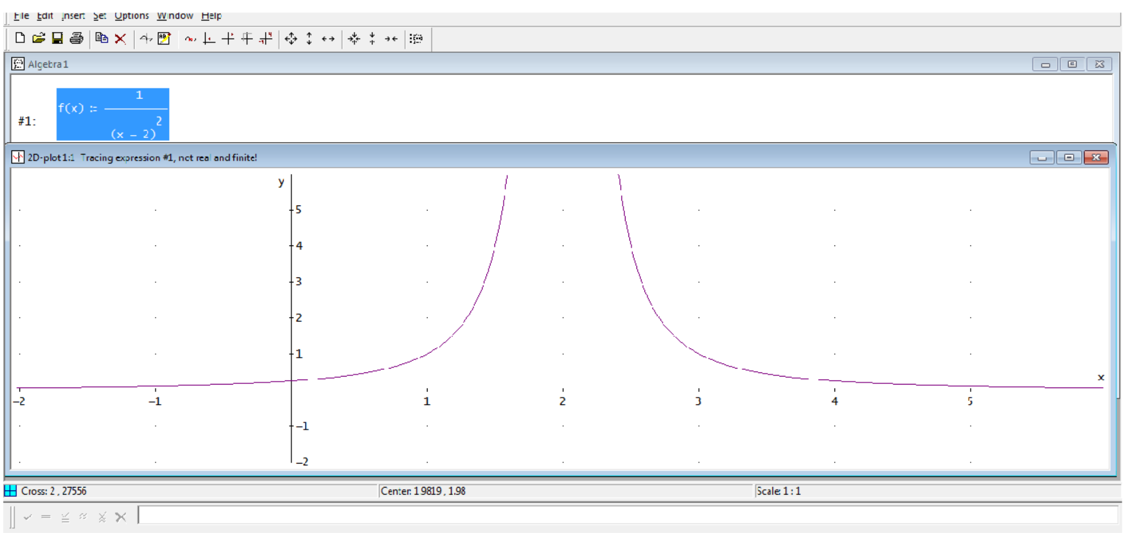
ÇALIŞMA YAPRAĞI – 10

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında alacak olduğu değeri inceleyiniz? (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Şimdi tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz. Bu işlemi yaparken $x = 2$ noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

4) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü  'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde $x = 2$ noktasının durumunu da dikkate alarak fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

6) Bu etkinliği tamamlamak "süreklilik" konusu ile ilgili hangi bilginize ulaşmanıza yardımcı oldu?

Ek 2. Çalışma Yapraklarının Öğretmen Kılavuzu

2. Limitte belirsizlik durumları ($\frac{0}{0}$ $belirsizliği$):

(Çalışma Yaprağı – 2)

ÇALIŞMA YAPRAGI – 2

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun x=1 için alacağı değeri bulunuz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonun x=1'e küçük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1-} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü ve bu menüdeki "left"i kullanınız.)

4) Derive programı yardımıyla 3. adımda küçük değerler ile yaklaşarak bulduğunuz değer gibi şimdi de x=1'e büyük değerlerden yaklaşırken f(x) fonksiyonun alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1+} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü ve bu menüdeki "right"i kullanınız.)

5) Şimdi de aynı fonksiyon için x=1'e iki taraftan da yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$) değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki değeri	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına yaklaşırken aldığı limit değeri

6) Bu etkinliği tamamlayarak "limit" konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi düşünüyorsunuz?

Hedef Kazanımlar

-Fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsünü birbirinden ayırt eder

- Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur

-Fonksiyon grafiğini inceler

Stratejik Hedefler

- Trigonometrik fonksiyonların limitini grafik üzerinde açıklar ve uygulamalar yapar

-Verilen noktada $\frac{0}{0}$ belirsizlik durumunu açıklar ve fonksiyonun limitini hesaplar

Verilen süre: 80 dk.

Bu çalışma yaprağında öğrencilere belirlenen bilişsel faaliyetler doğrultusunda yönergeler verilmiştir. Bu yönergeler meslek yüksekokulu öğrencileri için dikkat çekici olacağı düşünülen bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programı yardımı ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır.

1) "Derive" programında fonksiyon tanımlamayı öğrenen öğrencilerden bu aşamada verilen $f(x) := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunu tanımlamaları beklenir.
2) Bu yönergede öğrenciden 1. yönergede tanımladığı fonksiyonun x=1 için alacağı değeri bulması istenerek kafasında ($\frac{0}{0}$) nedir diye soru işaretlerinin oluşması sağlanır. Ayrıca bulduğu sonucun doğru olup olmadığını kontrol edebilmesi için bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programını kullanıp öğrencinin kendinden emin olması beklenir.

Ek 2'nin devamı

3) Bu aşamada öğrenciden $(\frac{0}{0})$ belirsizliğine rağmen verilen fonksiyona küçük değerlerden yaklaşırken alacağı limit değerinin $\frac{2}{3}$ olduğunu görmeleri beklenir. Yani öğrenciden $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3}=\frac{2}{3}$ olduğunu bulmaları beklenir.
4) Bu aşamada ise öğrenciden $(\frac{0}{0})$ belirsizliğine rağmen verilen fonksiyona büyük değerlerden yaklaşırken alacağı limit değerinin $\frac{2}{3}$ olduğunu görmeleri beklenir. Yani öğrenciden $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(2x-2)}{3x-3}=\frac{2}{3}$ olduğunu bulmaları beklenir.
5) Öğrenciden bu aşamada 3. ve 4. aşamada bulmuş olduğu iki sonucun da aynı olduğunu görmesi ve bu fonksiyona her iki taraftan yaklaşırken fonksiyonun alacak olduğu değerin limit değeri olduğunu söylemesi beklenir.
   Ayrıca yine burada dolduracak oldukları tablo yardımıyla öğrencilerin kıyaslama yapması kolaylaştırılmış olup tabloyu aşağıdaki gibi doldurmaları beklenir:

f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki değeri	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x=1 noktasına yaklaşırken aldığı limit değeri**
$\frac{sin0}{0}=\frac{0}{0}\ belirsizliği$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

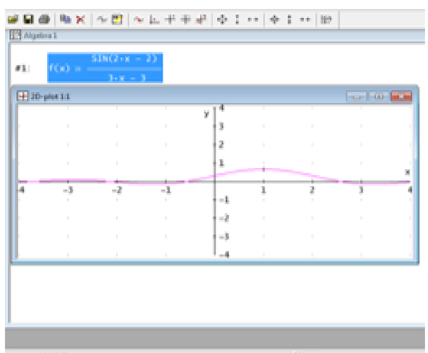
6) Öğrenciden bu aşamada bu fonksiyonun x=1 noktasında tanımlı olmasa bile limit değerinin var olup bu değerin $\frac{2}{3}$ olduğunu söylemesi beklenir. Buradaki amaç x=1 noktasına çok yaklaştığında fakat x=1 noktasından değişik olduğunda, f(x) fonksiyonunun $\frac{2}{3}$ değerine çok yaklaştığını çalışma yaprağını kullanan öğrencinin de görmesidir. Böylece "x, a gibi bir değere yakınsarken f(x)'in limiti b'dir" tanımı yapıldığında öğrenciden "x, a'ya giderken" demenin "x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demekle aynı anlama geldiğini fark etmesi beklenir.
   Ayrıca bunun nedenini öğrenci; "*f fonksiyonu a'da tanımlı (olabilir de olmayabilir de), yani a sayısı f'nin tanım kümesinde olmayabilir. Bunu uyguladığımız bu çalışma yaprağımızda görebilmekteyiz. Çünkü verilen fonksiyon a=1noktasında tanımlı değildir.*" şeklinde açıklayabilmeli. Böylece öğrenci limit konusundaki belirsizlik durumlarından $\frac{0}{0}$ belirsizliği hakkında bilgi sahibi olur.
7) x=1 değeri değişmediği halde bu noktaya küçük veya büyük değerlerle yaklaşırken bulunan sonucun aynı olması öğrenciye limitin tanımını hatırlatmalı. Çünkü bir

Ek 2’nin devamı

noktada limitinin var olması için x=1 noktasının tanım kümesinde bulunan bir yoğunlaşma noktası olması yeterlidir. ***(hatırlatma****(yoğunlaşma* noktası): $f: A \rightarrow R$ *fonksiyonunda bir a∈A’nın bir yoğunlaşma noktası olması için gerek ve yeter koşul, A’da a’ya yakınsayan ve terimleri birbirinden farklı olan bir dizinin bulunmasıdır.)* Verilen fonksiyon için de aynı şey geçerlidir. Çünkü her ne kadar fonksiyon x=1’de tanımlı değilse de, öğrenci x, 1’e giderken fonksiyonun limitini arayabilmeli ve bu değerin $\frac{2}{3}$ olduğunu bulabilmelidir.

7) Küçük ve büyük değerlerle yaklaşmaya çalıştığınız x=1 noktası aynı olduğu halde yaklaşırken alınan değerler ile x=1 noktasında alınan değerin arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız.

8) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü , 'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) = \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



9) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak yukarıdaki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız.

8) Bu aşamada öğrencilerin Derive programını aktif kullanmalarını ve önceki adımlarda verilen fonksiyonu daha iyi anlamlandırmalarını sağlamak amacıyla öğrencilerden bu fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Ayrıca öğrenciler çizim yaptıktan sonra çizimlerini kontrol edebilmeleri için çalışma yaprağına bu fonksiyonun Derive’deki grafik çizimi eklenmiştir.

9) Bu aşamada ise öğrencilerden bir önceki aşamada çizmiş oldukları grafiği yorumlamaları beklenir. Özellikle çizmiş oldukları $f(x) := \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ fonksiyonunun grafiğinde x=1 noktasında grafiğin alacak olduğu değerin grafik üzerinde boşluk olduğunu görmeleri beklenir. Öğrencilerden bu boşluğun fonksiyonu tanımsız yapan noktada olduğunu farkına varmaları beklenir. Bu süreçte grafiği inceleyen öğrencilerin bu noktanın komşuluğunda yani çok yakın değerlerinde (x=1 noktasına küçük ve büyük değerlerle yaklaşırken) alacak olduğu değerin $\frac{2}{3} = 0.666$ olduğunu görmelerine yardımcı olunur. Bunu sağlayabilmek için öğretmen öğrencilerden $y = \frac{2}{3}$ doğrusunu çizmelerini isteyebilir. Böylece öğrencilerin fonksiyonun x=1 noktasına yaklaştıkça alacak olduğu değerin yani limit değerinin $y = \frac{2}{3}$ doğrusu ile kesiştiğini görmeleri sağlanabilir.

Ek 2'nin devamı

3. Limitte belirsizlik durumları ($\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliği*):

(Çalışma Yaprağı – 3)

ÇALIŞMA YAPRAGI – 3

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonda x neredeyse -∞'a yaklaştığında karşılaştığınız durumu belirtiniz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonu için x'in -∞'a büyük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x \to -\infty^+} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü kullanınız.)

4) Şimdi de aynı fonksiyon için x'in −∞'a yaklaşırken alacak olduğu, x'in -∞'a büyük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu ve x'in -∞'un çok yakınlarında (-∞'un ε-komşuluğunda) gezinirken alacak olduğu değerleri dikkate alarak $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ değerını bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdakı tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonu için x'in -∞'a yaklaşırken alacağı değer	f(x) fonksiyonunun x'in -∞'a büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değeri	f(x) fonksiyonunun x, -∞'un ε-komşuluğunda dolaşırken aldığı limit değeri

5) Bu etkinliği tamamlayarak "limit" konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi düşünüyorsunuz?

6) Yaklaşmaya çalıştığınız -∞ değeri aynı olduğu halde, x, -∞'a yaklaşırken alınan değeri fonksiyonda x'in -∞ için (ε-komşuluğunda) limit değeri ile kıyaslayınız. Fonksiyonda karşılaştığınız durumu ifade etmeye çalışınız.

Hedef Kazanımlar

- Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur

-Fonksiyon grafiğini inceler

Stratejik Hedefler

- Gerçek değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit değerini grafik üzerinde açıklar ve uygulamalar yapar

-Verilen noktada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumunu açıklar ve fonksiyonun limitini hesaplar

Verilen süre: 80 dk.

Bu çalışma yaprağında öğrencilere belirlenen bilişsel faaliyetler doğrultusunda yönergeler verilmiştir. Bu yönergeler meslek yüksekokulu öğrencileri için dikkat çekici olacağı düşünülen bilgisayar cebiri sistemlerinden "Derive" programı yardımı ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır.

1) "Derive" programında fonksiyon tanımlamayı öğrenen öğrencilerden bu aşamada verilen $f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunu tanımlamaları beklenir.
2) Bu yönergede öğrenciden 1. yönergede tanımladığı fonksiyonun x'in −∞'a çok yakın olduğunda yani x, −∞'a yaklaştığında karşılaşacağı durumu bulması istenir. Bu durum incelenirken öğrencinin kafasında ($\frac{\infty}{\infty}$) ne olabilir diye soru işaretlerinin oluşması sağlanır. Ayrıca bulduğu sonucun doğru olup olmadığını kontrol edebilmesi için bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programını kullanıp öğrencinin kendinden emin olması beklenir.

Ek 2'nin devamı

3) Verilen fonksiyonda x, $-\infty$'a yaklaşacağından öğrenci $-\infty$'a sayı doğrusunun sağ tarafından yaklaşılması gerektiğini görebilmeli. Bu bağlamda öğrenci $-\infty$'a büyük değerlerden yaklaşırken $(\frac{\infty}{\infty})$ belirsizliğine rağmen fonksiyonun alacağı limit değerinin 2 olduğunu bulabilmelidir. Yani öğrenciden $\lim_{x\to-\infty^+}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}=2$ olduğunu bulmaları beklenir.

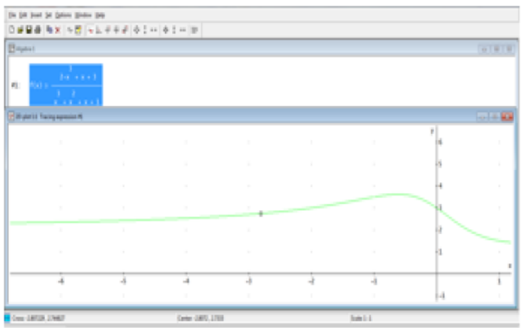
4) Öğrenciden bu aşamada 2. ve 3. aşamada bulmuş olduğu iki sonucu da değerlendirmesi beklenir. Böylece öğrenci $-\infty$'un ε-komşuluğunda yani x,$-\infty$'a giderken fonksiyonun alacak olduğu değerin limit değeri olduğunu görebilmelidir. Yine bu aşamada dolduracak olduğu tablo yardımıyla öğrencinin kıyaslama yapması kolaylaştırılmış olup tabloyu aşağıdaki gibi doldurması beklenir:

f(x) fonksiyonu için x'in -∞'a yaklaşırken alacağı değer	**f(x) fonksiyonunun x'in -∞'a büyük değerlerle yaklaşırken aldığı değeri**	**f(x) fonksiyonunun x, -∞'un ε-komşuluğunda dolaşırken aldığı limit değeri**
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to-\infty^+}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}=2$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}=2$

5) ve 6) Öğrenciden bu aşamada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumunu farkına varıp bu belirsizlik durumunda limitin hesaplanabileceğini görmesi beklenir. Öğrenci bu durumda x'i, ∞'a çok yaklaştırdığında (∞'un ε-komşuluğunda) fonksiyon ∞'da tanımlı olmasa bile fonksiyonun limit değerinin var olup bu değerin 2 olduğunu söyleyebilmelidir. Buradaki amaç verilen bir noktada $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaşıldığında öğrencinin limit bilgilerini kullanarak bu belirsizliği ortadan kaldırıp fonksiyonun limitini bulabilmesidir. Böylece "x, a gibi bir değere yakınsarken f(x)'in limiti b'dir" tanımı yapıldığında öğrenci "x, a'ya giderken" demenin "x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demekle aynı anlama geldiğini fark edebilecektir.

Ek 2'nin devamı

7) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü 'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) = \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



8) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak yukarıdaki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız.

9) 2. adımda çalışmalarınızı gözden geçirirken x=-1 noktasını dikkate alarak fonksiyonun bu noktadaki değerini ve x= -1'e yaklaşırken alacak olduğu limit değerini çizmiş olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

7) Bu aşamada öğrencilerin Derive programını aktif kullanmalarını ve önceki adımlarda verilen fonksiyonu daha iyi anlamlandırmalarını sağlamak amacıyla öğrencilerden bu fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Ayrıca öğrenciler çizim yaptıktan sonra çizimlerini kontrol edebilmeleri için çalışma yaprağına bu fonksiyonun Derive'deki grafik çizimi eklenmiştir.

8) Bu aşamada ise öğrencilerden önceki adımlarda bulmuş oldukları sonuçları grafik yardımıyla yorumlayıp sorulan soruları yeniden analiz etmeleri beklenir.

9) Bu aşamada ise öğrenciden bir önceki aşamada çizmiş olduğu grafiği dikkatli bir şekilde inceleyerek özellikle $f(x) := \frac{2x^3+x+3}{x^3+x^2+x+1}$ fonksiyonunun x=−1 noktasında alacak olduğu değerin grafik üzerinde boşluk olduğunu görmesi beklenir. Öğrenciden bu boşluğun fonksiyonu tanımsız yapan noktada olduğunu farkına varması beklenir. Bu süreçte grafiği inceleyen öğrenciye bu noktanın komşuluğunda yani çok yakın değerlerinde (x=−1 noktasına küçük ve büyük değerlerle yaklaşırken) alacak olduğu değerin $\frac{7}{2} = 3.5$ olduğunu görmesinde yardımcı olunur. Bunu sağlayabilmek için öğretmen öğrenciden $y = \frac{7}{2}$ doğrusunu çizmelerini isteyebilir. Böylece öğrencinin fonksiyonun x=−1 noktasına yaklaştıkça alacak olduğu değerin yani limit değerinin $y = \frac{7}{2}$ doğrusu ile kesiştiğini görmesi sağlanabilir.

Ek 2'nin devamı

5. Limitte belirsizlik durumları ($0.\infty$ *belirsizliği*):

(Çalışma Yaprağı – 5)

ÇALIŞMA YAPRAGI – 5

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) = x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonda x, neredeyse ∞'a yaklaştığında karşılaştığınız durumu belirtiniz. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Tanımlamış olduğunuz f(x) fonksiyonu için x'in ∞'a küçük değerler ile yaklaşırken alacak olduğu değeri yani ($\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x}$) bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının "Find Limit" menüsünü kullanınız.)

4) Şimdi de aynı fonksiyonun için x'in ∞'a küçük değerlerden yaklaşırken alacak olduğu değer ile x'in ∞ olduğu düşünüldüğünde alacak olduğu değeri dikkate alarak $\lim_{x\to\infty} x.sin\frac{2}{x}$ değerini bulmaya çalışınız. Ayrıca aşağıdaki tabloyu doldurup bulmuş olduğunuz değerleri birbiri ile kıyaslayarak nedenini açıklamaya çalışınız.

f(x) fonksiyonu için x'in ∞'a yaklaşırken alacak olduğu değer	f(x) fonksiyonunun x, ∞'a küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer	f(x) fonksiyonunun x, ∞'a yaklaşırken aldığı limit değeri

5) Yaklaşmaya çalıştığınız ∞ değeri aynı olduğu halde x, ∞'a yaklaşırken alınan değer ile x'in ∞ için limiti düşünüldüğünde alınan değerler arasındaki farkın ne olduğunu ifade etmeye çalışınız. Bunu yaparken limit konusu ile ilgili yeni ne öğrendiğinizi de sorgulayınız.

Hedef Kazanımlar

- Fonksiyonun belirsizlik durumlarında limit değerini bulur

-Fonksiyon grafiğini inceler

Stratejik Hedefler

- Trigonometrik fonksiyonların limitini grafik üzerinde açıklar ve uygulamalar yapar

-Verilen noktada $0.\infty$ belirsizlik durumunu açıklar ve fonksiyonun limitini hesaplar

Verilen süre: 80 dk.

Bu çalışma yaprağında öğrencilere belirlenen bilişsel faaliyetler doğrultusunda yönergeler verilmiştir. Bu yönergeler meslek yüksekokulu öğrencileri için dikkat çekici olacağı düşünülen bilgisayar cebiri sistemlerinden "Derive" programı yardımı ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır.

1) "Derive" programında fonksiyon tanımlamayı öğrenen öğrencilerden bu aşamada verilen $f(x) := x.sin\frac{2}{x}$ fonksiyonunu tanımlamaları beklenir.
2) Bu yönergede öğrenciden 1. yönergede tanımladığı fonksiyonun x, ∞'a çok yakın olduğunda yani x, neredeyse ∞'a yaklaştığı düşünüldüğünde öğrencinin karşılaşacağı durumu bulması istenir. Bu durum incelenirken öğrencinin kafasında ($\infty \cdot 0$) ne olabilir diye soru işaretlerinin oluşması sağlanır. Ayrıca bulduğu sonucun doğru olup olmadığını kontrol edebilmesi için bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programını kullanıp öğrencinin kendinden emin olması beklenir.

Ek 2'nin devamı

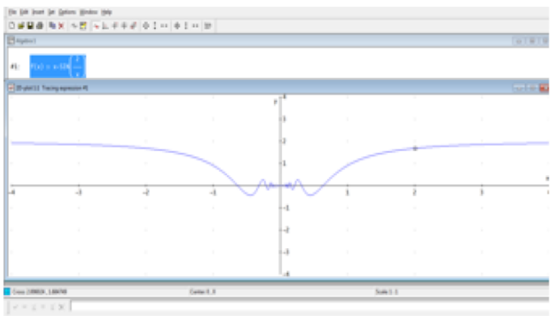
3) Verilen fonksiyonda x, +∞'a yaklaşacağından öğrenci +∞'a sayı doğrusunun sol tarafından yaklaşılması gerektiğini görebilmeli. Bu bağlamda öğrenci +∞'a küçük değerlerden yaklaşırken $(0.\infty)$ belirsizliğine rağmen fonksiyonun alacağı limit değerinin 2 olduğunu bulabilmelidir. Yani öğrenciden $\lim_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x} = 2$ olduğunu bulmaları beklenir.
4) Öğrenciden bu aşamada 2. ve 3. aşamada bulmuş olduğu iki sonucu da değerlendirmesi beklenir. Böylece öğrenci ∞'un ε-komşuluğunda yani x, ∞'a giderken fonksiyonun alacak olduğu değerin limit değeri olduğunu görebilmelidir. Yine bu aşamada dolduracak olduğu tablo yardımıyla öğrencinin kıyaslama yapması kolaylaştırılmış olup tabloyu aşağıdaki gibi doldurması beklenir:

f(x) fonksiyonu için x'in ∞'a yaklaşırken alacak olduğu değer	**f(x) fonksiyonunun x, ∞'a küçük değerlerle yaklaşırken aldığı değer**	**f(x) fonksiyonunun x, ∞'a yaklaşırken aldığı limit değeri**
0·∞	$\lim\limits_{x\to\infty^-} x.sin\frac{2}{x} = 2$	$\lim\limits_{x\to\infty} x.sin\frac{2}{x} = 2$

5) Öğrenciden bu aşamada $0.\infty$ belirsizlik durumunu farkına varıp bu belirsizlik durumunda limitin hesaplanabileceğini görmesi beklenir. Öğrenci bu durumda x'i, ∞'a çok yaklaştırdığında (∞'un ε-komşuluğunda) fonksiyon tam ∞'da tanımlı olmasa bile fonksiyonun limit değerinin var olup bu değerin 2 olduğunu söyleyebilmelidir. Buradaki amaç verilen bir noktada $0.\infty$ belirsizliği ile karşılaşıldığında öğrencinin limit bilgilerini kullanarak bu belirsizliği ortadan kaldırıp fonksiyonun limitini bulabilmesidir. Böylece "x, a gibi bir değere yakınsarken f(x)'in limiti b'dir" tanımı yapıldığında öğrenci "x, a'ya giderken" demenin "x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demekle aynı anlama geldiğini fark edebilecektir.
6) Bu aşamada öğrencilerin Derive programını aktif kullanmalarını ve verilen fonksiyonu daha iyi anlamlandırmalarını sağlamak amacıyla öğrencilerden bu fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Ayrıca öğrenciler çizim yaptıktan sonra çizimlerini kontrol edebilmeleri için çalışma yaprağına bu fonksiyonun Derive'deki grafik çizimi eklenmiştir.

Ek 2’nin devamı

6) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü , 'nü kullanarak yukarıda tanımlamış olduğunuz $f(x) := x.sin\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



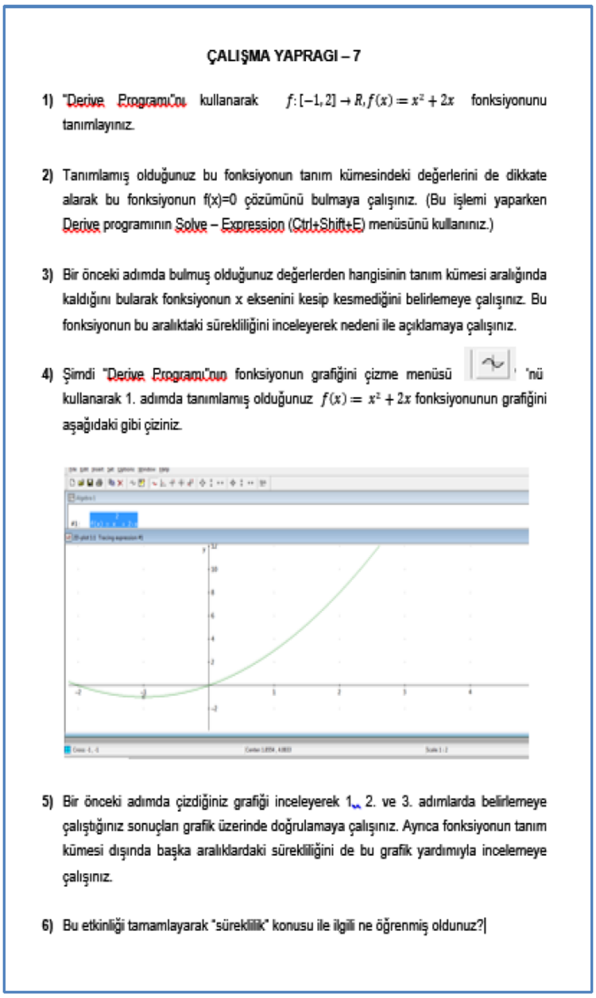
7) Çizmiş olduğunuz bu grafiği kullanarak yukarıdaki adımlarınızı bu grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu doğrulamayı yaparken x'in ∞'a yaklaştığı düşünüldüğünde bu fonksiyonun alacak olduğu değeri ve x, ∞'a yaklaşırken alacak olduğu limit değerini çizmiş olduğunuz grafik yardımıyla bulmaya çalışınız.

7) Bu aşamada ise öğrencilerden önceki adımlarda bulmuş oldukları sonuçları grafik yardımıyla yorumlayıp sorulan soruları yeniden analiz etmeleri beklenir. Bu bağlamda teorik olarak yaptığı çalışmaların pratikteki görünümü ile karşılaşan öğrencinin öğrenmesi için zemin hazırlanır.

Ek 2'nin devamı

7. Limit Ve Süreklilik (Süreklilik):

(Çalışma Yaprağı – 7)



ÇALIŞMA YAPRAGI – 7

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f:[-1,2]\rightarrow R, f(x)=x^2+2x$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun tanım kümesindeki değerlerini de dikkate alarak bu fonksiyonun f(x)=0 çözümünü bulmaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bir önceki adımda bulmuş olduğunuz değerlerden hangisinin tanım kümesi aralığında kaldığını bularak fonksiyonun x eksenini kesip kesmediğini belirlemeye çalışınız. Bu fonksiyonun bu aralıktaki sürekliliğini inceleyerek nedeni ile açıklamaya çalışınız.

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü 'nü kullanarak 1. adımda tanımlamış olduğunuz $f(x)=x^2+2x$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.

5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek 1., 2. ve 3. adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca fonksiyonun tanım kümesi dışında başka aralıklardaki sürekliliğini de bu grafik yardımıyla incelemeye çalışınız.

6) Bu etkinliği tamamlayarak "süreklilik" konusu ile ilgili ne öğrenmiş oldunuz?

Hedef Kazanımlar

-Fonksiyonun grafiğini inceler ve sürekli olduğu aralıkları bulur

- Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyler

- Limit ile süreklilik arasında ilişki kurar

Stratejik Hedefler

- Fonksiyonun verilen bir noktada sürekli ya da süreksiz olduğunu belirler grafik üzerinde açıklar

- Fonksiyonun bir aralıkta sürekliliğini grafik üzerinde açıklar

- Kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların özelliklerini belirtir ve grafik üzerinde açıklar

Verilen süre: 80 dk.

Bu çalışma yaprağında öğrencilere belirlenen bilişsel faaliyetler doğrultusunda yönergeler verilmiştir. Bu yönergeler meslek yüksekokulu öğrencileri için dikkat çekici olacağı düşünülen bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programı yardımı ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır.

1) "Derive" programında fonksiyon tanımlamayı öğrenen öğrencilerden bu aşamada verilen $f:[-1,2]\rightarrow R, f(x):=x^2+2x$ fonksiyonunu tanımlamaları beklenir.
2) Bu yönergede öğrenci 1. yönergede tanımladığı fonksiyonun f(x)=0 için çözüm kümesini bulmaya çalışır. Öğrenci bu süreçte x'in bulunması gereken tanım kümesini de dikkate alarak karşılaşacak olduğu çözüm kümesindeki 0 ve -2 değerlerinden -2 değerini almaması gerektiğini farkına varabilmelidir. Bu durum üzerine öğrencilerin

Ek 2’nin devamı

merak etmesi gereken konulardan biri neden tanım kümesini [-1,2] gibi sınırlı bir aralık aldık olmalıdır. Yine bu aşamada öğrenciden bilgisayar cebiri sistemlerinden “Derive” programı yardımıyla aşağıdaki gibi çözüm kümesini bulmaları istenir. Böylece öğrencilerin yaptıkları işlemlerden emin olması beklenir.

```
          2
#1:   f(x) := x  + 2·x

       2
#2:   x  + 2·x = 0

               2
#3:   SOLVE(x  + 2·x = 0, x, Real)

#4:                                                     x = -2 ∨ x = 0
```

3) Bu aşamada öğrenci bir önceki adımda bulmuş olduğu çözüm kümesini inceleyerek bu kümedeki değerlerden tanım kümesi aralığında kalan 0 değerini alabileceklerini belirtebilmelidir. Ayrıca öğrenci, fonksiyonu verilen tanım aralığında incelediğinde fonksiyonun bu aralıkta sürekli olduğunu görebilmelidir. Bu bağlamda öğrencinin kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonun şu özelliklerini hatırlayabilmesine yardımcı olunmalı:

   $f\colon [a,b] \to R \;\; fonksiyonu \; [a,b] kapalı \; aralığında \; sürekli \; bir \; fonksiyon \; ise;$

   i. “f” fonksiyonu sınırlıdır. Yani, $\forall x \in [a,b] için \, |f(x)| \leq k$ olacak şekilde bir k sayısı vardır.

   ii. $f([a,b]) = [m,M]$ olacak şekilde m ve M reel sayıları vardır. Burada $x \in [a,b] için$,f(x)’in en küçük (minimum) değeri m ve en büyük değeri (maksimum) değeri M’dir.

   iii. $f(a).f(b) < 0 \;\; ise \; f(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ vardır.

   Bu bilgileri hatırlayan öğrenci $f(-1).f(2) < 0$ (-8<0) olduğunu bulduktan sonra $f(x_0) = 0$ gerekliliğini bilir ve bu sayının $x_0 = 0$ olduğunu bulur. Böylece öğrenci f fonksiyonu x eksenini x=0’da keser ve $0 \in [-1{,}2]'dır$ sonucuna ulaşabilmeli.

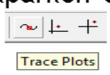
4) Bu aşamada ise öğrencilerin Derive programını aktif kullanmalarını ve önceki aşamalarda bulmuş oldukları sonuçların doğru olup olmadığını kontrol edip çalışmalarının her bir aşamasını anlamlandırabilmek için öğrencilerden bu fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Ayrıca öğrenciler çizim yaptıktan sonra çizimlerini kontrol edebilmeler için çalışma yaprağına bu fonksiyonun Derive’deki grafik çizimi eklenmiştir.

5) Bu aşamada ise öğrenciden bir önceki aşamada çizmiş oldukları grafiği yorumlamaları beklenir. Ayrıca bu yorumlar doğrultusunda öğrencilerden $[-1,2]$ kapalı aralığında verilen bu fonksiyonun sürekli olduğunu görebilmeleri beklenir. Araştırmacı öğretmen bu aralıkta sürekli olan fonksiyonun başka hangi aralıklarda da sürekli olabileceğini öğrencilere sorarak öğrencilerin daha üst düzeyde düşünmelerini sağlayabilir. Bu süreçte öğrencilerin kapalı bir aralıktan reel sayılara $(f\colon [a,b] \to$

Ek 2'nin devamı

R) tanımlı ve kapalı aralıkta sürekli bu fonksiyonun grafiğini inceleyerek aynı özellikleri sağlayan [-2,2] aralığı gibi değişik aralıklar bulmaları beklenir.

6) Çalışma yaprağının bu son aşamasında ise öğrencilerin bu etkinlik ile hedeflenen bilişsel faaliyetlere ulaşıp ulaşılmadığını yoklamak amacıyla öğrencilere etkinlik tamamlandığında "süreklilik" konusu ile ilgili öğrenmiş olduklarının ne olduğu sorulmuştur. Bu bağlamda öğrencinin herhangi bir fonksiyon için belli bir aralıktaki sürekliliği inceleyebilmesi ve sınırlı bir fonksiyonu ifade edip kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların özelliklerini bu etkinliğin 3. aşamasında belirtildiği gibi açıklaması beklenir. Bu özellikleri hatırlayan öğrenci artık bu bilgilerini grafik üzerinde açıklayabilmelidir.

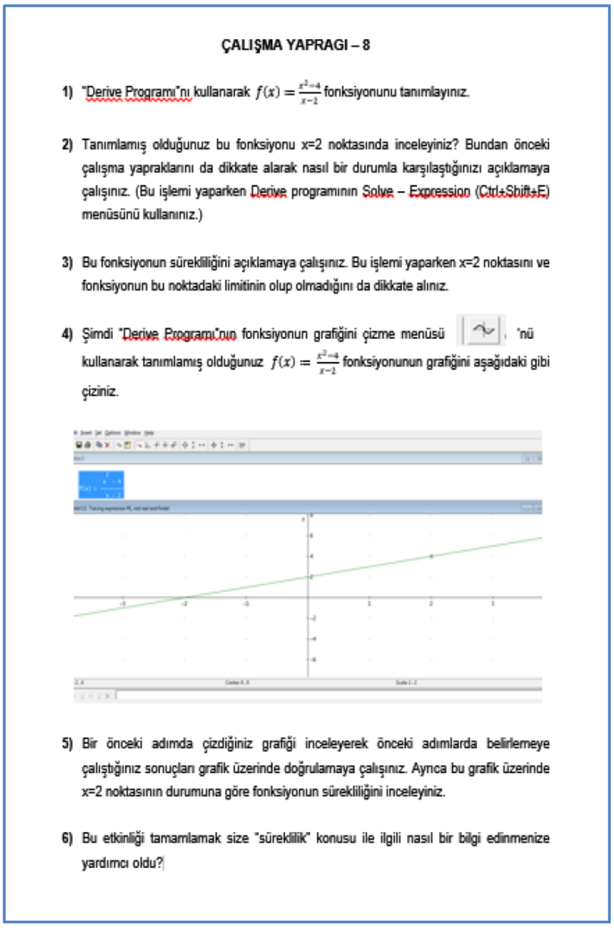
Bunu yaparken öğrenci "Derive" Programı'nın fonksiyon çizme menüsündeki (Trace Plots) 

fonksiyon sekmesi ile grafik üzerinde hareket edebilecek ve hatırlamış olduğu özellikleri daha da somut hale getirmiş olacaktır.

Ek 2'nin devamı

8. Limit Ve Süreklilik (Kaldırılabilir Süreksizlik):

(Çalışma Yaprağı – 8)



ÇALIŞMA YAPRAGI – 8

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonu x=2 noktasında inceleyiniz? Bundan önceki çalışma yapraklarını da dikkate alarak nasıl bir durumla karşılaştığınızı açıklamaya çalışınız. (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Bu fonksiyonun sürekliliğini açıklamaya çalışınız. Bu işlemi yaparken x=2 noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

4) Şimdi "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü 'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.

5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde x=2 noktasının durumuna göre fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

6) Bu etkinliği tamamlamak size "süreklilik" konusu ile ilgili nasıl bir bilgi edinmenize yardımcı oldu?

Hedef Kazanımlar

- Fonksiyonun grafiğini inceler ve sürekli olduğu aralıkları bulur
- Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyler
- Limit ile süreklilik arasında ilişki kurar

Stratejik Hedefler

- Fonksiyonun verilen bir noktada sürekli ya da süreksiz olduğunu belirler grafik üzerinde açıklar
- Süreksizlik çeşitlerini hatırlayarak "kaldırılabilir süreksizliği" ifade eder ve grafik üzerinde açıklar

Verilen süre: 80 dk.

Bu çalışma yaprağında öğrencilere belirlenen bilişsel faaliyetler doğrultusunda yönergeler verilmiştir. Bu yönergeler meslek yüksekokulu öğrencileri için dikkat çekici olacağı düşünülen bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programı yardımı ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır.

1) "Derive" programında fonksiyon tanımlamayı öğrenen öğrencilerden bu aşamada verilen, $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunu tanımlamaları beklenir.
2) Öğrenciden bu yönergede 1. yönergede tanımladığı fonksiyonu x=2 noktası için incelemesi istenir. Böylece öğrenci x=2 noktasında f(x) fonksiyonunu incelediğinde $f(2)=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ olduğunu görür ve bu fonksiyonun x=2 noktasında belirsiz olduğunu belirtir.

Ek 2'nin devamı

3) Bir önceki aşamada verilen fonksiyonun x=2 noktasında belirsizlik olduğunu gören öğrenci süreklilik konusunda biraz tereddüt etse de verilen fonksiyonun grafiğini Derive programı sayesinde incelediğinde yani grafik üzerinde hareket edip x=2 noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaştığında grafiğin aldığı değerin hep aynı ve 4 olduğunu farkına varır. Böylece x=2 noktasında limiti olduğunu farkına varan öğrenci bu noktada sürekliliğin olması için fonksiyonun bu noktada da tanımlı olması gerektiğini belirtir.
4) Öğrenci bu aşamada "Derive Programı"nı aktif kullanarak bundan önceki aşamalarda incelemeye çalıştığı fonksiyonun grafiğini görme fırsatına sahip olur. Böylece öğrenci önceki aşamalarda bulmuş olduğu sonuçların doğru olup olmadığını kontrol etmiş olacaktır. Ayrıca öğrencinin çizim yaptıktan sonra çizimlerini kontrol edebilmesi için çalışma yaprağına bu fonksiyonun Derive'deki grafik çizimi de bu aşamada eklenmiştir.
5) Bu aşamada ise öğrencinin bir önceki aşamada çizmiş olduğu grafiği yorumlaması beklenir. Yorumlar doğrultusunda araştırmacı öğretmen öğrencinin bu fonksiyonun grafiğinin x=2 noktası hariç diğer bütün noktalarda bir değerinin olduğu farkına varmasını bekler. Bu bağlamda öğrenci x=2 noktasında da bir değer olduğu takdirde bu fonksiyonun sürekli olabileceğini söyleyebilmelidir. Bu noktanın bu fonksiyon için bir süreksizlik noktası olduğunu bu aşmada öğrenci farkına varabilmelidir.
6) Çalışma yaprağının bu son aşamasında ise öğrencilerin bu etkinlik ile hedeflenen bilişsel faaliyetlere ulaşıp ulaşılmadığını yoklamak amacıyla öğrencilere etkinlik tamamlandığında "süreklilik" konusu ile ilgili öğrenmiş olduklarının ne olduğu sorulmuştur. Bu soruya yanıt olarak bir önceki aşamada süreksizlik noktasını farkına varan öğrenci tek bir noktada süreksizlik olduğunda bunun ***kaldırılabilir süreksizlik*** olduğunu belirtebilmelidir. Bu bağlamda öğrenci bu etkinlik sayesinde x=2 noktası gibi tek noktada tanımlı olmayan bu ve benzeri fonksiyonların sürekliliği ile ilgili şu bilgilerini hatırlayabilmelidir:

$$f: A \rightarrow R \ fonksiyonu \ için$$

$$a \in A \ olmak \ \text{üzere}, f(a) \ tanmlı, \lim_{x \to a} f(x) = L \ ve \ f(a) \neq L \ ise,$$

$$f \ fonksiyonunun \ x = a \ noktasında \ \boldsymbol{kaldırılabilir\ \text{sü}reksizli\text{ğ}i} \ vardır.$$

Bu bilgileri hatırlayan öğrenci artık bu bilgileri grafik üzerinde de açıklayabilmelidir. Bunu yaparken öğrenci "Derive" Programı'nın fonksiyon çizme menüsündeki (Trace Plots) 

fonksiyon sekmesi ile grafik üzerinde hareket edebilecek ve hatırlamış olduğu özellikleri daha da somut hale getirmiş olacaktır.

Ek 2'nin devamı

10. Limit Ve Süreklilik (Sonsuz Süreksizlik):

(Çalışma Yaprağı – 10)

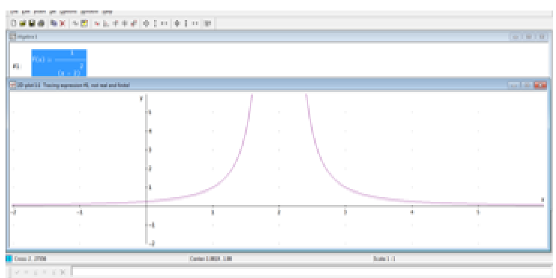
ÇALIŞMA YAPRAGI – 10

1) "Derive Programı"nı kullanarak $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunu tanımlayınız.

2) Tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında alacak olduğu değeri inceleyiniz? (Bu işlemi yaparken Derive programının Solve – Expression (Ctrl+Shift+E) menüsünü kullanınız.)

3) Şimdi tanımlamış olduğunuz bu fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz. Bu işlemi yaparken $x = 2$ noktasını ve fonksiyonun bu noktadaki limitinin olup olmadığını da dikkate alınız.

4) "Derive Programı"nın fonksiyonun grafiğini çizme menüsü 'nü kullanarak tanımlamış olduğunuz $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çiziniz.



5) Bir önceki adımda çizdiğiniz grafiği inceleyerek önceki adımlarda belirlemeye çalıştığınız sonuçları grafik üzerinde doğrulamaya çalışınız. Ayrıca bu grafik üzerinde $x = 2$ noktasının durumunu da dikkate alarak fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

6) Bu etkinliği tamamlamak "süreklilik" konusu ile ilgili hangi bilginize ulaşmanıza yardımcı oldu?

Hedef Kazanımlar

- Fonksiyonun grafiğini inceler ve sürekli olduğu aralıkları bulur
- Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda süreklilik aranamayacağını söyler
- Limit ile süreklilik arasında ilişki kurar

Stratejik Hedefler

- Fonksiyonun verilen bir noktada sürekli ya da süreksiz olduğunu belirler grafik üzerinde açıklar
- Süreksizlik çeşitlerini hatırlayarak "sonsuz süreksizliği" ifade eder ve grafik üzerinde açıklar

Verilen Süre: 80 dk.

Bu çalışma yaprağında öğrencilere belirlenen bilişsel faaliyetler doğrultusunda yönergeler verilmiştir. Bu yönergeler meslek yüksekokulu öğrencileri için dikkat çekici olacağı düşünülen bilgisayar cebir sistemlerinden "Derive" programı yardımı ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır.

1) "Derive" programında fonksiyon tanımlamayı öğrenen öğrencilerden bu aşamada verilen, $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunu tanımlamaları beklenir.

2) Öğrenciden bu yönergede 1. yönergede tanımladığı fonksiyonu $x = 2$ noktası için incelemesi istenir. Böylece öğrenci $x = 2$ noktasında f(x) fonksiyonunu incelediğinde "$f(2) = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} \Longrightarrow tanımsız.$" olduğunu görür ve bu fonksiyonun $x = 2$ noktasında tanımlı olmadığını belirtir.

Ek 2'nin devamı

3) Bir önceki aşamada verilen fonksiyonun $x = 2$ noktasında tanımlı olmadığını gören öğrenci bu kez sürekliliğini incelemek üzere fonksiyonu yeniden incelemeye başlar. İşte bu adımda öncelikle limitin varlığını araştırması gerekliliğini farkına varan öğrenci limitin varlığını incelediğinde;

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) = +\infty$$

sağ-sol limitlerin eşit ve $+\infty$'u farkına varıp limitin varlığından bahsedilebileceğini ve bu limitin +∞ olduğunu belirtebilmelidir.

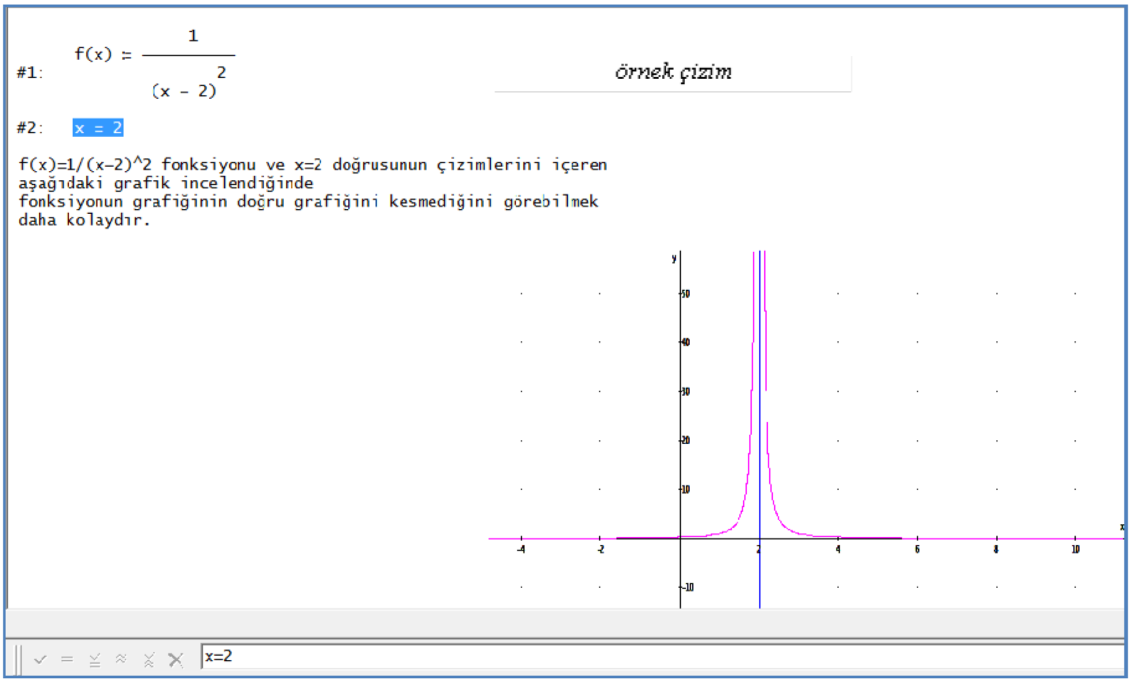
Artık fonksiyonun bu noktadaki sürekliliğini inceleyebilmek için sadece o noktadaki değerinin de aynı olması gerektiğini bilen öğrenci, bir önceki adımda bulmuş olduğu sonucu anımsayarak fonksiyonda bu noktayı yerine koyduğunda sonucun "*tanımsız*" olduğunu hatırlar.

Böylece öğrenciden "+∞ *ve tanımsızlığı*" yorumlayıp bu noktada bu fonksiyon için süreklilikten bahsedilemeyeceğini belirtmesi beklenir.

4) Öğrenci bu aşamada "Derive Programı"nı aktif kullanarak bundan önceki aşamalarda incelemeye çalıştığı $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonun grafiğini görme fırsatına sahip olur. Böylece öğrenci önceki aşamalarda bulmuş olduğu sonuçların doğru olup olmadığını kontrol etmiş olacaktır. Ayrıca öğrencinin kendi çizimlerini kontrol edebilmesi için çalışma yaprağının bu aşamasına verilen fonksiyonun Derive'deki grafik çizimi de eklenmiştir.

5) Bu aşamada öğrenci grafik üzerinde değişiklikler yaparak önceki adımlarda bulmuş olduğu sonuçlara ulaşmaya çalışmalıdır. Bunu yaparken derive programının grafik menüsünde bulunan  fonksiyon sekmelerini kullanıp grafiği çalışma kâğıdında istenen doğrultuda düzenleyebilmelidir. Bu süreçte öğrenci çalışma yaprağında istenen noktadaki sürekliliği inceleyebilmek için $x = 2$ noktasına ait doğruyu çizip grafik üzerinde bu doğruya küçük ve büyük değerlerden yaklaşıldığında fonksiyonun grafiğinin +∞*'a* gittiğini farkına varır. Sürekliliği araştırmaya çalışan öğrencinin bu kez aşağıda verilen örnek çizim gibi bir grafiğe ulaşıp, $x = 2$ noktasında $f(x) := \frac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonun limitinin var ve +∞ olduğunu fakat $x = 2$ doğrusu üzerinde fonksiyonun tanımsız olması sonucuna bağlı olarak fonksiyonun bu noktada sürekli olmadığını farkına varması beklenir.

Ek 2'nin devamı

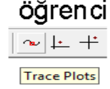


6) Çalışma yaprağının bu son aşamasında ise öğrencilerin bu etkinlik ile hedeflenen bilişsel faaliyetlere ulaşıp ulaşılmadığını yoklamak amacıyla öğrencilere etkinlik tamamlandığında "süreklilik" konusu ile ilgili öğrenmiş olduklarının ne olduğu sorulmuştur. Bu soruya yanıt olarak bir önceki aşamada incelediği grafiğin $x = 2$ noktasında alabileceği herhangi bir değerinin olmadığını görmesi $x = 2$ doğrusunun çizilen fonksiyonun grafiğine paralel olması sonucu ile bu noktada ***sonsuz süreksizlik*** olduğunu öğrenci belirtebilmelidir. Öğrenci bu etkinlik sayesinde bir fonksiyonun grafiğinde herhangi bir noktaya küçük değerlerden veya büyük değerlerden yaklaşırken limiti + ∞ veya - ∞ olan bu ve benzeri fonksiyonların sürekliliği ile ilgili şu bilgilerini hatırlayabilmelidir:

$$f: A \to R \text{ fonksiyonu için}, a \in A \text{ olmak üzere};$$

$$x = a \text{ daki soldan ve sağdan limitlerinden en az biri } +\infty \text{ veya } -\infty \text{ ise},$$

$$f \text{ fonksiyonunun } x = a \text{ noktasında } \textbf{sonsuz süreksizliği} \text{ vardır denir}.$$

Bu bilgilerine ek olarak öğrenci bu çalışma yaprağında bir noktada limiti var olan bir fonksiyonun sürekli olamayacağını da farkına varabilmeli ve artık bu bilgileri grafik üzerinde de açıklayabilmelidir. Bunu yaparken öğrenci "Derive" Programı'nın fonksiyon çizme menüsündeki (Trace Plots) 

fonksiyon sekmesi ile grafik üzerinde hareket edebilecek ve hatırlamış olduğu özellikleri daha da somut hale getirmiş olacaktır. Yukarıda *örnek çizim* ile gösterilen çizim bu süreçte öğrencilere tekrar gösterilebilir.

9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Elif ERTEM AKBAŞ, 1984 yılında Trabzon'da doğdu. İlkokulu Gazi Paşa İlköğretim Okulu'nda, ortaokul ve lise öğrenimini Trabzon Kanuni Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2002 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği programını kazandı. 2007 yılında bölüm ikincisi olarak mezun oldu. 2008 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. 2007-2009 yılları arasında özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yaptı. 2009 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Özalp Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi unvanı ile göreve başladı. 2010-2016 yılları arasında MYO'undaki derslerini yürütmek koşuluyla Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi A.B.D'da görevlendirildi. Halen bu göreve devam etmekte olup yabancı dili İngilizcedir ve evlidir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adres : Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi A.B.D., Van. & Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Özalp MYO, Özalp/Van.

E-Posta : elifertemm@hotmail.com & eertema@gmail.com & elifertem@yyu.edu.tr