KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

# MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ İSPATLAMA BECERİLERİNİ GELİŞTİRMEYE YÖNELİK TASARLANAN ÖĞRENME ORTAMININ DEĞERLENDİRİLMESİ

**DOKTORA TEZİ**

**Tuğba ÖZTÜRK**

**TRABZON**
**Haziran, 2016**

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

# MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ İSPATLAMA BECERİLERİNİ GELİŞTİRMEYE YÖNELİK TASARLANAN ÖĞRENME ORTAMININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Tuğba ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce Doktora Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Danışmanı
Prof. Dr. Bülent GÜVEN

TRABZON
Haziran, 2016

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir. 24 / 06 / 2016

| | | |
|---|---|---|
| Tez Danışmanı | : Prof. Dr. Bülent GÜVEN | .............................. |
| Üye | : Prof. Dr. Adnan BAKİ | .............................. |
| Üye | : Prof. Dr. Yasin SOYLU | .............................. |
| Üye | : Doç. Dr. Enver TATAR | .............................. |
| Üye | : Doç. Dr. Selahattin ARSLAN | .............................. |

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Nevzat YİĞİT

Enstitü Müdürü

## BİLDİRİM

**Tezimin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı ve bu tezi KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.**

**Tuğba ÖZTÜRK**

**24 / 06 / 2016**

## ÖN SÖZ

Matematiksel ispat, matematiğin kalbi ve hatta çoğu kez matematiğin ruhu olarak nitelendirilmektedir. Matematiğin birikimli bir yapıya sahip olmasına bağlı olarak matematiksel bilginin oluşumunu sağlayan temel yapı taşı olması bu durumu haklı çıkarmaktadır. Bu anlamda matematik öğretiminde ispat yapmaya yer verilerek matematiğin bu yapısının anlaşılması ve ispat kavramının özümsenmesi gerekmektedir. Bu çalışma kapsamında ispatın doğasında yer alan eylemleri; öğrencilerin yaşamasına olanak sağlayacak bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi yapılarak bir bakıma matematiğin yapısının anlaşılması amaçlanmıştır. Böylece ispat öğretimine yeni bir yaklaşım getirebilecek bir modelin varlığından söz edebilmek istenmiştir. Matematiğin hayat bulmasını sağlayan matematiksel ispatı konu edinen bu tezin, matematiğin kalbinin attığı yerden bakabilmeyi ve matematiğin güzelliklerini keşfettirebilmesiyle dileğiyle…

Lisans ve doktora eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, çalışma disiplini ile birlikte insani ve ahlaki değerleriyle örnek edindiğim, doktora eğitimime başlamamda büyük rol oynayan, danışmanım olma lütfunu gösteren, öğrencisi olmaktan onur ve gurur duyduğum, bugünlere gelmemde büyük emek ve pay sahibi olan değerli hocam Prof. Dr. Bülent GÜVEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gerek lisans eğitimimde gerekse doktora eğitimim süresince ilminden yararlandığım, ufkumun genişlemesini sağlayan, hayata bakış açısı ve matematik eğitimine sayısız önemli katkılarda bulunmasıyla örnek aldığım, bu yola başvurmamda desteğini yanımda hissettiğim, öğrencisi olmaktan onur ve gurur duyduğum saygıdeğer hocam Prof. Dr. Adnan BAKİ'ye teşekkürü bir borç bilir, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Lisans eğitimimden bugüne gelinceye kadar benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, yapıcı görüş ve önerileriyle tezimin gelişmesine katkı sağlayan sayın Doç. Dr. Selahattin ARSLAN ve Doç. Dr. Derya ÇELİK'e, çalışmalarımı yürütmemde yardım ve desteklerini eksik etmeyen sayın Prof. Dr. Ertuğrul SESLİ'ye ve diğer bütün hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında yapıcı önerilerde bulunan ve hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen meslektaşlarım Yrd. Doç. Dr. Zeynep Medine ÖZMEN, Arş. Gör. Sedef ÇELİK, Enes DEMİR ve adını sayamadığım diğer tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Bu çalışma kapsamı içerisinde yürütülen uygulamalara katılarak tez çalışmamın ortaya çıkmasına yardımcı olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına çok teşekkür ederim. Ayrıca bu doktora tez dönemimde hiçbir karşılık beklemeyerek manevi desteklerini yanımda hissettiğim tüm öğrencilerime canı gönülden teşekkür ederim.

Doktora öğrenimime gelecek kaygısı olmadan başlamamı sağlayan ve bu süreç boyunca bana maddi anlamda destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde en büyük emeğe sahip olan, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim, yoğun çalışmalarımdan dolayı bazen ihmal ettiğim ancak hiçbir zaman anlayışlı ve sevgi dolu davranışlarından vazgeçmeyen, her zaman işlerimi kolaylaştırma çabası içerisinde olan sevgili annem Havva ÖZTÜRK'e ve sevgili babam Mehmet ÖZTÜRK'e, hayatımdaki çoğu başlangıçların sebebi ve teşvik edici rolünü üstlenen sevgili ağabeyim Tolga ÖZTÜRK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. İyi ki varsınız…

Haziran, 2016
Tuğba ÖZTÜRK

## İÇİNDEKİLER

# ÖZET

## Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatlama Becerilerini Geliştirmeye Yönelik Tasarlanan Öğrenme Ortamının Değerlendirilmesi

İspat kavramı birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi tarafından matematiğin kalbi olarak nitelendirilmektedir. Geleneksel olarak matematiksel bir ifadenin doğrulanması şeklinde algılanan ispatın açıklama, ilişkilendirme, keşfetme gibi farklı işlevleri de vardır. İspat, matematiksel düşünmenin gelişimi için de önemli bir aşamadır. İspat yoluyla birey keşfetme, varsayımda bulunma, genelleme, ilişkilendirme gibi üst düzey zihinsel etkinlikler sergilemektedir. İçinde barındırdığı bu zihinsel etkinlikler bir bakıma matematiksel bir bilginin oluşumunda meydana gelen eylemleri yansıtmaktadır. Ancak matematiği öğrenme açısından bu kadar önemli rollere sahip olan ispat, öğrenciler ve öğretmen adaylarının çoğu tarafından zor bir aktivite olarak nitelendirilmektedir. Yapılan araştırmalar da üniversite öğrencilerinin çoğunun matematiksel ispatlara yönelik kavramları zihinlerinde tam olarak anlamlandıramadığını, ispat yazma ve bu ispatların geçerliliğini kontrol etme becerileri bakımından yetersiz olduklarını göstermektedir. Bu bağlamda ispatın doğasında yer alan eylemleri öğrencilerin yaşamasına olanak sağlayacak bir öğrenme ortamının tasarlanması önemlidir.

Bu çalışma ile tasarlanan öğrenme ortamının matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olup olmadığını ve ispatın rollerine yönelik bakış açılarını nasıl etkilediğini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda grup çalışması ve sınıf tartışmaları yapma, dinamik geometri yazılımlarını kullanma gibi temellere dayanan ve ispatın doğasında yer alan eylemleri içeren bir öğretim modeli tasarlanmış ve bu modele Matematiksel İspat (İSMAT) adı verilmiştir. Yarı deneysel araştırma yöntemi izlenen bu çalışma, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarından oluşan deney ve kontrol grubu olmak üzere iki grup üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma kapsamında deney grubunda İSMAT Modeline göre hazırlanan çalışma yapraklarının takip edildiği bir öğrenme ortamının tasarımı söz konusu iken kontrol grubunda mevcut uygulamalara müdahale edilmeden yapılan bir öğretim söz konusudur. Araştırmanın verileri; ispat yapma başarı ön test ve son testi, varsayımda bulunma testi, klinik ve yarı yapılandırılmış mülakatlar, alan notları, ispat sürecinde alınan video kayıtları aracılığıyla elde edilmiştir. Araştırma kapsamında uygulanan testler geliştirilen kategorik puanlama cetvellerine bağlı olarak değerlendirilmiş ve elde edilen veriler ile istatistiksel analizler (Mann-Whitney U testi, Kovaryans analizi, Ki-Kare testi)

yapılmıştır. İspat sürecinde alınan video kayıtları ise İSMAT Modelinin aşamalarında yapılması beklenen davranışlara yönelik göstergeler belirlenerek geliştirilen bir form aracılığıyla analiz edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarındaki değişimi belirlemek amacıyla içerik analizi yapılmıştır.

Araştırmanın sonucunda İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaları ve matematik dilini kullanmalarında olumlu bir etki oluşturduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının varsayım üretme ve varsayımlarını ifade ederken matematik dilini kullanmalarında ise gruplar arasında bir farklılaşma olmadığı tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarında çeşitliliğin arttığı ve ispatı daha geniş bir yelpazede değerlendirdikleri görülmüştür. Araştırmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda ise İSMAT Modelini kullanarak derslerini yürütmek isteyen öğretmen ve öğretim elemanlarının nelere dikkat etmeleri gerektiği yönünde önerilerde bulunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** İspatlama, Varsayımda Bulunma, İspatın Rolleri, Matematik Öğretmeni Adayı.

## ABSTRACT

### The Evaluation of the Learning Environment Designed for Improving Pre-Service Mathematics Teachers' Proving Skills

The concept of proof is considered to be the heart of mathematics by many mathematicians and mathematics educators. Traditionally perceived as verifying a mathematical expression, proof has various functions such as explaining, associating, and discovering. Proof is an important phase in the development of mathematical thinking. An individual displays such high-level mental activities through proof as discovering, conjecturing, generalizing, and associating. In a way, all these mental activities included in proof reflect the formation process of mathematical knowledge. However, despite such important roles it plays in learning mathematics, proof is considered to be a difficult activity by most students and pre-service teachers. Previous research also shows that most college students cannot make an absolute sense of concepts related to mathematical proving and are not competent at writing a proof and checking the validity of these proofs. In this regard, it is important to design a learning environment that will allow students to experience the actions existing in the very nature of proof.

The purpose of this study is to determine whether the designed learning environment is influential on pre-service mathematics teachers' proving and conjecturing and how it affects their perspectives regarding the roles of proof. To this end, a teaching model that has foundations such as engaging in group work and classroom discussions and using dynamic geometry software and involves activities existing in the very nature of proof was designed and named as Mathematical Proof (ISMAT). Quasi-experimental research method was employed in the study, which was carried on two groups consisting of pre-service primary school mathematics teachers: experimental group and control group. The experimental group members were exposed to a learning environment in which worksheets prepared based on the ISMAT Model were followed whereas the control group members just continued their current teaching process in which no intervention was made in the existing practices. The research data were collected through Proving Achievement Pretest, Proving Achievement Posttest, Conjecturing Test, clinical and semi-structured interviews, field notes, and video records taken in the proving process. The administered tests were evaluated based on the categorical scoring tables developed, and the obtained data were exposed to statistical analyses (Mann-Whitney U test, analysis of covariance, chi-square test). The video records taken in the proving process were analyzed based on a form developed through determination of indicators concerning the behaviors expected at the stages of the ISMAT Model. Moreover, content analysis was made to determine the change in the pre-service teachers' perspectives regarding the roles of proof.

It was seen that the learning environment designed based on the ISMAT Model had a positive effect on the pre-service teachers' reasoning and using the mathematical language in the proving process. There was no difference between the groups of pre-service teachers in terms of producing conjectures and using mathematical language while expressing conjectures. In addition, the pre-service teachers turned out to have a wider variety of perspectives regarding the roles of proof and evaluated proof in a wider range. Based on the results obtained in the study, recommendations were put forward in regard to the points to be considered by teachers and instructors wishing to conduct lessons by using the ISMAT Model.

**Key Words:** Proving, Conjecturing, Roles of Proof, Pre-Service Mathematics Teacher.

## TABLOLAR LİSTESİ

## ŞEKİLLER LİSTESİ

## GRAFİKLER LİSTESİ

# KISALTMALAR LİSTESİ

**NCTM :** National Council of Teachers of Mathematics

**MEB :** Milli Eğitim Bakanlığı

**DGY :** Dinamik Geometri Yazılımı

**MHS :** Muhakeme Süreci

**MD :** Matematik Dili

**VD :** Varsayımların Doğruluğu

**VMD :** Varsayımlarda Matematik Dili

# 1. GİRİŞ

İnsanların yaşama ve dünyaya bir anlam yükleyebilmesi ve bunlara dair düşünceler üretebilmesinde etkili olan unsurlardan biri matematiktir (Ernest, 1991). Hardy (1997), matematik ile ilgili yapılan tanımları, tarihsel bakımdan bir süzgeçten geçirerek iki ana görüş altında toplamaktadır. Birinci görüşe göre matematik, “insan hayatının sürekliliğini sağlayan bir bilim dalı” iken, ikinci görüşe göre ise “düşünme ve doğaya ulaşma aracı” dır. Her iki görüşün ortak noktası da matematiğin hayatı ve çevreyi tanıma, anlamada önemli bir yere sahip olmasıdır. Vatansever (2007) matematiğin ilk esin kaynaklarının doğa ve yaşam olduğunu belirterek bu görüşlerde dikkat çeken noktalara vurgu yapmaktadır. Bunun dışında doğa ile ilişki kurmanın matematiğin bir alt dalı olan geometri ile daha iyi gerçekleşebileceğini de ifade etmektedir. Dolayısıyla matematik ve geometri çevredeki olayların özünde yer alan ilişkileri niceleyerek ortaya çıkarma ve bu ilişkilerden yararlanarak mevcut durum ve gelecek hakkında karar vermede yararlanılan bir kaynak olarak düşünebilir. Bu anlamda gerçek yaşam durumlarında veya matematiğin diğer alanlarında karşılaşılan problemleri çözme ve temsil etme bakımından geometri bireylere oldukça yardımcı olmaktadır. Bununla birlikte geometri; tümevarım ve tümdengelime dayalı muhakemeyi içinde barındıran matematiksel muhakemenin gelişimi, varsayımlar üretme ve geçerliliğini kontrol etme, geometrik şekilleri sınıflama ve tanımlamaya yönelik zengin bir içerik sunmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Matematiksel bilginin aksiyomatik ve tümdengelime dayalı bir yapıya bağlı olarak şekillenmesi, bireylerin tümdengelime dayalı muhakemeye yönelik zihinsel yetilerinin gelişebilmesi için geometri dersini okul matematiğinde gerekli kılmaktadır (González ve Herbst, 2006). Matematik ve geometri eğitiminin genel amaçları arasında veriye dayalı akıl yürütme, bilgiyi düzenleme, ilişkilendirme, genellemelere varma, problem çözmenin yanı sıra ispat yapmayı geliştirmek de önemli bir yer tutmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013; Nasibov ve Kaçar, 2005; Toluk, 2003).

Geometri dersinin amaçları arasında yer alan ispat, matematiksel düşünmenin gelişimi için önemli bir kaynaktır (González ve Herbst, 2006). Bu bakımdan ispat, matematiksel düşünme süreci içerisinde bilginin oluşumu ve sistematik olarak anlamlı hale gelebilmesinde önemli bir yer tutmaktadır (Mariotti, 2006). Matematikte yeni yöntem ve tekniklerin oluşmasına ve matematiksel bilginin gelişmesine katkıda bulunan ispat, bir bakıma matematiksel bilgiyi bireylere iletme görevini yerine getirmektedir (Hanna ve Barbeau, 2010). Ancak bireyler arasında ispatın bir önermenin doğruluğunu araştırmaya yönelik bir araç olduğu şeklinde yaygın bir görüş yer almaktadır (Stylianou, Blanton ve

Knuth, 2010). İspat, bir durumun doğru ya da yanlış olduğunu belirtmenin yanı sıra neden doğru olduğunu gösterebilmektir (Hanna, 2000). Bu yüzden ispatın matematikteki rolü, sadece akıl yürüterek teoremlerin doğruluğunu göstermekten ziyade matematik yapmak, matematiksel iletişim kurmak ve matematiği kaydetmektir (Schoenfeld, 1994).

Matematik tarihi incelendiğinde matematiksel bilginin oluşum sürecinde keşfetme, varsayımda bulunma, genellemelere varma, tartışma ve yazışma gibi eylemlerin önemli olduğu görülmektedir (Burton, 1984). Bu eylemlerin sonucunda ulaşılan matematiksel bilgiye son halini verme noktasında da formal ispat devreye girmektedir. Başka bir deyişle formal matematiksel bilginin oluşum sürecinin son evresidir. Ancak ispat bu son evreyle sınırlı bir yapı değildir. Aslında ispat; matematiksel düşünme, yazma, diyagram çizme, görselleştirme gibi zihinsel ve fiziksel eylemleri içeren bir süreçtir (Nguyen, 2012) ve formal yapısının dışında keşifler, varsayımlar, tartışmaları da içinde barındırmaktadır (Arzarello, Olivero, Paola ve Robutti, 2007). Bireylerin bu tür eylemleri içeren bir süreçten geçmesi sağlanarak kendilerinin de matematiğin gelişimine katkıda bulunabileceği ve matematiğin bir insan ürününden farksız olduğunu anlayabilirler. Böylece matematik ulaşılmaz bir uğraş olmaktan çıkarak insanların günlük faaliyetlerinden biri olduğu hissini uyandırabilir (Baki, 1996). Ancak geleneksel ortamlarda matematik çoğu zaman genel hatları ile ele alınarak öğrencilerin ispat yapmalarına fırsat tanınmadan, ispatlar öğrencilere doğrudan sunulmaktadır (İskenderoğlu, 2010). Böyle bir durum karşısında öğrenciler matematiksel bir ifadenin ispatına doğru giden süreçten habersiz, sadece pasif bir bilgi alıcı haline gelmektedir. Oysaki ispat insan etkinliklerinin bir ürünü ve matematik yapmanın bir parçasıdır (Harel ve Sowder, 1998). Bu durum bireylerin bizzat kendilerinin uğraşarak çıkarımlarda bulunabilecekleri ve kendi kararlarını verebilecekleri ortamların gerekliliğini açığa çıkarmaktadır.

Matematiksel ispat, bir kavramın tanımını ve mantıksal süreci anlamanın yanı sıra kavramın tanımının ve mantıksal sürecin nasıl ve neden işlediğini kavramayı da içinde barındıran bir yapıdır (Tall, 1992). Bu bakımdan ispat, matematik yapma ve matematiği anlamada önemli bir etkinliktir (Ernest, 1991). Bu önem de ispat yapmayı matematik eğitiminin merkezinde yer alan bir eylem haline getirmektedir (Hanna ve Jahnke, 1996; Hersh, 1997). NCTM (2000), matematiğin amaçlarından birinin Muhakeme ve İspat standartları bakımından "*Matematiğin önemli bir parçası olarak muhakeme ve ispatın farkına varma, Matematiksel varsayımlarda bulunma ve bunları inceleme, Matematiksel çıkarımlar, ispatlar geliştirme ve değerlendirme, Muhakemenin değişik türleri ve ispat yöntemlerini seçip kullanma"* şeklinde olduğunu ifade ederek ispat öğretiminin önemine dikkat çekmektedir. Bunun yanı sıra matematik eğitiminin her düzeyinde ispatın öğretilmesi gerektiğine vurgu yaparak matematiksel alt yapıyı oluşturmada ne kadar etkili olduğunun altını çizmektedir. Bireylerin matematiği ilk öğrenmeye başladığı günden itibaren, öğrendiklerini anlamlandırarak ileriye dönük sağlam temeller oluşturma gayreti de ispat öğretiminin gerekliliğini destekler niteliktedir. Ancak yapılan araştırmalar öğretmenlerin ispat öğretimine gerekli titizliği ve önemi göstermediklerini, çoğu zaman matematiksel bir ilişkinin ispatına yer vermediklerini, ispat öğretimi sürecinde öğrencilere matematik yapma deneyimi yaşatmak yerine doğrudan anlatım yöntemi içerisinde ispatın rollerini sadece doğrulama ekseni çerçevesinde şekillendirdiklerini göstermektedir (İskenderoğlu, 2010; Chazan, 1993; Jones, 2000). Öğretmenlerin ispat öğretirken takip ettikleri adımlar genellikle tamamlanmış ispatları sunmak,  nedenleri öğrencilerin bulmalarını isteyerek mantıksal basamakları ifade etmek, ispat yapmak ve uygulama esnasında da öğrencilerden aynı mantığı kullanacakları türden başka bir ifade vermek şeklindedir (İskenderoğlu, 2010). Başka bir deyişle öğretmenler genellikle bir ispatı anlatma, mantığını açıklama ve öğrencilerin bunları izlemesini bekleme gibi bir süreç gerçekleşmektedir. Dolayısıyla öğrencilere kendi matematiklerini yapma fırsatı sunulmamakta ve ispatlar doğrudan verilmektedir. Bu durum öğretmenlerin ispatın sahip olduğu rolleri düşünmeden ya da bilmeden öğrenme ortamlarını düzenlemelerinden kaynaklanabilmektedir (Knuth, 1999; Knuth, 2002a). Verilen bir matematiksel ifadenin doğrulanması için ispatların doğrudan sunulması esasına dayalı bir ispat yaklaşımı, bir yandan ispat kavramının doğasını ve matematik tarihi içerisindeki rolünü inkâr etmekte bir yandan da ispatı öğrenciler için zor ve anlamsız bir etkinlik haline getirmektedir (Battista ve Clements, 1995).

Yapılan araştırmalar incelendiğinde, farklı öğrenim düzeylerindeki öğrencilerin matematiksel ispatı anlamada ve ispat yazmada zorluklar yaşadığı görülmektedir (Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Martin ve Harel, 1989; Moore, 1994). Öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı zorluklar ise iki kategoride sınıflandırılmaktadır (Weber, 2001). Bu zorlukların ilki, matematiksel ispat yaparken kullandıkları kavramları tam olarak bilememeleri (Harel ve Sowder, 1998; Knuth ve Elliot, 1998; Martin ve Harel, 1989; Senk, 1985), ikincisi ise teorem ve kavramları anlamada eksiklerinin olması ve bunları sistematik bir şekilde ispat yazmada kullanamamalarıdır (Harel, 1998; Hazzan ve Leron, 1996; Moore, 1994). Öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı bu zorlukların nedenleri ise matematiksel sistemin kendisi, öğretimsel materyal ve uygulamalar, bilişsel gelişimlere bağlanmaktadır (Senk, 1983). Öğretimsel materyal ve uygulamaların düzenlenmesinde öğretmenlerin etkisi dikkate alındığında ispata yönelik yaşanan zorlukların nedenleri arasında öğretmenlerin de sayılabileceği gerçeği ortaya çıkmaktadır. McCrone, Martin, Dindyal, ve Wallace (2002) öğrencilerin ispata yönelik anlamalarının gelişiminde öğretmenlerin etkisi olduğunu ifade ederek bu durumu desteklemektedir. Nordström (2004) ise öğretmenlerin öğrencilere formal ispatlar yapma ve bunları açıklamada zorluklar yaşadığını belirterek ispat öğretiminde uygun öğrenme ortamlarının oluşturulamadığına işaret etmektedir. Çoğu öğretmen ispatın öğretimindeki önemini ve değerini dikkate almadan öğrenme ortamlarını tasarlamakta ve öğretim vermektedir (Knuth, 2002b; Peled ve Zaslavsky, 1997). Öğrenciler genellikle ispatı anlama ve ispat yazmayı geliştiren süreçlere maruz kalmamaktadır (Dreyfus, 1999). Hatta bazı öğretim kademelerinde ispata yönelik deneyimler öğrencilere çok az yaşatılmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Hiebert vd., 2003). Ayrıca öğrencilere çoğunlukla ispat tamamlanmış olarak sunulmakta ve ispat yazma bakımından sınırlı becerilere sahip olarak geleneksel ortamlarda yetiştirilmektedir (Herbst, 2002; Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Weber, 2001). Yoo (2008) üniversitelerde de öğretim elemanlarının geleneksel bir yaklaşım izleyerek çok sayıda matematiksel durumlar sunduğu ve bunların ispatlarını öğrenciyi sürece dâhil etmeden doğrudan yaptığını dile getirmektedir. Ayrıca öğrencilerin matematiksel ilişkileri keşfetmelerine, ispat yapmalarına, bu ispatı yansıtmalarına ve arkadaşlarıyla ulaştıkları sonuçlar hakkında paylaşımda bulunmalarına dahi fırsat tanımadıklarına değinmektedir. Bu durum ispat öğretiminde izlenen yaklaşımların değişime ihtiyacı olduğunun bir göstergesidir. Araştırmacıların bazıları da ispat öğretiminde öğrencilerin ispat sürecine aktif katılımını sağlayacak değişikliklerin yapılması gerektiğini vurgulamaktadır (Dean, 1996; Tall, 1992). Aksi takdirde öğrencilerin sürece dâhil olmasını sağlayan ispatın matematik içerisindeki rolleri (keşfetme, varsayımda bulunma, genelleme, ilişkilendirme vb.) öğrenme ortamlarında gerçekleştirilemeyecektir. Böylece bir matematikçinin gerçek yaşamındaki aktivitelerle ispat öğretiminde izlenen yaklaşımlar arasındaki uçurum daha da artacak ve ispat öğrencilerin önüne sadece tamamlanmış bir ürün olarak sunularak anlamsız öğrenmelere neden olacaktır.

İspat öğretimi ve öğrenimdeki zorluklar, öğrencinin ilgi ve motivasyonunu artırma çabaları, dinamik araçların geliştirilmesi ve bunun yanı sıra ispat yapmanın matematik eğitiminde oldukça önemli (Hanna, 2000) olması araştırmacıları ispat öğretimini destekleyen yollar aramaya yöneltmiştir (Hadas, Hershkowitz ve Schwarz, 2000). Bu yollardan biri de ispat öğretimine yeni yaklaşımlar getiren Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) kullanımıdır (Hanna, 2000). DeTurck (1993) DGY'lerin kullanımının ispatın doğasına uygun eylemlerin öğrenme ortamlarında oluşmasını sağlayacağını belirterek bu yazılımların ispat yazmaya teşvik edici bir rol oynadığına vurgu yapmaktadır. de Villiers (2002) ise keşfetme, varsayımda bulunma, genelleme, açıklama gibi ispatın rollerinin DGY'ler yardımıyla geliştirilebileceğini ifade etmektedir. DGY'lerin kullanımının öğrenme ortamlarında ispatın rollerinin gerçekleşmesine yardımcı olması ve öğrencilerin matematiksel deneyimler yaşamasına fırsat tanıması, ispat öğretiminde kullanılmaya değer olduğunun bir göstergesidir.

İspatın kavramsal olarak öğretilmesi, geometriye ve matematiğin diğer alanlarına yönelik anlayışların geliştirilmesi için önemlidir (McCrone ve Martin, 2004). İspata yönelik anlamlı bir deneyim kazandırmak için de bireylerin üzerinde uğraşıp ispat yapılabileceği içerik ve belirli bir sonuca nasıl ulaştığını açıklayabileceği bir çalışma ortamı gereklidir (Jones, 1995). Bunu sağlayabilecek çalışma ortamlarından biri de DGY ile zenginleştirilmiş ortamlardır. DGY'ler kullanılarak öğrencilerin daha bağımsız bir şekilde çalışabileceği bir ortamın oluşturulması öğrencilerin matematikle iç içe olmasına fırsat tanıyabilir (Frerking, 1994). Geometriyi öğrenirken öğrenciler şekiller çizip örüntüler oluşturma ve bunlar arasındaki ilişkileri inceleme gibi fırsatlarla karşılaştığından DGY'nin en etkili kullanıldığı matematik alanı geometridir (Baki, 2000; Duatepe ve Ersoy, 2002). Güven (2002) de DGY'lerin geometri öğretiminde deneyimleri destekleme ve geometriyi öğrencilere araştırma yoluyla öğretme özellikleriyle öğrencilerin araştırma ortamlarına rahatlıkla girerek keşfetme, varsayımda bulunma, test etme, reddetme, formülize etme ve açıklama olanağı sunduğunu belirtmektedir. Bu tür olanaklar sağladığını belirterek ispatın doğasında yer alan eylemlerin DGY'ler ile donatılmış bir ortamda gerçekleşebileceğine dikkat çekmektedir.

Dinamik yazılımların çoğalmasıyla birlikte ispat süreci de giderek dinamik ortamlara taşınmaya başlamıştır (de Villiers, 1999; González ve Herbst, 2009; Hanna, 2000; Hoyles ve Jones, 1998; Laborde, 2000; Mariotti, 2000; Wares, 2004). de Villiers (2004) de geometrik şekillerin çizimi, özelliklerin anlaşılması ve varsayımda bulunma konularında önemli bir role sahip DGY'lerin ispat yazmada etkili olan teknolojik araçlar olduğuna vurgu yapmaktadır. Bu teknolojik araçlardan öğrenme ortamlarında yararlanılması durumunda bireylerin kendi bilgilerini yapılandırarak oluşturmalarının yanı sıra ispat yazarken mantıksal çıkarımlarda bulunmalarının önünü de açmaktadır (Clements, 2003). Mantıksal çıkarımlarda bulunarak yeni kuralların keşfedilmesine yardımcı olması da bireylerin düşünme becerilerinin gelişmesine katkı sağlamaktadır (de Villiers, 2002). Böylece bireylerin bilişsel yapısı ve düşünme şekillerinin zenginleşmesine yardımcı olmaktadır. Bunun yanı sıra ispat sürecinde karşılaşılan bazı bilişsel zorlukların üstesinden gelme konusunda bireylerin bilinçli hale gelmesini sağlamaktadır (de Villiers, 2004; Mariotti, 2002; Noss ve Hoyles, 1996). Genel olarak DGY'lerin bir geometrik yapıyı oluşturmadan başlayıp varsayımda bulunarak ispat yazmaya doğru teşvik edici bir rol oynaması gibi ispat sürecine birçok katkısı bulunmaktadır. DGY'ler yardımıyla yapılan problem çözümü bireyleri bir ispat sürecine teşvik ederken Goldenberg'in (1999) belirttiği yapı içerisindeki sabit ilişkileri araştırmak ve değişkenleri değiştirip yeni duruma uygun düzenlemeler yapabilmek, deneyimlerden yararlanarak çıkarımlara ulaşabilmek, yapı içerisindeki sabit ilişkileri bulup bunların nedenlerini sistematik bir biçimde araştırabilmek, sözel veya görsel sunulan bilgileri birbirine dönüştürebilmek, yapı içerisindeki ilişkileri formal veya informal olarak sunabilmek, şekilleri yorumlayabilmek, varsayımda bulunabilmek ve genelleme yapabilmek, görselliği kullanabilmek gibi matematiksel düşünme alışkanlıklarının da süreç içinde gerçekleşmesini sağlamaktadır. Böylece DGY'ler ile oluşturulan bir ispat sürecinin gerçekten bilişsel yoğunluğa sahip bir ortam oluşturabileceği ve matematikçilerin yaptığı matematik ile bireylerin matematiği arasında köprüler kurulabileceği görülmektedir. Dolayısıyla kavram ve ilişkileri görsel hale getirerek somutlaştıran ve matematiksel kavramlara anlam kazandıran DGY'ler, etkili ve uygun bir şekilde kullanıldığında öğrenme ve öğretmeyi olumlu yönde etkilemekte (Baki, 2000) ve bu anlamda ispat süreci içinde kullanılmaya değerdir. DGY'nin ispat sürecine dâhil edilmesiyle bireyler matematiksel bilginin oluşumunda gerçekleşen keşfetme, varsayımda bulunma, ilişkilendirme, genelleme gibi ispatın doğasında yer alan eylemlerden geçmesi sağlanabilir. Böylece bireyler matematiksel bilginin oluşumunda yer alarak kendi matematiğini oluşturma hissi yaşayabilir ve matematiksel deneyimlerle birlikte daha donanımlı bir hale gelebilir.

İspat, derinlemesine bir anlayışın gelişimini ve bunlar üzerine muhakemeler yapılmasını sağlayan güçlü bir araçtır (NCTM, 2000). Bir bakıma bu anlayışların nesnel bilgi haline gelmesine yardımcı olan önemli bir adımdır. Matematiksel ispat, bireylerin bir problem durumu üzerinden keşifler yapmasıyla başlayan varsayımlarda bulunarak bunların doğruluğunu araştırma ve gerekçeler sunma ihtiyacı sonucunda formal bir ispatla sonlanan bilgi oluşum sürecidir (Turğut, Yenilmez ve Uygan, 2013). Bireyler ispatın doğasında yer alan keşfetme, varsayımda bulunma, ilişkilendirme, genelleme gibi eylemleri gerçekleştirerek kendi matematik dünyalarını kurmaya bir adım daha yaklaşmaktadır. Popper (1979) de bireylerin bir matematik dünyası olduğundan bahsederek bireylerin üç farklı dünyaya sahip olduğunu vurgulamaktadır. Bu üç dünya özetlendiği takdirde birinci dünya varlıkların ve fiziksel durumların, olguların, kuvvetlerin fiziksel dünyası; ikinci dünya yaşantıların ve bilinçsiz fiziksel olguların ruhbilimsel dünyası ve üçüncü dünya ise düşünsel ürünlerin dünyasıdır. Bir başka deyişle birinci dünya içsel dünya; ikinci dünya fiziksel dünya; üçüncü dünya ise sosyal dünya yani matematik dünyasıdır (Popper, 1979). İçsel dünyada bilgiler bireyin kendi deneyimleri ve inançlarına dayanmaktadır. Fiziksel dünyada birey birinci dünyada kurduğu öznel bilgilerin pratikte uyup uymadığını, deneyimlerini doğrulayıp doğrulamadığını belirler. Matematik dünyasında ise birey bilgilerini diğer insanlarla paylaşır ve doğrulandığında da bilgiler nesnel bilgi haline dönüşür. İspata ulaşırken izlenen adımlar da bireyin matematik dünyasında gerçekleşen durumlarla birçok noktada kesişmektedir. Bu durum ispat sürecinin sosyal bir etkileşim ortamı oluşturduğunun bir göstergesidir. Bireyin ispat yapmaya çalışırken uğraştıklarını arkadaşlarıyla paylaşması, farklı durumlar üzerine tartışarak ortak noktada buluşması ve formal ispata doğru geçişi bu sosyal etkileşimi göstermektedir. İspata ulaşmadan önce birey sahip olduğu bilgiler ve yaptığı gözlemler doğrultusunda çeşitli ilişkiler bulur, varsayımda bulunur ve artık bunların geçerliliği hakkında bilgi edinmeye çalışır. Başka bir deyişle nesnel bir bilgiye ulaşmak için uğraşır ve sonunda kendi matematik dünyasını oluşturur. Dolayısıyla bu da bireyin bilginin oluşumu sürecinde yer aldığı gerçeğini ortaya çıkarmaktadır. Lakatos (1978) da bilginin yeniden yapılandırılarak büyümesinin Popper'in üçüncü dünyasında gerçekleştiğini belirterek aynı noktaya vurgu yapmaktadır. Ayrıca Lakatos (1961) varsayımın oluşturulması için keşfetmenin, varsayımların değerlendirilmesi için gerekçeler sunmanın, diğer yandan sosyal boyutun önemli eylemler olduğunu belirtmektedir. Böyle bir süreç içinde kavramların gelişebileceği ve problemlerin üstesinden gelinebileceğini de ifade etmektedir. Bunun yanı sıra Lakatos (1976) matematiksel bilginin gelişimi modelinde ilkel iddia, ispat, evrensel karşı örneklerin ortaya çıkması ve ispatın yeniden çalışılması gibi aşamalara yer vererek matematiksel bilginin sorgulanabileceği ve üzerinde incelemeler yapılabileceğine vurgu yapmaktadır. Matematiksel bilginin gelişimine yönelik çalışmanın amacını "Yarı-deneysel, informal matematiğin; şüphe duyulamaz teoremlerin sayısındaki monoton artışla değil, spekülasyon ve eleştirel tahminlerin sürekli ilerlemesiyle geliştiğini, ispatlar ve çürütmeler mantığıyla açıklamaktır." (Lakatos, 1976: 5) şeklinde ifade ederek bireyin süreç içinde etkileşim halinde olması gerektiğine işaret etmektedir. Başka bir deyişle matematiksel bilginin bireylerin birbirleriyle etkileşimi sonucunda gelişebileceğini ifade etmektedir. Bu nedenle öğrencilerin ispatı anlamlı bir etkinlik olarak yapılandırabilecekleri ortamların; öğrencilerin bağımsız olarak çalışmaları, çalışmalarda aktif rol oynamaları, çalışmaları üzerine araştırma yapmaları, arkadaşlarıyla etkileşim halinde olmaları ve çalışmaları üzerine arkadaşlarıyla tartışmalar yapmaları şeklinde özelliklere sahip olması gerekmektedir.

Matematiksel bir duruma yönelik araştırma yapma, varsayımları formülleştirme, bunların doğruluğunu tartışma gibi varsayımda bulunmayı destekleyen eylemler ve bunun yanı sıra ispat adımlarını belirleme ve bu adımları düzenleme gibi eylemlerin harmanlanmış hali ispat sürecini oluşturmaktadır (Perry, Molina, Camargo ve Samper, 2011). Araştırmacılardan bazıları da formal ispata geçmeden önce çeşitli muhakeme aktivitelerinin gerçekleştiği ve ispatın bir süreç olduğuna yönelik vurgu yapmaktadır (Boero vd., 1995; Boero, 1999; Edwards, 1997; Perry vd., 2011). Bununla birlikte bu araştırmacıların her biri çeşitli aşamalar belirleyerek ispata yönelik süreçler tanımlamıştır. İspata yönelik tanımladıkları bu süreçler çoğunlukla araştırma kapsamında yararlandıkları bir ya da daha çok etkinliği uygulamaya yönelik olup ispat öğretimi için derslerde yararlanılan bir öğretim modeli gibi geniş kapsamlı değildir. Ayrıca tanımlanan bu süreçler matematik alanından seçilen belirli bir konuya yönelik yapılan ispat uygulamalarında izlenen aşamalar niteliğindedir. Bu anlamda her bir öğretim kademesinde yer alan öğrencilerin zorluk yaşadığı ispatın öğretimine yeni bir yaklaşım getirebilecek bir öğretim modeline ihtiyaç vardır. Aksi takdirde ispat her birey tarafından zorluk yaşanan bir kavram olmaya devam edecektir. Ayrıca ispata yönelik bir öğretim modelinin tasarlanması, öğrencilerin matematiksel bilginin oluşumunda yer almasına katkıda bulunarak süreç içinde karar mekanizması haline gelmesini sağlayabilecektir. İspat öğretiminde geleneksel yaklaşımın ötesinde ispat sürecinin doğasında yer alan eylemlerden her birinin belirli bir sistematik içinde yaşanabileceği bir modelin tasarlanması bütün öğretim kademelerinde yer alan öğrenciler için oldukça önemlidir. Bunun için de öncelikle öğretmen eğitiminde ispatın tam anlamıyla öğretilmesi gereklidir ki gelecek nesiller matematiksel kavramları gerektiği gibi özümseyebilsinler. Öğretmen adaylarının keşfetme, varsayımda bulunma, formülize etme, genelleme, açıklama gibi ispat sürecinin içinde barındırdığı eylemlere kendi eğitim hayatlarında maruz kalmazlarsa gelecekte kendi sınıflarında da böyle eylemlere yer vermeleri düşünülemez (de Villiers, 2004). Bu bakımdan ispat sürecinin öğretmen adaylarına birebir olarak yaşatılması yararlı olabilir. Bu kapsamda çalışmada öğretmen adaylarının ispatın doğasında yer alan bütün eylemleri içeren bir süreci yaşayabilmeleri için Matematiksel İspat (İSMAT) adı verilen modelin aşamalarının izlendiği bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. İSMAT Modeli "*problem durumunu anlama, yapı oluşturma, oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma, ilişkiyi önerme olarak ifade etme, ispatlama, ispatın tutarlılığını inceleme, ispatı formal hale dönüştürme*" şeklinde yedi aşamadan oluşacak şekilde belirlenerek bu çalışmada ele alınmıştır. Bu araştırmayla DGY ile desteklenen ve İSMAT Modeli doğrultusunda tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olup olmadığı ve ispatın rollerine yönelik bakış açılarında bir değişime neden olup olmadığına yönelik problemlere cevap aranacaktır. Bu bağlamda çalışmanın problemleri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

1. Tasarlanan öğrenme ortamı matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili midir?
2. Tasarlanan öğrenme ortamı matematik öğretmeni adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarını nasıl etkilemiştir?
3. Tasarlanan modelin uygulandığı öğrenme ortamından yansımalar nelerdir?
   3.1. Modelin her bir aşamasının uygulanmasında ne tür güçlükler yaşanmıştır?
   3.2. Dinamik Geometri Yazılımları ispat sürecinde nasıl kullanılmıştır?

## 1. 1. Araştırmanın Amacı

Matematiksel bilginin nesilden nesile geçmesi ve bilginin kalıcılığını sağlaması bakımından ön plana çıkan ve “matematiksel bilginin taşıyıcısı” (Hanna ve Barbeau, 2008; Rav, 1999) olarak nitelendirilen en önemli yapılardan biri matematiksel ispattır. Bu anlamda ispatın var olan matematiksel bilgiler hakkında bireyleri haberdar etme ve bu bilgilerin altında yatan asıl anlamları ortaya çıkararak öğrencilerin daha anlamlı öğrenmeler elde etmesinde oldukça büyük bir role sahiptir. Öğrencilerin matematiksel anlamda daha donanımlı bir hale gelmesi ise ispat öğretimine gerekli önemi vererek ispat süreçlerinde aktif olabilecekleri ve ispatın özünde yer alan eylemleri gerçekleştirebilecekleri öğrenme ortamlarının tasarlanmasına bağlıdır. Bu açıdan öncelikli olarak öğretmen adaylarının ispat öğretiminde ihtiyaç duyulan öğrenme ortamlarının tasarlanması, geleceğin öğretmenleri olarak hem kendilerinin matematiksel anlamda donanımlı bir hale gelmesi hem de gelecekteki öğrencilerinin matematiği daha iyi özümsemelerini sağlayacak şekilde yetiştirilmeleri bakımından oldukça önemlidir. Bu bağlamda çalışmanın amacı tasarlanan öğrenme ortamının matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olup olmadığını ve ispatın rollerine yönelik bakış açılarını nasıl etkilediğini ortaya çıkarmaktır. Bunun yanı sıra öğrenme ortamındaki eksiklikleri, öğretmen adaylarının öğrenme ortamında yaşadığı güçlükleri belirlemek ve dinamik geometri yazılımlarını ispat sürecinde hangi amaçlarla kullandıklarını incelemektir.

## 1. 2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

İnsanları diğer canlılardan ayıran en belirgin özelliklerden biri olan düşünme yeteneğimiz ile çeşitli seçimlerde bulunarak hayatımıza bir yön vermekteyiz. Belirlediğimiz bu yönün bize anlamlı gelebilmesi ise ihtiyaçlarımızı en kısa ve doğru yolla giderebilmemiz ve karşılaştığımız sorunlara uygun çözümler üretebilmemize bağlıdır. İhtiyaçlarımızı gidermeye ve sorunlarımızı çözmeye yönelik bu süreçte öncelikle karşılaştığımız olayları araştırır, çeşitli denemeler yaparız. Bu araştırma ve denemelerimize dayalı olarak tahminlerde bulunur, hipotezler kurar ve bu hipotezlerimizi test ederek çeşitli sonuçlara ulaşırız. Dolayısıyla bireyler olarak yaşamımız boyunca çevremizde olan bitenleri anlamak ve karşılaştığımız sorunları çözebilmek için farkında olarak ya da olmayarak bir matematiksel düşünme sürecinden geçmekteyiz. İçinde yaşadığımız evreni anlama, tanımlama ve çevremiz ile etkileşim içinde bulunmayı sağlayan matematiğin alt dallarından biri ise geometridir ve matematiğin belki de en çok sezgisel, somut özelliklerine sahip ve gerçekle ilişkili olan dalıdır. Bu bakımdan geometri, gerçek yaşam ve matematik arasındaki boşluğu doldurmak, matematiğe insan kültürünün bir ürünü olarak değer vermek, matematiksel kavramların temelini anlamak bir başka deyişle matematiksel ispatları öğrenmek ve öğretmek için iyi bir başlangıç noktasıdır (Zaimoğlu, 2012). Schoenfeld (2009), “*Problem çözme matematiğin kalbi ise ispat matematiğin ruhudur.*” şeklinde bir ifadede bulunarak ispatın matematiğe asıl anlamı katan ve matematiğin altında yatan anlamları ortaya çıkaran bir yöntem olduğuna vurgu yapmaktadır. Geometrinin içinde saklı olan cevherlerin fark edilebilmesi ve geometrik kavramların zihnimizde anlam kazanması da ispata bağlıdır. Bu nedenle bireylerin geometrik kavramları tam anlamıyla kavrayabilmeleri sadece geometrik şekilleri tanımaları ve adlandırmaları ile gerçekleşmemektedir. Bu kavramlarla ilgili ispatları öğrenmeleri ve yapmaları da gereklidir (Clements, 2003). Çünkü matematiksel ispatın herhangi bir problemin çözümü için gerekli olan matematiksel bilgileri ilişkilendirme, strateji geliştirme ve bir araç olarak kullanılabilme özelliklerine sahip olması (Hanna ve Barbeau, 2008; Mariotti ve Balacheff, 2008) bu durum üzerinde etkilidir. Dolayısıyla ispatın kavramlar arasında ilişkilendirmeyi sağlama gibi bir rolü içinde barındırması anlamlı bir öğrenmenin oluşmasına yardımcı olmaktadır. Anlayarak öğrenme, düşünceleri ifade etme ve varsayımda bulunmayı içermekle birlikte bu düşünceleri ve varsayımları değerlendirmeyi de içerir (NCTM, 2000). Varsayımın gözlemlere dayanan ispatlanmamış durumlar (Larson, Boswell ve Stiff, 2001) olarak tanımlanması ispattan önce gelen basamaklardan biri olduğunu göstermektedir. Matematiksel varsayımlar; verilerin gözlenmesi, örüntülerin tanımlanması ve genellemelerin yapılması ile şekillenir (Serra, 1997). Varsayımların şekillenmesi, doğruluğunun incelenmesi ve giderek ispat algısının gelişimi gibi eylemler ise bir ispat süreci içinde gerçekleşebilir. Bu bakımdan ispat matematiğin vazgeçilmez parçalarından biridir (Leddy, 2001; Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, 2015). İspat kavramı bireylerin matematiksel ifadeleri ve matematiğin temel yapısını anlamlı bir şekilde öğrenmesine katkıda bulunan önemli bir yapıdır (Yoo, 2008). İspatın öğrenme ortamında açıklayıcı bir role sahip olmasına dayalı olarak Hersh (1993) ispatın amacının “anlama” olduğunu belirtmesi ve ispatı “eksiksiz açıklama” şeklinde tanımlaması da bu durumu desteklemektedir. Ancak öğrenciler çoğunlukla öğrenme ortamlarında tümdengelime dayalı muhakeme ile ilgili sınırlı bir anlama elde ederek ya da hiçbir anlama elde etmeksizin ispatları ezberlemektedir (Hanna, 2000; Moore, 1994). Dolayısıyla ispat öğretiminin geleneksel olarak yürütüldüğü öğrenme ortamlarında ispatın açıklama rolü ihmal edilerek kavramları anlama bağlamında eksiklikler ortaya çıkmaktadır. Bu durum ispatın içinde barındırdığı varsayımda bulunma, keşfetme, ilişkilendirme, genelleme, açıklama, iletişim gibi üst düzey matematiksel etkinlikleri yaşatabilecek öğrenme ortamlarının gerekliliğini ortaya çıkarmaktadır.

İspat, yapıları ve değişkenleri belirlemek, varsayımda bulunmak ve mantıksal gerekçeleri organize etmek gibi bir grup zihinsel alışkanlıklara (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002) dayalı bir süreçtir. Bu süreç aslında bir matematikçinin matematiksel sonuçlara varırken attığı adımları anımsatmaktadır. Ancak matematik öğretimi ve ders kitaplarının matematikçilerin yalnızca aksiyomlara dayalı ispat ve tümdengelimsel muhakeme kullandıklarına yönelik bir düşüncenin oluşmasına yol açtığı ileri sürülmektedir (Battista ve Clements, 1995). Gerçekte ise matematikçiler problemler belirler, örnekler analiz eder, varsayımlarda bulunur, karşıt örnekler arar ve varsayımları yeniden gözden geçirirler ve matematiği oluştururlar. Tümdengelimsel ispat ise bu oluşum sürecinin son aşaması olarak görülür. Bir geometrik yapıdaki sayılar arasındaki ilişkileri, kuralları fark etme, genelleme yapma, varsayımda bulunma ve tahmin etme gibi becerilerin kazanılması da ispatın öğretilmesiyle ve bu sürecin bireyler tarafından yaşanması ile gerçekleşebilir. Böylece bireyler bir matematikçinin neler yaptığına yönelik deneyimler elde ederek kendi matematiklerini oluşturabilirler. Ancak ispat kavramı okul matematiğinde matematiksel aktivitelerden uzak formal bir süreç anlayışıyla sunulmaktadır (Stylianides ve Stylianides, 2006). Ayrıca geleneksel bir yaklaşım izlenerek teorem ifadesinin verilip tümdengelime dayalı ispatın yapılmasının istendiği tek boyutlu aktivitelere yer verilmektedir (Öner, 2006). İspat öğretiminde bu tür bir yaklaşımın izlenmesi, öğrencilerin matematiksel ilişkileri araştırma, varsayımda bulunma ve varsayımlarının geçerliliğine yönelik kanıtlar sunma ve bunun sonucunda ispata ulaşma gibi bir matematikçinin izlediği süreci yaşamalarına engel olmaktadır. Bu nedenle bilginin temelini tam anlamıyla öğrenmelerini sağlayabilecek ve öğrencilerin matematik yapmalarına fırsat tanıyabilecek öğrenme ortamları tasarlanmalıdır.

Hem matematiği öğretme hem de matematiği öğrenme bakımından öğretim kademelerinin her birinde ispat yapmayı öğrenmenin önemi özellikle vurgulanmaktadır (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, 2004; NCTM, 2000; RAND Mathematics Study Panel, 2002). Ancak araştırmacıların büyük çoğunluğu öğrencilerin ispat yapma ve anlama, ispatın geçerli olup olmadığını değerlendirme bakımından zorluklar yaşadığını belirtmektedir (Epp, 2003; Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Knuth, 2002b; Weber, 2001). Moore (1994) öğrencilerin ispat yapmaya yönelik yaşadığı zorlukların nedenlerini *öğrencilerin tanımları bilmemesi, kavramlara yönelik sezgisel anlamalarının az olması, ispat yapmaya yönelik kavram imajlarının yetersiz olması, kendi örneklerini kullanma ve üretme konusunda başarısız ve gönülsüz olması, ispatı oluştururken tanımları nasıl kullanacaklarını bilmemesi, matematik dilini kullanma ve anlamada yetersiz olması, ispata nasıl başlayacaklarını bilmeme* gibi yedi ana unsura bağlamaktadır. İspata yönelik yaşanan bu zorlukların nedenleri öğrencilerin ispat ile ilgili içerik bilgilerinin eksikliği ya da ispat yapmaya yönelik isteksizlikleri gibi sadece öğrencilerden kaynaklanan durumlar dışında öğrenme ortamı ile ilgili durumlara bağlı olarak da ortaya çıkmaktadır (Almeida, 2003). Dreyfus (1999) ise tümdengelime dayalı ispat ya da görsel, tümevarıma dayalı, sezgisel olarak gerekçelendirmeler yaparken ispat öğretiminin belirsiz kaldığına değinmektedir. Bu belirsizlik ise öğrencilerin matematiksel ispatın önemini algılamamalarına yol açabilmektedir. Bu nedenle bir matematikçinin keşfetme, tümevarım ve tümdengelime dayalı bir süreçten geçtiği düşüncesiyle öğrencilerin bu süreçlerden geçmesini sağlayacak öğrenme ortamları tasarlayarak ispata yönelik algılarının değişimine katkıda bulunabilmek anlamlıdır.

Gerek yeterli zamanın olmaması gerekse ispatın genellikle öğretim kademelerinde yer alan bütün öğrenciler için zor bir kavram olması ya da bazı ispatların gereksiz ve bilgilendirici olmadığına yönelik düşüncelerin hâkim olması gibi nedenlere bağlı olarak ispat kavramı öğrenme ortamına dâhil edilmemektedir (Hersh, 1993). Benzer şekilde Yoo (2008) da sadece matematiğe yönelik içerik bilgileri verilerek matematiksel ispatı keşfetme ya da yapılandırmadan ziyade yapılanları tekrar etme ve bir kuralı takip etme gibi düşüncelerle ispat kavramına matematik derslerinde yer verilmediğine değinmektedir. İspat kavramına yer verildiği durumlarda ise öğrencilere ispatla ilgili deneyimler sınırlı düzeyde yaşatılarak matematiksel ispat tamamlanmış bir ürün olarak sunulmakta ve öğrenciler ispatlar ile ilgili herhangi bir anlama elde etmeksizin yapılan ispatı doğrudan kabul etmektedir (Herbst, 2002; Yoo, 2008). Bu durum matematikçilerin gerçek yaşamda ispata yönelik yaptıkları aktiviteler ile ispat öğretimi için izlenen yaklaşımlar arasında oldukça büyük bir kopukluk olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla geleneksel olarak yapılan bir ispat öğretimden öğrencilerin ispatın özünde yer alan eylemleri yerine getirebileceği ve aktif katılımlarını sağlayabileceği bir öğretime geçiş yapılması gerektiğinin önemi ortaya çıkmaktadır.

İspat öğretimi için öğrenme ortamlarında “teorem-ispat-örnekler” şeklinde tümdengelimsel bir sıra takip etmek yerine “örnekler-varsayım-ispat” şeklinde tümevarım ile başlayıp tümdengelim ile sonlanan bir sıra takip edilmesi daha anlamlıdır (Almeida, 2003). Bu bakımdan bazı araştırmacılar sadece formal bir ispatın sunumundan ziyade öğrencilerin ispat sürecine aktif bir şekilde katılabileceği bir öğretime vurgu yaparak ispat öğretiminde bir değişimin gerektiğini vurgulamaktadır (Dean, 1996; Tall, 1992). NCTM (1989, 2000) öğrenme ortamlarında matematiksel ispatın yer alması gerektiğini belirterek muhakeme ve ispat kavramlarının önemini fark etme; varsayımda bulunma ve bunları inceleme; matematiksel çıkarımlar, ispatlar oluşturma ve değerlendirme; farklı muhakeme türleri ve ispat yöntemlerini seçip kullanmaya yönelik bütün öğretim kademelerindeki öğrencilere imkân sağlanması için özellikle vurgu yapmaktadır. Bunların yanı sıra çıkarımları ile birlikte mantıksal gerekçeler üretmeleri ve formal ispatlar sunmaları gerektiğini de belirtmektedir. Haralambos (2000) öğrencilere çeşitli fırsatlar tanınarak ispat yapmaya yönelik deneyimler kazanmalarının önemli olduğunu ifade ederek ispat öğretiminde tümdengelime dayalı süreçlerin yanı sıra tümevarıma dayalı süreçlerin de yaşatılması gerektiğini ifade etmektedir. Bunun yanı sıra özellikle de geometri derslerinde öğrencilerin çeşitli teoremleri ya da özellikleri keşfetmelerine olanak sağlanması açısından Geometer's Sketchpad, Cabri gibi yazılımların ispat öğretiminde kullanılmasının yararlı olabileceğini belirtmektedir. Dean (1996) başarılı bir ispat yapmak için altı aşamadan geçilmesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu aşamalar *teoremin iç yüzünü anlama; beyin fırtınası, keşfetme ve varsayımda bulunma; örneklerle destekleme, yaratıcı düşünmeden eleştirel düşünmeye geçme; ikna etme, ispatı doğrulama; yansıtma, belirtilen çıkarımların niteliğini değerlendirme; genelleme, aynı teoremi farklı matematiksel sistemler için ispatlamayı deneme, teoremin ve ispatın bir sonucu olarak özellikler arama* şeklindedir. İspat öğretiminin geleneksel olarak yürütüldüğü sınıflarda ise öğrencilerin bu tür aşamalardan geçmesine fırsat verilmemekte ve ispat öğrencilere tamamlanmış olarak sunulmaktadır. Dolayısıyla ispat sürecine öğrencilerin aktif bir şekilde katılabileceği, ispatın matematik içerisindeki rollerini (keşfetme, varsayımda bulunma, genelleme, ilişkilendirme vb.) öğrencilerin yaşayabileceği, bir matematikçinin ispat yaparken izlediği adımlardan geçebileceği ispat öğretimine yönelik bir model tasarlayarak öğrenme ortamlarının oluşturulması anlamlıdır.

İspat sürecine yönelik çeşitli aşamalar tanımlayan çalışmalar (Boero vd., 1995; Boero, 1999; Edwards, 1997; Perry vd., 2011) incelendiğinde belirlenen aşamaların araştırma kapsamında sadece ispat ile ilgili çeşitli etkinlikler yapmak üzere izlendiği ve ispat öğretiminde kullanılan bir öğretim modeli gibi kapsamlı olmadığı görülmektedir. Ayrıca seçilen belirli bir konuya yönelik yapılan ispat uygulamalarında izlenen aşamalar niteliğinde olmaları da genel anlamda ispat öğretimi için kullanılmadığının bir göstergesidir. Bu bakımdan öğretim kademelerinin her birinde ispat öğretimi için çoğunlukla geleneksel bir yaklaşım izlenmesinin önüne geçilmesini sağlayan yeni bir yaklaşımın oluşumuna katkıda bulunabilecek ve matematik alanında yer alan konular için kullanılabilecek bir öğretim modeline ihtiyaç olduğu aşikârdır. Öğretim kademelerinin genelinde ispat kavramına sınırlı düzeyde yer verilmesi ya da hiç yer verilmemesi ve matematiksel ispatın genellikle öğrencilerin zihnine zor bir kavram olarak yerleşmesi de ispat öğretiminde kullanılabilecek yeni bir modele gereksinim duyulduğunu açıklar niteliktedir.

Öğrenme ortamlarında izlenen öğretim yaklaşımları ya da modelleri öğrencilerin öğrenmelerini etkilediği gibi öğrenme ortamlarının asıl mimarisi olarak öğretmenlerin, öğrencilerin öğrenmelerinde etkili olduğu inkâr edilemez. Dolayısıyla bu durum öğretmenlerin matematiğin merkezinde yer alan kavramlardan biri olarak ispat kavramının öğretiminde de etkili olabileceğini göstermektedir. Derek (2011) öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde öğretmenlerin rolünün önemli olduğuna vurgu yaparak bu durumu desteklemektedir. Öğretmenlerin matematiğin doğasına yönelik düşünceleri ve ispat ile ilgili görüşleri, matematiksel ispat kavramına olan yaklaşımlarını etkilemekle birlikte öğrenme ortamlarında bu düşüncelerine dayalı olarak çeşitli davranışlar göstermektedir (Haralambos, 2000). Martin ve Harel (1989) bu durumu şu şekilde örneklendirmektedir: "Öğretmenler birkaç tane iyi seçilmiş örneğin bir ispat oluşturduğuna yönelik öğrencilerin inanmasına yol açtığı bir durumda öğrencilerin ispata yönelik zorluklar yaşamaları oldukça doğaldır." Dolayısıyla gerçekte ispat kavramı ile matematik arasında var olan yakın ilişkinin anlaşılabilmesi için öğretmenlerin ispatın matematiğin merkezinde yer alan bir yapı olduğunu kabul etmesi, ispata gereken değeri vermesi ve matematiği öğretirken ispatın rollerine yer vermesi gerekir ki öğrenciler de bu yönde anlayışlar elde edebilsinler. Ancak okul matematiğinde özellikle de lisans düzeyinde ispat öğretimi; tanım, teorem, ispat şeklinde tümdengelime dayalı bir sıralamanın takip edilmesine dayalı olarak yapılmaktadır (Almeida, 2000). Ayrıca herhangi bir matematiksel ilişkinin ispatı öğrencilere bitmiş bir ürün olarak sunulmakta ve onların ispat yapma deneyimi kazanmalarına fırsat tanınmamaktadır (Alibert ve Thomas, 1991; Ferrari, 2004). Bu tür bir yaklaşımın izlenmesi de öğrencilerin matematiksel ispatla ilgili anlamalarının yetersiz olmasına neden olmaktadır (Knuth ve Elliot, 1997). Bu bakımdan öncelikle meslek hayatına yeni atılacak olan matematik öğretmeni adayları ispat kavramına yer verilen ve ispatın özünde yer alan eylemleri bizzat kendilerinin yaşayabileceği öğrenme ortamlarında yetişmeli ki kendi öğrencilerini de elde ettikleri deneyimlere bağlı olarak yetiştirebilsinler. Dolayısıyla matematik ve matematik eğitiminde ispatın anlam ve önemi giderek artarken öğretmen adaylarının gelecekteki öğrencilerinin öğrenmelerinde de etkili olacağı düşüncesiyle ispat öğretimi üzerinde değişiklikler yapılması oldukça anlamlıdır. Bu bakımdan bu çalışmada tasarlanan İSMAT Modeli dikkate alınarak gerçekleştirilen bir ispat öğretiminin matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olup olmadığının belirlenmesi ile birlikte bu öğrenme ortamlarındaki eksikliklerin ve öğrencilerin bu ortamlarda yaşadığı güçlüklerin ortaya çıkarılmasının öğretim kademelerinde yapılan matematik derslerinin düzenlemesine katkıda bulunabileceği düşünülmektedir.

## 1. 3. Araştırmanın Sınırlılıkları

Tasarlanan öğrenme ortamına ve öğretmen adaylarının ispat süreçlerine yönelik değerlendirmeler yapabilmek adına uygulamalar esnasında beş grubun ispat süreci ile ilgili video kaydı alınıp bu grup sayısı ile sınırlı tutulmuştur.

## 1. 4. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmanın varsayımları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

1. Araştırma kapsamında öğretmen adaylarının grup çalışmaları süresince ispat yapmaya yönelik etkinlikleri dikkatli bir şekilde yürüttükleri varsayılmıştır.
2. Öğretmen adaylarının araştırma çerçevesinde uygulanan testlerde ve gerçekleştirilen mülakatlarda gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

## 1. 5. Tanımlar

İspat; yapıları ve değişkenleri belirlemek, varsayımda bulunmak ve mantıksal gerekçeleri organize etmek gibi bir grup zihinsel alışkanlıklara (Ball vd., 2002) dayalı bir süreçtir.

Muhakeme; yargılardan ya da önermelerden sonuç çıkarma, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, genellemeler yapma veya tahminlerde bulunma gibi geniş bir yelpazede ele alınabilen bir kavramdır.

Varsayımda bulunma; gerekçeleri ve ispatları yazmada gerekli olan ön şartların oluşumunda kullanılan bir yöntemdir (Senk, 1985).

# 2. LİTERATÜR TARAMASI

## 2. 1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Literatür taramasının bu bölümünde, araştırmada yer alan kavramlara ilişkin literatür ile araştırma konusu ile ilgili yapılmış çalışmalara ve bu çalışmaların sonuçlarına yönelik bilgiler sunulmuştur.

### 2. 1. 1. Araştırmada Yer Alan Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada yer alan kavramlar literatürde kabul gören tanımları ile birlikte açıklanmıştır.

#### 2. 1. 1. 1. İspat ve İspatlama

İnsanoğlu doğası gereği sahip olduğu bilgileri başkaları ile paylaşma ya da benimsediği düşünceleri başkalarına aktarma eğilimindedir. Bu eğilimi gösterirken düşüncelerini gerekçeleri ile birlikte sunarak başkalarını ikna etme ve bunların doğruluğunu onlara kabul ettirme ihtiyacı içerisindedir. Matematikçilerin ulaştıkları sonuçları ve bunları elde etme sürecinde ileri sürdükleri çıkarımları diğer matematikçilerle paylaşıp yaptıklarının kabul görmesini beklemeleri, günlük hayatta gerçekleşen bu tür durumlar ile benzerlik göstermektedir. Ancak günlük hayatta başkalarını ikna etme; tanık gösterme, kaynaklara başvurma gibi basit uygulamalarla gerçekleşirken matematik alanında ulaşılan sonucun ispatının yapılması gibi kapsamlı bir süreç dâhilinde gerçekleşmektedir. Tall (1989) matematiksel ispatın tanım, teorem ve aksiyomları gerektirmesinin başkalarını ikna etmekten farklı olduğunu belirtmesi ispat kavramının daha karmaşık bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir. Healy ve Hoyles (1998) de ispat yapmanın hipotez ve hüküm ifadelerini ayırma, uygun çıkarımları belirleme ve bu çıkarımlar arasında geçişleri sağlama gibi eylemleri içerdiğini belirterek karmaşık bir süreç olduğundan bahsetmiştir. Benzer şekilde Weber (2005) ispatın karmaşık bir matematiksel aktivite olduğuna vurgu yaparak mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutlarına sahip olduğunu ifade etmiştir. Bu bakımdan ispat basit bir matematiksel işlemden ziyade zihinsel faaliyetleri içeren bir süreçtir (Selden ve Selden, 2003). Başka bir ifade ile bireylerin matematiksel düşünme, akıl yürütme ve ilişkilendirme becerilerini kullandığı bir oluşum sürecidir.

İspat, görsel ya da deneysel veriler ile desteklenen mantıksal ve tümdengelime dayalı argümanları içermekle birlikte sezgiler ve inançlardan etkilenen kapsamlı bir süreçtir (Hoyles ve Healy, 2007). Bu bakımdan ispat sadece matematiksel bir ilişkinin doğruluğunu göstermekten ziyade zihinsel süreçleri içeren bir yapı olduğundan bahsedilebilir. Ball ve diğerlerinin (2002) yapıları ve değişkenleri belirlemek, keşfetmek, varsayımda bulunmak ve mantıksal gerekçeleri organize etmek gibi bir grup zihinsel alışkanlıkları içeren bir süreç olduğundan bahsetmesi bu durumu desteklemektedir. Greenberg (1993) ise ispatın varsayımda bulunma; aksiyom, ön teorem ve tanımlardan yararlanma; mantıksal çıkarımlarda bulunma; genellemeye varma gibi bir dizi zihinsel etkinliklerden oluştuğuna dikkat çekmektedir. Matematiksel bir duruma yönelik ispat yazıldığında ulaşılan sonuç, tümdengelime dayalı muhakemenin mükemmel bir örneği iken ispata ulaşmak için izlenecek adımları keşfetmek ise yaratıcı ve tümevarıma dayalı bir süreçtir (Remillard, 2009). Dolayısıyla ispat bir bakıma matematiksel bilginin oluşumu sürecinde keşfetme, tartışma, yansıtma, yazışma gibi eylemlerin harmanlanmış bir halidir.

Matematiksel düşünme, yazma, diyagram çizme, görselleştirme gibi zihinsel ve fiziksel eylemleri içeren ispat, aslında bir süreçtir ve ispata giden bu yoldaki basamaklardan biri de varsayımda bulunmadır (Nguyen, 2012). Varsayımın gözlemlere dayanan ispatlanmamış durumlar (Larson vd., 2001) olarak tanımlanması da ispattan önce gelen basamaklardan biri olduğunu göstermektedir. Ayrıca Senk (1985), geometride varsayımda bulunmanın gerekçeleri ve ispatları yazmada gerekli olan ön şartların oluşumunda kullanılan bir yöntem olduğunu belirterek bu durumu desteklemektedir. Yapılan araştırmalar da keşif ve varsayımda bulunmanın ispatın bilişsel süreci içinde önemli bir aşama olduğunu göstermektedir (Arzarello vd., 1998; Boero, Garuti ve Mariotti, 1996). Varsayımda bulunma, bir önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma sürecidir ve öğrencilere uygun gerekçe sunma ve ispat yapmada yardımcı olmaktadır (Frerking, 1994). Dolayısıyla matematiğe yönelik bir gelişimin ve büyümenin sağlanması, matematiksel bilginin giderek zenginleşmesi birbirini izleyen aşamalar olarak gözlemlerin tekrarlanması, varsayımda bulunma ve sonrasında da ispat yapmaya dayanmaktadır.

İspatın matematik eğitimine en büyük katkısı bireyin matematiksel anlayışının gelişimini sağlamasıdır (Hanna ve Jahnke, 1996; Hersh, 1997). Bell (1976) matematiksel ispatın doğrulama, açıklama ve sistemleştirme anlamlarına sahip olduğunu belirterek ispatın ilk işlevinin bireylerin inançlarına zemin hazırlamak olduğunu belirtmiştir. İkinci işlevini bireylerin bir sonucu anlamaları ve niçin doğru olduğuna anlam vermelerini sağlamak, üçüncü işlevinin ise düşüncelerin mantıksal yapısını açıklamak ve akıl yürütme ile tümdengelimsel çıkarımlar yapmalarını sağlamak olduğunu ileri sürmüştür. Bell'in (1976) ispatın sahip olduğu anlamlar olarak ifade ettikleri aslında ispatın birer aşamalarıdır. Baki (2008) bu aşamaları doğrulama, açıklama ve genelleme olarak ifade etmektedir. Doğrulama aşaması, iddianın doğruluğunu araştırma; açıklama aşaması, iddianın niçin doğru olduğunu açıklama; genelleme aşaması ise genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlama yapma ile ilgilidir. Hanna, Bruyn, Sidoli ve Lomas (2004) ispatı tanım, teorem, aksiyom ya da kabul edilen kurallara dayalı olarak geçerli tümdengelimsel kanıtlar oluşturacak şekilde mantık kuralları çerçevesinde kullanılması şeklinde tanımlayarak aşamalar halinde gerçekleşen mantıksal bir süreç olduğuna işaret etmektedir.

Geleneksel bakış açısına göre matematiksel ispatın temel işlevi bir teoremin sonucunu doğrulamaktır (Avigad, 2005). Ancak ispat kavramını sınırlandırılan bu bakış açısının dışında ispatın matematik öğretiminde farklı işlevlere de sahip olduğunu vurgulayan birçok araştırmacı bulunmaktadır (Almeida, 2003; Bell, 1976; Hanna ve Jahnke, 1996; de Villiers, 1999; Hanna, Jahnke ve Pulte, 2010). Araştırmacıların belirtikleri durumlara dayalı olarak ispatın rolleri şu şekilde tanımlanmaktadır: (1) *Doğrulama*; bir durumun doğruluğuyla ilgilidir. (2) *Açıklama*; bir durumun neden doğru olduğunu anlamaktır. (3) *Keşfetme*; yeni sonuçların icadı veya buluşudur. (4) *Sistemleştirme*; aksiyomların, kavramların ve temel teoremlerin birçok sonucunu tümdengelimsel sistem içinde organize etmedir. (5) *Zihinsel meydan okuma*; iyi bilinen bir olguyu yeni bir çatı altında birleştirme ve yeni bir perspektiften bakmadır. (6) *İletişim*; bir tanımın veya bir düşüncenin sonuçlarının anlamını araştırmadır. (7) *Deneysel bir teori oluşturma*. İspatın bu rollere sahip olduğunu belirten bu açıklamalar, matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olduğuna işaret etmektedir.

İspat yaparak matematikteki kavramlar ve terimleri açıklama ve özelliklerini ortaya çıkarma olanağı sağlanmaktadır (Herbst, 2002). Bu bakımdan matematiksel kavramların ve terimlerin sağlam temellere dayandırılarak anlatılması, öğrencilerin matematiği anlamasında büyük bir etkiye sahiptir. Lucast'ın (2003) okullarda ispata yer verilmesinin öğrencilerin problem çözme becerilerini ve bilişsel yeteneklerini geliştirdiğini belirtmesi bu durumu desteklemektedir. de Villiers (1990) da ispatın matematiksel kavramların birbiriyle ilişki içinde olduğunun fark edilmesini sağlayıp önceki bilgiler üzerine yeni bilgilerin inşa edilmesini kolaylaştırdığından bahsederek matematiksel bilgilerin anlaşılır hale gelmesindeki önemine işaret etmektedir. Hanna ve Barbeau (2010) ispatın matematikte yeni yöntem ve tekniklerin oluşmasını sağlayan ve matematiksel bilginin gelişmesine de katkıda bulunan bir araç olduğunu belirtmektedir. Bu belirtilenler; ispatın açıklama, keşfetme, ilişkilendirme gibi birçok unsuru içinde barındıran kapsamlı bir yapı olduğuna işaret etmektedir. Jahnke (2010) ise ispat kavramı ile ilgili yaptığı tanımda aslında ispatın tümevarım ve tümdengelime dayalı muhakeme türleri ile birlikte geri-çıkarım (abduction) muhakeme türünü de içeren bir yapı olduğuna vurgu yapmaktadır. Boero (1999) da bu muhakeme türlerini kapsayacak şekilde varsayımda bulunma ve matematiksel ispat oluşturma etkinliklerini aşamalar halinde tanımlamıştır. Bu aşamalar varsayımın oluşturulması, varsayımın paylaşılan metne ait geleneksel tarza göre formüle edilmesi, tam olarak ifade edilmiş varsayımın keşfi ve onun geçerliliği için uygun tartışmaların belirlenmesi, tümdengelimsel bir zincirdeki tutarlı tartışmaların seçimi ve birleşimi, bu tartışmaların matematiksel standartlara göre düzenlenmesi ve formal ispatın yapılmasıdır. Bu tür aşamalar tanımlayarak ispat sürecini varsayımda bulunmayı da içeren birbirine geçmiş etkinliklerin bir serisi olarak belirtmekle birlikte ispat yapmanın karmaşık bir bilişsel etkinlik olduğuna değinmektedir. Nguyen (2012) ise öğrencilerin dinamik geometri ortamında ispat sürecindeki gelişimi araştırmak için ispat yapmayı yedi seviyeye ayırarak tanımlamıştır. Bu seviyeler; Seviye 0 (Bilgi), Seviye 1 (Yapılandırma), Seviye 2 (Değişmezlik), Seviye 3 (Varsayım), Seviye 4 (Tartışma), Seviye 5 (İspat), Seviye 6 (Derinlemesine Araştırma)'dır. Seviye 0 (Bilgi) problemin, bilinmeyenin, verinin ve sonucun belli kısımlarına dikkat çekmek için öğrenciye açık bilgi sunar. Seviye 1 (Yapılandırma) dinamik geometri ortamında şekilleri modellemek ve yapılandırmak için öğrencilere rehberlik eder. Seviye 2 (Değişmezlik) ispatlara yönelik fikirler üretmeyi destekleyen geometrik olarak değişmeyenleri araştırmak için öğrenciye yol gösterir. Seviye 3 (Varsayım) deneysel aktivitelerden ortaya çıkan varsayımları formülize etmek için öğrenciye destek olur. Seviye 4 (Tartışma) gözlenen olayları ve geçerli varsayımları açıklayacak gerekçeler sunmada öğrenciye yardımcı olur. Seviye 5 (İspat) üretilen gerekçelere dayalı olarak ispat yazmada öğrencilere rehber olur. Seviye 6 (Derinlemesine Araştırma) genelleme, özelleştirme, benzetme gibi aktiviteler için öğrencilerin problemi derinlemesine araştırmalarına yönelik öğrencilere önerilerde bulunur. Bu tür bir seviyelendirme yaparak ispat sürecinin sadece tümdengelime dayalı ispat ile sınırlı kalmayıp birçok bilişsel etkinliği içinde barındıran önemli bir yapı olduğuna değinmektedir.

#### 2. 1. 1. 2. İspat Öğretimi

Matematikte yeni yöntem ve tekniklerin oluşumu ile matematiksel bilginin gelişimini sağlayan ispat, bir bakıma matematiğin genişletilmiş doğal bir resmini ortaya koymaktadır (Hanna ve Barbeau, 2010). Dolayısıyla matematiksel kavramların birbirleri ile olan ilişkilerini fark etme, matematiksel düşünmenin gerçekleşmesi ve matematiksel kavramların anlam kazanması, ispat kavramı ile doğrudan ilişkilidir (Flores, 2002) ve hatta bir ispatın yazılması aşaması matematiğin kendine has dilinin oluşmasında önemli bir yer tutmaktadır (Forman, Joernes, Stein ve Brown, 1998). Bu anlamda matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerin kurulmasında, matematiksel akıl yürütmede ve matematiğin dilini kullanmada önemli bir yer tutan ispat fikrine okul matematiğinde yapılan vurgu giderek artmaktadır. Örneğin NCTM (2000) matematik eğitiminin her düzeyinde ispat öğretimine önem verilmesini şiddetle tavsiye etmekte, aksi takdirde matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerin kurulmasında önemli eksiklikler oluşacağını belirtmektedir. MEB (2013) de öğrencilere kazandırılması gereken matematiksel süreç becerileri arasında akıl yürütme ve ispat yapmaya yer vererek ispat öğretiminin önemine vurgu yapmaktadır. Ancak matematiksel düşünmenin gelişimini sağlayan ispata gerekli önem gösterilmeyip matematik derslerinde neredeyse hiç yer verilmemektedir (İskenderoğlu, 2010; Chazan, 1993; Harel ve Sowder, 2007; Jones, 2000).

Varsayımda bulunma, keşfetme, ilişkilendirme, genelleme, açıklama, iletişim gibi üst düzey matematiksel etkinlikleri içinde barındıran matematiksel ispat, geleneksel bir bakış açısı ile sadece verilen bir matematiksel ifadeyi doğrulama eylemi olarak ele alınmaktadır (Avigad, 2005). Bu bakış açısının şekillendirdiği ispat öğretiminde teoremler son haliyle tamamlanmış olarak öğrencilere sunulmakta ve sunulan teoremin doğruluğu gösterilmektedir. Matematiksel iletişim kurmanın ve matematik yapmanın omurgasını oluşturan ispat bu bakış açısı ile önemsizleştirilmekte ve ispatın matematik içerisindeki rollerinin (keşfetme, varsayımda bulunma, genelleme, ilişkilendirme vb.) tam olarak yerine getirilememesine sebep olmaktadır. Bir başka deyişle bu bakış açısının şekillendirdiği ispat öğretimi öğrenciye bir matematikçi gibi davranma ve öğrencinin matematik yapmasının önüne geçmektedir.

Yapılan araştırmalar, ispat öğretimine gerekli önem verilmemesinin öğretmenlerin ispat kavramına yönelik yeterli bilgiye sahip olmamalarına bağlı olduğunu belirtmektedir (Knuth, 2002b; Manaster, 1998). Ayrıca öğretmenlerin yalnızca ileri düzey matematik sınıflarında yer alan ve ileride matematik üzerine çalışmayı düşünen öğrencilere ispat ile ilgili öğretim yapılması gerektiğine yönelik düşünceleri derslerde ispat kavramına yer vermelerini engellemektedir (Knuth, 2000). Buna bağlı olarak öğretmenlerin genel anlamda ispat öğretimine yönelik anlayışları; tamamlanmış ispatları sunma, nedenlerini öğrencilerin bulmalarını isteyerek mantıksal basamakları ifade etme, ispat yapma ve uygulama esnasında da öğrencilerden aynı mantığı kullanacakları türden başka bir ifade verme şeklinde bir yol izlemektir (İskenderoğlu, 2010). Dolayısıyla öğretmenler çoğunlukla öğrencileri ispat sürecine dâhil etmeden sadece ispatı anlatarak ispat öğretimi gerçekleştirmektedir. Yoo (2008) da öğrencilerin matematiksel ilişkileri keşfetmelerine, ispat yapmalarına, bu ispatı arkadaşlarıyla paylaşmaları ve ulaştıkları sonuçlar hakkında tartışmalarda bulunmalarına fırsat tanınmadan ispat öğretiminin yapıldığına değinmiştir. Bu durum ispat öğretiminde izlenen yaklaşımların değişime ihtiyacı olduğunun bir göstergesidir. Araştırmacılardan bazılarının da ispat öğretimi için öğrencilerin süreç içerisinde aktif olarak yer alabileceği ve keşfetmelerine olanak sağlayabilecek ortamların oluşturulmasına yönelik önerilerde bulunduğu görülmüştür (Dean 1996; Romberg, 1992; Tall, 1992; Öner, 2006). Romberg (1992) ispatın tamamlanmış bir ürün olarak sunulmasından vazgeçilerek öğrencilerin keşfetmelerine imkân verecek olanakların arttırılması gerektiğini özellikle vurgulamıştır. Edwards (1997) da keşfetmenin ispata ulaşmadan önce kavramsal alt yapıyı oluşturmaya yardımcı olduğundan bahsederek sadece ispat sürecinin son aşamasına odaklanılmasının yanlış bir uygulama olduğunu belirtmektedir. Öner (2006) ise ispat öğretiminde matematikçilerin izledikleri adımların model alınmasının öğrencilerin ispatın önemini anlamasını sağlayacağını ileri sürmüştür. Dolayısıyla ispatın doğasında yer alan eylemler temel alınarak öğrenme ortamlarının oluşturulması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Aksi takdirde bir matematikçinin gerçek yaşamındaki aktivitelerle ispat öğretiminde izlenen yaklaşımlar arasındaki uçurum daha da artacak ve ispat öğrencilerin önüne sadece tamamlanmış bir ürün olarak sunularak anlamsız öğrenmelere neden olacaktır.

### 2. 1. 1. 3. Dinamik Geometri Yazılımları ve İspat Süreci

Teknolojinin gelişmesiyle birlikte dinamik yazılımların öğrenme ve öğretme amaçlı kullanımında artışlar meydana gelmiştir. Yazılımların kullanımdaki bu artış, özellikle de matematik öğretimi için yeni fırsatları beraberinde getirmiştir. Bu bakımdan matematiği öğrenme ve öğretmede gelişimi sağlayarak etkili öğrenme ortamlarının oluşturulmasına da zemin hazırlamıştır (NCTM, 2000). Dinamik geometri yazılımlarının geometrik yapıyı oluşturma, bu yapı üzerinde ölçümler yapma, varsayımda bulunma, varsayımları test etme, genellemeler yapma gibi olanaklar tanıması (Güven, 2002) ise etkili öğrenme ortamlarının oluşumunu sağlayan en önemli özelliklerdendir. Dinamik geometri yazılımlarının öğrenme ortamlarına girmesiyle birlikte matematiksel işlemlere odaklanma önemini kaybederek matematiksel düşünmeyi geliştirme amacı daha fazla ön plana çıkmıştır (NCTM, 2000). Dinamik geometri yazılımlarının soyut kavramları somutlaştırma imkânı sunması, matematiksel düşünmenin içinde barındırdığı tahmin etme, tümevarım, tümdengelim, örnek durumları inceleme, genelleme, analoji, formal ve informal muhakeme, doğrulama gibi eylemlerin bireyler için anlamlı bir hale gelmesine yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla ispatın doğasında yer alan bu eylemlere bağlı olarak dinamik geometri yazılımlarının ispat sürecinde kullanılabileceği belirtilebilir. Baki (2002) dinamik geometri yazılımlarının varsayımda bulunma, ispat yapma ve genelleme gibi eylemlerin gerçeklemesine katkıda bulunduğunu belirterek bu durumu desteklemektedir. Güven ve Karataş (2005) da bireylerin dinamik geometri yazılımlarını kullanmasıyla keşfetme, test etme, reddetme, formüle etme, açıklama yapma fırsatı bulabileceklerini belirtmiştir. Bu durum dinamik geometri yazılımları ile desteklenen ortamların bireylerin ispatın matematik içerisindeki rollerinden haberdar olmalarını sağlayabileceğini göstermektedir.

Dinamik geometri yazılımları ile geometri daha ayrıntılı bir şekilde keşfedilebilir, çizimler kolay bir şekilde yapılandırılabilir. Ayrıca çizilen şekillerin bir kısmının sürüklenmesiyle kolaylıkla değişiklikler yapılır ve şekiller değiştiği sürece ölçümlerin sürekli güncellenmesine olanak sağlar. Dolayısıyla yapılan değişikliklerle, ilişkilerin kolaylıkla görülmesine olanak sağlayarak öğrencilerin varsayımda bulunma becerisi geliştirilebilir. Geometrik şekillerin alanlarının, çevrelerinin incelenebilmesi, şekil ile ilgili oranların veya diğer ilişkilerin hesaplanabilmesi, ilişkilere hızlı ve kolay bir şekilde ulaşılabilmesi dinamik geometri yazılımlarının varsayımda bulunma açısından kullanıma elverişli olduğunun bir kanıtıdır (Frerking, 1994). Yerushalmy (1987) de dinamik geometri yazılımlarının hızlı bir şekilde çizim yapma ve çizimler üzerinde farklı ölçümler yapma imkânı tanımasının yanı sıra örnekler üzerinden keşifler yapmayı sağladığından öğrencileri varsayımda bulunma konusunda daha iyi bir konuma getirdiğini ifade etmektedir.

Dinamik geometri yazılımlarının kullanımı, öğrencilerin varsayımda bulunmalarını kolaylaştırmalarının yanı sıra karmaşık şekillerin hızlıca yapılandırılması ve ispat için gerekli adımların belirlenmesi yönünden de yardımcı olmaktadır (Chazan ve Houde, 1989; Clements, 2003). Yazılımların varsayımları doğrulamak için kullanılmasının ispatın gerekli olduğu algısının gelişmesini de sağlamaktadır (Clements ve Battista, 1992). Dolayısıyla DGY geometrik şekillerin çiziminde ve özelliklerin anlaşılmasında, varsayımda bulunmada önemli bir role sahip olmasının yanında geometrik ispat yapmada da etkili olan teknolojik araçlardandır (de Villiers, 2004). Arcavi ve Hadas (1996) dinamik geometri ortamının öğrencilerin belirli olayları keşfetmesini ve ele almasını sağladığını, yapılan incelemeler sonucunda bir görüş elde edebilmenin önünü açarak ispatlamaya ve ileriki keşiflere zemin hazırladığına vurgu yapmaktadır. Ayrıca öğrencilerin sonuçları doğrulama ve karara bağlamada kimseye ihtiyaç duymadan keşifleri ve varsayımları yürütebileceklerini dile getirmektedir. de Villiers (1999; 2002) da DGY'nin geometrik ispata yönelik bazı etkileri olduğunu belirterek bunları şu şekilde sıralamaktadır:

1. Soyut gerekçeleri somutlaştırarak öğrencilerin geometriyi anlamlandırmasına olanak sağlayabilir.
2. İspat gerektiren problemlerin kolay bir şekilde incelenmesine yardımcı olabilir.
3. Aynı ortamda farklı şekillerin oluşturulmasını sağlayarak aralarındaki ilişkinin kolayca görülmesiyle ispatın anlaşılmasına katkıda bulunabilir.
4. Tümdengelim yöntemiyle geometrik ispat yapma konusunda fırsatlar sunabilir.
5. Geometrik ispat için gerekli olan bütün donanımları sunabilir.

6. Renk ve hareket ettirme özelliklerinden yararlanarak kolay ve anlaşılır geometrik ispatlar oluşturmaya yardımcı olabilir.
7. Öğretmenlerin geometrik teoremlerin ispatlarını öğrencilere kısa sürede açık ve anlaşılır bir şekilde görsellerle zenginleştirerek öğretmelerine olanak sağlayabilir.

Dinamik geometri yazılımları yukarıda da belirtildiği gibi hem öğrencilerin geometriyi anlamlandırmasına hem de öğretmenlerin daha anlaşılır ve verimli bir şekilde öğretim yapmasına yardımcı olmaktadır. Başka bir ifade ile bu yazılımlar bireylere geometrik kavramları yapılandırma ve yapılandırırken özelliklerini keşfetme fırsatı tanımakla kalmayıp yazılımın sunduğu olanaklar ile bu özelliklerin neden ve nasıl oluştuğuna anlam verilmesine de yardımcı olmaktadır.

#### 2. 1. 1. 4. İSMAT Modeli

İspat öğretiminde kullanılabilecek ve öğrenciler için uygun olabilecek bir modele karar verebilmek amacıyla literatür taraması yapılmıştır ve araştırmacılardan bazılarının (Boero vd., 1995; Boero, 1999; Edwards, 1997; Perry vd., 2011) formal ispata geçmeden önce çeşitli muhakeme aktivitelerinin gerçekleştiğini belirttiği ve ispatın bir süreç olduğuna yönelik vurgulamalar yaptığı belirlenmiştir. Ayrıca Popper (1979) ve Lakatos'un (1961, 1976) bahsettiği eylemler ve sosyal boyuta modelde yer verilmeye çalışılmıştır. Yapılan çalışmalar doğrultusunda ispatın fonksiyonlarını da göz önünde bulundurarak modelin son hali oluşturulmuş ve modele İSMAT adı verilmiştir.

*İSMAT Modeli*; ispat yapmanın, sadece verilen bir teoremin doğruluğunu göstermek için yapılan bir eylem olmadığını ortaya çıkarmayı ve ispatın doğasında yer alan eylemlerin yaşanmasını sağlayarak öğrencilerin gözünde anlamlı bir eylem haline gelmesini amaçlayan bir modeldir. İSMAT Modeli; *problem durumunu anlama, yapı oluşturma, oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma, ilişkiyi önerme olarak ifade etme, ispatlama, ispatın tutarlılığını inceleme* ve *ispatı formal hale dönüştürme* olmak üzere yedi aşamadan oluşmaktadır.

*Problem durumunu anlama* aşaması verilen problemi anlayarak var olan ilişkileri bulmaya yönelik girişimde bulunmanın başlangıç noktasını temsil etmektedir. Problem çözmeyi etkileyen en önemli faktörler arasında problemi anlamanın olduğu (Garderen ve Montague, 2003; Karataş ve Güven, 2004; Mayer, 1982; Polya, 1957, 1973; Stoyanova, 2005) düşünüldüğünde bu aşamanın gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Ayrıca Polya'nın (1957) dört aşamalı problem çözme modelinin ilk aşamasında problemi anlamaya yer vermesi de problem durumunu anlamanın önemine işaret etmektedir. Bir problem durumunun özünde yer alanı ortaya çıkarma ve ne sorulduğunu anlama açısından gerek problem çözmenin gerekse ispat yapmanın ilk aşamasının problem durumunu anlama olması olasıdır. Ayrıca ispat yapmanın varsayımların ifade edilerek test edildiği karmaşık ve sistemli bir problem çözme aktivitesi (Shipley, 1999) olması da bu aşamanın model için uygun olduğunu göstermektedir. Araştırmacıların bazılarının (Boero vd., 1995; Boero, 1999; Edwards, 1997; Perry vd., 2011) ispata yönelik tanımladıkları süreçlerde problem durumunu anlama ayrı bir aşama olarak değil, diğer aşamaların içine gömülmüş olarak yer almaktadır. Ayrı bir aşama olarak yer alması, bireylerin mevcut duruma odaklanmasını sağlayarak problem durumunun daha anlaşılır hale gelmesine yardımcı olabilir. Bu da problem durumunu anlama gibi bir aşamanın yer alması gerektiği gerçeğini ortaya çıkarmaktadır.

Bu model uygulanırken öğretmen adayları birlikte çalışmak üzere gruplara ayrılır. Belirtilen aşamada öğretmen adaylarından beklenen davranışlar ise şu şekildedir:

1. Gruplara açık uçlu geometrik bir problem durumu sunulur.
2. Gruplar problem durumunun özünü kavramak için öncelikle bireysel olarak çalışır.
3. Grup üyelerinin her biri problem durumunda asıl sorulmak isteneni ortaya çıkarmak için uğraşır.
4. Problem durumunu anlamaya çalışırken dinamik yazılımlardan yararlanabilirler.
5. Bireysel çalışmanın sonunda grup üyeleri bir araya gelip problemle ilgili düşüncelerini paylaşarak ortak görüşlerini belirlerler.

Bu aşamada öğrencilerin önce bireysel sonra grup üyeleri ile bir araya gelerek çalışması esas alınmıştır. Popper'ın (1979) belirttiği bireyin sahip olduğu üç dünyanın küçük bir döngüsü bu aşamada gerçekleşmektedir. Bireyin öncelikle kendi deneyimi ve inançları ile problem üzerinde uğraşması birinci dünyayı, bu uğraşları sonunda sahip olduğu bilgileri arkadaşlarıyla paylaşması da üçüncü dünyayı anımsatması bu durumu destekler niteliktedir. Ayrıca Popper (1979) ve Lakatos'un (1961) bilginin sosyal etkileşim sonunda oluştuğunu belirtmesi de aşamanın bu yönde şekillenmesini sağlamıştır.

*Yapı oluşturma* aşaması problem durumunun öğrencilerin zihninde daha iyi canlanması ve belirgin hale gelmesi bakımından oldukça önemlidir. Nguyen (2012) ispatın matematiksel düşünme, yazma, diyagram çizme, görselleştirme gibi zihinsel ve fiziksel eylemleri içeren bir süreç olduğundan bahsederek aslında var olan durumun bir temsilini ortaya koymanın ispatın doğasında yer alan bir eylem olduğuna vurgu yapmaktadır. Bu durum da yapı oluşturma aşamasının mevcut durumun görselleştirilmesinde yardımcı olabileceğini ve ispatın doğasını yansıtabileceğini ortaya çıkarmaktadır. Geometrik yapıyı oluşturma ispat sürecinin başlangıç aşamasını destekleyen ve ilişkiler üzerine odaklanma imkânı vererek ispat yapmaya teşvik eden önemli bir eylemdir (Mogetta, Olivero ve Jones, 1999). Bu durum aşamanın ispata yardımcı olduğunu göstermekle birlikte gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu aşamada öğrencilerden beklenen davranışlar ise şu şekildedir:

1. Problem durumunda yer alan ifadeler doğrultusunda her bir grup geometrik yapıyı oluşturur.
2. Geometrik yapıyı oluştururken bireylerin geometrik bilgileri ve çizim kurallarını dikkate almaları beklenir.
3. Geometrik yapıyı oluştururken dinamik yazılımlardan yararlanabilirler.
4. Geometrik yapıyı oluşturan alt figürler hakkında daha ayrıntılı bilgi sahibi olurlar.
5. İspata yönelik bir başlangıç için zihinlerinde bazı düşüncelerin belirmesi beklenir.

Bu aşama; öğrencinin problem durumunu görsel hale getirmesi, var olan ilişkiyi keşfetmeye yönelik girişimde bulunması, ispat yazmaya dair ipuçları yakalaması esaslarına dayalı olarak oluşturulmuştur. Bu durum da yapı oluşturma aşamasının keşfetmenin bir ön adımı olduğunun ve ispatın fonksiyonlarından keşfetmeye yönelik eylemleri yansıttığının bir göstergesidir.

*Oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma* aşaması problem durumda yer alan ilişkilere yönelik keşiflerin yapıldığı bir aşamadır. Varsayımın gözlemlere dayanan ispatlanmamış durumlar (Larson vd., 2001) olarak tanımlanması, varsayımda bulunmanın ispatı yapılacak olan ifadenin belirlenmesi bakımından bir ön adım ve ispata giden yoldaki aşamalardan biri olduğuna işaret etmektedir. Ayrıca Senk (1985), geometride varsayımda bulunmanın gerekçeleri ve ispatları yazmada gerekli olan ön şartların oluşumunda kullanılan bir yöntem olduğunu belirterek bu durumu desteklemektedir. Yapılan araştırmalar da keşif ve varsayımda bulunmanın ispatın bilişsel süreci içinde önemli bir aşama olduğunu göstermektedir (Arzarello, vd., 1998; Boero vd., 1996). Ayrıca belirtilen farklı durumlar üzerine öğrencinin düşünmesini sağlayarak buldukları varsayımların bu durumlar için de geçerli olup olmadığını incelemelerine fırsat tanıyan bir aşamadır. Böylece öğrencilerin varsayımları ile ilgili mantıklı çıkarımlarda bulunmalarına, varsayımlar üzerine düşünmeleri ve hangi şartlar altında bu varsayımların geçerli olduğunu belirtmelerine olanak sağlamaktadır. Bununla birlikte öğrencilerin farklı bakış açısı kazanmalarına fırsat tanımaktadır. Varsayımda bulunmanın bir önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma süreci (Frerking, 1994) olduğu dikkate alındığında bu aşama ile önermenin sınırlarının belirlenmesinin kolaylaşacağı aşikârdır. Varsayımda bulunma ve bunlar üzerine tartışmaya öğretim içinde yer verildiği takdirde geometrik olayların keşfi ile birlikte varsayımların doğruluğu hakkında gerekçeler sunma yolu açılır ve böylece ispatlar için de zemin hazırlanabilir (Gillis, 2005). Bu bakımdan ispata giden adımlar arasında olması gereken aşamalardan biridir. Bu aşamada öğrencilerden beklenen davranışlar ise aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Geometri yapı üzerinde grup üyelerinin her biri çeşitli ölçümler yapar.
2. Ölçümlere dayalı olarak yapı üzerindeki ilişkileri araştırırlar.
3. Buldukları ilişkilere dayalı olarak varsayımda bulunurlar.
4. Varsayımlarını grup içinde paylaşırlar.
5. Gruplar buldukları varsayımların farklı durumlardaki işlevselliğini test ederler.
6. Kendi aralarında varsayımların işlevselliğine yönelik tartışırlar.
7. Tartışmalar sonucunda ortak varsayımlarını ifade ederler.
8. Gerekli durumlarda dinamik yazılımlardan yararlanabilirler.

Bu aşama öğrencilerin mevcut durum üzerinde incelemeler yapması, bu incelemeler sonucunda var olan ilişkileri bulma gibi esaslara dayanmaktadır. Ayrıca öğrencilerin sezgi ve deneyimlerinden mevcut olan ilişkileri bulmaları ispatın fonksiyonlarından keşfetmeyi yansıtan bir aşamadır. Bu aşama dâhilinde çeşitli ölçümler yaparak ilişkilerin araştırılması ile tümevarıma dayalı bir muhakemenin süreç içinde gerçekleşmesi sağlanmaktadır. Bununla birlikte varsayımda bulunmaları sonucunda buna nasıl ulaştıklarına yönelik açıklamalar yapma gereksinimini duyarak geriye doğru derinlemesine bir inceleme yaparak geri-çıkarım (abduction) muhakeme türünün bir uygulamasının gerçekleşmesine fırsat tanıyan bir aşamadır. Bu aşama içerisinde bireylerin kendi incelemeleri sonrasında bunları diğer arkadaşlarıyla paylaşması ise bilgi oluşumunun sosyal ortamlarda gerçekleştiği (Lakatos, 1961; Popper, 1979) ilkesini yansıtmaktadır. Bunun dışında birey bu aşamada bilgi oluşurken Popper'ın (1979) bahsettiği üç farklı dünyanın her birinden geçmektedir. Ayrıca bu aşama öğrencinin farklı durumlar üzerine değerlendirmeler yapması, bu değerlendirmeler sonucunda varsayımlarına son şeklini vermesi ve öğrencilerin birbirleriyle bilgi paylaşımında bulunması esaslarını içermektedir. Öğrencilerin yeni bir bakış açısıyla varsayımlar üzerine düşünmesi ve farklı durumlar üzerine tartışmalar yapması anlamında da fırsatlar tanımaktadır. Bu durum ispatın fonksiyonlarından zihinsel meydan okuma ve iletişimi yansıtan eylemleri içeren bir aşama olduğunu göstermektedir. Öğrenciler grup halinde çalışarak kendi aralarında tartışma ortamı oluşturmaları ise Popper (1979) ve Lakatos'un (1961) belirttiği bilginin bireyin çevresiyle etkileşimi sonucunda oluşması ilkesini yansıttığını göstermektedir.

*İlişkiyi önerme olarak ifade etme* aşaması varsayıma yönelik farklı durumlar üzerinde incelemeler yapılarak varsayım ifadesinin kesinleştiği, önermenin sınırlarının belirgin bir hale gelerek hipotez ve hükmün belirlenip önermenin ifade edildiği aşamadır. Bu aşamada öğrenci varsayım üzerinden genellemelere vararak bu ifadeyi önerme haline getirmek amacıyla matematiksel sembolleri kullanabilmektedir. Böylece matematik dilini nasıl kullanacağı, hipotez ve hükmü nasıl belirleyeceği, önermeyi sözel olarak ve matematiksel semboller yardımıyla nasıl ifade edeceği hakkında deneyim sahibi olabilmektedir. Matematik eğitiminin amaçları arasında öğrencinin matematiksel terimleri uygun bir şekilde kullanacak hale gelerek matematiksel konuşmayı öğrenmenin yer alması (Baki, 2008) bu aşamanın önemini ortaya koymaktadır. Bu aşamada öğrencilerden beklenen davranışlar ise aşağıda yer almaktadır:

1. Gruplar belirtikleri varsayımlar üzerinden genellemeler yaparak varsayımları önerme haline getirirler.
2. Önermeler üzerinde kontroller yaparlar.
3. Önermelere son şeklini vererek bunları ifade ederler.
4. Önermelerini matematiksel semboller yardımıyla belirtirler.
5. Gerekli durumlarda dinamik yazılımlardan yararlanabilirler.

Bu aşama öğrencinin varsayımlarından genellemelere varma, sözel olarak ve matematiksel semboller yardımıyla önermeyi ifade etme esaslarına dayanmaktadır. Ayrıca matematiksel terimlerin kullanılmasını sağlaması bakımından ispatın fonksiyonlarından sistemleştirmeyi yansıtan bir aşamadır.

*İspatlama* aşaması öğrencinin belirlediği önermenin doğruluğunu göstermek ve doğruluğuna yönelik uygun gerekçeler sunmak için ispat planını tasarladığı aşamadır. Öğrenci bu aşamada hangi adımları takip ederek önermenin doğruluğunu göstereceğine karar vermeyi ve bu adımları niçin uygulayacağına yönelik mantıksal gerekçeler sunmayı öğrenebilmektedir. Bu aşamanın varlığı ile öğrenci sistemli bir şekilde uygulamak istediği adımları sunma ve neyi niçin yaptığı üzerine düşünerek matematiksel alt yapısının sağlamlaşmasının önü açılabilmektedir. Bu aşamada yapılan eylemlerin çoğu öğrencinin ispatın fonksiyonlarından açıklama, doğrulama ve sistemleştirme eylemlerini yerine getirmelerine yardımcı olabilmektedir. Öğrenci uyguladığı adımlara yönelik gerekçeler sunarak açıklama eylemini, bulduğu önermenin geçerliliğine yönelik çalışmalarda bulunarak doğrulama eylemini ve yaptıklarını matematik dilini kullanıp ifade ederek de sistemleştirme eylemlerini gerçekleştirebilmektedir. Bu durum aşamanın önemini ortaya çıkarmaktadır. Bu aşamada öğrencilerden beklenen davranışlar ise aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Önceki aşamalarda yaptıkları incelemelere dayanarak önermenin doğruluğuna yönelik ispatı nasıl yapacaklarına karar verirler.
2. İspat için kullanacakları tanımları, aksiyomları veya teoremleri belirlemeye çalışırlar.
3. İspata yönelik bir plan hazırlarlar.
4. Gerekli durumlarda dinamik yazılımlardan yararlanabilirler.

Bu aşama ispata yönelik hangi adımların takip edileceğine karar verme; hangi tanım, aksiyom ve teoremlerden yararlanılacağını ifade ederek uygun gerekçeler sunma, uygun bir ispat planı oluşturma esaslarına dayanmaktadır.

*İspatın tutarlılığını inceleme* aşaması bir öğrencinin tasarladığı ispatın diğer öğrenciler tarafından incelenerek değerlendirildiği aşamadır. Bu aşamada öğrenciler etkileşim içinde bulunarak bilgi alışverişinde bulanabilmekte, birbirlerinin ispat planlarındaki hatalarını ve eksiklerini belirtebilmekte, ispat yapmanın yanı sıra ispata yönelik değerlendirmeler yapabilecek fırsatlar edinebilmektedir. Öğrenciler tartışma ortamında eksiklerinin ve hatalarının farkına vararak önermelere yönelik ispat planlarını eksiksiz ve daha mantıklı bir şekilde tasarlayabilmektedir. Popper (1979) nesnel bilginin bireylerin birbirleriyle paylaşımda bulunması ve ortak karara varması ile oluşabileceğini belirtmesi bu durumu desteklemektedir. Ayrıca nesnel bilginin bireyin sahip olduğu üçüncü dünya olan sosyal dünya, yani matematik dünyasında gerçekleştiğini belirtmektedir. Bir bakıma bu aşamayı uygulayarak öğrencilerin kendi matematik dünyalarını kurmalarına fırsat tanınmaktadır. Lakatos (1961) da bilginin oluşumunda bireylerin birbirleriyle etkileşiminin ve sosyal ortamın olumlu bir etkisinin olduğuna vurgu yaparak aynı noktaya temas etmektedir. Bu durum da aşamanın gerekli olduğu gerçeğini pekiştirmektedir. Bu aşamada öğrencilerden beklenen davranışlar ise aşağıda yer almaktadır:

1. İspata yönelik yapılan planın geçerliliğini ve tutarlılığını incelerler.
2. Grupların yaptıkları ispat planları gruplar arasında değiştirilir.
3. Her bir grup diğer gruplardan birinin ispatını değerlendirir.
4. Değerlendirmeler sonucunda eksikler ve hatalı durumları ifade ederler.
5. Gerekli durumlarda dinamik yazılımlardan yararlanabilirler.

Bu aşama öğrencinin tasarladığı ispat planının diğer öğrenciler tarafından incelenmesi; incelemeleri sonucunda eksikleri varsa hangi tanım, aksiyom veya teoremleri kullanmaları gerektiğine dair önerilerde bulunmaları, hataları varsa bunları belirtmeleri; daha mantıklı ispat planları tasarlamalarına yardımcı olma esaslarına dayanmaktadır. Öğrencilerin birbirleriyle etkileşimleri sonucunda ispatlarını şekillendirebilmeleri ispatın fonksiyonlarından iletişimin süreç içinde gerçekleştiğini göstermektedir.

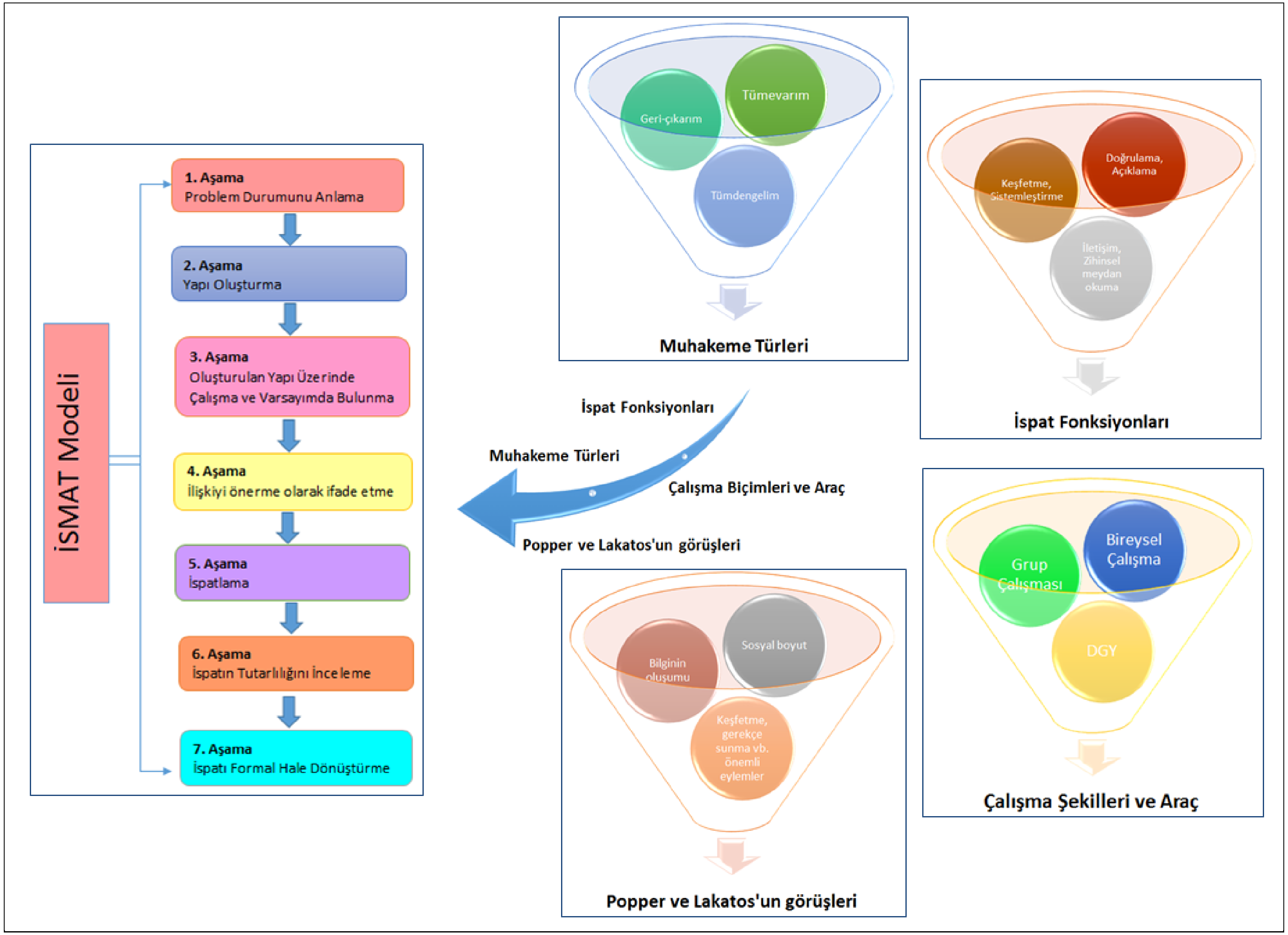
*İspatı formal hale dönüştürme* aşaması ispat planının değerlendirilmesi sonucunda belirlenen eksiklikler ve hatalar dikkate alınarak ispatın son haline getirildiği aşamadır. Bu aşama ile öğrenci eksikleri ve hatalarının farkına vararak eksiksiz ve anlaşılır bir ispatın nasıl yazılabileceği hakkında bilgi sahibi olabilmektedir. Böylece tümdengelime dayalı muhakemelerde bulunarak kendi ispatlarına ulaşabilmeyi öğrenebilmektedir.

Matematiksel kavramların birbirleri ile olan ilişkilerini fark etme, matematiksel düşünmenin gerçekleşmesi ve matematiksel kavramların anlam kazanması ispat yapmaya dayanmaktadır (Flores, 2002) ve hatta ispat yazmaları matematik dilini de daha etkili kullanmalarını sağlamaktadır (Forman vd., 1998). Dolayısıyla öğrencilerin bir ispatı yapma bakımından iyi olması, matematiksel kavramlar arasında ilişkiler kurabileceğini; tanım, aksiyom ve teoremlerin anlamlarını özümseyerek uygun yerlerde kullanabileceğini göstermektedir. Bu durum öğrencilerin kendi ispatlarını oluşturması ve bu tür aşamalardan geçmesi gerektiğini ortaya çıkarmaktadır. Bu aşamada öğrencilerden beklenen davranışlar ise aşağıda yer almaktadır:

1. Gruplar arasında yapılan değerlendirmelere dayalı olarak ispat planları üzerinde düzenlemeler yaparlar.
2. İspat planına son şeklini verirler.
3. İspat planını uygularlar.

Bu aşama öğrencilerin eksiklerini gidermesi, hatalarını düzeltmesi, birbiriyle ilişkili olan adımlardan oluşan mantıklı bir ispat yazmayı öğrenmeleri esaslarına dayanmaktadır. Uygun adımlardan oluşan bir ispatı yazarken matematik dilinin uygun bir şekilde kullanılması, ispata yönelik gerekçelerin sunulması ve önermenin doğruluğunun gösterilmesi sırasıyla ispatın fonksiyonlarından sistemleştirme, açıklama ve doğrulama eylemlerinin bu aşamada yer aldığına işaret etmektedir.

İSMAT Modelinin aşamaları ve bu modelin dayandığı temel ilkeleri özetleyen Şekil 1 aşağıda yer almaktadır.




Şekil 1. İSMAT Modeli aşamaları ve modelin dayandığı temel ilkeler

### 2. 1. 2. Konu ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Yapılan bu araştırmada İSMAT adı verilen bir modelin tanımlanması ile birlikte modelin aşamaları temel alınarak tasarlanan öğrenme ortamının, öğretmen adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmaları üzerine etkisi incelenmiştir. Bu bölümde ise araştırmanın yürütülmesine temel oluşturan ve mevcut problemin çözümüne yönelik öneriler sunan diğer çalışmalar kısaca anlatılmıştır. Mevcut probleme çözüm getirmesi beklenen ve bu bağlamda literatür taramasına yön veren sorular şu şekildedir:

1. İspat yapma ve varsayımda bulunmayı geliştirmeye yönelik öğrenme ortamları nasıl olmalıdır?
2. İspat sürecinde yaşanan zorluklar ve bu zorlukların nedenleri nelerdir?

Bu sorulara cevap verebilecek literatürdeki çalışmalar aşağıda alt başlıklar halinde özetlenmiştir.

#### 2. 1. 2. 1. İspat Öğretimi ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Matematiksel bilgi, sosyal yapılanma ve bireysel yorumlamaya yönelik süreçlerin sonucunda ortaya çıkmaktadır (Steinbring, 2005). Matematiksel ispatın yeni sonuçlar elde etmenin yanı sıra önceki sonuçların alternatif gösterimlerini yapma amaçlı kullanılması (Uğurel, 2010) matematiksel bilgi birikiminin oluşumunu sağlayan bir yapı olduğunu göstermektedir. Ayrıca ulaşılan sonuçların başkalarıyla paylaşılması sonucunda kabul görmesi durumunda matematiksel bilginin varlığından söz edilmeye başlanması sosyal bir boyuta sahip olduğuna işaret ederek aslında matematiksel bilginin oluşumunu sağlayan süreçlerin ispat yapmaya yönelik izlenen adımlarla çakıştığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla matematiksel ispat, matematiğin temelini oluşturan ve bir bakıma matematiksel bilginin bir oluşum sürecidir. Almeida (2000) da ispatın matematik yapma ve anlamada temel bir aktivite olduğundan söz etmesi bu durumu destekler niteliktedir. Bu bakımdan ispat matematiği öğrenmede önemli bir eşik noktasıdır (Duval, 2007). Ayrıca herhangi bir geometrik durumda yer alan belirli bir düzeni araştırma, varsayımları formülleştirme, geometrik olayın doğruluğunu belirleme gibi varsayım bulmayı destekleyen eylemler ve bunun yanı sıra formal ispata doğru yönelmeyi sağlayan adımları araştırma ve düzenleme gibi eylemleri içeren kapsamlı bir yapıdır (Perry vd., 2011). İspatın birçok eylemi içinde barındırması ise bireylerin matematiksel bir duruma yönelik ispata ulaşırken birçok aşamadan geçtiğine dair bir işarettir.

Araştırmacılardan bazıları da formal ispata geçmeden önce çeşitli muhakeme aktivitelerinin gerçekleştiği ve ispatın bir süreç olduğuna yönelik vurgu yaparak çeşitli aşamalar tanımlamışlardır (Boero vd., 1995; Boero, 1999; Edwards, 1997; Perry vd., 2011). Boero ve diğerleri (1995) ispatlamanın bir süreç dâhilinde gerçekleştiğini belirterek *problem kurma, varsayımda bulunma, varsayımlar üzerine tartışma, önermeleri düzenleme, ispata hazırlanma, yeterli şartı ispatlama, gerekli şartı ispatlama* ve *son tartışma* olmak üzere 8 aşamadan oluşan bir süreç tanımlamıştır. *Problem kurma* aşamasında bireylere bireysel veya grup olarak çalışabilecekleri bir problem durumu sunulmakta ve bireyin durum üzerinde incelemeler yapmasını sağlayan çeşitli sorular sorulmaktadır. Ayrıca bu aşamada bireyi aktif olmaya yönelten olanaklar sağlanarak bireyin keşif yapmasının önü açılmaktadır. *Varsayımda bulunma* aşamasında problem durumuna uygun olarak bireyler gerekli araçları kullanarak gözlemler yapmakta ve yaptıkları gözlemler doğrultusunda da varsayımlar üretmektedirler. *Varsayımlar üzerine tartışma* aşamasında bireylere rehberlik edilerek ürettikleri varsayımlar üzerine tartışmalar yapmaları sağlanır. Bu aşamada bireyler problemin farklı yönlerini yansıtan doğru varsayımları, tartışmalar yardımıyla belirler ve bu varsayımları önerme haline getirene kadar bunlar üzerinde tartışma yapmaya devam ederler. *Önermeleri düzenleme* aşamasında, yapılan tartışmalar ve rehberlikler aracılığıyla bireyler önermelerini kesin ifadelerle belirtirler. Ayrıca bireyler ürettikleri önermeleri matematiksel olarak da ifade ederler. *İspata hazırlanma* aşamasında bireylerin ürettikleri varsayımlar ve sonrasında oluşturdukları önermeler arasındaki farklılıklar ve benzerlikleri incelemeleri açısından bireysel araştırmalar yaptırılır. Ayrıca bireylere sorulan sorular yardımıyla kendi çalışmaları üzerinde düşünmeleri sağlanır. Böylece ispatın gerekliliği sezdirilir ve bireyler ispata teşvik edilir. Bunun yanı sıra önermelerin geçerliliğine yönelik zihinlerinde kuşkular oluşturularak çalışmalarına eleştirel bir gözle bakmaları ve ispata dair doğru adımlar atmaları sağlanır. *Yeterli şartı ispatlama* ve *gerekli şartı ispatlama* aşamalarında bireysel çalışmalar ve grup çalışmaları yapılır. Öncelikle bireyler ikili çalışmalar yaparak bir ispat metni oluştururlar. Daha sonra ispat metni üzerinde yapılan bireysel çalışmalarla ispatın yeterli ve gerekli şartları üzerine incelemeler yaparlar. Bu aşamalarda kısa tartışmalar da gerçekleşir. *Son tartışma* aşamasında ise bütün etkinlik boyunca yapılanlar bireyler tarafından evde gözden geçirilir. Benzer şekilde Boero (1999) varsayımda bulunma ve matematiksel ispat aktivitelerini içeren 6 aşama tanımlamıştır. Bu aşamalar *varsayımda bulunma, varsayımları formülleştirme, varsayımların içeriğinin ve geçerliliğinin sınırlarının incelenmesi, tümdengelimsel bir zincir oluşturmak için tutarlı, teorik adımları seçme ve ilişkilendirme, kabul edilebilir bir ispat için ilişkilendirilmiş adımların matematiksel standartlara göre düzenlenmesi, formal ispatın teklifi*dir. *Varsayımda bulunma* aşaması problem durumunu keşfetme, problemde yer alan düzeni belirleme, böylesi bir düzen altındaki durumları tanımlama, bunlara dayanarak varsayımlar üretme ve üretilen varsayımların uygunluğu için savlar ortaya koyma gibi eylemleri içerir. *Varsayımları* *formülleştirme* aşamasında problem durumu üzerinde yapılan incelemeler sonucunda elde edilen varsayımlar kesin ifadelerle belirtilir. *Varsayımların içeriğinin ve geçerliliğinin sınırlarının incelenmesi* aşamasında varsayımlar ve incelemeler arasındaki ilişkileri anlamaya çabalama, mantıksal ve dilbilimsel yönden uygunluğunu araştırma, formal ayrıntılar üzerine incelemeler yapma, varsayımların geçerliliğine yönelik uygun çıkarımlarda bulunma, varsayımları ilgili teorilerle ilişkilendirme ve uygun ilişkileri tahmin etme gibi eylemler yapılmaktadır. Bu aşamada amaç, varsayımlar için uygun savları tanımlama ve ispatın kaba olarak bir taslağını çıkarmaktır. Bu aşama varsayımları gerekçelendirme, varsayımları inceleme, daha fazla bilgi toplama ve ispat fikrini oluşturma olmak üzere dört alt aşamaya ayrılabilir. *Tümdengelimsel bir zincir oluşturmak için tutarlı, teorik adımları seçme ve ilişkilendirme* aşamasında birey yaptığı çalışmaları arkadaşlarıyla paylaşarak tümdengelimsel zinciri oluşturabilecek uygun, mantıklı ve teorik adımların seçimi yapar. Ayrıca bu adımlar arasında ilişkilendirmeler yaparak adımlar arasında mantıklı geçişlerin oluşmasına çalışırlar. Önceki aşamada seçilen savlar ve ispat fikrine dayalı olarak ispatın bir taslağını oluşturan tümdengelimsel zincirde bu savlar birleştirilir. *Kabul edilebilir bir ispat için ilişkilendirilmiş adımların matematiksel standartlara göre düzenlenmesi* aşamasında, bireyler önceki aşamada belirledikleri adımları matematiksel olarak ifade ederler ve adımların oluşturduğu zincir üzerinde çeşitli düzenlemeler yaparlar. Bu aşama ispat süreci ile ilgili önceki aşamalara genel olarak göz atmayı sağlar. *Formal ispatın teklifi* aşamasında önceki aşamalarda belirlenen ve matematiksel forma dönüştürülen adımlar birleştirilerek ispat oluşturulur. Bu aşama bazen yalnızca ispatı oluşturan parçalarla ilgilidir. Edwards (1997) formal ispata ulaşmadan önce çeşitli muhakeme aktivitelerinin gerçekleştiğini belirtmektedir. Bu muhakeme aktivitelerinin *fark etme, tanımlama, varsayımda bulunma, tümevarımsal muhakeme, tümdengelimsel muhakeme* olduğuna dikkat çekerek ispatlamadan önce bu aktivitelerin yer aldığı bir süreçten bahsetmektedir. Bu sürecin aktivitelerinden *fark etme* aşaması bir bakıma keşfetme veya problem çözme sürecinin bir parçasıdır. Örüntüleri, mevcut düzeni, kuralları yapılandırma; matematiksel durumda yer alan ilişkileri araştırma ve tanımlama gibi eylemler bu aşamada yer almaktadır. *Tanımlama* aşamasında belirlenen düzen veya kurallar kelimelerle, matematiksel notasyonlarla ya da açıklamalı resim veya diyagramlar gibi diğer temsil şekilleri ile ifade edilmektedir. *Varsayımda bulunma* aşamasında doğru olabileceği düşünülen örüntüler oluşturulur. Ayrıca örüntülerin doğruluğuna yönelik beklentiler belirtilir. Varsayımların doğruluğuna yönelik çeşitli kontroller yapılarak varsayımlar yeniden düzenlenir. Bu aşamada genellemeye doğru giderken önermeleri üretmek ve test etmek için dinamik yazılımlardan da yararlanılabilir. *Tümevarımsal muhakeme* aşamasında belirlenen örüntünün uygun olup olmadığını görmek için özel durumlar kontrol edilir. Bu aşama varsayımların özel örneklerini inceleyerek onları test etmeye vurgu yapar. Matematiksel varsayımlara yönelik bir kesinlik oluşturmak için yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. *Tümdengelimsel muhakeme* aşamasında matematiksel sonuçları veya matematiksel yapıya yönelik sezgileri kullanarak genellemelerin niçin doğru olduğunu göstermeye yönelik yollar aranır. Perry ve diğerleri (2011) ise ispatlama aktivitesinin iki süreçten oluştuğunu belirtmektedir. İlk sürecin varsayım bulmayı destekleyen eylemleri içerdiğini ve sürecin problem durumunda yer alan düzeni araştırmak için bilgisayara dayalı keşfetme eylemleri ile başladığını ifade etmektedir. Ayrıca varsayımların formülleştirilmesi ve öne sürülen varsayımların incelenmesi ile de devam ettiğini dile getirmektedir. İkinci süreçte ise bir ispatın oluşması için fikirlerin araştırılması ve düzenlenmesi gerektiğine dikkat çekmektedir.

Araştırmacıların belirledikleri süreçler belirli yönlerden birbirine benzemektedir. Süreçlerin her birinde ilk aşama problem durumu üzerinde keşifler yapma ve mevcut ilişkileri inceleme eylemlerini içermektedir. Bir problem durumunun özünde yer alanı ortaya çıkarma ve ne sorulduğunu anlama açısından gerek problem çözmede gerekse ispatlamada ilk aşamanın problem durumunu anlama olması olasıdır. Bahsedilen süreçlerde problem durumunu anlama eylemi ayrı bir aşama olarak tanımlanmayıp genellikle aşamaların içine gömülmüş olarak yer almaktadır. Varsayımda bulunma aşaması ise süreçlerin her birinde ayrı bir aşama olarak bulunmaktadır. Herhangi bir matematiksel durumu ispatlama sürecinin temelinde varsayımda bulunmanın yer alması (Olivero, 1999) belirtilen süreçlerde varsayımda bulunmanın ortak bir aşama olarak tanımlanmasını doğrular niteliktedir. Boero ve diğerlerinin (1995) tanımladığı süreç daha fazla aşama içerdiğinden bireylerin ispata doğru yaklaşırken sergilediği eylemlerin neredeyse çoğunun daha ayrıntılı bir şekilde incelenmesini kolaylaştırmaktadır. Perry ve diğerleri (2011) ise ispatlamanın iki süreçten oluştuğunu belirterek benzer eylemlerin varlığından bahsetse de süreci daha dar kapsamlı olarak ele almıştır. Araştırmacıların belirttikleri süreçlerin her birinin geometrik durumları ispatlama sürecine uygulanabilirliği olmakla birlikte çeşitli yönlerden eksiktir. Geometrik yapıyı oluşturma eylemine süreçlerin hiç birinde yer verilmemiştir. Oysaki geometrik yapıyı oluşturma ispatlama sürecinin başlangıç aşamasını destekleyen ve ilişkiler üzerine odaklanma imkânı vererek ispatlama sürecine teşvik eden önemli bir eylemdir (Mogetta vd., 1999). Bu bakımdan belirtilen süreçler daha çok cebirsel ifadeleri ispatlamaya yönelik bir durum yansıtmaktadır. Süreçler incelendiğinde ispata geçiş ve ispatın yapılacağı aşama oldukça kapalı sunulmuştur. Genellikle ispata yönelik bir plan yapma ve bu planı uygulayarak ispatı sunma konusunda o kadar tatmin edici değillerdir. Belirtilen durumlar bakımından Boero ve diğerlerinin (1995) tanımladığı süreç daha tatmin edicidir. Edwards (1997) ispata doğru yaklaşırken özel durumları inceleme ve genellemelerin doğruluğunu göstermek amacıyla matematiksel notasyonlar ve sezgilerden yararlanılmasının gerekliliğine vurgu yapsa da sürecin bir ispat metni oluşturarak sonlandıracağına dair bir imada bulunmamıştır. Perry ve diğerleri (2011) ise ispatlama aktivitesini oluşturan iki süreçten birinde ispat fikrinin ortaya çıktığı ve ispata yönelik gerekli düzenlemelerin gerçekleştiğini belirtmiştir. Ancak belirttiği süreçte ispata dair bir plan ve ispatın oluşumuna yönelik eylemleri içeren bir aşamadan söz etmemiştir. Ayrıca süreçlerde genellikle ispata doğru yaklaşırken kontrol, çeşitli durumları test etme ve ispat adımları konusunda esin kaynağı amaçlı olarak aşamalar arası ileri geri geçişlerden bahsedilmemektedir. Bu yüzden aşamaların daha çok doğrusal olarak takip edildiğine yönelik bir durum ortaya çıkmaktadır. Oysaki aşamalar arası ileri geri geçişlerin yapılması bireyin çalışmalarını kontrol etmesi ve ispata yönelik nasıl bir plan izleyeceği konusunda fikir sahibi olmasını sağlaması açısından oldukça önemlidir. Yukarıda söz edilen durumlar ve ispatın birçok eylemi içinde barındıran bir süreç olması ispata ulaşırken bireyin matematiksel bir süreçten geçtiğine yönelik bir işarettir. Dolayısıyla bu matematiksel sürecin farklı eylemleri içeren aşamalara ayrılarak tanımlanması, hem sürecin kolay analiz edilmesini hem de bireyin yaptığı çalışmalarda daha sistemli olmasını sağlayacaktır. Bu durum ispat öğretiminde sadece formal ispatın yapıldığı aşama ile sınırlı kalmayıp ispatın doğasında yer alan eylemleri içeren bir sürecin izlenmesini anlamlı kılmaktadır.

Yapılan çalışmalarda ispat ağırlıklı matematik dersleri ve matematiksel akıl yürütmeye geçiş derslerinin beklenen ölçüde etkili olmadığı belirtilmekle birlikte bunun sebeplerinden birinin gerçekleştirilen öğretim olduğu ileri sürülmüştür (ör. Alibert ve Thomas, 1991; Ferrari, 2004; Sarı, 2011). Bu derslerin amacına ulaşmamasını ise genellikle ispatın tamamlanmış bir ürün olarak sunulması, öğrencilerin ispat sürecinde aktif olmasının sağlanmaması ve ispat yapmaya yönelik deneyim yaşamalarına fırsat tanınmamasına bağladıkları görülmüştür (ör. Herbst, 2002; Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Yoo, 2008, Weber, 2001). Knuth (2002a) ise bu durumun öğretmenlerin ispatın sahip olduğu rolleri düşünmeden ya da bilmeden öğrenme ortamlarını düzenlemelerinden kaynaklanabileceğini belirtmiştir. Bu durum ispat öğretiminde izlenen yaklaşımlar bakımından değişiklikler yapılması gerektiğini ortaya çıkarmaktadır.

Araştırmacılardan bazılarının ispat öğretiminde uygulanan farklı yöntemlerin ispat yapma başarısı üzerinde etkili olup olmadığını belirmeye yönelik çalışmalar yaptığı görülmüştür (Dean, 1996; Schabel, 2005; Selden, Selden ve McKee, 2008; Selden ve Selden, 2009; Smith, 2006; Weber, 2006). Bu çalışmalarda mevcut olan bir yöntemin, bu yöntemlerin düzenlenmiş halinin ya da araştırmacıların kendilerinin tanımladıkları öğretimsel modellere yönelik uygulamaların cebir ile ilgili derslerde yürütüldüğü belirlenmiştir. İspat öğretimine yönelik bir model tanımlayan araştırmacılardan biri olarak Dean (1996) üniversite öğrencilerinin ispat yapmalarını geliştirmek amacıyla keşfederek öğrenmeye dayalı olan bir model oluşturmuştur. Bu model; teoremin iç yüzünü anlama, beyin fırtınası, örneklerle destekleme, ikna etme, yansıtma, genelleme olmak üzere altı aşamadan oluşmaktadır. *Teoremin iç yüzünü anlama* aşaması, modelin başlangıcı olmak üzere bu aşamada öğrenciler önermenin ne ifade ettiğini anlamaya çalışmaktadır. *Beyin fırtınası* aşaması, öğrencilerin önerme ile ilgili bildikleri kavram ve tanımları hatırlamaya çalıştıkları ve bu bilgileri ispat sürecinde nasıl kullanacaklarını düşündükleri aşamadır. *Örneklerle destekleme* aşaması, öğrencilerin sonuca ulaşmak için gerekli olan çıkarımları belirlemeleri ile ilgilidir. *İkna etme* aşaması, öğrencilerin çıkarımlarını inceleyip geçerli olup olmadığından emin oldukları aşamadır. *Yansıtma* aşaması, öğrencilerin önermenin ispatını yapmak için farklı bir yol olup olmadığını düşündükleri aşamadır. *Genelleme* aşaması, öğrencilerin kendi çalışmalarını inceledikleri bir aşama olmakla birlikte belirtilen koşulların değişmesi durumunda nasıl farklılaşmaların olabileceğini düşünmeleri ile ilişkilidir. Bu çalışmada belirtilen aşamalara bağlı olarak derslerin yürütülmesi ile öğrencilerin ispat yapma bakımından gelişim sağladıklarına yönelik bir sonuca varılmıştır. Weber (2006); öğrencilerin ispat kavramı ve ispatta kullanabilecekleri tanım, teorem, aksiyomlara yönelik bilgi sahibi olsalar bile ispat yapmakta güçlük yaşadıklarını belirtmiştir. Bunun sebebinin uygun ispat adımlarına nasıl karar vereceklerini bilmemeleri olduğunu ileri sürmüştür. Bu tespiti üzerine ispat öğretimi için belirli aşamalar tanımlayarak bu gidişata göre derslerini yürütmüştür. Belirlediği aşamalar; herhangi bir matematiksel yapı seçmeleri, bu yapı ile ilgili bilgi edinebilecekleri bir teoreme karar vermeleri, teoreme yönelik hipotezin sağlayıp sağlamadığına yönelik incelemeler yapmaları ve sağlama durumuna göre bunları uygulamaları, yaptıkları amaçlarına ulaşmak için yeterli ise devam etmeleri aksi takdirde başa dönmeleri gibi bir gidişatı içermektedir. Bu çalışmada öğrencilerin hangi matematiksel ifadeleri kullanabileceklerine kendilerinin karar verebilecekleri bir süreç yaşamaları amaçlanmıştır. Bu amaca yönelik yapılanların da öğrencilerin ispat yapma konusunda ilerleme kat etmelerini sağladığı görülmüştür. Ancak araştırmacı, ispat öğretimi için izlenen bu aşamaların bütün ispat yöntemleri için uygun olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Schabel (2005) çalışmasında ispat öğretiminde kullanılmak üzere altı boyutlu bir öğretimsel model geliştirmiştir. Bu modelin geliştirilme amacı, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerine katkıda bulunmak ve ispat yapmalarında bir gelişim elde etmektir. Schabel (2005) belirtilen öğretimsel modeli tasarlarken sınıftaki her bir oturumun küçük grup çalışması, bütün sınıf tartışması ve minimum düzeyde ders anlatımı içermesi, öğrencilerin örnek ve karşıt örnekler verebilmesi için teşvik edilmesi, varsayımlarını şekillendirmelerini sağlama, öğrencilerin ispatlarını yazması ya da en azından ispat yazmak için yardım etmeleri, ev ödevlerinde hesaplamalar ve ispatların yanı sıra yazmaya yönelik görevlerin yer alması, öğrencilerin birbirlerinin ödevlerini incelemesi gibi ilkeleri temel almıştır. Dolayısıyla öğrencilerin süreç içinde aktif olmasını sağlayacak bir model tasarlayarak bunu ispat öğretiminde kullanmıştır. Bu modeli ispat öğretimi için kullanması sonucunda ise öğrencilerin ispat yapma anlamında bir gelişim elde ettiğini ve gözlerinde gerçekten matematik yaptıklarına yönelik bir his yakaladığını belirtmiştir. Ayrıca derslerinde bir daha doğrudan anlatıma dayalı bir ispat öğretimi yapmayacağını ifade etmiştir. Yukarıda belirtilen çalışmalar incelendiğinde araştırmacıların tanımladıkları modellerle yapılan ispat öğretimleri sonucunda öğrencilerin ispat yapma bakımından önemli kazanımlar elde ettikleri ve kendilerinin de olumlu dönütler aldıkları görülmüştür. Bu çalışmaların ortak özelliği ise her bir çalışmanın cebir ile ilgili derslerde yürütülmesi ve ispat öğretiminde farklı yaklaşımların izlenmesiyle öğrencilerin ispat yapma bakımından olumlu kazanımlar elde etmesidir. Bu durum, ispat öğretiminde farklı yaklaşımlar izlenmesinin öğrencilerin ispat yapma bakımından yaşadığı zorlukların üstesinden gelebileceğinin bir göstergesidir. Ancak bu araştırmacıların ispat öğretiminde izledikleri yaklaşımlar, daha çok sınıf tartışmaları ve çeşitli incelemeler yapılmasına fırsat vererek öğrenciler arasında etkileşimi artıran ya da bu uygulamalarla formal ispatın kapsamını genişletmeye yönelik adımları içermektedir. Bu bakımdan araştırmacıların izledikleri adımları da kapsayacak şekilde ispatın doğasında yer alan (varsayımda bulunma, keşfetme, ilişkilendirme vb.) eylemleri içinde barındıran modellere yönelik bir ihtiyacın olduğu ortaya çıkmaktadır.

İspat öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının kullanılmasıyla birlikte ispat yapma ve varsayımda bulunma bakımından gelişimler elde edilebileceğini belirten çalışmalar mevcuttur (ör. de Villiers, 1998; González ve Herbst, 2009; Hadas vd., 2000; Healy ve Hoyles, 2001; Mariotti, 2000, 2001; Marrades ve Gutierrez, 2000). Wares (2004) de dinamik geometri yazılımlarının kullanımına fırsat veren ortamlarda öğrencilerin varsayım üretmelerine yönelik bir gelişim elde edilebileceğini vurgulamıştır. Ayrıca bu ortamların, öğrencilerin tümdengelime dayalı muhakemelerde bulunmalarına teşvik eden süreçlerin oluşumuna katkıda bulunduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde DeTurck (1993) DGY'lerin ispat yazmaya yönelik teşvik edici bir rol oynadığına değinerek ispatın doğasına uygun eylemlerin öğrenme ortamlarında gerçekleşmesini sağlayacağına vurgu yapmıştır. Hadas ve diğerleri (2000) ise bu ortamların iyi bir şekilde tasarlanmış etkinliklerle desteklenmesinin ispat yapma anlamında daha büyük katkılar sağlayacağını ifade etmiştir. Bu durum öğrenme ortamlarında bütün ayrıntıları dikkate alarak hazırlanan etkinliklerle birlikte dinamik geometri yazılımlarının kullanımının öğrencilerin zihninde ispat kavramının netleşmesine katkıda bulunabileceğine işaret etmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin ispat yapma ve varsayımda bulunma bakımından daha donanımlı bir hale gelebilmesi için ispat öğretiminde dinamik geometri yazılımlarından yararlanılması anlamlıdır.

Literatür incelediğinde ispat yapmayı geliştirmeye yönelik birçok çalışmanın olduğu görülmüştür (Bobango, 1987; Cook-Box, 1996; Generazzo, 2011; Hart, 1986; Hsu, 2010; Lee, 1999; Lee, 2011; Matsuda, 2004; Pulley, 2010; Senk, 1983; Subramanian, 1991; Tubridy, 1992). Bu çalışmalardan biri Senk'in (1983) ispat yazma ile Van Hiele geometri anlama seviyeleri arasındaki ilişkiyi incelediği araştırmadır. Bu araştırma beş eyalette yer alan 11 okulun geometri sınıflarında bulunan 1520 öğrenci ile yürütülmüştür. Ortaöğretim okullarında öğrenim gören bu öğrencilerle geometri dersi yapılmadan önce seviyelerini belirlemek amacıyla Geometriye Giriş Testi ve Van Hiele Geometri Testi yapılmıştır. Geometri derslerinin tamamlanmasıyla birlikte Van Hiele Geometri Testi ve Ortaöğretim Okullarındaki Geometride Bilişsel Gelişim ve Başarı Projesi ile ilgili ispat testi uygulanmıştır. Senk (1983) öğrencilerin yaptıkları ispatları değerlendirirken çıkarımda bulunma, gerekçe sunma ve matematik dili gibi birçok boyuta yönelik göstergeleri bir arada bulunduran beş düzeyli bir puanlama cetvelini kullanmıştır. Bu puanlama cetvelini kullanarak yaptığı analiz sonucunda ise öğrencilerin yaklaşık olarak % 30'unun ispat yapma anlamında % 75 oranında bir yeterliliğe ulaştığını belirlemiştir. Ancak ispat yapma anlamında yeterliliğe sahip olmayan % 30 oranında öğrencilerin de olduğu sonucuna varmıştır. Dolayısıyla bu çalışmayla öğrencilerin bir kısmı ispat yapma anlamında gelişim elde ederken bir kısmı ise bu gelişimi elde edememiştir.

İspat öğretiminde bir bilgisayar programının kullanılmasıyla birlikte yapılan uygulamaların ispat yapma üzerinde etkisini araştıran çalışmalardan biri Matsuda'ye (2004) aittir. Matsuda'nın (2004) bu çalışmada ileriye zincirleme ve geriye doğru zincirleme olmak üzere bir uzman sisteminin muhakeme ünitesindeki iki yöntemin geometri teoremlerinin ispatını yapmada nasıl bir etkisi olduğunu inceleyerek iki yöntemin etkilerini karşılaştırmayı amaçlamıştır. Başka bir ifade ile tümevarım ilkesini yansıtan ileriye zincirleme ve tümdengelim ilkesini yansıtan geriye doğru zincirleme yöntemlerine dayalı olarak oluşturulan arayüz kullanılarak yapılan öğretimin öğrencilerin ispat yapmaları üzerine nasıl bir etkisi olduğunu araştırmıştır. Araştırmanın sonucunda ise ileriye doğru zincirleme ile ispat yapmayı öğrenen öğrencilerin geriye doğru zincirleme ile öğrenenlere göre daha iyi bir performans sergilediği belirlenmiştir. Bu çalışma bir bakıma tasarlanan arayüzün işlerliğinin testinin yapılması niteliğindedir.

İspat öğretimi ile ilgili çalışmalardan biri olan Pulley'in (2010) yaptığı araştırmada "Teorem-ispat ediniz" şeklindeki geleneksel ifadeleri içeren etkinlikler haricindeki öğretimsel etkinliklerin kullanılmasının öğrencilerin geometriyi anlamaları, ispat ile ilgili inançları ve muhakemede bulunmaları üzerinde nasıl bir etkiye sahip olduğunu incelemek amaçlanmıştır. Bu çalışmada öğrenciler ispat oluşturma, gerekçelendirme ve grup ya da bireysel olarak ispatın geçerliliğini inceleme ile ilgili uygulamaları içeren etkinlikler yapmışlardır. Yapılan bu uygulamalar sonrasında gerek geometri ile ilgili içerik bilgisi gerekse muhakemede bulunma bakımından gelişimler elde edildiğine yönelik sonuçlara ulaşılmıştır. İspat öğretimine yönelik çalışmalardan bir diğeri ise Generazzo'ya (2011) aittir. Generazzo (2011) bu çalışmada araştırmaya dayalı öğrenme ortamının öğrencilerin varsayımda bulunma, muhakemede bulunma ve ispat yapmaları üzerinde nasıl bir etkisi olduğunu incelemiştir. Bu çalışma kapsamında öğrenme ortamı, grup çalışması ve sınıf tartışmaları yapma esaslarına dayalı olarak tasarlanmıştır. Çalışmanın sonucunda ise öğrenciler arasında etkileşimi arttıran uygulamaların yapılmasının öğrencilerin ispat yapmaları ve muhakemede bulunmalarına önemli katkılarda bulunduğuna ulaşmıştır. Dolayısıyla yapılan bu çalışmalar geleneksel yöntemin dışında izlenen yöntemlerin öğrencileri ispat yapma bakımından donanımlı hale getirebileceğine işaret etmektedir. Ayrıca öğrencilerin ispat sürecine aktif bir şekilde katılabileceği öğrenme ortamlarının oluşturulmasının ispat yapma anlamında önemli olduğuna dikkat çekmektedir.

#### 2. 1. 2. 2. İspat Sürecinde Yaşanan Zorluklar ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Bireyler yaşamları boyunca çevresinde olan bitenleri anlamak ve karşılaştığı problemleri çözebilmek adına farkında olarak ya da olmayarak bir matematiksel düşünme sürecinden geçmektedir. Matematik eğitiminin en önemli amacı da bireylere matematik kültürünü kazandırmak ve arzu edilen matematiksel beceriler ile birlikte matematiksel düşünme yeteneğini geliştirmektir (Baki, 2008). Matematiksel düşünme; tahmin etme, tümevarım, tümdengelim, örnek durumları inceleme, genelleme, analoji, formal ve informal muhakeme, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşimidir (Liu, 2003). Dolayısıyla matematiksel düşünmenin ispatın doğasında yer alan eylemleri içermesi, ispatın aslında bir matematiksel düşünme süreci olduğu göstermektedir. Bu durum da bireylerin ispat yapma bakımından donanımlı hale gelmesinin önemli olduğuna işaret etmektedir. Ancak öğretim kademelerinin her birinde öğrenciler ispat yapma bakımından zorluklar yaşamaktadır (Chazan, 1993; Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; McCrone vd., 2002; Moore, 1994; Reiss ve Renkl, 2002; Ron ve Dreyfus, 2004; Weber, 2001).

İspat yapma bakımından yaşanan zorlukların çeşitli sebeplere bağlı olarak ortaya çıktığını ileri süren birçok araştırma söz konusudur (ör. Almeida, 2000; Chazan, 1993; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Reiss ve Renkl, 2002; Selden ve Selden, 1995). Bu araştırmalar dikkate alındığında öğrencilerin ispat yapma bakımından yaşadıkları zorlukların sebeplerinden biri matematiksel ispatın nasıl oluşturulacağına yönelik bir anlayışa sahip olmamalarıdır (ör. Chazan, 1993; Harel ve Sowder, 1998; Knuth ve Elliot, 1998; Pulley, 2010). Chazan (1993) öğrencilerin çoğunun deneysel olarak sunulan çıkarımlar ile tümdengelime dayalı olarak sunulan çıkarımlar arasında bir ayrım yapamamalarının ispat yapma bakımından zorluklar yaşamalarına yol açtığını belirtmesi bu durumu desteklemektedir. Benzer şekilde Harel ve Sowder (1998) örnekler ya da deneysel verileri kullanarak matematiksel ilişkiye ulaşmayı geçerli bir ispat olarak nitelendirmenin ispat oluşturmaya yönelik sınırlı bir bilgiye sahip olmanın bir göstergesi olduğunu ifade etmiştir. Bu durum öğrencilerin ispatın ne anlama geldiğini ve matematiksel bir ilişkinin ispatının nasıl oluşturulacağını öğrenmelerine katkıda bulunacak uygulamaların yapılmasının gerekli olduğuna işaret etmektedir. Dolayısıyla matematiksel ispatın anlamı ile birlikte doğasında yer alan eylemler, ispat adımlarının nasıl belirlendiği ve bu süreç içinde hangi muhakeme türlerinin gerçekleştiği konusunda bilgi sahibi olmalarını sağlayabilecek öğrenme ortamlarının oluşturulması anlamlıdır.

İspatın doğasına yönelik algılar ya da inançlar da ispat sürecinde zorluklar yaşanmasına sebep olabilmektedir (ör. Chazan, 1993; Hoyles, 1997; Moore, 1994; Reiss ve Renkl, 2002). Reiss ve Renkl (2002) matematiksel ispatın lineer, sistematik ve formal adımlar olduğuna yönelik öğrencilerin sahip olduğu inançların ispat yapmanın öğrenilmesinde bir engel oluşturduğunu ileri sürerek bu durumu açıkça ortaya koymaktadır. Moore (1994) da öğrencilerin sahip olduğu algıların ispata yönelik uygulamalar üzerinde etkili olduğunu belirtmiştir. Bu durum öğrencilerin ispata yönelik algılarının değiştirilmesinin ispat yapma konusunda donanımlı bir hale gelmelerinde önemli olduğunu göstermektedir.

İspat yapmaya yönelik yaşanan zorlukların bazıları kişisel nedenlere bağlı olarak ortaya çıkmakla birlikte bazıları da tanım, teorem, aksiyom gibi matematiksel ifadelere yönelik bilgi eksikliklerinden ortaya çıkabilmektedir (ör. Easterday ve Galloway, 1995; Moore, 1994; Pulley, 2010; Weber, 2001). Weber (2001) teoremleri ya da kavramları anlamada eksiklikler ile birlikte sistematik olarak bu matematiksel ifadelerin yanlış kullanılmasının öğrencilerin ispat sürecinde zorluklar yaşamasına sebep olduğunu belirterek bu durumu desteklemektedir. Moore (1994) da ispat yapmada öğrencilerin yaşadığı zorluklardan birinin matematiksel bir ilişkinin ispatını yaparken tanımları kullanmada yetersiz olmalarının olduğunu ileri sürerek kavramsal anlamanın ispat sürecindeki önemine değinmiştir. Benzer şekilde Pulley (2010) matematiğe yönelik içerik bilgisindeki eksikliğin ispat yapma üzerinde etkili olduğu belirtmiştir. Dolayısıyla tanım, teorem ya da aksiyomların ne anlama geldiği ve ispat sürecinde bu matematiksel ifadelerin nasıl kullanacağına yönelik bir öğretimin yapılmasının gerekli olduğu ortaya çıkmaktadır. Almeida (2000) da ispat yapma bakımından bu tür yetersizliklerin uygun bir öğretimin yapılmasıyla geliştirilebileceğini belirterek yapılan öğretimlerde değişikliğe gidilmesi gerektiğine işaret etmektedir.

İspatı yaparken yaşanan zorlukların sebepleri detaylandırıldığında *ispatın doğasına yönelik algılar*, *ispat mantığı ve yöntemleri*, *problem çözme becerileri*, *matematik dili* ve *kavramsal anlama* gibi boyutların varlığından söz edilebilir (Moore, 1994). Bu durum ispat sürecini etkileyen birçok faktör olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte öğrencilerin zihinlerinde ispat kavramını netleştirmek ve ispat yapma bakımından donanımlı bir hale gelebilmeleri için ispat sürecini etkileyen durumlara daha geniş bir perspektiften bakarak öğrenme ortamlarının tasarlanması gerektiğine işaret etmektedir.

## 2. 2. Literatür Taramasının Sonucu

İspat öğretimine ilişkin referans verilen araştırmaların ortaya koyduğu sonuçların bu araştırmayı iki açıdan şekillendirdiği düşünülmektedir. Bunlardan ilki İSMAT Modelinin tanımlanması, ikincisi ise araştırmanın yönteminin belirlenmesidir. Araştırmanın şekillenmesini sağlayan bu iki husus aşağıda özetlenmiştir.

Geleneksel bakış açısına göre matematiksel ispatın temel işlevi bir teoremin sonucunu doğrulamaktır. Genellikle ispat öğretiminde teorem-ispat dizgesinden öteye geçilmemesi de geleneksel bakış açısının dışına çıkılmasını engellemektedir. Öğretmenler çoğunlukla öğrenciyi sürece dâhil etmeden matematiksel duruma yönelik ispatları tamamlanmış bir ürün olarak sunmaktadır (Herbst, 2002; Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Weber, 2001; Yoo, 2008). Bu anlamda matematiksel ilişkileri keşfetme, ispat yapma, bu ispatı yansıtma ve arkadaşlarıyla ulaştıkları sonuçlar hakkında paylaşımda bulunma gibi eylemlere fırsat tanınmamaktadır. Genellikle bu yaklaşımın bütün öğretim kademelerinde izlenmesi ise öğrencilerde ispatın doğasına uygun eylemlere (keşfetme, varsayımda bulunma, ilişkilendirme, genelleme vb.) yönelik bir farkındalık oluşturulmasına engel olmaktadır. Bu bakımdan ispat öğretiminde geleneksel yaklaşım kullanılmakta ısrar edildiğinden söz edilebilir. Yapılan literatür taraması sonucunda ulaşılanlara genel olarak bakıldığında ispatın öğretim kademelerinde yer alan her bir öğrenci için zor bir kavram olduğu, ispat kavramına matematik derslerinde yeterince yer verilmediği ve ispata ulaşırken gerçekte izlenen adımlardan öğrencilerin geçmediği belirlenmiş ve ispat öğretiminde yeni bir yaklaşımın izlenmesi gerektiği anlaşılmıştır. Bunun üzerine bir matematiksel ilişkinin ispatını yaparken hangi adımlardan geçilmesi gerektiği ve ispatın rolleri ile ilgili çalışmalar (Bell, 1976; Hanna ve Jahnke 1996; de Villiers 1999; Hanna vd., 2010) üzerine incelemeler yapılarak bilgi oluşumunun sosyal bir ortamda gerçekleştiği (Lakatos, 1961; Popper, 1979) hususu dikkate alınıp ispat öğretimine yönelik verimli bir öğrenme ortamının tasarımı için gerekli olan ölçütler belirlenmiştir. Bunlara dayalı olarak ispat öğretiminde kullanılabilecek bir model tanımlanıp modelin teorik çatısı oluşturmuş ve bu modele İSMAT adı verilmiştir. Bu anlamda tasarlanan İSMAT Modeli ile öğrencilerin ispat sürecine aktif katılımını ve ispata doğru giden adımları yaşamalarına olanak sağlayarak ispat öğretimindeki eksikliklerin giderilmesi bakımından modelin bir girişim niteliğinde olduğu düşünülmektedir.

Literatür incelendiğinde ispat yapma ile ilgili yapılan araştırmaların çoğunun betimsel çalışmalar olduğu görülmüştür (ör. Bayazıt, 2009; Birinci, 2010; Derek, 2011; Fraiser, 2010; Goetting, 1995; Haverhals, 2011; İmamoğlu, 2010; Sarı, 2011; Stylianides ve Stylianides, 2009; VanSpronsen, 2008). Bu çalışmalar genellikle öğrencilerin ispatı nasıl yaptığı, ispat sürecinde hangi yöntemleri kullandığı, hangi aşamaları takip ettiği ve bu süreçte yaşanan zorluklar gibi süreç içindeki davranışları incelemeyi ya da ispat ile ilgili görüşleri belirlemeyi amaçlamışlardır. İspat öğretiminde yapılan uygulamaların ispat yapmaya nasıl bir etkisi olduğunu inceleyen çalışmaların ise betimsel çalışmalara göre daha sınırlı sayıda olduğu fark edilmiştir. Ayrıca bu çalışmalarda öğretim yönteminin ya da teknolojik aracın ispat yapma üzerine nasıl bir etkisi olduğuna dair tek yönlü incelemelerin söz konusu olduğu belirlenmiştir. İspatın süreç olduğuna vurgu yapan çalışmalarda ise ispata yönelik tanımlanan adımlar araştırma kapsamında yararlandıkları bir ya da daha çok etkinliği uygulamaya yönelik olup ispat öğretimi için derslerde yararlanılan bir öğretim modeli gibi geniş kapsamlı değildir. Ayrıca matematik alanından seçilen belirli bir konuya yönelik uygulanan bir süreç niteliğindedir. Bir başka ifade ile bu belirtilen süreçlerin ispat öğretiminde birden çok yöntemin birleşiminin adımlar halinde uygulanması şeklinde yürütülen çalışmalardır. Bu durumlar dikkate alınarak İSMAT Modeli öğrencileri sürece dâhil etme, ispatın doğasına uygun eylemleri takip etme, sürecini kontrol etme, etkileşim halinde olma, bireysel ve grup çalışmaları yapma ve dinamik yazılımlar kullanma gibi olanakları sağlayacak şekilde tasarlanmıştır. Böylece çok boyutlu bir etkileşim sağlanarak matematiksel deneyimler kazanabilmeleri ön planda tutulmuştur. Ayrıca DGY ile zenginleştirilmiş bir ortamda öğretmen adaylarının tanımlanan İSMAT Modelini takip etmeleri ile birlikte matematiksel bilgilerinin anlam kazanması ve matematiksel kavramların nereden geldiği, hangi matematiksel bilgi veya ilke üzerine kurulu olduğunu bilmelerinin önü açılabilmiştir. Böylece bir öğretmen adayının ispat sürecinin adımlarını gerçekleştirerek kendi matematiğini oluşturabilmeleri ile birlikte nitelikli bir matematiksel alt yapıya ve bunun yanında özgüvene sahip öğretmenler yetiştirebilme amacına ulaşılmaya çalışılmıştır. Bununla birlikte İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının ispat yapma ve varsayımda bulunma üzerine etkisini araştırmak amacıyla yarı deneysel bir çalışma yürütmeye karar verilmiştir.

Literatür taraması sonucunda karar verilen durumlardan biri de öğrencilerin ispat yapma ve varsayımda bulunmalarını değerlendirebilmek için belirli boyutlara bağlı olarak göstergelerin belirlenebilmesidir. Yapılan incelemelerle birlikte Senk'in (1983) çalışmasında ispatları değerlendirmek için yararlandığı 5 düzeyli puanlama cetvelinin kullanışlı bir araç olduğu belirlenmiştir. Ancak bu puanlama cetveli; çıkarımda bulunma, gerekçe sunma ve matematik dili gibi birçok boyuta yönelik göstergeleri bir arada bulunduran bir değerlendirme aracıdır. Yapılan çalışmalarda ayrı bir boyut olarak yer almasa da ispatların genellikle muhakeme, matematik dili, gerekçe bakımından incelenmesi (Lee, 2011; Matsuda, 2004; Pulley, 2010) bu boyutların ispat değerlendirmek için kullanılabileceği fikrini pekiştirmiştir. Bununla birlikte yapılan çalışmalarda varsayımların doğruluk bağlamında incelenmesi (Frerking, 1994; Yerushalmy, 1987) boyutlardan birinin doğruluk olarak belirlenmesine sebep olmuştur. Varsayımların anlaşılmasında hem sembolik hem de sembolik olmayan dilin etkili olması ise matematik diline göre değerlendirme yapılabileceğini ortaya çıkararak diğer bir boyutun da matematik dili olmasına karar verilmiştir.

# 3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yürütülmesinde kullanılan yöntem, araştırmanın tasarımı, araştırma grubu, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve veri analizi ile ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

## 3. 1. Araştırma Modeli

Öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olup olmadığı, ispatın rolleri ile ilgili düşüncelerindeki değişimi ve İSMAT Modelinin uygulanmasına yönelik öğrenme ortamından yansımaları resmetmeyi amaçlayan bu çalışmada yarı deneysel bir araştırma yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada önceden oluşturulmuş sınıflar üzerinden rastgele olarak deney ve kontrol gruplarının seçilmesi yarı deneysel bir tasarım izlenmesini gerekli kılmıştır. Bu bakımdan araştırmanın nicel kısmında yarı deneysel bir tasarım izlenmekle birlikte araştırmanın problemlerine bağlı olarak nitel yaklaşımlardan da yararlanılmıştır.

## 3. 2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Bu bölümde araştırmanın tasarımı, pilot uygulama, asıl uygulama ve verilerin analiz edilmesi ile ilgili süreçler özetlenmiştir.

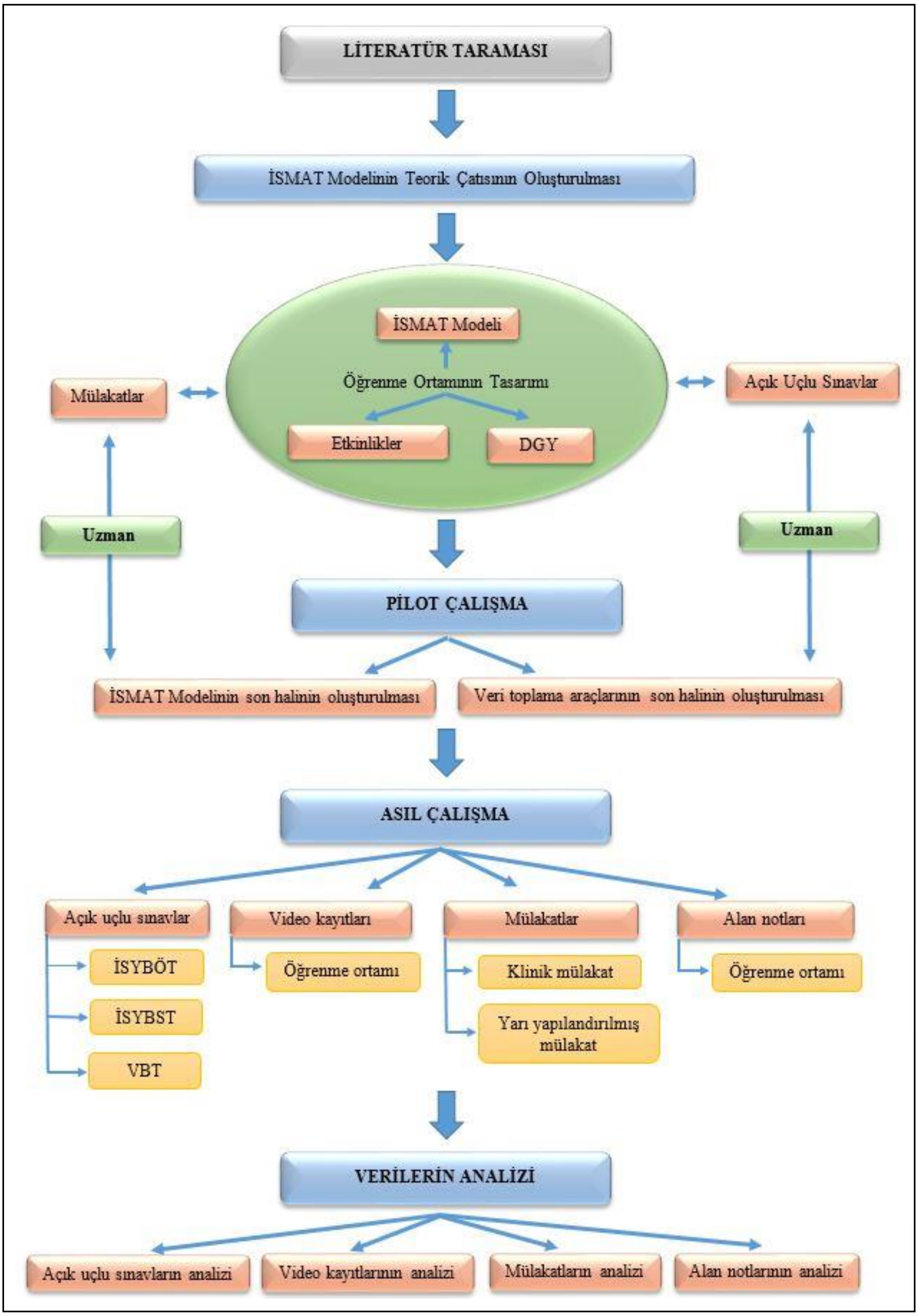
Çalışmanın ilk aşamasında araştırmanın problemini belirleyebilmek için öncelikli olarak ispat sürecinde yer alan eylemler, ispatın matematik eğitimindeki yeri, ispat öğretiminde izlenen yaklaşımlar ile ilgili literatür taraması yapılmıştır. Yapılan literatür taraması sonucunda bir matematikçinin ispata ulaşırken izlediği adımlar ile öğretmen adaylarına sunulan adımların örtüşmediği görülmüştür. Özellikle dinamik geometri yazılımlarının bir matematikçinin izlediği adımları öğretmen adaylarına yaşatmak için önemli olanaklar sunduğu tespit edilmiştir. Ayrıca bir matematiksel ilişkinin ispatını yaparken hangi adımlardan geçilmesi gerektiği ve ispatın rolleri ile ilgili çalışmalar üzerine incelemeler yapılarak ispat öğretimine yönelik verimli bir öğrenme ortamının tasarımı için gerekli olan ölçütler belirlenmiştir. Bunlara dayalı olarak ispat öğretiminde kullanılabilecek bir model tanımlanıp modelin teorik çatısı oluşturmuş ve bu modele İSMAT adı verilmiştir. İSMAT Modelinin tanımlanması ile birlikte öğrenme ortamının tasarımında ne tür uygulamalar yapılacağı ve hangi öğretim materyallerinden yararlanılacağına literatür taraması sonucunda karar verilmiştir. Bu doğrultuda İSMAT Modelinin aşamalarının izleneceği çalışma yaprakları, ilköğretim matematik öğretmenliği programında yürütülen geometri dersinin içeriğine göre tasarlanmış ve dinamik geometri yazılımlarından biri olan GeoGebra, öğrenme ortamının tasarımında kullanılacak bir araç olarak tercih edilmiştir.

Çalışmanın ikinci aşamasında, tasarlanan İSMAT Modelinin işlevselliğinin belirlenmesi ve gerekiyorsa yeniden düzenlemelerin yapılması, ispat yapma başarılarının belirlenmesi için uygulama öncesi ve sonrası kullanılacak olan başarı testlerinin, varsayımda bulunmalarını değerlendirmek için uygulama sonrasında yararlanılacak olan testin, klinik mülakatların, çalışma yapraklarının uygulanması, gözlemlerin sınıf ortamında yapılması, araştırmacının deneyim kazanması, veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenirliğinin yapılması amacıyla 2012-2013 eğitim-öğretim yılında pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma sonucunda araştırmacının gözlemleri, tasarlanan öğrenme ortamında öğrencilerden ya da uygulamalardan dolayı ortaya çıkan durumlar ve öğrencilerin yaptığı çalışmaların her biri değerlendirilerek İSMAT Modeli, çalışma yaprakları ve testlerde yer alan sorular yeniden düzenlenmiştir. İSMAT Modeli aşamalarında yapılması gerekenler üzerine düzenlemeler yapılarak öğrenme ortamının tasarlanması ve uygulanmasında dikkat edilecek hususlar gözden geçirilmiştir. Bunların sonucunda öğrenme ortamında kullanılan çalışma yaprakları, geliştirilen ispat yapma başarı testleri ve varsayımda bulunma testinin asıl çalışmada uygulanan son halleri elde edilmiştir.

Çalışmanın üçüncü aşaması olan asıl uygulama, bir dönem boyunca ilköğretim matematik öğretmenliği programında deney ve kontrol grubu olmak üzere iki grup üzerinde yapılmıştır. Her iki grubun uygulamaların öncesinde ve sonrasında ispat yapma başarılarını belirlemek amacıyla başarı testleri kullanılmıştır. Uygulama sırasında deney grubunda İSMAT Modeline göre hazırlanan çalışma yapraklarının takip edildiği bir öğrenme ortamının tasarımı söz konusu iken kontrol grubunda mevcut uygulamalara müdahale edilmeden yapılan bir öğretim söz konusudur. Deney grubunda öğretmen adayları dinamik geometri yazılımlarını bizzat kendileri kullanırken kontrol grubunda sadece öğretim elemanının kullanımı ile sınırlı kalmıştır. Uygulamalar esnasında deney grubunda video kaydı alınmakla birlikte uygulamaların sonrasında belirli aralıklarla çalışma yaprakları ve testler ile ilgili klinik mülakatlar yapılmıştır. Ayrıca deney grubunda yapılan uygulamaların ispatın rollerine yönelik düşüncelerinde bir değişiklik oluşturup oluşturmadığını belirlemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Uygulamalar sonrasında öğrenme ortamlarının varsayımda bulunmaları üzerine nasıl bir etki oluşturduğunu ortaya çıkarmak için bir test uygulanmıştır.

Verilerin analizi kısmında ise öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmalarına yönelik analizler, literatür taraması ve pilot çalışması yardımıyla belirlenen göstergelere bağlı olarak yapılmıştır. Tasarlanan öğrenme ortamının grupların ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır. Klinik ve yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler nitel olarak değerlendirilmiştir. Öğrenme ortamlarında ispat sürecine yönelik yapılan video kayıtları ise İSMAT Modeli aşamalarına bağlı olarak belirlenen göstergeler doğrultusunda hazırlanan bir form aracılığıyla analiz edilmiştir. Ayrıca bu araştırma sonucunda öğretmen adaylarının yaşadığı değişim ve gelişimler üzerine incelemeler yapılarak veriler karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Araştırma boyunca izlenen adımları gösteren akış diyagramı Şekil 2'de sunulmuştur.




Şekil 2. Araştırma boyunca izlenen adımlar

### 3. 3. Pilot Çalışma

Araştırmanın problem durumlarının daha net olarak belirlenmesi, ispat öğretimi için geliştirilen İSMAT Modelinin aşamalarının işlevselliği hakkında bilgi edinilmesi, tasarlanan öğrenme ortamında ortaya çıkabilecek aksaklıkların görülmesi, veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenirliğinin test edilmesi, verilerin analiz edilmesinde nasıl bir yol izleneceğine karar verilmesi ve araştırmacının deneyim kazanması bakımından pilot çalışması oldukça belirleyici olmuştur. Pilot çalışma, 2012-2013 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde ilköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıfta öğrenim gören deney grubunda 50 ve kontrol grubunda 47 öğretmen adayı olmak üzere toplam 97 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışması kapsamındaki uygulamalar haftada iki saat olmak üzere bir dönem boyunca geometri dersinde yürütülmüştür. Deney grubunda İSMAT Modeli aşamaları doğrultusunda hazırlanan çalışma yaprakları hem bireysel hem de grup çalışmaları ile yürütülmüştür. Ayrıca uygulamalar dinamik geometri yazılımlarını kullanma fırsatının sunulduğu bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Kontrol grubunda ise matematiksel bir ilişkinin ispatının yapılmasının istendiği, yapılan ispatın üzerine tartışmaların gerçekleştiği ve dinamik geometri yazılımlarının sadece öğretim elemanı tarafından kullanılabildiği bir ortamda uygulamalar yapılmıştır. Her iki grup için uygulamalar; ilk hafta, resmi tatiller ve sınav haftalarının çıkarılmasıyla birlikte 12 haftalık süre içinde gerçekleştirilmiştir. Deney grubunda yer alan öğretmen adayları her hafta 4 saatlik geometri dersinin ilk 2 saatlik süresinde dersi yürüten öğretim elemanı ile birlikte geometrik kavramlara yönelik teorik kısmı görmüştür. Aynı hafta olmak üzere diğer 2 saatlik sürede ise teorik kısımda görülen konular ile ilgili uygulamalar yürütülmüştür. Kontrol grubunda ise geometri dersinin ilk 2 saatlik diliminde teorik ve diğer 2 saatlik diliminde uygulama kısmı yapılmak üzere her iki kısım da öğretim elemanı ile birlikte yapılmıştır. Uygulama derslerinde öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmalarını geliştirmek amacıyla öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Tasarlanan öğrenme ortamında uygulanan etkinlikler ve haftalık ders planı Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Pilot Uygulama Haftalık Ders Planı

| Hafta | Uygulanan Etkinlik ve İçeriği | Süre (Saat) |
|---|---|---|
| 1 | Öğrencilerle tanışma ve araştırmadan haberder etme | |
| 2 | İspat yapma başarı ön testinin uygulanması | 1,5 |
| 3 | GeoGebra yazılımının tanıtımı (Geometrik yapı oluşturma ve matematiksel ilişki araştırma çalışmaları) | 1,5 |

Tablo 1’in devamı

| | | |
|---|---|---|
| 4 | Açı kavramı ile ilgili bir etkinlik | 1,5 |
| 5 | Üçgen eşliği ile ilgili bir etkinlik | 1,5 |
| 6 | Üçgenlerde benzerlik ile ilgili bir etkinlik | 1,5 |
| 7 | Üçgenlerde benzerlik ile ilgili üç etkinlik | 1,5 |
| 8 | Ara Sınav Haftası | |
| 9 | Açıortay kavramı ile ilgili bir etkinlik | 1,5 |
| 10 | Açıortay, yükseklik, paralellik kavramları ile ilgili üç etkinlik | 1,5 |
| 11 | Diklik, ağırlık ve iç teğet çemberin merkezleri ile ilgili üç etkinlik | 1,5 |
| 12 | Çokgenler (ağırlık merkezi, yükseklik, açıortay ve üçgenlerde benzerliği içeren) ile ilgili üç etkinlik | 1,5 |
| 13 | İç teğet, dış teğet ve çevrel çember ile ilgili üç etkinlik | 1,5 |
| 14 | İspat yapma başarı son testinin uygulanması | 2 |
| | Varsayımda bulunma testinin uygulanması | 1 |
| 15 | Final haftası | |

Pilot çalışmanın ilk haftasında öğrencilerle tanışma, ikinci haftasında ispat yapma başarı ön testinin uygulanması sonrasında GeoGebra yazılımının tanıtımı ile birlikte uygulamalar üçüncü hafta itibari ile yapılmaya başlamıştır. İspat yapma başarı ön testi, deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarına uygulanmakla birlikte testin tamamlanması için 90 dakikalık bir süre verilmiştir. Uygulamaların başladığı üçüncü hafta, öğretmen adaylarına GeoGebra yazılımını tanıtmak adına araştırmacı tarafından geometrik yapıları oluşturma ve bu yapılar üzerindeki ilişkileri araştırmaya yönelik uygulamalar yapılmıştır. Dördüncü hafta ile birlikte başlamak üzere İSMAT Modeli aşamalarına göre hazırlanan çalışma yaprakları ile yapılan uygulamalar 9 hafta boyunca yapılmıştır. Uygulamalar sırasında iki ya da üç farklı çalışma yaprağı kullanılmıştır. Ayrıca uygulamalar, grup çalışmasıyla yürütülmüştür. Uygulamalarda kullanılan çalışma yaprakları ve çalışma kapsamında uygulanan testler üzerine öğretmen adayları ile belirli aralıklarla klinik mülakatlar yapılmıştır. Bütün uygulamaların tamamlanması ile birlikte pilot çalışmanın son haftalarında öğretmen adaylarına ispat yapma başarı son testi ve varsayımda bulunma testi uygulanmıştır.

Pilot çalışma sonrasında öğrenme ortamını daha verimli bir hale getirebilmek amacıyla aşağıda belirtilen değişikliklerin yapılması öngörülmüştür:

1. Pilot çalışma kapsamında yapılan etkinliklerin bazılarında yer alan yönergelerin fazla olması nedeniyle öğretmen adaylarının zorluklar yaşadığı ve etkinliği tamamlama sürelerinin arttığı belirlenmiştir. Bu durumun üstesinden gelebilmek adına İSMAT Modeli aşamalarını temsil eden yönergelere yönelik düzenlemeler yapılarak bu yönergeler daha anlaşılır ve sade bir hale getirilmiştir.

2. Pilot çalışma boyunca uygulanan etkinliklerin bazılarında yer alan sorulara yönelik öğretmen adaylarının ispat yapmakta çeşitli zorluklar yaşadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adayları için ispat yapma bakımından verimli bir öğrenme ortamının oluşması anlamında bir engel oluşturmuştur. Bu tür durumlara yol açan sorular üzerinde değişiklikler yapılıp çalışma yapraklarının yeniden düzenlenmesi ile bu durumun üstesinden gelinmeye çalışılmıştır.
3. İSMAT Modeli aşamalarına göre hazırlanan çalışma yapraklarının belli bir süreden sonra modelin aşamaları ile ilgili yönergelerin olmadığı bir şekilde düzenlenerek uygulamaların yapılmasına karar verilmiştir. Böyle bir karar alınmasının sebebi, belirli bir süre bu tür aşamaları izleyerek ispat yapan öğretmen adaylarının herhangi bir aşama verilmediği durumlarda hangi aşamalardan geçeceğini görebilmek düşüncesine dayanmaktadır.
4. Pilot çalışmada uygulama öncesi ve sonrasında yapılan ispat yapma başarı testlerinin tamamlanması için verilen sürenin yeterli olmaması üzerine başarı testlerinin tamamlanma sürelerinin 120 dakika olmasına karar verilmiştir. Uygulama sonrasında yapılan varsayımda bulunma testinin tamamlanma süresi ilgili herhangi bir değişiklik yapılmamıştır.
5. Pilot çalışma esnasında uygulanan ispat yapma başarı testlerinde yer alan bazı soruların lise öğrenimini yeni tamamlayan bir öğrenci için oldukça zor olması ya da çeşitli ispat adımlarının izlenmesine imkân vermeyen yapıda olması sorularda değişiklik yapılmasını gerekli kılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının anlamada zorluk yaşadığı sorular dikkate alınarak testlerde yer alan soruların yapısında küçük değişiklikler yapılmış ve testlerin asıl çalışma için son hali oluşturulmuştur.
6. Öğrenme ortamında öğretmen adaylarının yaşadıkları durumları daha iyi resmedebilmek ve ispat sürecindeki çalışmaları ile ilgili aralarında geçen konuşmalardan haberdar olabilmek adına asıl çalışmada video kaydı alınması öngörülmüştür.
7. Pilot çalışma yapılmamasına rağmen tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarında bir değişim oluşturabileceği düşüncesiyle asıl çalışmada uygulamalar öncesi ve sonrasında ispatın rolleri ile ilgili yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılması uygun görülmüştür.
8. İSMAT Modelinin aşamalarından biri olan Yapı Oluşturma aşamasında öğretmen adayları kendi isteklerine bağlı olarak dinamik geometri yazılımlarından yararlanarak problem durumunda belirtilen geometrik yapıyı oluşturmaktadır. Pilot çalışmada bazı öğretmen adaylarının bilgisayar

konusunda kendisini yetersiz görmesi ve uygulama dışında yazılım kullanma fırsatlarının olmamasından dolayı bu aşamada zorluk yaşayarak diğer aşamalara geçmekte geciktiği ve etkinliği tamamlama süresinin uzadığı fark edilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları böyle bir durumla karşılaştığında etkinliği yapma konusunda motivasyonlarını kaybettiği görülmüştür. Bunun üzerine etkinlikleri tamamlama süresinin uzatılması uygun görülmüştür.

9. Pilot çalışmada öğretmen adaylarının ispat etkinliklerini bir an önce bitirme çabası ile İspatın Tutarlılığını İnceleme aşamasına gerekli özeni göstermemişlerdir. Bir bakıma İSMAT Modelinin bu aşaması tam anlamıyla gerçekleşmemiştir. Bu durumda öğretmen adaylarının ispat için her grubun aynısını yaptığını ve ispata yönelik değerlendirmeler yapamayacaklarını düşünmeleri de etkili olmuştur. Bu aşamada ortaya çıkan olumsuzlukları önlemek amacıyla asıl çalışma için gruplar arasında ispat etkinliklerinin değişiminin araştırmacı tarafından yapılmasına karar verilmiştir. Ayrıca ispata yönelik değerlendirmeler yaparken olabildiğince yanlarında yer almaya ve nasıl değerlendirileceklerine yönelik örnekler vererek teşvik etmeye çalışılmasının yararlı olabileceği düşünülmüştür.

### 3. 4. Asıl Çalışma

Asıl çalışma, 2013-2014 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğretmen adayları ile Geometri dersi kapsamında gerçekleştirilmiştir. Araştırmada rastgele olarak oluşturulan deney ve kontrol grubu olmak üzere toplam iki grup ile uygulamalar yürütülmüştür. Uygulamalar, deney grubunda İSMAT Modeli aşamalarına bağlı olarak hazırlanan çalışma yaprakları, bireysel ve grup çalışmalarının yapıldığı ve kendi isteklerine bağlı olarak dinamik geometri yazılımlarından yararlanabildiği bilgisayar laboratuvarında yapılmıştır. Bu laboratuvarda öğretmen adayları her bilgisayar başına üç kişi gelecek şekilde yerleştirilmiştir. Kontrol grubunda ise bireysel olarak çalıştıkları, verilen bir matematiksel ilişkinin ispatının yapılmasının istendiği, yapılan ispatlar üzerine sınıf tartışmalarının yapıldığı, sadece öğretim elemanının dinamik geometri yazılımını kullanabildiği bir ortamda uygulamalar gerçekleştirilmiştir.

### 3. 4. 1. Araştırma Grubu

Araştırma kapsamında ilköğretim matematik öğretmenliği programının birinci sınıfında öğrenim gören öğrenciler ile uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Uygulamalar deney ve kontrol grubu olacak şekilde iki grup üzerinde yürütülmüştür. Araştırma süresince deney grubunda 32, kontrol grubunda ise 28 matematik öğretmeni adayı olmak üzere toplam 60 öğretmen adayı ile çalışmalar yapılmıştır. İlköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencileri ile araştırmanın yürütülmesi, lise öğrenimlerini yeni tamamlamaları ve geometri ile ilgili ispatlar yapma bakımından daha az deneyime sahip olmalarıdır. Bununla birlikte ilköğretim matematik öğrencilerinin geometri dersini birinci sınıfta almaları da araştırma grubu olarak tercih edilmesinde etkili olmuştur.

Çalışmada ayrıntılara yer verebilmek adına klinik ve yarı yapılandırılmış mülakatların gerçekleştirileceği 6 katılımcı uygulamalar öncesinde yapılan ispat yapma başarı ön test sonuçlarına göre belirlenmiştir. Katılımcıların seçiminde ön testin bir ölçüt olarak alınması, öğretmen adaylarının önceki öğrenimlerinde elde ettikleri deneyimlere bağlı olarak ispat yapma bakımından farklı başarı düzeyinde olan öğretmen adaylarını belirleyebilmektir. Bu katılımcılar, çalışma boyunca ÖA3, ÖA4, ÖA5, ÖA22, ÖA27, ÖA31 şeklinde kodlanmıştır. Katılımcıların demografik özelliklerine Tablo 2'de yer verilmiştir.

Tablo 2. Katılımcıların Demografik Özellikleri

| Katılımcı Kodu | Cinsiyet | Ön Test Lineer Puan Sonuçları | Başarı Düzeyi |
|---|---|---|---|
| ÖA3 | Kız | -0,17 | Orta |
| ÖA4 | Erkek | -0,51 | Düşük |
| ÖA5 | Erkek | -0,97 | En Düşük |
| ÖA22 | Kız | 0,39 | Yüksek |
| ÖA27 | Kız | 0,39 | Yüksek |
| ÖA31 | Kız | 0,48 | En Yüksek |

Tablo 2'den görüldüğü üzere çalışma kapsamında yer alan mülakatlara katılım gösterecek olan öğretmen adaylarından 4'ü kız, 2'si ise erkektir. Uygulama öncesinde yapılan ispat yapma başarı testi sonuçlarına göre en yüksek, yüksek, orta, düşük, en düşük olmak üzere farklı başarı düzeylerine sahip öğretmen adayları yer almaktadır. Öğretmen adayları çalışma kapsamında yürütülen mülakatlara katılmayı gönüllü olarak kabul etmiş ve çalışma boyunca bu öğretmen adayları ile mülakatlar gerçekleştirilmiştir.

Tasarlanan öğrenme ortamında toplamda 11 grup ile çalışmalar yürütülmüştür. Bu gruplar çalışma boyunca Grup 1, Grup 2, Grup 3, Grup 4, Grup 5, Grup 6, Grup 7, Grup 8, Grup 9, Grup 10 ve Grup 11 şeklinde kodlanmıştır. Öğretmen adaylarının ispat süreçlerini incelemek adına Grup 1, Grup 2, Grup 8, Grup 10, Grup 11 olmak üzere 5 grubun her hafta gerçekleşen uygulamalar boyunca yaptıkları video kaydına alınmıştır. Her bir grup içinde mülakat yapılan bir katılımcı yer almaktadır. Gruplarda yer alan öğretmen adaylarını gösteren Tablo 3 aşağıda yer almaktadır.

Tablo 3. Gruplarda Yer Alan Öğretmen Adayları

| Grup Kodu | Öğretmen Adayı Kodları |
|---|---|
| Grup 1 | ÖA1, ÖA2, ÖA3 |
| Grup 2 | ÖA4, ÖA5 |
| Grup 8 | ÖA21, ÖA22, ÖA23 |
| Grup 10 | ÖA27, ÖA28, ÖA29 |
| Grup 11 | ÖA30, ÖA31, ÖA32 |

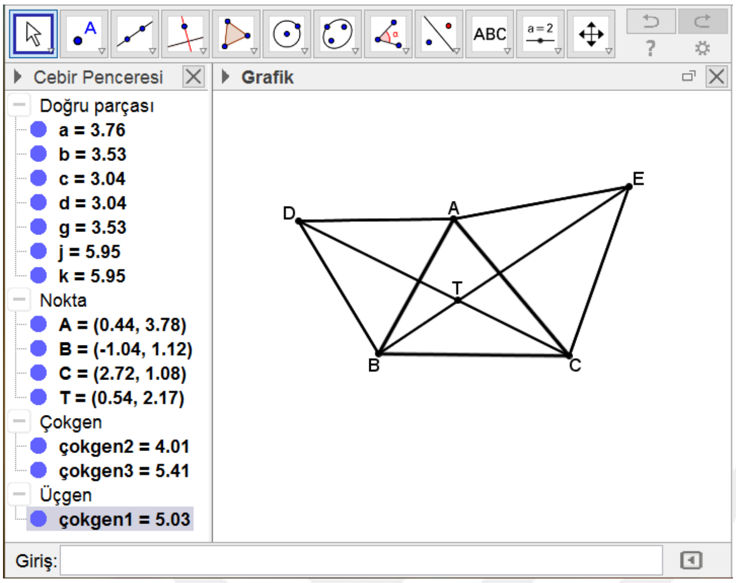
## 3. 5. Deney ve Kontrol Grubunda Derslerin Yürütülmesi

Araştırma kapsamında deney ve kontrol grubunda derslerin yürütülmesi ile ilgili bilgiler bu kısımda sunulmuştur.

### 3. 5. 1. Deney Grubunda Derslerin Yürütülmesi

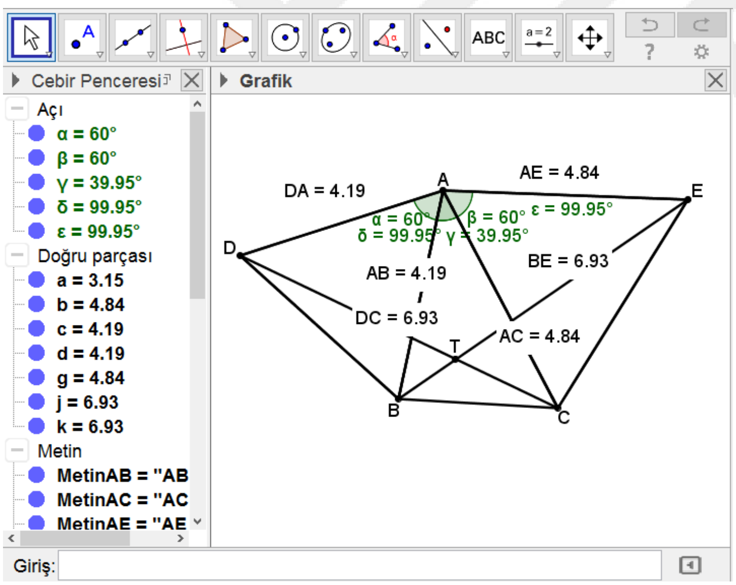
Haftada dört saat olarak yürütülen geometri derslerinin ilk iki saatlik diliminde geometrik kavramlar ile ilgili tanım, aksiyom, teoremler üzerinden konunun temelini öğrenmeye yönelik teorik dersler yapılırken diğer iki saatlik dilimde işlenen konuya yönelik farklı matematiksel ilişkileri içeren ispat ile ilgili etkinlikler ile derslerin uygulama kısmı yapılmıştır. Geometri derslerinin teorik kısmı öğretim elemanı tarafından yürütülürken uygulama kısmı araştırmacı tarafından yürütülmüştür. İspat ile ilgili etkinlikler uygulanırken İSMAT Modelinin aşamaları takip edilmiştir. Uygulamalar esnasında İSMAT Modeli aracılığıyla öğretmen adayları, süreç içinde her biri aktif bir şekilde çalışmak üzere gruplar halinde etkinlikler yürütülmüştür. Uygulamalar grup çalışması şeklinde yürütülmesine rağmen modelin aşamalarında öğretmen adayları öncelikle bireysel olarak çalışıp sonra birbirleriyle çalışmalarını paylaşmışlardır. Etkinlikler uygulanırken İSMAT Modeli kapsamında öğretmen adayları öncelikle problem durumunu anlamaya çalışmıştır. Ardından problemde verilenlerden yararlanarak geometrik yapıyı dinamik geometri yazılımı yardımıyla oluşturup yapı üzerinde ilişkiler aramak için uğraşmışlardır. Yaptıkları ölçümler ve yapı üzerinde mevcut ilişkileri bulma uğraşları sonrasında varsayımlarda bulunmuşlardır. Daha sonra varsayımları üzerine tartışmalar yapıp farklı durumlardan haberdar olarak ortak paydada buluşmuşlardır. Uygulamalar boyunca öğretmen adayları belirtilen bu eylemleri yerine getirme sürecinde dinamik geometri yazılımlarından biri olan GeoGebra yazılımını kullanmalarına yönelik örnekler ile birlikte bu yazılımın ispat sürecindeki rolüne ilişkin açıklamalar Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. GeoGebra Yazılımının İspat Sürecindeki Rolüne İlişkin Örnek Açıklamalar

<table>
<tr><th>GeoGebra Ekran Görüntüsü</th><th>Açıklamalar</th></tr>
<tr><td>


</td><td>

- Öğretmen adayları uygulamalar esnasında problem durumunda verilenlere ve geometrik bilgilerine dayalı olarak yazılım üzerinde geometrik yapıyı oluşturmuşlardır.

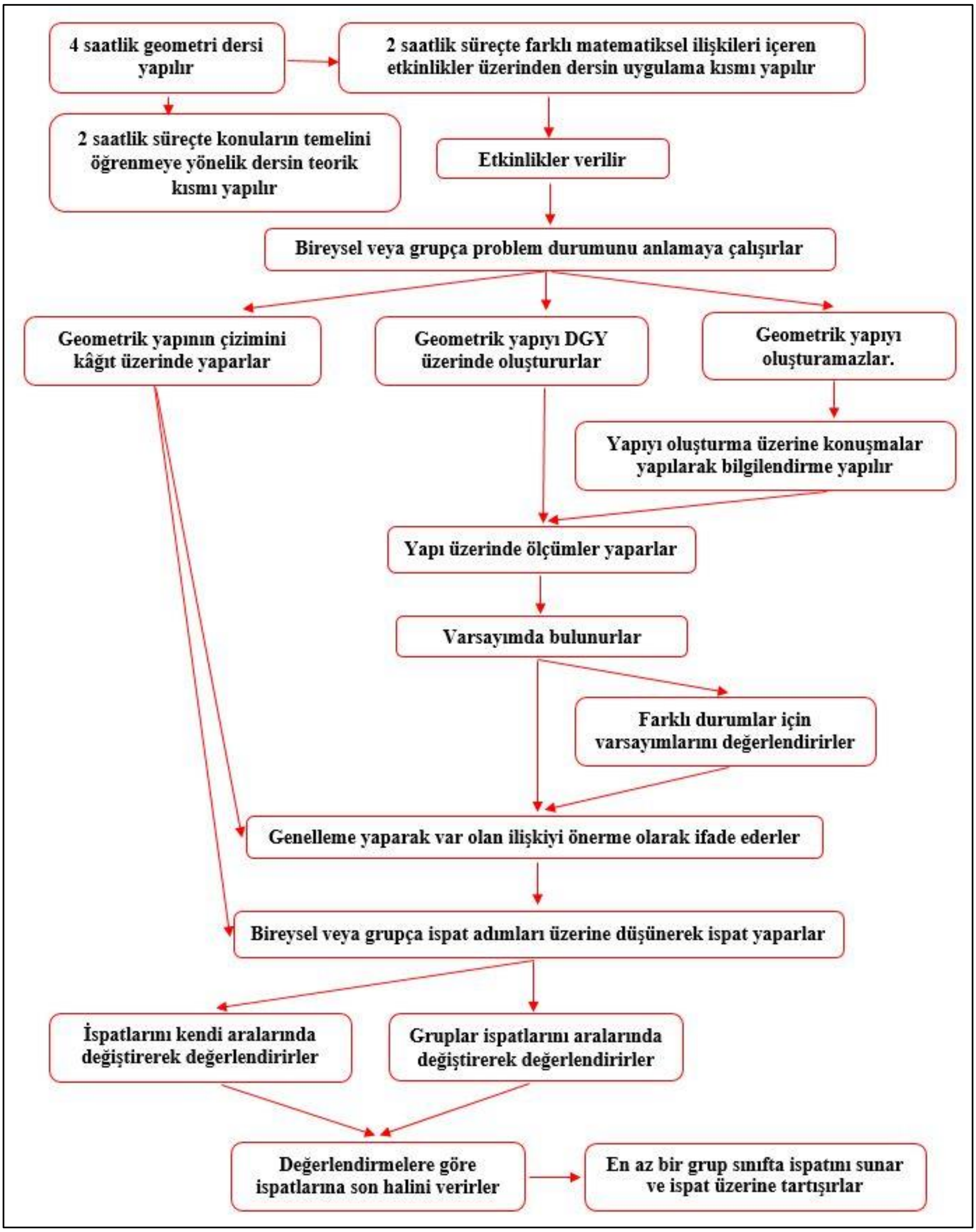
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

- Öğretmen adayları oluşturdukları dinamik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapmışlardır.
- Ölçüm ve testleri kullanarak matematiksel ilişkileri araştırmışlardır.
- Deneysel verileri elde ederek ispat adımlarını belirlemeye çalışmışlardır.
- Geometrik yapının farklı ve uç durumları için matematiksel ilişkileri test etmişlerdir.

</td></tr>
</table>

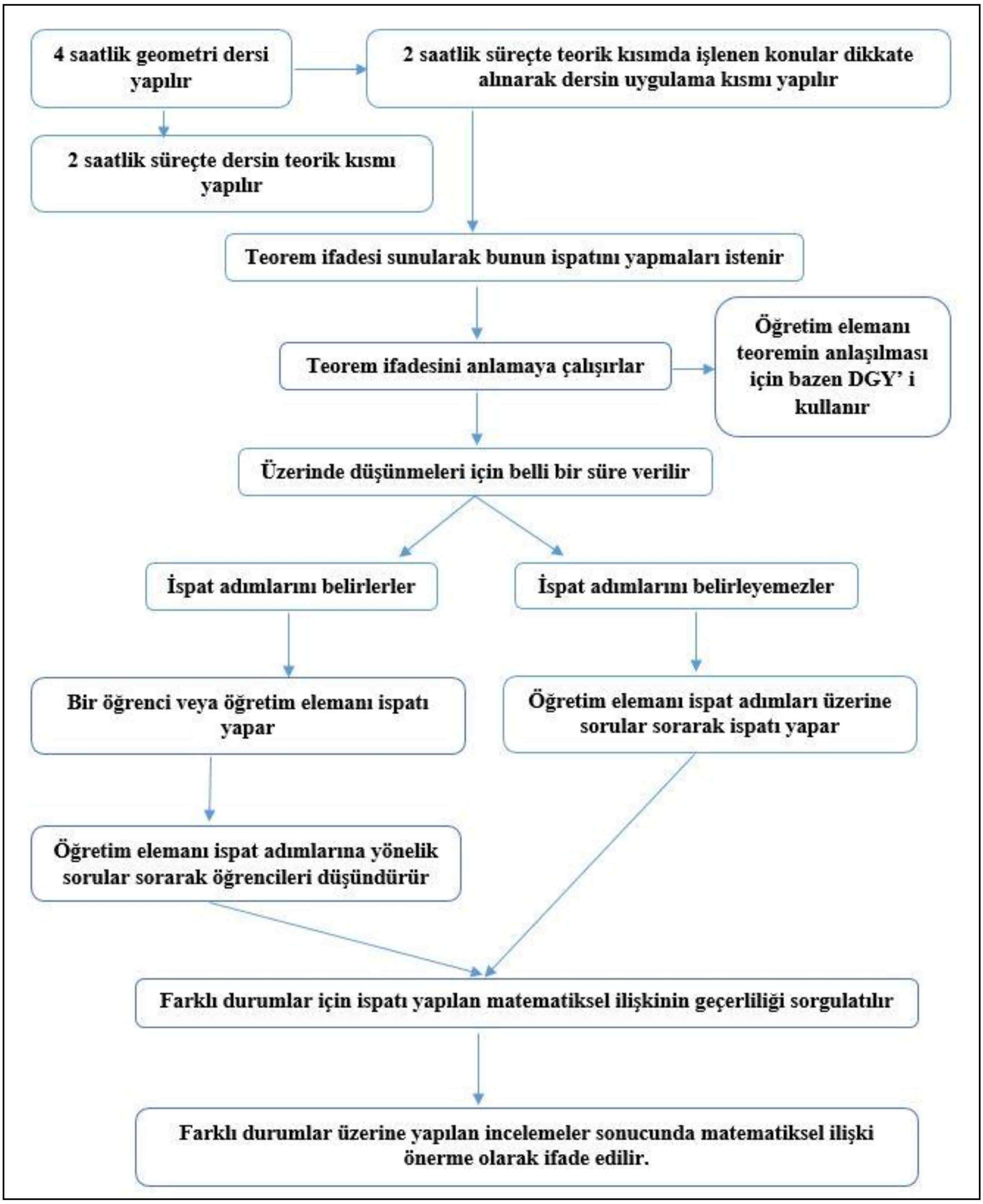
Öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı üzerindeki bu tür incelemeleri ile birlikte bunlara yönelik yaptıkları tartışmalar sonucunda varsayımlarını önerme haline getirmişlerdir. Daha sonra ise önermelerini doğrulamak ve niçin bu ifadenin doğru olduğuna karar verebilmek için ispat planlarını oluşturmuşlardır. İspatlarının tutarlılığını inceleme noktasında ise gruplar ispatlarını kendi aralarında değiştirerek bunlar üzerine değerlendirmeler yapmışlardır. Yapılan bu değerlendirmeler doğrultusunda eksiklerini ve hatalarını belirleyip ispatlarına son halini vererek ispatlarını formal hale dönüştürmüşlerdir. Ayrıca bütün aşamalar dâhilinde, dinamik geometri yazılımlarından istekleri doğrultusunda yararlanabilmişlerdir. İspat ile ilgili etkinlikler bu döngü çerçevesinde uygulanmıştır. Ancak öğretmen adaylarının ispat etkinliklerinde İSMAT Modelinin aşamalarına yönelik yönergeler olmaması durumunda hangi aşamalardan geçmeyi tercih ettiklerini belirlemek amacıyla beşinci haftadan itibaren belirtilen yönergelerin yer almadığı etkinlikler uygulanmıştır. Bu uygulamalar esnasında araştırmacının yönlendirme ve modelin her bir aşamasında gruplar arası tartışma ortamı oluşturma çabaları olmuştur. Ayrıca öğretmen adaylarının çalışmaları üzerinden yapılan tartışmalarla geometrik yapı ve varsayımlarını nasıl oluşturacakları, önerme haline nasıl getirecekleri ve bir ispatın nasıl yazılacağına yönelik vurgulamalarda da bulunmuştur. Uygulamalar sonunda bir ya da birden fazla grubun ispatına yönelik sunumlar yapılmıştır. Bu sunumlarda izlenen farklı ispat adımlarının ve ispatlarda yer alan hata ya da eksikliklerin bütün öğretmen adayları tarafından görülmesi amaçlanmıştır. Yapılan sunumlar esnasında bir tartışma ortamı oluşturarak kullanılan tanım, aksiyom, teoremlerin ve matematik dilinin uygunluğuna yönelik vurgulamalar yapılmıştır. Deney grubunda tasarlanan öğrenme ortamı; bireylerin aktif olması, grup çalışması yapma, dinamik geometri yazılımlarını kullanma, tartışma yapma, bireysel ispat yazma çalışmaları ve keşfetme odaklı olarak hazırlanmıştır. Deney grubunda derslerin yürütülmesini özetleyen Şekil 3 aşağıda yer almaktadır.




Şekil 3. Deney grubunda derslerin yürütülmesinde izlenen adımlar

### 3. 5. 2. Kontrol Grubunda Derslerin Yürütülmesi

Haftada dört saat olarak yürütülen geometri derslerinin ilk iki saatlik diliminde ders ile ilgili alt yapıyı oluşturmak adına dersin teorik kısmı yapılmıştır. Diğer iki saatlik dilimde ise teorik anlamda işlenen konular dikkate alınarak dersin uygulama kısmı yürütülmüştür. Teorik ve uygulama kısımlarının her ikisi de aynı öğretim elemanı tarafından yapılmıştır. Geometri dersinde gerek konular öğrenilirken gerekse konulara yönelik uygulamalar yapılırken teorem ya da önermeler öğretmen adaylarının önüne son halini almış şekilde getirilmiştir. Bir teoremin ya da önermenin oluşum safhasından haberdar olmadan ve bu oluşum sürecinin içerisinde yer almadan bu ifadelerle doğrudan karşılaşmışlardır. Derslerin uygulama kısmında öncelikli olarak öğretmen adayları herhangi bir teorem ya da önerme ile karşılaşmış ve kendilerinden bunların ispatının yapılması istenmiştir. Teorem ya da önermelerle karşılaşmaları ile birlikte bu ifadelerin hangi koşullar altında geçerli olduğuna yönelik incelemeler yaparak bu ifadeleri anlamaya çalışmışlardır. Bu ifadeleri anlama noktasında öğretim elemanı bazı durumlarda dinamik geometri yazılımlarından yararlanmıştır ve öğretmen adaylarının ispat üzerine düşünmeleri için belli bir süre verilmiştir. Karşılaştıkları bu teorem ya da önermelerin ispatının yapılması ise öğretim elemanı ya da öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilmiştir. İspatın yapılması esnasında öğretim elemanı ispat adımları ya da farklı durumlar için matematiksel ilişkinin geçerliliği ile ilgili öğretmen adaylarına sorular sorarak bir tartışma ortamı oluşturmuştur. Ancak bu uygulamalar gerçekleştirilirken grup çalışması, bireysel ispat çalışmaları, öğrencinin süreç içinde yer aldığı keşfetmeye yönelik çalışmalar yapılmamıştır. Öğretim elemanının yaptığı ispat üzerinden anlamadıkları yeri sorma ya da önce öğretmen adaylarının ispatlarını yazmaları beklenerek genellikle öğretim elemanının ispat yaptığı bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Başka bir ifadeyle öğretmen adayları ispat sürecinin son aşamasıyla karşılaşmışlardır. Bu karşılaşmalarında da sürece dâhil olmaları minimum düzeyde olmuştur. Ayrıca bu uygulamalar boyunca dinamik geometri yazılımları sadece öğretim elemanının kullanımı ile gerçekleşmiş, öğretmen adaylarının bizzat kendilerinin yararlandığı bir durum olmamıştır. Kontrol grubunda tasarlanan öğrenme ortamı; öğrencinin ispat sürecinin sadece son aşaması ile karşılaştığı, bireysel ispat çalışmaları ve keşfetme çalışmalarının yer almadığı bir şekilde gerçekleşmiştir. Bir bakıma sadece ispata yönelik önemli noktaların vurgulandığı bir öğretim yapılmıştır. Kontrol grubunda derslerin yürütülmesini özetleyen Şekil 4 aşağıda yer almaktadır.




Şekil 4. Kontrol grubunda derslerin yürütülmesinde izlenen adımlar

Deney ve kontrol grubuna yapılan derslerde her bir gruba yönelik öğrenme ortamlarında yürütülen uygulamalar haftalara göre aşağıda yer alan Tablo 5'te belirtildiği gibi gerçekleştirilmiştir.

Tablo 5. Asıl Uygulama Süreci

| Hafta | Uygulama Süreci | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Deney Grubu | Süre (saat) | Kontrol Grubu | Süre (saat) |
| 1 | Öğrencilerle tanışma ve araştırmadan haberdar etme | | | |
| 2 | İspat Yapma Başarı Ön Testinin uygulanması | 2 | İspat Yapma Başarı Ön Testinin uygulanması | 2 |
| 3 | GeoGebra yazılımının tanıtımı (Geometrik yapı oluşturma ve matematiksel ilişki araştırma çalışmaları) | 2 | • Bilinen teoremler üzerine konuşma<br>• Bu teoremlerin farklı durumlar için geçerli olup olmadığına yönelik tartışmalar yapma | 2 |
| 4 | İspatın rolleri ile ilgili yarı-yapılandırılmış mülakatların yapılması | - | Açı kavramı ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| | Açı kavramı ile ilgili etkinlik (İSMAT Modeli aşamaları ile) | 2 | | |
| 5 | Üçgen eşliği ile ilgili etkinlikler (2 tane) (İSMAT Modeli aşamaları ile) | 2 | Üçgen eşliği ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| 6 | Üçgenlerde benzerlik konusunun anlatımı | 2 | Üçgenlerde benzerlik konusunun anlatımı | 2 |
| 7 | Üçgenlerde benzerlik ile ilgili etkinlik (2 tane) (İSMAT Modeli aşamaları ile) | 2 | Üçgenlerde benzerlik ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| 8 | Menelaus teoremi ile ilgili etkinlik<br>Seva teoremi ile ilgili etkinlik<br>(İSMAT Modeli aşamaları ile) | 2 | Menelaus ve Seva teoremleri ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| 9 | Ara Sınav Haftası | | | |
| 10 | Açıortay kavramı ile ilgili etkinlik<br>Ağırlık merkezi ile ilgili etkinlik<br>(İSMAT Modeli aşamaları ile) | 2 | Açıortay, ağırlık merkezi gibi kavramlar ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| 11 | Resmi Tatil | | | |
| 12 | Dörtgenler ile ilgili etkinlikler (Aşamasız-2 tane) | 2 | Dörtgenler ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| 13 | Çokgenler ile ilgili etkinlik<br>Çemberler ile ilgili etkinlik<br>(Aşamasız) | 2 | Çokgenler, çemberler ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| | İspatın rolleri ile ilgili yarı yapılandırılmış mülakatların yapılması | - | | |
| 14 | Dış teğet çember ile ilgili etkinlik<br>İç teğet ve çevrel çember ile ilgili etkinlik<br>(Aşamasız) | 2 | İç ve dış teğet çemberler ile çevrel çember ile ilgili ispat uygulamaları | 2 |
| 15 | İspat Yapma Başarı Son Testinin uygulanması | 2 | İspat Yapma Başarı Son Testinin uygulanması | 2 |
| | Varsayımda Bulunma Testinin yapılması | 1 | Varsayımda Bulunma Testinin yapılması | 1 |
| 16 | Final Haftası | | | |

## 3. 6. Veri Toplama Araçları ve Veri Kaynakları

Tasarlanan öğrenme ortamının ispat yapma ve varsayımda bulunmalarına, ispatın rollerine yönelik bakış açılarına etkisini değerlendirme ile öğrenme ortamından yansımaları resmetmeyi amaçlayan bu çalışmanın veri toplama araçlarını ispat yapma başarı testleri, varsayımda bulunma testi, klinik ve yarı yapılandırılmış mülakatlar, alan notları oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmada veri kaynağı olarak video kayıtlardan yararlanılmıştır. Veri toplama araçları ve veri kaynakları ile ilgili genel bilgiler Tablo 6'da özetlenmiştir.

Tablo 6. Veri Toplama Araçları ve Veri Kaynakları ile İlgili Genel Bilgiler

| Veri Toplama Araçları | | Deney Grubu | Kontrol Grubu | Kullanım Amacı |
|---|---|---|---|---|
| İspat Yapma Başarı Testi | Ön Test | ✓ | ✓ | Uygulamalar öncesinde öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarını belirleme |
| | Son Test | ✓ | ✓ | Uygulamalar sonrasında öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarını belirleme |
| Varsayımda Bulunma Testi | | ✓ | ✓ | Öğretmen adaylarının varsayımda bulunmalarını belirleme |
| Klinik Mülakat | | ✓ | | Öğretmen adaylarının açık uçlu sınavlar ve etkinlikleri yaparken sahip oldukları düşünceleri ortaya çıkarma |
| Yarı Yapılandırılmış Mülakat | | ✓ | | Deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrasında ispatın rollerine yönelik bakış açılarındaki değişimi ortaya çıkarma |
| Alan Notu | | ✓ | | Bütün gruplarda yaşanan durumlara yönelik genel olarak bir fikir sahibi olma |
| Video Kaydı | | ✓ | | Tasarlanan öğrenme ortamında yaşanan durumları ayrıntılı bir şekilde belirleme |

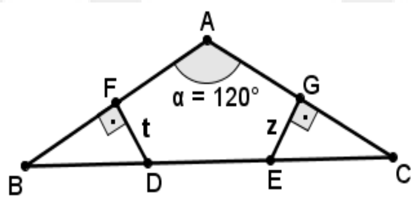
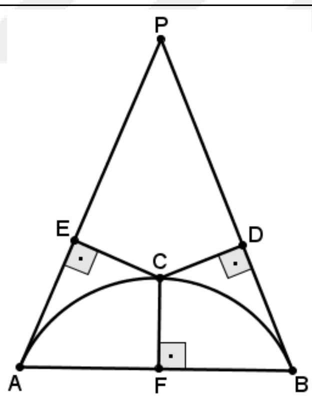
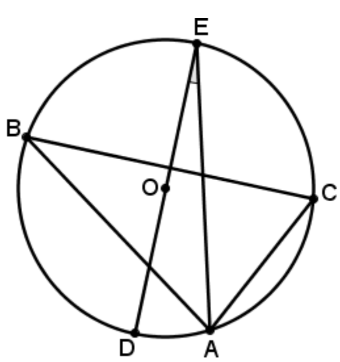
### 3. 6. 1. İspat Yapma Başarı Testi (İSYBT)

Öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarını belirlemek amacıyla uygulamalar öncesinde ve sonrasında olmak üzere ön test ve son test olarak iki farklı İspat Yapma Başarı Testi uygulanmıştır. Uygulama öncesinde yapılan İspat Yapma Başarı Ön Testi (İSYBÖT) ve uygulama sonrasında yapılan ise İspat Yapma Başarı Son Testi (İSYBST) şeklinde adlandırılmıştır. Bu testleri geliştirme ve gerekli düzenlemeler yaparak asıl çalışmada kullanılabilir hale getirme sürecinde aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

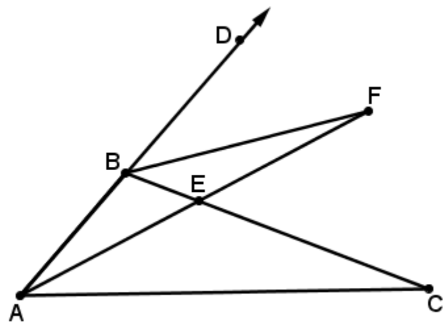
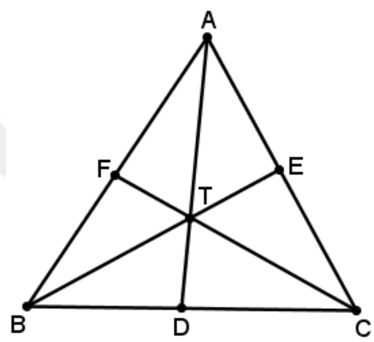
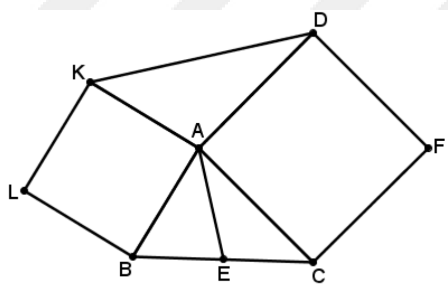
1. İspat yapma başarı testlerinde yer alacak problemlerin belirlenmesi: İspat yapma başarı testlerini geliştirme sürecinde ispat yapma başarılarını daha net bir şekilde belirlemek adına ilgili literatür ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca ispat yapmaya uygun geometri problemlerini belirleyebilmek adına çeşitli geometri kitapları taranmıştır. Ön test ve son testte yer alan problemler hazırlanırken aynı konulardan seçilerek birbirine benzer içerikte olmasına dikkat edilmiştir.
2. Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları: Öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarını belirlemek amacıyla geliştirilen başarı testlerinin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarının yapılabilmesi için pilot çalışması yapılmıştır. Ayrıca testlerin kapsam geçerliğinin sağlanması için uzman görüşüne başvurulmuştur. Problem ifadelerinin anlaşılır olması ve geometri dersinde işlenen konulara yönelik uygunluğun sağlanmasına özellikle dikkat edilmiştir. Pilot çalışması sonrasında ön testte yer alan problemlerden birinin lise öğrenimini yeni tamamlayan öğretmen adayları için oldukça zor olması ve bunun sonucunda araştırmanın amacına hizmet edemediği düşüncesi ile yerine farklı bir problem kullanılmasına karar verilmiştir. Son testte ise problemlerde belirtilen matematiksel ilişkiye doğrudan ulaşılması ve birbirini takip eden ispat adımlarına gereksinim duyulmaması üzerine testten çıkarılmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Bununla birlikte son teste farklı bir problem eklenmesi uygun görülmüştür. Bu testlerin tamamlanması için verilen sürenin pilot çalışmada yetersiz olduğunun fark edilmesinin üzerine her iki test için sınav süresinin 120 dakika olmasına karar verilmiştir.
3. Pilot çalışmada yer alan verilerin analizi ve asıl çalışmada kullanılabilir hale getirilmesi: Uzman görüşleri ve pilot çalışması ile problem çıkarma-ekleme ve her iki testte yer alan problem ifadelerini tekrar gözden geçirme işlemleri yapılarak başarı testleri asıl çalışma için hazır hale getirilmiştir. Pilot çalışmada yer alan verilerin analiz edilmesiyle öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarını belirlemek için yeni göstergeler belirlenerek muhakeme süreci, matematik dili ve ispat yapısı gibi farklı boyutlara göre değerlendirmeler yapılması gerektiğine karar verilmiştir. Buna bağlı olarak ispat yapma başarılarını değerlendirmek amacıyla kategorik puanlama cetvelinin son hali oluşturulmuştur (Bkz. Tablo 10).

İspat yapma başarı ön ve son testlerinde araştırmanın amacına uygun olduğuna uzmanlarca karar verilen 12 problem yer almaktadır. Testte yer alan problemler; üçgen, dörtgen, beşgen, çember gibi geometrik şekillerle ilgili olup geometri dersinde işlenen konularda bulunan her bir kavrama yer verecek şekilde oluşturulmuştur. Ayrıca ispat yapma başarı testlerinde yer alan problemlerin benzer içeriğe sahip olması için özen gösterilmiştir. Ancak ön test lise öğrenimini yeni tamamlayan öğrencilere uygun olacak şekilde hazırlanırken son test daha ileri bir düzeyde olacak şekilde hazırlanmıştır. İSYBÖT'de yer alan bazı soruların içeriği ve sorularda belirtilen matematiksel ilişkilerin ispatını yapmak için gerekli olan ön bilgiler Tablo 7'de ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur (Bkz. Ek 1).

Tablo 7. İSYBÖT'de Yer Alan Bazı Soruların İçeriği ve İspat İçin Gerekli Olan Ön Bilgiler

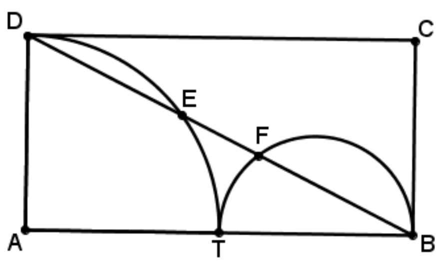
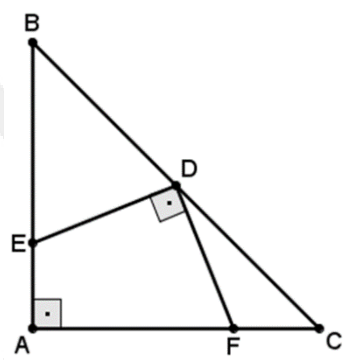
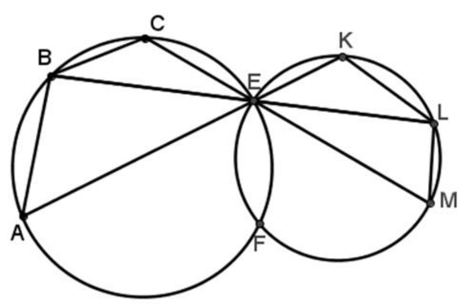
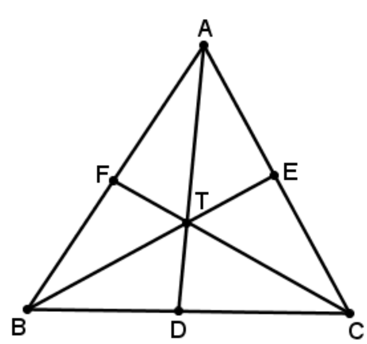
| Soru | Geometrik Şekil | İçerik | İspat için Gerekli olan Ön Bilgiler |
|---|---|---|---|
| 1 |   | Şekilde ABC ikizkenar üçgen olup $\mathrm{m}(\widehat{A}) = 120^{0}$'dir. t ve z doğruları sırasıyla [AB] ve [AC]'nin orta dikmeleri ve $t \cap [BC] = \{D\}$, $z \cap [BC] = \{E\}$ olduğuna göre $\|BD\| = \|DE\| = \|EC\|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz. | Bu problemde ikizkenar üçgenin tanımı, yardımcı elemanlarla ilgili özelliklerin bilinerek ispatın yapılması gerekmektedir. |
| 4 |   | A, C, B noktalarının üzerinde bulunduğu çember yayına A ve B noktalarından çizilen teğetler P noktasında kesişmektedir. C noktasından [AB], [PA] ve [PB] kenarlarına çizilen yükseklik ayakları sırasıyla F, D ve E ise $\|CF\|^2 = \|CD\|.\|CE\|$ dir. Gerekçelerinizi de ifade ederek gösteriniz. | Bu problemde ek çizimler yapılması, çevre ve teğet-kiriş açı kavramlarının ve açı-açı-açı benzerlik teoreminin bilinmesi gerekmektedir. |
| 5 |   | ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde, A noktasının karşısındaki BC yayının ortasında bir E noktası alınıp, [ED] çapı çiziliyor. Buna göre $\mathrm{m}(\widehat{DEA}) = \frac{\|\mathrm{m}(\widehat{B}) - \mathrm{m}(\widehat{C})\|}{2}$ olduğunu gerekçelerinizle birlikte gösteriniz. | Bu problemde çevre açı kavramı, bir çember yayının orta noktasının alınıp bu noktadan çapın çizilmesinin ne sağladığının bilinmesi ve bir açı ölçüsünün diğer açı ölçüsü cinsinden nasıl yazabileceğine yönelik işlemsel bilgiye sahip olunması gerekmektedir. |

Tablo 7’nin devamı

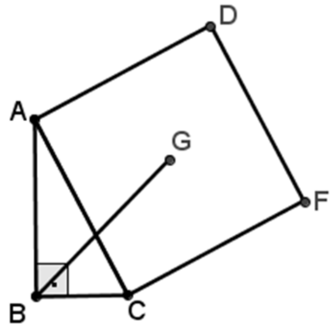
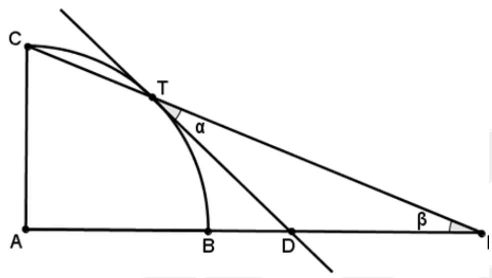
| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 |   | Şekilde $\lvert BC\rvert = 2\lvert AB\rvert$, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACB})$, $m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{CBF})$ dir. $\lvert AF\rvert = \lvert AC\rvert$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz. | Bu problemde açı-açı-açı benzerlik teoremi ile dış açıortay teoreminin bilinmesi ile yapılabilecek bir ispat söz konusudur. |
| 9 |   | Şekilde doğru parçaları aynı noktada kesişmektedir. Buna göre $\frac{\lvert AT\rvert}{\lvert TD\rvert} = \frac{\lvert AF\rvert}{\lvert FB\rvert} + \frac{\lvert AE\rvert}{\lvert EC\rvert}$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz. | Bu problemde taban ve yükseklik durumlarına bağlı olarak kenar uzunluklarına yönelik oranların yazılması ve oran-orantı özelliklerinin bilinmesi beklenmektedir. Bunun dışında Menelaus ve Seva teoremlerinin uygulanması ile de ispatı yapılabilir. |
| 11 |   | ABC üçgeninin [AB] ve [AC] kenarları üzerine ABKL ve ACDF kareleri kuruluyor. [AE] kenarortay ise $2\lvert AE\rvert = \lvert KD\rvert$’dir. Gerekçelerinizi de sunarak kenarlar arasındaki bu ilişkiyi gösteriniz. | Bu problemde ek çizimler yaparak karenin ve paralelkenarın tanımı, kenar-açı-kenar eşlik teoreminin bilinmesiyle ispatı yapılabilir. |

İSYBST’de yer alan bazı soruların içeriği ve sorularda belirtilen matematiksel ilişkilerin ispatını yapmak için gerekli olan ön bilgiler Tablo 8’de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir (Bkz. Ek 2).

Tablo 8. İSYBST'de Yer Alan Bazı Soruların İçeriği ve İspat İçin Gerekli Olan Ön Bilgiler

| Soru | Geometrik Şekil | İçerik | İspat İçin Gerekli Olan Ön Bilgiler |
|---|---|---|---|
| 1 |  | ABCD dikdörtgen, A merkez, [TB] çap, [BD] köşegen, $|AT| = |TB|$ olarak verilmektedir. Buna göre $|DE| = 2|EF|$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | Bu problemde ikizkenar üçgenin tanımı ve özellikleri, çapı gören çevre açının ölçüsünün $90^{\circ}$ olduğunu, kenar-açı-kenar eşlik teoremi ile açı-açı-açı benzerlik teoremi, Pisagor teoreminin bilinmesiyle ispat yapılabilir. |
| 4 |  | ABC ikizkenar dik üçgeninin hipotenüsünün orta noktası D'dir. [AB] ve [AC] kenarları üzerinde sırasıyla E ve F noktaları $m(\widehat{EDF}) = 90^0$ olacak şekilde alınıyor. A(ABC) = 2.A(AEDF) olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | Bu problemde ikizkenar üçgen tanımı ve özellikleri ile açı-kenar-açı eşlik teoreminin bilinmesiyle ispat yapılabilir. |
| 5 |  | Şekilde iki çember E ve F noktalarında kesişmektedir. Kesişme noktalarından biri olan E noktasından rastgele olarak üç doğru çizilmiştir. Buna göre $|BC|.|KL| = |AB|.|LM|$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | Bu problemde ek çizimler yapılması, çevre açı, aynı yayı gören açıların ölçülerinin eşit olduğu ve açı-açı-açı benzerlik teoreminin bilinmesi ile ispat yapılabilir. |
| 7 |  | Şekilde doğru parçaları aynı noktada kesişmektedir. Buna göre $\frac{|AT|}{|AD|} + \frac{|BT|}{|BE|} + \frac{|CT|}{|CF|} = 2$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz. | Bu problemde taban ve yükseklik durumlarına bağlı olarak kenar uzunluklarına yönelik oranların yazılması ve oran-orantı özelliklerinin bilinmesi beklenmektedir. Bunun dışında Menelaus ve Seva teoremlerinin uygulanması ile de ispatı yapılabilir. |

Tablo 8'in devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 |  | ABC bir dik üçgen, ACFD bir kare, G ise karenin merkezidir. $\mathrm{AB} \perp \mathrm{BC}$ 'dir. Buna göre $\lvert\mathrm{BG}\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lvert\mathrm{AB}\rvert + \lvert\mathrm{BC}\rvert)$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz | Bu problemde ek çizimler yapılması ve açı-kenar-açı eşlik teoremi ile Pisagor teoreminin bilinmesi gerekmektedir. |
| 11 |  | A merkezli çeyrek bir çember verilmektedir. Bu çembere dışındaki bir D noktasından çizilen teğetin değme noktası T'dir $m(\widehat{DTH}) = \alpha$, $m(\widehat{THD}) = \beta$ olduğuna göre α=β olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | Bu problemde teğet-kiriş açı, merkez açı kavramlarının, merkezden teğete inen doğrunun dik olduğu, bir dış açının ölçüsünün kendisine komşu olmayan iki açının ölçüsünün toplamına eşit olduğunun bilinmesi gerekmektedir. |

### 3. 6. 2. Varsayımda Bulunma Testi (VBT)

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının varsayımda bulunmalarını belirlemek amacıyla uygulamalar sonunda Varsayımda Bulunma Testi yapılmıştır. Bu testi geliştirme ve gerekli düzenlemeler yapılarak asıl çalışmada kullanılabilir hale getirme sürecinde izlenen adımlar aşağıda sunulmuştur:

1. Varsayımda bulunma testinde yer alacak problemlerin belirlenmesi: Varsayımda bulunma testini geliştirme sürecinde varsayımda bulunmalarını tam anlamıyla belirlemek adına ilgili literatür ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Varsayım üretme bakımından daha geniş yelpazede düşünmelerini sağlamak adına bu testte yer alan problemlerin birden fazla varsayımda bulunmaya imkân vermesi ve geometri dersinde yer alan konuların genelini kapsaması gerektiğine karar verilmiştir.
2. Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları: Varsayımda bulunma testinin kapsam geçerliğinin sağlanması için uzman görüşüne başvurulmuş, problem ifadelerinin anlaşılır olmasını sağlama ve geometri dersinde işlenen konuların geneline hitap etme gibi durumlara dikkat edilmiştir. Uzmanların problemleri yapısal ve içerik bakımından incelemeleri üzerine varsayım üretilmesinin istendiği yönergelerin benzer ifadelerle yazılması gerektiğini belirtmişlerdir. Ayrıca

varsayım üretmelerine yönelik ifadelerin aşırı açık uçlu olmasını engellemek adına düzenlemelerin yapılması ile ilgili önerilerde bulunmuşlardır. Testin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları için pilot çalışma da yapılmıştır. Pilot çalışması sonrasında öğretmen adayları problem ifadelerini anlama konusunda herhangi bir zorluk yaşamamış ve testin tamamlanması için verilen bir saatlik süre öğretmen adayları için yeterli olmuştur.

3. Pilot çalışmada yer alan verilerin analizi ve asıl çalışmada kullanılabilir hale getirilmesi: Uzman görüşleri ve pilot çalışması ile varsayımda bulunma testine yönelik gerekli düzenlemeler yapılarak asıl çalışma için hazır hale getirilmiştir. Pilot çalışmada yer alan verilerin analiz edilmesiyle öğretmen adaylarının varsayımda bulunmalarını değerlendirmeye yönelik göstergeler netleştirilmiştir. Buna dayalı olarak varsayımda bulunmalarını değerlendirmek için kategorik puanlama cetvelinin son hali oluşturulmuştur (Bkz. Tablo 12).

Varsayımda Bulunma Testinde araştırmanın amacına uygun olduğuna uzmanlarca karar verilen toplam 6 problem yer almaktadır. Testte yer alan problemler; üçgen, dörtgen, altıgen, çember gibi geometrik şekillerle ilgili olup geometri dersinde işlenen konuların genelinde var olan kavramlara yer verilmiştir. VBT'de yer alan bazı soruların içeriği ile ilgili bilgiler Tablo 9'da sunulmuştur (Bkz. Ek 3).

Tablo 9. VBT'deki Bazı Soruların İçerikleri

| Soru | İçerik |
|---|---|
| 1 | Bir ABC üçgeninin kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını G ve ayaklarını ise D, E, F olarak adlandırınız. D, E, F noktaları ile [GA], [GB], [GC] doğru parçalarının orta noktalarını birleştirerek bir altıgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz altıgenin sahip olabileceği özelliklerle ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim) |
| 2 | ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktalarını belirleyiniz. P, R, S, T olarak adlandırıp bir dörtgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz PRST dörtgeninin sahip olabileceği özellikler ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim) |
| 3 | Herhangi bir ABCD dörtgeni oluşturarak AB kenarı üzerinde sırasıyla E, F; BC kenarı üzerinde sırasıyla N, M; CD kenarı üzerinde sırasıyla G, H; DA kenarı üzerinde sırasıyla L, K olacak şekilde kenarları üç eşit parçaya bölen noktalar belirleyiniz. E ile H; F ile G; N ile K; M ile L noktalarını birleştirmek üzere [EH], [FG], [NK], [ML] doğru parçalarını çiziniz. Doğru parçalarının kesişmesiyle oluşan PRST dörtgeninin alanına yönelik varsayımlar üretiniz. ABCD dörtgeninin kenarlarını beş, yedi, dokuz vs. parçaya bölerek incelemeler yapınız ve kenarları n parçaya böldüğünüzde oluşan PRST dörtgeninin alanı ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim) |

### 3. 6. 3. Klinik Mülakat

Gerek testler gerekse etkinliklerde öğretmen adaylarının neler düşünerek ya da ne tür zorluklar yaşayarak ispat yaptığı ve varsayımda bulunduğunu ortaya çıkarma bakımından klinik mülakatların yapılması oldukça önemlidir. Bu bakımdan uygulama süreci boyunca öğretmen adaylarıyla belirli aralıklarla klinik mülakatlar yapılmıştır. Deney grubunda yer alan öğretmen adayları ile araştırmada kullanılan her bir teste yönelik klinik mülakatlar yürütülmüştür. İSYBÖT ile İSYBST'ye yönelik yapılan klinik mülakatlar, öğretmen adaylarının ispat yaparken izledikleri adımları nasıl ve neye dayalı olarak belirlediklerini ortaya çıkarmak için yürütülmüştür. Bu mülakatlar esnasında ise "Matematiksel ilişkinin ispatına ulaşmak için hangi ispat adımlarını izledin?", "Sence bu ispat adımı doğru mudur?", "Niçin böyle bir ispat adımı izlemeye karar vermiştin?", "İspatı yaparken zorluk yaşadığın herhangi bir durum oldu mu?", "Şu anda ispatı yapıyor olsaydın nasıl bir yol izlerdin?" şeklinde sorular yöneltilmiştir. Başarı testleri ile ilgili yapılan bu mülakatlar her bir öğretmen adayı ile yaklaşık olarak 40 dakika sürmüştür. VBT'ye yönelik yapılan klinik mülakatlar ise öğretmen adaylarının hangi durumları dikkate alarak ve ne tür düşünceler ile varsayımda bulunduklarına açıklık getirmek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlarda "Bu varsayıma nasıl ulaştın?", "Sence varsayımın doğru mudur?", "Şu anda tekrar varsayımda bulunsaydın bu varsayımı ifade eder miydin?", "Varsayımlarından değiştirmek istediğin var mı?", "Bunlardan farklı bir varsayım üretmek ister misin?" gibi sorular yöneltilmiştir. Testlerin yanı sıra İSMAT Modelinin aşamalarında öğretmen adaylarının yaptıklarını hangi düşüncelerle gerçekleştirdikleri ve bu aşamalarda ne tür zorluklar yaşadıklarına yönelik bilgiler edinmek için etkinlikler üzerinden de klinik mülakatlar yapılmıştır. Bu mülakatlarda çalışma yapraklarında neler yaptıkları ve bunları niçin yaptıkları ile ilgili sorular sorulmuştur. Modelin aşamalarına yönelik yönergelerin yer almadığı etkinliklerde ise öğretmen adaylarının matematiksel ilişkinin ispatını yaparken geçtikleri aşamaları ifade etmelerini sağlayacak sorular yöneltilmiştir. Bu mülakatlar birkaç etkinlik birlikte olmak üzere her bir öğretmen adayı ile yaklaşık olarak 40 dakika sürmüştür.

Araştırma boyunca yapılan bütün mülakatlarda öğretmen adayları ile gerçekleştirilen durumlar video kaydına alınmıştır. Mülakatların her biri toplamda 6 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Mülakatlarda yer alan öğretmen adaylarının seçiminde ise İSYBÖT'den aldıkları puanlar ve gönüllülük esasına dikkat edilmiştir. Öğretmen adayları İSYBÖT'den aldıkları puanlara göre en yüksek, yüksek, orta, düşük ve en düşük seviyede başarıya sahip olmalarına bağlı olarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya bağlı olarak farklı başarı seviyelerinden kişiler seçilerek mülakatların yapıldığı öğretmen adayları belirlenmiştir. Mülakatlar, öğretmen adaylarının rahat hissettikleri ortamlarda gerçekleştirilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının birbirinden etkilenmelerini engellemek adına mülakatlar bireysel olarak yürütülmüştür.

### 3. 6. 4. Yarı Yapılandırılmış Mülakat

Bu araştırmada yarı yapılandırılmış mülakatın kullanım amacı, tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispatın rolleri hakkındaki düşüncelerinde bir değişime sebep olup olmadığını ortaya çıkarmak ve bu durumu resmedebilmektir. Mülakat soruları hazırlanırken ispatın rollerinden her birini yansıtacak türden sorulara yer verilmeye dikkat edilmiştir. Ayrıca mülakat sorularının kapsam geçerliği için alan uzmanlarının fikirleri alınarak sorular üzerinde düzenlemeler yapılmıştır. Bununla birlikte uygulama öncesi ve sonrası mülakat sorularının uygunluğuna yönelik uzman görüşlerine başvurulmuş ve öğretmen adaylarına yöneltilen soruların benzer içerikte olmasına dikkat edilmiştir. Uygulama öncesi yapılan mülakatlar “Matematiksel ispat niçin yapılır?”, “Matematiksel ispat yapmak gerekli midir?”, “Ne zaman ve hangi durumlarda matematiksel ispat yapmaya ihtiyaç duyarsınız?”, “İnsanoğlu her çift sayının iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini (8 = 3+5, 10 = 5+5) bilgisayar yardımıyla katrilyonlarca göstererek bilmektedir. Ancak hala bazı matematikçiler buna bir ispat aramaktadır. Sizce bu anlamlı mıdır?”, “İki tek sayının toplamı bir çift sayıdır. Bu durum rastgele alınan bir çift sayı için sağlanmaktadır. Sizce bunun ispatını yapmaya gerek var mıdır?”, “Öğretmen tahtaya matematiksel bir ifade yazarak onun ispatını yapmaya koyulur. Öğrenciler öğretmene seslenerek “Biz size inanıyoruz. Niye ispatını yapıyorsunuz ki? “ diye belirtirler. Öğretmen ise “Haklısınız.” diye bir karşılık verir. Sizce öğretmen ve öğrenciler haklı mıdır?” şeklindeki sorular çerçevesinde gerçekleşmiştir. Uygulama sonrası yapılan mülakatlar esnasında ise uygulama öncesinde sorulan soruların aynısı ya da benzeri olmak üzere “Matematiksel ispat niçin yapılır?”, “Matematiksel ispat yapmak gerekli midir?”, “Ne zaman ve hangi durumlarda matematiksel ispat yapmaya ihtiyaç duyarsınız?”, “Her tek sayının karesi bir tek sayıdır. Bu durum rastgele alınan bir tek sayı için sağlanmaktadır. Sizce bunun ispatını yapmaya gerek var mıdır?”, “Geometrik bir yapı üzerinde belirtilen kenarlar veya açılar arasında nasıl bir matematiksel ilişki olduğuna dinamik geometri yazılımı aracılığıyla ulaşmaktayız ve yazılım üzerinde sürüklemeler yaparak birçok sayısal değer için de bu ilişkinin geçerli olduğunu görmekteyiz. Sizce DGY aracılığıyla ulaşılan bu matematiksel ilişkinin ispatını yapmaya gerek var mıdır?”, “Öğretmen tahtaya Pisagor teoreminin ispatını yapmaya koyulur. Öğrenciler öğretmene seslenerek “Biz bu teoremin nasıl bir matematiksel ilişki ifade ettiğini bugüne kadar birçok kez duyduk. Niye ispatını yapıyorsunuz ki?“ diye belirtirler. Sizce öğrenciler haklı mıdır?” şeklinde sorular yöneltilmiştir.

Deney grubunda yer alan öğretmen adayları ile yapılan mülakatlarla, uygulama öncesi ve sonrasında ispatın rollerine yönelik düşüncelerinde bir farklılık olup olmadığını belirlemek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda klinik mülakatların yürütüldüğü 6 öğretmen adayı ile birlikte yarı yapılandırılmış mülakatlar da gerçekleştirilmiştir. Mülakata katılan öğretmen adaylarının çalışmaya gönüllü olarak katılmasına özen gösterilmiştir. Mülakatlar, öğretmen adaylarının kendilerini rahat hissedecekleri bir ortamda her bir öğretmen adayı ile yaklaşık olarak 25 dakikalık süre içinde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının birbirlerinin düşüncelerinden etkilenmesinin önüne geçebilmek için mülakatlar her bir öğretmen adayı ile bireysel olarak yürütülmüştür.

### 3. 6. 5. Alan Notları

Araştırmacı, deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat süreçlerine yönelik dikkat çeken durumlar ile ilgili alan notlarını İSMAT Modeli aşamalarına bağlı olarak tutmuştur. Başka bir ifadeyle araştırmacının ispat süreçlerinde öğretmen adaylarının yaptığı eylemler ve yaşadıkları zorluklara yönelik genel izlenimlerini kaydettiği veriler alan notlarını oluşturmaktadır. Öğrenme ortamının değerlendirilmesi ve öğretmen adaylarının geneli hakkında bilgiler verilebilmesinde video kayıtlarına destek olması açısından alan notlarına başvurulmuştur.

## 3. 7. Verilerin Analizi

Tasarlanan öğrenme ortamının ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmaları üzerindeki etkisini, ispatın rolleri ile ilgili bakış açılarındaki değişimi ve bu öğrenme ortamında gerçekleşen durumları resmetmeyi amaçlayan bu çalışmanın verileri nicel ve nitel araştırma yöntemleri ile analiz edilmiştir. Araştırma kapsamında kullanılan veri toplama araçlarının her birine yönelik analiz süreci alt başlıklar halinde sunulmuştur.

### 3. 7. 1. İspat Yapma Başarı Testleri ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarına etkisini belirlemek amacıyla uygulamaların öncesi ve sonrasında sırasıyla İSYBÖT ile İSYBST uygulanmıştır. Bu başarı testlerinin uygulanması sonucunda elde edilen verilerin değerlendirilmesi için Senk'in (1983) doktora çalışmasında kullandığı 5 düzeyli puanlama cetveli, araştırmanın amacı doğrultusunda yeniden düzenlenmesiyle oluşturulan hali bu çalışmada kullanılmıştır. Senk (1983) tarafından kullanılan puanlama cetveli aşağıda sunulmuştur.

0. Puan: Öğrenci hiçbir şey yapmamıştır.

Sadece verilenleri yazmıştır.

Geçersiz veya işe yaramayan mantıksal çıkarımlarda bulunmuştur.

1. Puan: Öğrenci en azından bir kez mantıksal çıkarımda bulunmuştur ve gerekçeler sunmuştur.
2. Puan: Öğrenci ardı ardına çıkarımlarda bulunarak kanıtlar göstermiştir.

   İspatın yarısına kadar olan kısımla ilgili çıkarımda bulunmuştur ve ispatı devam ettirmemiştir.

   Önceki adımlarda hatalı çıkarımlarda bulunduğundan geçersiz bir ispat yazmıştır.
3. Puan: Mantıksal bir şekilde bütün adımları takip ederek ispat yazmıştır. Ancak matematiksel notasyonlarda, kelimelerde veya teoremlerde hatalar vardır.
4. Puan: Matematiksel notasyonlarla ilgili en çok bir hata yaparak geçerli bir ispat yazmıştır.

Yukarıda bahsedilen puanlama cetveli; çıkarımda bulunma, gerekçe sunma ve matematik dili gibi birçok boyuta yönelik göstergeleri bir arada bulunduran bir değerlendirme aracıdır. Dolayısıyla bu puanlama cetveli, yapılan ispatların tek bir boyuta odaklanarak ayrıntılı bir incelemesini yapmaksızın genel anlamda bir değerlendirme yapılmasını sağlamaktadır. Pilot çalışması sonucunda ispat yapma başarı testlerinden elde edilen verilerin incelenmesi ile ispatları değerlendirmeye yönelik farklı göstergelerin ortaya çıktığı görülmüştür. Buna dayalı olarak yeni göstergelerin eklenebileceği ve farklı boyutlar belirlenerek ayrıntılı incelemeler yapılabileceği fark edilmiştir. Bunun üzerine farklı boyutlara göre incelemelerin yapılmasına imkân sağlayacak şekilde puanlama cetvelinin kapsamının genişletilmesine karar verilmiştir.

*Muhakeme Süreci*, *Matematik Dili* ve *İspat Yapısı* düzenlenen kategorik puanlama cetvelinin boyutları olarak belirlenmiştir. Senk'in (1983) doktora çalışmasında kullandığı 5 düzeyli puanlama cetveli muhakeme süreci ve matematik dili boyutlarını birlikte içermektedir. Dolayısıyla boyutların birlikte düşünülmesiyle değerlendirmeler yapılabilmektedir. İspat yapma; muhakemede bulunma, gerekçe sunma, matematik dilini kullanma gibi yeterlilikleri gerektiren bir bütün olmakla birlikte bu boyutların birbirinden ayrılması sonucunda ayrıntılı bir inceleme sağlanarak daha net değerlendirmelerin yapılmasının önünü açabileceği düşünülmüştür. İspat yapısı olarak bir boyutun belirlenmesi ise öğretmen adaylarının ispat yaparken nasıl bir yol izlediklerini ortaya çıkarmak anlamında önemlidir. Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının bir ispat için izledikleri adımları belirli bir sıraya bağlı kalarak ve açıklamalarda bulunarak bir paragraf ispat mı, sadece geometrik şekil üzerinde çeşitli gösterimlerde bulunarak bir geometrik ispat mı, her ikisini de yaparak geometrik-paragraf ispat mı, yoksa ispat yapmamayı mı tercih ettiklerini belirlemek bakımından anlamlıdır. Bu durumlar dikkate alınarak düzenlenen kategorik puanlama cetvelinin son hali Tablo 10'da sunulmuştur.

Tablo 10. İspat Yapmayı Değerlendirmeye Yönelik Kategorik Puanlama Cetveli

| | |
|---|---|
| Muhakeme Süreci (MHS) | 0- a. Boş bırakmıştır.<br>b. Hipotez ve hüküm bilgilerini yazmıştır.<br>c. İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunmuştur. |
| | 1- a. Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunmuştur.<br>b. Çıkarımlarını özel durum üzerinden yürütmüştür. Ancak bunu yaparken yetersiz gerekçelendirme yapmıştır.<br>c. Hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunmuştur. |
| | 2- a. Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak sonuca ulaşamamıştır.<br>b. Sonuca özel durum üzerinden ardı ardına çıkarımlarla ulaşmıştır.<br>c. Sonuca ulaşmış ancak bu ulaşma sürecindeki aşamalarını formal olarak gerekçelendirmemiş ya da yanlış gerekçelendirme yapmıştır. |
| | 3- a. Sonuca ulaşmış ancak ispat aşamalarının bir kısmı gerekçelendirilmiş bir kısmı gerekçelendirilmemiştir.<br>b. Sonuca ulaşmış, ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirmiş. Ancak bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yapmıştır. |
| | 4- Sonuca ispat aşamalarının her birine yönelik gerekçelendirmeler yaparak ulaşmıştır. |
| Matematik Dili (MD) | 0- a. Boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazma.<br>b. Hem kavramların hem de sembollerin kullanımında çok sayıda hatalı durum söz konusudur. |
| | 1- Semboller doğru olmakla birlikte açıklamalar anlaşılır değildir. |
| | 2- Açıklamalar anlaşılmakla birlikte sembollerin kullanımında hatalar vardır. |
| | 3- Hem kavramlar hem de semboller uygun bir şekilde kullanılmıştır. |
| İspat Yapısı | G- Geometrik ispat |
| | P- Paragraf ispat |
| | G, P- Geometrik ve paragraf ispat |
| | Y- İspat yok |

Yukarıda bahsedilen kategorik puanlama cetvelinin muhakeme süreci boyutuna yönelik kategorilerinde yer alan göstergeler, temelde Senk'in (1983) puanlama cetvelindeki göstergeler ile benzerlik göstermektedir. Ancak bu kategorilere yeni göstergeler eklenerek her bir kategorinin kapsamının genişlemesini sağlayan farklılaşmalar da olmuştur. MHS0 kategorisi Senk'in (1983) puanlama cetvelindeki 0 Puan kategorisini yansıtmakla birlikte sadece verilenleri yazma ifadesi hipotez ve hüküm bilgilerini yazma olarak değiştirilmiştir. 1 Puan kategorisine yönelik gösterge, “Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunmuştur.” şeklinde bir ifade ile MHS1 kategorisinde yer alarak bu kategorinin temel göstergesi olarak belirlenmiştir. Bunun yanı sıra yetersiz gerekçelendirmelerle ya da herhangi bir sonuca ulaşmaksızın özel durumlara yönelik çıkarımda bulunma ve hüküm ifadesini kullanarak çıkarımlar ifade etme ile ilgili göstergeler MHS1 kategorisine eklenmiştir. MHS2 kategorisinin temel göstergesi, “Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak sonuca ulaşamamıştır.” ifadesi olmakla birlikte 2 Puan kategorisi ile benzerlik gösteren ölçütüdür. Bu kategoriden farklı olarak sonuca ulaşmak şartıyla özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunma, ispat adımlarına yönelik gerekçeler sunmama ya da hatalı gerekçelendirme yapma gibi göstergeler MHS2 kategorisine eklenmiştir. MHS3 kategorisine, 3 Puan kategorisini temsil eden göstergeden farklı olarak ispat için gerekli olan çıkarımların bir kısmını gerekçelendirme ile ilgili bir gösterge eklenmiştir. MHS4 kategorisinde ise 4 Puan kategorisinde matematik diline yapılan vurgulamadan ziyade gerekli olan bütün ispat adımlarını gerekçeleri ile birlikte sunma ile ilgili bir göstergeye yer verilmiştir. İspatların matematik diline yönelik değerlendirmeleri, bu araştırmada matematik dilinin ayrı bir boyut olarak ele alınmasıyla birlikte bu boyut altında belirlenen göstergeler dâhilinde yapılmıştır.

Tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları üzerindeki etkisini muhakeme süreci ve matematik dili bakımından belirlemek amacıyla öncelikle yapılan ispatlar düzenlenen kategorik puanlama cetveline göre incelenmiştir. Yapılan bu incelemeye göre öğretmen adaylarının İSYBÖT ve İSYBST’de yer alan her bir soruya yönelik puanlamalar Excel dosyasına yazılmış ve analizler için Winsteps 3.91.0 programına aktarılmıştır. Bu program aracılığıyla ispat yapma başarı testlerinde yer alan problemlerin ispatları için verilen puanlar Rasch analizi aracılığıyla lineer puanlara dönüştürülmüştür. Rasch analizinin kullanılma sebebi, puanlama cetvelinde yer alan kategoriler arasındaki farkın eşit olmamasından kaynaklanabilecek sorunların üstesinden gelebilmektir. Rasch analizi sonucunda elde edilen lineer puanlarla istatistiksel analizler yapılmıştır. İstatistiksel analizler yapabilmek için kullanılan testler ve bu testlerin hangi varsayımları sağladığına yönelik bilgiler ile birlikte kullanım amaçlarını gösteren Tablo 11 aşağıda sunulmuştur.

Tablo 11. Kullanılan İstatistiksel Testler ve Testlerin Kullanım Amaçları

| İstatistiksel test | Varsayımlar | Varsayımları Sağlama Durumu | Kullanım Amacı |
|---|---|---|---|
| Mann Whitney U testi | Bağımsız gruplar | ✓ | Uygulamalar öncesinde deney ve kontrol grubunun muhakeme süreci ve matematik dili bakımından ispat yapma başarıları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığının belirlenmesi |
| | Normal dağılıma uygun olmaması | ✓ | |
| Kovaryans Analizi (ANCOVA) | Bağımsız gruplar | ✓ | Uygulamalar sonrasında deney ve kontrol grubunun ispat yapma başarıları arasında anlamlı bir fark olup olmadığını ve varsa bu farkın gerçekten deneysel koşullara bağlı olarak ortaya çıkıp çıkmadığının belirlenmesi |
| | Grupların varyansının eşit olması (Küçük örneklemlerde rastgele örneklem yapılmış olmasına rağmen grupların eşit olmaması durumunu düzeltmesi) | ✓ | |

İstatistiksel analizlerin yanı sıra her bir boyut ile ilgili kategoriler ve bu kategorilere yönelik frekans ve yüzdeler hesaplanarak tablolar halinde sunulmuştur. Bunlarla birlikte her bir göstergeye yönelik öğretmen adaylarının ispatları ile ilgili örneklere yer verilmiştir. Teste ilişkin kodlama güvenirliği için öğretmen adaylarının ispatlarını değerlendirme bakımından başka bir araştırmacıyla bir uyum olup olmadığını belirlemeye yönelik incelemeler gerçekleştirilmiştir. Bu incelemeleri gerçekleştirmek üzere her iki grubun kâğıtları arasından % 30 oranında rastgele bir seçim yapılmıştır. İncelemelerin öncesinde ispat yapmayı değerlendirmeye yönelik kategorik puanlama cetveli, diğer araştırmacıya göstergelere yönelik örneklerle birlikte açıklamalar yapılarak tanıtılmış ve bu puanlama cetveli ile ilgili gerekli olan bilgiler verilmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda iki araştırmacının kodlamaları arasında % 83 oranında bir uyum olduğu belirlenmiştir. Kodlamalar bakımından uyumsuzluğun olduğu durumlar üzerine araştırmacılar ile görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelere dayalı olarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

### 3. 7. 2. Varsayımda Bulunma Testi ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının varsayımda bulunmalarında etkili olup olmadığını belirlemek amacıyla uygulamaların sonunda her iki gruba da olmak üzere VBT uygulanmıştır. Literatür taraması ve pilot çalışması sonuçlarına göre öğretmen adaylarının varsayımlarının doğruluk ve matematik dili boyutları altında değerlendirilmesine karar verilmiştir.

Varsayımların doğruluğuna yönelik değerlendirmenin yapılmasında öğretmen adaylarının varsayım üretmeleri kadar bunları belirli bir temele dayandırarak oluşturmalarının önemli olması ve yapılan çalışmalarda varsayımların doğruluk bağlamında incelenmesi (Frerking, 1994; Yerushalmy, 1987) etkili olmuştur. Varsayımların anlaşılmasında hem sembolik hem de sembolik olmayan dilin etkili olması ise matematik diline göre değerlendirme yapılmasının gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Öğretmen adaylarının VBT'de yer alan sorulara göre ürettikleri varsayımların incelenmesi sonucunda bu boyutlar altında yer alan göstergeler netleştirilmiş ve varsayımları değerlendirmeye yönelik kategorik puanlama cetveli oluşturulmuştur. Bu puanlama cetvelinde genel olarak doğruluk boyutunda varsayım üretmeme, temel düzeyde bilinen temel teoremleri yeniden ifade etme; yanlış varsayım(lar) üretme; özel durumlar için varsayımlar üretme; doğru bir varsayım üretme ve matematik dili boyutunda ise varsayımı uygun bir dil, kısmen uygun bir dil ve uygun olmayan bir dil ile ifade etme şeklinde göstergeler yer almaktadır. Varsayımları değerlendirmeye yönelik kategorik puanlama cetveli Tablo 12'de sunulmuştur.

Tablo 12. Varsayımları Değerlendirmeye Yönelik Kategorik Puanlama Cetveli

| | |
|---|---|
| Doğruluk (VD) | 0- a. Herhangi bir varsayımda bulunmamıştır.<br>b. Temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade etmiştir. |
| | 1- Yanlış bir varsayım üretmiştir. |
| | 2- Varsayımını özel bir durumu ele alarak üretmiştir. |
| | 3-Doğru bir varsayım üretmiştir. |
| Matematik Dili (VMD) | 0- Varsayım uygun bir dille ifade edilmemiştir.<br>a. Sembolik dille ifade ederken matematiksel semboller uygun bir şekilde kullanılmamıştır.<br>b. Sembolik olmayan bir dil kullanırken tamamen yanlış kelimeler kullanılmıştır. |
| | 1- Varsayım kısmen uygun bir dille ifade edilmiştir.<br>a. Sembolik dil kullanırken matematiksel sembollerin bir kısmı uygun, bir kısmı ise uygun olmayacak şekilde ifade edilmiştir.<br>b. Sembolik bir dil kullanırken varsayım ifadesinin bir kısmı sembolik olmayan bir dil ile ifade edilmiştir.<br>c. Sembolik olmayan bir dil kullanırken hangi geometrik kavramın betimlendiği belirsizdir. |
| | 2- Varsayım uygun bir dille ifade edilmiştir.<br>a. Sembolik bir dil kullanırken matematiksel semboller doğru bir şekilde ifade edilmiştir.<br>b. Sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimeler uygun bir şekilde tercih edilmiştir. |

Öğretmen adaylarının varsayımları doğruluk ve matematik dili boyutlarına göre değerlendirilirken frekans ve yüzdeler belirlenip bu boyutlarda yer alan kategoriler ile ilgili genel durum ortaya çıkarılmıştır. Her boyutta yer alan kategorilere yönelik frekanslar istatistiksel analizler yapmak amacıyla da kullanılmıştır. Her bir grubun kendi içinde doğruluk ve matematik dili boyutlarında yer alan kategorilerdeki dağılımlar arasında ilişki olup olmadığı ve bu kategorilerdeki dağılımın gruptan bağımsız olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare testi yapılmıştır. Bunların yanı sıra Ki-Kare testi, doğru varsayım üretme sayısının dağılımının gruptan bağımsız olup olmadığını ortaya çıkarmak amacıyla kullanılmıştır. Bunlarla birlikte her bir boyuta yönelik öğretmen adaylarının varsayımlarından örneklere yer verilmiştir. Teste ilişkin kodlama güvenirliği için başka bir araştırmacı ile varsayımları değerlendirme bakımından bir uyum olup olmadığını görmek adına her iki grubun kâğıtları arasından % 30 oranında rastgele bir seçim yapılarak incelemeler gerçekleştirilmiştir. İncelemelerin öncesinde diğer araştırmacıya örneklerle birlikte açıklamalar yapılarak varsayımları değerlendirmeye yönelik kategorik puanlama cetveli ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda iki araştırmacının kodlamaları arasında % 85 oranında bir uyum olduğu görülmüştür. Kodlama üzerine uyum sağlanamayan durumlar için araştırmacılar ile görüşmeler gerçekleştirilerek gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

### 3. 7. 3. Klinik Mülakatlar ile Elde Edilen Verilerin Analizi

İspat yapma başarı testleri ve varsayımda bulunma testi ile uygulama sürecinde yürütülen etkinlikler üzerine öğretmen adayları ile klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Klinik mülakatlar esnasında öğretmen adaylarının izni dâhilinde video kaydı alınmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan her bir mülakat ile ilgili video kayıtlarının transkriptleri yapılmıştır. Ham veriler elde edildikten sonra testler ve etkinliklere yönelik yapılanları desteklemek adına klinik mülakatlardan bazı kesitlere bulgular bölümünde yer verilmiştir.

### 3. 7. 4. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarında bir değişime neden olup olmadığını belirlemek için deney grubunda yer alan 6 öğretmen adayı ile uygulama öncesi ve sonrasında yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Yapılan mülakatlar, öğretmen adaylarının izni dâhilinde ses kayıt cihazı ile kaydedilmiş ve bu kayıtlar dinlenerek transkript edilmiştir. Bu transkriptler öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarını ortaya çıkaracak şekilde kodlanarak kategoriler oluşturmuştur. Bu kategorilere bağlı olarak deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının her birinin uygulama öncesi ve sonrasında ispatın hangi rollere sahip olduğunu düşündüğü belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrasında ispatın rollerine yönelik bakış açılarını karşılaştırmak amacıyla mülakat esnasında hangi kategorilerin daha sıklıkla belirtildiğine yönelik frekans ve yüzdeler hesaplanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrası ispatın rollerine yönelik bakış açıları ile ilgili düşüncelerine yönelik mülakatlardan kesitlere yer verilmiştir.

### 3. 7. 5. Video Kayıtları ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi ve öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıklarını daha ayrıntılı incelemek adına video kaydı alınmıştır. Video kayıtları, toplamda beş grubun ispat süreçleri ile ilgilidir. Bu kayıtların analizi için İSMAT Modelinin aşamalarında yapılması beklenen davranışlara yönelik göstergeler belirlenerek bir form geliştirilmiştir. Öğrenme ortamında video kaydının alındığı grupların her birinde etkinlikleri yaparken ortaya çıkan davranışlar bu forma göre incelenmiştir. Ayrıca bu formda yer alan göstergelere bağlı olarak öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik sergiledikleri davranışlar ile ilgili frekanslar belirlenmiştir. Böylece her bir uygulamada İSMAT Modelinin hangi aşamalarına yönelik davranışların gerçekleştiği ya da gerçekleşmediği ortaya çıkarılabilmiştir. Bunun yanı sıra her bir grubun toplamda İSMAT Modelinin hangi aşamalarına öncelik gösterdikleri belirlenmiştir. Video kayıtlarını analiz etmek için geliştirilen ispat sürecini incelemeye yönelik form Tablo 13'te sunulmuştur.

Tablo 13. İspat Sürecini İncelemeye Yönelik Video Analiz Formu

| İSMAT Modelinin Aşamaları ile İlgili Göstergeler |
|---|
| Problem Durumunu Anlama |
| 1. Problemde verilenleri taslak üzerinde gösterme. |
| 2. Problem geometrik şekli içermiyorsa problemin içeriğine göre geometrik şeklin taslağını çizme. |
| 3. Problemde ne istendiğini ifade etme. |
| Yapı Oluşturma |
| 1. Geometrik yapıyı oluşturan alt figürler üzerine inceleme yaparak konuşma. |
| 2. Geometrik yapıya yönelik çizim sıralamasını belirleme. |
| 3. Problem durumunda sunulan geometrik şeklin dinamik bir yapısını oluşturma. |
| Oluşturulan Yapı Üzerinde Çalışma ve Varsayımda Bulunma |
| 1. Geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapma. |
| 2. Ölçümler ve testleri kullanarak ilişkileri araştırma. |
| 3. Belirlenen ilişkileri ifade etme. |
| 4. Geometrik yapının farklı ve uç durumları için ilişkileri test etme. |
| 5. Yapılan testler sonucunda varsayımı ifade etme. |
| İlişkiyi Önerme Olarak İfade Etme |
| 1. Hipotez ve hükmü belirtme. |
| 2. Hipotez ve hükümden yararlanarak ulaşılan bağıntıyı matematiksel sembolleri kullanarak ifade etme. |

Tablo 13'ün devamı

| |
|---|
| İspatlama |
| 1. İspata nasıl başlayacağına karar verme. |
| 2. İspata ulaşılmasını kolaylaştıracak deneysel verileri (açı ölçüsü, oranlar, …) belirleme. |
| 3. Ulaşılan bağıntının doğruluğunu göstermek için hangi adımları takip edeceğine karar verme. |
| 4. İspat sürecinde tanım, teorem ve aksiyomlardan yararlanma. |
| 5. Ulaşılan ara ve nihai sonuçları gerekçelendirme. |
| İspatın Tutarlılığını İnceleme |
| 1. Değiştirilen taslak ispatlarında kullanılan tanım, aksiyom, teoremlerin uygunluğu ve matematik dili bakımından değerlendirme. |
| 2. İspat planlarında fark edilen hata ve eksiklikleri belirtme. |
| İspatı Formal Hale Dönüştürme |
| 1. Taslak ispatın değerlendirilmesi sonucunda belirlenen hata ve eksiklikler doğrultusunda ispatı yeniden ele alma. |
| 2. İspat planında matematik diline ve tanım, aksiyom, teoremlerin kullanım amaçlarına dikkat ederek ispata son şeklini verme. |

### 3. 7. 5. Alan Notları ile Elde Edilen Verilerin Analizi

Tasarlanan öğrenme ortamında video kaydının alınmadığı grupların ispat sürecinde yaptıklarına yönelik alan notları tutulmuştur. Video kayıtları ile birlikte genel durumu yansıtmak amaçlı olarak bulgular kısmında küçük ayrıntılara yer vermek adına kullanılmıştır.

# 4. BULGULAR

Bu bölümde, araştırma sürecinde elde edilen veriler, her bir araştırma alt problemine yönelik başlıklar altında sunulmuştur.

## 4. 1. Tasarlanan Öğrenme Ortamının Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapma Başarıları Üzerine Etkisi ile İlgili Bulgular

Bu kısımda tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları üzerine etkisi ile ilgili bulgular *Muhakeme Süreci, Matematik Dili* ve *İspat Yapısı* boyutlarına bağlı olarak sunulmuştur.

### 4. 1. 1. Öğretmen Adaylarının Muhakeme Süreçleri ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalar yapılmadan önce ve uygulamalar yapıldıktan sonra deney ve kontrol grubunun muhakeme süreçleri ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Bu bulgular uygulama öncesi öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakeme süreçleri ile ilgili bulgular ve uygulama sonrası öğretmen adaylarının muhakeme süreçleri ile ilgili bulgular olmak üzere iki alt başlık altında sunulmuştur.

#### 4. 1. 1. 1. Uygulama Öncesi Öğretmen Adaylarının Muhakeme Süreçleri ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalardan önce deney ve kontrol grubunun ispat yapma başarılarını belirleyebilmek için ön test yapılmıştır. Bu test muhakeme süreci boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarıları belirlenmiştir. Bu kısımda ön testten elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra yapılan klinik mülakatlar ve öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek sunulmuştur. Ayrıca deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili başarıları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının İSYBÖT'de yer alan her bir problem için yapılan ispatların muhakeme süreci bakımından hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 14'te sunulmuştur.

Tablo 14. İSYBÖT'de Yer Alan Problemler İçin Yapılan İspatların Muhakeme Süreci Bakımından Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

| İSYBÖT | Deney Grubu | | | Kontrol Grubu | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Problemler | Kategoriler | f | % | Kategoriler | f | % |
| 1 | MHS0 | 1 | 3 | MHS0 | 1 | 4 |
| | MHS1 | 1 | 3 | MHS1 | 8 | 29 |
| | MHS2 | 12 | 38 | MHS2 | 9 | 32 |
| | MHS3 | 11 | 34 | MHS3 | 7 | 25 |
| | MHS4 | 7 | 22 | MHS4 | 3 | 11 |
| 2 | MHS0 | 7 | 22 | MHS0 | 15 | 54 |
| | MHS1 | 8 | 25 | MHS1 | 7 | 25 |
| | MHS2 | 8 | 25 | MHS2 | 4 | 14 |
| | MHS3 | 6 | 19 | MHS3 | 1 | 4 |
| | MHS4 | 3 | 9 | MHS4 | 1 | 4 |
| 3 | MHS0 | 18 | 56 | MHS0 | 18 | 64 |
| | MHS1 | 11 | 34 | MHS1 | 9 | 32 |
| | MHS2 | 3 | 9 | MHS2 | 1 | 4 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 4 | MHS0 | 5 | 16 | MHS0 | 11 | 39 |
| | MHS1 | 19 | 59 | MHS1 | 12 | 43 |
| | MHS2 | 8 | 25 | MHS2 | 5 | 18 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 5 | MHS0 | 7 | 22 | MHS0 | 9 | 32 |
| | MHS1 | 14 | 44 | MHS1 | 12 | 43 |
| | MHS2 | 6 | 19 | MHS2 | 2 | 7 |
| | MHS3 | 5 | 16 | MHS3 | 5 | 18 |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 6 | MHS0 | 18 | 56 | MHS0 | 22 | 79 |
| | MHS1 | 1 | 3 | MHS1 | 2 | 7 |
| | MHS2 | 6 | 19 | MHS2 | 4 | 14 |
| | MHS3 | 4 | 13 | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | 3 | 9 | MHS4 | - | - |
| 7 | MHS0 | 10 | 31 | MHS0 | 15 | 54 |
| | MHS1 | 18 | 56 | MHS1 | 11 | 39 |
| | MHS2 | 3 | 9 | MHS2 | - | - |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | 1 | 4 |
| | MHS4 | 3 | 9 | MHS4 | 1 | 4 |
| 8 | MHS0 | 19 | 59 | MHS0 | 18 | 64 |
| | MHS1 | 10 | 31 | MHS1 | 9 | 32 |
| | MHS2 | 3 | 9 | MHS2 | - | - |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | 1 | 4 |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 9 | MHS0 | 18 | 56 | MHS0 | 14 | 50 |
| | MHS1 | 6 | 19 | MHS1 | 6 | 21 |
| | MHS2 | 8 | 25 | MHS2 | 8 | 29 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |

Tablo 14'ün devamı

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | MHS0 | 14 | 44 | MHS0 | 19 | 68 |
| | MHS1 | 18 | 56 | MHS1 | 9 | 32 |
| | MHS2 | - | - | MHS2 | - | - |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 11 | MHS0 | 23 | 72 | MHS0 | 21 | 75 |
| | MHS1 | 3 | 9 | MHS1 | 4 | 14 |
| | MHS2 | 6 | 19 | MHS2 | 3 | 11 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 12 | MHS0 | 10 | 31 | MHS0 | 10 | 36 |
| | MHS1 | 10 | 31 | MHS1 | 8 | 29 |
| | MHS2 | 7 | 22 | MHS2 | 9 | 32 |
| | MHS3 | 1 | 3 | MHS3 | 1 | 4 |
| | MHS4 | 4 | 13 | MHS4 | - | - |

Genel olarak incelendiğinde hem deney hem de kontrol grubunda yer alan öğretmen adayları daha çok MHS0, MHS1 ve MHS2 kategorilerinde yoğunlaşmışlardır. MHS3 ve MHS4 kategorilerinde ise nispeten daha az sayıda ispatın olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu kategorilere yönelik ispatlar, öğretmen adayları tarafından daha az oranda yapılmıştır. İSYBÖT'de yer alan soruların genelinde MHS3 ya da MHS4 kategorilere yönelik ispatlar yer almazken bazı sorular için her iki grupta da bu kategorilerde yer alan ispatlara rastlanmıştır. Bu sorular İSYBÖT'de yer alan 1. ve 2. sorular olup öncül teoremleri kullanmayı ya da sayısal değerlerden yararlanarak ispat oluşturmayı gerektirdiğinden muhakemede bulunmalarını sağlamıştır. Ayrıca bu sorular birbirini destekleyen farklı çıkarımlarda bulunmalarını gerektirmediğinden MHS3 ve MHS4 kategorilerine yönelik ispatlar da yapabilmişlerdir.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adayları MHS2 kategorisi de dâhil olmak üzere üst seviyedeki kategorilere yönelik muhakemede bulunma bakımından en fazla zorluk yaşadıkları soru 10. sorudur. Bu soruda sayısal değer ya da oranlar gibi doğrudan kullanacakları somut bir verinin olmaması zorluk yaşamalarında bir etken olabilir. Ancak zorluk yaşamalarındaki asıl nedenlerden biri ardı ardına birbirini destekleyen birçok çıkarımda bulunulmasını ve bu çıkarımların birçok kez tekrarlanmasını gerektirmesi olabilir.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının İSYBÖT'de yer alan bazı sorulara yönelik yaptıkları ispatların muhakeme süreci bakımından yer aldığı kategorilerde farklılık olduğu görülmektedir. Gruplar arasında ispatların yer aldığı kategoriler bakımından farklılık gösteren sorular 6. ve 12. sorudur. Bu sorulara yönelik deney grubunun yaptığı ispatlardan bazıları MHS3 ya da MHS4 kategorilerinde yer alırken, kontrol grubunda bu iki kategoriye girebilecek hiçbir bir ispatın olmadığı ya da sadece MHS3 kategorisi içerisinde değerlendirilen bazı ispatların olduğu fark edilmektedir. 6. ve 12. sorunun verilenleri arasında herhangi bir sayısal değerin yer almaması ile birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunulmasını gerektirmesi bazı öğretmen adaylarının zorluk yaşamasına sebep olmuş olabilir.

Öğretmen adaylarının İSYBÖT'de yaptıkları ispatların muhakeme süreci boyutunda yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 15'te sunulmuştur.

Tablo 15. Uygulama Öncesi Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| Muhakeme süreci boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | | | Kontrol Grubu | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | f | | % | | f | | % | |
| MHS0 | a. Boş bırakmıştır. | 23 | 150 | 6 | 39 | 50 | 173 | 14,9 | 51,47 |
| | b. Hipotez ve hüküm bilgilerini yazmıştır. | 105 | | 27,3 | | 112 | | 33,3 | |
| | c. İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunmuştur. | 22 | | 5,7 | | 11 | | 3,27 | |
| MHS1 | a. Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunmuştur. | 83 | 119 | 21,6 | 31 | 65 | 97 | 19,35 | 28,88 |
| | b. Çıkarımlarını özel durum üzerinden yürütmüştür. Ancak bunu yaparken yetersiz gerekçelendirme yapmıştır. | 29 | | 7,6 | | 30 | | 8,93 | |
| | c. Hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunmuştur. | 7 | | 1,8 | | 2 | | 0,6 | |
| MHS2 | a. Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak sonuca ulaşamamıştır. | 14 | 70 | 3,7 | 18,3 | 6 | 45 | 1,79 | 13,39 |
| | b. Sonuca özel durum üzerinden ardı ardına çıkarımlarla ulaşmıştır | 26 | | 6,8 | | 19 | | 5,65 | |
| | c. Sonuca ulaşmış ancak bu ulaşma sürecindeki aşamalarını formal olarak gerekçelendirmemiş ya da yanlış gerekçelendirme yapmıştır. | 30 | | 7,8 | | 20 | | 5,95 | |
| MHS3 | a. Sonuca ulaşmış ancak ispat aşamalarının bir kısmı gerekçelendirilmiş bir kısmı gerekçelendirilmemiştir. | 20 | 27 | 5,2 | 7 | 14 | 16 | 4,17 | 4,77 |
| | b. Sonuca ulaşmış, ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirmiş. Ancak bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yapmıştır. | 7 | | 1,8 | | 2 | | 0,6 | |
| MHS4 | Sonuca ispat aşamalarının her birine yönelik gerekçelendirmeler yaparak ulaşmıştır. | 18 | | 4,7 | | 5 | | 1,49 | |

Genel olarak incelendiğinde deney grubunda yer alan ispatların % 70'i, kontrol grubunda ise % 80,35'i MHS0 ve MHS1 kategorilerine aittir. Dolayısıyla deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adayları uygulama öncesinde çoğunlukla muhakeme süreci kategorilerinden alt düzeydekilere yönelik ispatlar yapmışlardır. Her bir kategori ayrı ayrı incelendiğinde ise muhakeme süreci boyutunda yer alan kategorilerden MHS0 hem deney hem de kontrol grubunda en yüksek frekans ($f_D$ = 150, $f_K$ = 173) ve yüzdeye (sırasıyla % 39, % 51,47) sahiptir. Bu kategorinin göstergelerine ait frekans ve yüzdeler incelendiğinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının hipotez ve hüküm bilgilerini yazarak herhangi bir çıkarımda bulunmama ile ilgili göstergenin çoğunlukta ($f_D$ = 105, % 27,3; $f_K$ = 112, % 33,3) olduğu görülmektedir. Deney grubunda boş bırakma (MHS0a) ve ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunma (MHS0c) göstergeleri frekans ve yüzde bakımından birbirine yakın bir oranda ($f_{MHS0a}$ = 23, % 6; $f_{MHS0c}$ = 22, % 5,7) ortaya çıkarken kontrol grubunda boş bırakma göstergesi daha yüksek bir oranda ($f_{MHS0a}$ = 5, % 14,9) ortaya çıkmıştır.

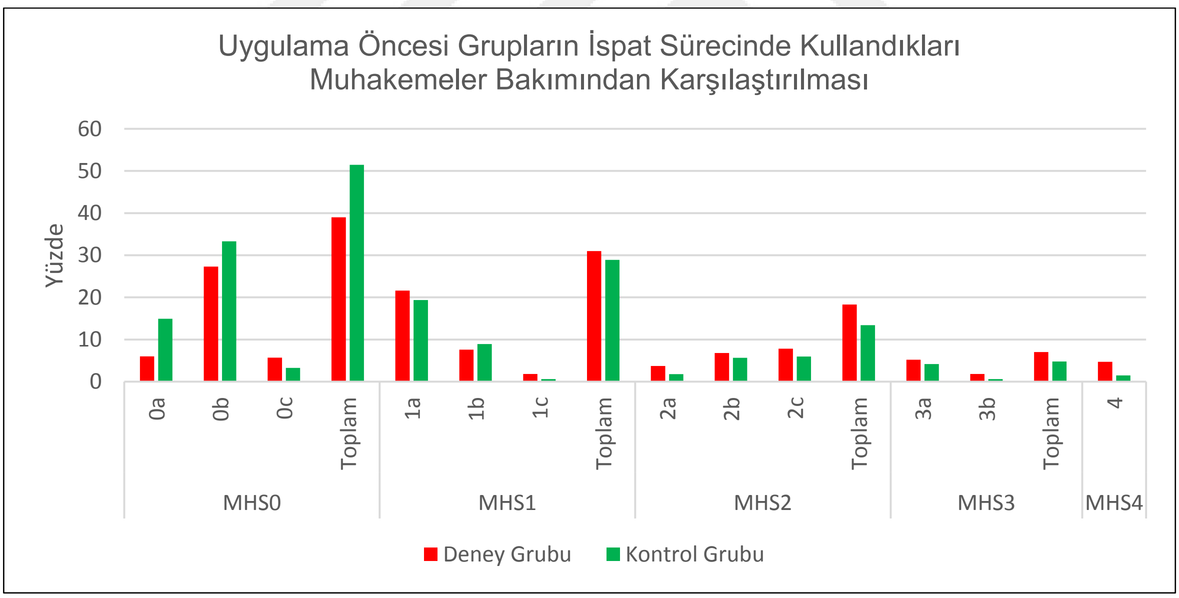
MHS1 kategorisi, her iki grupta da frekans ve yüzde bakımından MHS0 kategorisini takip etmektedir. MHS1 kategorisinde yer alan göstergelerden biri olan birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunma (MHS1a) göstergesi frekans ve yüzde bakımından grupların her ikisinde de bu kategoride yer alan diğer göstergelere göre daha çok ortaya çıktığı görülmektedir. Ayrıca bu gösterge muhakeme süreci kategorilerindeki diğer göstergeler ile birlikte değerlendirildiğinde sadece hipotez ve hüküm bilgilerini yazarak ispata yönelik hiçbir şey yapmadıkları durumlardan sonra iki grupta da en çok ortaya çıkan durumdur. Muhakeme sürecine yönelik göstergelere kategori ayrımı yapmaksızın bakıldığında grupların her ikisinde en az ortaya çıkan ispatlardan birinin hükümden başlayarak çıkarımlarda bulunma göstergesine ait olduğu görülmektedir.

Muhakeme süreci kategorilerinden MHS2 kategorisine yönelik yapılan ispatlar, deney grubunda daha fazla olmak üzere her iki grupta da ortaya çıktığı görülmektedir. Bu kategorinin göstergelerinden özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaşma (MHS2b) ve ispat aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeyip ya da yanlış gerekçelendirerek sonuca ulaşma (MHS2c) göstergelerinin gruplar içinde yaklaşık bir orana sahip olduğu fark edilmektedir. Gruplar arasında da bu göstergelere yönelik ispatların yaklaşık olarak oranlarının yakın olduğu gözlemlenmektedir. Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunup sonuca ulaşamama (MHS2a) göstergesine ait ispatlar ise deney grubunda daha fazla görülmekle birlikte MHS2 kategorisi içerisinde değerlendirildiğinde grupların her ikisinde de en az ortaya çıkan durumlardır.

MHS3 kategorisine yönelik ispatlar, deney grubunda % 7, kontrol grubunda, ise % 4,77 oranında ortaya çıkmıştır. Bu kategorideki ispatların büyük bir çoğunluğunun her iki grupta da olmak üzere ispat aşamalarının bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmeden sonuca ulaşma (MHS3a) göstergesine ait olduğu görülmektedir. İspat aşamalarının önemli bir kısmına yönelik gerekçeler sunup bu gerekçelerin bazılarında sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hatalar yaparak sonuca ulaşma (MHS3b) göstergesine ait olan ispatlar da olmakla birlikte azınlıktadır. Ayrıca bütün kategorilere ait göstergeler incelendiğinde en az frekans ve yüzdeye sahip olan göstergelerden biri olduğu fark edilmektedir.

Muhakeme süreci kategorileri bakımından ise deney ve kontrol gruplarının her ikisinde de en düşük frekans ($f_D$ = 18, $f_K$ = 5) ve yüzdeye (sırasıyla % 4,7 ve % 1,49) sahip kategorinin MHS4 olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının bir matematiksel ilişkinin ispatı için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunma ve bu çıkarımlara yönelik gerekçeleri sunmada yetersiz olduğunu göstermektedir. Ayrıca muhakeme süreci boyutunda yer alan kategoriler incelendiğinde grupların her birinde alt düzeydeki kategorilerden üst düzeydeki kategorilere doğru gidildikçe frekans ve yüzdeler bakımından bir azalmanın olduğu göze çarpmaktadır.

Öğretmen adaylarının uygulama öncesinde muhakeme süreci boyutu kategorilerinde yer alan ispatlar bakımından deney ve kontrol grubu arasındaki değişimi gösteren Grafik 1 aşağıda sunulmuştur.




Grafik 1. Uygulama öncesi grupların ispat sürecinde kullandıkları muhakemeler bakımından karşılaştırılması

Grafik 1'den görüldüğü üzere öğretmen adaylarının MHS0 kategorisinde yer alan ispatlarının her iki grupta da çoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Bu kategori içerisinde grupların her ikisinde de en fazla ortaya çıkan durumların MHS0b göstergesine ait olduğu görülmektedir. Bu kategoride yer alan göstergeler incelendiğinde MHS0a ve MHS0b göstergeleri ile ilgili yapılanlar kontrol grubunda daha fazla iken MHS0c göstergesine yönelik ispatların deney grubunda daha fazla olduğu fark edilmektedir. Bu durum boş bıraktıkları ve sadece hipotez ve hüküm bilgilerini yazdıkları durumların kontrol grubunda daha fazla olduğunu göstermekle birlikte ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulundukları durumların deney grubunda daha fazla olduğunu göstermektedir.

MHS0 kategorisinden sonra en fazla MHS1 kategorisine yönelik ispatların yapıldığı dikkat çekmektedir. Deney grubu az bir oranla olmak üzere MHS1 kategorisinde yer alan ispatları kontrol grubuna göre daha fazla yaptığı görülmektedir. Bu kategorinin göstergelerinin her birinde gruplar arasında az bir fark olmakla birlikte MHS1a ve MHS1c göstergeleri ile ilgili ispatları deney grubunun, MHS1b göstergesine yönelik ispatları ise kontrol grubun daha fazla yaptığı görülmektedir. MHS1c göstergesine ait olan ispatlar, her iki grupta da MHS1a ve MHS1b göstergelerine göre daha az yapıldığı fark edilmektedir. Bu durum; öğretmen adaylarının hükümden başlayarak yaptıkları ispatların azınlıkta, birbirinden bağımsız en az bir doğru çıkarımlarda bulundukları durumların ise çoğunlukta olduğunu göstermektedir.

MHS2 kategorisinin her bir göstergesine yönelik ispatlarda deney grubunun çoğunluğuna sahip olduğu dikkat çekmektedir. Bu göstergelerden en az ortaya çıkan göstergenin MHS2a, en fazla ortaya çıkan göstergenin ise MHS2c olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu kategori ile ilgili olarak birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunup sonuca ulaşmadıkları durumların en az, ispat aşamaları formal olarak gerekçelendirmeyip ya da yanlış gerekçelendirerek sonuca ulaştıkları durumların ise en fazla ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaşma (MHS2b) göstergesine yönelik ispatların ise her iki grupta da MHS2c göstergesine yakın bir oranda çıktığı fark edilmektedir.

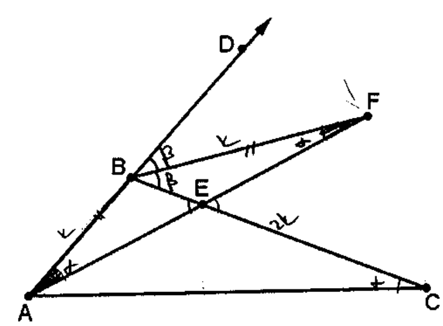
Grupların her ikisinde de MHS3 kategorisinin göstergelerinden MHS3a ile ilgili ispatlar daha fazla yapılırken MHS3b ile ilgili ispatların daha az yapıldığı görülmektedir. Her iki göstergeye yönelik ispatlarda da çoğunluğun deney grubuna ait olduğu göze çarpmaktadır. Dolayısıyla öğretmen adayları ispat aşamaların bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmeyip sonuca ulaştıkları durumların çoğunlukta olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirip bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yaptıkları durumların azınlıkta olduğu fark edilmektedir.

MHS4 kategorisine yönelik ispatların, grupların her ikisinde de en az yapılan ispatlar olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat için gerekli olan çıkarımları belirleyip bu çıkarımları gerekçeleri ile birlikte ifade ettikleri durumların azınlıkta olduğunu göstermektedir. Bu kategoriye yönelik gruplar arasında bir karşılaştırma yapıldığında ise bu ispatların deney grubu tarafından daha fazla yapıldığı fark edilmektedir.

Muhakeme sürecinde yer alan kategorilerden MHS0 kategorisine yönelik ispatların, deney grubunda % 39, kontrol grubunda ise % 51,47 oranında yapıldığı görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının çoğunlukla MHS0 kategorisine yönelik ispatlar yaptığı anlaşılmaktadır. MHS0 kategorisine yönelik öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların büyük bir çoğunluğunu, sadece verilenler ve istenenleri yazarak herhangi bir çıkarımda bulunmadığı durumlar oluşturmaktadır. Bunun yanı sıra boş bırakma ve ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunma gibi durumlara rastlanmıştır. Ancak sadece verilen ve istenenleri yazarak ispata yönelik hiçbir şey yapmadıkları durumlara göre daha az ortaya çıkmıştır. Bu göstergeler deney grubunda birbirine daha yakın bir oranda gerçekleşirken kontrol grubunda öğretmen adaylarının boş bıraktığı durumlar diğer göstergeye göre daha fazla ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımda bulunarak yaptıkları ispatlar deney grubunda daha fazla (deney grubu % 5,7; kontrol grubu % 3,27) olmak üzere her iki grupta da ortaya çıkmıştır. Deney grubunda yer alan ÖA26 kodlu öğretmen adayının MHS0c göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 5'te sunulmuştur.

**8.**




Şekilde $|BC| = 2|AB|$, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACB})$, $m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{CBF})$ dir. $|AF| = |AC|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.

**Verilenler:** $|BC| = 2|AB|$, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACB})$ $m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{CBF})$

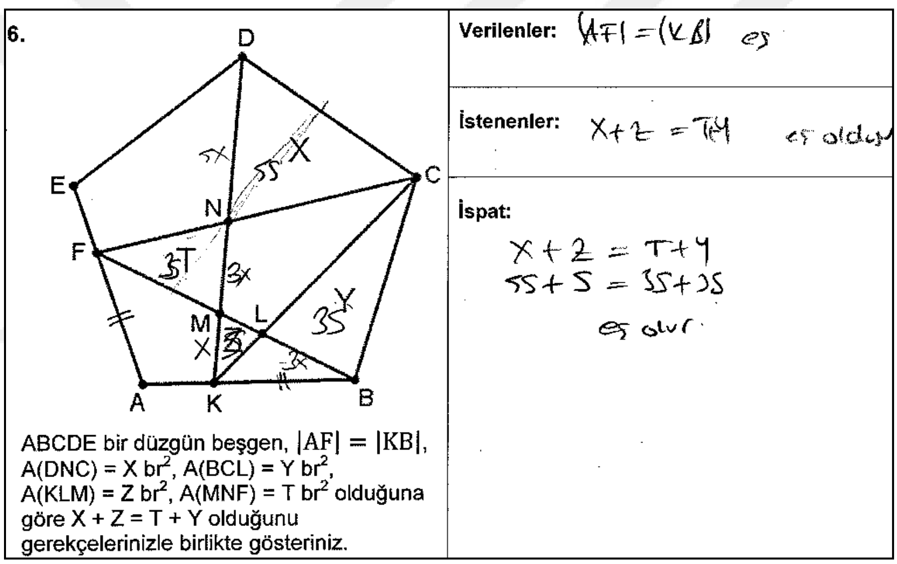
**İstenenler:** $|AF| = |AC|$

**İspat:** α'nın gördüğü uzunluk k'ya eşit olduğundan |BF| uzunluğuda k'ya eşit dur. Buradan |AB| ve |BF| kenarlarının uzunluğu k olduğundan ikizkenardır. Dolayısıyla F açısının derecesi de α'dır. Böylece |AF|=|AC| diyebiliriz.

Şekil 5. MHS0c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 5'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı eşit açı ölçülerinin gördüğü kenar uzunluklarının da eşit olması gerektiğini düşünerek çıkarımda bulunmuştur. Bu düşünceyle BCA açısının gördüğü BA ile BAF açısının gördüğü BF kenarlarının uzunluklarının eşit olduğunu belirtmiş ve böylece ABF üçgeninin ikizkenar olduğunu ifade etmiştir. Öğretmen adayının ileri sürdüğü bu düşüncelerle kenar uzunluklarının eşit olduğuna ulaşılması imkânsızdır. Ancak ileri sürdüğü düşünceden hareketle BFA ve BCA açılarının ölçülerinin eşit olduğunu belirterek doğrudan AF ve AC kenarlarının uzunluklarının eşit olduğunu ifade etmiştir. İleri sürdüğü bu çıkarımlar sonucunda belirtilen matematiksel ilişkinin ispatını yaptığını düşünmüştür. Ancak geometride yer alan hiçbir özellikle bağdaşmayan ve ispata hiçbir katkıda bulunmayacak ifadelere yer vererek uygun olmayan bir ispat yapmıştır.

Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA52 kodlu öğretmen adayının ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunarak MHS0c göstergesinde yer alan ispatına Şekil 6'da yer verilmiştir.



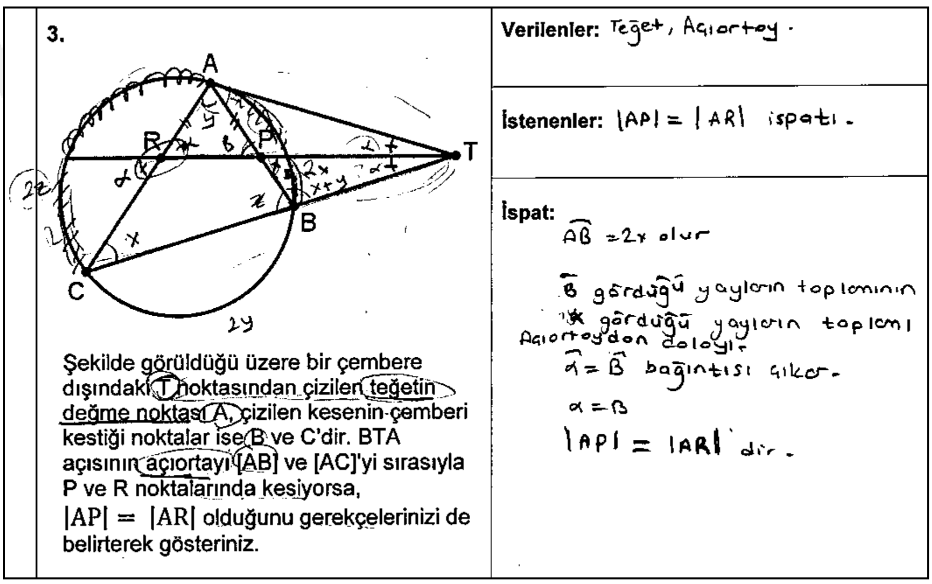

Şekil 6. MHS0c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 6'da görüldüğü gibi öğretmen adayı ispat edilmesi istenen matematiksel ilişkiyi sağlayacak şekilde özel değerler verip çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak çıkarımlarını bu değerlere bağlı olarak yaparken üçgenlerin yükseklikleri aynı olmamasına rağmen tabanlarına göre üçgenlerin alanlarını 5S, 3S, S şeklinde ifade etmiştir. Dolayısıyla kendine göre özel değerler vererek hatalı çıkarımlarda bulunmuş ve ispata katkı sağlamayan ifadelerde bulunmuştur.

Muhakeme süreci bakımından incelenen ispatlarda MHS1 kategorisinde yer alan ispatların oranının, deney grubunda % 31; kontrol grubunda ise % 28,88 oranında olması MHS0 kategorisini takip ettiğini göstermektedir. Deney (% 21,6) ve kontrol grubunda (% 19,35) yer alan öğretmen adaylarının MHS1 kategorisi olarak değerlendirilen ispatlarının çoğunda birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulundukları görülmüştür.

Bunun yanı sıra çıkarımlarını özel durum üzerinden yürüterek yetersiz gerekçelendirme yaptığı ve hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulundukları durumlarla da karşılaşılmıştır. Ancak bu göstergeler, birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulundukları durumlara göre daha az ortaya çıkmıştır. Özellikle de hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulundukları durumlar oldukça sınırlı sayıda gerçekleşmiştir.

Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunarak MHS1a göstergesinde yer alan ispatlar deney grubunda % 21,6; kontrol grubunda ise % 19,35 oranında yapılarak birbirine yakın oranlarda ortaya çıkmıştır. MHS1a göstergesine yönelik deney grubunda yer alan ÖA31 kodlu öğretmen adayının yaptığı ispat Şekil 7'de yer almaktadır.




Şekil 7. MHS1a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 7 incelendiğinde öğretmen adayı ACB açısının çevre açı olmasına dayanarak AB yayının ölçüsünü doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak çemberin dışındaki T noktasından sadece bir tane teğet çizilmesine rağmen TC doğru parçasını teğet ve BTA açısının açıortayını da çemberin merkezinden geçen bir doğru kabul ederek hatalı çıkarımlarda bulunmuştur. Bu kabul ile birlikte TR ışınının AB ve AC yayını iki eşit parçaya böldüğü düşüncesiyle çemberin iç açı ölçüsünü bulmada kullanılan kuraldan yararlanarak belirtilen matematiksel ilişkiye ulaştığını zannetmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı doğru ve hatalı çıkarımları birlikte sunarak birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunduğu bir ispat yapmıştır. ÖA31 kodlu öğretmen adayının çevre açı ve merkez açı kavramlarını isim olarak bilmese de bu açıların gördüğü yay ölçülerinin nasıl olacağı hakkında bilgi sahibi olduğunu ve birbiri ile tam anlamıyla ilişkili olmayan çıkarımlarda bulunduğunu gösteren konuşmalar şu şekildedir:

*Araştırmacı:* *Şurada ABC açı ölçüsüne x diyerek AB yayının ölçüsüne 2x demişsin. Bunu neye göre yaptın?*

*ÖA31:* *Çünkü o yaydan kaynaklı bir şey. Şu noktadan böyle bir C açısı çizdik ya karşısındaki yay 2x olur. Ama merkezden çizersek de x olur.*

*Araştırmacı:* *Bu dediğin açıların isimleri nedir? Mesela merkezden çizdiğin açı nedir?*

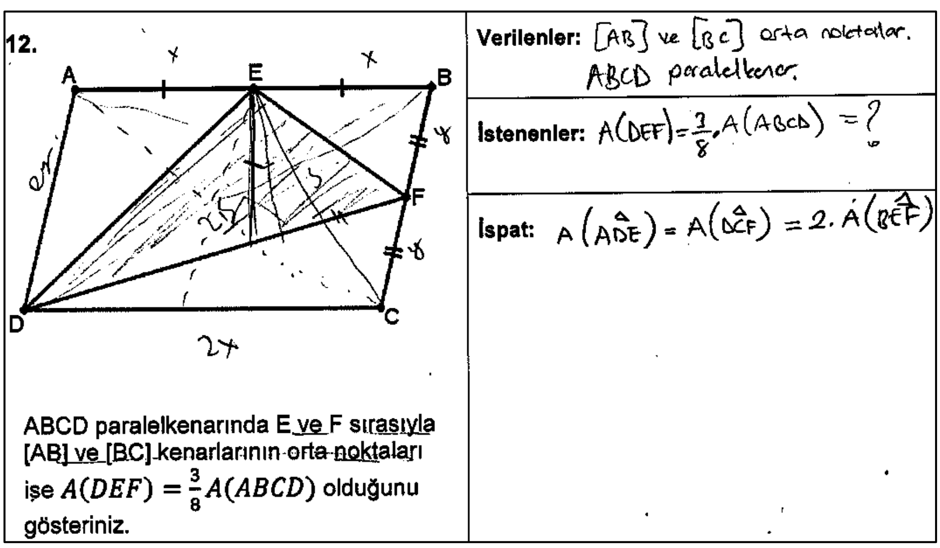
*ÖA31:* *Bilmiyorum.*

*Araştırmacı:* *Sonra şöyle bir şey demişsin. $\beta$'nın gördüğü yayların toplamı ile $\alpha$'nın gördüğü yayların toplamı açıortaydan dolayı eşittir. Ne demek istemişsin?*

*ÖA31:* *Ben öyle bir şey gördüğümü hatırlıyorum ama tam hatırlayamadığım için doğru mu yanlış mı bilemedim. Bunun sonucunda sanırım yanlış yaptım.*

ÖA31 kodlu öğretmen adayının konuşmasından, kullandığı matematiksel ifadelerin neler olduğu ve bunlara dayalı olarak ne yapması gerektiğini bildiği ancak bunları açıklamada zorluk yaşadığı anlaşılmaktadır.

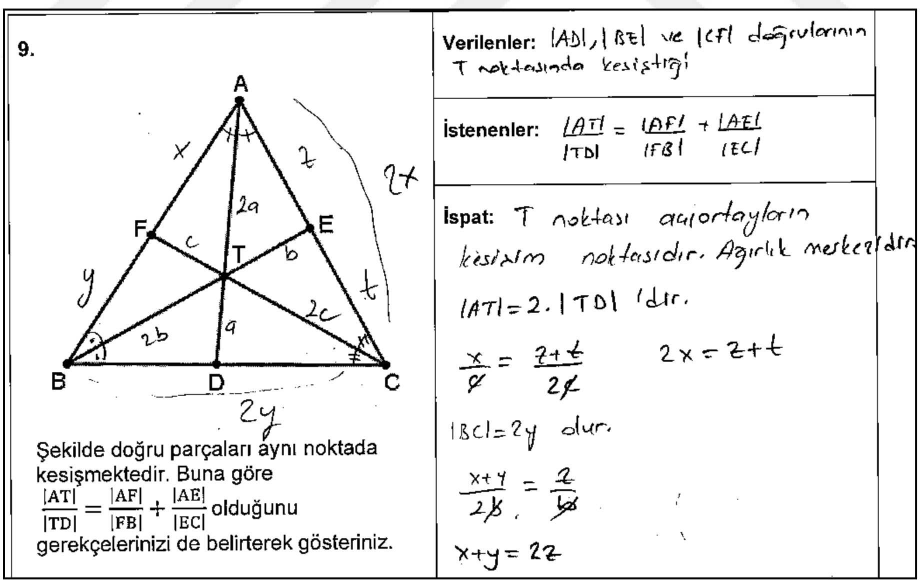
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarından ÖA56 kodlu öğretmen adayının MHS1a göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 8'de sunulmuştur.




Şekil 8. MHS1a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 8'de görüldüğü gibi öğretmen adayı üçgenlerin alanları arasındaki ilişkilere yönelik bir çıkarımda bulunmuştur. Bu çıkarımını $A(\overset{\triangle}{ADE}) = A(\overset{\triangle}{DCF}) = 2.A(\overset{\triangle}{BEF})$ şeklinde ifade etmiştir. Ancak ADE, DCF üçgenlerinin alanlarının neden eşit olduğu ve bu üçgenlerin alanlarının BEF üçgeninin alanının 2 katı olduğuna nasıl karar verdiğine yönelik herhangi bir gerekçe sunmamıştır. Dolayısıyla gerekçe sunmayıp sadece bir çıkarım ifade etmiş ve bu çıkarımlarını destekleyen farklı çıkarımlarda bulunmamıştır. Böylece birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunma göstergesine ait bir ispat yapmıştır.

Uygulamalar öncesinde deney grubunda % 7,6; kontrol grubunda % 8,93 oranında olmak üzere öğretmen adaylarının özel durumlara yönelik çıkarımlarda bulunup ispatlarına devam etmedikleri durumların da ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adayları bu tür ispatlarda, çıkarımlarını özel durumlar üzerinden yürüterek yetersiz gerekçelendirmeler yapmışlardır ve bu durumlar her iki grupta birbirine yakın bir oranda gerçekleşmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA22 kodlu öğretmen adayının yetersiz gerekçelendirmelerle birlikte özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunarak MHS1b göstergesinde yer alan ispatı Şekil 9'da sunulmuştur.




Şekil 9. MHS1b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 9'da görüldüğü gibi ABC eşkenar üçgen olarak belirtilmemesine rağmen T noktası açıortayların kesişim noktası ve ağırlık merkezi olarak kabul edilmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı sadece özel bir durum için çıkarımda bulunmuştur. Bu çıkarımlarda bulunduktan sonra AT, BT, CT doğru parçalarını açıortay olarak kabul edip açıortay teoreminin uygulandığı işlemler yapmış ve ispatı devam ettirmemiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı yaptıkları ile ilgili herhangi bir gerekçe sunmaksızın sadece özel durumlara uygun birkaç çıkarımda bulunmuştur. Öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakat esnasında bu kabulleri neye göre yaptığı ve özel duruma uygun çıkarımlarda bulunduğunu fark etmesini sağlayan konuşmalar gerçekleşmiştir. Bu konuşmaya yönelik bir kesit aşağıda verilmiştir:

*Araştırmacı:* *Şurada demişsin ki T noktası açıortayların kesişim noktası ve ağırlık merkezidir. Öyle midir?*

*ÖA22:* *Neden öyle dediğimi şu an…*

*Araştırmacı:* *Mesela iç açıortay olarak niye aldın? Bütün üçgenlerde iç açıortaylar bir noktada kesişir düşüncesiyle mi bunu ifade ettin?*

*ÖA22:* *…*

*Araştırmacı:* *Bu nokta hem de ağırlık merkezi midir?*

*ÖA22:* *Evet, 1'e 2 oranında*

*Araştırmacı:* *Yok, o durum ağırlık merkezi olduğunda sağlanıyor ama her iç açıortayın kesiştiği yer ağırlık merkezi midir?*

*ÖA22:* *Değil.*

*Araştırmacı:* *Peki, hangi durumda olur?*

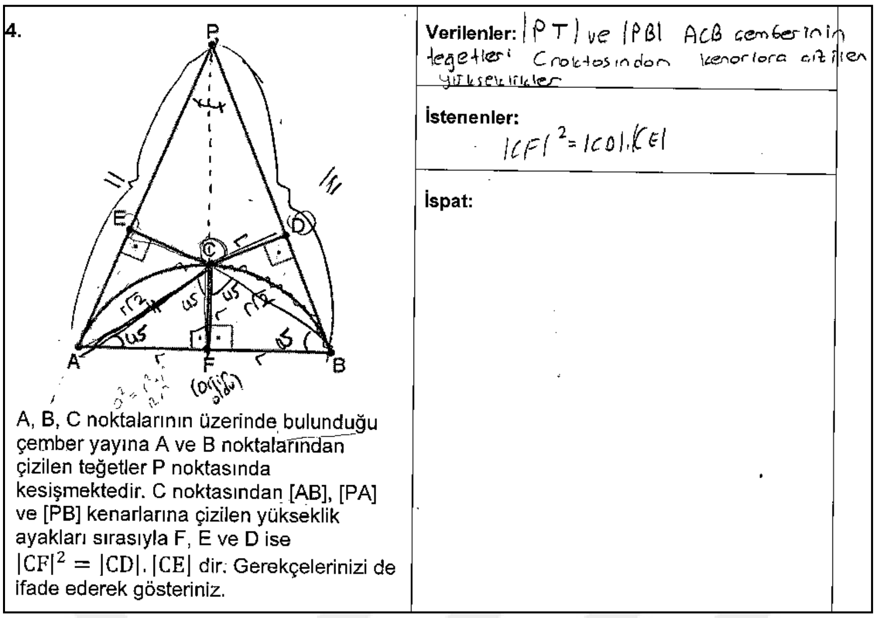
*ÖA22:* *Eşkenar üçgen*

*Araştırmacı:* *Burada özel bir durumu düşünmüşsün. Peki, özel durumu düşünmeni neye bağlarsın?*

*ÖA22:* *Sadece T noktasında kesişiyor olduğunun verilip başka bir verilen olmadığından direkt özel bir durumu düşündüm. Başka türlü bir ispat da düşünemeyince böyle yaptım.*

ÖA22 kodlu öğretmen adayının konuşmaları, belirtilen matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için bu tür bir yola neden başvurduğuna anlam veremediğini göstermektedir. Ayrıca özel bir durumu ele alarak sonuca ulaştığını da klinik mülakat esnasında fark ettiği anlaşılmaktadır.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA10 kodlu öğretmen adayının MHS1b göstergesine yönelik ispatına Şekil 10'da yer verilmiştir.


4.

A, B, C noktalarının üzerinde bulunduğu çember yayına A ve B noktalarından çizilen teğetler P noktasında kesişmektedir. C noktasından [AB], [PA] ve [PB] kenarlarına çizilen yükseklik ayakları sırasıyla F, E ve D ise $|CF|^2 = |CD|.|CE|$ dir. Gerekçelerinizi de ifade ederek gösteriniz.

**Verilenler:** |PT| ve |PB| ACB çemberinin teğetleri C noktasından kenarlara çizilen yükseklikler

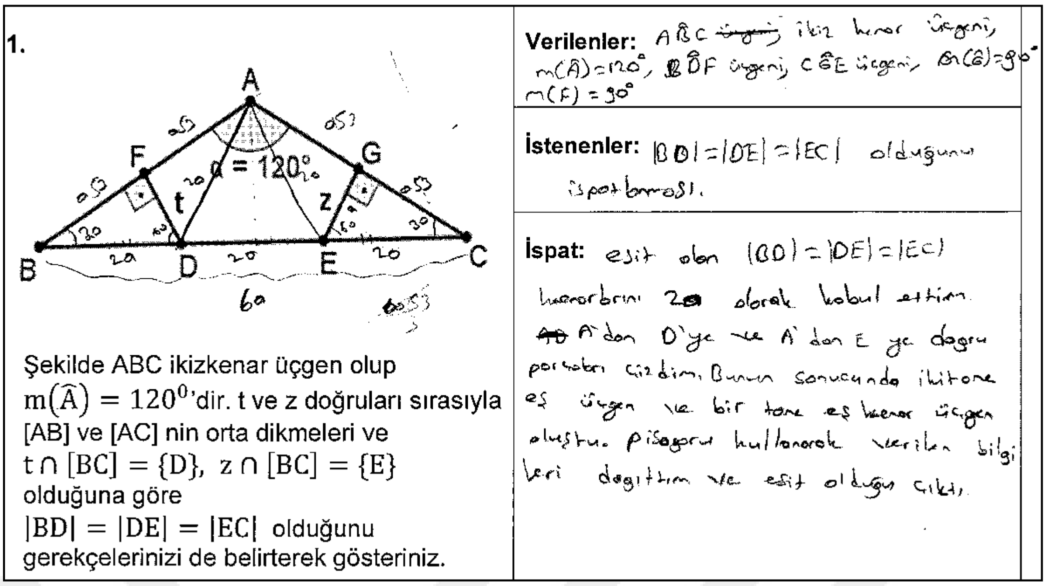
**İstenenler:** $|CF|^2 = |CD|.|CE|$

**İspat:**

Şekil 10. MHS1b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 10 incelendiğinde öğretmen adayının verilenler ve istenenleri yazarak geometrik şekil üzerinde özel duruma uygun çıkarımlarda bulunduğu görülmektedir. AB çap olarak belirtilmemesine rağmen AF ve BF doğru parçalarını yarıçap, çapı gören çevre açının ölçüsünün $90^{\circ}$ olduğunu düşünerek ACB açısının ölçüsünü $90^{\circ}$ olarak almıştır. Bunun yanı sıra çemberin dışında yer alan P noktasından çizilen teğetlerin uzunluklarının eşit olmasından yararlanarak APB üçgeninin ikizkenar olduğunu belirlemiştir. Bu çıkarımı doğru olmasına rağmen APB ikizkenar üçgeninin açıortayının CF doğru parçası ile çakışacağını düşünmesi ise özel duruma yönelik bir çıkarımdır. Dolayısıyla öğretmen adayı özel durumlar üzerinden çeşitli çıkarımlarda bulunmuş ve bu çıkarımları neye dayalı olarak ifade ettiğine yönelik herhangi bir açıklama sunmayarak ispata devam etmemiştir.

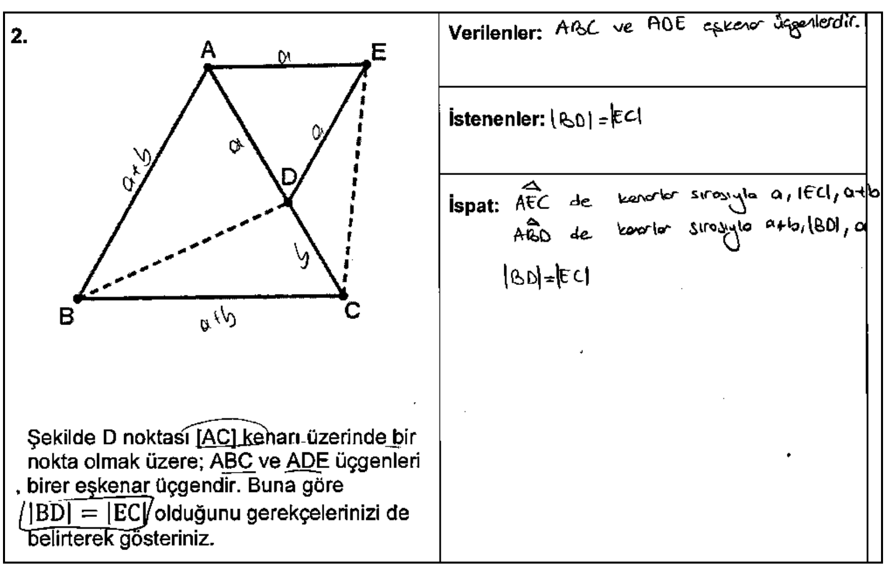
Hüküm bilgisini kullanarak matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmaya çalıştıkları durumlar, deney grubunda % 1,8; kontrol grubunda % 0,6 oranında ortaya çıkarak MHS1 kategorisine dâhil olan ispatlarda en az rastlanan durumlardır. MHS1c göstergesine yönelik yaptıkları ispatlarda belirtilen matematiksel ilişkiyi verilenlerden biri olarak kabul edip çeşitli çıkarımlarda bulunmuştur. Kontrol grubunda yer alan ÖA33 kodlu öğretmen adayının MHS1c göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 11'de sunulmuştur.




Şekil 11. MHS1c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 11'de görüldüğü gibi öğretmen adayı "*eşit olan* $|BD| = |DE| = |EC|$ *kenarlarını 2a olarak kabul ettim.*" şeklindeki bir ifadeyle ispata başlamıştır. Böyle bir başlangıç yaparak, ispat edilmesi istenen matematiksel ilişkiyi verilenlerden biri olarak kabul etmiştir. Bunun üzerine A noktasıyla D ve E noktalarını birleştirip oluşan geometrik şekillerden yararlanarak açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını belirlemiştir ve belirtilen matematiksel ilişkinin ispatını yaptığını düşünmüştür.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA3 kodlu öğretmen adayının hükümden başlayıp ispat yaparak MHS1c göstergesinde yer alan ispatı Şekil 12'de sunulmuştur.

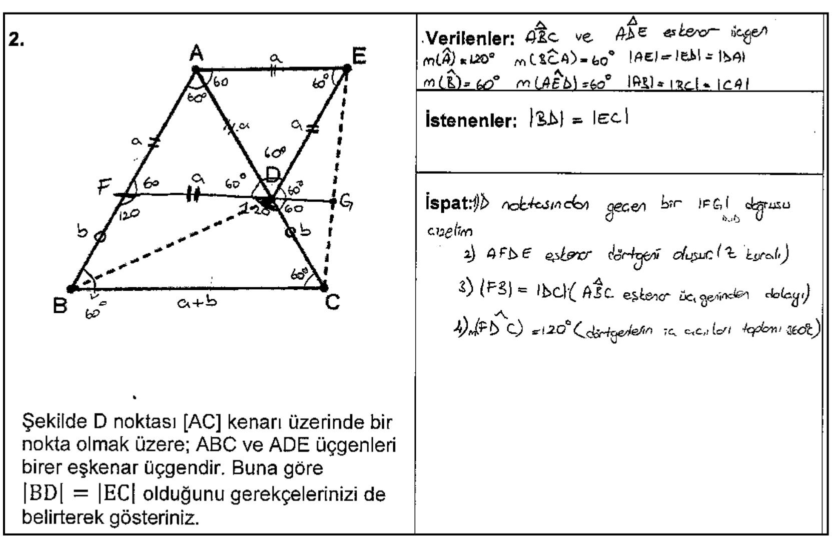



Şekil 12. MHS1c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 12’den görüldüğü üzere öğretmen adayı AEC ve ABD üçgenlerini kenar-kenar-kenar eşlik teoremine göre eş olduğunu ileri sürerek BD ve EC kenarlarının uzunluklarının eşit olduğuna ulaşmıştır. Ancak kenar-kenar-kenar eşlik teoremini kullanmak için sadece iki kenar uzunluğunun eşit olduğunun bilinmesi yeterli değildir. Öğretmen adayı iki kenar uzunluğunun eşit olmasına dayanarak böyle bir girişimde bulunmuş ve ispat edilmesi gereken ilişkiyi ($|\mathrm{BD}| = |\mathrm{EC}|$) de kullanarak ispat yapmıştır ve böylece muhakeme süreci boyutu bakımından MHS1 kategorisinde değerlendirilen bir ispat oluşturmuştur.

Kontrol grubunda daha az oranda (deney grubu %18,23; kontrol grubu %13,39) görülmekle birlikte öğretmen adaylarının MHS2 kategorisinde yer alan ispatlar da yaptıkları görülmüştür. Bu kategoride yer alan ispatlarda çoğunlukla öğretmen adaylarının ispat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmasına rağmen çıkarımlarına formal olarak gerekçeler sunmadığı ya da sunduğu gerekçelerin hatalı olduğu durumlarla karşılaşılmıştır. Ancak özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunarak belirtilen matematiksel ilişkiye ulaştıkları durumlarda bu göstergeye yakın bir oranda ortaya çıkmıştır. MHS2 kategorisinde yer alan ispatlar arasında öğretmen adaylarının birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaşamadıkları durumlara da rastlanmıştır. Ancak MHS2 kategorisinde yer alan diğer göstergelere göre her iki grupta da daha az oranda görülmüştür.

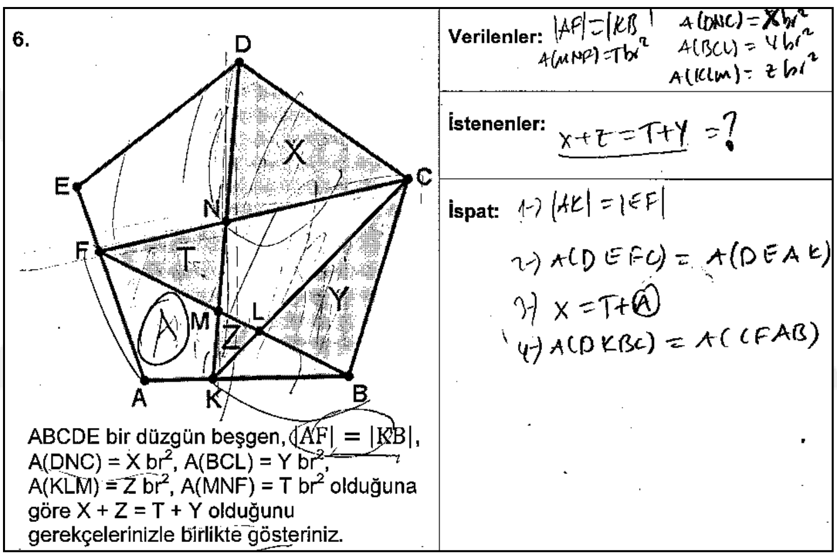
Matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için birbirini destekleyen birçok çıkarımda bulunmasına rağmen ispatını devam ettirmeyip yarıda bıraktığı durumlar deney grubunda % 3,7; kontrol grubunda ise 1,79 oranında ortaya çıkarak deney grubunda daha fazla olduğu görülmüştür. MHS2a göstergesinde yer alan bu durumlara yönelik deney grubunda yer alan ÖA21 kodlu öğretmen adayının yaptığı ispat Şekil 13’te sunulmuştur.




Şekil 13. MHS2a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 13'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı FG doğru parçasını çizerek AFDE dörtgeninin eşkenar dörtgen, ABC üçgeninin eşkenar olmasına bağlı olarak FB ile DC doğru parçalarının uzunluklarının eşit ve FDB açısının ölçüsünün ise $120^{\circ}$ olduğuna yönelik çıkarımlarda bulunmuştur. Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunmasına rağmen ispatı devam ettirmemiştir. Ayrıca ispatı tamamlamasını sağlayacak olan FDC ile DEC üçgenlerinin eş olma durumuna yönelik ek bir çizim yapmasına rağmen bu durumu fark etmeyerek ispatı yarıda bırakmıştır.

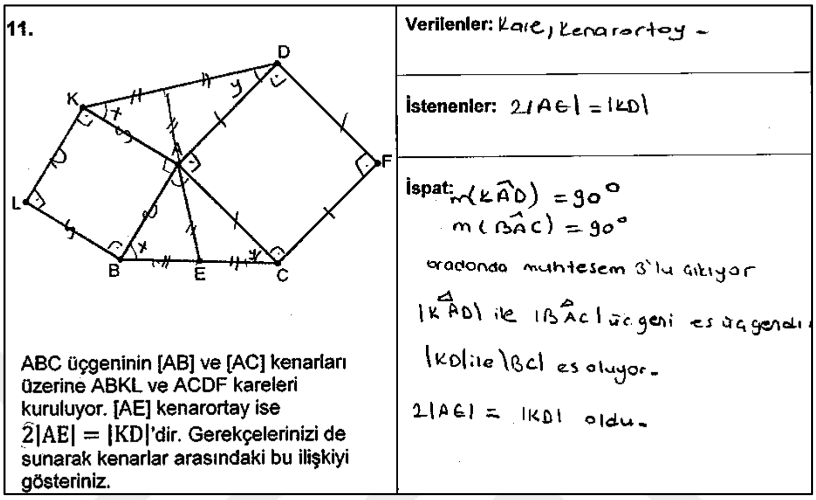
Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA11 kodlu öğretmen adayının birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaşamaması sonucunda MHS2a göstergesinde değerlendirilen ispatına Şekil 14'te yer verilmiştir.




Şekil 14. MHS2a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 14 incelendiğinde öğretmen adayı ABCDE çokgeninin bir düzgün beşgen olması ve $|AF| = |KB|$ olarak verilmesine dayanarak $|AK| = |EF|$ olduğunu belirtmiştir. Ardından DEFC ile DEAK dörtgenlerinin alanlarının eşit olduğunu gerekçe sunmadan ifade etmiştir. Bu ifadesine bağlı olarak FMKA dörtgeninin alanını A olarak nitelendirerek X = T + A olduğunu yazmıştır. Bunun yanı sıra DKBC ile CFAB dörtgenlerinin alanlarının eşit olduğunu belirterek ispata devam etmemiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı ispat için gerekli olan ve birbirini destekleyen birçok çıkarımda bulunmuştur. Ancak ispatı tamamlayacak diğer adımları belirleyememiştir. Böylece ispatı yarıda bırakarak belirtilen matematiksel ilişkinin ispatı için gerekli olan bütün çıkarımları ifade edememiştir.

Deney grubunda yer alan öğretmen adayları % 6,8 ve kontrol grubunda ise % 5,65 oranında olmak üzere özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunup matematiksel ilişkiye ulaştıkları durumların ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durumlar, ispat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunarak formal gerekçeler sunulmayan ya da hatalı gerekçeler sunulan ispatları oldukça yakın bir oranla takip etmektedir. Bu bakımdan MHS2 kategorisinde yer alan göstergeler arasında ikinci en çok karşılaşılan ispatlar arasında yer almaktadır. MHS2b göstergesine yönelik deney grubunda yer alan ÖA31 kodlu öğretmen adayının yaptığı ispat Şekil 15'te sunulmuştur.




Şekil 15. MHS2b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 15'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı K, A, C ile B, A, D noktalarını doğrusal kabul ederek özel bir durumu ele almıştır. Bu kabul ile birlikte KAD ve ABC açı ölçülerini ters açı kuralından eşit olduğunu belirtmiştir. Kendisinin belirttiklerine bağlı olarak üçgenlerin bir açı ölçüsü ve KALB ile DACF karelerinin kenarlarının eşit olmasından yararlanıp ulaştığı iki kenar uzunluklarının eşit olduğunu ileri sürerek KAD ile BAC üçgenlerinin eş olduğunu ifade etmiştir. Eş olan üçgenlerin yardımcı elemanlarının uzunluklarının da eşit olmasından yararlanarak belirtilen matematiksel ilişkiye ulaşmıştır. Ancak bu ispat sadece özel bir durum dikkate alınarak yapılmış ve K, A, C ile B, A, D noktalarının doğrusal olmadığı göz ardı edilmiştir. ÖA31 kodlu öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatta özel bir durumu ele alarak ispat yapmasının nedeni üzerine konuşmalar yapılmıştır. Araştırmacı ile öğretmen adayı arasında geçen bu konuşmanın bir kısmı şu şekildedir:

*Araştırmacı:* *Bu ispatta nasıl bir yol izledin?*

*ÖA31:* *Şimdi burada kenarortay ve kare vermiş. Kenarortaydan BE ile EC eşittir. KAB dik, DAC dik; kenarlar eşit.*

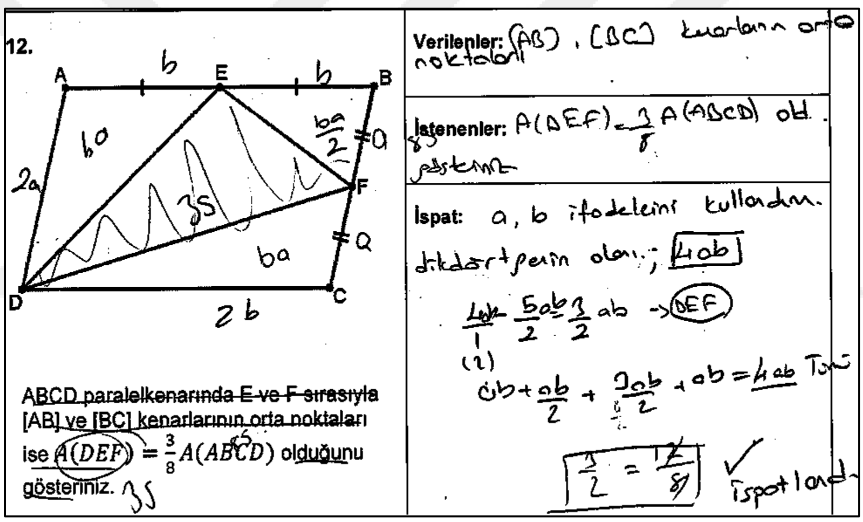
*Araştırmacı:* *Bunları neye göre yazdın?*

*ÖA31:* *Kare olmasından. Sonra ben KAD ile BAC'ye dik dedim.*

| | |
|---|---|
| *Araştırmacı:* | *Neden böyle söyledin? Belirttiğin açıların ölçüleri $90^{\circ}$ olur muydu?* |
| *ÖA31:* | *KAD açısına $\alpha$ desem, BAC açısı $180^{\circ}-\alpha$ olur. Ben bu açılara dik dedim. Aslında çıksın diye yaptım.* |
| *Araştırmacı:* | *Bu haliyle belirtilen matematiksel ilişkiye yönelik bir ispat olur muydu?* |
| *ÖA31:* | *Olmazdı ama öyle yaparsam çıkar diye bu yola başvurdum.* |

ÖA31 kodlu öğretmen adayının konuşmalarından anlaşıldığı üzere özel bir durumu ele alarak sonuca ulaşmasında ispat için farklı bir yol bulamaması etkili olmuştur. Ayrıca sorunun ispatını yapmayıp boş bırakmak istememesinin de bu durum üzerinde etkili olduğu anlaşılmaktadır.

Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA37 kodlu öğretmen adayının MHS2b göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatına Şekil 16'da yer verilmiştir.

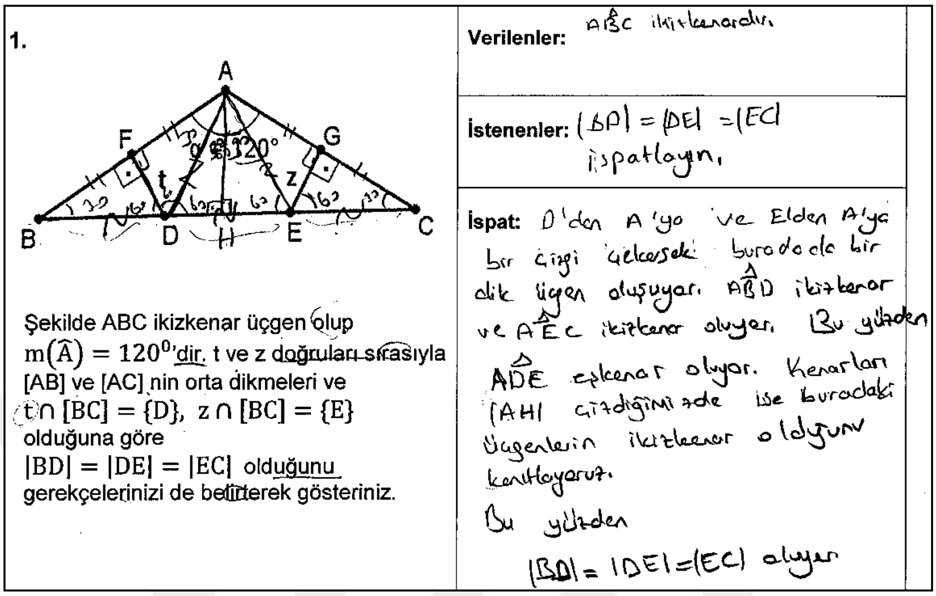



Şekil 16. MHS2b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 16 incelendiğinde öğretmen adayı ABCD paralelkenarını dikdörtgen; ADE, BEF, DCF üçgenlerini ise dik üçgen olarak kabul etmiştir. Bu kabulüne dayanarak ABCD paralelkenarı ile ADE, BEF, DCF üçgenlerinin alanlarını bulmuştur. DEF üçgeninin alanına ise ABCD paralelkenarının alanından diğer üçgenlerinin alanlarını çıkararak ulaşmıştır. Bu tür adımlar izleyerek belirtilen matematiksel ilişkinin ispatını sadece ABCD dörtgeninin dikdörtgen olma durumuna göre yapmıştır. ABCD dörtgeninin paralelkenar olmasına dayalı olarak bir ispat yapılması durumunda kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen gibi özel dörtgenler için de belirtilen matematiksel ilişkinin ispatı yapılmış olacaktır. Ancak öğretmen adayı bu durumu fark etmeyerek özel bir duruma yönelik geçerli bir ispat yapmıştır.

İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bu çıkarımlara yönelik formal gerekçeler sunmadıkları ya da yanlış gerekçeler sundukları durumlar deney grubunda %

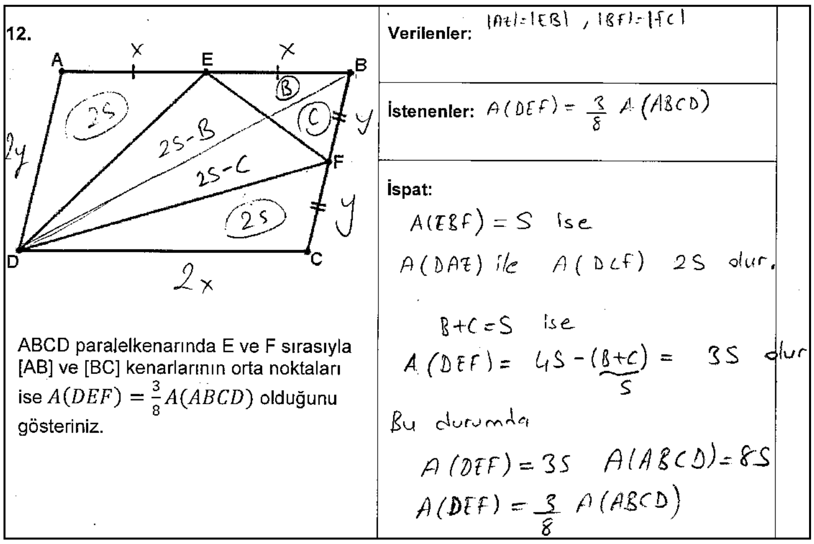
7,8; kontrol grubunda % 5,95 oranında ortaya çıktığı belirlenmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA18 kodlu öğretmen adayının çıkarımlarına yönelik formal gerekçeler sunmayıp MHS2c göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatına Şekil 17'de yer verilmiştir.




Şekil 17. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 17'den görüldüğü üzere öğretmen adayı ABD ile AEC üçgenlerinin ikizkenar olduğu ve bunun sonucunda ADE üçgeninin eşkenar üçgen olduğuna yönelik çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak ABD ile AEC üçgenlerinin ikizkenar olması ya da ADE üçgeninin eşkenar üçgen olmasına yönelik bir gerekçe sunmamıştır. ADE üçgeninin eşkenar olmasını ABD ve AEC üçgenlerinin ikizkenar olmasına bağlamıştır. Ancak bu açık ve anlaşılır bir gerekçe olmamıştır. Dolayısıyla belirtilen matematiksel ilişkinin ispatında ileri sürülen çıkarımların nasıl ve niçin yazıldığına yönelik herhangi bir ifadeye yer vermeyip yapılanlar kapalı bir şekilde sunulmuştur. Başka bir ifade ile öğretmen adayı geometrik şekil üzerinde bu çıkarımlarına yönelik gösterimlerde bulunsa da bu çıkarımlarını formal gerekçeler sunarak ifade etmemiştir.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA22 kodlu öğretmen adayının ispat aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeyip sonuca ulaşması ile birlikte MHS2c göstergesinde yer alan ispatı Şekil 18'de sunulmuştur.




Şekil 18. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 18 incelendiğinde öğretmen adayı EBF üçgeninin alanına S diyerek DAE ile DEB üçgenlerinin alanlarının eşit olduğu, DEF üçgeninin alanının kendi harflendirmelerine göre 4S - (B + C), DEF üçgeninin alanının 3S ve ABCD paralelkenarının 8S olduğu gibi çıkarımlarda bulunarak ispatı tamamlamıştır. Belirtilen matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak bu çıkarımlara yönelik herhangi bir gerekçe sunmamıştır. Yapılan klinik mülakatta öğretmen adayı yaptıklarını neye göre yazdığının farkında olduğunu belirten ifadelere yer vererek çıkarımlarına yönelik gerekçe sunmamasını, önceki öğrenim hayatında problemleri hızlı çözmeye yönelik bir alışkanlığa sahip olmasına bağlamıştır. ÖA22 kodlu öğretmen adayının bu yönde yaptığı açıklamalar ile ilgili bir kesit şu şekildedir:

*Araştırmacı:* *12. soruda ne yaptın? Hangi tanım ve teoremleri kullandın?*

*ÖA22:* *AE eşit EB demiş. Paralelkenar,… Harflendirme yaptım. Alandan gitmişim. Kenarlardan 2S demişim AED'ye.*

*Araştırmacı:* *Onları kenarlara göre mi dedin?*

*ÖA22:* *DCF ile DFB'nin alanları eşit. Çünkü tabanları ortak, yükseklikleri de ortak olduğu için. Aynı şekilde AED ile DEB de eşit.*

*Araştırmacı:* *Peki, bu 2S'leri neye göre ifade ettin?*

*ÖA22:* *İlk olarak EBF'ye S demişim. Daha sonra DAE ile DCF'nin 2S olduğunu söylemişim.*

*Araştırmacı:* *Neden?*

*ÖA22:* *Sinüs alan teoreminden. Burada birbirini* $180^{\circ}$*'ye tamamlıyor açılar*

*Araştırmacı:* *Ancak bunların hiçbiri burada yok.*

*ÖA22:* *Lisede de mesela böyle yaptığımdan.*

*Araştırmacı:* *Lisedeki alışkanlıklarından.*

*ÖA22:* *Evet, lisedeki alışkanlıklardan açıklamadım.*

*Araştırmacı:* *Şu ana kadar ispat yapmamanız da bunda etkili oldu mu?*

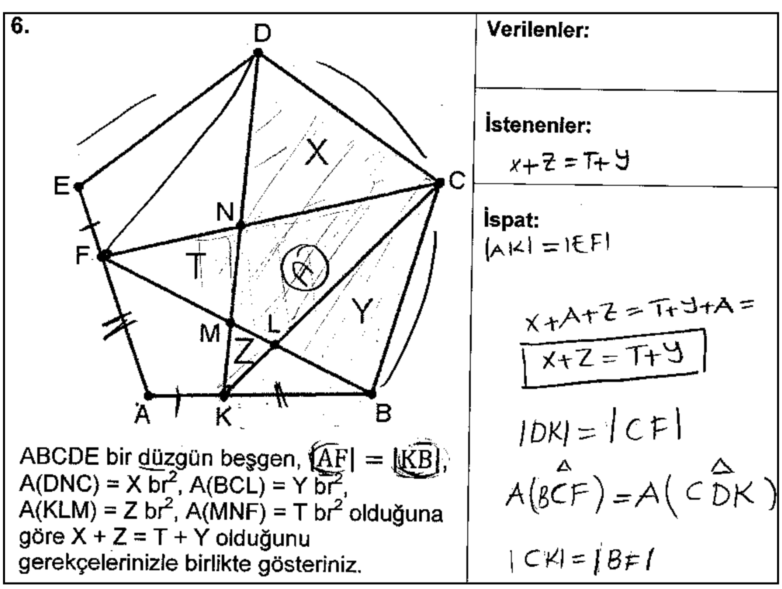
*ÖA22:* *Evet. Bir de hızlı yapmaya alıştığımızdan. O yüzden belirtmemişim onları niye dediğimi.*

*Araştırmacı:* *Tabi neden yapıldığını böyle anlayamıyorum.*

*ÖA22:* *Çünkü belirtmemişim. Test mantığı biraz da…*

Yukarıda belirtilen konuşmalardan ÖA22 kodlu öğretmen adayı, ispat için izlediği adımları neye dayalı olarak belirlediğini bilmesine rağmen gerekçelerini sunmadığı anlaşılmaktadır. Öğretmen adayı gerekçeleri belirtmemesinin sebebini ise önceki öğrenim hayatındaki alışkanlıklara bağladığı açıkça görülmektedir.

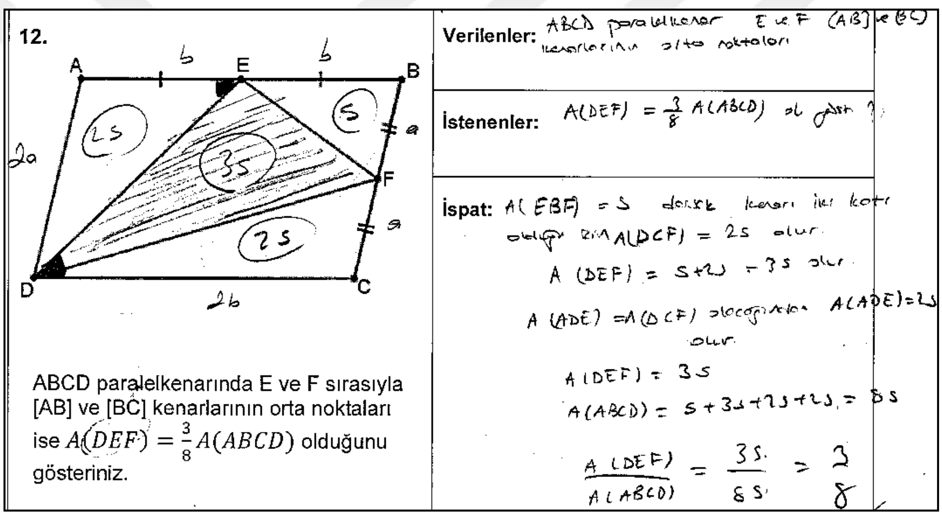
Öğretmen adayları ispat yaparken gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bu çıkarımlara yönelik formal gerekçeler sunmadığı durumlarla karşılaşıldığı gibi hatalı gerekçeler sunduğu durumlarla da karşılaşılmıştır. Ancak bu durumlar formal gerekçeler sunmadıkları durumlara göre daha sınırlı sayıda gerçekleşmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA13 kodlu öğretmen adayının çıkarımlarına hatalı gerekçelerde bulunarak matematiksel ilişkiye ulaşmaları sonucunda MHS2c göstergesinde yer alan ispatı Şekil 19'da sunulmuştur.




Şekil 19. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 19'da görüldüğü gibi ABCDE düzgün beşgenden yararlanarak AK ve EF doğru parçalarının uzunluklarının eşit olduğunu belirtmiş ve BCF ile CDK üçgenlerinin alanlarının eşitliğinden bahsederek X, A, Z, T, Y harfleri ile temsil edilen alanlara yönelik X + A + Z = T + A + Y eşitliğini yazmıştır. Gerekçe olarak DK ile CF ve CK ile CF kenar uzunluklarının eşitliğini ifade etmiştir. Ancak söz edilen üçgenlerdeki iki kenar uzunluğunun eşitliğini belirterek üçgenlerin eş olduğu ileri sürülemeyeceğinden alanlarının eşit olduğu da bu şekilde belirtilemez. Kenar uzunluklarının eşitliğinden yararlanarak ispat adımlarını belirlemesine rağmen sunulan gerekçeler uygun ve anlaşılır olmamıştır.

Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA46 kodlu öğretmen adayının ispat aşamalarına yönelik yanlış gerekçelendirmeler yaparak MHS2c göstergesinde yer alan ispatı Şekil 20'de sunulmuştur.



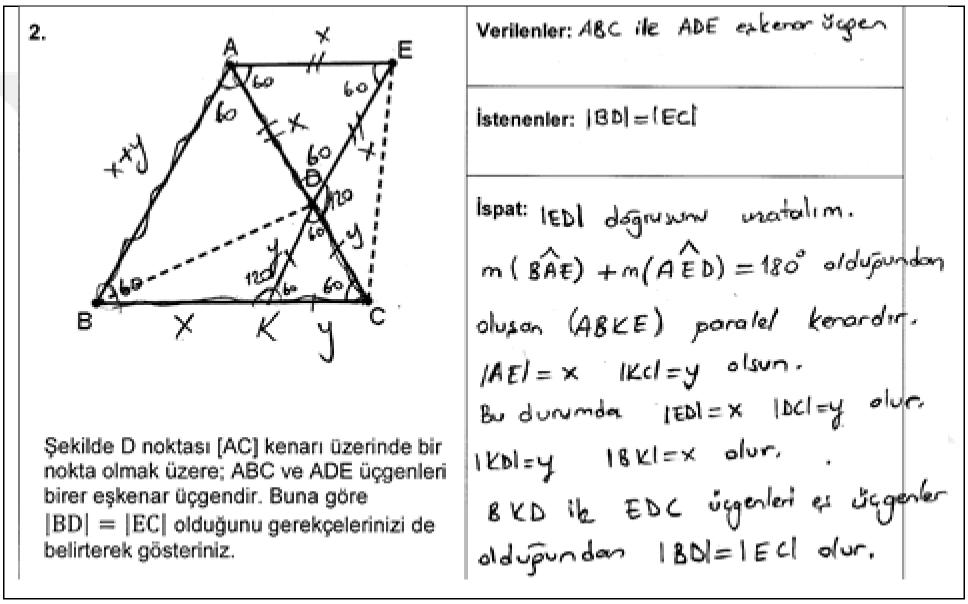

Şekil 20. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 20 incelendiğinde öğretmen adayı ADE, EBF, DEF, DFC üçgenlerinin alanlarını belirleyerek ABCD paralelkenarı ile DEF üçgenlerinin alanları arasındaki ilişkiye ulaşmaya çalışmıştır. DCF üçgeninin alanının EBF üçgeninin alanının 2 katı olduğuna yönelik "*…kenarı iki katı olduğu için*" şeklinde hatalı bir gerekçe sunmuştur. Sadece bir kenarının diğer üçgenin kenar uzunluğunun 2 katı olması üçgenlerin alanları oranının 2 katı olmasını açıklayamaz. Dolayısıyla bu çıkarımına yönelik uygun bir gerekçe sunamamıştır.

Deney grubunda % 7 ve kontrol grubunda % 4,77 oranında ortaya çıkmakla birlikte deney grubundaki öğretmen adaylarının MHS3 kategorisi olarak nitelendirilen ispatları daha fazla yaptığı görülmüştür. Bu ispatlarda öğretmen adaylarının ispat aşamalarının bir kısmına gerekçeler sunup bir kısmına ise gerekçeler sunmadıkları durumlar çoğunluktadır.

Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirip bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hatalar yaptığı durumlarla da karşılaşılmıştır. Ancak ispat aşamalarının bazılarının gerekçeli bazılarının ise gerekçesiz olduğu durumlara göre oldukça az ortaya çıkmıştır.

Muhakeme süreci boyutu bakımından MHS3 kategorisinde yer alan ispatlardan çıkarımların bir kısmına yönelik gerekçe sunmadıkları durumlar deney grubunda % 5,2 ve kontrol grubunda % 4,17 oranında ortaya çıkmıştır. MHS3a göstergesinde yer alan bu ispatlardan deney grubunda yer alan ÖA22 kodlu öğretmen adayının yaptığı ispat Şekil 21'de sunulmuştur.




Şekil 21. MHS3a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 21'den görüldüğü üzere öğretmen adayı D noktasından BC kenarına bir doğru parçası çizmiş ve $m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{AED}) = 180^{\circ}$ şeklinde bir gerekçe sunarak ABKE çokgeninin paralelkenar olduğunu belirtmiştir. Ardından paralelkenar tanımından yararlanarak AE, KC, ED ve DC kenarlarının uzunluklarını harflendirmiştir. Ayrıca yaptığı ek çizimle birlikte DKC eşkenar üçgenini oluşturmuş ve BKD ile EDC üçgenlerinin eş olduğunu ifade ederek BD ve EC kenarlarının uzunluklarının eşit olduğunu açıklamıştır. Ancak bu üçgenlerin hangi teoreme göre ya da neye dayalı olarak eş olduğuna yönelik bir gerekçe sunmamıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı çıkarımlarının bir kısmına yönelik gerekçeler sunarken bir kısmına ise sunmamıştır. Öğretmen adayı ile gerçekleştirilen klinik mülakatta ise çıkarımlarına yönelik ifade etmediği gerekçeleri de sunmuştur. Yapılan görüşme ile ilgili bir kesit aşağıda sunulmuştur.

*Araştırmacı:* *İkinci problemde ne yapmışsın? İspat için hangi tanım, teoremleri kullanmışsın?*

*ÖA22:* *İkinci problemde ED doğrusunu uzatmışım. Paralelliği kullanmışım.*

*Araştırmacı:* *Paralelliği nasıl kullanmışsın?*

*ÖA22:* *ED'yi uzattığımda oluşan doğrunun AB'ye paralel olduğunu kullanmışım.*

*Araştırmacı:* *Paralel olduğuna nasıl karar vermişsin?*

*ÖA22:* *Açıların birbirini* $180^{\circ}$*'ye tamamlamasından.*

*Araştırmacı:* *Daha sonra ne yapmışsın?*

*ÖA22:* *Sonra ED'ye x dedim. Uzattığım parçaya y, AB de x + y olmuş.*

*Araştırmacı:* *AB neden x + y olmuş?*

*ÖA22:* *Paralelkenarda karşılıklı kenarlar birbirine eşit olduğu için.*

*Araştırmacı:* *Başka?*

*ÖA22:* *ED'ye x demiştim. ADE eşkenar üçgen olduğundan diğer kenarlar da x oldu. AE'ye x dedim ve BK da x oldu. ED'yi uzattığımda iç ters açılardan KDC açısı* $60^{\circ}$*, yöndeş açıdan ise DKC açısı* $60^{\circ}$ *olmuş. DKC de eşkenar üçgen oldu. Bu yüzden bütün kenarları y oldu. BD ile EC'nin eşitliğine bakıyorduk değil mi?*

*Araştırmacı:* *Evet.*

*ÖA22:* *Ona da BKD ve CDE üçgenlerinin kenar-açı-kenar eşlik teoreminden eş olmasıyla ulaştım.*

*Araştırmacı:* *Burada bu teorem ile üçgenlerin eş olduğuna ulaştığını belirtmemişsin.*

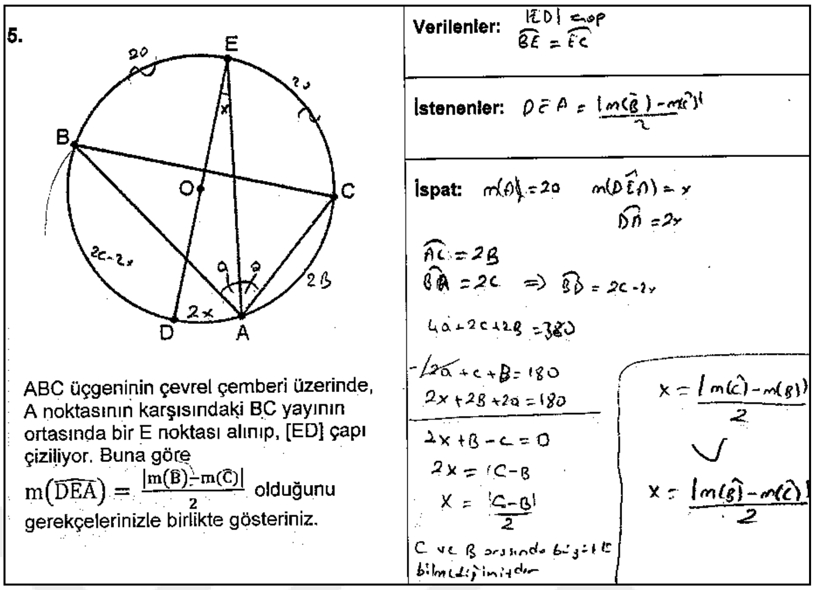
*ÖA22:* *Evet etmemişim.*

*Araştırmacı:* *Lisedeyken üçgenlerin benzer ya da eş olduğuna karar verirken iki kenar eş, bir de bu kenarlar arasındaki açı ölçüsü eşit deyip bırakıyor muydunuz? Özellikle teoremi belirtmiyor muydunuz?*

*ÖA22:* *Evet. O zaman kenarlarına baktık bir de aralarındaki açıya eş olduğunu gördük mü yazmaya ihtiyaç duymazdık. Ama şimdi bu ispatı yapıyor olsaydım onu da yazardım.*

ÖA22 kodlu öğretmen adayının sorunun ispatını yapmak için bazı adımlara yönelik gerekçeleri sunmamasına rağmen mülakat esnasında bu ifadelere yer verdiği görülmektedir. Dolayısıyla bu durum ispat adımlarına yönelik gerekçeler sunulması gerektiğinin bilincinde olmaya başladığını göstermektedir.

Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA54 kodlu öğretmen adayının MHS3a göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 22'de sunulmuştur.

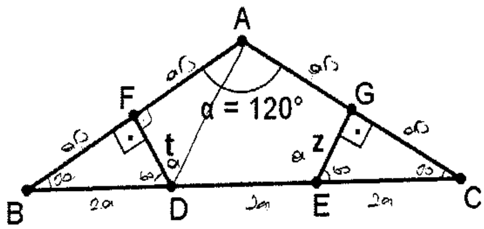



Şekil 22. MHS3a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 22'de görüldüğü gibi öğretmen adayı geometrik şekil üzerinde yay ölçüleri eşit olan BE ile EC yaylarını gösterip DA, AC, BA ve BD yaylarının ölçülerini belirlemiştir. Yay ölçülerini belirlemesi üzerine çeşitli denklemler yazarak bunları çözmüştür. Ancak yay ölçülerini nasıl yazdığına ve denklemleri neye göre yazdığı ile ilgili herhangi bir gerekçe sunmamıştır. Ancak belirtilen matematiksel ilişkiye ulaştığında mutlak değer işaretinin neden kullanılması gerektiğine yönelik "*C ve B arasında büyüklüğü bilmediğimizdendir.*" şeklinde bir gerekçe sunmuştur. Dolayısıyla çıkarımların bir kısmına yönelik gerekçe sunmayı tercih etmezken birine yönelik gerekçe sunmuştur.

Öğretmen adayları bütün ispat adımlarını belirtip bu adımlardan bazılarına yönelik gerekçeler sunmadıkları durumların yanı sıra sundukları gerekçelerin bazılarında sözcük ya da teoremin isimlendirilmesine yönelik hatalar yaptığı durumlar da olmuştur. Bu tür durumlar deney grubunda % 1,8 ve kontrol grubunda % 0,6 oranında ortaya çıkarak MHS3a göstergesine göre oldukça sınırlı bir oranda gerçekleşmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA17 kodlu öğretmen adayının MHS3b göstergesine yönelik yaptığı ispata Şekil 23'te yer verilmiştir.

**1.**




Şekilde ABC ikizkenar üçgen olup $m(\hat{A}) = 120^0$'dir. t ve z doğruları sırasıyla [AB] ve [AC] nin orta dikmeleri ve $t \cap [BC] = \{D\}$, $z \cap [BC] = \{E\}$ olduğuna göre $|BD| = |DE| = |EC|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.

**Verilenler:** $m(\hat{A})=120°$, $m(\hat{F})=90$, $m(\hat{G})=90$

**İstenenler:** $|BD|=|DE|=|EC|$

**İspat:** $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180$

$m(\hat{A})=120°$ $\quad m(\hat{B})+m(\hat{C})=60$

$\hat{ABC}$ ikizkenar üçgen old. için

$m(\hat{B})=m(\hat{C})=30$

$\hat{BFD}$ ve $\hat{GEC}$ 30-60-90 üçgeni

$|GE|=k$ olsun $|GC|=k\sqrt{3} \Rightarrow |AG|=k\sqrt{3} \Rightarrow |EC|=2k$

$|AC|=2k\sqrt{3} \Rightarrow |BF|=k\sqrt{3}$

$|BF|=k\sqrt{3} \Rightarrow |BD|=2k$

Öklid bağıntısından $|BC|=6k$

$|BC|=6k \Rightarrow |BD|+|DE|+|EC|=6k$

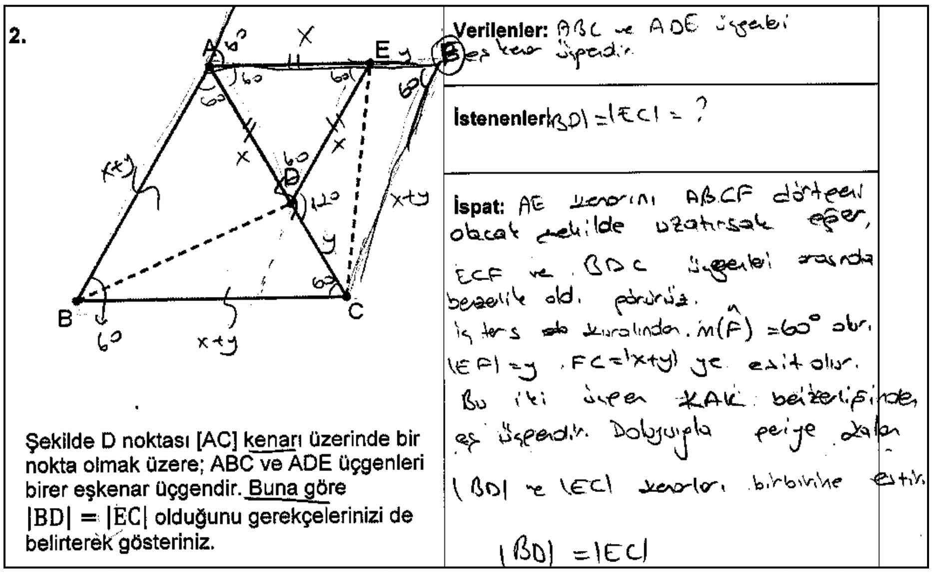
$\left.\begin{array}{l}|BD|=2k\\|EC|=2k\end{array}\right\} |DE|=2k$

$|BD|=|DE|=|EC|$

Şekil 23. MHS3b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 23'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı üçgenin iç açı ölçüleri toplamının $180^\circ$ olmasına dayalı olarak bir denklem yazmıştır ve ABC üçgeninin ikizkenar olmasını gerekçe olarak sunarak B ile C açılarının $30^\circ$ olduğunu belirtmiştir. Bunun üzerine BFD ile GEC üçgenlerinin $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ açı ölçülerine sahip bir dik üçgen olmasına dayalı olarak kenar uzunluklarını bulmuştur. Ancak BC kenarının uzunluğunun 6k'ya eşit olduğunu "*Öklid bağıntısından*" şeklinde bir gerekçe sunarak ifade etmiştir. Bundan önce sunulan gerekçeler çıkarımlara uygunken bu çıkarıma sunulan gerekçe yapılan işlemlerle uyuşmamaktadır. Dolayısıyla öğretmen adayı doğru bir uygulama gerçekleştirmesine rağmen teoremi isimlendirmede hata yapmıştır.

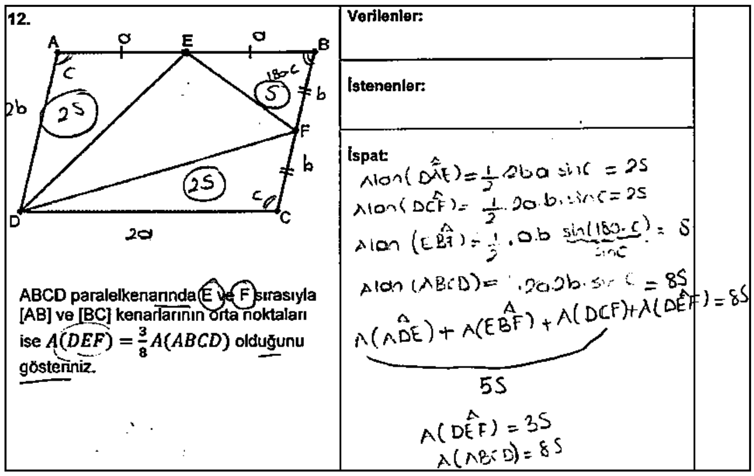
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA60 kodlu öğretmen adayının çıkarımların bazılarına sunulan gerekçelerde sözcük ya da teoremlerin isimlendirilmesine yönelik hatalar yapması sonucunda MHS3b göstergesine yönelik yaptığı ispata Şekil 24'te yer verilmiştir.




Şekil 24. MHS3b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 24 incelendiğinde öğretmen adayı geometrik şeklin dışında bir F noktası oluşturarak bu şekli bir eşkenar dörtgene tamamlamıştır. Ardından EFC ile DCB üçgenlerinin "*KAK benzerliğinden*" şeklinde bir gerekçe sunarak eş olduklarını belirtmiştir. Bu gerekçede KAK eşlik aksiyomuna göre şeklinde belirtilebilir ya da benzerlik oranının bir olduğuna vurgu yapılabilirdi. Aslında öğretmen adayı bunu ifade etmeye çalışmakla birlikte alışkın olduğu bir kullanımı gerçekleştirmiştir. Ayrıca öğretmen adayı "*…iç ters kuralından* $m(\hat{F}) = 60^o$ *olur*" şeklinde bir ifadede bulunarak bu kuralın ismini hatalı olarak belirtmiştir. Bu gerekçenin yerine yöndeş açıdan olduğunu belirtmesi gerekirdi. Ancak öğretmen adayı bunun farkına varamayıp böyle bir gerekçe sunmuştur.

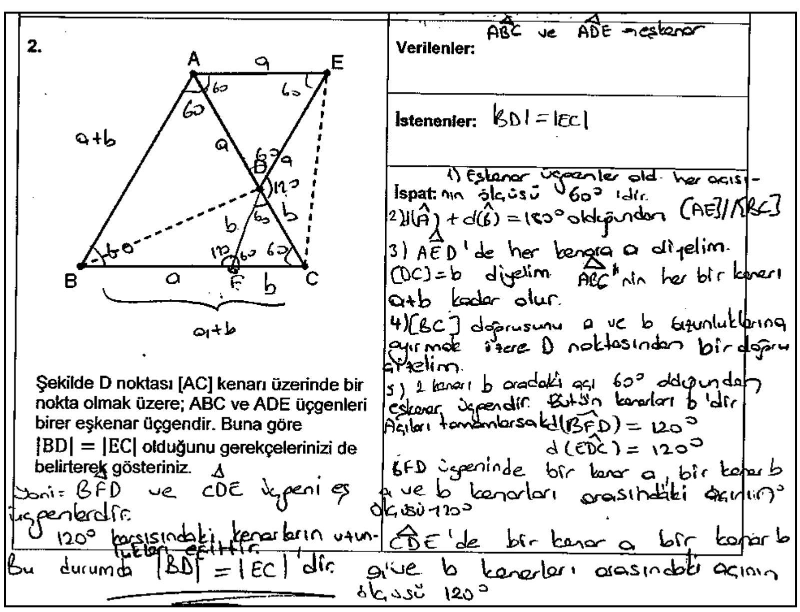
Matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmak için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bu çıkarımların her birine yönelik gerekçeler sundukları durumlar deney grubunda % 4,7 oranla daha fazla olmak üzere kontrol grubunda % 1,49 oranında ortaya çıkmıştır. Ancak öğretmen adayları muhakeme süreci bakımından MHS4 kategorisinde yer alan ispatları diğer kategorilere göre daha az oranda yapabilmişlerdir. Deney grubunda yer alan ÖA13 kodlu öğretmen adayının MHS4 kategorisine yönelik yaptığı ispat Şekil 25'te sunulmuştur.




Şekil 25. MHS4 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 25 incelendiğinde öğretmen adayı DAE, DCF, EBF üçgenlerinin ve ABCD paralelkenarının alanını trigonometrik bağıntılardan yararlanarak temsili olarak bulmuştur. Bunu yaparken bütünleyen açıların sinüs değerlerinin eşit olduğunu belirtip ABCD paralelkenarını oluşturan üçgenlere bağlı olarak bir eşitlik yazmıştır. Böylece DEF üçgeninin alanını da temsili olarak bulup alanlar arasında oranlama yapmış ve belirtilen matematiksel ilişkinin ispatı için izlenmesi gereken aşamaları belirleyip bu aşamalar için uygun gerekçeler sunarak sonuca ulaşmıştır.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA27 kodlu öğretmen adayının ispat için gerekli tüm çıkarımlarda bulunup her bir çıkarıma uygun gerekçeler sunduğu ispatına Şekil 26'da yer verilmiştir.




Şekil 26. MHS4 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 26'dan görüldüğü üzere öğretmen adayı ABC ile ADE üçgenlerinin eşkenar olmasından yararlanarak bu üçgenlerin her bir açısının ölçüsünün $60^{\circ}$ olduğunu ve A ile B açılarının bütünler açı olmasından AE ile BC kenarlarının paralel olduğunu belirtmiştir. Üçgenlerin kenar uzunluklarına yönelik harflendirmeleri ve yaptığı ek çizimleri ifade etmiştir. Bunun yanı sıra DFC üçgeninin eşkenar ve BFD ile CDE üçgenlerinin eş olmasına yönelik çıkarımlarının her birine yönelik gerekçeler sunmuştur. Matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için izlediği tüm aşamaları ve ispat için gerekli olan çıkarımlarının her biri ile ilgili gerekçeleri ayrıntılı bir şekilde ifade ederek muhakeme süreci bakımından MHS4 kategorisinde yer alan bir ispat yapmıştır.

Uygulama öncesi genel olarak öğretmen adaylarının boş bıraktıkları ya da sadece hipotez ve hüküm bilgilerini yazdıkları durumların çoğunlukta olduğu gözlemlenmiştir. Çıkarımlarda bulundukları durumlarda ise çoğunlukla birbirinden bağımsız en az bir doğru çıkarım ifade ettikleri görülmüştür. Muhakeme süreci boyutunda yer alan üst düzeydeki kategorilerin oranları toplamının her iki grupta da alt düzeydeki kategorilere göre daha az oranda olması matematiksel ilişkinin ispatı için gerekli olan bütün adımları tam anlamıyla belirleyemediklerini göstermektedir. Bununla birlikte ispat adımlarına yönelik gerekçeler sunma bakımından yetersiz oldukları ya da bu gerekçeleri ifade etme gereksinimi duymadıkları belirlenmiştir. İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bunlara yönelik gerekçeler sundukları durumların azınlıkta olması da uygulama öncesinde ispat yapma anlamında donanımlı olmadıklarını göstermektedir.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarıları ile ilgili ön test özet istatistiği Tablo 16'da yer almaktadır.

Tablo 16. İspat Sürecinde Muhakemede Bulunmaya Yönelik Başarıları ile İlgili Ön Test Özet İstatistiği

| | | Ham puan | | | | Lineer puan | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\overline{X}$ | SS | Max | Min | $\overline{X}$ | SS | Max | Min |
| Ön test | Deney | 12,9 | 4,5 | 21 | 0 | -0,42 | 0,83 | 0,48 | -4,26 |
| | Kontrol | 9,1 | 4,8 | 23 | 0 | -1,01 | 0,94 | 0,77 | -4,16 |

Tablo 16 incelendiğinde deney ve kontrol grubunun ön test ham puan ortalamaları sırasıyla 12,9 ve 9,1 olduğu görülmektedir. Bu durum uygulama öncesinde deney grubu ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının muhakemede bulunmalarına yönelik başarılarının birbirine yakın olmadığını göstermektedir. Ön test ham puan ortalamalarının lineer hale getirilmesi sonucunda elde edilen ortalamalar ise sırasıyla -0,42 ve -1,01'dir. İSYBÖT'den ham puan olarak her iki grupta da 16 puandan az alan öğretmen adaylarının

çoğunlukta olmasına bağlı olarak lineer puanlarının büyük çoğunluğunun negatif olarak çıktığı belirlenmiştir. Bununla birlikte deney ve kontrol grubunun lineer puan ortalamaları da negatif olarak hesaplanmıştır. Ortalamaların negatif olması, öğretmen adaylarının sorularına yönelik ispatlarının çoğunda MHS0 kategorisine yönelik durumlar, MHS0 ile MHS1 kategorilerine yönelik durumlar ya da MHS2 kategorisine yönelik ispat sınırlı olmak üzere MHS0, MHS1 ile MHS2 kategorilerine yönelik durumların olduğunu göstermektedir.
Uygulama öncesinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarıları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için ön test verilerine parametrik olmayan testlerden Mann Whitney U testi uygulanmıştır. Yapılan bu teste yönelik sonuçlar Tablo 17'de sunulmuştur.

Tablo 17. Deney ve Kontrol Gruplarının Muhakemede Bulunmaya Yönelik Başarılarının Karşılaştırılması ile İlgili Mann Whitney U Testi Sonucu

| | Grup | N | Sıra Ortalaması | Sıra Toplamı | U | p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ön test | Deney | 32 | 38,03 | 1217 | 207 | 0,000 |
| | Kontrol | 28 | 21,89 | 613 | | |

Tablo 17 incelendiğinde uygulama öncesinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarıları arasında anlamlı bir fark bulunmuştur ($U = 207$, $p < 0,05$). Bu durum uygulamalar öncesinde deney grubunun muhakemede bulunma ile ilgili başarılarının kontrol grubuna göre daha fazla olduğunu göstermektedir.

### 4. 1. 1. 2. Uygulama Sonrası Öğretmen Adaylarının Muhakeme Süreçleri ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalardan sonra deney ve kontrol grubunun ispat yapma başarılarını belirleyebilmek için son test yapılmıştır. Bu test muhakeme süreci boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama sonrası öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarıları belirlenmiştir. Bu kısımda son testten elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra yapılan klinik mülakatlar ve öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek sunulmuştur. Ayrıca uygulama sonrası deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmalarına yönelik başarıları arasında bir farklılık olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının İSYBST'de yer alan her bir problem için yapılan ispatların muhakeme süreci bakımından hangi kategoride yer aldığı ve bu kategoriler ile ilgili frekans ve yüzde dağılımları Tablo 18'de sunulmuştur.

Tablo 18. İSYBST'de Yer Alan Problemler İçin Yapılan İspatların Muhakeme Süreci Bakımından Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

| İSYBST | Deney Grubu | | | Kontrol Grubu | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Problemler | Kategoriler | f | % | Kategoriler | f | % |
| 1 | MHS0 | - | - | MHS0 | 6 | 21 |
| | MHS1 | 14 | 44 | MHS1 | 16 | 57 |
| | MHS2 | 9 | 28 | MHS2 | 4 | 14 |
| | MHS3 | 5 | 16 | MHS3 | 2 | 7 |
| | MHS4 | 4 | 13 | MHS4 | - | - |
| 2 | MHS0 | 7 | 22 | MHS0 | 15 | 54 |
| | MHS1 | 18 | 56 | MHS1 | 10 | 36 |
| | MHS2 | 7 | 22 | MHS2 | 3 | 11 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 3 | MHS0 | - | - | MHS0 | 6 | 21 |
| | MHS1 | 2 | 6 | MHS1 | 11 | 39 |
| | MHS2 | 14 | 44 | MHS2 | 3 | 11 |
| | MHS3 | 7 | 22 | MHS3 | 7 | 25 |
| | MHS4 | 9 | 28 | MHS4 | 1 | 4 |
| 4 | MHS0 | 3 | 9 | MHS0 | 11 | 39 |
| | MHS1 | 7 | 22 | MHS1 | 9 | 32 |
| | MHS2 | 6 | 19 | MHS2 | 6 | 21 |
| | MHS3 | 14 | 44 | MHS3 | 2 | 7 |
| | MHS4 | 2 | 6 | MHS4 | - | - |
| 5 | MHS0 | 11 | 34 | MHS0 | 18 | 64 |
| | MHS1 | 14 | 44 | MHS1 | 10 | 36 |
| | MHS2 | 3 | 9 | MHS2 | - | - |
| | MHS3 | 3 | 9 | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | 1 | 3 | MHS4 | - | - |
| 6 | MHS0 | 13 | 41 | MHS0 | 17 | 61 |
| | MHS1 | 2 | 6 | MHS1 | 3 | 11 |
| | MHS2 | 3 | 9 | MHS2 | 2 | 7 |
| | MHS3 | 6 | 19 | MHS3 | 2 | 7 |
| | MHS4 | 8 | 25 | MHS4 | 4 | 14 |
| 7 | MHS0 | 5 | 16 | MHS0 | 12 | 43 |
| | MHS1 | 8 | 25 | MHS1 | 6 | 21 |
| | MHS2 | 19 | 59 | MHS2 | 10 | 36 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |
| 8 | MHS0 | 9 | 28 | MHS0 | 14 | 50 |
| | MHS1 | 20 | 63 | MHS1 | 11 | 39 |
| | MHS2 | 3 | 9 | MHS2 | 3 | 11 |
| | MHS3 | - | - | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |

Tablo 18'in devamı

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | MHS0 | 1 | 3 | MHS0 | 13 | 46 |
| | MHS1 | 9 | 28 | MHS1 | 14 | 50 |
| | MHS2 | 11 | 34 | MHS2 | 1 | 4 |
| | MHS3 | 6 | 19 | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | 5 | 16 | MHS4 | - | - |
| 10 | MHS0 | 4 | 13 | MHS0 | 13 | 46 |
| | MHS1 | 15 | 47 | MHS1 | 15 | 54 |
| | MHS2 | 5 | 16 | MHS2 | - | - |
| | MHS3 | 3 | 9 | MHS3 | - | - |
| | MHS4 | 5 | 16 | MHS4 | - | - |
| 11 | MHS0 | 1 | 3 | MHS0 | 10 | 36 |
| | MHS1 | 6 | 19 | MHS1 | 8 | 29 |
| | MHS2 | 11 | 34 | MHS2 | 6 | 21 |
| | MHS3 | 9 | 28 | MHS3 | 4 | 14 |
| | MHS4 | 5 | 16 | MHS4 | - | - |
| 12 | MHS0 | - | - | MHS0 | 11 | 39 |
| | MHS1 | 7 | 22 | MHS1 | 9 | 32 |
| | MHS2 | 13 | 41 | MHS2 | 3 | 11 |
| | MHS3 | 12 | 38 | MHS3 | 5 | 18 |
| | MHS4 | - | - | MHS4 | - | - |

Genel olarak incelendiğinde deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının yaptığı ispatların büyük çoğunluğunun MHS2, MHS3 ve MHS4 kategorilerinde toplandığı görülmektedir. MHS0 ve MHS1 kategorilere yönelik ispatların ise daha az sayıda olduğu dikkat çekmektedir. Dolayısıyla muhakeme süreci boyutunda yer alan kategorilerden alt düzeydekilere (MHS0, MHS1) yönelik yapılan ispatların toplam oranı, üst düzeydekilere (MHS2, MHS3, MHS4) yönelik yapılanlara göre daha azdır. Kontrol grubunda deney grubundan farklı olarak yapılan ispatların çoğunluğunun MHS0 ve MHS1 kategorilerine ait olduğu görülmektedir. MHS2, MHS3 ve MHS4 kategorilere yönelik ispatların ise MHS0 ve MHS1 kategorilere göre nispeten daha az olduğu fark edilmektedir. Bu bakımdan muhakeme süreci boyutunun kategorilerinden alt düzeydekilerde oldukça büyük bir yoğunluğa rastlanırken üst düzey kategorilerinde bu yoğunluğa rastlanmamaktadır. Ancak bazı sorularda her iki grupta da kategorilerin düzeyleri dikkate alındığında en üst düzey olarak MHS2 kategorisine yönelik ispatlar yapıldığı görülmektedir. Bu sorular 2., 7. ve 8. sorular olmakla birlikte bu sorularda bile gruplar arasında farklılaşmaların olduğu fark edilmektedir. Bu farklılaşma, deney grubunun bu sorulara yönelik ispatların çoğunluğunun MHS1 ya da MHS2 kategorisinde yer alıp kontrol grubunda MHS0 kategorisinde yer almasıdır. Bu sorulara yönelik ispatların yapılabilmesi için birbirini destekleyen birçok çıkarımda bulunmakla birlikte farklı bakış açıları ile ayrıntıların yakalanmasını gerektirmesi, MHS3 ve MHS4 kategorilerine yönelik ispatların yapılmasını engellemiş olabilir.

Öğretmen adaylarının İSYBST'de yaptıkları ispatların muhakeme süreci boyutunda yer alan her bir kategoriye ait göstergelere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 19'da sunulmuştur.

Tablo 19. Uygulama Sonrası Muhakeme Süreci Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| Muhakeme süreci boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | | | Kontrol Grubu | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | f | | % | | f | | % | |
| MHS0 | a. Boş bırakmıştır. | 19 | 54 | 4,95 | 14,06 | 74 | 146 | 22,02 | 43,45 |
| | b. Hipotez ve hüküm bilgilerini yazmıştır. | 20 | | 5,21 | | 55 | | 16,37 | |
| | c. İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunmuştur. | 15 | | 3,9 | | 17 | | 5,06 | |
| MHS1 | a. Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunmuştur. | 91 | 122 | 23,7 | 31,78 | 93 | 122 | 27,68 | 36,31 |
| | b. Çıkarımlarını özel durum üzerinden yürütmüştür. Ancak bunu yaparken yetersiz gerekçelendirme yapmıştır. | 28 | | 7,3 | | 22 | | 6,55 | |
| | c. Hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunmuştur. | 3 | | 0,78 | | 7 | | 2,08 | |
| MHS2 | a. Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak sonuca ulaşamamıştır. | 59 | 104 | 15,36 | 27,08 | 25 | 41 | 7,44 | 12,2 |
| | b. Sonuca özel durum üzerinden ardı ardına çıkarımlarla ulaşmıştır | 25 | | 6,51 | | 11 | | 3,27 | |
| | c. Sonuca ulaşmış ancak bu ulaşma sürecindeki aşamalarını formal olarak gerekçelendirmemiş ya da yanlış gerekçelendirme yapmıştır. | 20 | | 5,21 | | 5 | | 1,49 | |
| MHS3 | a. Sonuca ulaşmış ancak ispat aşamalarının bir kısmı gerekçelendirilmiş bir kısmı gerekçelendirilmemiştir. | 61 | 65 | 15,88 | 16,92 | 22 | 22 | 6,55 | 6,55 |
| | b. Sonuca ulaşmış, ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirmiş. Ancak bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yapmıştır. | 4 | | 1,04 | | - | | - | |
| MHS4 | Sonuca ispat aşamalarının her birine yönelik gerekçelendirmeler yaparak ulaşmıştır. | 39 | | 10,16 | | 5 | | 1,49 | |

Genel olarak incelendiğinde deney grubunun ispatlarının % 54,16 gibi bir çoğunlukla MHS2, MHS3 ve MHS4 kategorilerine ait olduğu görülmektedir. Bu durum uygulama sonrasında deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispatlarında birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunup bunları ispat adımları halinde sunmakla birlikte çıkarımlarını gerekçelerle ifade etmeye çalıştıklarını göstermektedir. Kontrol grubunun ispatlarının ise % 79,76 gibi yüksek bir oranla MHS0 ve MHS1 kategorisine yönelik yapıldığı görülmektedir. Dolayısıyla kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama sonrasında çoğunlukla boş bırakma, sadece hipotez ve hüküm bilgilerini yazma ya da birbirinden bağımsız çıkarımlarda bulunma gibi durumlara devam ettikleri anlaşılmaktadır.

Her bir kategori ayrı ayrı incelendiğinde kontrol grubunda MHS0 kategorisinde yer alan ispatlar $f_K$ = 146 ve % 43,45 ile en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. Deney grubunda bu kategoriye yönelik frekans $f_D$ = 54 ve yüzdenin % 14,06 olması gruplar arasında MHS0 kategorisinde yer alan ispatların sayısı bakımından oldukça fazla bir fark olduğunu göstermektedir. MHS0 kategorisinde yer alan göstergeler bakımından deney grubunda MHS0a (f = 19, % 4,95) ve MHS0b (f = 20, % 5,21) göstergelerinin frekans ve yüzdeleri birbirine oldukça yakındır. MHS0c (f = 15, % 3,9) göstergesi de bu frekans ve yüzdelere yakın bir oranda olup deney grubunda MHS0 kategorisine yönelik en az rastlanan durumdur. Dolayısıyla bu grupta boş bıraktıkları ve sadece hipotez ve hüküm bilgilerini yazdıkları durumlar oldukça yakın bir oranda ortaya çıkmıştır. İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulundukları durumların ise bu kategori içinde diğer göstergelere yakın bir oranda olmak üzere daha az ortaya çıktığı belirlenmiştir. Kontrol grubunda da MHS0c (f = 17, % 5,06) göstergesine yönelik ispatlar MHS0 kategorisi içinde en az görülen durumdur. Ancak MHS0a (f = 74, % 22,02) ve MHS0b (f =55, %16,37) göstergeleri ile arasında oldukça fazla bir fark söz konusu olup kontrol grubunda MHS0 göstergesine yönelik durumların en fazla orana sahip olduğu görülmektedir.

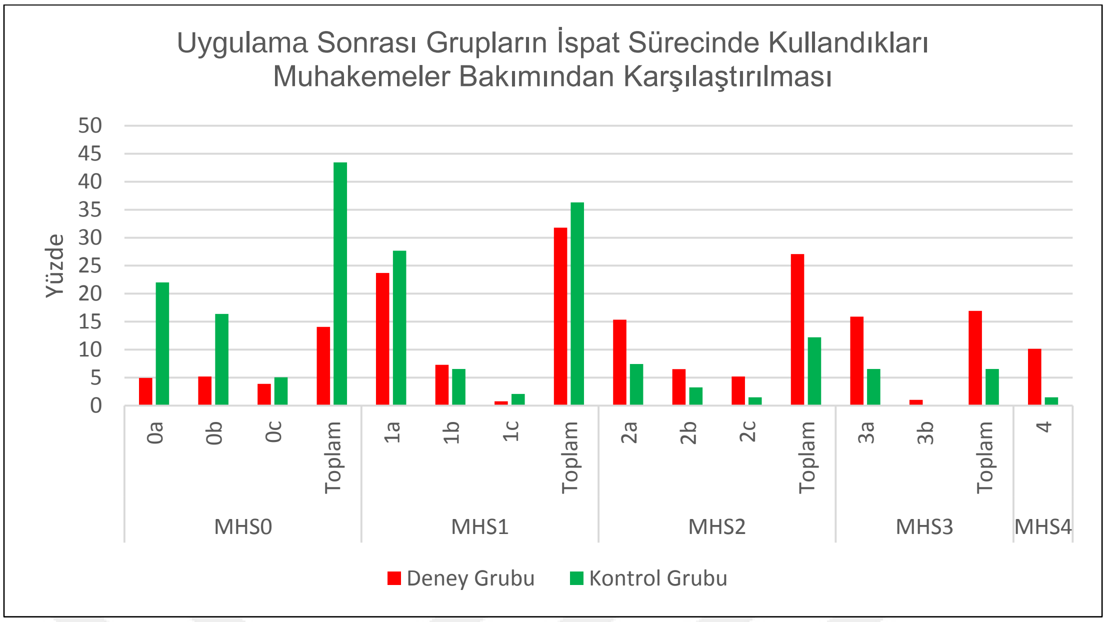
Deney grubunda muhakeme sürecinin kategorilerinden en yüksek frekans ($f_D$ = 122) ve yüzdeye (%31,78) sahip olan MHS1 kategorisidir. Kontrol grubunda ise MHS1 kategorisine yönelik ispatlar % 36,31’lik bir oranla MHS0 kategorisini takip etmektedir. MHS1 kategorisi içerisinde her iki grupta da MHS1a göstergesine yönelik ispatların çoğunlukta ve MHS1c göstergesine yönelik ispatların azınlıkta olduğu görülmektedir. Muhakeme süreci ile ilgili göstergeler, kategori ayrımı yapılmaksızın incelendiğinde her iki grupta da MHS1a göstergesine yönelik ispatların çoğunlukta olduğu belirlenmiştir. MHS1b göstergesine yönelik ispatlar ise deney grubunda % 7,3 ve kontrol grubunda % 6,55 olmak üzere yakın oranlarda ortaya çıkmıştır. Ayrıca sadece deney grubunda olmak üzere bütün göstergeler arasında en az ortaya çıkan ispatların MHS1c göstergesine ait olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla grupların her birinde MHS1 kategorisi bakımından birbirinden bağımsız en az bir çıkarımda bulundukları durumlar daha fazla görülürken hükümden başlayarak ispat yaptıkları durumların daha az ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

MHS2 kategorisinde yer alan ispatlar, deney grubunda frekans (f = 104) ve yüzde (% 27,08) bakımından MHS1 kategorisini takip etmektedir. Kontrol grubunda ise bu kategoriye yönelik ispatlar deney grubuna göre daha az olmak üzere bu tür ispatlar % 12,2 oranında ortaya çıkmıştır. Deney ve kontrol grubunda MHS2 kategorisinde yer alan göstergelerden MHS2a göstergesine yönelik ispatlara en fazla ($f_D$ = 59, % 15,36; $f_K$ = 25, % 7,44) rastlanırken MHS2c göstergesine yönelik ispatlara en az ($f_D$ = 20, % 5,21; $f_K$ = 5, % 1,49) rastlanmaktadır. Ancak her iki gösterge için yapılan ispatlarda çoğunluk deney grubuna aittir. Bununla birlikte sadece kontrol grubunda görülmek üzere bütün göstergeler arasında en az ortaya çıkan ispatlardan birinin MHS2c göstergesine ait olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu kategori içerisinde birbirini destekleyen çıkarımda bulunup ispata devam etmedikleri durumlar çoğunlukta iken ispat aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeyip ya da yanlış gerekçelendirerek sonuca ulaştıkları durumlar azınlıktadır.

MHS3 kategorisine yönelik ispatlar, deney grubunda % 16,92 ve kontrol grubunda % 6,55 oranla olmak üzere gruplar arasında oldukça fazla bir fark mevcuttur. Grupların her birinde MHS3 kategorisi içerisinde olmak üzere MHS3a göstergesine yönelik ispatlara daha çok ($f_D$ = 61, % 15,88; $f_K$ = 22, % 6,55) rastlanmıştır. MHS3b göstergesine yönelik ispatlar ise kontrol grubunda hiç görülmemekle birlikte deney grubunda diğer göstergeye göre daha az ($f_D$ = 4, % 1,04) görülmüştür. Dolayısıyla MHS3 kategorisi içinde değerlendirildiğinde ispat aşamalarının bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmeyip sonuca ulaştıkları durumların çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Bununla birlikte ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirip bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yaparak sonuca ulaştıkları durumların azınlıkta olduğu ortaya çıkmaktadır.

Muhakeme süreci kategorileri bakımından ise kontrol grubu daha düşük bir frekans ve yüzdeye sahip olmakla birlikte her iki grupta da en düşük frekans ($f_D$ = 39, $f_K$ = 5) ve yüzdeye (sırasıyla %10,16 ve %1,49) sahip olan kategorinin MHS4 olduğu görülmektedir. Bu durum, deney grubunda uygulama öncesine göre matematiksel ilişkinin ispatı için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunma ve bu çıkarımlara yönelik gerekçeleri sunma bakımından bir gelişim olduğunu göstermektedir. Ancak kontrol grubunda herhangi bir gelişme görülmeyip bu kategoriye yönelik oranın sabit kaldığı fark edilmektedir.

Öğretmen adaylarının uygulama sonrasında muhakeme süreci boyutu kategorilerinde yer alan ispatlar bakımından deney ve kontrol grubu arasındaki değişimi gösteren Grafik 2 aşağıda sunulmuştur.




Grafik 2. Uygulama sonrası grupların ispat sürecinde kullandıkları muhakemeler bakımından karşılaştırılması

Grafik 2 incelendiğinde muhakeme süreci boyutunda yer alan MHS0 kategorisinin kontrol grubunda büyük bir çoğunluğa sahip olduğu görülmektedir. Bu bakımdan MHS0 kategorisine yönelik yapılanlar açısından deney ve kontrol grubu arasında oldukça büyük bir fark söz konusudur. Özellikle de MHS0a ve MHS0b göstergelerinin oranları arasındaki farkın fazla olmasına bağlı olarak deney ve kontrol grubunda bu farklılaşma oluşmuştur. Bu durum kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının deney grubuna göre daha fazla boş bıraktığı ve sadece hipotez ve hüküm bilgilerini yazdığı durumların çoğunlukta olduğunu göstermektedir. MHS0c göstergesine yönelik durumlar, her iki grupta da en az görülmekle birlikte bu durumlara yönelik çoğunluğun kontrol grubuna ait olduğu fark edilmektedir. Bu durum, ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulundukları durumlar deney durumda daha az olmak üzere her iki grupta da sınırlı sayıda gerçekleştiğini göstermektedir.

MHS1 kategorisinde yer alan ispatların deney grubunda bütün kategoriler arasında en çok karşılaşılan durum olduğu görülmektedir. Kontrol grubunda ise MHS0 kategorisinden sonra en fazla yapılan ispatlar olduğu fark edilmektedir. Gruplar arasında karşılaştırma yapıldığında MHS1 kategorisine yönelik ispatların kontrol grubunda biraz daha fazla olduğu görülmektedir. Grupların her ikisinde de bu kategori içerisinde MHS1a göstergesine yönelik ispatlar daha çok, MHS1c göstergesine yönelik ispatlar ise daha az oranda yapılmıştır. Ancak bu iki göstergeye yönelik yapılan ispatların kontrol grubunda daha fazla yapıldığı belirlenmiştir. Bu durum, deney grubunda daha az görülmekle birlikte öğretmen adaylarının hükümden başlayarak yaptıkları ispatların azınlıkta, birbirinden bağımsız en az bir doğru çıkarımda bulundukları durumların ise çoğunlukta olduğunu göstermektedir. MHS1b göstergesine yönelik ispatlar ise gruplar arasında çok fark olmamak üzere deney grubunda biraz daha fazla yapıldığı görülmektedir.

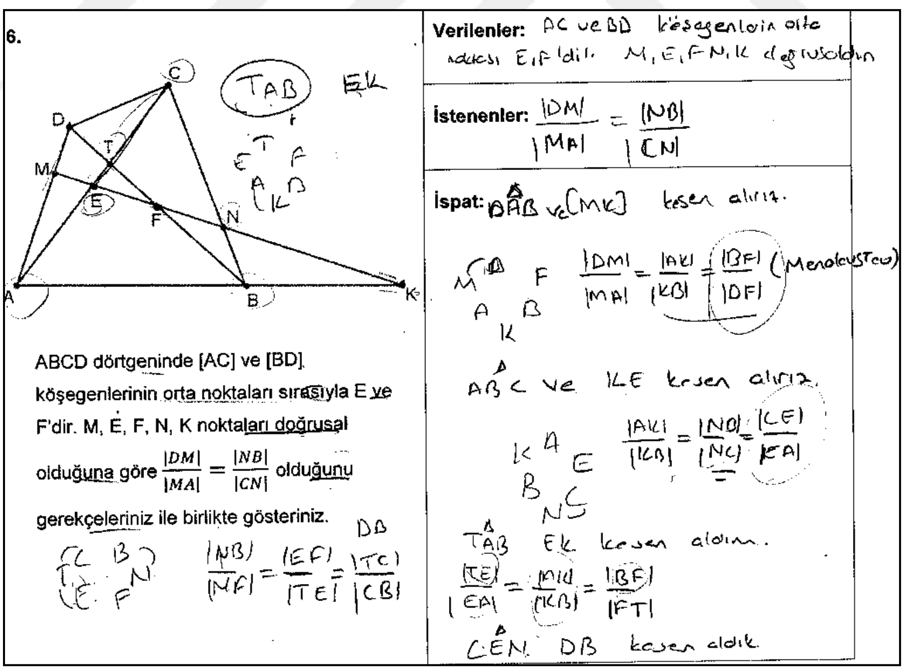
MHS2 kategorisinde yer alan ispatlar, deney grubunda MHS1 göstergesinden sonra en fazla ortaya çıkan durumlar olduğu belirlenmiştir. Ayrıca bu kategoriye yönelik ispatların deney grubunda daha fazla bir çoğunluğa sahip olduğu görülmektedir. MHS2 kategorisinin her bir göstergesine yönelik ispatların da deney grubunda daha fazla yapıldığı fark edilmektedir. Her iki grupta da bu göstergelere yönelik ispatların çoğunun MHS2a göstergesine ait olduğu görülmektedir. MHS2c göstergesine yönelik ispatların ise daha sınırlı sayıda ortaya çıktığı dikkat çekmektedir. Dolayısıyla birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunup sonuca ulaşmadıkları durumlar çoğunlukta, ispat aşamaları formal olarak gerekçelendirmeyip ya da yanlış gerekçelendirerek sonuca ulaştıkları durumların ise azınlıkta olduğu anlaşılmaktadır. MHS2b göstergesine yönelik ispatların da ortaya çıktığı görülmekle birlikte özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaştıkları durumların da olduğu fark edilmektedir.

MHS3 kategorisine yönelik ispatların deney grubunda daha fazla yapıldığı belirlenmiştir. Ayrıca iki grup arasında bu kategoriye yönelik ispatlar bakımından oldukça fark olduğu gözükmektedir. MHS3b göstergesine yönelik ispatlara kontrol grubunda rastlanmamakla birlikte grupların her ikisinde de MHS3a göstergesine yönelik ispatların çoğunlukta olduğu fark edilmektedir. Ancak MHS3a göstergesine yönelik ispatların büyük çoğunluğu da deney grubuna aittir. Dolayısıyla öğretmen adayları ispat aşamalarının bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmeyip sonuca ulaştıkları durumların çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirip bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yaptıkları durumlar sınırlı sayıda olmakla birlikte sadece deney grubunda ortaya çıkmıştır.

MHS4 kategorisine yönelik ispatların, her iki grupta da en az yapılan ispatlar olduğu görülmektedir. Ancak bu kategoride yer alan ispatlar bakımından deney grubu ile kontrol grubu arasında oldukça fazla bir fark olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum, ispat için gerekli olan çıkarımları belirleyip bu çıkarımları gerekçeleri ile birlikte ifade ettikleri durumların öğretmen adayları tarafından daha az bir oranda yapıldığını göstermektedir.

Uygulama sonrasında MHS0 kategorisinde yer alan ispatların deney grubunda % 14,06; kontrol grubunda ise % 43,45 oranında yapıldığı görülmüştür. Bu durum kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının çoğunlukla MHS0 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatlar yaptığını göstermektedir. Deney grubunda ise uygulama öncesine göre MHS0 kategorisine yönelik ispatların oranlarında epeyce bir azalmanın olduğunu ve kontrol grubu ile aralarında epeyce bir fazla bir fark olduğunu göstermektedir. MHS0 kategorisinde yer alan göstergelere yönelik yapılanların oranlarının, deney grubunda birbirine oldukça yakın olduğu fark edilmektedir. Kontrol grubunda ise bu göstergelere yönelik yapılanların oranları arasında bir farklılaşma olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının MHS0 kategorisinde yer alan ispatlar yapması, büyük bir çoğunlukla sadece verilen ve istenenleri yazarak ya da bu bilgileri dahi yazmayıp hiçbir çıkarımda bulunmamalarına bağlıdır. Ancak deney grubunda boş bırakma, hipotez ve hüküm bilgilerini yazma ve ispata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunma göstergelerinin oranları birbirine oldukça yakındır. Kontrol grubunda ise herhangi bir çıkarımda bulunmayıp boş bıraktıkları durumlar diğer göstergelere göre daha fazla bir orana sahiptir. İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunma göstergesi ile ilgili ispatlar ise her iki grupta da en az ortaya çıkan durumlardır.

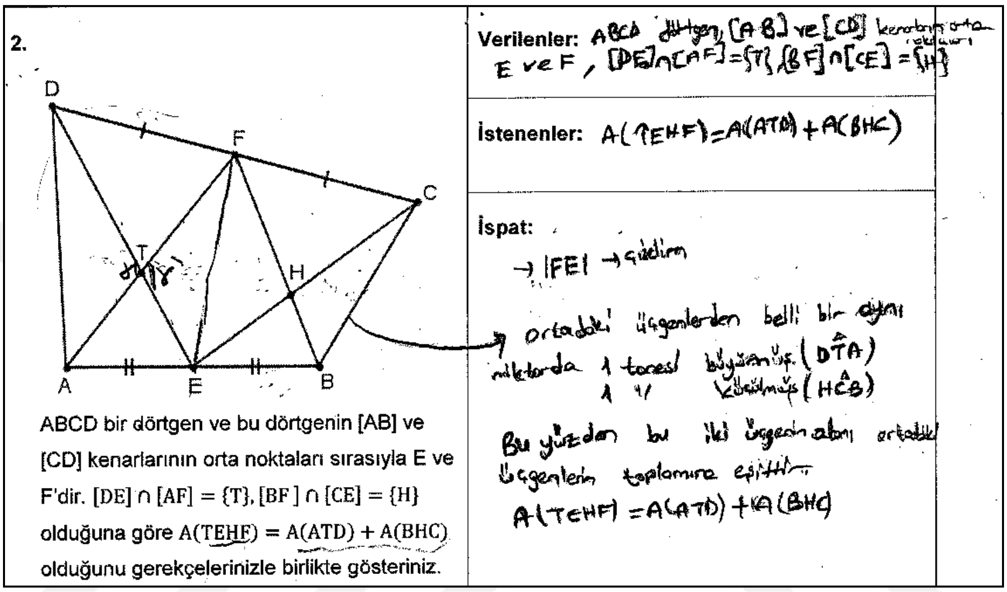
İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunarak yapılan ispatların deney grubunda % 3,9 ve kontrol grubunda % 5,06 oranında olduğu görülmüştür. Dolayısıyla MHS0c göstergesine yönelik yapılan ispatların kontrol grubunda biraz daha fazla olduğu fark edilmektedir. Deney grubunda yer alan ÖA18 öğretmen adayının MHS0c göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 27'de yer almaktadır.




Şekil 27. MHS0c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 27'de görüldüğü gibi öğretmen adayı DAB üçgeninde MK kesenine göre $\frac{|DM|}{|MA|} = \frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BF|}{|DF|}$, ABC üçgeninde KE kesenine göre ise $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|NB|}{|NC|} = \frac{|LE|}{|CA|}$ şeklinde Menelaus teoremini uygulayarak ispat için hatalı bir çıkarımda bulunmuştur. Aynı uygulamayı TAB ve CEN üçgenleri için de gerçekleştirerek hatalı çıkarımlarda bulunmaya devam etmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı ispata hiçbir katkısı olmayacak şekilde Menelaus teoreminin uygulamasını gerçekleştirerek MHS0c göstergesinde yer alan bir ispat oluşturmuştur.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA4 kodlu öğretmen adayının MHS0c göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 28'de sunulmuştur.




Şekil 28. MHS0c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 28 incelendiğinde öğretmen adayı geometrik şekil üzerinde aynı oranda küçültme ve büyültme işlemleri yapılması durumunda matematiksel ilişkinin korunduğunu belirten ifadelerde bulunmuştur. Başka bir ifade ile öğretmen adayı burada dinamik bir yazılım üzerinde sürüklemeler yaparcasına matematiksel ilişkinin farklı durumlarda geçerli olup olmayacağını zihninde canlandırmıştır. Ancak bu ifadelerin ispata hiçbir katkısı olmadığını ve bu yaptıklarının bir ispat niteliği taşımadığını ispat sürecinde fark edememiştir. Klinik mülakat esnasında ise ispat için izlediği adımları tahmini olarak yazdığını ve yapılanların bir ispat olarak nitelendirilemeyeceğini ifade etmiştir. ÖA4 kodlu öğretmen adayı ile yapılan görüşmeye yönelik bir kesit aşağıda sunulmuştur:

*Araştırmacı:* *İkinci problemde ispat için neler yaptın?*

*ÖA4:* *İkinci problem biraz tahminen oldu. Önce F ile E'yi birleştirdim. Ondan sonra ortadaki üçgenler belli yani aynı miktarda… Mesela şöyle söylersem DF ile FC ve AE ile EB eşit DTA ile FTE aynı şekilde büyümüş DC ve AB doğru parçalarının uzantısı boyunca FHE ile BHC aynı şekilde küçülmüş. Dolayısıyla bunlar aynı oranda büyüyor, aynı* *oranda küçülüyor. O yüzden FTE ile FHE alanlarının toplamı DTA ile CHB alanlarının toplamına eşittir.*

*Araştırmacı:* *Zihninde bir canlandırma yaparak mı böyle bir şey söyledin?*

*ÖA4:* *Mantıken bir şeyler söylemeye çalıştım.*

*Araştırmacı:* *Peki, buna bir ispat diyebilir miyiz?*

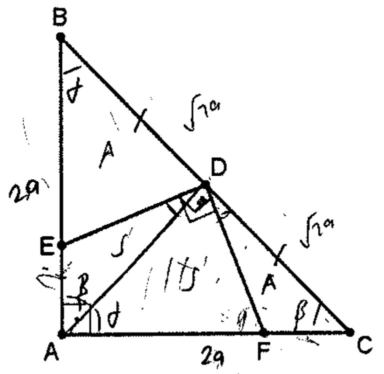
*ÖA4:* *Diyemeyiz ama hani görüşümü belirtmek istedim.*

ÖA4 kodlu öğretmen adayının konuşmasından, bu soru için yaptıklarının bir ispat olarak nitelendirilemeyeceğini mülakat esnasında fark ettiği anlaşılmaktadır. Ayrıca bunu yapma sebebinin, ispat için izleyeceği adımları belirleyememesi ile birlikte boş bırakmayıp bir şeyler yapmak adına olduğu açıkça görülmektedir.

Muhakeme süreci bakımından MHS1 kategorisinde yer alan ispatlar, deney grubunda % 31,78 oranında iken kontrol grubunda % 36,31 oranında olduğu görülmüştür. Dolayısıyla deney grubunda daha az ortaya çıkmakla birlikte bu grupta muhakeme süreci kategorileri arasında çoğunluğa sahip olduğu anlaşılmaktadır. MHS1 kategorisinde yer alan ispatların büyük bir çoğunluğunun ise birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunma göstergesine ait olduğu ile birlikte her iki grupta da bu durumun geçerli olduğu belirlenmiştir. Çıkarımlarını özel durum üzerinden yürüterek yetersiz gerekçelendirmeler yapma göstergesinin grupların her ikisinde de yakın oranlara sahip olduğu görülmüştür. Bununla birlikte grupların her birinde bu kategori içinde hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunma göstergesinin en az ortaya çıktığı belirlenmiştir. Bu göstergeye yönelik ispatlar deney grubunda bu kategori içinde en az ortaya çıkan durum olmakla birlikte bütün göstergeler dikkate alındığında da en az yapılan ispatlar olduğu görülmüştür.

Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunarak MHS1a göstergesinde yer alan ispatlar kontrol grubunda biraz daha fazla görülmekle birlikte deney grubunda % 23,7; kontrol grubunda ise % 27,68 oranında ortaya çıkmıştır. MHS1a göstergesine yönelik deney grubunda yer alan ÖA5 kodlu öğretmen adayının yaptığı ispata Şekil 29’da yer verilmiştir.

3.




ABC ikizkenar dik üçgeninin hipotenüsünün orta noktası D'dir. [AB] ve [AC] kenarları üzerinde sırasıyla E ve F noktaları $m(\widehat{EDF}) = 90^0$ olacak şekilde alınıyor. A(ABC) = 2.A(AEDF) olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.

**Verilenler:** ABC ikiz kenar üçgen
$m(E\hat{D}F) = 90°$

**İstenenler:** A(ABC) = 2 A(AEDF)

**İspat:** (1) |AC| = |AB| = 2a
|BD| = |DC| = √2a
A(BED) = A(DFC) (Aynı kenar)
(2) $\overset{\Delta}{BDA} \cong \overset{\Delta}{CDA}$ (K.A.K)
(3) A(DAF) = A(DAE) = S
(4) A(ABC) = 2.A(AEDF)
2S + 2A = 2.(A+S)

Şekil 29. MHS1a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 29'da görüldüğü gibi öğretmen adayı A köşesinden BC kenarına bir dikme indirmiş ve ABC üçgeninin ikizkenar olmasından yararlanarak bu dikmenin BC kenarı ile D noktasında kesişeceğini doğru bir şekilde belirlemiştir. Bunun dışında ABC, BDA ve CDA üçgenlerinin kenar uzunluklarını uygun bir şekilde harflendirip BDA ve CDA üçgenlerinin eş olduklarına yönelik doğru bir çıkarımda bulunmuştur. Ancak DAE ile DAF ve BED ile DFC üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu belirterek hatalı bir çıkarım sunmuştur. Dolayısıyla öğretmen adayı birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunarak MHS1 kategorisinde yer alan bir ispat yapmıştır. Öğretmen adayı sınav esnasında ADB ile ADC üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu belirlemesiyle diğer üçgenlerin alanlarının eşit olduğunu sadece tabanlarının aynı olmasına bağlı olarak belirtmiştir. Klinik mülakat esnasında ise bu durumu fark ederek gerçekte eşit alanlara sahip olan üçgenleri belirleyip bu alanların neden eşit olduğuna yönelik uygun bir gerekçe sunmuştur. Bu konuşmaya yönelik bir kesit şu şekildedir:

*Araştırmacı:* *Burada BED ile DFC ve DEA ile DAF üçgenlerinin eşit olduğuna nasıl karar verdin?*

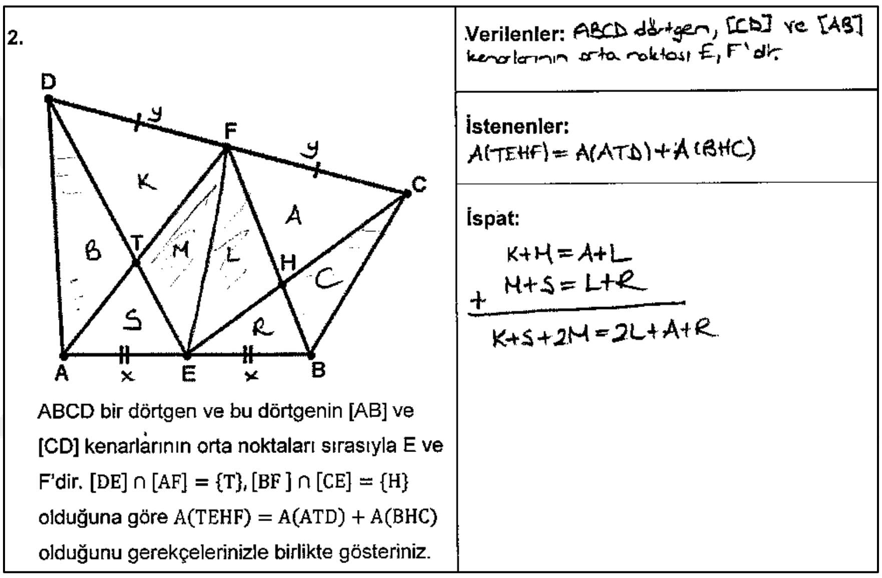
*ÖA5:* *Yine yanlış yapmışım. BED ile DFC üçgenlerin tabanlarına bakarak eşit dedim. BDA ile ADC üçgenlerinin alanları da eşit olunca DEA ile DAF üçgenleri de eşit oldu.*

*Araştırmacı:* *Peki, nasıl olmalıydı?*

ÖA5: *EAD açısı $\beta$, DCA açısı $\beta$, EDA ile FDC açıları da eşit geliyor. O zaman ADE ile CDF üçgenleri eş oluyor. Alanları da eşit oluyor. Diğer üçgenlerin alanları da eşit olunca ulaşıyoruz.*

ÖA5 kodlu öğretmen adayı, sınav esnasında doğru ve hatalı çıkarımları birlikte ifade ederek matematiksel ilişkinin ispatını tamamlamıştır. Ancak klinik mülakat esnasında hatalı çıkarımlarının farkına vararak bu çıkarımlarını uygun gerekçelerle birlikte sunabilmiştir.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan öğretmen adaylarından ÖA17 kodlu öğretmen adayının MHS1a göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 30'da sunulmuştur.

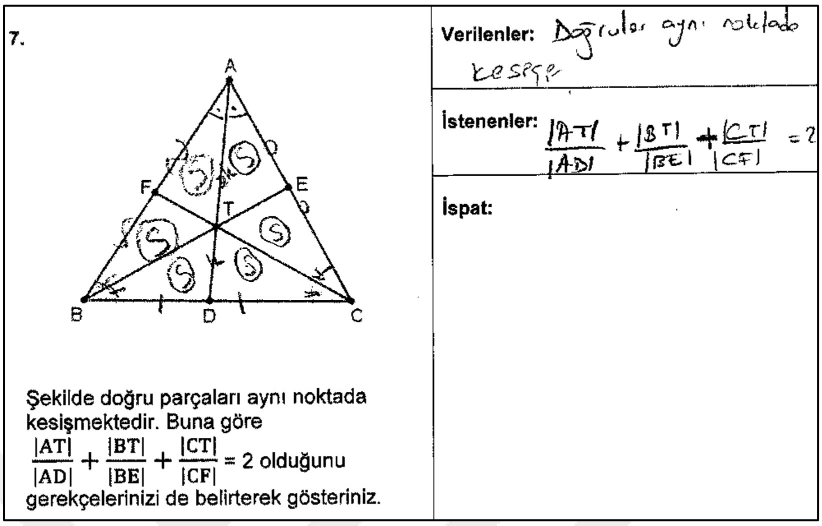



Şekil 30. MHS1a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 30 incelendiğinde öğretmen adayı E ile F noktalarının bulundukları kenarların orta noktası olması ve üçgenlerin yükseklik uzunluklarının eşit olmasından yararlanarak DEF ile EFC ve AEF ile EFB üçgenlerinin alanlarının eşit olduğuna yönelik çıkarımlarda bulunmuştur. Bu çıkarımlarını üçgenlerin alanlarına yönelik harflendirmeler yaparak K + M = A + L ve M + S = L + R şeklinde ifade etmiştir. Öğretmen adayı bu çıkarımlarını tabanı ve yüksekliği aynı olan üçgenlerin alanlarının eşit olmasına dayanarak ileri sürmüştür. İspatın devamını getirmek için bunlardan farklı çıkarımlarda bulunmayıp üçgenlerin alanları ile ilgili aynı tür doğru bir çıkarımda bulunmuştur. Dolayısıyla öğretmen adayı birbirinden bağımsız en az bir doğru çıkarımda bulunarak ispata devam etmemiştir.

Öğretmen adaylarının çıkarımlarını özel durumlar üzerinden yürüterek yetersiz gerekçelendirmeler yaptıkları durumlar, deney grubunda % 7,3 ve kontrol grubunda % 6,55 gibi yakın bir oranda ortaya çıkmıştır. Grupların sahip olduğu oranlara bağlı olarak

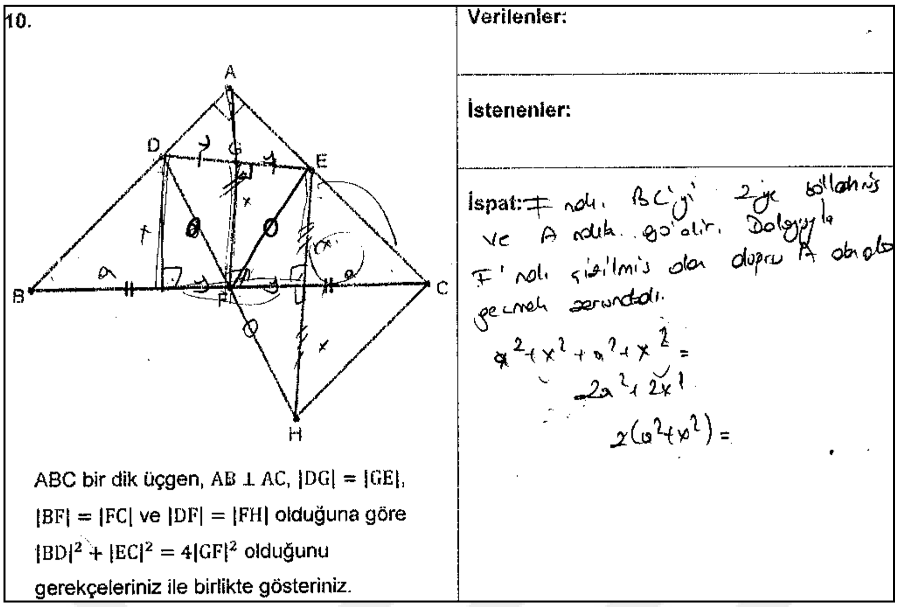
MHS1b göstergesi, bu kategori içinde MHS1a göstergesinden sonra en fazla ortaya çıkan durumdur. Deney grubunda yer alan ÖA7 kodlu öğretmen adayının MHS1b göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 31'de sunulmuştur.




Şekil 31. MHS1b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 31'de görüldüğü gibi öğretmen adayı problemde bu yönde bir bilgi verilmemesine rağmen AD, BE, CF doğru parçalarını kenarortay, T noktasını ise ağırlık merkezi olarak kabul etmiştir. Bu kabullerine dayanarak geometrik şekil üzerinde T noktasının A köşesine uzaklığı ile BC kenarına olan uzaklığı arasındaki oranın 2 olduğuna yönelik harflendirmeler yapmıştır. Bunun yanı sıra AD, BE, CF doğru parçalarını kenarortay olarak kabul etmesiyle birlikte bu doğru parçalarının kesişmesiyle oluşan üçgenlerin alanlarının eşit olduğuna yönelik bir çıkarımda bulunmuştur. Dolayısıyla öğretmen adayı herhangi bir gerekçe sunmaksızın özel bir duruma dayalı olarak çıkarımlarda bulunup ispata devam etmemiştir.

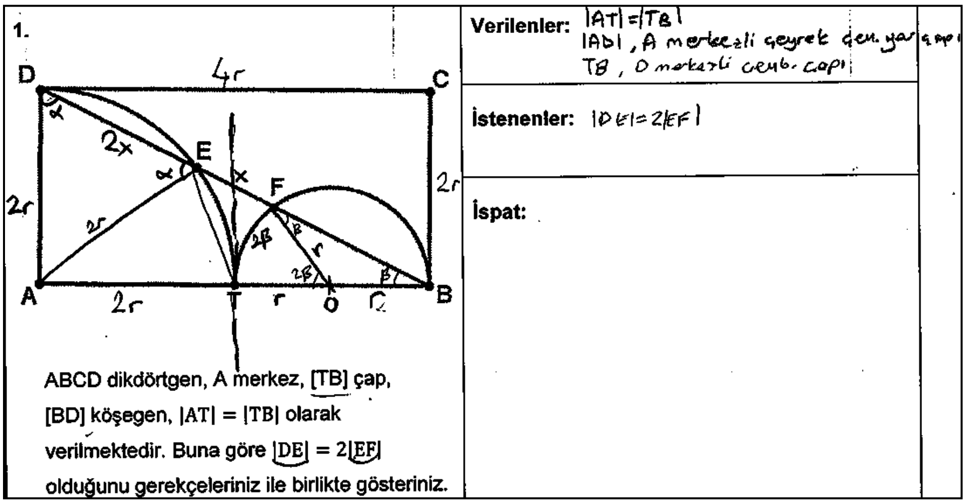
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA60 kodlu öğretmen adayının çıkarımlarını özel durumlar üzerinden yürüterek yetersiz çıkarımlarda bulunması sonucunda MHS1b göstergesinde yer alan ispatına Şekil 32'de yer verilmiştir.




Şekil 32. MHS1b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 32'de görüldüğü gibi öğretmen adayı DE kenarının iki eşit parçaya bölündüğünün verilmesi üzerine FG ile DE doğru parçalarının birbirine dik olacağını düşünmüştür. İki eşit parçaya bölündüğü belirtilen bütün kenarlar için bu tür çıkarımlarda bulunmuştur. Ayrıca AG ile GF doğrularının birbiriyle çakışacağını ileri sürmüştür. BC kenarının iki eşit parçaya bölünmesi ve FG ile DE doğru parçalarının dik olduğunu belirtmesi bu düşüncesinde etkili olmuştur. Öğretmen adayının ifade ettiği çıkarımların her biri ABC üçgeninin ikizkenar ve DE ile BC kenarlarının paralel olması durumunda gerçekleşebilmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayı ispatında bu özel duruma dayalı birçok çıkarımda bulunmuş ve yetersiz bir gerekçelendirme yaparak ispatı tamamlayamamıştır.

Hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulundukları durumların deney grubunda % 0,78 ve kontrol grubunda % 2,08'lik bir orana sahip olması kontrol grubunda daha fazla ortaya çıktığını göstermektedir. Deney grubunda bu tür durumların hem MHS1 kategorisi içerisinde hem de diğer kategorilerin göstergeleri arasında en az görülen ispatlar olduğu fark edilmiştir. Öğretmen adaylarının hükümden başlayarak belirttikleri çıkarımlar, genellikle ispat edilmesi istenen matematiksel ilişkiyi verilenler şeklinde yerleştirme ile birlikte çıkarımda bulunup ispata devam etmeme şeklindedir. Kontrol grubunda yer alan ÖA51 kodlu öğretmen adayının MHS1c göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 33'te sunulmuştur.

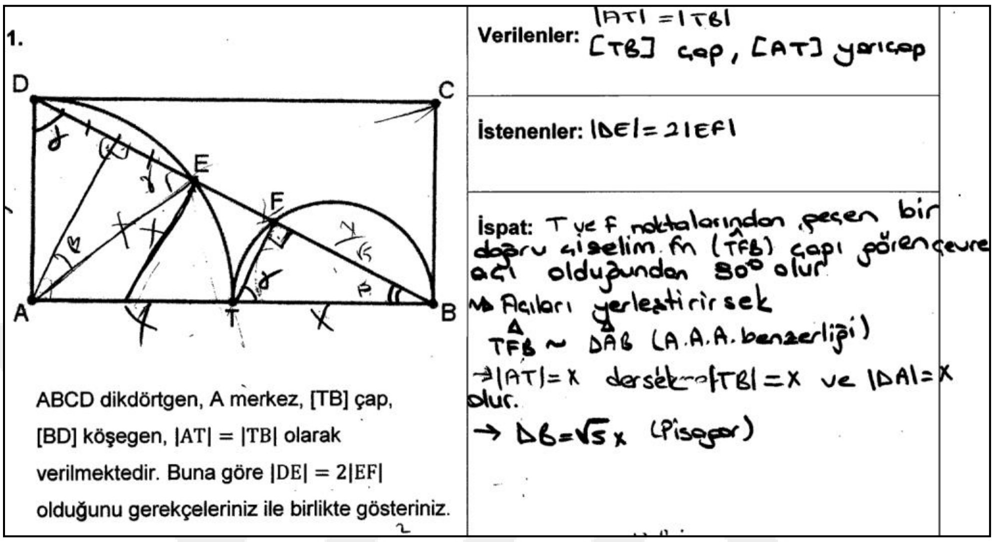



Şekil 33. MHS1c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 33'te görüldüğü gibi öğretmen adayı çemberlerin yarıçaplarını verilenlere dayalı olarak harflendirmiştir. E ile A noktalarını birleştirerek oluşan doğru parçasının uzunluğunu 2r olarak belirlemiş ve ADE üçgeninin ikizkenar olduğunu fark ederek eşit olan açı ölçülerini ifade etmiştir. Aynı durumu O ile F noktalarını birleştirerek oluşan doğru parçası ve üçgen için de yapmıştır. Öğretmen adayı yaptığı ek çizimler ve verilenlere dayalı olarak uygun çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak $|DE| = 2|EF|$ olduğuna yönelik bir ispat yapılması istenirken bu ifade bir verilen gibi kullanılarak geometrik şekil üzerinde gösterilmiştir.

MHS2 kategorisinde yer alan ispatların deney grubunda % 27,08 oranında ortaya çıkması, MHS1 kategorisinden sonra en fazla karşılaşılan durumlar olduğunu göstermektedir. Kontrol grubunda ise bu kategoriye yönelik ispatların % 12,2 oranına sahip olması, deney grubuna göre daha az karşılaşılan ispatlar olduğunu ortaya koymaktadır. MHS2 kategorisinin göstergeleri açısından bakıldığında deney grubunda daha fazla görülmekle birlikte birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaşamadıkları durumların her iki grupta da çoğunlukta olduğu görülmektedir. Grupların her ikisinde de özel durumlar üzerinden ispat yaptıkları durumlara rastlanmakla birlikte deney grubunda bu tür ispatlara daha fazla rastlandığı görülmüştür. İspat aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeyip ya da yanlış gerekçelendirerek sonuca ulaştıkları durumların ise her iki grupta da bu kategori içerisinde en az rastlanan durumlar olduğu belirlenmiştir. Ancak muhakeme sürecinde yer alan kategorilerin bütün göstergeleri dikkate alındığında kontrol grubu tarafından en az yapılan ispatlardan biri olduğu fark edilmiştir.

Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunarak sonuca ulaşma göstergesine yönelik ispatlar deney grubunda % 15,36, kontrol grubunda ise % 7,44 oranla MHS2 kategorisi içerisinde çoğunlukla görülen durumlardır. Ancak kontrol grubunda MHS2a göstergesinde yer alan ispatların oranı, deney grubunun yaklaşık olarak yarısı kadardır. Deney grubunda yer alan ÖA27 kodlu öğretmen adayının MHS2a göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 34'te sunulmuştur.




Şekil 34. MHS2a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 34'te görüldüğü gibi öğretmen adayı TB doğru parçasının çap olmasından yararlanarak "*Çapı gören çevre açı olduğundan*" şeklindeki gerekçesiyle TFB açısının $90^{\circ}$ olduğuna yönelik çıkarımda bulunmuştur. Açıları yerleştirip TFB ile DAB üçgenlerinin açı-açı-açı benzerlik teoreminden benzer olduğunu belirtmiş ve Pisagor bağıntısını kullanarak DB kenarının uzunluğunu bulmuştur. Dolayısıyla öğretmen adayı ardı ardına birbirini destekleyen birçok çıkarımda bulunmuştur. Ancak ispatın tamamlanmasını sağlayacak olan diğer çıkarımları bulamayıp ispat sürecine devam etmemiştir. Öğretmen adayı, ispata devam etmeme nedenlerini şu şekilde açıklamıştır:

*Araştırmacı:* *İspata neden devam etmedin?*

*ÖA27:* *Çok şeyler denedim ama olmadı. Sadece TFB üçgeni ile DAB üçgeni arasında açı-açı-açı benzerliğini buldum.*

*Araştırmacı:* *Başka?*

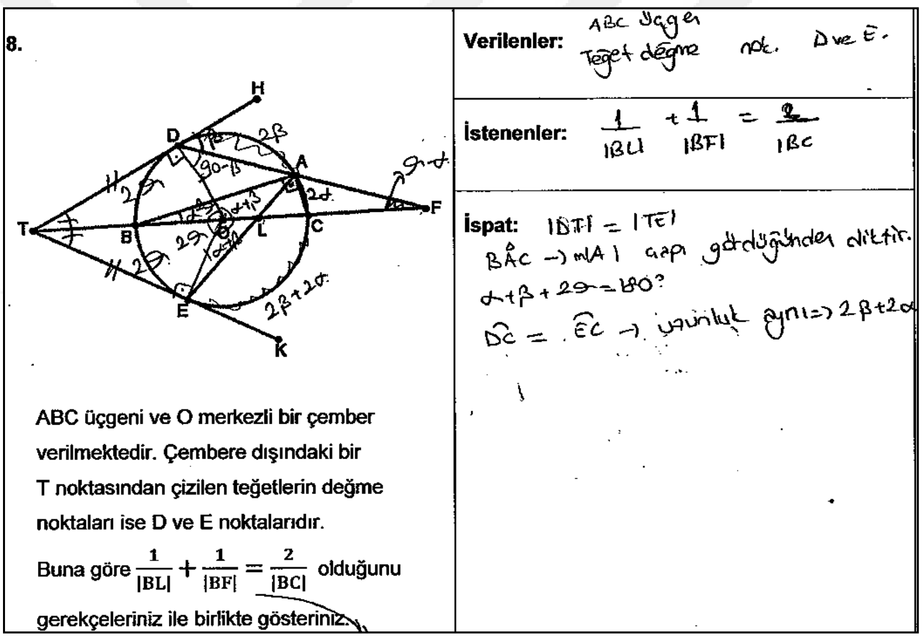
*ÖA27:* *ADE ikizkenar üçgen olunca A köşesinden dik indim ve DE'yi iki parçaya böldüm. E ile T 'yi birleştirdim EF kenarı arada kaldı. O çizdiğim dikmenin uzunluğu bulunacak falan uzun geldi.*

*Araştırmacı:* *Gerçekten uzun mu olur diye devam etmedin? Şu an yapabilir misin?*

*ÖA27:* *Aa şimdi fark ettim. DE'yi ikiye bölen yere H dersek AHE ile BFT üçgenleri eş oluyor. Oradan da geliyor. Ben o zaman çok saçma şeyler düşünmüşüm. Ben çok fazla şuradan çizdim burayı buldum. Bir sürü bir şey…*

Yukarıdan belirtilen konuşmalardan, ÖA27 kodlu öğretmen adayının ispata başlama girişimlerinin sonuç vermemesi ve ispatı tamamlamasının uzun süreceğini düşünmesi, ispata devam etmesini engellediği anlaşılmaktadır. Ancak klinik mülakat esnasında böyle düşünmesinin gereksiz olduğunu anlayarak ispat için gerekli olan tüm adımları belirleyebildiği açıkça görülmektedir.

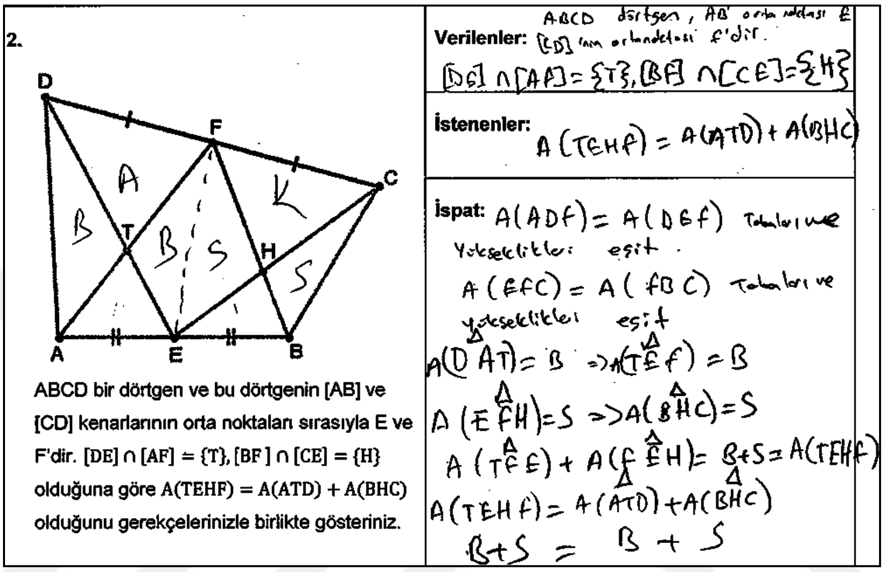
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA43 kodlu öğretmen adayının birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunarak MHS2a göstergesinde yer alan ispatı Şekil 35'te sunulmuştur.




Şekil 35. MHS2a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 35'ten görüldüğü üzere görüldüğü üzere T noktasından çembere teğet çizilmesine dayalı olarak $|DT| = |TE|$ şeklinde bir çıkarımda bulunmuştur. Çemberin merkezinden teğete çizilen doğru parçalarının dik olmasından yararlanarak TDO ile TEO açılarının ölçülerini $90^{\circ}$ olarak belirlemiştir. TF doğru parçasının çemberin merkezinden geçmesine bağlı olarak DTO ile ETO açılarının eşit olduğuna yönelik çıkarımda bulunmuştur. Bunun üzerine DB ile BE, DC ile EC yaylarının ölçülerinin eşit olduğunu ifade etmiştir. Bunun yanı sıra BAC açısının çemberin çapını gördüğüne yönelik bir gerekçe sunarak bu açının ölçüsünün $90^{\circ}$ olduğunu ileri sürmüştür. Dolayısıyla öğretmen adayı ardı ardına birbirini destekleyen birçok çıkarımda bulunmuştur. Ancak ispatı tamamlamasını sağlayacak çıkarımları bulamayıp ispatı yarıda bırakmıştır.

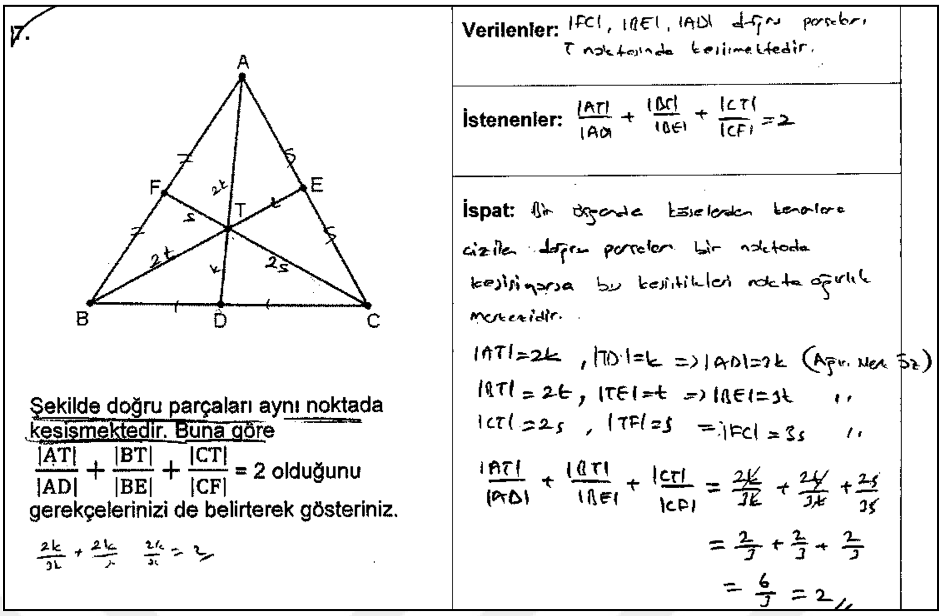
Özel durumları ele alarak sonuca ulaştıkları durumlar, deney grubunda % 6,51 ve kontrol grubunda % 3,27 oranında gerçekleşmekle birlikte deney grubunda daha fazla bir oranda ortaya çıkmıştır. Kontrol grubunda yer alan ÖA39 kodlu öğretmen adayının MHS2b göstergesine yönelik yaptığı ispata Şekil 36'da yer verilmiştir.




Şekil 36. MHS2b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 36'da görüldüğü gibi öğretmen adayı $\mathrm{A(ADF) = A(DEF), A(EFC) = A(FBC)}$ çıkarımlarına yönelik "*Tabanları ve yükseklikleri eşit*" şeklinde bir gerekçe sunmuştur. Burada öğretmen adayı AB ile CD doğru parçalarının paralel olma durumunu dikkate alarak çıkarımda bulunmuştur. ABCD herhangi bir dörtgen olarak belirtilmesine rağmen bu dörtgeni yamuk olarak kabul etmiştir ve gerekçesini bu özel duruma dayanarak sunup belirtilen matematiksel ilişkinin ispatını tam anlamıyla yaptığına yönelik düşünceye kapılmıştır.

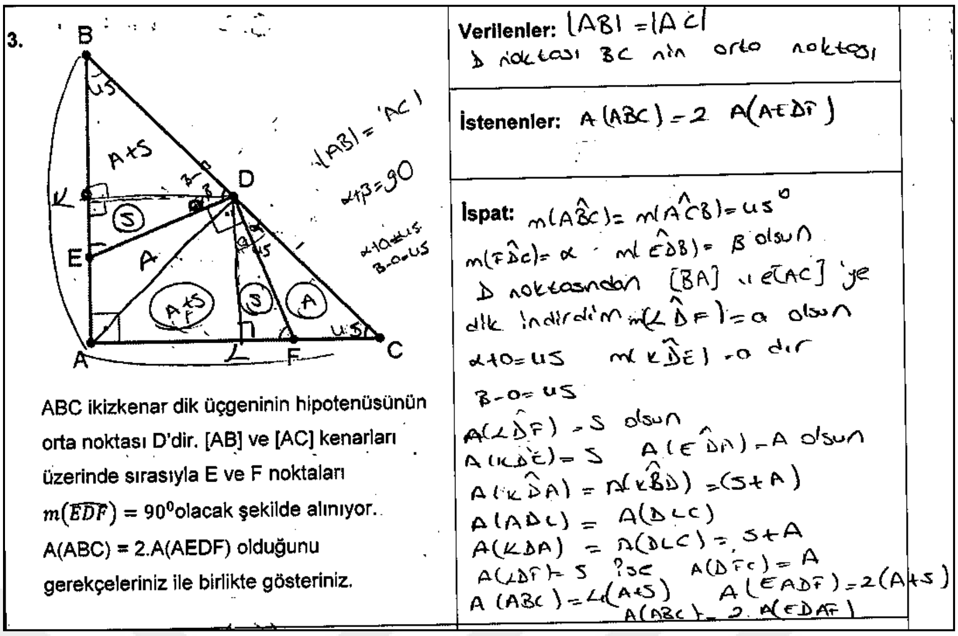
Benzer bir şekilde deney grubunda yer alan ÖA12 kodlu öğretmen adayının özel durumlar üzerinden sonuca ulaşmaları sonucunda MHS2b göstergesinde yer alan ispatı Şekil 37'de sunulmuştur.




Şekil 37. MHS2b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 37 incelendiğinde öğretmen adayı AD, BE, CF doğru parçalarının T noktasında kesiştiği bilgisi üzerine bu doğru parçalarını kenarortay, T noktasını ise ağırlık merkezi olarak kabul etmiştir. Bu kabulüyle birlikte T noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklığı ile kenarlara olan uzaklığı arasındaki oranın 2 olduğunu varsayarak ispat edilmesi istenen matematiksel ilişkinin geçerli olduğuna ulaşıp ispatını tamamlamıştır. Öğretmen adayı bu ispatında T noktasını herhangi bir nokta olarak değil, ağırlık merkezi olarak kabul ederek bir özel durum için ispatını yapmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı ispat yaparken sadece özel bir durumu ele alarak bütün durumlara hitap edebilecek bir ispat yapamamıştır.

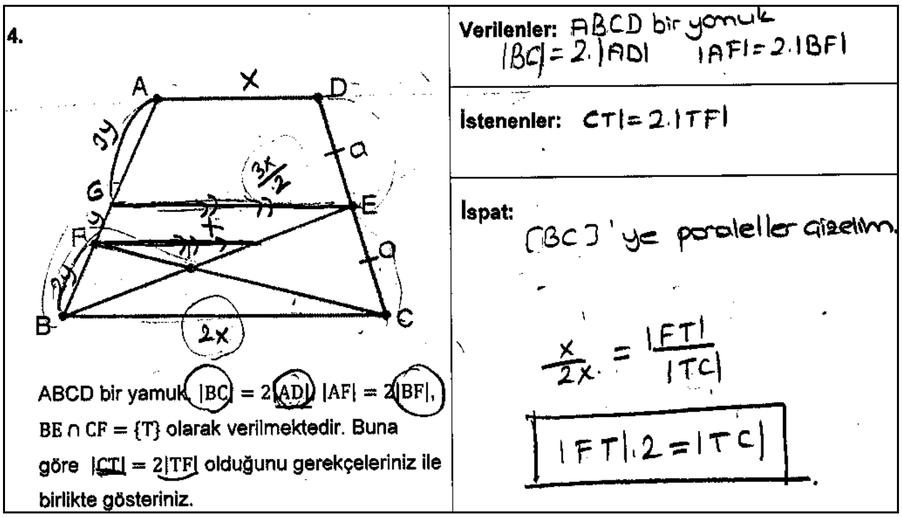
Öğretmen adayları ispat sürecindeki aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeyip ya da yanlış gerekçelendirerek sonuca ulaştıkları durumlar deney grubunda % 5,21; kontrol grubunda ise % 1,49 oranında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla deney grubunda bu tür ispatları, kontrol grubuna göre daha fazla yapmıştır. Bütün kategorilerde yer alan göstergeler dikkate alındığında kontrol grubunda ise bu tür ispatlar en az yapılan ispatlardan biridir. Deney grubunda yer alan ÖA23 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde sundukları çıkarımları formal olarak gerekçelendirmemesi sonucunda MHS2c göstergesinde yer alan ispatına Şekil 38'de yer verilmiştir.




Şekil 38. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 38'den görüldüğü üzere öğretmen adayı $\mathrm{m}(\widehat{ABC}) = \mathrm{m}(\widehat{ACB}) = 45^{\circ}$ olduğunu belirtmiştir. Ardından alanlar ve açı ölçülerine yönelik harflendirme yaparak $\mathrm{A(KDA)} = \mathrm{A(KBD)} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$, $\mathrm{A(ADL)} = \mathrm{A(DLC)}$, $\mathrm{A(KDA)} = \mathrm{A(DLC)} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$ olduğunu ifade etmiştir. Belirttiklerine dayalı olarak ABC üçgeni ve EADF dörtgeninin alanlarının temsili olarak neye eşit olduğuna yönelik çıkarımda bulunmuştur. Öğretmen adayı çıkarımda bulunmasını sağlayan durumlar ile ilgili geometrik şekil üzerinde eşitlikleri belirleyip gösterimlerde bulunmuştur. Dolayısıyla ispata yönelik bütün çıkarımları sunmasına rağmen açı ölçüleri ve alan eşitliklerini neye göre yazdığı hakkında formal olarak bir gerekçe belirtmeden ispatı tamamlamıştır.

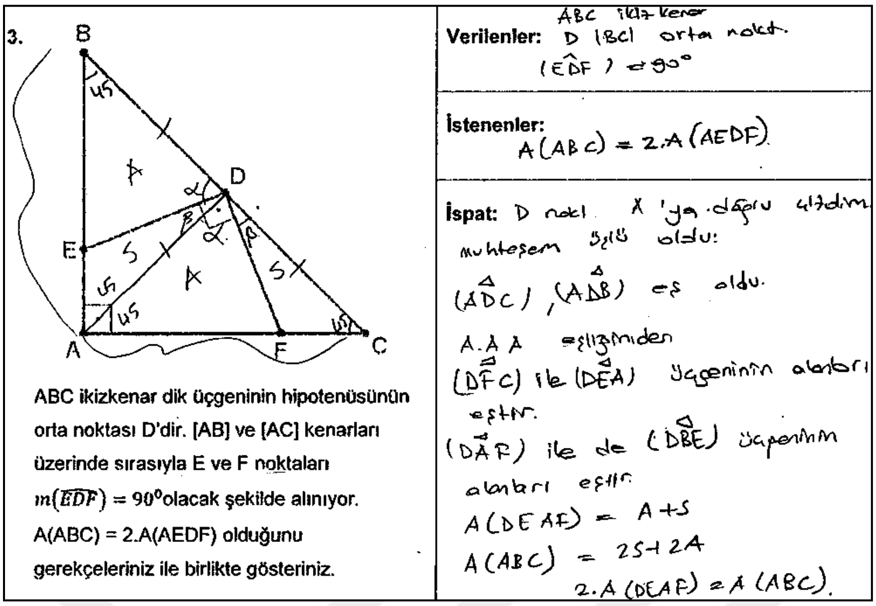
Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA13 kodlu öğretmen adayının ispat aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeyip sonuca ulaşması ile MHS2c göstergesinde yer alan ispatı Şekil 39'da sunulmuştur.




Şekil 39. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 39 incelendiğinde öğretmen adayı $|AG| = 3y, |GF| = y, |FB| = 2y$ olarak AB kenarını ayırmıştır. Ancak bu ayırma işlemini neye göre yaptığı hakkında herhangi bir gerekçe sunmamıştır. Bunun üzerine GE doğru parçasının ABCD yamuğunun orta tabanı olduğunu belirtmeden $|GE| = \frac{3x}{2}$ olduğunu ifade etmiş ve FT ile TC doğru parçalarının uzunluklarını oranlayıp karşılık gelen değere nasıl ulaştığı konusunda herhangi bir şey belirtmemiştir. Öğretmen adayı ek çizimler yaparak doğru parçalarına yönelik çeşitli değerler bulmuştur. Ancak bunlara nasıl ulaştığı konusunda formal bir gerekçe sunmayıp geometrik şekil üzerindeki gösterimlerle yetinerek ispatı tamamlamıştır.

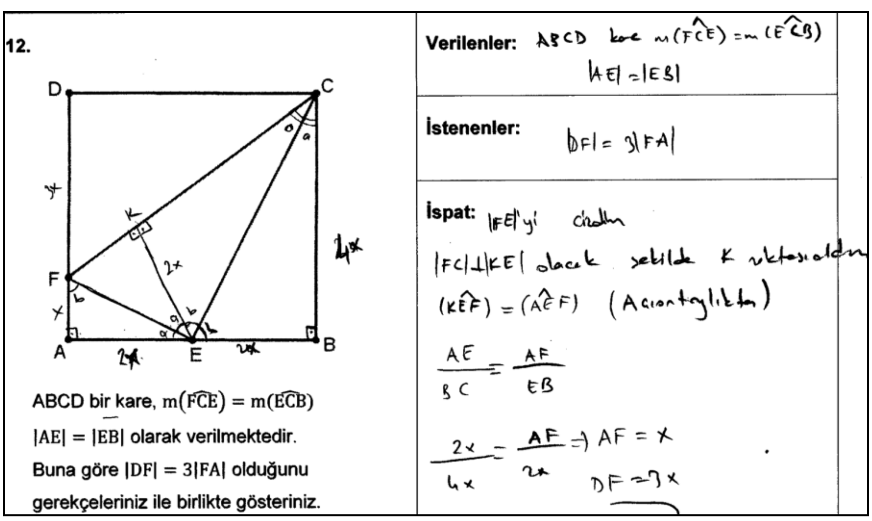
Matematiksel bir ilişkinin ispatı için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bu çıkarımlara yönelik gerekçeler sunma konusunda hatalar yaparak sonuca ulaşılan durumlar da MHS2c göstergesinde yer almaktadır. Bu tür durumlar, öğretmen adaylarının çıkarımlarına yönelik formal olarak gerekçe sunmama durumlarına göre azınlıktadır. Deney grubunda yer alan ÖA25 kodlu öğretmen adayının ispat sürecindeki aşamalara yönelik hatalı gerekçelendirmeler yaparak sonuca ulaşması ile MHS2c göstergesinde yer alan ispatı Şekil 40'da sunulmuştur.




Şekil 40. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 40'dan görüldüğü gibi öğretmen adayı ADC ile ADB üçgenlerinin eş olduğunu ve DAF ile DBE üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu belirtip bu çıkarımlara yönelik gerekçe sunmamıştır. DFC ile DEA üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu ise "*A.A.A eşliğinden…*" şeklindeki bir gerekçe ile belirtmiştir. Öğretmen adayı üçgenlerin sadece açılarına bakarak benzer olduğundan bahsedip eş olduğunun belirtilemeyeceğinin farkına varamayıp hatalı bir gerekçe sunmuştur.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA8 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde ileri sürdükleri çıkarımlara hatalı gerekçeler sunarak sonuca ulaşması ile MHS2c göstergesinde yer alan ispatına Şekil 41'de yer verilmiştir.

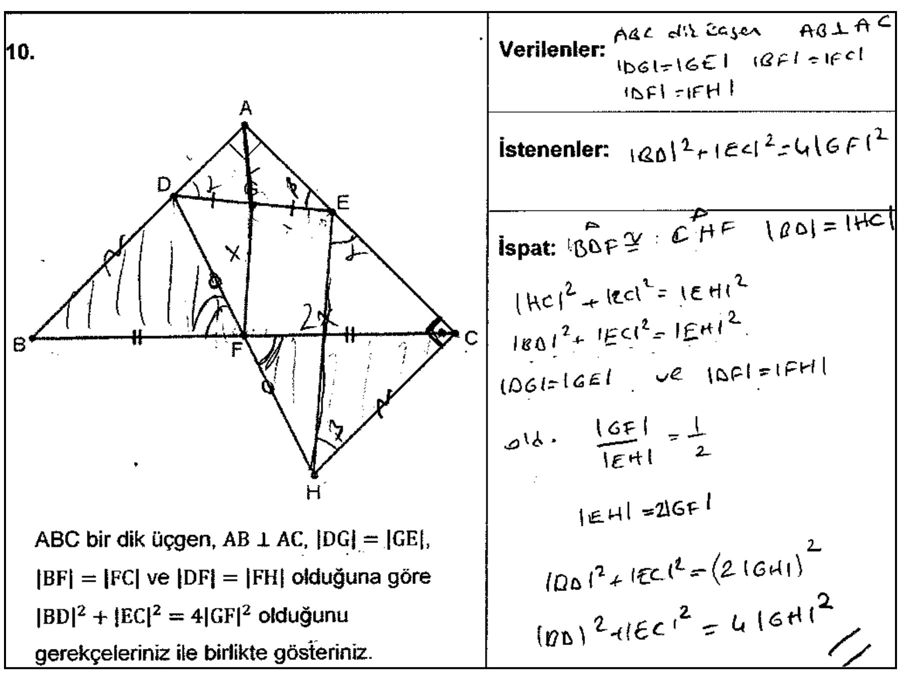



Şekil 41. MHS2c göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 41’den görüldüğü üzere öğretmen adayı E noktasından FC kenarına bir dikme inmiştir. Açıortaydan açının kollarına indirilen dikmelerin eşitliğinden yararlanarak KE ile EB doğru parçalarını eşit olarak belirlemiştir. Bu eşitliği belirtirken herhangi bir gerekçe sunmamıştır. KEF ile AEF açı ölçülerinin eşit olduğunu belirtirken ise “*Açıortaylıktan*” diye bir gerekçe sunmuştur. Ancak bu gerekçe belirtilen açı ölçülerinin eşit olduğunu açıklamamaktadır. Ayrıca EF doğru parçasının açıortay olup olmadığı bilinmemekte ve EC doğru parçasının açıortay olması bu durumu açıklamak için yeterli olmamaktadır.

Muhakeme süreci boyutunda yer alan MHS3 kategorisinde yer alan ispatlar, deney grubunda % 16,92 ve kontrol grubunda % 6,55 oranında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla kontrol grubunda bu kategorisine dâhil olan ispatlar, deney grubuna göre oldukça az bir oranda yer almaktadır. MHS3 kategorisinde yer alan ispatların büyük bir çoğunluğunu, deney grubunda daha fazla olmak üzere her iki grupta da ispat sürecindeki aşamalarının bir kısmına yönelik gerekçeler sunarak sonuca ulaştığı durumlar oluşturmaktadır. İspat sürecindeki aşamaların önemli bir kısmını gerekçelendirip sözcük ya da teoremlerin isimlendirilmesinde hataların olduğu ispatlar oldukça sınırlı sayıda ortaya çıkmakla birlikte sadece deney grubunda görülmüştür.

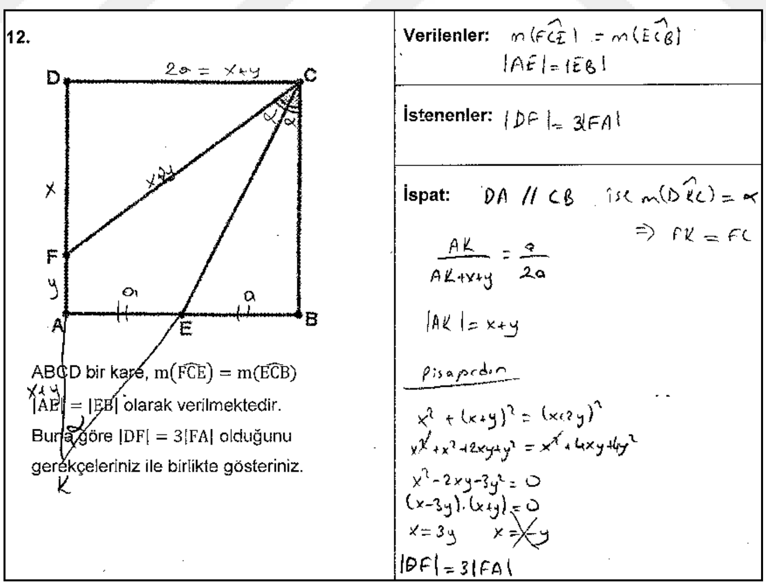
İspat aşamalarının bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmeyip sonuca ulaştıkları ispatların deney grubunda % 15,88; kontrol grubunda ise % 6,55 oranında ortaya çıktığı belirlenmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA2 kodlu öğretmen adayının MHS3a göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 42’de sunulmuştur.




Şekil 42. MHS3a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 42’de görüldüğü gibi öğretmen adayı BDF ile CHF üçgenlerinin eş olduğunu belirtmiş ve geometrik şekil üzerinde de kenar uzunlukları ile açı ölçülerine yönelik eşitlikleri ifade eden gösterimlerde bulunmuştur. Bu üçgenlerin eş olmasına dayalı olarak BD ile HC kenar uzunluklarının eşit olduğunu belirtmesine rağmen üçgenlerin neden eş olduklarına yönelik herhangi bir gerekçe sunmamıştır. Bunun dışında öğretmen adayı geometrik şekil üzerinde HCE açısının ölçüsünü $90^{\circ}$ olarak göstererek $|\mathrm{HC}|^2 + |\mathrm{EC}|^2 = |\mathrm{EH}|^2$ ifadesini yazmıştır. Ancak HCE açısının ölçüsünün neden $90^{\circ}$ olduğu ya da belirtilen ifadeyi niçin yazdığına yönelik herhangi bir şey ifade etmemiştir. Ancak $|\mathrm{BD}| = |\mathrm{HC}|$ olduğunu belirterek bu ifade içine yerleştirdiğini ifade eden gösterimlerde bulunmuştur. Ayrıca $|\mathrm{DG}| = |\mathrm{GE}|, |\mathrm{DF}| = |\mathrm{FH}|$ olduğundan bahsederek $\frac{|\mathrm{GF}|}{|\mathrm{EH}|} = \frac{1}{2}$ olduğuna yönelik çıkarımını gerekçesi ile birlikte sunmuştur. Dolayısıyla öğretmen adayı çıkarımlarının bir kısmı için gerekçeler sunup bir kısmı için herhangi bir gerekçe sunmadığı bir ispat yapmıştır.

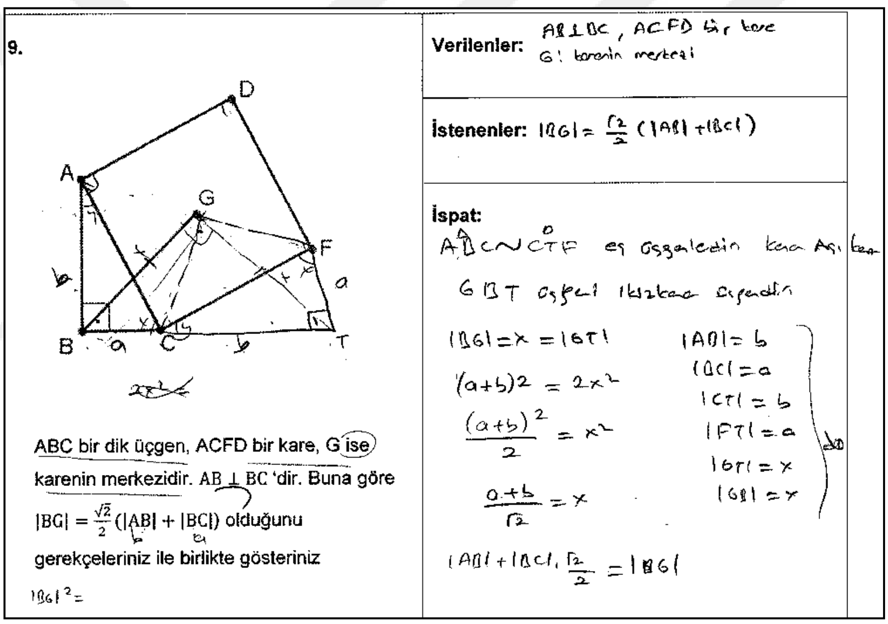
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA54 kodlu öğretmen adayının ispat aşamalarından bazılarını gerekçelendirip bazılarını ise gerekçelendirmeyip ispatını tamamlayarak MHS3a göstergesinde yer alan ispatına Şekil 43’te yer verilmiştir.




Şekil 43. MHS3a göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 43’te görüldüğü gibi öğretmen adayı ABCD dörtgeninin kare olmasından yararlanıp DA ile CB doğru parçasının paralel olduğunu belirterek $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{DKC}}) = \alpha$ olduğunu açıklamıştır. Kendi harflendirmeleri ve ek çizimine göre “$\frac{AK}{AK+x+y} = \frac{a}{2a}$” şeklinde yaptığı işlemi niçin yaptığına yönelik herhangi bir gerekçe sunmamıştır. Kenar uzunluklarına verdiği harflere dayanarak $x^2 + (x + y)^2 = (x + 2y)^2$ şeklinde başladığı işlemi Pisagor teoremine bağlı olarak yaptığını ifade etmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı ispata yönelik sunduğu çıkarımların bir kısmına yönelik gerekçeleri belirtirken çıkarımlarının bir kısmı için herhangi bir gerekçe belirtmemiştir.

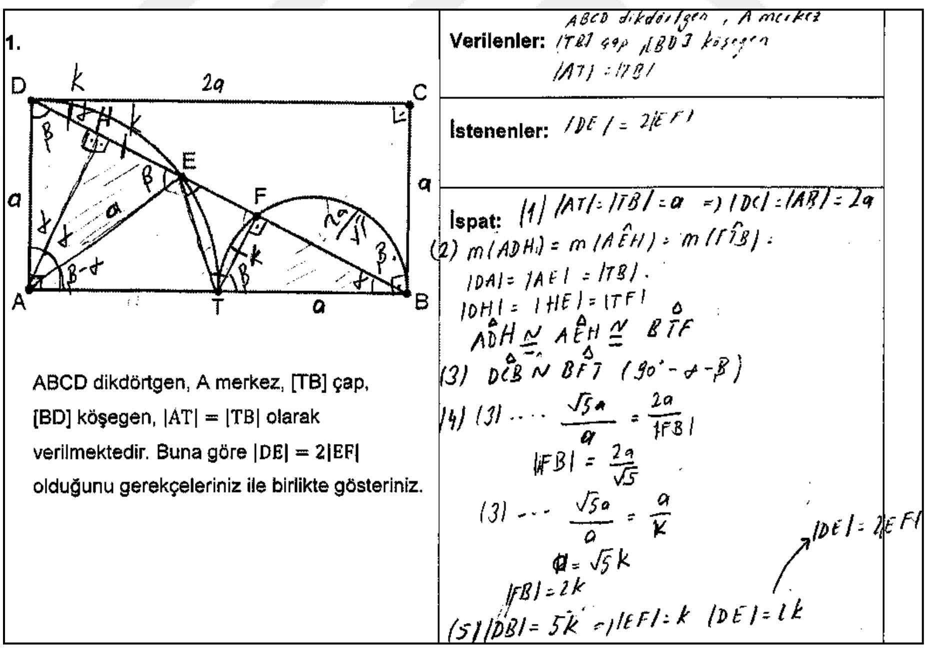
Öğretmen adaylarının ispat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bu çıkarımlarının önemli bir kısmına yönelik gerekçeler sunup gerekçelerin bazılarında sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hataların olduğu ispatlar sadece deney grubunda olmak üzere % 1,04 oranında gerçekleşmiştir. Dolayısıyla deney grubunda MHS3a göstergesine yönelik yapılan ispatlara göre oldukça sınırlı sayıda ortaya çıkmıştır. Deney grubunda yer alan ÖA12 kodlu öğretmen adayının MHS3b göstergesine yönelik yaptığı ispat Şekil 44'te sunulmuştur.




Şekil 44. MHS3b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 44'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı ABC ile CTF üçgenlerinin eş olduğuna yönelik doğru bir çıkarımda bulunmuştur. Ancak bu üçgenlerin eş olduğuna yönelik sunduğu "*Kenar açı kenar*" şeklindeki gerekçesi, çıkarımı ifade etmesini sağlayan bir gerekçe değildir. Öğretmen adayı AB ile CT, BC ile TF kenar uzunluklarının eşit olduğuna ABC ile CTF üçgenlerinin açı kenar açı eşlik teoremine göre ulaşılabilmesine ve kendisi geometrik şekil üzerinde bu yönde gösterimlerde bulunmasına rağmen böyle bir gerekçe sunmuştur. Öğretmen adayının geometrik şekil üzerindeki gösterimlerine dikkat edildiğinde ve ek çizim yaparken açı, kenar uzunlukları belirlemesinin de etkisi altında kalarak teoremin ismini hatalı olarak ifade ettiği anlaşılmaktadır. Bu üçgenlerin eş olmasına dayanarak kenar uzunluklarının eşit olduğundan bahsetmesi ise ispat için uygun bir adımdır. GBT üçgeninin ikizkenar olduğuna yönelik bir gerekçe sunmamıştır. Ancak bu çıkarımına ve harflendirmelerine bağlı olarak yaptığı "$(a+b)^2 = 2x^2$" şeklindeki işlem ispat anlamında uygundur. Dolayısıyla öğretmen adayı ispatında çıkarımlarının birçoğuna yönelik gerekçeler sunmasına rağmen bu gerekçelerden birinde teoremin ismini ifade etmede hata yapmıştır.

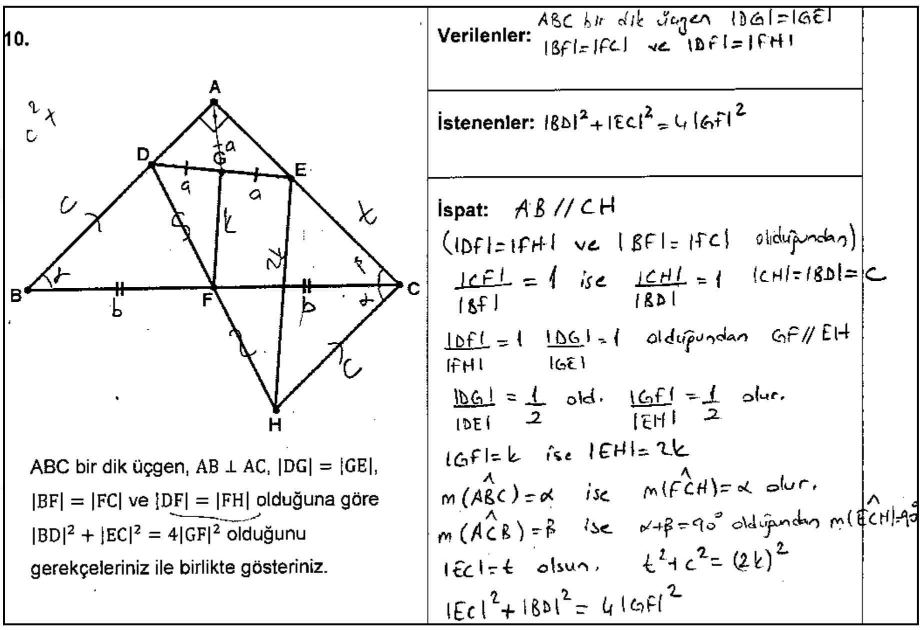
Öğretmen adayları ispat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunup bu çıkarımlara yönelik gerekçeleri eksiksiz bir şekilde belirterek MHS4 kategorisi olarak değerlendirilen ispatlar, deney grubunda % 10,16; kontrol grubunda ise % 1,49 oranında yapılmıştır. Dolayısıyla bu kategoriye yönelik ispatlar, deney grubunda daha fazla bir oranda ortaya çıkmıştır. Ancak diğer kategoride yer alan ispatlara göre her iki grupta da daha az oranda olduğu görülmüştür. Ayrıca kontrol grubunun MHS4 kategorisine yönelik yaptığı ispatların oranı, uygulama öncesi ve sonrası sabit olarak kalmıştır. Deney grubunda ise uygulama öncesi ve sonrası arasında bir artış olduğu fark edilmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA5 kodlu öğretmen adayının MHS4 kategorisine yönelik yaptığı ispat Şekil 45'te sunulmuştur.




Şekil 45. MHS4 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 45'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı kenar uzunluklarına yönelik harflendirmeleri eşitliklere ve dikdörtgenin tanımına göre yapmıştır. Ayrıca eşit olan açı ölçülerini yerleştirmiştir. Bunun sonucunda kenar uzunlukları ve açı ölçülerine yönelik eşitlikleri $\mathrm{m}(\widehat{ADH}) = \mathrm{m}(\widehat{AEH})$, $|DA| = |AE| = |TB|$, $|DH| = |HE| = |TF|$ şeklinde göstererek ADH, AEH ve BTF üçgenlerinin eş olduklarına yönelik uygun bir gerekçe sunmuştur. DCB ile BFT üçgenlerinin benzer olduğunu ise “$90^{\circ}, \alpha, \beta$” şeklinde açı-açı-açı benzerlik teoremini kullandığını ima ederek uygun bir gerekçe ile birlikte belirtmiştir. Kenar uzunlukları arasında yaptığı oranlamaların hangi eş ya da benzer üçgenlere bağlı olarak yaptığını da ifade ederek bu ispat için gerekli olan tüm çıkarımları belirlemiş ve bu çıkarımlara yönelik gerekçeleri sunmuştur. Böylece muhakeme süreci boyutu bakımından değerlendirildiğinde MHS4 kategorisinde yer alan bir ispat oluşturmuştur.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA22 kodlu öğretmen adayının MHS4 kategorisine yönelik yaptığı ispata Şekil 46’da yer verilmiştir.




Şekil 46. MHS4 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 46 incelendiğinde öğretmen adayı DFB ile HFC üçgenlerin kenar uzunlukları arasında aynı oranın olduğunu $|\mathrm{DF}| = |\mathrm{FH}|$, $|\mathrm{BF}| = |\mathrm{FC}|$ şeklinde ifade ederek AB ile CH doğru parçalarının birbirine paralel olduğunu açıklamıştır. Kenar uzunlukları arasındaki oranlar yardımıyla BD ile CH kenarlarının uzunluklarının eşit olduğunu belirterek bu çıkarımına yönelik uygun bir gerekçe sunmuştur. GF ile EH kenarlarının paralel olduğunu kenar uzunlukları arasında olan orana bağlı olarak belirtmesi de bu ispat için uygun bir adımdır. Bu paralelliklere dayalı olarak açı ölçülerini yerleştirerek ECH açısının ölçüsünün $90^{\circ}$ olduğuna yönelik çıkarımını gerekçesiyle birlikte uygun bir şekilde sunmuştur. Bu açı ölçüsüne dayalı olarak Pisagor teoremini uygulaması da ispat için uygun bir adım olmakla birlikte ispatı sonlandıran bir adım olmuştur. Dolayısıyla öğretmen adayı ispat için gerekli olan çıkarımların her birini sunup çıkarımlara yönelik gerekçeleri de eksiksiz olarak belirterek muhakeme süreci bakımından MHS4 kategorisinde nitelendirilen bir ispat oluşturmuştur.

Uygulama sonrası genel olarak öğretmen adaylarının birbirinden bağımsız en az bir doğru çıkarımda bulundukları görülmüştür. Birbirinden bağımsız çıkarımlarda bulundukları durumlardan sonra deney grubunda en çok ispat aşamalarının bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmedikleri durumların olduğu fark edilmiştir. Bu tür ispatlara yakın bir oranda da birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunup sonuca ulaşamadıkları durumların ortaya çıktığı görülmüştür. Kontrol grubunda ise birbirinden bağımsız çıkarımlarda bulunma durumlarından sonra en çok boş bırakma eğiliminde oldukları gözlemlenmiştir. Bununla birlikte boş bırakma ve sadece hipotez ve hükümlerini yazma bakımından deney grubu ile aralarında oldukça fark olduğu dikkat çekmiştir. Uygulama sonrasında grupların yaptıkları ispatlara bütünsel olarak bakıldığında ispat için gerekli olan bütün adımları belirleme ve gerekçeleri sunma bakımından da aralarında farklılıklar olduğu göze çarpmaktadır. Bu farklılıklar, ispat sürecinde muhakemede bulunma bakımından deney grubunda bir gelişimin olduğunu gösterir niteliktedir.

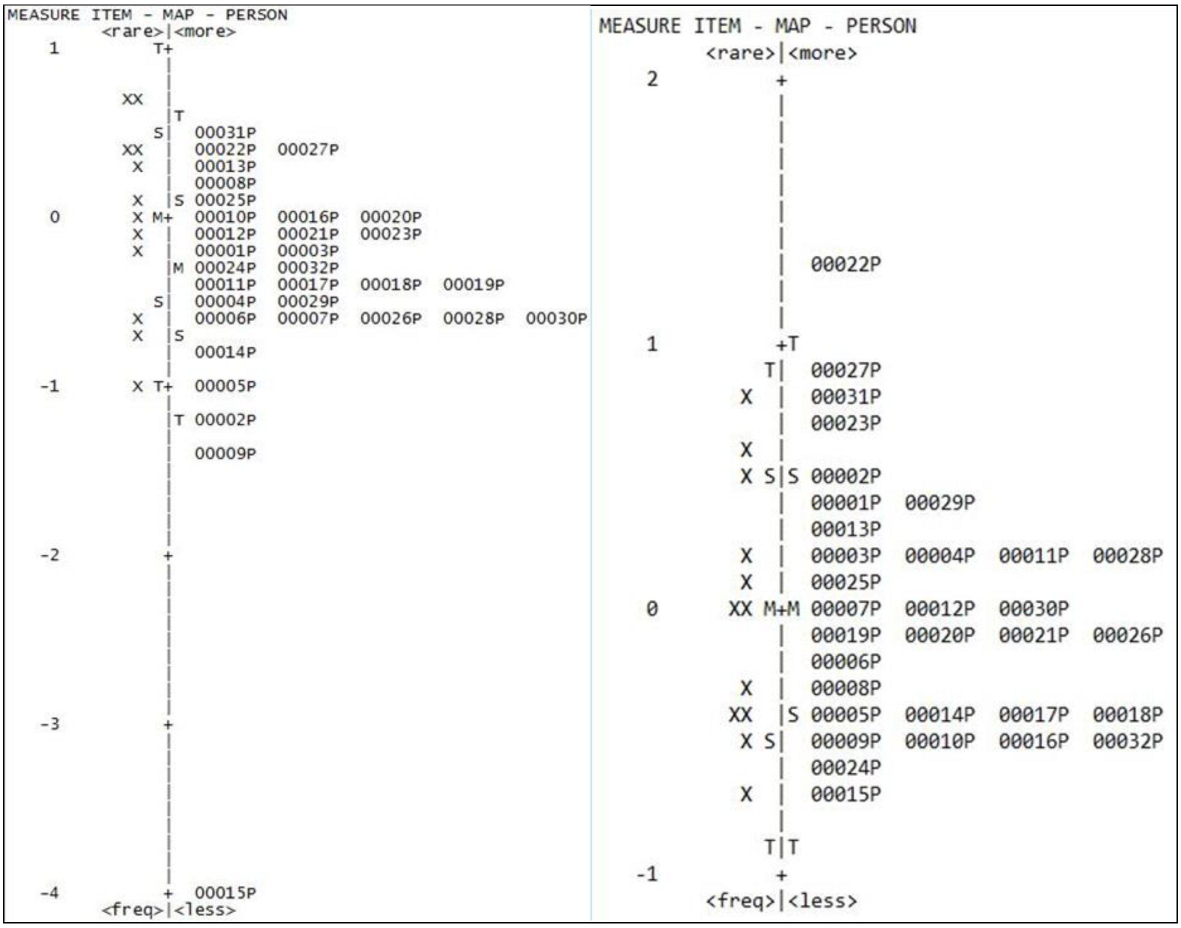
Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasında ispat sürecinde muhakemede bulunmalarına yönelik başarıları ile ilgili son test özet istatistiği Tablo 20'de yer almaktadır.

Tablo 20. İspat Sürecinde Muhakemede Bulunmaya Yönelik Başarıları ile İlgili Son Test Özet İstatistiği

| | | Ham puan | | | | Lineer puan | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\bar{X}$ | SS | Max | Min | $\bar{X}$ | SS | Max | Min |
| Son test | Deney | 21,3 | 5 | 34 | 14 | 0,03 | 0,47 | 1,33 | -0,7 |
| | Kontrol | 10,4 | 6,2 | 25 | 0 | -0,84 | 1,35 | 1,54 | -4,75 |

Tablo 20 incelendiğinde deney ve kontrol grubunun ham puan ortalamaları sırasıyla 21,3 ve 10,4 olduğu görülmektedir. Ortalamalar karşılaştırıldığında uygulama sonrasında deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili başarılarının kontrol grubuna göre daha yüksek olduğu anlaşılmaktadır. İSYBST'den en yüksek puanı alan öğretmen adayının da deney grubunda yer alması bu durumu destekler niteliktedir. Deney ve kontrol grubunun lineer puan ortalamaları ise sırasıyla 0,03 ve -0,84'tür. Kontrol grubunun lineer puan ortalamasının negatif olması, ham puan olarak toplamda 16 puandan az olan öğretmen adayı sayısının çoğunlukta olmasına bağlı olarak ortaya çıkmıştır. Bu durum; öğretmen adaylarının MHS2 kategorisine yönelik durumlar sınırlı sayıda olmak üzere MHS0, MHS1, MHS2 kategorilerinin bir arada olduğu ispatları çoğunlukla yaptığını göstermektedir.

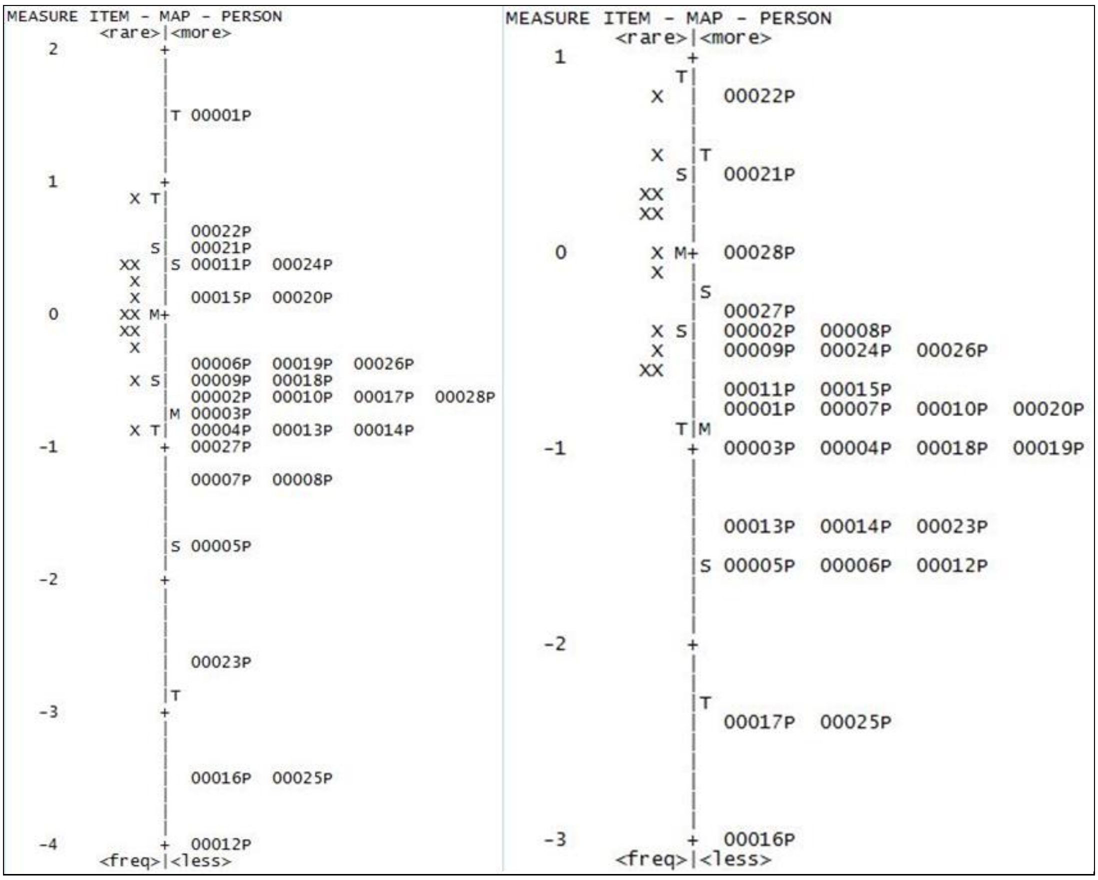
Öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmalarına yönelik başarıları ile ilgili lineer puanlarının uygulama öncesi ve sonrası arasındaki değişimi görebilmek için her bir grup için madde-kişi haritaları oluşturulmuştur. Deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaları ile ilgili ön test ve son test puanlarına yönelik madde-kişi haritaları Şekil 47'de sunulmuştur.




Şekil 47. Deney grubu ön test-son test madde-kişi haritaları

Şekil 47 incelendiğinde deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasında ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili puanlarının uygulama öncesine göre yukarıya doğru bir kayma oluşturduğunu göstermektedir. Dolayısıyla uygulama sonrasında öğretmen adaylarının puanlarında bir artışın olduğu görülmektedir. Ön testte 0 puanın üstünde yer alan öğretmen adayı sayısı 6 iken son testte 13 olması da öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarılarında bir artışın olduğunu gösterir niteliktedir. Ön test ve son testte ÖA15 ispat sürecinde muhakemede bulunma bakımından en başarısız öğretmen adayıdır. Ancak bu öğretmen adayının uygulama sonrasında muhakeme süreci ile ilgili ispat yapma başarı puanında bir artış söz konudur. En başarılı öğretmen adayı ise ön testte ÖA31 iken son testte ÖA22 olmakla birlikte son testte puanlarında artışlar ile her iki testte de ilk üçte yer alan öğretmen adayları ÖA22, ÖA27 ve ÖA31'dir.

Kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili ön test ve son test puanlarına yönelik madde-kişi haritalarına Şekil 48'de yer verilmiştir.




Şekil 48. Kontrol grubu ön test-son test madde-kişi haritaları

Şekil 48'den görüldüğü üzere son testte kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili ispat yapma başarı puanlarının dağılımı ön teste göre daha geniş bir aralıkta değişmektedir. Ancak bu aralığın genişliğinin büyümesi, puanların artması yönünde olduğu gibi azalması yönünde de olmuştur. Ön testte 0 puanın altında yer alan öğretmen adayı sayısı 25 iken son testte 21'dir. Son testte 0 puanın üstünde puan olan öğretmen adayı sayısı artmış olsa da her iki testte de 0 puan altında puan alan öğretmen adayı sayısının birbirine yakın bir oranda olması, uygulama öncesi ile sonrası arasında ispat sürecinde muhakemede bulunma bakımından pek fazla bir değişimin olmadığını göstermektedir.

Uygulama sonrası grupların ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili başarılarına yönelik son test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı ve varsa bu farklılığın gerçekten deneysel koşullara dayalı olarak ortaya çıkıp çıkmadığını belirleyebilmek için ön test puanları "ortak değişken" alınarak kovaryans (ANCOVA) analizi yapılmıştır. İspat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik son test ve düzeltilmiş son test puan ortalamalarını gösteren betimsel istatistikler Tablo 21'de yer alırken, grupların düzeltilmiş son test puan ortalamaları arasında gözlenen farkın anlamlı olup olmadığını gösteren ANCOVA analiz sonuçları Tablo 22'de yer almaktadır.

Tablo 21. Deney ve Kontrol Grubunun İspat Sürecinde Muhakemede Bulunmaya Yönelik Başarılarına İlişkin Son Test Puanları ile İlgili Betimsel İstatistik Sonuçları

| | | Son Test Puanı | | Düzeltilmiş Son Test Puanı | |
|---|---|---|---|---|---|
| Grup | n | $\overline{X}$ | SS | $\overline{X}_d$ | SH |
| Deney Grubu | 32 | 0,35 | 0,47 | -0,129 | 0,152 |
| Kontrol Grubu | 28 | -0,84 | 1,35 | -0,652 | 0,163 |
| Toplam | 60 | -0,37 | 1,07 | | |

$\overline{X}_d$ : Düzeltilmiş Son Test Puan Ortalaması

Tablo 22. İspat Sürecinde Muhakemede Bulunmaya Yönelik Başarılarına İlişkin Son Test Puanları ile İlgili ANCOVA Sonuçları

| Varyansın Kaynağı | Kareler Toplamı | Sd | Kareler Ortalaması | F | Anlamlılık Düzeyi | Etki Büyüklüğü (eta kare) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ön test | 16,277 | 1 | 16,277 | 23,144 | 0,000 | 0,289 |
| Yöntem | 3,681 | 1 | 3,681 | 5,234 | 0,026 | 0,084 |
| Hata | 40,089 | 57 | 0,677 | | | |
| Toplam | 76,111 | 60 | | | | |

Tablo 22'de yer alan ANCOVA analiz sonuçlarına göre İSMAT Modeline bağlı olarak tasarlanan öğrenme ortamında yapılan uygulamalarda yer alan deney grubu ile ispat öğretiminin geleneksel olarak yürütüldüğü kontrol grubunda bulunan öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmalarına yönelik başarıları ile ilgili ön test puanları kontrol altına alındığında son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır ($F_{(1,\ 57)} = 5{,}234$, $p < 0{,}05$). Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaları ile ilgili başarılarındaki gelişim, İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamındaki uygulamalar ile ilişkilidir. Dolayısıyla deney grubu için tasarlanan öğrenme ortamında ispat öğretimine yönelik yürütülen dersler öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarılarının gelişimine katkıda bulunmuştur.

### 4. 1. 2. Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaları ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalar yapılmadan önce ve uygulamalar yapıldıktan sonra deney ve kontrol grubunun ispat sürecinde matematik dilini kullanmaları ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Bu bulgular uygulama öncesi öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaları ile ilgili bulgular ve uygulama sonrası öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaları ile ilgili bulgular olmak üzere iki alt başlık altında sunulmuştur.

#### 4. 1. 2. 1. Uygulama Öncesi Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaları ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalardan önce deney ve kontrol grubunun ispat sürecinde matematik dilini kullanmaları İSYBÖT üzerinden incelenmiştir. Bu testte yer alan her bir problem matematik dili boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları belirlenmiştir. Bu kısımda matematik dilini kullanma bakımından ön testten elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek sunulmuştur. Ayrıca deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesi ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır.

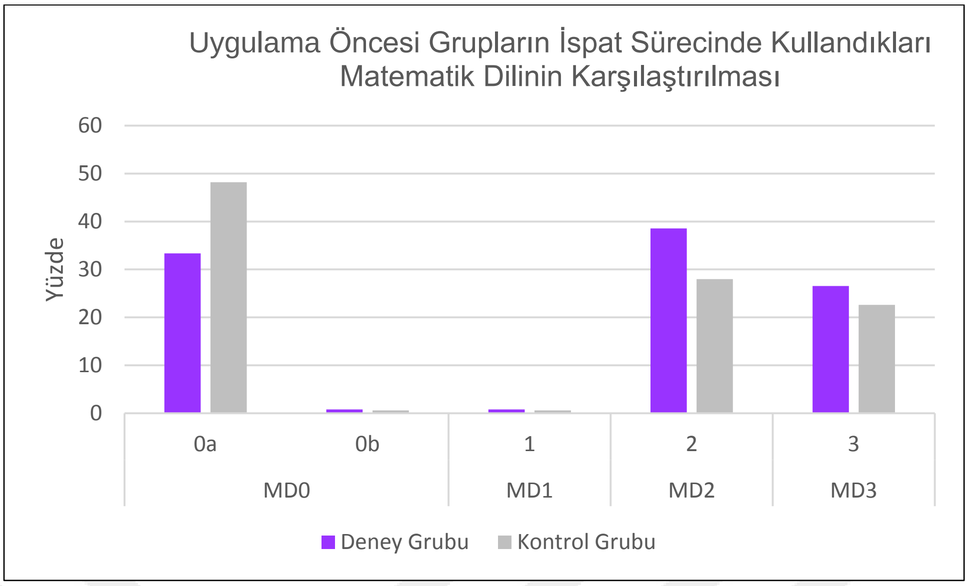
Öğretmen adaylarının İSYBÖT'de yaptıkları ispatların matematik dili boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 23'te sunulmuştur.

Tablo 23. Uygulama Öncesi Matematik Dili Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| Matematik dili boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | Kontrol Grubu | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | f | % | f | % |
| MD0 | a. Boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazma | 128 | 33,34 | 162 | 48,2 |
| | b. Hem kavramların hem de sembollerin kullanımında çok sayıda hatanın olması | 3 | 0,78 | 2 | 0,6 |
| MD1 | Semboller doğru olmakla birlikte açıklamaların anlaşılır olmaması | 3 | 0,78 | 2 | 0,6 |
| MD2 | Açıklamalar anlaşılmakla birlikte sembollerin kullanımında hataların olması | 148 | 38,54 | 94 | 27,98 |
| MD3 | Hem kavramların hem de sembollerin uygun bir şekilde kullanımı | 102 | 26,56 | 76 | 22,62 |

Tablo 23’te görüldüğü gibi öğretmen adaylarının boş bıraktıkları ya da sadece verilen ve istenenleri yazıp herhangi bir çıkarımda bulunmadıkları durumlar çoğunluktadır. Özellikle de kontrol grubunda en yüksek frekans (f = 162) ve yüzdeye (% 48,2) sahip olan göstergedir. Öğretmen adaylarının herhangi bir ispat yapmadığı problemlerde, matematik dilini kullanma bakımından değerlendirilebilecek bir durum olmadığından bu durumlar MD0 kategorisinde yer alan ayrı bir gösterge olarak ele alınmıştır. Deney grubunda matematik dili boyutunda en yüksek frekans (f = 148) ve yüzdeye (% 38,54) sahip olan kategori MD2’dir. Bu durum deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat yaparken çoğunlukla matematiksel kavramları uygun bir şekilde ifade edip matematiksel sembollerde hatalar yaptığı anlamına gelmektedir. Kontrol grubunda ise boş bıraktıkları ya da sadece verilen ve istenenleri yazdıkları durumlardan sonra MD2 kategorisine giren ispatları daha fazla yaptıkları görülmektedir. Deney ve kontrol grubunda MD3 kategorisine giren ispatların sırasıyla $f_D$ = 102 ve $f_K$ = 76 frekans, % 26,56 ve % 22,62 yüzdeye sahip olması, öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel kavram ve sembollerin her birini uygun bir şekilde kullandığını durumların yüksek bir orana sahip olduğunu göstermektedir. Her iki grupta da hem MD1 kategorisi hem de MD0b göstergesinin frekans ($f_D$ = 3, $f_k$ = 2) ve yüzde (sırasıyla % 0,78 ve % 0,6) bakımından en az karşılaşılan durumlar olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının anlaşılır olmayan açıklamalarda bulunmaktan ve matematiksel kavramlar ile sembollerin her ikisine yönelik hatalar yapmaktan kaçındıklarını göstermektedir.

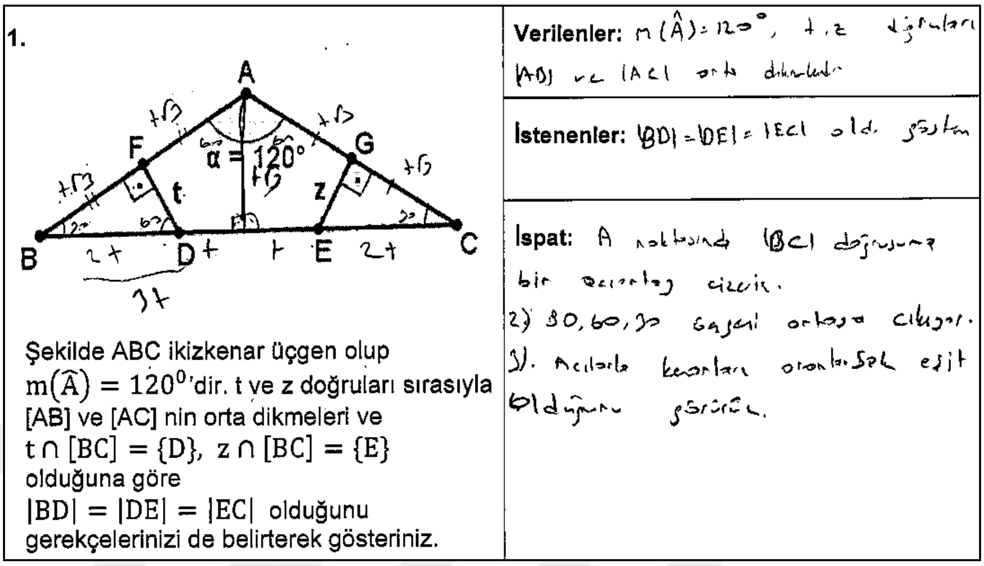
Öğretmen adaylarının uygulama öncesi matematik dili boyutu kategorilerinde yer alan ispatlar bakımından deney ve kontrol grubu arasındaki değişimi gösteren Grafik 3 aşağıda sunulmuştur.




Grafik 3. Uygulama öncesi grupların ispat sürecinde kullandıkları matematik dilinin karşılaştırılması

Grafik 3'ten görüldüğü üzere MD0 kategorisinde yer alan durumlar, büyük bir çoğunluğu kaplamaktadır. Matematik dilini kullanma bakımından değerlendirmenin yapılamadığı MD0a göstergesine yönelik durumların kontrol grubunda daha fazla olduğu görülmektedir. MD0b göstergesinde yer alan ispatların ise grupların her ikisinde de en az ortaya çıkan durumlardan biri olduğu göze çarpmaktadır. Matematik dilini kullanma bakımından en az ortaya çıkan durumlardan bir diğerinin ise her iki grup için de MD1 kategorisine yönelik olduğu görülmektedir. MD2 kategorisinde yer alan ispatların deney grubunda büyük çoğunluğa sahip olduğu dikkat çekmektedir. Kontrol grubunda ise MD0a göstergesinden sonra en fazla ortaya çıkan durumlar olup deney grubundan daha az oranda ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. MD3 kategorisi ise deney grubunda MD2 kategorisinden sonra matematik dilinin kullanımı bakımından en fazla yapılan ispatlar olup kontrol grubunda daha az oranda görülmektedir.

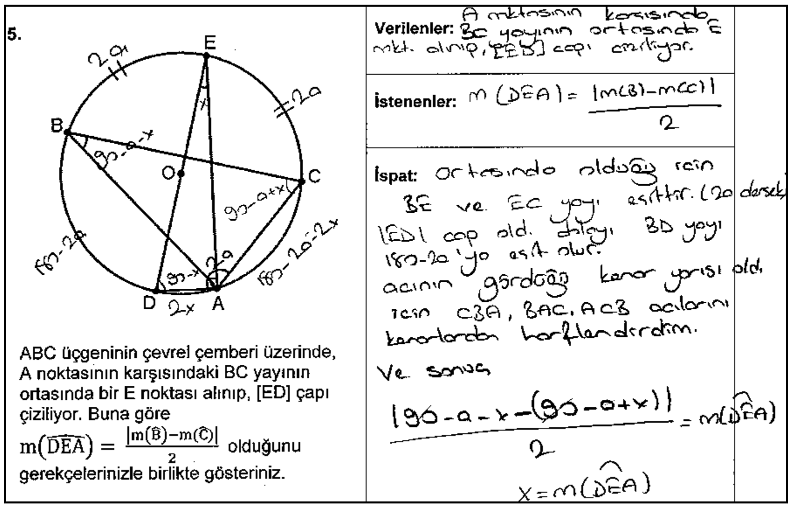
Boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazma durumlarının çoğunlukta olmasına bağlı olarak deney grubunda % 34,12 ve kontrol grubunda % 48,8 oranında olmak üzere MD0 yüksek oranlarda ortaya çıkmıştır. Ayrıca kontrol grubunda diğer kategoriler arasında en fazla orana sahip olan kategoridir. Ancak her iki grubun bu kategoriye yönelik sahip olduğu oran matematik diline yönelik kullanımlarına bağlı olarak ortaya çıkmamıştır. Bu bakımdan deney grubunda % 0,78 ve kontrol grubunda % 0,6 oranında olmak üzere öğretmen adaylarının hem ispat adımlara yönelik açıklamalarda hem de matematiksel semboller ile ilgili hatalar yaptıkları ispatların azınlıkta olduğu görülmektedir. Ayrıca bu tür hataların yapıldığı ispatların her iki grupta da en az karşılaşılan durumlar olduğu göze çarpmaktadır. Kontrol grubunda yer alan ÖA36 kodlu öğretmen adayının matematik dilini kullanma bakımından MD0b göstergesinde yer alan ispatı Şekil 49'da sunulmuştur.




Şekil 49. MD0 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 49'dan görüldüğü üzere öğretmen adayı BC doğrusunu ifade etmek için uzunluk sembolünü kullanmıştır. Burada uzunluktan bahsedilmediğinden bu sembolün kullanılması uygun değildir. Açı ölçülerini belirtirken ise derece işaretini kullanmayarak "*90, 60, 30 üçgeni ortaya çıkar*" şeklinde belirtmiştir ve geometrik şekil üzerinde belirtilen açı ölçüleri için de bu işareti kullanmamıştır. Matematiksel sembollerin hatalı kullanımının yanı sıra "*Açılarla kenarları oranlarsak eşit olduğunu görürüz.*" şeklindeki ifadesi ile matematiksel açıklamasında da hatalı durumlar söz konusudur. Açı ölçüleri ile kenar uzunlukları aynı birimlere sahip olmadığından oranlanamaz. Ancak öğretmen adayı böyle bir anlam ortaya çıkacağını fark etmeyip matematiksel kavramları hatalı bir şekilde kullanmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı hem matematiksel kavramlar hem de sembollerin kullanımında hata yaparak matematik dili bakımından MD0 kategorisi içerisinde değerlendirilen bir ispat yapmıştır.

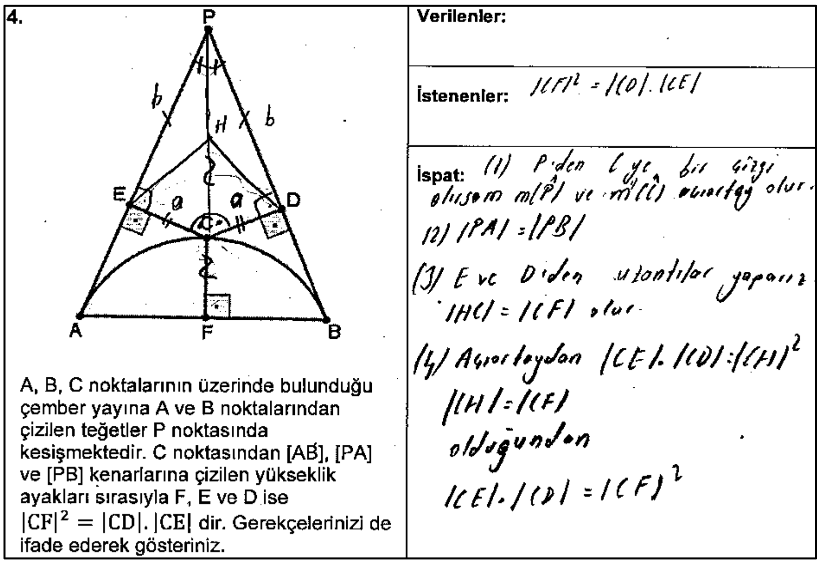
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA58 kodlu öğretmen adayının matematiksel kavram ve sembollerin her ikisine yönelik hatalar yapması sonucunda MD0b göstergesinde yer alan ispatına Şekil 50'de yer verilmiştir.




Şekil 50. MD0 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 50'den görüldüğü üzere öğretmen adayı "*…$|ED|$ çap olduğundan dolayı…*" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu ifadede ED doğru parçasının çap olduğunu belirtirken uzunluktan söz edilmediğinden [ED] ya da ED doğru parçası şeklinde bir kullanım tercih edilmelidir. Bunun yanı sıra açı ölçülerini "*180 -2a*" şeklinde derece işaretini kullanmadan belirtmiştir. Geometrik şekil üzerinde ifade ettiği açı ölçüleri için de bu durum geçerlidir. Matematiksel sembolleri hatalı kullanmanın dışında matematiksel kavramları ifade ederken de hatalar yapmıştır. Öğretmen adayı ispatta "*açının gördüğü kenar yarısı olduğundan…*" şeklinde bir ifadede bulunarak "yay" kavramı yerine "kenar" kavramını kullanarak hatalı bir kullanım gerçekleştirmiştir.

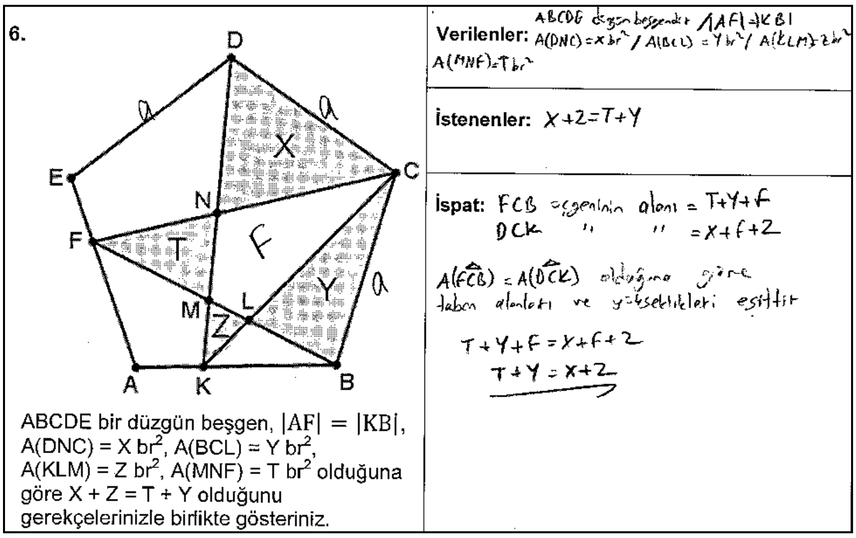
MD1 kategorisine yönelik ispatlar, deney grubunda % 0,78 ve kontrol grubunda % 0,6 oranında yer alarak ispat sürecinde matematik dilini kullanmalarına yönelik en az rastlanan durumlardan biri olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanıp açıklamalarının anlaşılır olmadığı ispatların oldukça sınırlı sayıda olduğu anlaşılmaktadır. Deney grubunda yer alan ÖA5 kodlu öğretmen adayının matematik dilini kullanma bakımından MD1 kategorisi olarak nitelendirilen ispatı Şekil 51'de sunulmuştur.




Şekil 51. MD1 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 51 incelendiğinde öğretmen adayı "*...$m(\hat{P})$ ve $m(\hat{C})$ açıortay olur.*" şeklinde bir ifadede bulunarak açı ölçüsünü açıortay olarak nitelendirerek hatalı bir matematiksel ifade kullanmıştır. Bu ifadenin yerine "*PC doğru parçası açıortay olur*" şeklinde bir ifade kullansaydı daha doğru bir matematiksel ifade olabilirdi. "$|PA| = |PB|, |HC| = |CF|$, $|CE|.|CD| = |CF|^2$" şeklinde kenar uzunluklarını belirterek matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı bu ispat için matematiksel sembollerin kullanımında herhangi bir hata yapmazken matematiksel kavramları ifade etmede bir hata yaparak matematik dilini kullanma bakımından MD1 kategorisinde yer alan bir ispat oluşturmuştur.

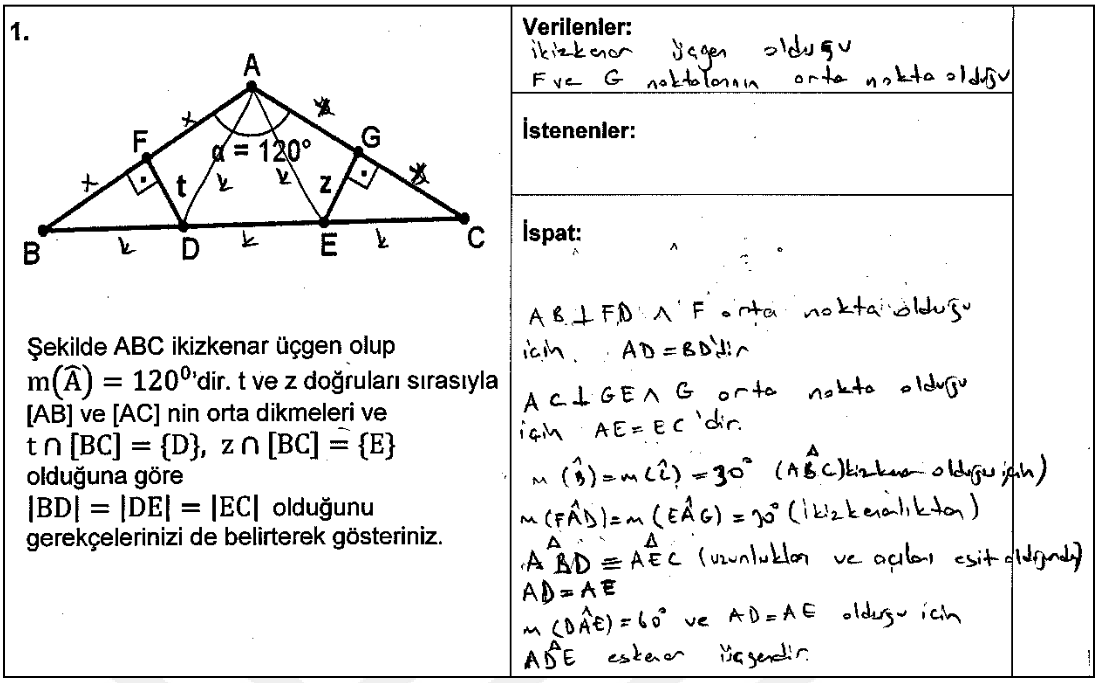
Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA32 kodlu öğretmen adayının ispat sürecinde matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanıp matematiksel kavramları belirtirken hatalı ifadeler kullanarak MD1 kategorisinde yer alan ispatı Şekil 52'de sunulmuştur.




Şekil 52. MD1 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 52'de görüldüğü gibi öğretmen adayı FCB ile DCK üçgenlerinin alanlarını sırasıyla T + Y + F ve X + F + Z şeklinde temsil ettiğini belirtip üçgenlerin alanlarının eşitliğini $A(\widehat{FCB}) = A(\widehat{DCK})$ şeklinde ifade ederek sembolik anlamda uygun bir dil kullanmıştır. Ancak "*…taban alanları ve yükseklikleri eşittir*" şeklinde bir çıkarımda bulunarak hatalı bir matematiksel ifade kullanmıştır. Taban alanları şeklindeki bir ifade, herhangi bir kenarın alanı olabileceği anlamını ortaya çıkarmaktadır. Kenar bir doğru parçası olarak tek boyutludur ve alana sahip olması olanaksızdır. Ancak öğretmen adayı bu durumu fark etmeyip bu ispat için matematiksel sembolleri uygun bir şekilde ifade ederken matematiksel kavramları uygun bir şekilde ifade edememiştir.

Deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaları açısından % 38,54 oranla MD2 kategorisinde yoğunlaştığı görülmektedir. Kontrol grubunda ise MD2 kategorisine yönelik ispatlar % 27,98 gibi yüksek bir orana sahiptir. Ancak kontrol grubunda en büyük çoğunluğu, boş bırakarak ya da sadece verilen ve istenenleri yazarak ispat sürecinde matematik dili bakımından değerlendirilemeyecek durumlar kaplamaktadır. Dolayısıyla kontrol grubunda MD0a kategorisi hariç olmak üzere ispat sürecinde yapmış oldukları açıklamaların uygun ve anlaşılır olmasına rağmen matematiksel sembolleri kullanmalarına yönelik bazı hatalar yaptıkları durumların her iki grupta da çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Deney grubunda yer alan ÖA19 kodlu öğretmen adayının matematik dilini kullanma bakımından MD2 kategorisinde yer alan ispatına Şekil 53'te yer verilmiştir.



1.



Şekilde ABC ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{A}) = 120^0$'dir. t ve z doğruları sırasıyla [AB] ve [AC] nin orta dikmeleri ve $t \cap [BC] = \{D\}$, $z \cap [BC] = \{E\}$ olduğuna göre $|BD| = |DE| = |EC|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.

**Verilenler:** ikizkenar üçgen olduğu
F ve G noktaların orta nokta olduğu

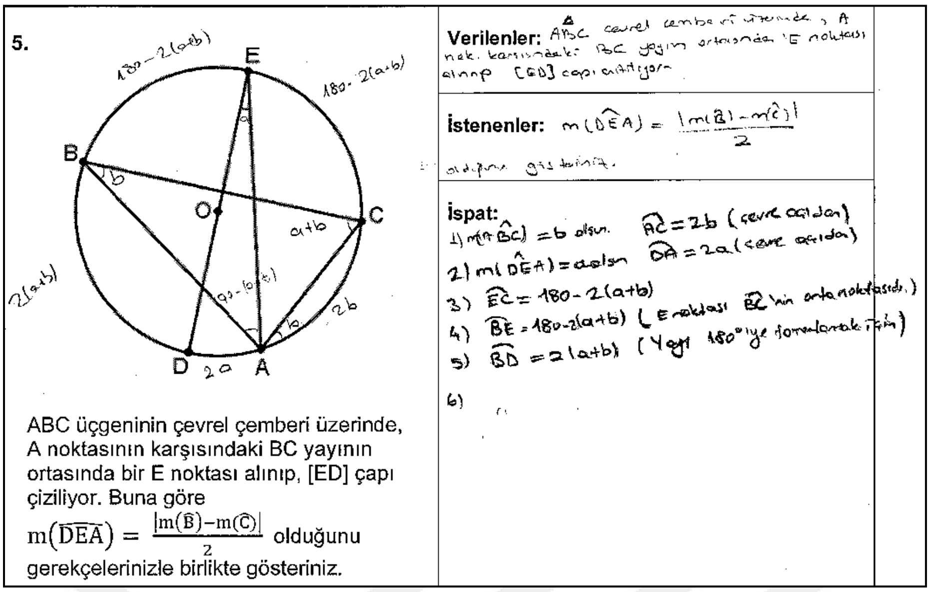
**İstenenler:**

**İspat:**
AB ⊥ FD ∧ F orta nokta olduğu için AD = BD'dir
AC ⊥ GE ∧ G orta nokta olduğu için AE = EC'dir.
m(B̂) = m(Ĉ) = 30° (ABC ikizkenar olduğu için)
m(FÂD) = m(EÂG) = 30° (ikizkenarlıktan)
ABD ≡ AEC (uzunluklar ve açılar eşit olduğundan)
AD = AE
m(DÂE) = 60° ve AD = AE olduğu için
ADE eşkenar üçgendir.

Şekil 53. MD2 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 53'te görüldüğü gibi öğretmen adayı kenar uzunluklarının eşit olduğunu $|AD| = |BD|, |AE| = |EC|, |AD| = |AE|$ şeklinde ifade etmek yerine AD = BD, AE = EC, AD = AE şeklinde ifade etmiştir. ABD ile AEC üçgenlerin eş olduğunu "≡" şeklinde denklik işaretini kullanarak belirtmiştir. Ancak üçgenlerin eşliğini ifade ederken denklik işareti yerine "≅" şeklindeki eşlik işaretini kullanması gerekirdi. Öğretmen adayı, kenar uzunlukları ve üçgenlerin eşliğini belirtirken uygun matematiksel sembolleri kullanmamış ya da kullanılması gereken semboller yerine başka bir sembol tercih etmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı bu kullanım ve tercihlerinden dolayı sembolik bakımından uygun bir dil kullanmamıştır.

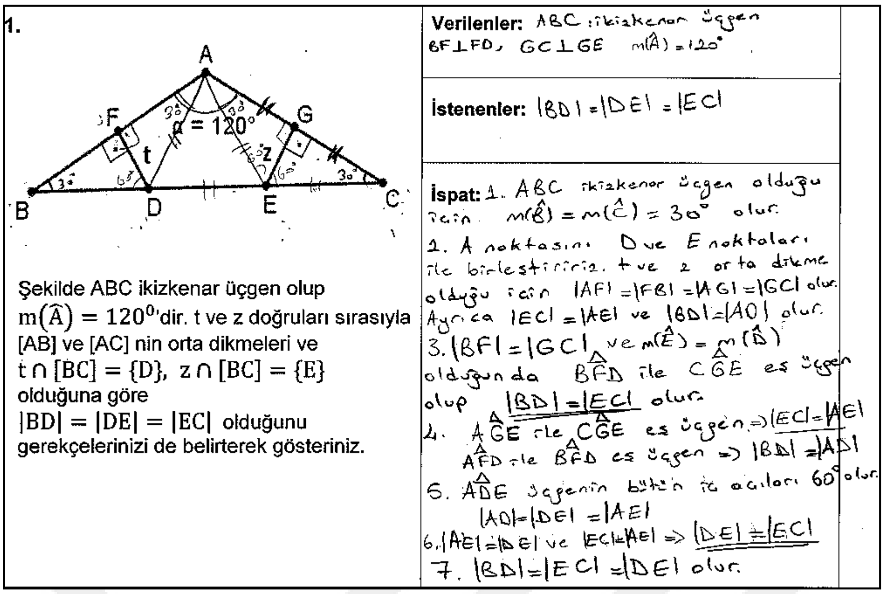
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA38 kodlu öğretmen adayının sadece matematiksel sembollerin kullanımında hatalar yaparak MD2 kategorisinde yer alan ispatı Şekil 54'te sunulmuştur.




Şekil 54. MD2 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 54'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı açı ölçülerini $m(\widehat{ABC}) = \mathrm{b}$, $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{DEA}}) = \mathrm{a}$ şeklinde ifade ederek matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanmıştır. Ancak bütün yay ölçülerini belirtirken " $\overset{\frown}{AC} = 2b$, $\overset{\frown}{DA} = 2a$ " şeklinde bir yazım tercih etmiştir. Bunun yerine $m(\overset{\frown}{AC}) = 2a$, $m(\overset{\frown}{DA}) = 2a$ şeklinde bir yazım tercih etmelidir. Bunun dışında EC ile BC yayını $\overset{\frown}{EC} = 180 - 2(a+b)$, $\overset{\frown}{BE} = 180 - 2(a+b)$ şeklinde belirterek açı ölçüsünü ifade eden sembolün yanı sıra derece işaretinin kullanımını da ihmal etmiştir. BD yayına yönelik gerekçesini sunarken derece işaretini kullanmasına rağmen açı ölçüsünün belirtildiği yerlerin hiçbirinde bu işareti kullanmamıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı matematiksel sembollerin kullanımında birçok hata yaparak ispatı tamamlamıştır.

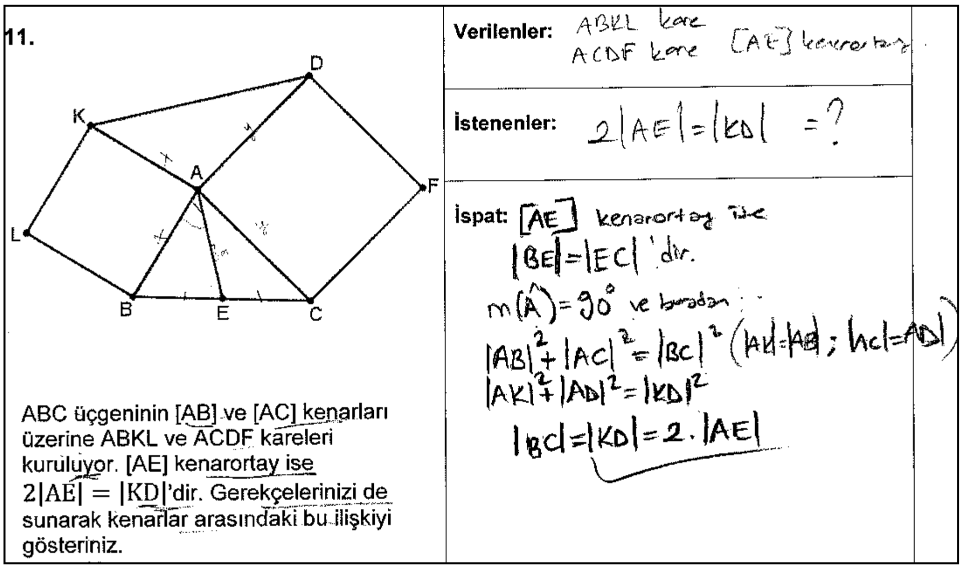
İspat sürecinde matematiksel kavram ve sembollerin her birinin uygun bir şekilde kullanılması ile ilgili MD3 kategorisine yönelik ispatlar, deney grubunda % 26,56 ve kontrol grubunda % 22,62 oranında yapılmıştır. Dolayısıyla deney grubunda biraz daha fazla olmak üzere hem matematiksel kavramlar hem de sembolleri uygun bir şekilde kullandıkları ispatlar da ortaya çıkmıştır. Deney grubunda yer alan ÖA14 kodlu öğretmen adayının MD3 kategorisine yönelik ispatı Şekil 55'te sunulmuştur.




Şekil 55. MD3 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 55 incelendiğinde öğretmen adayı açı ölçülerini $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{B}}) = \mathrm{m}(\widehat{\mathrm{C}})$, $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{E}}) = \mathrm{m}(\widehat{\mathrm{D}})$ şeklinde ifade ederek matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanmıştır. Açı ölçü birimlerinden derece işaretini yazmayı da göz ardı etmemiştir. Hatta geometrik şekil üzerinde açı ölçülerini yazarken bile bu işareti kullanmayı ihmal etmemiştir. Bunların yanı sıra AGE ile CGE ve AFD ile BFD üçgenlerinin eş olduğunu belirtirken harf sıralamasına dikkat etmiş ve kenar uzunluklarını “|   |” sembolünü kullanarak belirtmiştir. Matematiksel kavramlara yönelik açıklamalarında da anlaşılır ve net ifadeler kullanmaya dikkat etmiştir. Böylece öğretmen adayının ispatı matematik dili boyutu bakımından en yüksek kategori olan MD3 olarak nitelendirilmiştir.

Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA56 kodlu öğretmen adayının hem matematiksel kavramlar hem de matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanarak MD3 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatı Şekil 56’da sunulmuştur.




Şekil 56. MD3 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 56'da görüldüğü gibi AE doğru parçasını ifade ederken [AE] ve her bir kenar uzunluğu için "|  |" sembolünü kullanarak uygun bir tercih yapmıştır. Bunun dışında açı ölçüsünü "$m(\hat{A}) = 90^o$" şeklinde ifade ederek hem açı ölçüsünü temsil eden sembolü hem de derece işaretini kullanarak matematik dilini sembolik olarak uygun kullanmıştır. Matematiksel kavramlar bakımından uygun olmayan herhangi bir ifadenin bulunmaması da matematik dilini uygun bir şekilde kullandığını göstermektedir.

Uygulama öncesinde genel olarak öğretmen adaylarının matematiksel açıklamaları anlaşılır olup matematiksel sembollerde hatalar yaptıkları durumların çoğunlukta olduğu görülmüştür. Matematiksel sembollerin kullanımı bakımından hataların olduğu ispatların deney grubunda daha fazla görüldüğü fark edilmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel sembolleri kullanırken genellikle açı ölçüsü birimlerinden derece işaretini yazmayı ihmal ettikleri gözlemlenmiştir. Derece işaretini yazdıkları durumlarda ise genellikle geometrik şekil üzerinde kullanımını göz ardı ettikleri belirlenmiştir. Bunun yanı sıra açı ölçüsünü ifade eden sembolü kullanmadıkları, bir doğru parçasını belirtecekleri zaman uzunluk sembolünü kullandıkları ya da tam tersi kullanımları tercih ettikleri görülmüştür. Öğretmen adayları yay ölçüsünü ifade edecekleri durumlarda da çoğunlukla hata yapmışlardır. Kontrol grubunda ise boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazdıkları durumlardan sonra matematiksel sembollere yönelik hatalar yaptıkları durumların çoğunlukta olduğu fark edilmiştir. Deney grubunda kontrol grubunun tam tersi bir sıralama söz konusu olup sadece matematiksel sembollerde hatalar yaptıkları ispatlardan sonra boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazdıkları durumlar gelmektedir. Matematik kavram ve sembollerin her birini uygun bir şekilde kullandıkları ispatların da önemli ölçüde ortaya çıktığı fark edilmiştir. Hem matematiksel kavramlarda hem de sembollerde hata yaptıkları ya da matematiksel sembolleri doğru bir şekilde kullanıp açıklamaların hatalı olduğu ispatların ise azınlıkta olduğu görülmüştür.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesi ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları ile ilgili ön test özet istatistiği Tablo 24'te yer almaktadır.

Tablo 24. İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaya Yönelik Başarıları ile İlgili Ön Test Özet İstatistiği

| | | Ham puan | | | | Lineer puan | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\bar{X}$ | SS | Max | Min | $\bar{X}$ | SS | Max | Min |
| İSYBÖT | Deney | 18,9 | 5,2 | 29 | 2 | -0,13 | 0,45 | 0,79 | -1,88 |
| | Kontrol | 14,9 | 5,9 | 26 | 2 | -0,33 | 0,44 | 0,42 | -1,73 |

Tablo 24 incelendiğinde deney ve kontrol grubunun ön test ham puan ortalamaları sırasıyla 18,9 ve 14,9 olduğu görülmektedir. Bu durum uygulama öncesinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarılarının birbirine yakın olmadığını göstermektedir. Ön test ham puan ortalamalarının lineer hale getirilmesi sonucunda elde edilen ortalamalar ise sırasıyla -0,13 ve -0,33'dir. Her bir öğretmen adayının İSYBÖT için yaptığı ispatlarının genelinin matematik dilini kullanma bakımından MD0, MD2 ya da MD3 kategorilerinde yer alması, lineer puan ortalamalarının negatif olmasına yol açmıştır. Başka bir ifade ile bir öğretmen adayının ispatlarının çoğunluğunun MD3 kategorisine dâhil olmaması koşuluyla diğer kategorilerde yer alan ispatların yer alması durumunda lineer puanların negatif olması sonucunda gerçekleşmiştir.

Uygulama öncesinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik ispat yapma başarıları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için ön test verilerine parametrik olmayan testlerden Mann Whitney U testi uygulanmıştır. Yapılan bu teste yönelik sonuçlar Tablo 25'te sunulmuştur.

Tablo 25. Deney ve Kontrol Gruplarının Matematik Dilini Kullanmaya Yönelik Başarılarının Karşılaştırılması ile İlgili Mann Whitney U Testi Sonucu

| | Grup | N | Sıra Ortalaması | Sıra Toplamı | U | p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ön test | Deney | 32 | 35,38 | 1132 | 292 | 0,021 |
| | Kontrol | 28 | 24,93 | 698 | | |

Tablo 25 incelendiğinde uygulama öncesinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları arasında anlamlı bir fark bulunmuştur (U = 292, $p < 0,05$). Bu durum uygulamalar öncesinde deney grubunun ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarısının kontrol grubuna göre biraz daha fazla olduğunu göstermektedir.

#### 4. 1. 2. 2. Uygulama Sonrası Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaları ile İlgili Bulgular

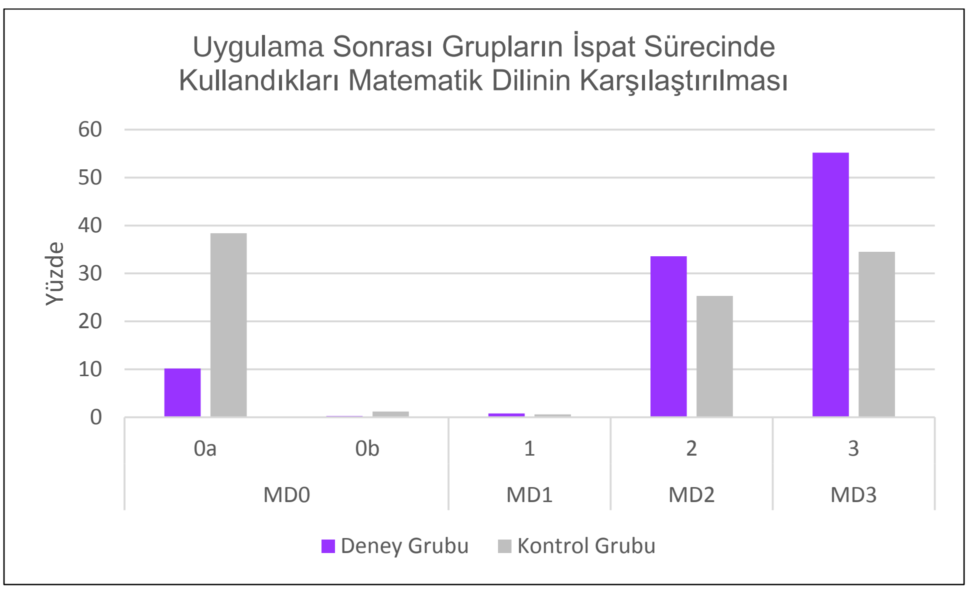
Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalardan sonra deney ve kontrol grubunun ispat sürecinde matematik dilini kullanımları İSYBST üzerinden incelenmiştir. Bu testte yer alan her bir problem matematik dili boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama sonrasında öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları belirlenmiştir. Bu kısımda matematik dilini kullanma bakımından son testten elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek sunulmuştur. Ayrıca hem grupların her birinde yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrası matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları arasında hem de uygulama sonrası gruplar arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır.
Öğretmen adaylarının İSYBST'de yaptıkları ispatların matematik dili boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 26'da sunulmuştur.

Tablo 26. Uygulama Sonrası Matematik Dili Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| Matematik dili boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | Kontrol Grubu | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | f | % | f | % |
| MD0 | a. Boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazma | 39 | 10,16 | 129 | 38,39 |
| | b. Hem kavramların hem de sembollerin kullanımında çok sayıda hatanın olması | 1 | 0,26 | 4 | 1,19 |
| MD1 | Semboller doğru olmakla birlikte açıklamaların anlaşılır olmaması | 3 | 0,78 | 2 | 0,6 |
| MD2 | Açıklamalar anlaşılmakla birlikte sembollerin kullanımında hataların olması | 129 | 33,59 | 85 | 25,3 |
| MD3 | Hem kavramların hem de sembollerin uygun bir şekilde kullanımı | 212 | 55,21 | 116 | 34,52 |

Tablo 26'dan görüldüğü üzere deney grubunda matematik dili boyutunda yer alan kategoriler arasında MD3 kategorisi en yüksek frekans (f = 212) ve yüzdeye (% 55,21) sahiptir. Bu durum deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının çoğunlukla ispat sürecinde gerek matematiksel kavramları gerekse sembolleri uygun bir şekilde kullandığı anlamına gelmektedir. Kontrol grubunda ise öğretmen adaylarının boş bıraktığı ve sadece verilen ve istenenleri yazdığı durumların çoğunlukta olduğu görülmektedir. Matematik dili boyutunda yer alan kategoriler arasında deney grubu bakımından ikinci en yüksek frekans (f =129) ve yüzdeye (% 33,59) sahip olan MD2 kategorisidir. Bu durum matematiksel kavram ve sembolleri uygun bir şekilde kullanmanın yanı sıra sembolleri kullanırken bazı hatalar yaptıkları anlamına gelmektedir. Deney grubunda en az frekans ve yüzdeye sahip olan MD0b göstergesi iken kontrol grubunda MD1 kategorisidir. Dolayısıyla deney grubunda hem matematiksel kavramlar hem de sembollere yönelik hatalı durumlar, yapılan ispatlardan sadece birinde görülerek neredeyse hiç karşılaşılmayan bir durum olduğunu göstermektedir. Kontrol grubunda ise sembolleri uygun bir şekilde kullanıp matematiksel açıklamalarda hatalar yaptıkları durumlara oldukça az rastlandığı anlamına gelmektedir. En az rastlanan durumlardan sonra deney grubunda MD1 kategorisine, kontrol grubunda ise MD0b göstergesine yönelik kullanımların oldukça az görülmesi, genel anlamda öğretmen adaylarının ispat adımlarını ifade ederken matematiksel açıklamalara yönelik hatalar yapmaktan kaçındıklarını göstermektedir.

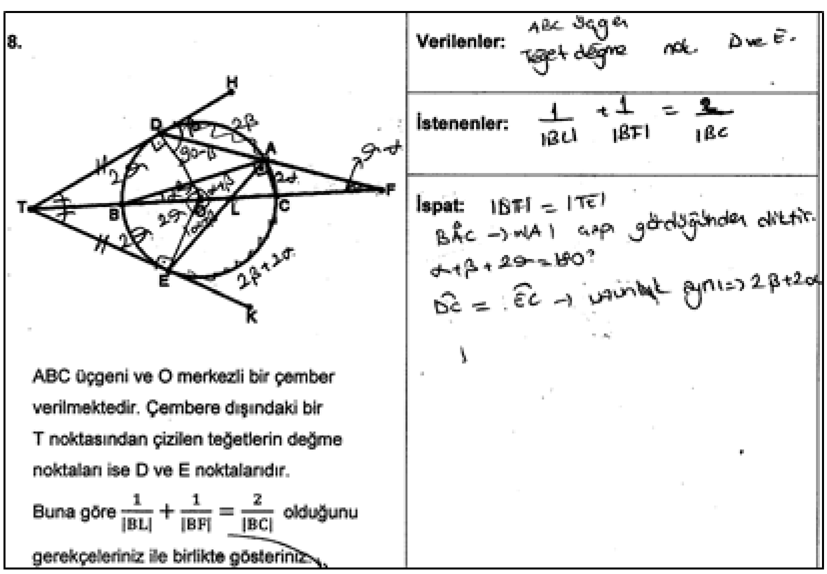
Öğretmen adaylarının uygulama sonrası matematik dili boyutu kategorilerinde yer alan ispatlar bakımından deney ve kontrol grubu arasındaki değişimi gösteren Grafik 4 aşağıda sunulmuştur.




Grafik 4. Uygulama sonrası grupların ispat sürecinde kullandıkları matematik dilinin karşılaştırılması

Grafik 4 incelendiğinde matematik dili bakımından değerlendirilebilecek bir durumun yer almadığı MD0a göstergesinde kontrol grubun büyük çoğunluğu kaplayarak diğer kategoriler arasında en yüksek orana sahip olduğu görülmektedir. Deney grubu ile kontrol grubu arasında ise MD0a kategorisi açısından olukça büyük bir farkın olduğu göze çarpmaktadır. MD0b göstergesi gruplar arasında oldukça az rastlanan durumlar olmakla birlikte kontrol grubunda biraz daha fazla olduğu fark edilmektedir. Matematik dilini kullanma bakımından en az rastlanan durumlardan bir diğeri ise MD1 kategorisine yönelik ispatlardır. Bu kategoriye yönelik ispatların kontrol grubunda en az karşılaşılan durumlar olduğu görülmektedir. Deney grubunda da bu tür durumlara oldukça az rastlanmakla birlikte kontrol grubuna göre biraz daha fazla yapıldığı görülmektedir. MD2 kategorisi, deney grubunda daha fazla bir çoğunluğa sahip olmakla birlikte kontrol grubunda da önemli ölçüde ortaya çıktığı dikkat çekmektedir. MD3 kategorisine yönelik ispatlar ise deney grubunda en fazla ortaya çıkan durumlar olmakla birlikte gruplar arasında oldukça fazla bir fark olduğu göze çarpmaktadır.

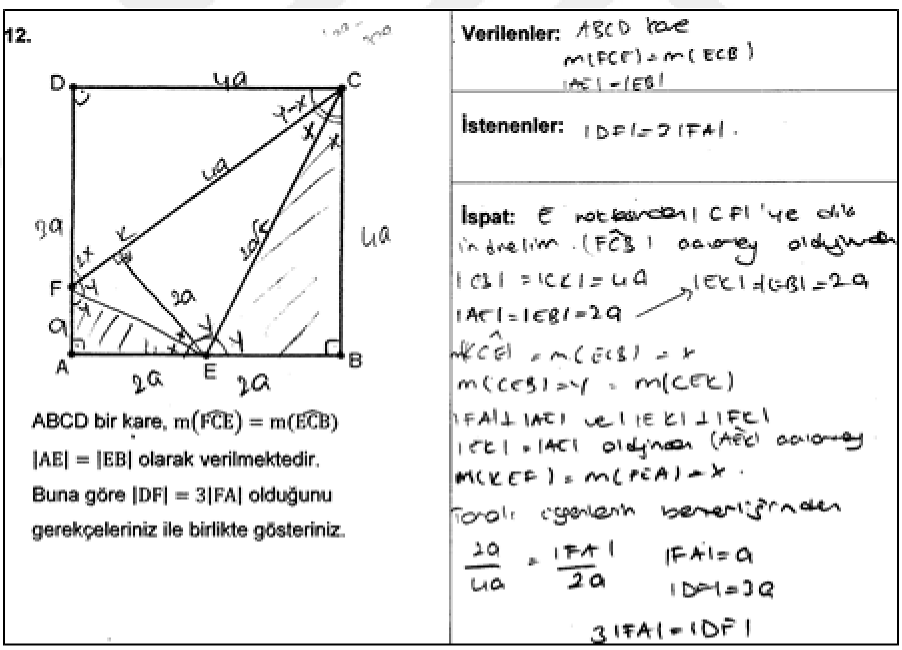
Matematiksel kavram ve sembollerin her birine yönelik hatalı kullanımların söz konusu olduğu ispatlar, deney grubunda % 0,26 ve kontrol grubunda % 1,19 oranında ortaya çıktığı görülmüştür. Dolayısıyla kontrol grubunda daha fazla görülmekle birlikte deney grubunda matematik dilini kullanma bakımından en az karşılaşılan durumlar olduğu fark edilmektedir. Kontrol grubunda yer alan ÖA43 kodlu öğretmen adayının matematik dilini kullanma bakımından MD0b göstergesine yer alan ispatına Şekil 57'de yer verilmiştir.




Şekil 57. MD0b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 57'den görüldüğü üzere öğretmen adayı kenar uzunluklarını ifade ederken "| |" sembolünü kullanarak uygun bir gösterimde bulunmuştur. Açı ölçülerini ifade ederken ise geometrik şekil üzerinde derece işaretini kullanmazken açıklamalar da yazdığı kısımda derece işaretini kullanmıştır. Yay ölçülerini belirtirken $\widehat{DC} = \widehat{EC}$ şeklinde bir gösterimi tercih ederek hatalı bir kullanım gerçekleştirmiştir. Bu ifadenin üzerine "*uzunlukları aynı* → $2\beta + 2\alpha$" yönelik bir açıklama yaparak yay ölçüsü ile yay uzunluğunu karıştırdığını göstermektedir. Bu soruda belirtilen yayların uzunlukları da eşit olmasına rağmen öğretmen adayının ifade etmek istediği ölçülerinin eşit olmasıdır. Öğretmen adayının böyle bir açıklamada bulunması, matematiksel kavramlarda da hata yapmasına yol açmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı hem matematiksel kavramlar hem de sembollere yönelik uygun olmayan kullanımlar gerçekleştirmiştir.

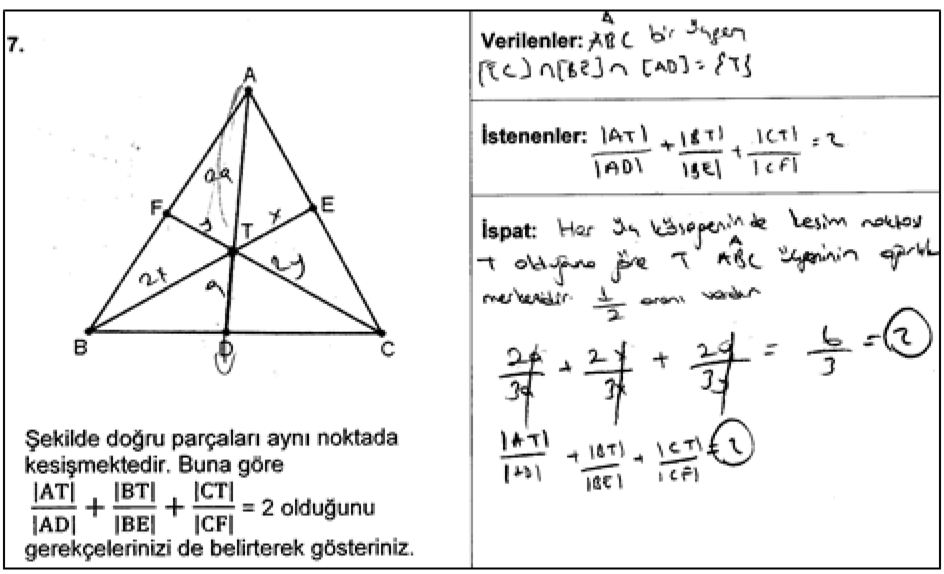
Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA20 kodlu öğretmen adayının matematiksel sembol ve kavramların her ikisine yönelik hatalı kullanımlar gerçekleştirerek MD0b göstergesinde yer alan ispatı Şekil 58'de sunulmuştur.




Şekil 58. MD0b göstergesine yönelik ispat örneği

Şekil 58 incelendiğinde öğretmen adayı ispat adımlarında "$\widehat{FCB}$ *açıortay*" ve "$\widehat{AEK}$ *açıortay*" şeklinde uygun olmayan ifadeler kullanmıştır. Öğretmen adayı açıortayları belirtmek için EC ve EF açıortay şeklinde bir ifade kullanması gerekirken FCB ile AEK açılarını açıortay olarak nitelendirilmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı matematiksel kavramlar bakımından hatalı bir kullanım gerçekleştirmiştir. Öğretmen adayı kenar uzunluklarını ifade ederken “| |” sembolünü kullanması uygun bir tercih olmasına rağmen doğru parçalarını ifade etmek için de aynı sembolü kullanması uygun bir tercih değildir. Örneğin öğretmen adayı iki doğru parçanın birbirine dik olduğunu “$|FA| \perp |AE|$" şeklinde göstermek yerine “$[FA] \perp [AE]$” şeklinde göstermelidir. Öğretmen adayının ispatında matematiksel sembollerin yanı sıra açıklamalarında da hatalı kullanımların yer almasıyla hem semboller hem de kavramlar bakımından uygun olmayan kullanımlar gerçekleştirmiştir.

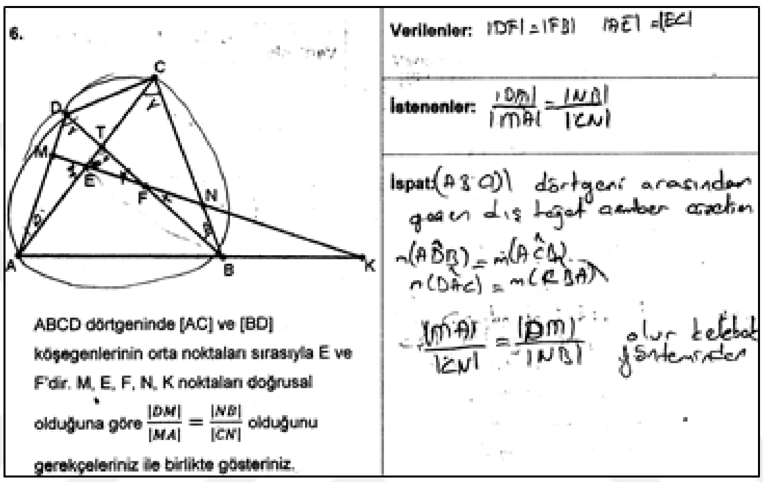
İspat sürecinde matematik dilini kullanma bakımından MD1 kategorisinde yer alan ispatlar, deney grubunda % 0,78 ve kontrol grubuna % 0,6 oranında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla gruplar arasında oldukça az bir fark olmakla birlikte matematik dili kullanma bakımından kontrol grubunda en az karşılaşılan durumlardır. Deney grubunda ise MD0b göstergesi hariç diğer kategoriler arasında en az ortaya çıkan durumdur. Bu bakımdan deney grubunda matematiksel kavramlar ve sembollerin her ikisine yönelik hatalara oldukça az rastlanırken kontrol grubunda sadece matematiksel kavramlara yönelik hatalara oldukça rastlanmıştır. Grupların her ikisinde de en az rastlanan durumlar dikkate alındığında öğretmen adaylarının genellikle matematiksel kavramları uygun bir şekilde seçerek kullandıkları anlaşılmaktadır. Deney grubunda yer alan ÖA30 kodlu öğretmen adayının matematik dilini kullanma bakımından MD1 kategorisinde yer alan ispatına Şekil 59’da yer verilmiştir.




Şekil 59. MD1 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 59’dan görüldüğü üzere öğretmen adayı “*Her üç köşegeninde kesim noktası T olduğuna göre…*” şeklinde bir ifade kullanarak AD, BC, BE herhangi bir doğru parçası olmasına rağmen kenarortay olarak kabul edip bu ifade yerine “ köşegen” kavramını tercih ederek hatalı bir kullanım gerçekleştirmiştir. Dolayısıyla bu durum öğretmen adayının köşegen kavramının tanımını bilmemekle birlikte üçgenin köşegeninin olmadığını fark etmediğini göstermektedir. Bu bilgi eksikliği de öğretmen adayının matematiksel olarak yaptığı açıklamalarda uygun olmayan ifadeler kullanmasına yol açmıştır.

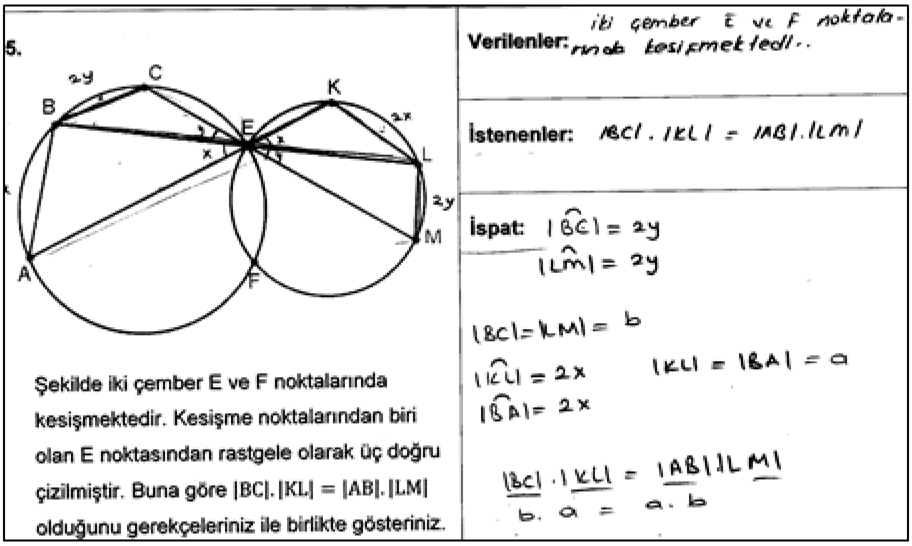
Kontrol grubunda yer alan ÖA35 kodlu öğretmen adayının matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanıp matematiksel kavramlara yönelik anlaşılır olmayan ifadeleri kullanarak MD1 kategorisinde yer alan ispatı Şekil 60’da sunulmuştur.




Şekil 60. MD1 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 60 incelendiğinde öğretmen adayı ABCD dörtgeninin dışına çizdiği çemberi “*dış teğet çember*” olarak nitelendirmiştir. Bu çember, dış teğet çember kavramının tanımı ile uyuşmamakla birlikte dörtgenin çevrel çemberidir. Ancak öğretmen adayı bu durumu fark etmeyerek matematiksel kavramların kullanımında hata yapmıştır. Açı ölçüleri ve kenar uzunluklarını ifade ederken uygun semboller kullanmasına rağmen matematiksel kavramlardan birine yönelik uygun olmayan bir kullanım gerçekleştirmiştir.

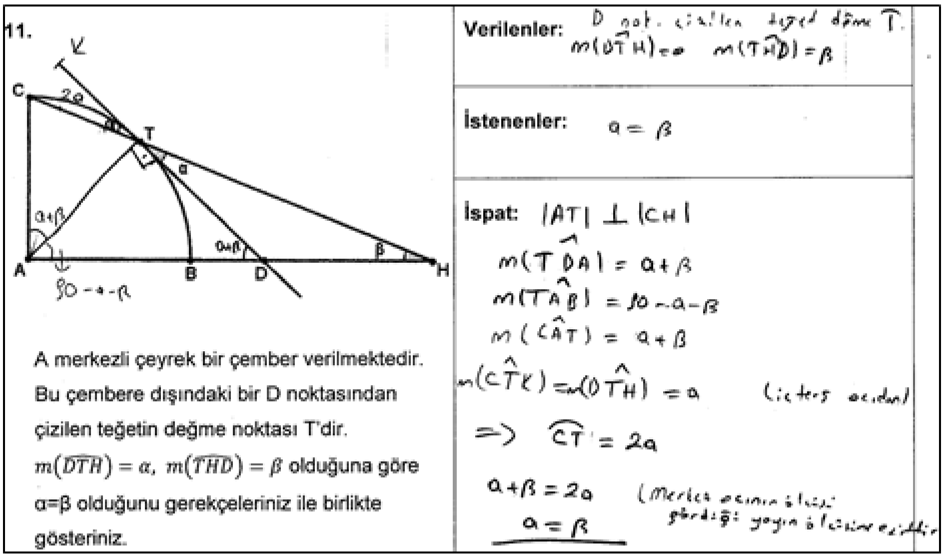
Matematiksel açıklamalar anlaşılır olup sadece matematiksel semboller ile ilgili hatalar yaparak MD2 kategorisinde yer alan ispatların deney grubunda % 33,59 ve kontrol grubunda ise % 25,3 oranında ortaya çıktığı görülmüştür. Dolayısıyla bu kategoriye yönelik ispatların deney grubunda daha fazla ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Deney grubunda yer alan ÖA19 kodlu öğretmen adayının matematik dilini kullanma bakımından MD2 kategorisinde yer alan ispatı Şekil 61’de sunulmuştur.




Şekil 61. MD2 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 61 incelendiğinde öğretmen adayı kenar uzunluklarını ifade ederken $|BC| = |LM|$ şeklinde uygun bir gösterim gerçekleştirirken yay ölçülerini ifade ederken uzunluğu ifade eden bir sembol tercih ederek hatalı bir kullanım gerçekleştirmiştir. Bu kullanımında çevre açının gördüğü yayın ölçüsünü belirtebilmek için $|\widehat{BC}| = 2y$ şeklindeki bir gösterim yerine $m(\widehat{BC}) = 2y$ şeklinde bir gösterim tercih etmelidir. Öğretmen adayı bu ispatında yay ölçülerinden bahsetmesi gereken her yerde yay uzunluğunu belirten semboller kullanmıştır. Böylece sadece matematiksel sembollere yönelik hatalı kullanımların söz konusu olduğu bir ispat oluşturmuştur.

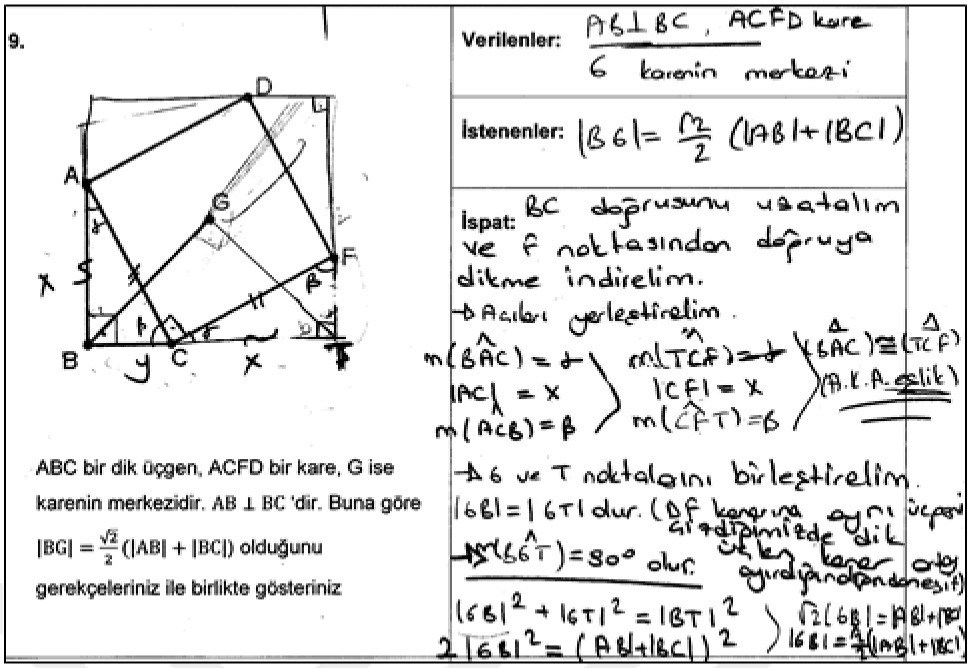
Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA54 kodlu öğretmen adayının sadece matematiksel sembollere yönelik hatalar yaparak MD2 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatı Şekil 62'de sunulmuştur.




Şekil 62. MD2 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 62'de görüldüğü gibi öğretmen adayı AT ile CH doğru parçalarının dik olduğunu ifade ederken $|AT| \perp |CH|$ şeklinde bir yazım tercih etmiştir. Bu doğru parçalarını sembolik olarak ifade etmek için "[ ]" sembolünü kullanması gerekirken uzunluk ifade etmede kullanılan "| |" sembolü kullanmıştır. Öğretmen adayı açı ölçülerini belirtirken "$m(\widehat{TDA}) = \alpha + \beta$" şeklinde bir yazım tercih ederek matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanmıştır. Ancak "$m(\widehat{TAB}) = 90 - \alpha - \beta$" şeklindeki yazımında derece işaretini kullanmayarak sembolik anlamda uygun olmayan bir kullanım gerçekleştirmiştir. Öğretmen adayının CT yayının ölçüsünü "$\widehat{CT} = 2a$" şeklinde ifade ederek matematiksel sembolleri kullanmayıp hatalı bir gösterim tercih etmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı matematiksel sembollerin kullanımda birçok hatalar yaparak matematik dilini kullanma bakımından MD2 kategorisine dâhil olan bir ispat oluşturmuştur.

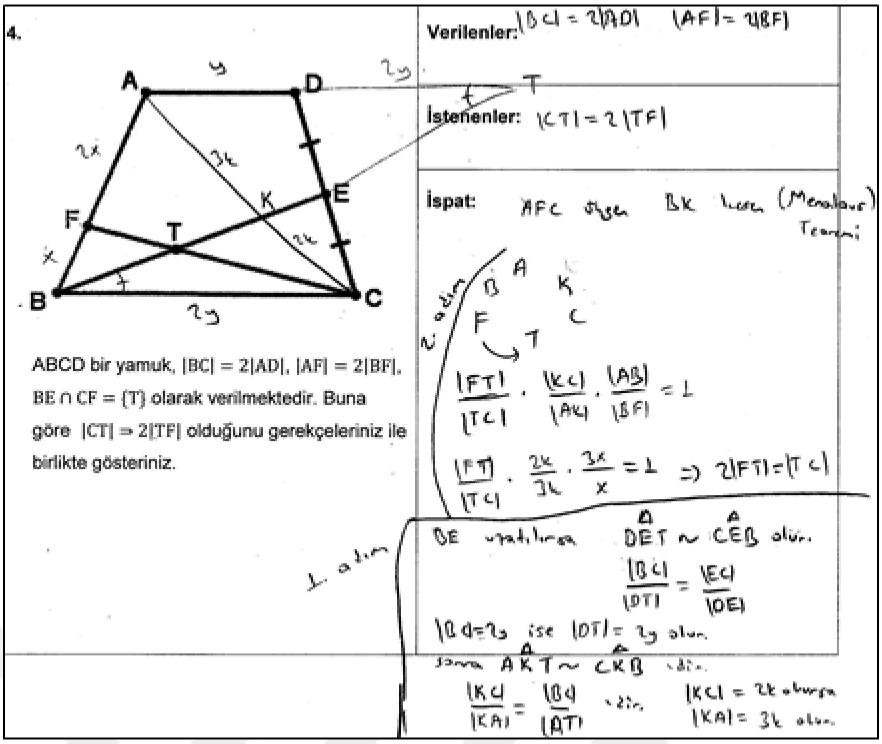
Matematik dilini kullanma bakımından MD3 kategorisinde yer alan ispatların deney grubunda % 55,21; kontrol grubunda ise % 34,52 oranında olmak üzere ispat süreçlerinde yer aldığı görülmüştür. Dolayısıyla deney grubunda daha fazla ortaya çıkmakla birlikte gruplar arasında oldukça fark olduğu göze çarpmaktadır. Ayrıca deney grubunda diğer kategoriler arasında en fazla ortaya çıkan ispatlar olduğu fark edilmiştir. Kontrol grubunda ise boş bıraktıkları ya da sadece verilen ve istenenleri yazdıkları durumlardan sonra MD3 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatları en fazla yaptıkları görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının genellikle ispat adımlarını belirtirken matematiksel kavram ve sembolleri uygun bir şekilde kullanmaya dikkat ettiklerini göstermektedir. Deney grubunda yer alan ÖA27 kodlu öğretmen adayının MD3 kategorisine yönelik ispatı Şekil 63'te sunulmuştur.




Şekil 63. MD3 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 63'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı gerek açı ölçüleri gerekse kenar uzunluklarını ifade ederken uygun sembolleri kullanmıştır. Örneğin BAC açısının ölçüsünün α'ya eşit olduğunu $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{BAC}}) = \alpha$, GB ile GT kenar uzunluklarının eşit olduğunu $|\mathrm{GB}| = |\mathrm{GT}|$ şeklinde göstererek uygun bir kullanım gerçekleştirmiştir. Açı ölçüsünü belirtirken $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{BGT}}) = 90^{\circ}$ şeklinde bir gösterim tercih ederek derece işaretini kullanmayı ihmal etmemiştir. Ayrıca BAC ile TCF üçgenlerinin eş olduğunu belirtmek için "$\cong$" sembolü kullanarak uygun bir tercih yapmış ve üçgenlerin eşliğini ifade ederken üçgenin isimlerindeki harf sıralamasına da dikkat etmiştir. Matematiksel sembollerin uygun kullanımı dışında ispat adımlarında yaptıklarına yönelik açıklamalarında geometrik kavramları uygun bir şekilde kullanmaya da özen göstermiştir.

Benzer şekilde kontrol grubunda yer alan ÖA59 kodlu öğretmen adayının ispat yaparken matematiksel kavram ve sembolleri uygun bir şekilde kullanması sonucunda MD3 kategorisinde yer alan ispatına Şekil 64'te yer verilmiştir.




Şekil 64. MD3 kategorisine yönelik ispat örneği

Şekil 64 incelendiğinde öğretmen adayı DET ile CEB üçgenleri ile AKT ile CKB üçgenlerinin benzer olduğunu ifade ederken "∼" sembolünü kullanarak uygun bir seçim yapmıştır. Ayrıca üçgenlerin benzerliğini belirtirken üçgenlerin isimlerinde yer alan harflerin sıralamasını benzerliğe göre ifade ederek sembolik olarak matematik dilini uygun bir şekilde kullanmıştır. Kenar uzunluklarını ifade ederken "| |" sembolünü tercih ederken uygun bir kullanım gerçekleştirmiştir. $\frac{|FT|}{|TC|} \cdot \frac{|KC|}{|AK|} \cdot \frac{|AB|}{|BF|} = 1$ işlemini yapma gerekçesi olarak "*AFC üçgen BK kesen (Menelaus Teoremi)*" sunduğu açıklamada da matematiksel kavram anlamında herhangi bir yanlışlık yoktur. Dolayısıyla öğretmen adayının ispat yaparken kullandığı matematiksel kavram ve sembollerde hatalı bir durum söz konusu değildir ve matematik dili boyutu bakımından MD3 kategorisi içerisinde değerlendirilen bir ispattır.

Uygulama sonrasında genel olarak öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel kavramlar ve sembollerin her ikisine yönelik uygun kullanımlar gerçekleştirdiği görülmüştür. Ancak kontrol grubunda boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazma durumlarının çoğunlukta olmasına bağlı olarak bu tür durumlar daha az ortaya çıkmıştır. Deney grubunda kontrol grubuna göre boş bırakma ve sadece verilenleri ve istenenleri yazma durumlarının oldukça az olduğu fark edilmiştir. Bu bakımdan deney grubunda hem matematiksel kavramlara hem de sembollerin kullanımına özellikle dikkat ettikleri ispatlar oldukça büyük bir çoğunluğa sahiptir. Ancak öğretmen adaylarının sadece matematiksel sembollerde hata yaptıkları durumlar da ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte grupların her ikisinde oldukça az rastlanmakla birlikte hem matematiksel kavramlar hem de sembollerde ya da sadece matematiksel açıklamalarda hataların olduğu ispatlar da yaptıkları görülmüştür.

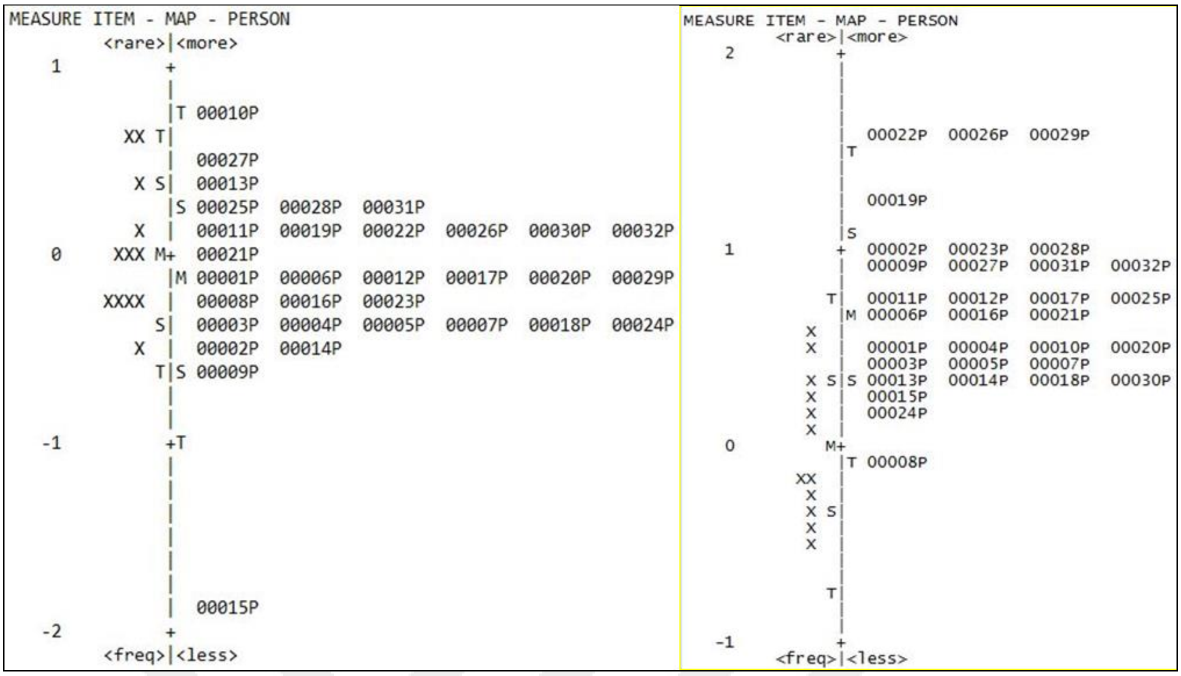
Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasında ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları ile ilgili son test özet istatistiği Tablo 27'de yer almaktadır.

Tablo 27. İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaya Yönelik Başarıları ile İlgili Son Test Özet İstatistiği

| | | Ham puan | | | | Lineer puan | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\bar{X}$ | SS | Max | Min | $\bar{X}$ | SS | Max | Min |
| Son test | Deney | 28 | 3,1 | 33 | 20 | 0,71 | 0,4 | 1,57 | -0,04 |
| | Kontrol | 19,3 | 7,2 | 29 | 2 | -0,02 | 0,48 | 0,66 | -1,44 |

Tablo 27 incelendiğinde deney ve kontrol grubunun ön test ham puan ortalamaları sırasıyla 28 ve 19,3 olduğu görülmektedir. Bu durumdan uygulama sonrasında deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarılarının birbirine yakın olmadığı anlaşılmaktadır. Ön test ham puan ortalamalarının lineer hale getirilmesi sonucunda elde edilen ortalamalar ise sırasıyla 0,71 ve -0,02'dir. Kontrol grubunda ham puan olarak toplamda 20 puandan az olan öğretmen adayı sayısının çoğunlukta olmasına bağlı olarak lineer puan ortalamasının negatif olarak ortaya çıktığı belirlenmiştir. Bu durum, her bir öğretmen adayının ispatlarında matematik dilini kullanma bakımından MD2 ve MD3 kategorilerine yönelik durumlar yer alsa da çoğunluğunun MD0 kategorisine ait olduğunu göstermektedir.

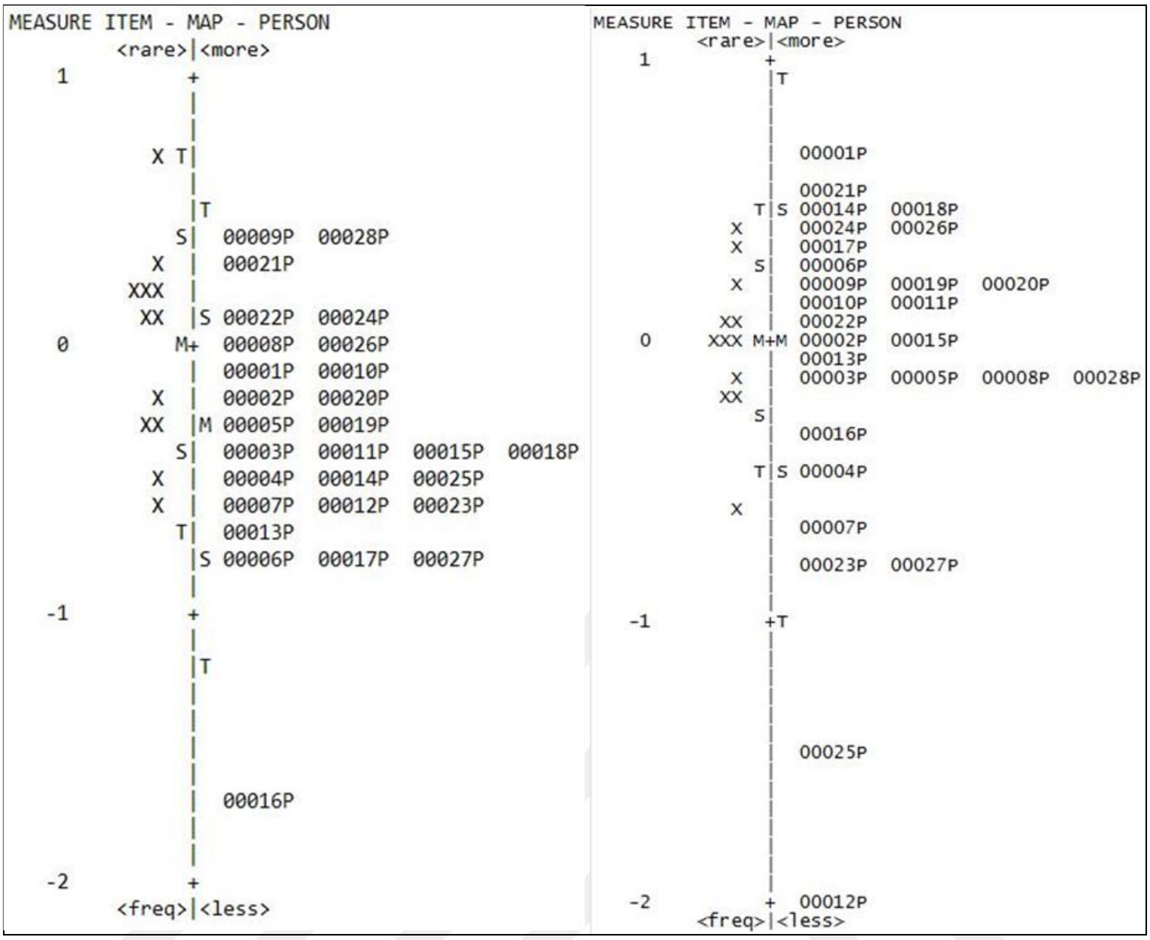
Öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları ile ilgili lineer puanlarının uygulama öncesi ve sonrasındaki değişimi görebilmek adına her bir grup için madde-kişi haritaları oluşturulmuştur. Deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanma ile ilgili ön test ve son test puanlarına yönelik madde-kişi haritaları Şekil 65'te sunulmuştur.




Şekil 65. Deney grubu ön test-son test madde-kişi haritaları

Şekil 65 incelendiğinde uygulamalar sonrasında deney grubunda yer alan öğretmen adaylarından biri hariç ispat sürecinde matematik dilini kullanma ile ilgili puanlarının 0 puanın üstünde olduğu görülmektedir. Uygulama öncesinde ise 0 puanın altında kalan öğretmen adayı sayısı 19 kişidir. Son test sonucunda matematik dilini kullanma bakımından 0 puanın altında kalan öğretmen adayı, ön testte de 0 puanın altında bir puan almıştır. Ancak son testte öğretmen adayının ispat sürecinde matematik dilini kullanma ile ilgili puanında çok az da olsa bir artış olmuştur. Genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanma ile ilgili puanlarında bir artış olduğu görülmektedir. Ayrıca uygulama sonrasında bazı öğretmen adayları aynı puan aralığında kalsa da puanlarında bir artışın olduğu fark edilmektedir.

Kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaları ile ilgili ön test ve son test puanlarına yönelik madde-kişi haritaları Şekil 66’da sunulmuştur.




Şekil 66. Kontrol grubu ön test-son test madde-kişi haritaları

Şekil 66’dan görüldüğü üzere uygulama öncesi ve sonrasında ispat sürecinde matematik dilini kullanma ile ilgili puanlar aynı aralıktadır. Ancak uygulama sonrasında ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik elde edilen puanlar, uygulama öncesi puanlar ile karşılaştırıldığında yukarıya doğru bir değişimin olduğu görülmektedir. Ön testte 0 puanın altında bir puana sahip olan öğretmen sayısı 21 iken son testte 0 puanın altında alan öğretmen sayısı 12’dir. Dolayısıyla bu durum öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanma ile ilgili puanlarında bir artışın olduğunu gösterir niteliktedir. Ancak son testte öğretmen adaylarının matematik dilini kullanmaya yönelik puanlarının azaldığı durumlar da söz konusu olup azınlıktadır.

Uygulama sonrası grupların ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarılarına ait son test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı ve varsa bu farklılığın gerçekten deneysel koşullara dayalı olarak ortaya çıkıp çıkmadığını belirleyebilmek için ön test puanları “ortak değişken” alınarak kovaryans (ANCOVA) analizi yapılmıştır. İspat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik son test ve düzeltilmiş son test puan ortalamalarını gösteren betimsel istatistikler Tablo 28’de yer alırken, grupların düzeltilmiş son test puan ortalamaları arasında gözlenen farkın anlamlı olup olmadığını gösteren ANCOVA analiz sonuçları Tablo 29'da yer almaktadır.

Tablo 28. Deney ve Kontrol Grubunun İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaya Yönelik Başarılarına İlişkin Son Test Puanları ile İlgili Betimsel İstatistik Sonuçları

| | | Son Test Puanı | | Düzeltilmiş Son Test Puanı | |
|---|---|---|---|---|---|
| Grup | n | $\overline{X}$ | SS | $\overline{X}_d$ | SH |
| Deney Grubu | 32 | 0,71 | 0,4 | 0,674 | 0,91 |
| Kontrol Grubu | 28 | - 0,11 | 0,65 | -0,067 | 0,97 |
| Toplam | 60 | 0,33 | 0,67 | | |

$\overline{X}_d$ : Düzeltilmiş Son Test Puan Ortalaması

Tablo 29. İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmaya Yönelik Başarılarına İlişkin Son Test Puanları ile İlgili ANCOVA Sonuçları

| Varyansın Kaynağı | Kareler Toplamı | Sd | Kareler Ortalaması | F | Anlamlılık Düzeyi | Etki Büyüklüğü (eta kare) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ön test | 1,584 | 1 | 1,584 | 6,184 | 0,016 | 0,098 |
| Yöntem | 7,769 | 1 | 7,769 | 30,328 | 0,000 | 0,347 |
| Hata | 14,602 | 57 | 0,256 | | | |
| Toplam | 32,641 | 59-60 | | | | |

Tablo 29'da yer alan ANCOVA analiz sonuçlarına göre İSMAT Modeline bağlı olarak tasarlanan öğrenme ortamında yapılan uygulamalarda yer alan deney grubu ile ispat öğretiminin geleneksel olarak yürütüldüğü kontrol grubunda bulunan öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarıları ile ilgili ön test puanları kontrol altına alındığında son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır ($F_{(1, 57)} = 30,328$, $p < 0,05$). Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarılarındaki gelişim, İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamındaki uygulamalar ile ilişkilidir. Dolayısıyla deney grubu için tasarlanan öğrenme ortamında ispat öğretimine yönelik yürütülen dersler öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarılarının gelişimine katkıda bulunmuştur.

### 4. 1. 3. Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Tercih Ettikleri İspat Yapıları ile İlgili Bulgular

Bu başlık altında tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalar yapılmadan önce ve uygulamalar yapıldıktan sonra deney ve kontrol grubunun ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Bu bulgular uygulama öncesi öğretmen adaylarının ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları ile ilgili bulgular ve uygulama sonrası öğretmen adaylarının ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları ile ilgili bulgular olmak üzere iki alt başlık altında sunulmuştur.

#### 4. 1. 3. 1. Uygulama Öncesi Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Tercih Ettikleri İspat Yapıları ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalardan önce deney ve kontrol grubunun ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları İSYBÖT üzerinden incelenmiştir. Bu testte yer alan her bir problem ispat yapısı boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama öncesinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları belirlenmiştir. Bu kısımda tercih ettikleri ispat yapıları bakımından ön testten elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının İSYBÖT'de yaptıkları ispatların ispat yapısı boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 30'da sunulmuştur.

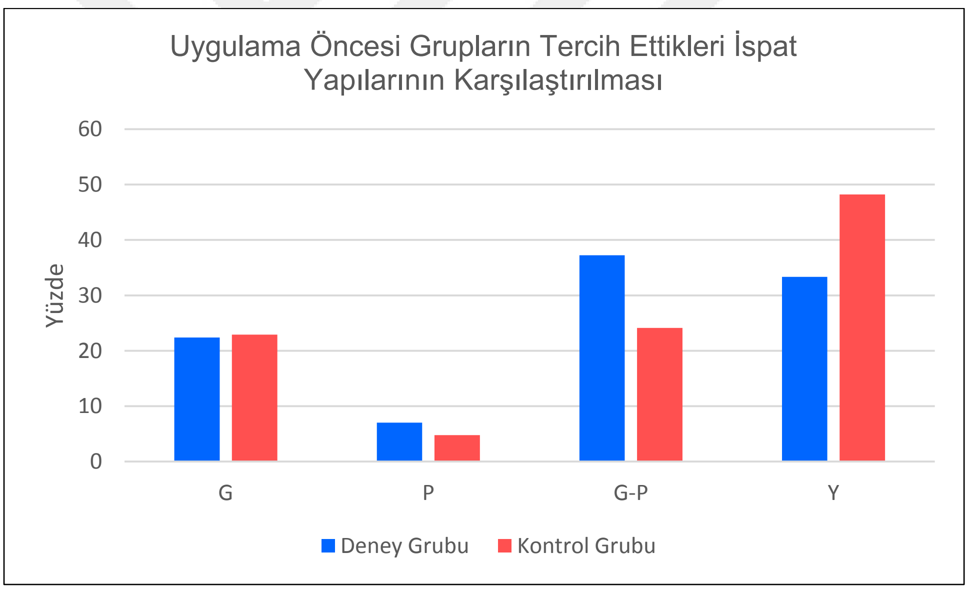
Tablo 30. Uygulama Öncesi İspat Yapısı Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| İspat yapısı boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | Kontrol Grubu | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | f | % | f | % |
| G | Geometrik ispat | 86 | 22,4 | 77 | 22,92 |
| P | Paragraf ispat | 27 | 7,03 | 16 | 4,76 |
| G-P | Geometrik ve paragraf ispat | 143 | 37,24 | 81 | 24,11 |
| Y | İspat yok | 128 | 33,33 | 162 | 48,21 |

Tablo 30 incelendiğinde deney grubunda ispat yapısı boyutunda yer alan kategorilerden G-P kategorisi en yüksek frekans (f = 143) ve yüzdeye (%37,24) sahiptir. Dolayısıyla deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde çoğunlukla hem geometrik hem de paragraf ispatı birlikte kullandığı anlaşılmaktadır. Bu durum bu grupta yer alan öğretmen adaylarının geometrik şekil üzerinde çeşitli işlemler yapmanın yanı sıra bu işlemlerin gidişatını da gösteren bir yazım tercih ettiklerini göstermektedir. Kontrol grubunda ise öğretmen adaylarının ispat yapmadıkları durumların çoğunlukta (f = 162, % 48,21) olduğu görülmektedir. Ancak deney grubunda da ispat yapmadıkları durumlar en yüksek frekans ve yüzdeye sahip olan G-P kategorisine göre önemli bir oranda ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının ispat yapmadıkları durumlardan sonra deney grubunda frekans ve yüzde bakımından sırasıyla G ve P kategorileri gelmektedir.

Dolayısıyla deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının sadece geometrik şekil üzerinde gösterimlerde bulunarak geometrik ispatlar yaptıkları da olmuştur. Kontrol grubunda ise Y kategorisinden sonra en yüksek frekans ve yüzdeye sahip olan kategoriler sırasıyla G-P ve G kategorileridir. Bu durum kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının geometrik şekil üzerinde çıkarımlarını belirtip bu çıkarımlarını belirli bir sıraya göre belirttiği durumlarla birlikte sadece geometrik şekil üzerinde gösterimlerde bulundukları ispatlar da yapmışlardır. İspat yapısı bakımından en düşük frekans ($f_D$ = 27, $f_k$ = 16) ve yüzdeye (sırasıyla % 7,03 ve % 4,76) sahip olan kategorinin ise her iki grup için de P kategorisi olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının geometrik şekil üzerinde herhangi bir gösterim ve işlem yapmadan ispat adımlarını farklı bir yere yazmayı tercih ettikleri durumların daha azınlıkta olduğunu göstermektedir.

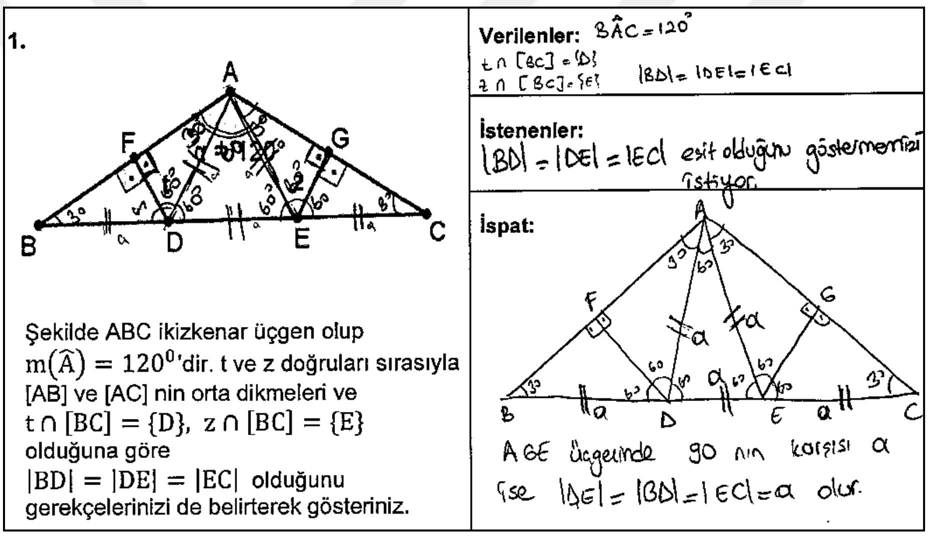
Öğretmen adaylarının uygulama öncesi ispat yapısı boyutu bakımından deney ve kontrol grubu arasındaki değişimi gösteren Grafik 5 aşağıda sunulmuştur.




Grafik 5. Uygulama öncesi grupların tercih ettikleri ispat yapılarının karşılaştırılması

Grafik 5 incelendiğinde öğretmen adaylarının ispat sürecinde geometrik ispatı tercih ettikleri durumların deney ve kontrol grubunda birbirine oldukça yakın bir oranda ortaya çıktığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının paragraf ispatı tercih ettikleri durumlar ise her iki grupta da en az ortaya çıkan durumlar olmak üzere deney grubunda biraz daha fazla ortaya çıktığı fark edilmektedir. Hem geometrik ispatı hem paragraf ispatı bir arada kullanmayı daha çok tercih eden grubun ise deney grubu olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca deney grubunda bu tür ispatların diğer ispat yapıları arasında en fazla karşılaşılan durumlar olduğu dikkat çekmektedir. Büyük bir çoğunluğa sahip olan durumlardan birinin de öğretmen adaylarının ispat yapmadıkları durumlar olduğu göze çarpmaktadır. Ancak gruplar arasında ispat yapmama bakımından karşılaştırma yapıldığında bu tür durumlara kontrol grubunda daha çok karşılaşıldığı görülmektedir.

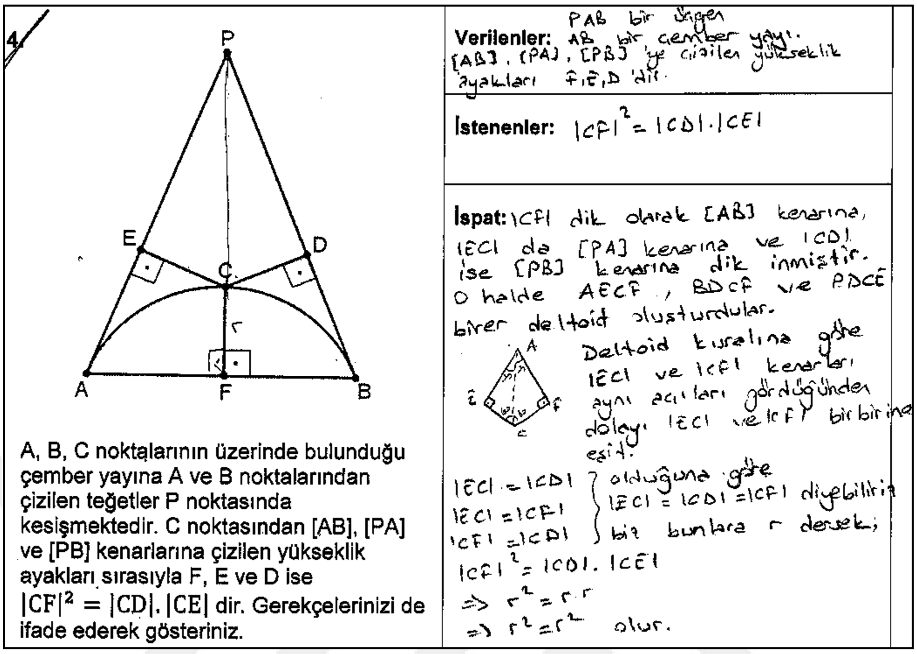
Öğretmen adaylarının ispat sürecinde sadece geometrik şekil üzerinde çıkarımlarını ifade ederek geometrik ispat yapmayı tercih ettikleri durumlar deney grubunda % 22,4; kontrol grubunda ise % 22,92 oranında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla grupların geometrik ispat yapma oranlarının birbirine oldukça yakın olduğu fark edilmektedir. Bununla birlikte öğretmen adayları geometrik ispatı, genellikle bir ya da birden fazla çıkarımda bulunup ispata devam etmediği, ispat için izledikleri adımları yazmadığı ya da çıkarımlarına yönelik gerekçeler sunmadığı durumlarda tercih ettiği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde yapmış olduğu geometrik ispatlardan birine Şekil 67'de yer verilmiştir.




Şekil 67. Geometrik ispat örneği

Şekil 67'den görüldüğü üzere öğretmen adayı matematiksel ilişkinin ispatı için izlediği bütün adımları geometrik şekil üzerinde göstererek geometrik bir ispat yapmayı tercih etmiştir.

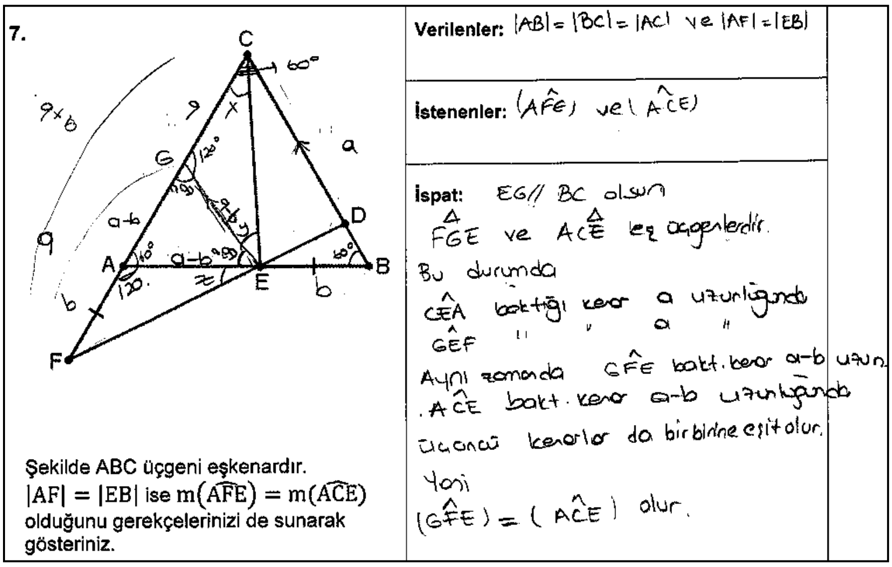
İspat sürecinde geometrik şekil üzerinde herhangi bir gösterimde bulunmayıp ispat adımlarını ayrı bir yerde belirli bir sıra takip ederek yazdıkları durumların deney grubunda % 7,03 ve kontrol grubunda % 4,76 oranında olduğu görülmüştür. Dolayısıyla deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının bu ispat yapısını kontrol grubuna göre daha fazla tercih ettiği anlaşılmaktadır. Ancak ispat sürecinde grupların her ikisinin de en az tercih ettiği ispat yapısının paragraf ispat olduğu fark edilmiştir. Bu ispat yapısını, genellikle geometrik şekil üzerinde gösteremeyecekleri bir ya da birden fazla çıkarımda bulundukları ya da çıkarımlarıyla birlikte gerekçelerini sundukları durumlarda tercih ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları paragraf ispatlardan biri Şekil 68'de sunulmuştur.




Şekil 68. Paragraf ispat örneği

Şekil 68'den görüldüğü üzere öğretmen adayı, hiçbir çıkarımını geometrik şekil üzerinde göstermeden bütün ispat adımlarını ayrı bir yerde gerekçeleri ile birlikte sunmuştur. Ayrıca geometrik şekil üzerinde göstermek istediği bir durumu da ispat adımlarını yazdığı kısımda ifade ederek paragraf ispat yapmayı tercih etmiştir.

Öğretmen adaylarının geometrik ve paragraf ispatı birlikte kullandığı durumlar, deney grubunda % 37,24 ve kontrol grubunda % 24,11 oranına sahip olarak ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla bu ispat yapısının deney grubunda daha fazla ortaya çıktığı fark edilmiştir. Ayrıca bu grupta en fazla tercih edilen ispat yapısı olduğu dikkat çekmiştir. Bu bakımdan deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde çoğunlukla geometrik ve paragraf ispatı birlikte kullanmayı tercih ettiği belirtilebilir. Öğretmen adayları bu ispat yapısını tercih etmeleri ile birlikte çıkarımlarını hem geometrik şekil üzerinde hem de ispat adımı olarak gösterme eğiliminde oldukları anlaşılmaktadır. Öğretmen adayları, bu ispat yapısını genellikle ek çizim yaparak ayrıntıları geometrik şekil üzerinde gösterme ve çıkarımlarına yönelik gerekçeler sunma gibi ihtiyaçlarının sonucunda ya da ispat adımlarının fazla olduğu, birden çok çıkarımda bulunduğu durumlarda tercih ettikleri fark edilmiştir. Öğretmen adaylarının geometrik ve paragraf ispatı birlikte yapmayı tercih ettikleri ispatlardan biri Şekil 69'da sunulmuştur.




Şekil 69. Geometrik ve paragraf ispat örneği

Şekil 69'da görüldüğü gibi öğretmen adayı, çıkarımlarından bazılarını ve ek çizimini geometrik şekil üzerinde göstermekle birlikte ispat adımlarını belirli bir sıra takip ederek ayrı bir yere yazıp geometrik ve paragraf ispat yapmayı tercih etmiştir.

Uygulama öncesinde deney grubunda % 33,33 ve kontrol grubunda % 48,21 gibi yüksek bir oranda olmak üzere ispat yapmadıkları durumların olduğu görülmüştür. Ancak bu tür durumlar, deney grubunda ispat yapısı boyutunda yer alan diğer kategorilere göre en büyük çoğunluğa sahip olan kategori olmadığı fark edilmiştir. Kontrol grubunda ise bu durumların en çok karşılaşılan durumlar olduğu dikkat çekmiştir. Dolayısıyla deney grubunda ispatın yapılmadığı kontrol grubuna göre daha az oranda ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

Uygulama öncesinde genel olarak deney grubunda yer alan öğretmen adayları ispat yapısı bakımından çoğunlukla geometrik ispat ile paragraf ispatı birlikte yapmayı tercih etmişlerdir. Bu durum öğretmen adaylarının ispata yönelik çıkarımlarını hem geometrik şekil üzerinde hem de ispat adımı olarak görülmesini sağlayacak şekilde bir yazımı daha çok tercih ettiğini göstermektedir. Kontrol grubunda ise herhangi bir çıkarımda bulunmayıp ispat yapmadığı durumların çoğunlukta olduğu görülmüştür. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının en az tercih ettikleri ispat ise paragraf ispattır. Bu belirtilen durumlar, öğretmen adaylarının genellikle çıkarımlara yönelik gerekçeler sunmaktan ve ispat adımlarını yazmaktan kaçındıkları ya da sadece ispat adımlarını belirten bir yazım yerine geometrik şekil üzerinde de gösterilmesinden yana olduklarına işaret etmektedir.

### 4. 1. 3. 2. Uygulama Sonrası Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Tercih Ettikleri İspat Yapıları ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalardan sonra deney ve kontrol grubunun ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları İSYBST üzerinden incelenmiştir. Bu testte yer alan her bir problem ispat yapısı boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama sonrasında öğretmen adaylarının ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları belirlenmiştir. Bu kısımda tercih ettikleri ispat yapıları bakımından son testten elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra öğretmen adaylarının örnek çözümleri ile desteklenerek sunulmuştur.

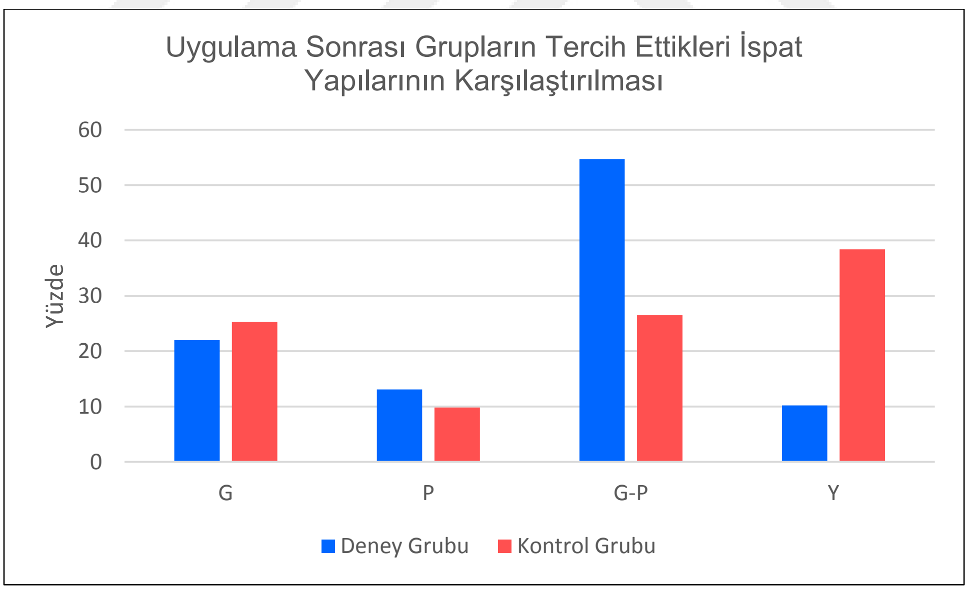
Öğretmen adaylarının İSYBST'de yaptıkları ispatların ispat yapısı boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 31'de sunulmuştur.

Tablo 31. Uygulama Sonrası İspat Yapısı Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| İspat yapısı boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | Kontrol Grubu | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | f | % | f | % |
| G | Geometrik ispat | 84 | 21,99 | 85 | 25,3 |
| P | Paragraf ispat | 50 | 13,09 | 33 | 9,82 |
| G-P | Geometrik ve paragraf ispat | 209 | 54,71 | 89 | 26,49 |
| Y | İspat yok | 39 | 10,21 | 129 | 38,39 |

Tablo 31'den görüldüğü üzere deney grubunda ispat yapısı boyutuna yönelik kategorilerden en yüksek frekans (f = 209) ve yüzdeye (% 54,71) sahip olan G-P kategorisidir. Bu durum deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının büyük bir oranda ispat sürecinde geometrik şekil üzerinde bazı gösterimlerde bulunmakla birlikte matematiksel ilişkiye ulaşmak için gerekli olan ispat adımlarının her birini belirli bir sıraya göre yazmayı tercih ettiği anlamına gelmektedir. Kontrol grubunda ise ispat yapısı boyutunda yer alan kategoriler arasında en yüksek frekans (f = 129) ve yüzdeye (% 38,39) sahip olan Y kategorisidir. Bu durum kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının matematiksel ilişkilerin ispatını yapmak için herhangi bir girişimde bulunmadığı durumların çoğunlukta olduğunu göstermektedir. Deney grubunda G-P kategorisinden sonra frekans ve yüzde bakımından sırasıyla G ve P kategorileri gelmektedir. Ancak bu kategorilerle G-P kategorisi arasında frekans ve yüzde bakımından büyük bir fark söz konusudur. Dolayısıyla deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat ile ilgili çıkarımlarını sadece geometrik şekil üzerinde gösterdiği ya da ispat adımlarını belirli bir sıraya göre geometrik şekil üzerinde gösterimlerde bulunmaksızın yaptığı durumlarla da karşılaşılmıştır. Ancak bu durumlar hem geometrik şekil üzerinde çıkarımlarını belirtip hem de ispat adımlarını belirli bir sıraya göre farklı bir yere yazdıkları durumlara göre daha az ortaya çıkmıştır. Kontrol grubunda ise Y kategorisinden sonra en yüksek frekans ve yüzdeye sahip olan kategoriler sırasıyla G-P ve G kategorileridir. Ancak bu kategorilere yönelik frekans ve yüzdeler birbirine oldukça yakındır. Bu durum kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispat için ifade ettikleri çıkarımları hem geometrik şekil üzerinde hem de ispat adımları şekilde yazdığı durumlar ile sadece geometrik şekil üzerinde gösterimlerde bulundukları durumların birbirine yakın bir oranda gerçekleştiği anlaşılmaktadır. Deney grubunda en az frekans ve yüzdeye sahip olan Y kategorisidir. Bu durum bu grupta yer alan öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasında ispat yapmadıkları durumların azaldığını göstermektedir. Kontrol grubunda geometrik şekil üzerinde herhangi bir gösterimde bulunmayıp sadece ispat adımlarını yazdıkları durumlara daha az rastlandığından P kategorisi en az frekans (f = 33) ve yüzdeye (% 9,82) sahiptir.

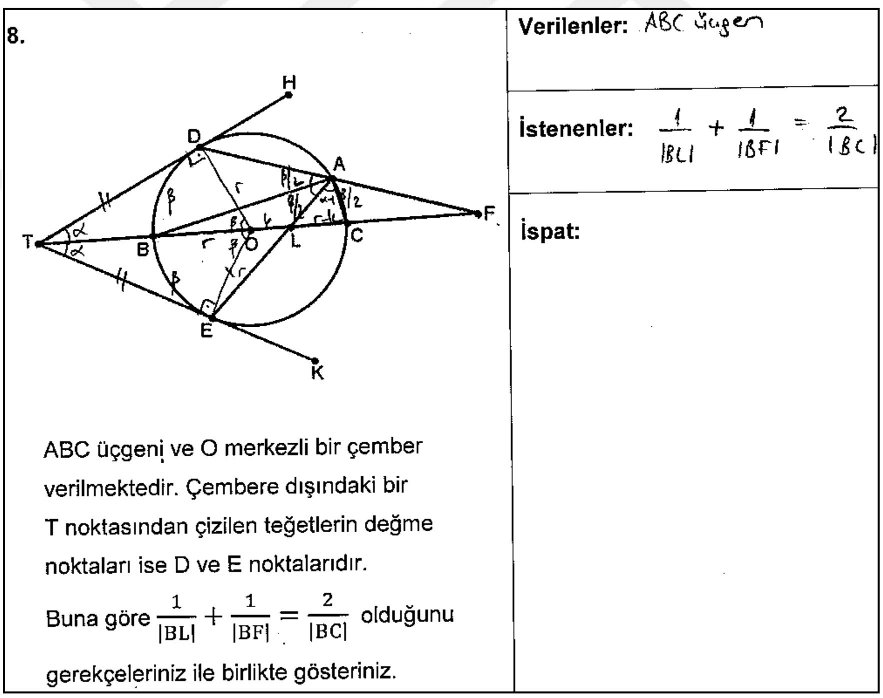
Öğretmen adaylarının uygulama sonrası ispat yapısı boyutu bakımından deney ve kontrol grubu arasındaki değişimi gösteren Grafik 6 aşağıda sunulmuştur.




Grafik 6. Uygulama sonrası grupların tercih ettikleri ispat yapılarının karşılaştırılması

Grafik 6 incelendiğinde deney grubunun büyük bir çoğunlukla ispat sürecinde geometrik ve paragraf ispatı birlikte kullanmayı tercih ettiği görülmektedir. Ayrıca hem geometrik hem de paragraf ispatı birlikte yaptıkları durumlar bakımından kontrol grubu ile oldukça fark olduğu göze çarpmaktadır. Benzer bir durumun kontrol grubunun ispat yapmadıkları durumların oldukça fazla olmasına bağlı olarak ortaya çıktığı dikkat çekmektedir. Bu durumların deney grubunda en az oranda ortaya çıktığı da göze çarpmaktadır. İspat sürecinde paragraf ispat yaptıkları durumların ise deney grubunda daha fazla ortaya çıkmakla birlikte kontrol grubunda en az ortaya çıkan durum olduğu görülmektedir. Deney grubunda daha fazla tercih edilmekle birlikte her iki grupta da geometrik ispat yapılan durumların ortaya çıktığı fark edilmektedir.

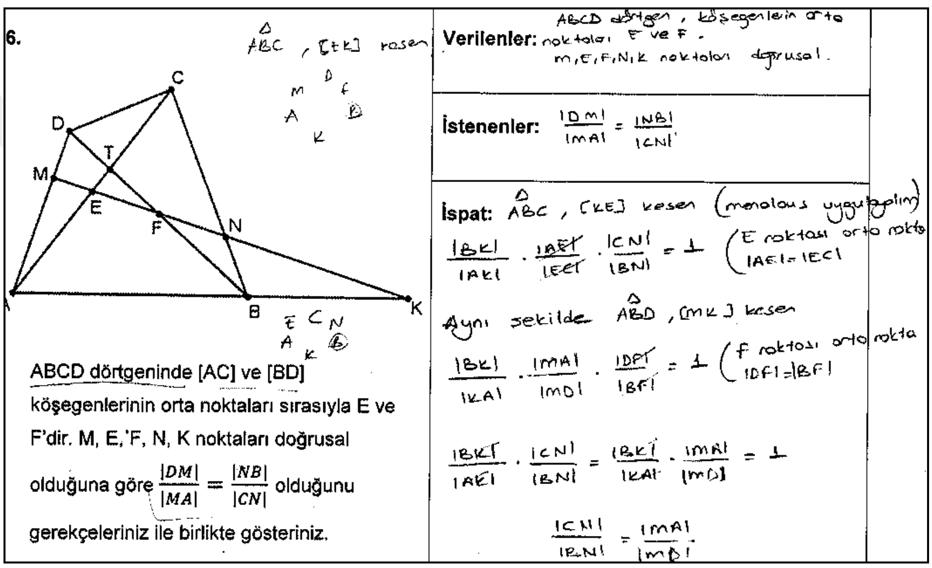
İspat sürecinde geometrik ispat yapmayı tercih ettikleri durumların deney grubunda % 21,99 ve kontrol grubunda % 25,3 oranında ortaya çıktığı görülmüştür. Deney grubunda hem geometrik hem de paragraf ispat yapmanın dışında en fazla ortaya çıkan durumun geometrik ispatların yapılması olduğu belirlenmiştir. Kontrol grubunda ise bu ispatlar deney grubuna göre daha fazla ortaya çıkmakla birlikte geometrik ve paragraf ispatın birlikte kullanıldığı durumlar ile hemen hemen aynı oranda ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının geometrik ispatı tercih ettikleri durumlar, çoğunlukla bir ya da birden fazla çıkarımlarda bulunup ispata devam etmedikleri durumlar olduğu fark edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları geometrik ispatlardan biri Şekil 70'de sunulmuştur.




Şekil 70. Geometrik ispat örneği

Şekil 70'den görüldüğü üzere ispata başlamak için uygun birçok çıkarımda bulunarak bunları sadece geometrik şekil üzerinde herhangi bir gerekçe sunmayarak belirtmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayı ispat için gerekli olan bütün çıkarımları belirleyemediği durumu geometrik bir ispat yaparak ifade etmiştir.

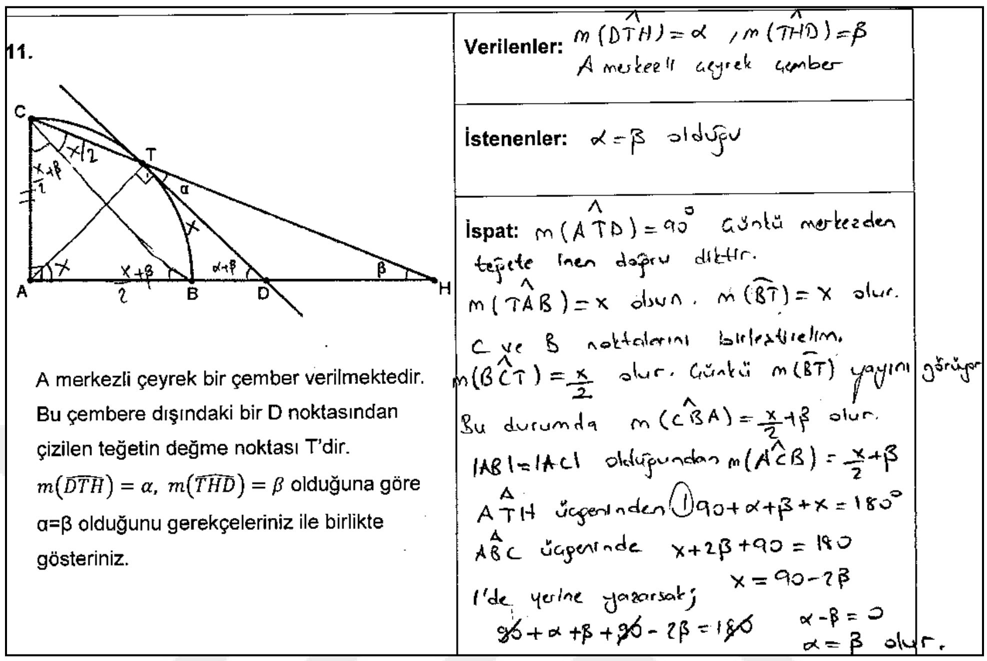
İspat sürecinde deney grubunun % 13,09; kontrol grubunun ise % 9,82 oranında olmak üzere paragraf ispat yapmayı tercih ettiği görülmüştür. Deney grubunda bu ispat yapısına daha çok rastlanmakla birlikte kontrol grubunun matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmak için en az paragraf ispata başvurduğu fark edilmiştir. Öğretmen adayları bu ispata genellikle çıkarımları geometrik şekil üzerinde gösteremedikleri, sadece işlemleri ifade ettikleri, gerekçeli ya da gerekçesiz olmak üzere birden fazla çıkarımda bulunup ispata devam etmedikleri, ispat için gerekli olan bütün çıkarımları gerekçeleri ile birlikte sundukları durumlarda tercih etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde yapmış olduğu paragraf ispatlardan birine Şekil 71'de yer verilmiştir.




Şekil 71. Paragraf ispat örneği

Şekil 71'de görüldüğü gibi öğretmen adayı, ispata yönelik çıkarımların geometrik şekil üzerinde gösterilebilecek türde olmamasına bağlı olarak izlediği ispat adımlarını gerekçeleri ile birlikte sunarak bir paragraf ispat yapmıştır.

İspat sürecinde hem geometrik ispat hem de paragraf ispatı kullanmayı tercih ettiği durumlar deney grubunda % 54,71; kontrol grubunda ise % 26,49 oranında ortaya çıkmakla birlikte gruplar arasında oldukça fazla bir fark olduğu görülmektedir. Bu durum, deney grubunda çoğunlukta olmak üzere öğretmen adaylarının çıkarımlarını geometrik şekil üzerinde göstermenin yanı sıra ispat adımları halinde de gösterme ihtiyacı duyduklarını göstermektedir. İspat yapısı boyutunda yer alan kategorilerden geometrik ve paragraf ispat, çoğunlukla birden çok çıkarımda bulunup bu çıkarımlara yönelik gerekçelerin sunulduğu ya da sistematik ve açıklayıcı bir ispat oluşturmak istendiği durumlarda kullanılmıştır. Bu ispat yapısını bütün çıkarımları gerekçeleri ile birlikte ifade ettikleri durumlarda olduğu gibi birden çok çıkarımda bulunup ispata devam etmedikleri durumlarda da tercih etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde geometrik ve paragraf ispatı birlikte yaptığı durumlardan birine Şekil 72'de yer verilmiştir.




Şekil 72. Geometrik ve paragraf ispat örneği

Şekil 72'den görüldüğü üzere öğretmen adayı, ispatın temelini oluşturan çıkarımlar ile ek çizimlerini geometrik şekil üzerinde göstermiştir. Ayrıca ispat adımlarını belirli bir sıra izleyip bu adımlara yönelik gerekçelerini ayrı bir yerde belirtmiştir. Dolayısıyla böyle bir yazım tercih ederek geometrik ve paragraf ispatı birlikte kullanıp ispatını tamamlamıştır.

Öğretmen adaylarının ispat yapmadıkları durumlar ise deney grubunda % 10,21 ve kontrol grubunda % 38,39 oranında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla ispat yapmama bakımından gruplar arasında oldukça fazla bir fark olduğu görülmektedir. Ayrıca kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının matematiksel bir ilişkinin ispatı için girişimde bulunmadıkları durumların diğer kategoriler arasında en yüksek orana sahip olduğu dikkat çekmektedir. Deney grubunda ise ispat yapmamalarının ispat süreci içerisinde en az ortaya çıkan durum olduğu fark edilmektedir.

Uygulama sonrasında genel olarak deney grubunda yer alan öğretmen adayları ispat sürecinde geometrik ve paragraf ispatı birlikte kullanıp çıkarımlarını hem geometrik şekil üzerinde gösterip hem de ispat adımı halinde yazmayı tercih etmişlerdir. Bu ispat yapısından sonra sırasıyla geometrik ispat ya da paragraf ispatı tercih etmişlerdir. Kontrol grubunda ise uygulama sonrasında da ispat yapmadıkları durumların çoğunlukta olduğu görülmüştür. İspat yapmadıkları durumların dışında sırasıyla en çok geometrik ve paragraf ispatı birlikte ya da sadece geometrik ispatı tercih ettikleri belirlenmiştir. Deney grubunda en az karşılaşılan durum, ispat yapmamalarıdır. Kontrol grubunda ise ispat sürecinde en az paragraf ispatı tercih ettikleri görülmüştür. Dolayısıyla uygulamalar sonrasında gruplar arasında ispat yapısı bakımından büyük bir farklılaşma söz konusudur.

### 4. 2. Tasarlanan Öğrenme Ortamının Matematik Öğretmeni Adaylarının Varsayımda Bulunmaları Üzerine Etkisi ile İlgili Bulgular

Bu kısımda tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının varsayımda bulunmaları üzerine etkisi ile ilgili bulgular *Doğruluk* ve *Matematik Dili* boyutlarına bağlı olarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımların doğruluğu ile ilgili bulgular ve öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımları ifade ederken kullandıkları matematik dili ile ilgili bulgular olmak üzere iki başlık altında bu bulgulara yer verilmiştir.

#### 4. 2. 1. Öğretmen Adaylarının Ürettikleri Varsayımların Doğruluğu ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamında yapılan uygulamaların sonrasında deney ve kontrol grubunun varsayımda bulunmalarını belirleyebilmek için VBT uygulanmıştır. Bu test doğruluk boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama sonrası öğretmen adaylarının varsayımlarının doğruluğu ile ilgili veriler elde edilmiştir. Bu kısımda VBT'den elde edilen veriler, betimsel olarak sunulduktan sonra yapılan klinik mülakatlar ve öğretmen adaylarının örnek varsayımları ile desteklenerek sunulmuştur. Ayrıca her bir grup içinde öğretmen adaylarının varsayımlarının doğruluk boyutunda yer alan kategorilere yönelik puan dağılımının ilişki olup olmadığını, varsayımların doğruluğu ile ilgili puanların dağılımı, varsayım üretme sayısı ve doğru varsayım üretme sayısının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının VBT'de yer alan her bir problem için üretilen varsayımların doğruluk boyutu bakımından yer aldığı kategoriler ve bu kategorilere yönelik frekans ve yüzde dağılımları Tablo 32'de sunulmuştur.

Tablo 32. VBT'de Yer Alan Problemler İçin Üretilen Varsayımların Doğruluk Boyutu Bakımından Yer Aldığı Kategorilere Yönelik Frekans ve Yüzde Dağılımları

| VBT Problemler | Deney Grubu | | | Kontrol Grubu | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kategoriler | f | % | Kategoriler | f | % |
| 1 | VD0 | 22 | 27,16 | VD0 | 13 | 20 |
| | VD1 | 7 | 8,64 | VD1 | 10 | 15,38 |
| | VD2 | 18 | 22,22 | VD2 | 18 | 27,7 |
| | VD3 | 34 | 41,98 | VD3 | 24 | 36,92 |

Tablo 32'nin devamı

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | VD0 | 6 | 8,34 | VD0 | 4 | 5,88 |
| | VD1 | 10 | 13,89 | VD1 | 13 | 19,12 |
| | VD2 | 19 | 26,39 | VD2 | 19 | 27,94 |
| | VD3 | 37 | 51,38 | VD3 | 32 | 47,06 |
| 3 | VD0 | 9 | 43,07 | VD0 | 11 | 25,58 |
| | VD1 | 7 | 17,95 | VD1 | 8 | 18,6 |
| | VD2 | 13 | 33,34 | VD2 | 12 | 27,91 |
| | VD3 | 10 | 25,64 | VD3 | 12 | 27,91 |
| 4 | VD0 | 25 | 64,1 | VD0 | 18 | 50 |
| | VD1 | 2 | 5,13 | VD1 | 3 | 8,33 |
| | VD2 | 11 | 28,21 | VD2 | 15 | 41,67 |
| | VD3 | 1 | 2,56 | VD3 | - | - |
| 5 | VD0 | 15 | 26,1 | VD0 | 10 | 20,41 |
| | VD1 | 2 | 4,35 | VD1 | 10 | 20,41 |
| | VD2 | 13 | 28,26 | VD2 | 10 | 20,41 |
| | VD3 | 16 | 34,78 | VD3 | 19 | 38,77 |
| 6 | VD0 | 35 | 61,4 | VD0 | 30 | 57,7 |
| | VD1 | 8 | 14,04 | VD1 | 9 | 17,3 |
| | VD2 | 12 | 21,05 | VD2 | 12 | 23,08 |
| | VD3 | 2 | 3,51 | VD3 | 1 | 1,92 |

VD0 a. Herhangi bir varsayımda bulunmamıştır.
b. Temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade etmiştir.
VD1 Yanlış bir varsayım üretmiştir.
VD2 Varsayımını özel bir durumu ele alarak üretmiştir.
VD3 Doğru bir varsayım üretmiştir.

Genel olarak incelendiğinde deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımların doğruluğu açısından soruların çoğunda VD2 ve VD3 kategorilerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının çoğunlukla özel bir durumu ele alarak ya da soruda yer alan durumun geneline hitap eden doğru varsayımlar ürettiklerini göstermektedir. Ancak soruların bazılarında VD0 ve VD1 kategorilerinde yoğunluğun olduğu fark edilmektedir. Varsayımların doğruluğu bakımından öğretmen adaylarının varsayımlarının çoğunluğunun VD0 ve VD1 kategorilerine ait olduğu sorular, 4. ve 6. sorulardır. Dolayısıyla bu sorularda öğretmen adaylarının varsayım üretmedikleri, temel düzeyde bilinen bir varsayımı yeniden ifade ettikleri ya da yanlış varsayımlar ürettikleri durumların çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının bu sorulara yönelik doğru varsayımlar üretme ve hatta özel durumları ele alarak varsayımda bulunma bakımından yetersiz kalmaları, soruda belirtilen duruma yönelik geometrik şekli kapsamlı olarak çizememelerine bağlı olabilir. Bununla birlikte soruda belirtilenleri kendi çizimleri üzerinde matematiksel bilgilerini de kullanamamalarına bağlı olarak belirleyememeleri VD2 ve VD3 kategorilerine yönelik bir yoğunluğun oluşmasına engel olmuş olabilir.

Öğretmen adaylarının VBT'de ürettikleri varsayımların doğruluk boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilmesi sonucunda elde edilen frekans ve yüzde dağılımı Tablo 33'te sunulmuştur.

Tablo 33. Varsayımların Doğruluk Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

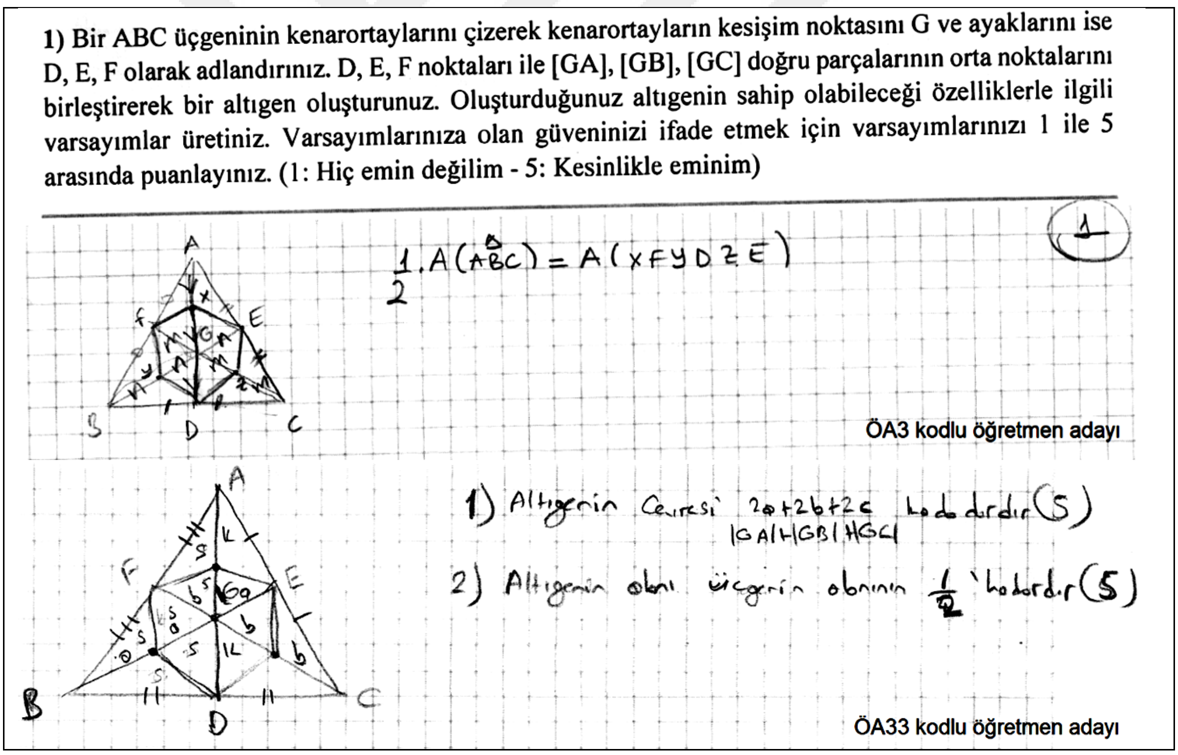
| Doğruluk boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | Kontrol Grubu | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | f | % | f | % |
| VD0 | a. Herhangi bir varsayımda bulunmamıştır. | 63 | 18,86 | 53 | 16,93 |
| | b. Temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade etmiştir. | 49 | 14,67 | 33 | 10,54 |
| VD1 | Yanlış bir varsayım üretmiştir. | 36 | 10,78 | 53 | 16,93 |
| VD2 | Varsayımını özel bir durumu ele alarak üretmiştir. | 86 | 25,75 | 86 | 27,48 |
| VD3 | Doğru bir varsayım üretmiştir. | 100 | 29,94 | 88 | 28,12 |

Genel olarak incelendiğinde öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımların doğruluğu bakımından VD2 ve VD3 kategorilerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. VD2 ve VD3 kategorilerine yönelik toplam oranın her iki grupta da % 56'a yakın olması, yoğunlaşmanın bu kategoriler üzerinde olduğunu göstermektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının varsayımlarının çoğunluğunun doğru ya da özel duruma uygun olduğu anlamına gelmektedir.

Her bir kategori ayrı olarak incelendiğinde VD3 kategorisine yönelik varsayımların deney grubunda % 29,94 ve kontrol grubunda % 28,12 oranına sahip olduğu görülmektedir. Dolayısıyla deney grubunda bu tür varsayımlar biraz daha fazla olmak üzere grupların doğru varsayım üretme oranlarının birbirine yakın olduğu dikkat çekmektedir. Özel durumları ele alarak varsayım üretmeleri sonucunda VD2 kategorisinde yer alan varsayımların deney grubunda % 25,75 ve kontrol grubunda % 27,48 oranında olup birbirine oldukça yakın olduğu fark edilmektedir. Grupların ürettiği bu tür varsayımların VD3 kategorisinde yer alan varsayımlardan sonra en fazla üretilen varsayımlar olduğu da göze çarpmaktadır.

Öğretmen adaylarının en az sayıda ürettiği varsayımların VD1 ve VD0 kategorilerine ait olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları yanlış varsayımlar üretmeleri sonucunda VD1 kategorisinde yer alan varsayımların deney grubunda % 10,78 ve kontrol grubunda % 16,93 oranında yer aldığı fark edilmektedir. Bu durum, deney grubunda bu tür varsayımlara daha az rastlandığını göstermektedir. Ayrıca diğer kategorilerde yer alan varsayımlara göre deney grubunda en az sayıda üretilen varsayımlar olduğu dikkat çekmektedir. Deney grubunda % 14,67 ve kontrol grubunda % 10,54 oranında yer alarak VD0b göstergesi içerisinde değerlendirilen varsayımların kontrol grubunda en az sayıda üretildiği fark edilmektedir. Bu durum, deney grubunun temel düzeyde bilinen teoremleri yeniden ifade ettikleri durumların kontrol grubuna göre daha fazla olduğunu göstermektedir. VD0a göstergesine ait varsayımlar, deney grubunda % 18,86; kontrol grubunda ise % 16,93 oranına sahip olarak öğretmen adaylarının varsayım üretmedikleri ya da varsayım niteliği taşımayan durumlara yönelik ifadeler de kullandıkları anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının doğru varsayım ürettikleri durumlar, deney grubunda % 29,94 ve kontrol grubunda % 28,12 oranında ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durum, gruplar arasında VD3 kategorisine yönelik varsayımlar üretme bakımından çok az bir farklılık olduğunu göstermektedir. Ayrıca grupların her ikisinde de bu kategoriye yönelik varsayımların çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Deney grubunda yer alan ÖA3 ve kontrol grubunda yer alan ÖA33 kodlu öğretmen adaylarının aynı soru ile ilgili olmak üzere VD3 kategorisine yönelik ürettiği varsayımlar Şekil 73'te sunulmuştur.




Şekil 73. VD3 kategorisi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 73'ten görüldüğü üzere ÖA3 kodlu öğretmen adayı ABC üçgeninin alanının yarısının kendi isimlendirmesine bağlı olarak XFYDZE altıgeninin alanına eşit olduğunu matematiksel semboller aracılığıyla ifade ederek doğru bir varsayım üretmiştir. ÖA33 kodlu öğretmen adayı ise aynı varsayım ile birlikte oluşturulan altıgenin çevresi ile ilgili doğru varsayımlarda bulunmuştur. Ancak bu varsayımları sembolik olmayan dil ile ifade ederken hangi geometrik kavramlardan bahsettiğinin açıkça ifade edilmediği görülmektedir. İlk varsayımında bu belirsizliğin ortadan kalkması için 2a, 2b, 2c ifadelerinin neye karşılık geldiğini yazmasına rağmen bu varsayımın anlaşılması için matematiksel semboller ile ifade edilmesi daha uygun olabilirdi.

Yapılan klinik mülakatlarda genellikle öğretmen adaylarının kesin olarak emin oldukları matematiksel ilişkileri varsayım olarak ifade ettikleri belirlenmiştir. Dolayısıyla bu süreç içinde öğretmen adayları varsayımlarını doğru olarak üretebilmek için özellikle çaba sarf ettiklerinden söz edebilir. Bununla birlikte birkaç çıkarımda bulunmaları sonucunda matematiksel ilişkiye ulaşma gibi destekleyici durumlar bulmalarının varsayım üretmelerinde etkili olduğuna yönelik ifadelerde bulundukları görülmüştür. Bu duruma yönelik ÖA22 kodlu öğretmen adayı ile yapılan mülakattaki konuşmalardan bir kesit aşağıda verilmiştir:

*Araştırmacı:* *4. soruda hiçbir varsayımda bulunmayıp sadece üçgeni çizerek bırakmışsın. Neden?*

*ÖA22:* *Çünkü zamanımda yetmedi açıkçası.*

*Araştırmacı:* *Neden zaman yetmedi?*

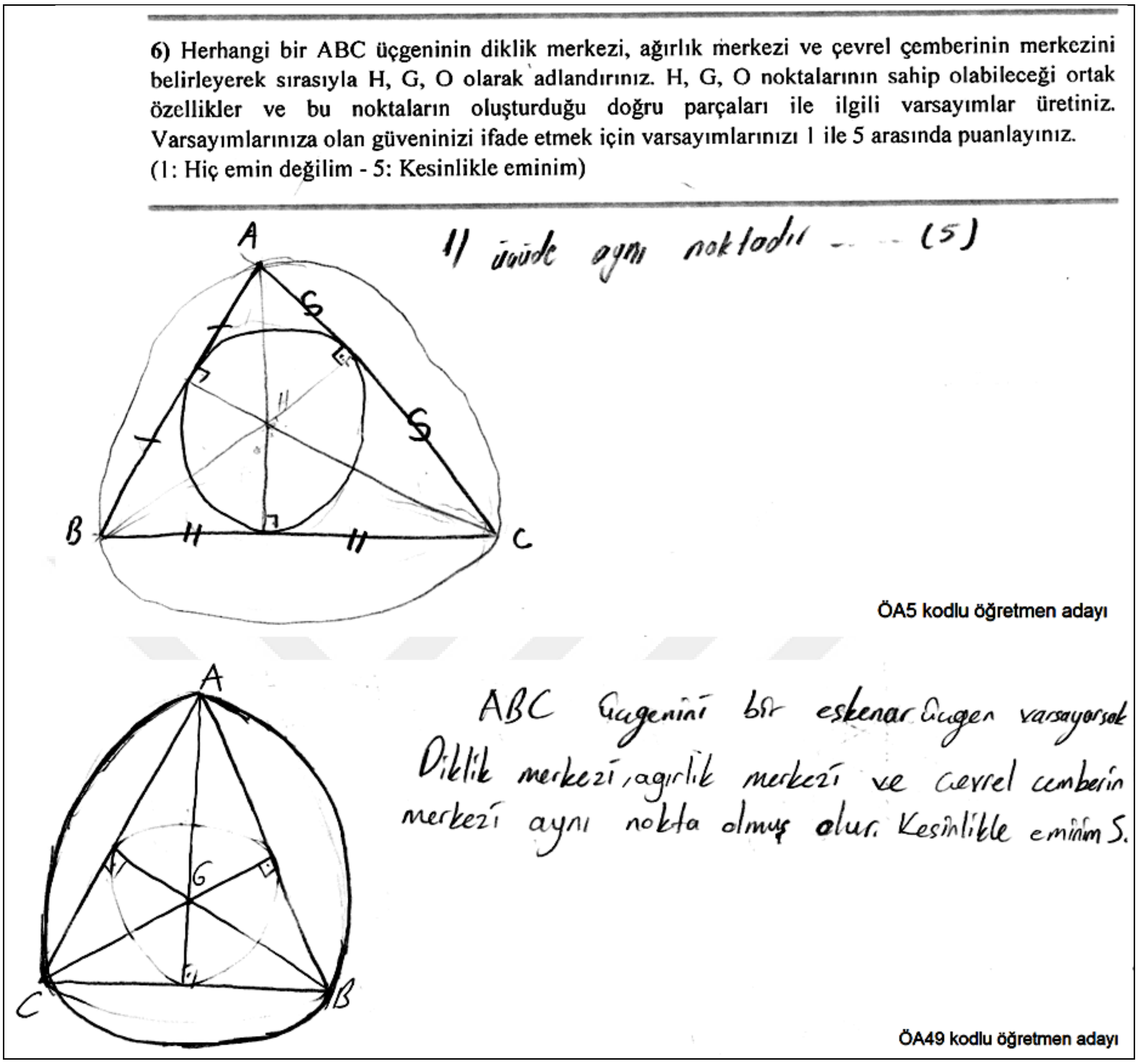
*ÖA22:* *Çünkü bazı problemlerde epey düşündüm. Şekil çizmeye çalıştım. Kesin bir şeyler bulup ona göre varsayımda bulunmak istedim. O da zamanımı aldı.*

*Araştırmacı:* *Kesin bir şeyler, destekleyici durumlar bulmadıkça varsayımda bulunmaktan kaçınıyor musun?*

*ÖA22:* *Evet, bir şeye dayandırmak istiyorum.*

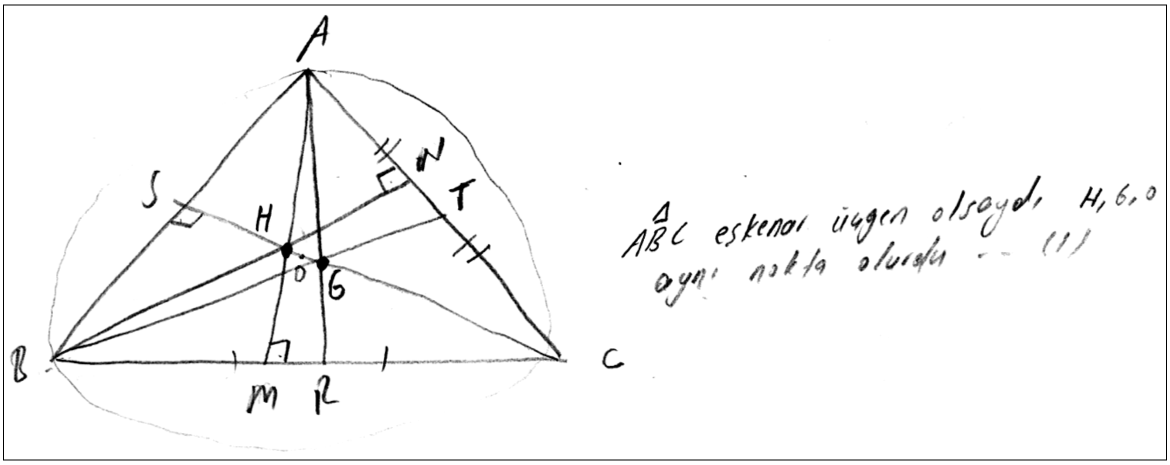
Yukarıda ifade edilen konuşmalardan, ÖA22 kodlu öğretmen adayının bir matematiksel ilişkinin doğruluğundan emin olması ya da destekleyici birkaç durum bulması sonucunda varsayımda bulunabileceği anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının özel durumları ele alarak varsayımlarını ürettikleri durumlar deney grubunda % 25,75 ve kontrol grubunda % 27,48 oranına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum, grupların VD2 kategorisine yönelik ürettiği varsayımların oranının birbirlerine oldukça yakın olduğunu göstermektedir. Deney grubunda yer alan ÖA5 ve kontrol grubunda yer alan ÖA49 kodlu öğretmen adaylarının 6. soru ile ilgili olmak üzere VD2 kategorisine yönelik ürettiği varsayımlar Şekil 74'te yer almaktadır.




Şekil 74. VD2 kategorisi ile ilgili varsayım örneği

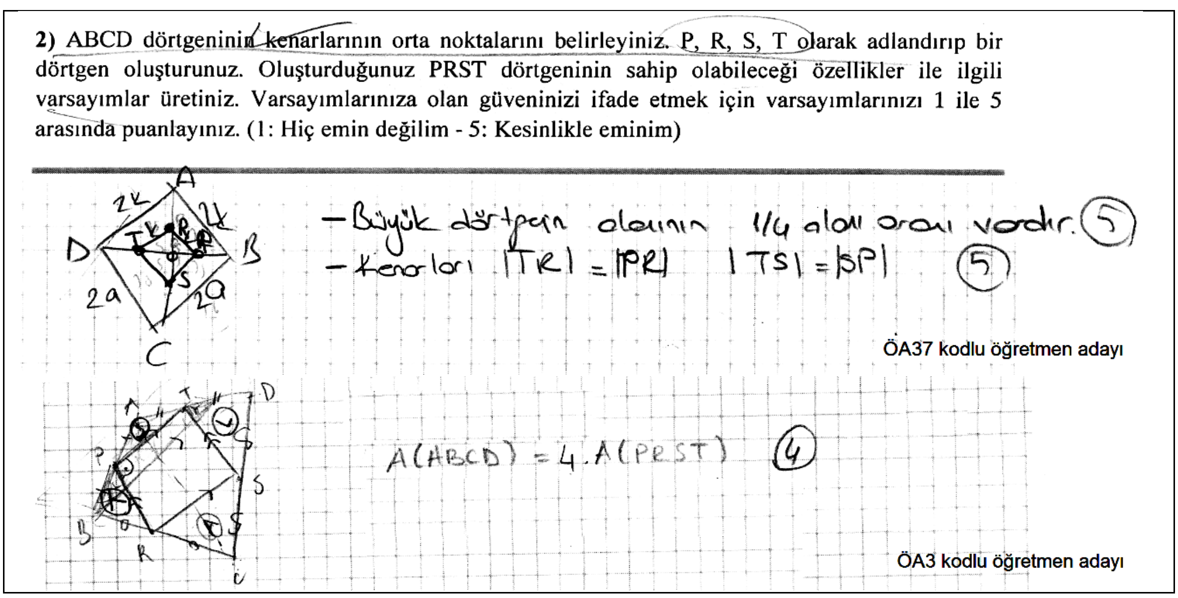
Şekil 74'te görüldüğü gibi ÖA5 kodlu öğretmen adayı H, G, O noktalarının çakıştığını belirten bir ifade kullanarak özel duruma uygun bir varsayımda bulunmuştur. Ancak öğretmen adayı bu durumun eşkenar üçgen olması koşulunda gerçekleşeceği ve hangi noktaların aynı olduğu ile ilgili ifadelere yer vermemiştir. ÖA49 kodlu öğretmen adayı ise ABC üçgeninin eşkenar üçgen olması durumunda olduğundan ve H, G, O noktalarının nereleri temsil ettiğinden bahsederek özel duruma uygun bir varsayım yazmıştır. Ancak ÖA5 kodlu öğretmen adayı klinik mülakat esnasında bu varsayımını bu durumlara da değinerek tekrar yazmayı tercih etmiştir. Öğretmen adayının varsayım ifadesine yönelik yaptığı düzenleme sonucunda tekrar oluşturduğu varsayımın düzenlenmiş hali Şekil 75'te sunulmuştur.




Şekil 75. ÖA5 kodlu öğretmen adayının varsayım ifadesinin düzenlenmiş hali

Şekil 75'ten görüldüğü üzere öğretmen adayı H, G, O noktalarının aynı nokta olmalarının ABC üçgeninin eşkenar üçgen olması durumunda olabileceği ifadesine yer vererek varsayımını tekrar oluşturmuştur.

Deney grubunda % 10,78 ve kontrol grubunda % 16,93 oranında olmak üzere yanlış varsayımlar ürettikleri durumların da olduğu belirlenmiştir. Deney grubunda bu tür varsayımlar kontrol grubuna göre daha az üretilmesi ile birlikte deney grubunun en az ürettiği varsayımlar olduğu görülmüştür. Kontrol grubunda yer alan ÖA37 ve deney grubunda yer alan ÖA3 kodlu öğretmen adaylarının 2. soru ile ilgili olmak üzere VD1 kategorisine yönelik ürettikleri varsayımlar Şekil 76'da sunulmuştur.



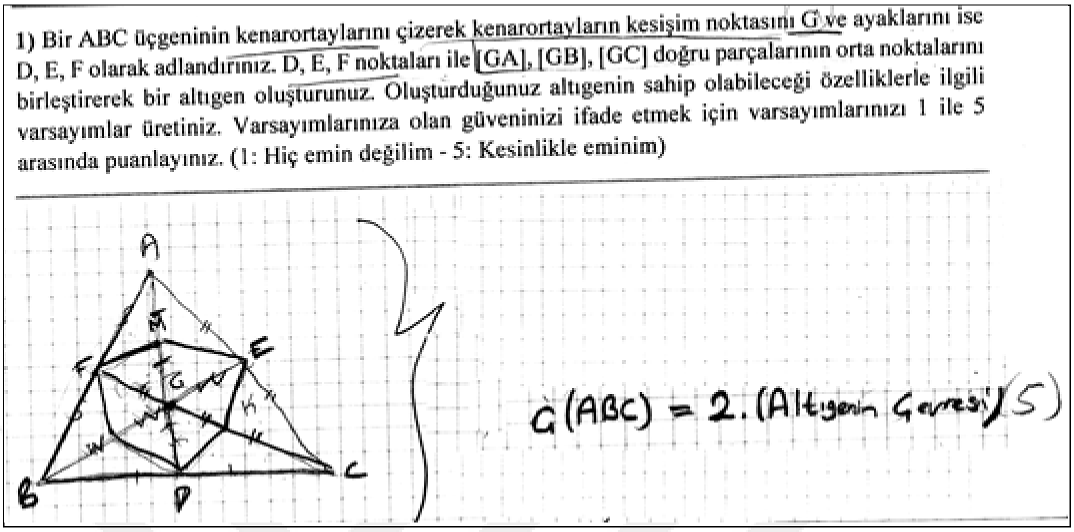

Şekil 76. VD1 kategorisi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 76'da görüldüğü gibi ÖA37 kodlu öğretmen adayı soruda belirtilen geometrik şekli yanlış çizerek PRST dörtgeninin alanının ABCD dörtgeninin alanının dörtte biri olduğu varsayımında bulunmuştur. Ayrıca PRST dörtgeninin kenarlarının uzunluklarının eşitliğine yönelik bir varsayım üretmiştir. Ancak ürettiği varsayımların her ikisi de yanlış olmakla birlikte varsayım ifadelerinde hangi geometrik kavramlarından bahsettiğinin belirsiz olduğu görülmektedir. Ürettiği ikinci varsayımda hangi kenar uzunluklarının eşit olduğunu matematiksel sembollerle ifade etmesi ile belirgin bir hale gelse de sadece "*kenarları*" kelimesini kullanması varsayım ifadesinin belirsiz bir hal almasına sebep olmuştur. Aynı şekilde ÖA3 kodlu öğretmen adayı da ÖA37'nin birinci varsayımını belirterek yanlış bir varsayım üretmiştir. Sadece diğer öğretmen adayından farklı olarak hangi geometrik kavramların betimlendiği belli olacak şekilde matematiksel semboller kullanarak bu varsayımı ifade etmiştir. Bu öğretmen adayı, klinik mülakat esnasında varsayımının yanlış olduğunu fark ederek bunun yerine doğru bir varsayım üretebilmiştir. ÖA3 kodlu öğretmen adayının bu duruma yönelik konuşmalarından bir kesit aşağıda sunulmuştur:

| | |
|---|---|
| *Araştırmacı:* | *2. soru için A(ABCD) = 4. A(PRST) şeklinde bir varsayımda bulunmuşsun. Buna nasıl ulaştın?* |
| *ÖA3:* | *Aslında bundan emin değilim. Alanlar birbirinin katı ama tam olarak kaç?* |
| *Araştırmacı:* | *Peki, 4 katı olduğuna nasıl karar verdin?* |
| *ÖA3:* | *Bir bakayım yeniden. Benzerlik oranlarından gidebilirim. (BD köşegenini çizer) APT ile ABD üçgenlerinin benzerlik oranı ½ , alanları oranı ise ¼ olur. O zaman ben yanlış varsayımda bulundum.* |
| *Araştırmacı:* | *Neden böyle düşündün?* |
| *ÖA3:* | *Çünkü APT ile ABD oranı* $\frac{1}{4}$ *ama fazlalık olan kısımlar da var. Biraz daha inceleyeyim. (Harflendirmeler yapıp alan oranları bulur.) Bu incelememe göre varsayımımda 4 olarak ifade ettiğim yeri 2 olarak değiştirmek isterdim.* |

Yukarıda belirtilen konuşmalardan anlaşıldığı üzere ÖA3 kodlu öğretmen adayı geometrik şekil üzerinde incelemeler yapması sonucunda sınav esnasında yanlış olarak ürettiği varsayımın yerine doğru bir varsayım üretmeyi başarabilmiştir.

Benzer şekilde ÖA4 kodlu öğretmen adayı sınav esnasında yanlış bir varsayım üretmesine rağmen klinik mülakat esnasında bu durumun farkına varabilmiştir. Ancak bu yanlış varsayımı yerine özel bir durumu ele alarak bir varsayımda bulunmayı tercih etmiştir. ÖA4 kodlu öğretmen adayının 1. soru ile ilgili olmak üzere ürettiği yanlış varsayımı gösteren Şekil 77 aşağıda yer almaktadır.




Şekil 77. VD1 kategorisi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 77'de belirtilen varsayım örneği, öğretmen adayı tarafından yanlış olduğu belirlenen bir örnektir. Öğretmen adayı varsayımının yanlış olduğunu belirlemesi üzerine bu varsayımının yerine özel duruma uygun bir varsayım yazmıştır. Yapılan klinik mülakatların geneline de bakıldığında öğretmen adaylarının yanlış olarak ürettikleri varsayımları fark ederek bunların yerine doğru ya da özel duruma uygun varsayımlar üretebildikleri görülmüştür. ÖA4 kodlu öğretmen adayının VBT esnasında ürettiği bu yanlış varsayımı yerine özel duruma uygun bir varsayım üretmesi ile ilgili konuşmalarından bir kesit şu şekildedir:

*Araştırmacı:* *1. soruda altıgenin çevre uzunluğunun 2 katının ABC üçgeninin çevre uzunluğuna eşit olduğuna yönelik varsayımına nasıl ulaştın?*

*ÖA4:* *Biraz düşüneyim. Şu anda buna nasıl ulaştığımı bulamadım. Acaba bir özel duruma göre mi düşündüm? Belki de ABC eşkenar üçgen olsaydı buna ulaşılabilirdi.*

*Araştırmacı:* *Şu anda düşünsen ne diyebilirsin?*

*ÖA4:* *Şu anda bir şey diyemiyorum. Şu an burada bir şey ispat edemedim.*

*Araştırmacı:* *Peki, şu anda bu varsayımı yazmak ister misin, silmek mi istersin yoksa değiştirmek mi istersin?*

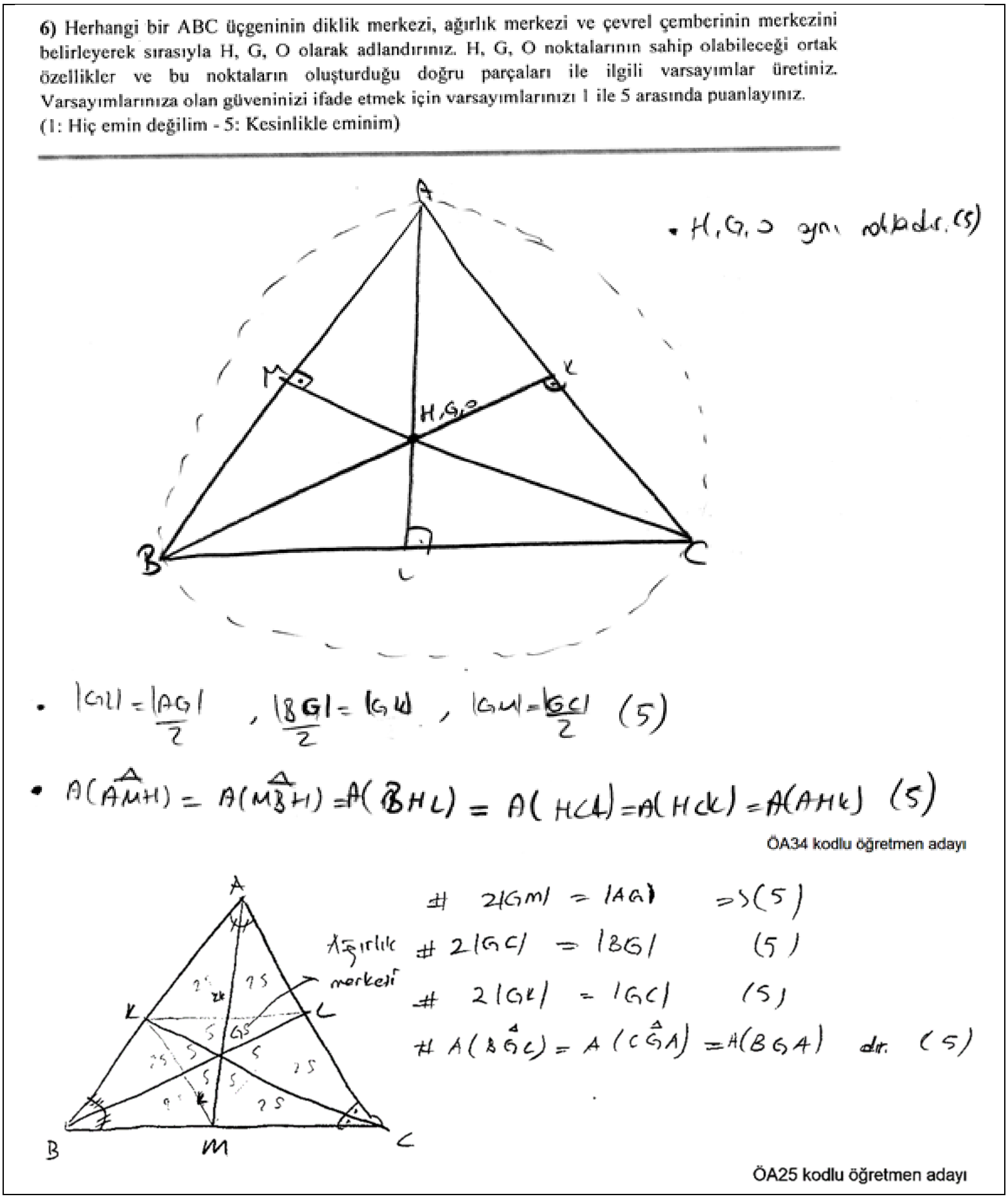
*ÖA4:* *Değiştirmek isterdim.*

*Araştırmacı:* *O zaman nasıl bir varsayımda bulurdun?*

*ÖA4:* *(Şekil üzerinde incelemeler yapar.) ABC eşkenar üçgen olsaydı altıgenin çevresinin $\sqrt{3}$ katı ABC üçgenin çevresine eşit olurdu.*

Yukarıda belirtilen konuşmalardan anlaşıldığı üzere ÖA4 kodlu öğretmen adayı yanlış varsayımı yerine "*ABC eşkenar üçgen olsaydı altıgenin çevresinin $\sqrt{3}$ katı ABC üçgenin çevresine eşit olurdu*." şeklinde bir ifadede bulunarak özel duruma uygun bir varsayım üretmiştir.

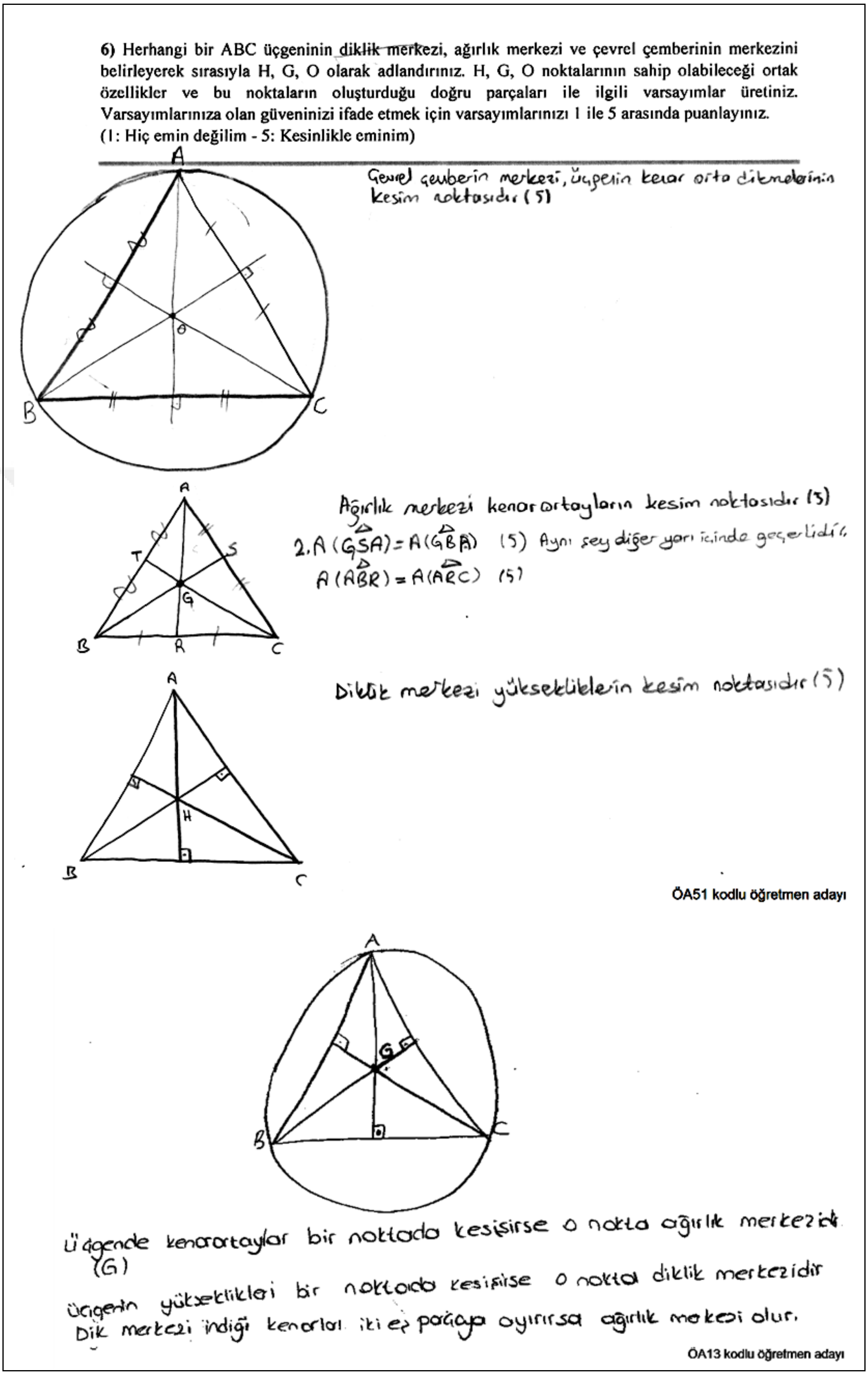
Öğretmen adaylarının temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade ettikleri durumlar deney grubunda % 14,67 ve kontrol grubunda % 10,54 oranında ortaya çıkmıştır. Bu durum, VD0b göstergesine yönelik varsayımların kontrol grubunda daha az olduğunu göstermektedir. Kontrol grubunda yer alan ÖA34 ve deney grubunda yer alan ÖA25 kodlu öğretmen adaylarının VD0b göstergesine yönelik varsayımları Şekil 78'de sunulmuştur.




Şekil 78. VD0b göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 78 incelendiğinde ÖA34 kodlu öğretmen adayı; H, G, O noktalarının çakıştığı kabulüne de dayanarak ikinci ve üçüncü varsayımlarını ağırlık merkezi olması durumunda alanların eşit olması ve kenarortay üzerinde G noktasının üçgenin köşelerine uzaklığı ile kenarlara uzunlukları arasındaki oranlara yönelik bilinen önermeleri varsayım olarak belirtmiştir. ÖA25 kodlu öğretmen adayı da benzer şekilde G noktasının ağırlık merkezi olmasına bağlı olarak bilinen önermeleri yeniden belirtmeyi tercih etmiştir.

Herhangi bir varsayım üretemedikleri durumlar, deney grubunda % 18,86 ve kontrol grubunda % 16,93 oranında ortaya çıktığı belirlenmiştir. Bu durum, VD0a göstergesine yönelik durumlara deney grubunda daha fazla rastlandığını göstermektedir. Öğretmen adaylarından varsayım üretilmesi istenen durumlar için geometrik kavramlar ile ilgili tanımları belirtmeleri gibi varsayım olarak sayılmayacak ifadeler ileri sürmeleri de VD0a göstergesi içerisinde değerlendirilmiştir. Kontrol grubunda yer alan ÖA51 ve deney grubunda yer alan ÖA13 kodlu öğretmen adaylarının geometrik kavramlara yönelik tanımlara yer vermeleri sonucunda VD0a göstergesinde yer alan ifadeleri Şekil 79'da gösterilmiştir.



**6)** Herhangi bir ABC üçgeninin ~~diklik merkezi~~, ağırlık merkezi ve çevrel çemberinin merkezini belirleyerek sırasıyla H, G, O olarak adlandırınız. H, G, O noktalarının sahip olabileceği ortak özellikler ve bu noktaların oluşturduğu doğru parçaları ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız.
(1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

Çevrel çemberin merkezi, üçgenin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır (5)

Ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasıdır (5)

2. A (GSA) = A(GBA) (5) Aynı şey diğer yarı içinde geçerlidir.

A (ABR) = A(ARC) (5)

Diklik merkezi yüksekliklerin kesim noktasıdır (5)

ÖA51 kodlu öğretmen adayı

Üçgende kenarortaylar bir noktada kesişirse o nokta ağırlık merkezidir. (G)

Üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişirse o nokta diklik merkezidir

Dik merkezi indiği kenarları iki eş parçaya ayırırsa ağırlık merkezi olur.

ÖA13 kodlu öğretmen adayı

Şekil 79. VD0a göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 79'dan görüldüğü üzere her iki öğretmen adayı da varsayım olarak diklik merkezi, ağırlık merkezi, çevrel çemberin merkezi gibi tanımlar ile bu merkezleri bulmaya yönelik bilgiler sunmuşlardır. Bunun sonucunda ise varsayım niteliği taşımayan bu ifadeler VD0a göstergesi içerisinde yer alacak şekilde değerlendirilmiştir.

Uygulamaların sonunda genel olarak deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının çoğunlukla doğru varsayımlar ürettikleri belirlenmiştir. Grupların doğru varsayımlar üretme sayılarının birbirine yakın olduğu da belirlenen durumlardan biridir. Ancak doğru varsayım üretme bakımından çoğunluğun deney grubuna ait olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının özel durumları ele alarak ürettikleri varsayımlar ise kontrol grubunda daha fazla görülmekle birlikte gruplar arasında pek fazla bir fark olmadığı belirlenmiştir. Doğru ya da özel durumlara uygun varsayımlar dışında öğretmen adaylarının yanlış varsayımlar ürettikleri de görülmüştür. Yanlış varsayımlar üretme sayısı bakımından ise gruplar arasında daha fazla bir fark olduğu belirlenmiştir. Ancak deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının yanlış varsayımlar ürettikleri durumlara daha az rastlanırken kontrol grubunda bu durumun geçerli olmadığı fark edilmiştir. Varsayım olarak temel düzeyde bilinen önermeleri yeniden ifade etmeyi tercih eden öğretmen adaylarının da olduğu görülmüştür. Temel düzeyde bilinen önermelere yönelik ifadeler her iki grupta da görülmekle birlikte kontrol grubunda en az karşılaşılan durumlar olduğu fark edilmiştir. Öğretmen adaylarının herhangi bir varsayım üretmediği ya da geometrik kavramların tanımı belirtme gibi varsayım niteliği taşımayan ifadelere yer verdiği de görülmüştür.

Uygulama sonrasında her bir grup içinde öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımların doğruluk kategorilerine yönelik puan dağılımının ilişkili olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare testi yapılmıştır. Bu test sonuçlarına göre deney grubunun varsayımlarının doğruluk kategorilerine yönelik puan dağılımlarının ilişkili olduğu tespit edilmiştir $(\chi^2 = 40{,}084,\ p < 0{,}05)$. Kontrol grubu için yapılan Ki-kare testi sonucu da grubun varsayımlarının doğruluk kategorilerine yönelik puan dağılımlarının ilişkili olduğunu göstermektedir $(\chi^2 = 10{,}898,\ p < 0{,}05)$. Öğretmen adaylarının varsayımlarının doğruluk kategorilerine yönelik puan dağılımının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek için yapılan Ki-Kare testi sonuçları ise Tablo 34'te sunulmuştur.

Tablo 34. Varsayımların Doğruluk Kategorilerinin Gruplar ile İlişkisi İçin Yapılan Ki-Kare Testinin Sonucu

| | Value | df | p |
|---|---|---|---|
| Pearson Chi-Square | 6,753[a] | 3 | 0,08 |
| Likelihood Ratio | 6,776 | 3 | 0,79 |
| Linear-by-Linear Association | 0,191 | 1 | 0,662 |
| N of Valid Cases | 647 | | |

Tablo 34'ten görüldüğü üzere öğretmen adayların varsayımlarının doğruluk kategorilerine yönelik puan dağılımının deney ve kontrol grubuna bağlı olmadığı tespit edilmiştir ($\chi^2 = 6{,}753,\ p > 0{,}05$). Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının varsayımlarının doğruluğu gruplarla ilişki değildir.

Öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımların sayısının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek amacıyla da Ki-Kare testinden yararlanılmıştır. Yapılan bu testin sonucuna göre öğretmen adaylarının varsayım üretme sayılarının deney ve kontrol grubuna bağlı olmadığı belirlenmiştir ($\chi^2 = 0{,}056,\ p > 0{,}05$). Öğretmen adaylarının doğru varsayım üretme sayılarının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek amacıyla da Ki-Kare testi kullanılmıştır. Bu testin sonucunda öğretmen adaylarının doğru varsayım üretme sayılarının gruplarla ilişki olmadığı tespit edilmiştir ($\chi^2 = 0{,}766,\ p > 0{,}05$).

### 4. 2. 2. Öğretmen Adaylarının Ürettikleri Varsayımları İfade Ederken Kullandıkları Matematik Dili ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamında yapılan uygulamaların sonrasında deney ve kontrol grubunun varsayımda bulunmalarını belirleyebilmek için VBT uygulanmıştır. Bu test, matematik dili boyutunda yer alan kategorilere göre değerlendirilerek uygulama sonrası öğretmen adaylarının varsayımları ifade ederken kullandıkları matematik diline yönelik veriler elde edilmiştir. Ayrıca her bir grup içinde öğretmen adaylarının varsayımlarının matematik dili boyutunda yer alan kategorilere yönelik puan dağılımının ilişki olup olmadığını, varsayımları ifade ederken kullanılan matematik dili ile ilgili puanların dağılımının ve uygun dil kullanma sayılarının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek için istatistiksel analizler yapılmıştır.

Deney ve kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının VBT'de yer alan her bir problem için üretilen varsayımların matematik dili bakımından yer aldığı kategoriler ve bu kategorilere yönelik frekans ve yüzde dağılımları Tablo 35'te sunulmuştur.

Tablo 35. Varsayımların Matematik Dili Boyutu Kategorilerine Göre Değerlendirilmesi ile İlgili Frekans ve Yüzde Dağılımı

| Matematik dili boyutunda yer alan kategoriler | | Deney Grubu | | Kontrol Grubu | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | f | % | f | % |
| VMD0* | Boş bırakmıştır | 43 | 12,76 | 30 | 9,55 |
| VMD0 | Varsayım uygun bir dille ifade edilmemiştir. | 20 | 5,93 | 23 | 7,33 |
| | a. Sembolik dille ifade ederken matematiksel semboller uygun bir şekilde kullanılmamıştır. | 14 | 4,15 | 13 | 4,15 |
| | b. Sembolik olmayan bir dil kullanırken tamamen yanlış kelimeler kullanılmıştır. | 6 | 1,78 | 10 | 3,18 |

Tablo 35'in devamı

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| VMD1 | Varsayım kısmen uygun bir dille ifade edilmiştir. | 99 | 29,38 | 117 | 37,26 |
| | a. Sembolik dil kullanırken matematiksel sembollerin bir kısmı uygun, bir kısmı ise uygun olmayacak şekilde ifade edilmiştir. | 17 | 5,04 | 6 | 1,91 |
| | b. Sembolik bir dil kullanırken varsayım ifadesinin bir kısmı sembolik olmayan bir dil ile ifade edilmiştir. | 8 | 2,38 | 10 | 3,18 |
| | c. Sembolik olmayan bir dil kullanırken hangi geometrik kavramın betimlendiği belirsizdir. | 74 | 21,96 | 101 | 32,17 |
| VMD2 | Varsayım uygun bir dille ifade edilmiştir. | 175 | 51,93 | 144 | 45,86 |
| | a. Sembolik bir dil kullanırken matematiksel semboller tamamen doğru bir şekilde ifade edilmiştir | 115 | 34,13 | 90 | 28,66 |
| | b. Sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimeler tamamen uygun bir şekilde tercih edilmiştir. | 60 | 17,8 | 54 | 17,2 |

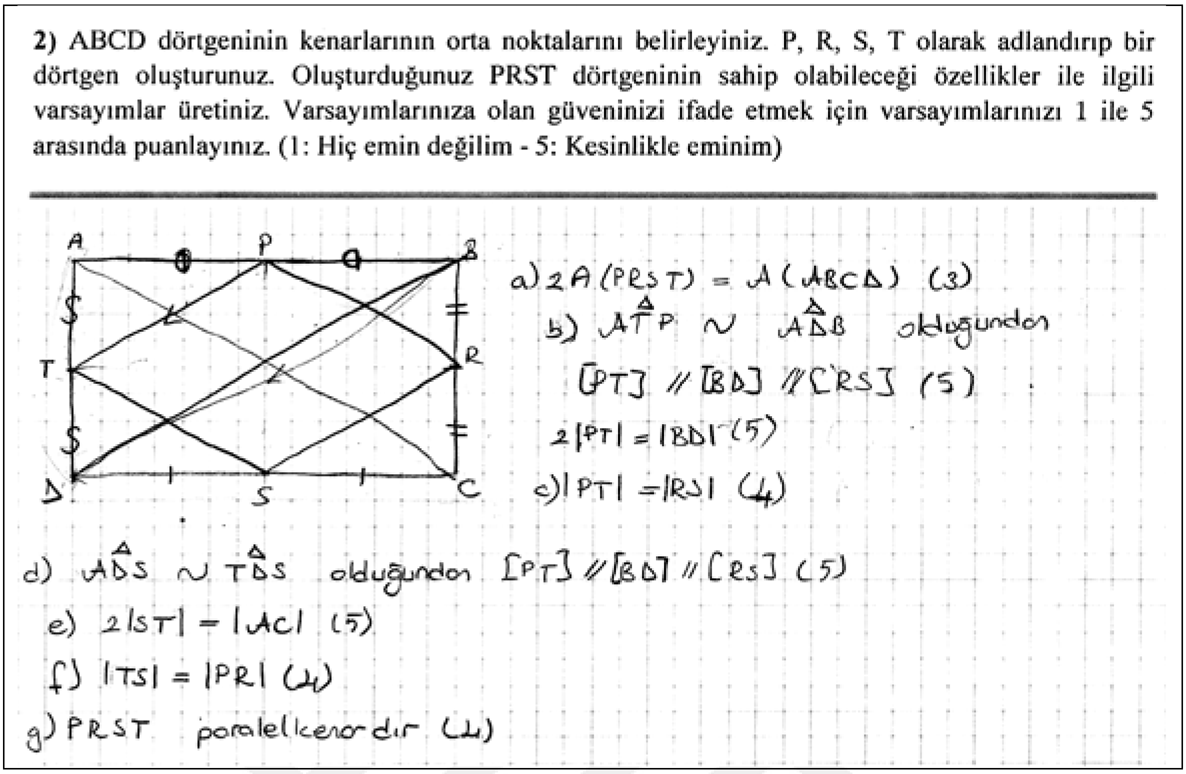
Tablo 35 incelendiğinde deney grubunda % 51,93 ve kontrol grubunda % 45,86 oranında olmak üzere matematik dili kategorilerinden en büyük çoğunluğa sahip olan VMD2 kategorisidir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının varsayımlarını ifade ederken çoğunlukla uygun bir dil kullandıkları anlaşılmaktadır. VMD2 kategorisi içerisinde göstergelerin her biri incelediğinde grupların her ikisinde de VMD2a göstergesi en yüksek frekans ($f_D$ = 115, $f_K$ =90) ve yüzdeye (sırasıyla % 34,13 ve % 28,66) sahiptir. Bu durum öğretmen adaylarının sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembolleri tamamen doğru bir şekilde ifade ettiği durumlara oldukça fazla rastlandığı anlamına gelmektedir. Ancak kontrol grubunda matematik dili boyutunda yer alan kategorilere yönelik ayrım yapılmaksızın göstergeler incelendiğinde VMD1c göstergesi en yüksek frekans ve yüzdeye sahiptir. VMD2 kategorisi içerisinde ise VMD2a göstergesinden daha az olmak üzere deney grubunda % 17,8 ve kontrol grubunda % 17,2 oranında VMD2b göstergesine yönelik varsayımlar ortaya çıkmıştır. Bu durum, öğretmen adaylarının sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimeleri uygun bir şekilde seçebildiği durumların da ortaya çıktığını göstermektedir. Ayrıca grupların bu göstergede yer alan varsayımlarının oranlarının birbirine oldukça yakın olduğuna işaret etmektedir.

Matematik dilinin kullanımı bakımından VMD1 kategorisinde yer alan varsayımlar, deney grubunda % 29,38 ve kontrol grubunda % 37,26 oranında ortaya çıkarak VMD2 göstergesini takip etmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları varsayımlarını ifade ederken kısmen uygun bir dil kullandıkları durumlar da olmuştur. VMD1 kategorisinin göstergelerinden biri olan VMD1c göstergesinin her iki grupta da en yüksek frekans ($f_D$ = 74, $f_K$ =101) ve yüzdeye (sırasıyla % 21,96 ve % 32,17) sahip olduğu fark edilmiştir. Bu durum, sembolik olmayan bir dil kullandığında hangi geometrik kavramın belirtildiğinin açık bir şekilde ifade edilmediği durumlar kontrol grubunda daha fazla görülmekle birlikte önemli ölçüde ortaya çıktığını göstermektedir. VMD1a ve VMD1b göstergesinde yer alan varsayımlar, VMD1c göstergesine göre oldukça az sayıda ortaya çıktığı belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembollerin bir kısmını uygun, bir kısmını ise uygun olmayacak şekilde ya da bir kısmını sembolik olmayan bir dil ile ifade ettikleri durumlar sınırlı sayıda ortaya çıkmıştır. Ayrıca kontrol grubunda matematik dilinin kullanımı bakımından VMD1a göstergesi içerisinde değerlendirilen varsayımları en az sayıda ifade ettikleri görülmüştür.

Hem deney hem de kontrol grubunda matematik dili boyutunda yer alan kategoriler arasında en az frekans ($f_D$ = 20, $f_K$ =23) ve yüzdeye (sırasıyla % 5,93 ve % 7,33) sahip olan kategori VMD0'dır. Bu durum öğretmen adaylarının varsayımlarını uygun olmayan bir dil ile ifade ettikleri durumlara oldukça az rastlandığı anlamına gelmektedir. Bütün göstergeler birlikte değerlendirildiğinde en az frekans ve yüzdeye sahip olan gösterge ise deney grubunda VMD0b olduğu ve kontrol grubunda ise bu göstergeye yönelik varsayımların daha fazla olduğu fark edilmiştir. Dolayısıyla deney grubunda sembolik olmayan bir dil kullanırken yanlış kelimeler kullanılan durumların azınlıkta olduğu anlaşılmaktadır.VMD0a göstergesine yönelik varsayımların ise her iki grupta da aynı orana sahip olması dikkat çekmektedir. Bu durum, VMD0 kategorisi içinde varsayımları sembolik dille ifade ederken matematiksel sembolleri uygun olmayan bir şekilde kullandıkları durumlar daha fazla görülmekle birlikte her iki grupta da aynı oranda olduğuna işaret etmektedir.

Deney grubunda % 51,93 ve kontrol grubunda % 45,86 oranında olmak üzere varsayımlarını ifade ederken kullandıkları matematik dili bakımından VMD2 kategorisinde yoğunlaştıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adayları, varsayımları ifade ederken çoğunlukla uygun bir dil kullanmışlardır. Matematik dili kategorilerinden VMD2'de yer alan göstergelerden en fazla ortaya çıkan durum ise sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembollerin tamamen doğru bir şekilde ifade edilmesidir. Sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimeleri tamamen doğru bir şekilde seçtikleri durumların ise daha az ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının varsayımları sembolik bir dil ile ifade ederken matematiksel sembolleri tamamen doğru bir şekilde kullandıkları durumlar, deney grubunda % 34,13 ve kontrol grubunda % 28,66 gibi yüksek bir oranda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla deney grubunun VMD2a göstergesine uygun olarak ifade ettiği varsayımların daha fazla olduğu görülmektedir. Deney grubunda yer alan ÖA21 kodlu öğretmen adayının VMD2a göstergesine yönelik ifade ettiği varsayımlar Şekil 80'de sunulmuştur.



**2) ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktalarını belirleyiniz. P, R, S, T olarak adlandırıp bir dörtgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz PRST dörtgeninin sahip olabileceği özellikler ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)**

a) 2A(PRST) = A(ABCD) (3)

b) $\widehat{ATP} \sim \widehat{ADB}$ olduğundan

[PT] // [BD] // [RS] (5)

2|PT| = |BD| (5)

c) |PT| = |RS| (4)

d) $\widehat{ADS} \sim \widehat{TDS}$ olduğundan [PT] // [BD] // [RS] (5)

e) 2|ST| = |AC| (5)

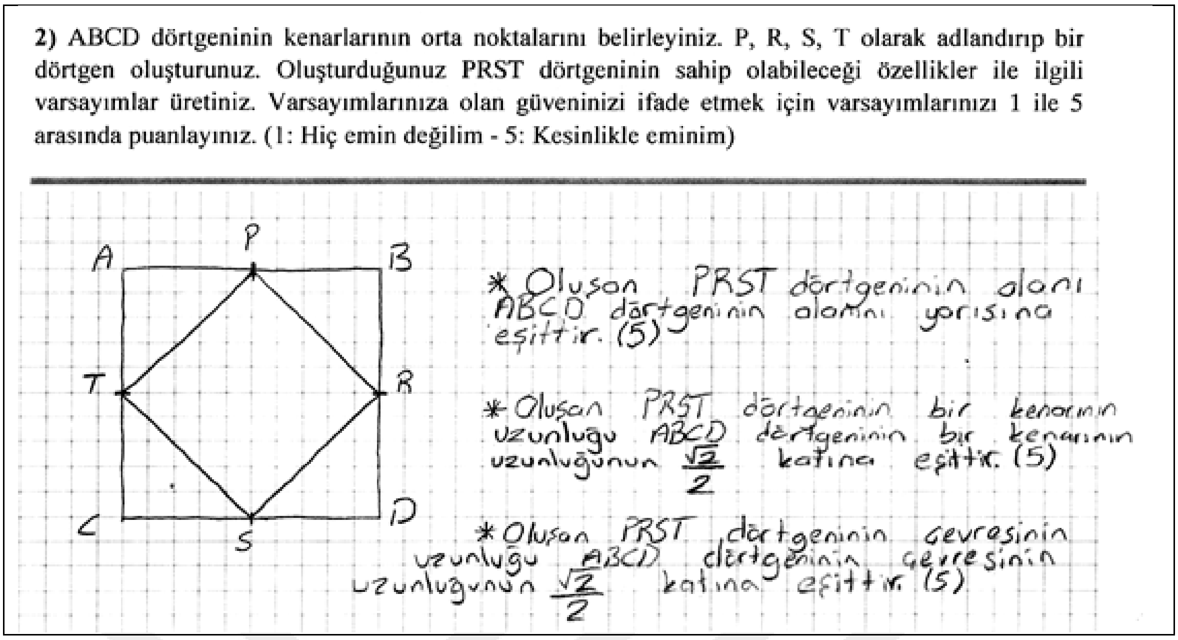
f) |TS| = |PR| (4)

g) PRST paralelkenardır (4)

Şekil 80. VMD2a göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 80 incelendiğinde ÖA21 kodlu öğretmen adayı ürettiği varsayımlar ve bunlara yönelik sunduğu açıklamalarda matematiksel sembolleri kullanma bakımından uygun bir dil tercih ettiği görülmektedir. Gerek doğru parçalarını gerekse kenar uzunluklarını ifade ederken uygun matematiksel semboller kullandığı fark edilmektedir. Varsayımlarından bazıları için sunduğu gerekçelerde de üçgenlerin benzer olduğunu belirtmek için benzerlik sembolünü kullanarak uygun bir tercih yapmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayı varsayımlarını sembolik bir dil ile ifade ederken uygun bir kullanım gerçekleştirmiştir.

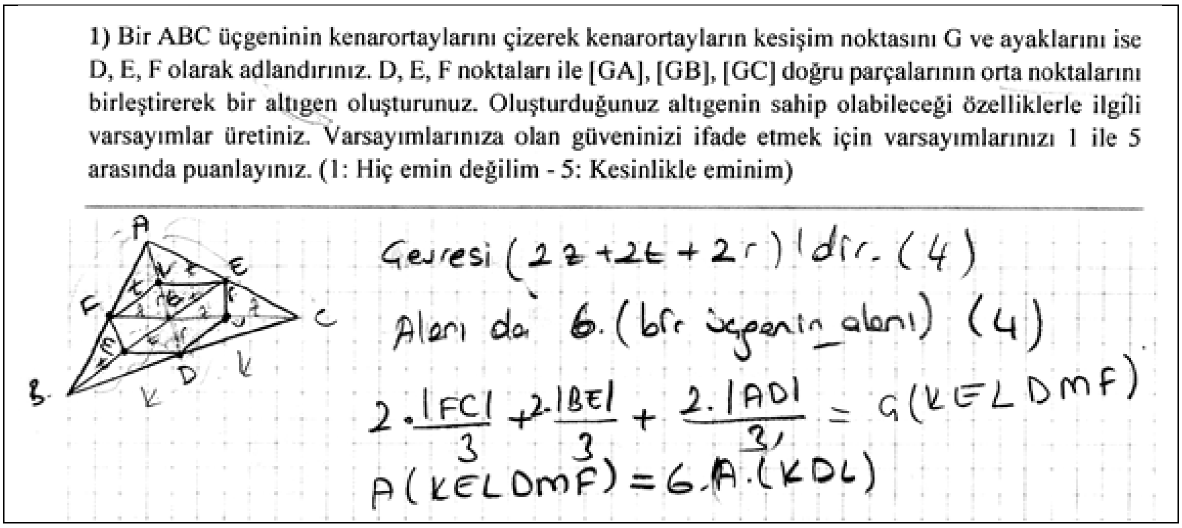
Öğretmen adaylarının sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimeleri uygun bir şekilde tercih ettikleri durumlar deney grubunda % 17,8 ve kontrol grubunda % 17,2 olmak üzere oldukça yakın oranlarda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla gruplar arasında VMD2b göstergesinde yer alan varsayımlar bakımından neredeyse hiçbir fark olmadığı dikkat çekmektedir. Kontrol grubunda yer alan ÖA55 kodlu öğretmen adayının VMD2b göstergesine yönelik ifade ettiği varsayımlarına Şekil 81'de yer verilmiştir.




Şekil 81. VMD2b göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 81 incelendiğinde öğretmen adayı varsayımlarını belirtirken hangi dörtgenlerden söz ettiğini "*ABCD dörtgeni, PRST dörtgeni*" şeklinde tüm varsayımlarında ifade etmiştir. Böylece varsayımlarında hangi geometrik kavramlardan bahsettiği açıkça görülmektedir. Ayrıca çevre ve kenarlar ile ilgili ifade ettiği varsayımlarda "*uzunluk*" kelimesini de ifade etmesi sembolik olmayan bir dil için uygun bir kullanım gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Öğretmen adayları ile yapılan klinik mülakatlarda, ürettikleri varsayımları ifade ederken uygun bir dil kullanmaya özen gösterdikleri belirlenmiştir. Deney grubunda yer alan ÖA27 kodlu öğretmen adayının VBT esnasında ürettikleri varsayım ifadelerinde değişiklik yapmak isteyerek varsayımlarını matematik dili bakımından uygun bir hale getirdiğini gösteren Şekil 82 aşağıda sunulmuştur.



1) Bir ABC üçgeninin kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını G ve ayaklarını ise D, E, F olarak adlandırınız. D, E, F noktaları ile [GA], [GB], [GC] doğru parçalarının orta noktalarını birleştirerek bir altıgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz altıgenin sahip olabileceği özelliklerle ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

Çevresi $(2z+2t+2r)$'dir. (4)

Alanı da 6.(brr üçgenin alanı) (4)

$2.\frac{|FC|}{3} + 2.\frac{|BE|}{3} + \frac{2.|AD|}{3} = Ç(KELDMF)$

$A(KELDMF) = 6.A.(KDL)$

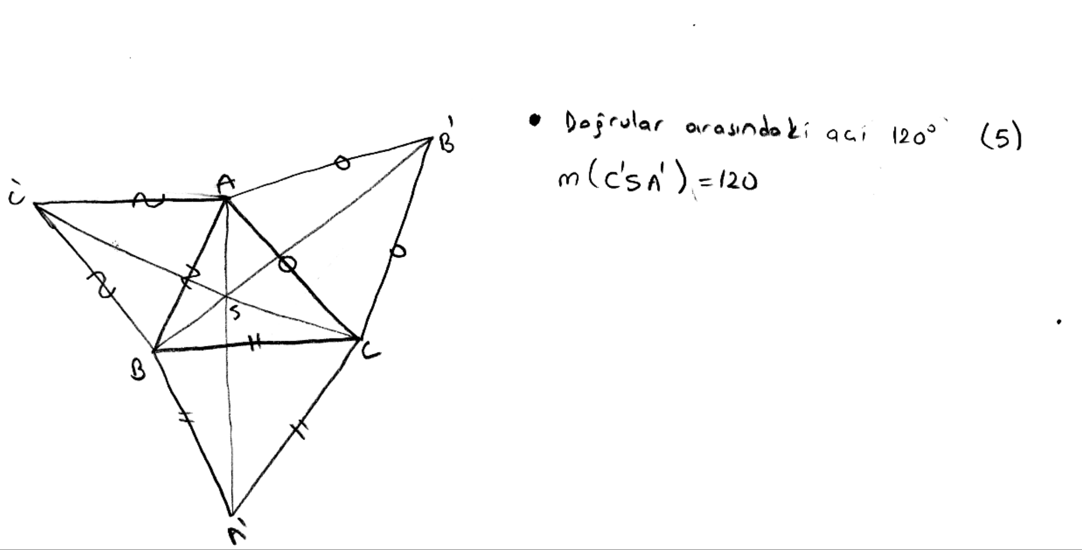
Şekil 82. Kullanılan matematik dili ile ilgili yapılan değişikliğe yönelik bir örnek

Şekil 82 incelendiğinde ÖA27 kodlu öğretmen adayı, VBT esnasında altıgenin çevre uzunluğu ve alanı ile ilgili varsayımları ifade ederken hangi geometrik kavramlardan bahsedildiği anlaşılmayacak şekilde bir kullanım gerçekleştirmiştir. Ancak klinik mülakat esnasında bu kullanımının farkına vararak varsayım ifadesinde değişiklik yapmak istemiştir. Öğretmen adayının yaptığı değişiklik sonucunda ise uygun matematiksel semboller kullanarak ve hangi geometrik kavramların belirtildiğinin anlaşılır olduğu bir şekilde varsayımlarını ifade ederek matematik dili bakımından uygun bir kullanım tercih etmiştir.

Deney grubunda % 29,38 ve kontrol grubunda % 37,26 olmak üzere VMD2 kategorisinden sonra en çok ortaya çıkan durum kısmen uygun bir dil kullanmalarıdır. Bu durum, matematik dilinin kullanımı bakımından VMD1 kategorisine yönelik varsayımların kontrol grubunda daha çok ortaya çıktığını göstermektedir. Öğretmen adaylarının kısmen uygun bir dil kullandığı durumların çoğunluğunun bu kategoride yer alan VMD1c göstergesine ait olduğu belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının sembolik olmayan bir dil kullanırken hangi geometrik kavramı betimledikleri belli olmayan varsayım ifadelerini, VMD1 kategorisinin diğer göstergelerinde yer alan ifadelere göre daha fazla belirttiklerine işaret etmektedir. Ayrıca matematik dilini kullanma bakımından VMD1a ve VMD1b göstergelerinde yer alan varsayımların VMD1c göstergesine göre oldukça az olduğu dikkat çekmektedir.

Varsayımları ifade ederken matematik dilini kullanma bakımından VMD1a göstergesinde yer alan varsayımların deney grubunda % 5,04 ve kontrol grubunda % 1,91 oranında ortaya çıktığı görülmüştür. Dolayısıyla deney grubunda bu tür varsayımlar daha fazla görülmekle birlikte sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembollerin bir kısmını uygun, bir kısmını ise uygun olmayacak şekilde ifade ettikleri durumların da ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Kontrol grubunda yer alan ÖA54 kodlu öğretmen adayının VMD1a göstergesine yönelik ifade ettiği varsayımlar Şekil 83'te sunulmuştur.

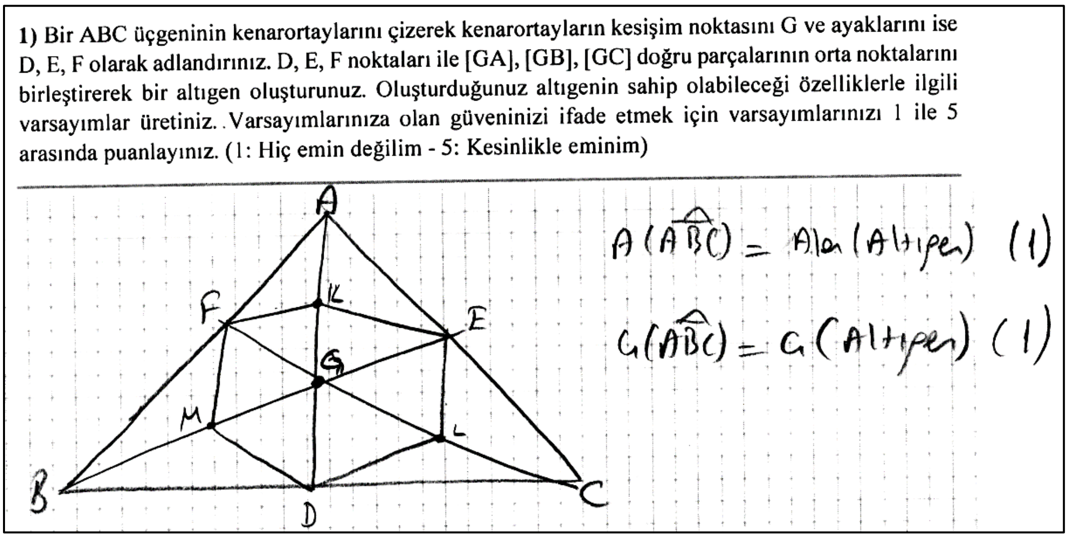
**5)** Herhangi bir ABC üçgeninin kenarları üzerinde BCA′, CAB′, ABC′ eşkenar üçgenlerini oluşturarak AA′, BB′, CC′ doğru parçalarını çiziniz. Çizilen bu doğru parçalarının sahip olabileceği özellikler ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)




Şekil 83. VMD1a göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 83 incelendiğinde ÖA54 kodlu öğretmen adayı varsayım ifadesinde açı ölçüsünü belirtirken uygun bir matematiksel sembol kullanmıştır. Ancak varsayımda açı ölçüsü olarak $120^{\circ}$ olduğunu ifade etmek için derece işaretini kullanmamıştır. Bunun sonucunda öğretmen adayı sembolik bir dil kullanırken bir kısmı için uygun bir kullanım gerçekleştirirken bir kısmı için uygun olmayan bir kullanım gerçekleştirmiştir.

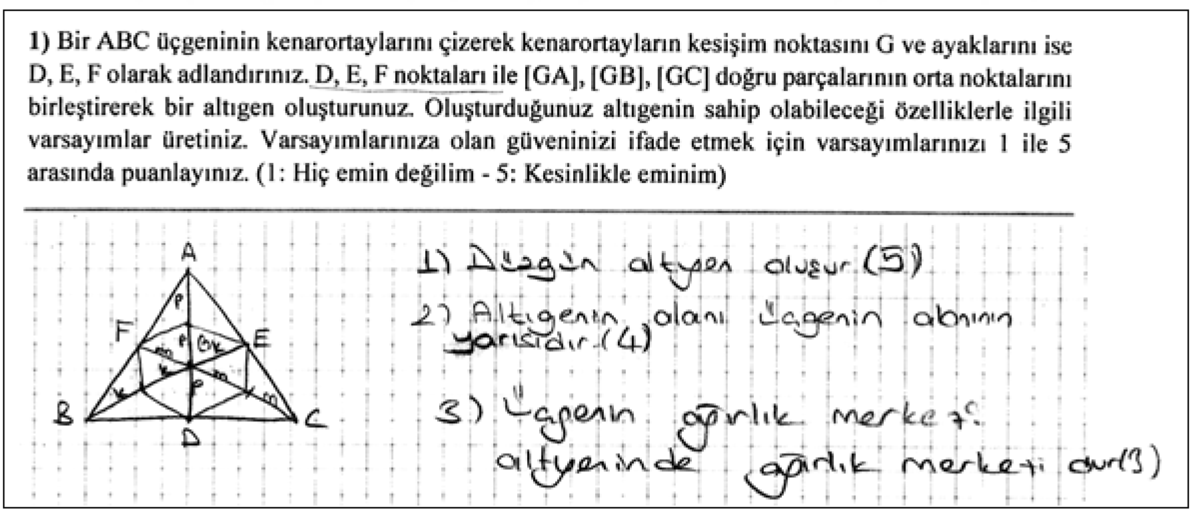
Öğretmen adayları sembolik bir dil kullanırken varsayım ifadesinin bir kısmını sembolik olmayan bir dil ile ifade ederek VMD1b göstergesinde yer alan varsayımlar, deney grubunda % 2,38; kontrol grubunda ise % 3,18 oranında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla VMD1b göstergesinde yer alan varsayımlar bakımından pek fazla bir fark olmadığı anlaşılmaktadır. Kontrol grubunda yer alan ÖA34 kodlu öğretmen adayı varsayımını sembolik bir dille ifade etmek isterken bu ifadede sembolik olmayan bir dil kullanımına yer vererek VMD1b göstergesi içerisinde değerlendirilen varsayımlar Şekil 84'te sunulmuştur.


1) Bir ABC üçgeninin kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını G ve ayaklarını ise D, E, F olarak adlandırınız. D, E, F noktaları ile [GA], [GB], [GC] doğru parçalarının orta noktalarını birleştirerek bir altıgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz altıgenin sahip olabileceği özelliklerle ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)



Şekil 84. VMD1b göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Varsayımlarını sembolik olmayan bir dille ifade ederken hangi geometrik kavramın belirtildiğinin açık olmaması sonucunda VMD1c göstergesinde yer alan varsayımların deney grubunda % 21,96; kontrol grubunda ise % 32,17 gibi bir orana sahip olduğu görülmüştür. Kontrol grubunda yer alan ÖA50 kodlu öğretmen adayının VMD1c göstergesine ile ilgili ifade ettiği varsayımları Şekil 85'te sunulmuştur.


1) Bir ABC üçgeninin kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını G ve ayaklarını ise D, E, F olarak adlandırınız. D, E, F noktaları ile [GA], [GB], [GC] doğru parçalarının orta noktalarını birleştirerek bir altıgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz altıgenin sahip olabileceği özelliklerle ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

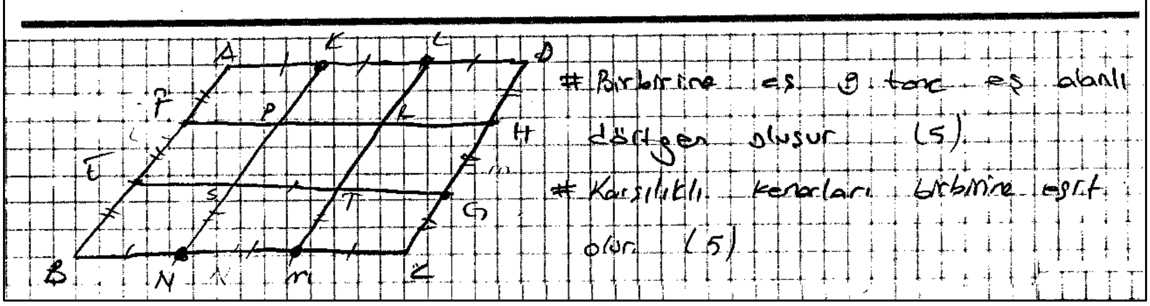


Şekil 85. VMD1c göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 85 incelendiğinde ÖA50 kodlu öğretmen adayı, ürettiği varsayımların her birinde hangi altıgen ve üçgenden bahsettiğini belirtmemiştir. "*Düzgün altıgen oluşur.*" Varsayımında kendi harflendirmesine bağlı olarak bahsettiği altıgeni ifade etmemiştir. "*Altıgenin alanı üçgenin alanının yarısıdır.*" Varsayımında altıgen ile bir üçgenin alanları arasında oranlamayı ifade ederken hangi üçgen ile altıgenin alanlarını karşılaştırdığı belirsizdir. Aynı durum son varsayımı için de geçerlidir. Öğretmen adayı, varsayımlarını yukarıda belirtilen şekilde ifade etmesi sonucunda kısmen uygun bir dil kullanmıştır.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA25 kodlu öğretmen adayı varsayımlarını sembolik olmayan bir dil ile ifade ederken hangi geometrik kavramlardan bahsettiğinin belli olmaması sonucunda VMD1c göstergesi içerisinde değerlendirilen varsayımlar Şekil 86'da sunulmuştur.

**3)** Herhangi bir ABCD dörtgeni oluşturarak AB kenarı üzerinde sırasıyla E, F; BC kenarı üzerinde sırasıyla N, M; CD kenarı üzerinde sırasıyla G, H; DA kenarı üzerinde sırasıyla L, K olacak şekilde kenarları üç eşit parçaya bölen noktalar belirleyiniz. E ile H; F ile G; N ile K; M ile L noktalarını birleştirmek üzere [EH], [FG], [NK], [ML] doğru parçalarını çiziniz. Doğru parçalarının kesişmesiyle oluşan PRST dörtgeninin alanına yönelik varsayımlar üretiniz. ABCD dörtgeninin kenarlarını beş, yedi, dokuz vs. parçaya bölerek incelemeler yapınız ve kenarları n parçaya böldüğünüzde oluşan PRST dörtgeninin alanı ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız.
(1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

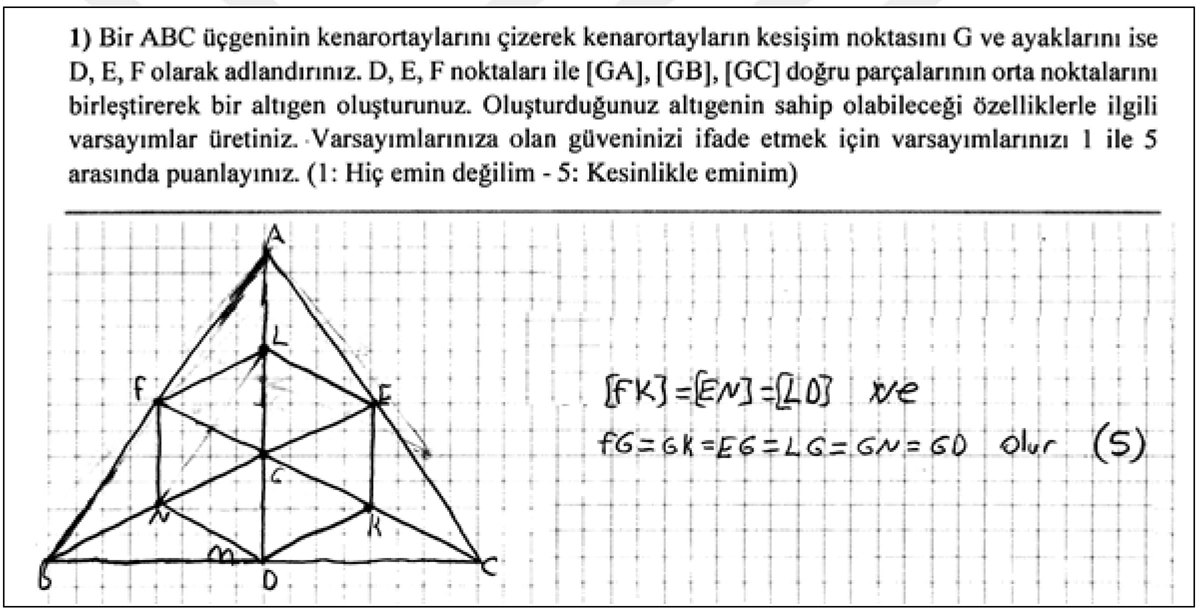



Şekil 86. VMD1c göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 86'dan görüldüğü üzere ÖA25 kodlu öğretmen adayı, varsayımlarının birinde alanlarının eşit olduğunu ileri sürdüğü dörtgenleri isimleri ile birlikte belirtmemiş ya da bu dörtgenlerin nasıl oluştuğu ile ilgili ayrıntıyı belirtmeden varsayımını ifade etmiştir. Bunun sonucunda varsayım ifadesinde hangi geometrik şekilden bahsedildiği belirsiz olarak kalmıştır. Diğer varsayımında ise karşılıklı kenar uzunluklarının eşit olduğundan bahsetmiştir. Ancak bu varsayımında hangi geometrik kavram için bunu dile getirdiğini açıkça ifade etmemiştir. Dolayısıyla öğretmen adayının varsayımlarında bazı belirsizliklerin olması sonucunda kısmen uygun bir dil kullanmıştır.

Deney grubunda % 5,93 ve kontrol grubunda % 7,33 oranında olmak üzere matematik dilini kullanma bakımından VMD0 kategorisinde yer alan varsayımların en az rastlanan ifadeler olduğu belirlenmiştir. Ancak bu tür varsayımların kontrol grubunda biraz daha fazla ortaya çıktığı fark edilmiştir. Bu kategori içerisinde en çok rastlanan durumun ise sembolik dil ile varsayımları ifade ederken matematiksel sembollerin uygun bir şekilde kullanılmaması olduğu görülmüştür. Bu durum, VMD0b göstergesinde yer alan varsayımların VMD0a göstergesine göre daha az ifade edildiğini göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının sembolik olmayan bir dil kullanırken yanlış kelimeler tercih ettikleri durumların daha az olduğu anlaşılmaktadır. Bunların dışında öğretmen adaylarının boş bırakarak matematik dili bakımından değerlendirilebilecek bir varsayımın olmadığı durumların da ortaya çıktığı belirlenmiştir. Boş bıraktıkları durumlar, VMD0 kategorisinde yer alan göstergelere göre daha fazla bir oranda ortaya çıktığı da dikkat çeken durumlardan biri olmuştur.

Varsayımları sembolik bir dil ile ifade ederken matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanmadıkları durumlar, deney ve kontrol grubunda % 4,15 olmak üzere aynı oranda ortaya çıktığı belirlenmiştir. Kontrol grubunda yer alan ÖA53 kodlu öğretmen adayının VMD0a göstergesi ile ilgili ifade ettiği varsayım Şekil 87'de sunulmuştur.


**1)** **Bir ABC üçgeninin kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını G ve ayaklarını ise D, E, F olarak adlandırınız. D, E, F noktaları ile [GA], [GB], [GC] doğru parçalarının orta noktalarını birleştirerek bir altıgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz altıgenin sahip olabileceği özelliklerle ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)**

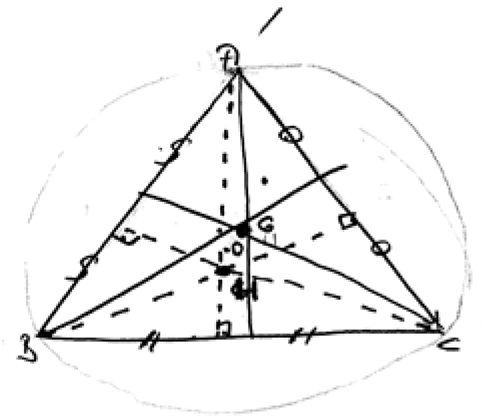


Şekil 87. VMD0a göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 87'den görüldüğü üzere ÖA53 kodlu öğretmen adayı, doğru parçalarının uzunluklarını sembolik bir dil ile ifade etmek için uygun olmayan bir kullanım gerçekleştirmiştir. Doğru parçalarının uzunluğunu ifade ederken ya doğru parçası olduğunu ifade etmek için kullanılan "[ ]" sembolünü ya da hiçbir sembol kullanmamayı tercih etmiştir. Böyle bir kullanım gerçekleştirerek varsayımlarını sembolik dil ile ifade ederken uygun olmayan matematiksel semboller tercih etmiştir.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA16 kodlu öğretmen adayı, sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembollere yönelik uygun olmayan kullanımlar gerçekleştirerek VMD0a göstergesinde yer alan varsayımı Şekil 88'de sunulmuştur.

**6) Herhangi bir ABC üçgeninin diklik merkezi, ağırlık merkezi ve çevrel çemberinin merkezini belirleyerek sırasıyla H, G, O olarak adlandırınız. H, G, O noktalarının sahip olabileceği ortak özellikler ve bu noktaların oluşturduğu doğru parçaları ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)**




Eğer ABC eşkenar üçgen olursa;

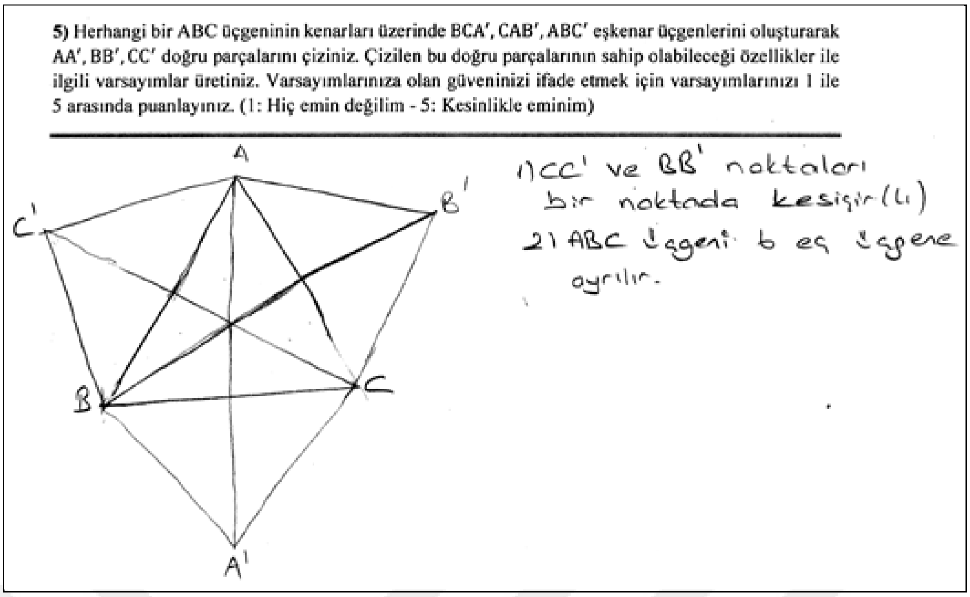
G= O= H olur. (Doğrusal olur.)

(4)

Şekil 88. VMD0a göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 88 incelendiğinde ÖA16 kodlu öğretmen adayı; varsayımda G, H, O noktalarının aynı konumda olduğunu belirtmek için "*G = H = O*" şeklinde yanlış bir kullanım gerçekleştirmiştir. Eşkenar bir üçgenin diklik merkezi, ağırlık merkezi ve çevrel çember merkezinin çakıştığını sembolik bir dil ile ifade etmek isterken hatalı matematiksel gösterimlerde bulunmuştur.

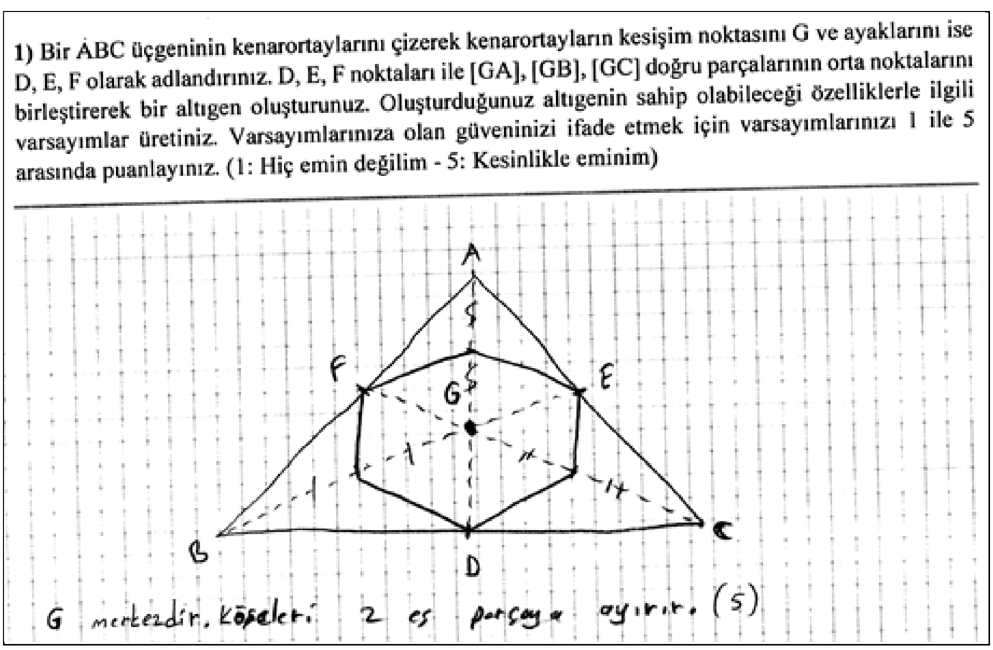
Matematik dilinin kullanımı bakımından VMD0b göstergesinde yer alan varsayımların deney grubunda % 1,78 ve kontrol grubunda % 3,18 oranında ifade edildiği görülmüştür. Dolayısıyla deney grubunda bu tür varsayım ifadeleri daha az görülmekle birlikte öğretmen adaylarının sembolik olmayan bir dil kullanırken yanlış kelimeler kullandığı durumların da ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Kontrol grubunda yer alan ÖA50 kodlu öğretmen adayının VMD0b göstergesi ile ilgili ifade ettiği varsayımına Şekil 89'da yer verilmiştir.




Şekil 89. VMD0b göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 89'dan görüldüğü üzere ÖA50 öğretmen adayı varsayımında CC' ve BB' doğru parçalarından bahsetmek isterken bunların nokta olduğunu belirten bir ifade kullanmıştır. Öğretmen adayının böyle bir ifade kullanmasıyla varsayımını sembolik olmayan bir dil ile ifade ederken uygun olmayan bir kullanım gerçekleştirmiştir.

Benzer şekilde deney grubunda yer alan ÖA32 kodlu öğretmen adayının varsayımını sembolik olmayan bir dille ifade ederken yanlış kelimeler tercih etmesi sonucunda VMD0b göstergesinde yer alan varsayım ifadesi Şekil 90'da sunulmuştur.




Şekil 90. VMD0b göstergesi ile ilgili varsayım örneği

Şekil 90 incelendiğinde ÖA32 kodlu öğretmen adayı, varsayımında köşelerin eş parçalara bölünmesi şeklinde uygun olmayan bir ifadeye yer vermiştir. Öğretmen adayının belirttiği bu ifadeden noktalar eş parçalara bölünebilir şeklinde bir anlam ortaya çıkmaktadır. Bu bakımdan öğretmen adayı, sembolik olmayan bir dil kullanırken yanlış kelimeler tercih ederek uygun olmayan bir kullanım gerçekleştirmiştir.

Uygulama sonrasında genel olarak hem deney hem de kontrol grubunda öğretmen adaylarının varsayımları ifade ederken uygun bir dil kullandıkları belirlenmiştir. Bu kullanımlarında, matematiksel sembolleri uygun bir şekilde tercih ederek ifade ettikleri varsayımların çoğunlukta olduğu fark edilmiştir. Bununla birlikte varsayımlarını ifade ederken sembolik olmayan dili uygun bir şekilde kullandıkları durumların da önemli bir oranda ortaya çıktığı görülmüştür. Ancak sembolik olmayan dilin kullanımında hangi geometrik kavramların betimlendiğinin belirsiz olduğu durumlar, uygun kullanımlara göre daha büyük bir çoğunluğa sahiptir. Varsayımları ifade ederken matematik dilini kullanma bakımından en az karşılaşılan durumların ise gruplara göre farklılık gösterdiği belirlenmiştir. Deney grubunda sembolik olmayan bir dil kullanırken yanlış kelimeler tercih ettikleri durumlara en az rastlanırken kontrol grubunda sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembollerin bir kısmı uygun, bir kısmının ise uygun olmadığı durumlara en az rastlandığı belirlenmiştir.

Uygulama sonrasında her bir grup içinde öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımların matematik dili kategorilerine yönelik puan dağılımlarının ilişkili olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare testi yapılmıştır. Bu test sonuçlarına göre deney grubunun varsayımlarının matematik dili kategorilerine yönelik puan dağılımlarının ilişkili olduğu tespit edilmiştir $(\chi^2 = 122{,}592,\ p < 0{,}05)$. Kontrol grubu için yapılan Ki-kare testi sonucu da grubun varsayımlarının matematik dili kategorilerine yönelik puan dağılımlarının ilişkili olduğunu göstermektedir $(\chi^2 = 85,232,\ p < 0{,}05)$. Öğretmen adaylarının varsayımlarının matematik dili kategorilerine yönelik puan dağılımının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek için yapılan Ki-Kare testi sonuçları ise Tablo 36'da sunulmuştur.

Tablo 36. Varsayımların Matematik Dili Kategorilerinin Gruplar ile İlişkisi İçin Yapılan Ki-Kare Testinin Sonucu

| | Value | df | p |
|---|---|---|---|
| Pearson Chi-Square | 4,550[a] | 2 | 0,103 |
| Likelihood Ratio | 4,555 | 2 | 0,103 |
| Linear-by-Linear Association | 3,705 | 1 | 0,054 |
| N of Valid Cases | 578 | | |

Tablo 36'dan görüldüğü üzere öğretmen adayların varsayımlarının matematik dili kategorilerine yönelik puan dağılımının deney ve kontrol grubuna bağlı olmadığı tespit edilmiştir $(\chi^2 = 4{,}550,\ p > 0{,}05)$. Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının varsayımlarını ifade ederken matematik dili bakımından gruplarla ilişkili olmadığı belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının varsayımlarını uygun bir dil ile ifade etme sayılarının deney ve kontrol grubuna bağlı olup olmadığını belirlemek amacıyla da Ki-Kare testi kullanılmıştır. Bu testin sonucunda öğretmen adaylarının varsayımlarını uygun bir dil ile ifade etme sayılarının gruplarla ilişkili olmadığı tespit edilmiştir $(\chi^2 = 2{,}013,\ p > 0{,}05)$.

### 4. 3. Tasarlanan Öğrenme Ortamında Gerçekleşen İspat Süreçleri ile İlgili Bulgular

Bu kısımda tasarlanan öğrenme ortamında gerçekleşen ispat süreçlerinde İSMAT Modelinin aşamalarına yönelik döngülerin nasıl oluştuğunu resmetmek amaçlanmıştır. Ayrıca ispat sürecinde öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler ve öğrenme ortamının ispat yapma başarılarını nasıl etkilediğini yansıtma amacı gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Bu kısımla ile ilgili veriler, her hafta derslerde yapılan uygulamalara (video kayıtlarından yararlanarak) bağlı olarak elde edilmiştir. Belirtilen amaçlara yönelik bulgular, öğrenme ortamında yürütülen uygulamalarda her hafta öğretmen adaylarının yaşadıkları ispat süreçlerine bağlı olarak sunulmuştur.

Uygulama haftalarının her birinde gerçekleşen ispat süreci içerisinde İSMAT Modelinin hangi aşamaları ve bu aşamalar ile ilgili hangi göstergelerin ortaya çıktığını gösteren frekans ve yüzde dağılımı Tablo 37'de sunulmuştur.

Tablo 37. Her Bir Uygulama Haftasındaki İspat Sürecine Yönelik İSMAT Modeli Aşamalarına Ait Frekans ve Yüzde Dağılımı

| İSMAT Modelinin Aşamaları ile İlgili Göstergeler | 1. Hafta | | 2. Hafta | | 3. Hafta | | 4. Hafta | | 5. Hafta | | 6. Hafta | | 7. Hafta | | 8. Hafta | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % |
| Problem Durumunu Anlama | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Problemde verilenleri taslak üzerinde gösterme. | 3 | 1,74 | 10 | 2,48 | 11 | 2,83 | - | - | 4 | 1,5 | 2 | 1,03 | 4 | 1,63 | 4 | 1,83 |
| 2. Problem geometrik şekli içermiyorsa problemin içeriğine göre geometrik şeklin taslağını çizme. | - | - | - | - | - | - | 5 | 1,9 | 4 | 1,5 | - | - | 4 | 1,63 | 10 | 4,57 |
| 3. Problemde ne istendiğini ifade etme. | 5 | 2,91 | 12 | 3 | 6 | 1,54 | 9 | 3,42 | 1 | 0,37 | 9 | 4,62 | 4 | 1,63 | 6 | 2,74 |
| Yapı Oluşturma | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Geometrik yapıyı oluşturan alt figürler üzerine inceleme yaparak konuşma. | 13 | 7,56 | 52 | 13 | 47 | 12,08 | 8 | 3,04 | 8 | 3 | 1 | 0,51 | 9 | 3,67 | 10 | 4,57 |
| 2. Geometrik yapıya yönelik çizim sıralamasını belirleme. | 6 | 3,49 | 18 | 4,48 | 22 | 5,66 | 11 | 4,18 | 11 | 4,12 | 5 | 2,56 | 9 | 3,67 | 8 | 3,65 |
| 3. Problem durumunda sunulan geometrik şeklin dinamik bir yapısını oluşturma. | 6 | 3,49 | 22 | 5,49 | 22 | 5,66 | 18 | 6,84 | 20 | 7,49 | 5 | 2,56 | 7 | 2,86 | 10 | 4,57 |
| Oluşturulan Yapı Üzerinde Çalışma ve Varsayımda Bulunma | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapma. | 35 | 20,35 | 41 | 10,47 | 43 | 11,05 | 32 | 12,17 | 33 | 12,36 | 5 | 2,56 | 7 | 2,86 | 11 | 5,02 |
| 2. Ölçümler ve testleri kullanarak ilişkileri araştırma. | 22 | 12,79 | 11 | 2,74 | 17 | 4,37 | 20 | 7,6 | 12 | 4,49 | 5 | 2,56 | 6 | 2,45 | 9 | 4,11 |
| 3. Belirlenen ilişkileri ifade etme. | 12 | 6,98 | 15 | 3,74 | 14 | 3,6 | 10 | 3,8 | 10 | 3,75 | 5 | 2,56 | 6 | 2,45 | 8 | 3,65 |
| 4. Geometrik yapının farklı ve uç durumları için ilişkileri test etme. | 11 | 6,4 | 17 | 4,24 | 14 | 3,6 | 5 | 1,9 | 9 | 3,37 | - | - | - | - | 3 | 1,37 |
| 5. Yapılan testler sonucunda varsayımı ifade etme. | 5 | 2,91 | 12 | 3 | 13 | 3,34 | 10 | 3,8 | 10 | 3,75 | 8 | 4,10 | 9 | 3,67 | 9 | 4,11 |
| İlişkiyi Önerme Olarak İfade Etme | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Hipotez ve hükmü belirtme. | 7 | 4,07 | 17 | 4,24 | 10 | 2,57 | 11 | 4,18 | 9 | 3,37 | 10 | 5,13 | 10 | 4,08 | 10 | 4,57 |
| 2. Hipotez ve hükümden yararlanarak ulaşılan bağıntıyı matematiksel sembolleri kullanarak ifade etme. | 6 | 3,49 | 14 | 3,48 | 11 | 2,83 | 10 | 3,8 | 10 | 3,75 | 10 | 5,13 | 10 | 4,08 | 10 | 4,57 |
| İspatlama | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. İspata nasıl başlayacağına karar verme. | 6 | 5,02 | 28 | 7 | 20 | 5,14 | 25 | 9,5 | 20 | 7,5 | 14 | 7,18 | 21 | 8,57 | 22 | 10,05 |
| 2. İspata ulaşılmasını kolaylaştıracak deneysel verileri (açı ölçüsü, oranlar, …) belirleme. | 11 | 6,4 | 33 | 8,23 | 27 | 6,94 | 6 | 2,28 | 13 | 4,86 | 20 | 10,26 | 20 | 8,16 | 17 | 7,76 |
| 3. Ulaşılan bağıntının doğruluğunu göstermek için hangi adımları takip edeceğine karar verme. | 5 | 2,91 | 12 | 3 | 11 | 2,83 | 9 | 3,42 | 8 | 3 | 10 | 5,13 | 12 | 4,9 | 9 | 4,11 |
| 4. İspat sürecinde tanım, teorem ve aksiyomlardan yararlanma. | 8 | 4,65 | 25 | 6,23 | 39 | 10,03 | 26 | 9,89 | 25 | 9,36 | 19 | 9,74 | 33 | 13,5 | 22 | 10,05 |
| 5. Ulaşılan ara ve nihai sonuçları gerekçelendirme. | 5 | 2,91 | 26 | 6,48 | 23 | 5,91 | 24 | 9,13 | 24 | 8,99 | 29 | 14,87 | 32 | 13,06 | 23 | 10,5 |
| İspatın Tutarlılığını İnceleme | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Değiştirilen taslak ispatlarında kullanılan tanım, aksiyom, teoremlerin uygunluğu ve matematik dili bakımından değerlendirme. | 2 | 1,16 | 11 | 2,74 | 13 | 3,34 | 9 | 3,42 | 11 | 4,12 | 14 | 7,18 | 11 | 4,49 | 5 | 2,28 |
| 2. İspat planlarında fark edilen hata ve eksiklikleri belirtme. | 2 | 1,16 | 10 | 2,48 | 12 | 3,08 | 9 | 3,42 | 11 | 4,12 | 14 | 7,18 | 11 | 4,49 | 5 | 2,28 |
| İspatı Formal Hale Dönüştürme | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Taslak ispatın değerlendirilmesi sonucunda belirlenen hata ve eksiklikler doğrultusunda ispatı yeniden ele alma. | 1 | 0,58 | 7 | 1,74 | 7 | 1,8 | 3 | 1,14 | 7 | 2,62 | 5 | 2,56 | 10 | 4,08 | 4 | 1,83 |
| 2. İspat planında matematik diline ve tanım, aksiyom, teoremlerin kullanım amaçlarına dikkat ederek ispata son şeklini verme. | 1 | 0,58 | 7 | 1,74 | 7 | 1,8 | 3 | 1,14 | 7 | 2,62 | 5 | 2,56 | 10 | 4,08 | 4 | 1,83 |

Tablo 37 incelendiğinde uygulamalar boyunca oluşan ispat süreci içerisinde grupların İSMAT Modelinin her bir aşamasından geçtiği görülmektedir. Ancak bu aşamaların bazı göstergelerinin uygulamalar esnasında gruplar tarafından sergilenmediği de olmuştur. Bu göstergeler, problem durumunu anlama ile oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamalarında yer almakla birlikte bu göstergelerin sergilenmediği durumlar sınırlı sayıda ortaya çıkmıştır. Problem durumunu anlama aşamasında yer alan problem geometrik şekli içermiyorsa problemin içeriğine göre geometrik şeklin taslağını çizme göstergesinin gerçekleşmemesi, problemde geometrik şeklin varlığına bağlıdır. Problemde verilenleri taslak üzerinde gösterme ise dördüncü uygulama haftasındaki etkinlikte yer alan problemin verilenleri arasında geometrik şekil üzerinde gösterilmesini gerektirecek bir bilginin olmamasına bağlı olarak ortaya çıkmamıştır. Altıncı ve yedinci uygulama haftasında oluşan ispat sürecinde ise oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamasının geometrik yapının farklı ve uç durumları için ilişkileri test etme göstergesi hiçbir grup tarafından sergilenmemiştir. Bu uygulama haftalarında kullanılan çalışma yapraklarında farklı bir durumu incelemelerine yönelik bir yönergenin yer almaması ya da verilen durumun dışında bir inceleme yapma gereksinimi duymamalarına bağlı olarak ispat sürecinde bu göstergeye yönelik bir davranış ortaya çıkmamış olabilir.

İSMAT Modelinin her bir aşamasındaki göstergeler incelendiğinde problem durumunu anlama aşamasının problemde ne istendiğini ifade etme göstergesi, bazı uygulama haftalarında oldukça az gerçekleşmesine rağmen her hafta sergilenen göstergelerden biridir. Bu bakımdan grupların problemde neler istendiğini ispat sürecinde belirtme ihtiyacını çoğu kez hissettiklerinden bahsedilebilir. Bu göstergenin genellikle öğretmen adaylarının ölçüm yapacakları geometrik kavramların neler olduğunu görmek istemeleri durumunda ortaya çıktığı belirtilebilir. Ayrıca bu aşamadaki göstergelerin bir davranış olarak sergilenmesinin etkinliğin içeriğine ve geometrik şekli içeren bir etkinlik olmasına bağlı olduğu fark edilmiştir.

Yapı oluşturma aşamasının, ilk beş hafta özellikle de ikinci ve üçüncü uygulama haftalarında daha yoğun bir şekilde gerçekleştiği görülmektedir. Uygulamalar esnasında bu aşamaya yönelik davranışların sergilenmesinde en büyük katkıya sahip olan göstergenin geometrik yapıyı oluşturan alt figürler üzerine incelemeler yaparak konuşma olduğu fark edilmektedir. Bu durum grupların ilk haftalarda yapı oluşturma ile ilgili yaşadıkları zorluklara bağlı olarak geometrik yapının alt figürleri üzerine konuşmaları daha fazla gerçekleştirdiğine işaret etmektedir. Uygulamaların son haftalarına doğru ise bu göstergeye yönelik davranışların oranında bir azalmanın olduğu göze çarpmaktadır. Bu durum öğretmen adaylarının yapı oluşturma anlamında daha deneyimli hale geldiğini gösterir niteliktedir. Buna bağlı olarak aşamanın diğer göstergeleri olan geometrik yapıya yönelik çizim sıralamasını belirleme ve problem durumunda sunulan geometrik şeklin dinamik bir yapısını oluşturmanın belirtilen göstergeye göre daha fazla ya da bu gösterge ile aynı oranda sergilendiği görülmektedir.

Oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşaması, özellikle de ilk uygulama haftasında diğer aşamalara göre en yoğun çalışılan aşama olduğu fark edilmektedir. Diğer uygulama haftalarında ise ispatlama aşamasından sonra en fazla uğraş verilen aşama olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum genellikle grupların matematiksel bir ilişkiyi bulmak için birden çok ölçüm yapmalarına bağlı olmakla birlikte var olan ilişkiyi araştırma sürecinde birçok deneme yapmalarına dayalıdır. Başka bir ifade ile uygulama haftalarında genel olarak geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapma göstergesi daha fazla oranda ortaya çıkmıştır. Ancak uygulamalar ilerledikçe daha az ölçüm yaparak varsayımda bulundukları dikkat çekmektedir.

İlişkiyi önerme olarak ifade etme aşamasına yönelik davranışlar, üçüncü uygulama haftası hariç altıncı uygulama haftasına kadar benzer oranlarda ortaya çıkmıştır. Son üç haftada ise bu aşamaya yönelik sergilenen davranışların diğer haftalara göre daha fazla gerçekleştiği göze çarpmaktadır. Uygulamalar ilerledikçe bu aşamaya yönelik davranışlarda bir artışın olması, grupların hipotez ve hüküm kavramlarını ifade ederken matematik dilini uygun bir şekilde kullanmaya dikkat ettikleri ve bu kavramları karıştırma eğiliminde olan öğretmen adaylarının bulundukları grup içinde bu sorunun çözüldüğü anlamına gelmektedir.

İspatlama aşaması, birinci uygulama haftası hariç bütün haftalar boyunca gruplar tarafından en fazla davranışın sergilendiği aşamadır. Uygulamaların ilk haftalarında grupların ispata nasıl başlayacağına karar verme ve ispata ulaşılmasını kolaylaştıracak deneysel verileri (açı ölçüsü, oranlar, …) belirleme göstergelerine yönelik davranışların diğer göstergelere göre daha fazla olduğu göze çarpmaktadır. İlerleyen uygulama haftalarında da ispata nasıl başlayacağına karar verme göstergesine yönelik davranışların oranının fazla olduğu durumlara rastlanmıştır. Ancak bu tür durumlarda gruplar ilk uygulama haftalarından farklı olarak ispata başlamak için alternatif önerilerde bulunmuşlardır. İlk uygulama haftalarında genellikle öğretmen adaylarının ispata nasıl başlayacaklarını, bunu okuyucuya nasıl aktaracaklarını ya da ispatın devamını nasıl getireceklerini bilememe gibi durumların çoğunlukta olduğu fark edilmiştir. Uygulamaların son haftalarına doğru ise ulaşılan bağıntının doğruluğunu göstermek için hangi adımları takip edeceğine karar verme, ispat sürecinde tanım, teorem ve aksiyomlardan yararlanma, ulaşılan ara ve nihai sonuçları gerekçelendirme göstergelerine yönelik davaranışlarda artışlar olduğu dikkat çekmektedir. Dolayısıyla uygulamalar ilerledikçe öğretmen adaylarının ispatlarını tamamlamak için hangi adımları izleyecekleri konusunda deneyim kazandıkları ve uygun tanım, teorem, aksiyomları kullanarak izledikleri adımlara yönelik gerekçe sunma gereksinimi hissettiklerinden söz edilebilir.

İspatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik davranışlar, ilk uygulama haftalarında daha az oranda gerçekleşmiştir. Bu durum özellikle de birinci uygulama haftasında gerçekleşmekle birlikte öğretmen adaylarının ispatlama aşamasına gelememesi ya da ispata yönelik birçok girişimde bulunup asıl izleyecekleri ispat adımlarına geç karar vermeleri sonucunda ispatlarını tamamlama sürelerinin uzamasına bağlı olarak ortaya çıkmıştır. Sonraki haftalarda ise ispat yapma anlamında daha fazla deneyim sahibi olarak matematiksel ilişkiye ulaşmak için izlenen adımlar, ispat adımlarına yönelik sunulan gerekçeler ve kullanılan matematik dili bakımından çok yönlü değerlendirmeler yaptıkları görülmüştür. Uygulamanın ilerleyen haftalarında bu aşamaya yönelik göstergelerin oranlarında meydana gelen artış da bu durumu desteklemektedir. Son iki hafta bir azalma görülse de bu durum öğretmen adaylarının daha çok kendi ispatlarını değerlendirmeyi tercih etmelerinden kaynaklanmaktadır.

İspatı formal hale dönüştürme aşaması, genel olarak bütün uygulama haftalarında en az davranışın sergilendiği aşamadır. Özellikle de ilk uygulama haftasında bu aşamaya yönelik davranışların oldukça az gerçekleştiği fark edilmektedir. Bu durum ilk uygulama haftasında tamamlanan ispatların az sayıda olması ve ispatlama aşamasına yönelik herhangi bir şey yapmayan grupların çoğunlukta olmasına bağlı olarak ortaya çıkmıştır. Sonraki uygulama haftalarında ise grupların kendi ispatlarını ya da diğer grupların ispatlarını değerlendirip eksiklikleri ve hataları belirtmeleri ile birlikte bu aşamaya yönelik davranışların sergilendiği görülmüştür.

Uygulamanın ilk haftalarında grupların çoğu yapı oluşturma aşamasında çeşitli zorluklar yaşamışlardır. Bunun sonucunda gruplar problem durumunda verilen geometrik şeklin dinamik yapısını oluşturmak adına yapıyı oluşturan alt figürler üzerine incelemeler yaparak aralarında konuşmalar gerçekleştirmişlerdir. Birinci uygulama haftasında bazı gruplarda yer alan öğretmen adayları geometrik yapıyı oluşturan alt figürler üzerine incelemeler yaparken etkinlikte verilen şeklin aynısının çizilemeyeceği düşüncesine sahip olduğu belirlenmiştir. Uygulamalar boyunca bu tür bir düşünceye sahip olan öğretmen adaylarına oldukça az rastlanmakla birlikte bu durumun, oluşturulacak olan yapının problemde verilen geometrik şeklin temel elemanlarının uzunlukları ya da ölçüleri ile tıpatıp aynı olacak şekilde çizileceğini zannetmelerinden kaynaklandığı anlaşılmıştır. Grup 1'in bu yöndeki konuşması şu şekildedir:

*ÖA2:* *Bak burada geometrik yapıyı oluşturunuz diyor. Çizmemiz gerekli.*

*ÖA1:* *Sonuçta açıyı biz kendimiz çizeceğiz.*

*ÖA2:* *Bunu burada oluşturacağız.*

*ÖA1:* *Tamam da biz kendimiz çizeceğimiz açıyı bilemeyiz ki.*

*ÖA2:* *Burada verilenlere dayalı olarak yapacaksın.*

*ÖA1:* *Ama bu üçgendeki açılar mesela 40, 55, 85 diye nasıl bileceğiz? Bunu neye göre belirleyeceğiz?*

*ÖA2:* *Biz herhangi bir üçgen çizeceğiz.*

*ÖA3:* *Evet, herhangi bir üçgen çizeceğiz. O açıların kaç derece olduğu önemli değil ki.*

*ÖA1:* *Ama burada açılar çizilmiş, biz ölçülerini nasıl bulacağız?*

*ÖA3:* *Nasıl?*

*ÖA1:* *Ölçülerini nereden bulacağız? Biz ölçüleri ile aynısını oraya [GeoGebra] çizemeyiz ki.*

*ÖA3:* *Soruda herhangi bir açı ölçüsü verilmemiş. Herhangi bir üçgen çizeceğiz, açılar kaç çıkarsa ona göre inceleyeceğiz.*

*ÖA1:* *Hı, burada bulduğumuz açı değerlerine göre… Tamamen yanlış düşünmüşüm.*

Grup 1'in aralarında geçen konuşmalardan ÖA1 kodlu öğretmen adayının problemde verilen geometrik şeklin yazılım üzerinde oluşturulması istendiğinde çalışma yaprağında gördüğü haliyle tıpatıp aynı olacak şekilde çizilmesi gerektiğini düşündüğü anlaşılmaktadır. Diğer grup arkadaşları, ÖA1 kodlu öğretmen adayına düşündüğü şekilde yapının oluşturulamayacağını dile getirmesi sonucunda düşüncesinin yanlış olduğunu anlamasına katkıda bulunmuşlardır.

Öğretmen adayları ilk uygulama haftalarında çizim sıralamasını doğru bir şekilde belirleyebilmelerine rağmen problemde verilen geometrik şeklin dinamik yapısını nasıl oluşturacaklarını bilememe ve geometrik temellere dayandıramama gibi nedenlerden dolayı yapı oluşturma aşamasında zorluklar yaşamışlardır. İkinci uygulama haftasında grupların bazılarında öğretmen adayları eşkenar üçgeni çizmek için bu ad altında bir komut arayıp düzgün çokgen komutunun eşkenar üçgen çizimini sağlayabileceğini düşünemedikleri görülmüştür. Grup 2'de yer alan öğretmen adaylarından bazılarının eşkenar üçgeni bir düzgün çokgen olarak nitelendirememesi ile ilgili konuşmalarından bir kesit şu şekildedir:

ÖA5: *Eşkenar üçgen çizeceğim ama burada eşkenar üçgen komutu yok. Düzgün çokgen var.*

ÖA4: *Eşkenar üçgen düzgün çokgen midir?*

ÖA5: *Yok.*

ÖA4: *Ama kenar uzunlukları ve açı ölçülerinin her biri eşit o yüzden düzgün çokgendir.*

ÖA5: *Aa, ben bu yanlışı nasıl yaptım.*

Yukarıda belirtilen konuşmalardan anlaşıldığı üzere Grup 2'de yer alan öğretmen adaylarından birinin eşkenar üçgeni düzgün çokgen olarak nitelendirememesi, geometrik yapıyı oluşturmalarını engelleyen durumlardan biri olmuştur. Ancak grupta yer alan diğer bir öğretmen adayının durumu açıklaması üzerine sorun çözülmüştür.

İlerleyen uygulama haftalarında öğretmen adayları yapı oluşturma anlamında daha deneyimli bir hale gelerek geometrik yapıyı oluşturan alt figürler üzerine daha az konuşmaya başlamışlardır. Ayrıca bu süreç içinde yapıyı oluşturma anlamında zorluklar yaşasalar da karşılaştıkları problemlere çözüm önerilerinde bulunma konusunda daha aktif hale geldikleri gözlemlenmiştir. Üçüncü uygulama haftasında öğretmen adaylarından bazıları dik üçgen ve belirli bir uzunluğa göre eşkenar üçgen çizme konusunda zorluklar yaşamışlardır. Ancak önceki haftalardaki deneyimlerine bağlı olarak bu zorlukların üstesinden gelebilecek düzeyde ve geometrik temellere dayalı çizim önerileri sunabilmişlerdir. Grup 10'un uygulamanın ilk etkinliği için dik üçgenin nasıl çizilebileceği konusunda geometrik temellere dayandırarak sunduğu önerileri yansıtan konuşmalar şu şekildedir:

ÖA27: *Öyle bir şey olsa ki dik üçgen çiz desek çizsek.*

ÖA29: *Evet, nasıl çizeceğiz dik üçgeni?*

ÖA27: *Yine çemberden değil mi?*

ÖA28: *Arasındaki açıdan.*

ÖA27: *Bence yine çemberden.*

ÖA28: *Açıyı kullanarak çizebiliriz bence.*

ÖA29: *Çemberden nasıl çizilecek?*

ÖA28: *Çapı gören çevre açının 90 olmasından çizebiliriz.*

ÖA27: *Tamam, öyle çizmeye çalışalım.*

Grup 10'da yer alan öğretmen adayları dik üçgeni nasıl çizebilecekleri üzerine konuşmaları ile birlikte çeşitli çizim önerilerinde bulunmuşlardır. Açıyı kullanarak yapacaklarını belirttikleri gibi çember kullanarak da dik üçgenin çizilebileceğinden bahsetmişlerdir. Çember ile dik üçgenin nasıl oluşturabileceği sorusuna ise “*Çapı gören çevre açının 90 olmasından çizebiliriz.*” ifadesi ile geometrik temellere dayalı bir cevap vermişlerdir. Bu durum öğretmen adaylarının yapı oluştururken geometrik temelleri de dikkate aldıklarına işaret etmektedir.

Öğretmen adayları uygulamalar boyunca kazandıkları deneyimlere bağlı olarak geometrik şeklin dinamik yapısını oluşturmayı tercih etmedikleri durumlarla da karşılaşılmıştır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının problem üzerinde düşünüp varsayımda bulunmaları ya da doğrudan ispatlama yaparak ilişkiye ulaşmalarına dayalı olarak da gerçekleştiği görülmüştür. Yapı oluşturmayı tercih ettikleri durumlarda ise geometrik yapının alt figürleri hakkında farklı çizim önerileri sunmaya başladıkları belirlenmiştir. Ayrıca sundukları çizim önerilerini geometrik temellere dayandırdıkları da fark edilmiştir. Yedinci uygulama haftasında Grup 10’un ikinci etkinlikte ifade edilen yayın orta noktasını belirlemek için aralarında geçen konuşmalar şu şekildedir:

*ÖA28:* *Yayın orta noktasını nasıl alacaksın?*

*ÖA27:* *Şuradan herhalde. (Orta nokta komutunu kastetmektedir.)*

*ÖA28:* *Herhalde şey yapacaksın. Bak bir tane* $|AF| = |BF|$ *çizeceksin. Aynı kirişler aynı yay tarafından gideceksin.*

*ÖA27:* *Eşkenar… İkizkenar çizsek olur mu?*

*ÖA28:* *Az bana versene. (Bilgisayarda kendisi çizmek ister.) Bak şimdi bir şey deneyeceğim. Verilen ölçüde doğru çizeceğiz.*

*ÖA27:* *O ölçüyor sadece. Bak şimdi bence şunun orta noktasını bulacağız. Buna bir dik çizeceğiz. Dik çizince ne olacak? İkizkenar üçgen olmayacak mı? Kirişler aynı yayı görecek.*

*ÖA28:* *Bu mu?*

*ÖA27:* *Hıhı… Gel şuraya. (Orta noktasını alacağı doğru parçasını gösterir.) Şimdi buna dik çiz dik doğrudan. (Bilgisayar üzerinde yapması için çizeceği yeri işaret etme ve kullanacağı komutu belirtme anlamında yönlendirmelerde bulunur.) Şimdi bu zaten ikizkenar hem ikiye ayırdı hem de dik. Yani F noktası neresi? Şurası.*

*ÖA28:* *Tamam, evet.*

*ÖA27:* *İlk önce şunla şunun kesişimini al. [Yay ile dik doğrunun kesişimi alarak F noktasını belirleme] Kesişim komutu en başta. Kesişimini al. (Kâğıdına da bakarak çizimi teyit eder ve yazılım üzerindeki incelemeler* *üzerine) O zaman zaten şurası [AFB üçgeni] ikizkenar. Şurası ikizkenar oluyor. $|AF| = |FB|$ olur. Kesin yani.*

Grup 10'un konuşmalarından anlaşıldığı üzere geometrik yapının alt figürlerinden biri olan yayın orta noktasını oluşturmak için çeşitli çizim önerilerinde bulunmuşlardır. Bunun üzerine ÖA27 kodlu öğretmen adayı, ikizkenar üçgenin yüksekliğinin aynı zamanda kenarortay olmasına bağlı olarak öneride bulunup bu durumun üstesinden gelebilme yolunu bulmuştur.

Grupların geneli uygulamalar boyunca yapı oluşturmayı tercih etmekle birlikte son haftalara doğru geometrik yapıyı oluşturmayan gruplar da olmuştur. Ayrıca bir grubun yapıyı oluşturup üzerinden ölçümler yaparak varsayımda bulunmak yerine doğrudan ispat yaparak matematiksel ilişkiye ulaşmayı tercih ettiği durumlara da rastlanmıştır. Bazı grupların çizdikleri geometrik şeklin taslağı üzerinde düşünmesiyle varsayımda bulunup bu varsayımlarını doğrulamak için GeoGebra yazılımından yararlandıkları durumlar da olmuştur. Sekizinci uygulama haftasında birinci etkinliği yaparken Grup 8'in bu duruma yönelik aralarında geçen konuşmalar şu şekildedir:

*ÖA22:* *Kafam karıştı ya… Kafam karıştı. (Kâğıdındaki çizimde işaret ederek) Bence $r_1$ + $r_2$ [Dik kenarlara ait dış teğet çemberlerin yarıçapları] buna [ABC dik üçgeninin hipotenüs uzunluğu] eşit gibi görünüyor.*

*ÖA23:* *Hı…*

*ÖA22:* *Şu $r_1$ + $r_2$, hipotenüs uzunluğu arasındaki ilişkiyi soruyor ya*

*ÖA23:* *Hipotenüs uzunluğuna…*

*ÖA22:* *Evet sanki oraya eşit olacak yarıçaplar toplamı gibi. Ama nereden ulaşacağız ona şimdi?*

*ÖA23:* *(Kâğıdını ÖA22'e doğru getirerek) Şimdi şöyle bir şey var. (Çizdiği açılarına yönelik B dik açısının bulunduğu yerin iki tarafına denk gelen açılar için dış açıortay olma durumuna bağlı olarak harflendirmeler yapar.) Şurası α, şurası α; burası da α, burası da α olacak değil mi? Sonuçta bunlar iç ters açılardır. Buradan gidebilir miyim?*

*ÖA21:* *Önce geometrik yapı üzerinde $r_1$'i [Dış teğet çemberlerden birinin yarıçapı] ölçersek… 4,12 çıktı.*

*ÖA22:* *(Bilgisayara bakarak ölçüm sonuçlarını kâğıdına yazar.) Dur ben yazıyorum.*

*ÖA21:* *Bu tarafa geçersek 5,25*

| | |
|---|---|
| *ÖA22:* | *Şu şeyi ölç. BC'yi ölç.* |
| *ÖA21:* | *Dur BC'yi ölçüyorum. B'den C'ye… Evet, toplamı hipotenüsü veriyor.* |

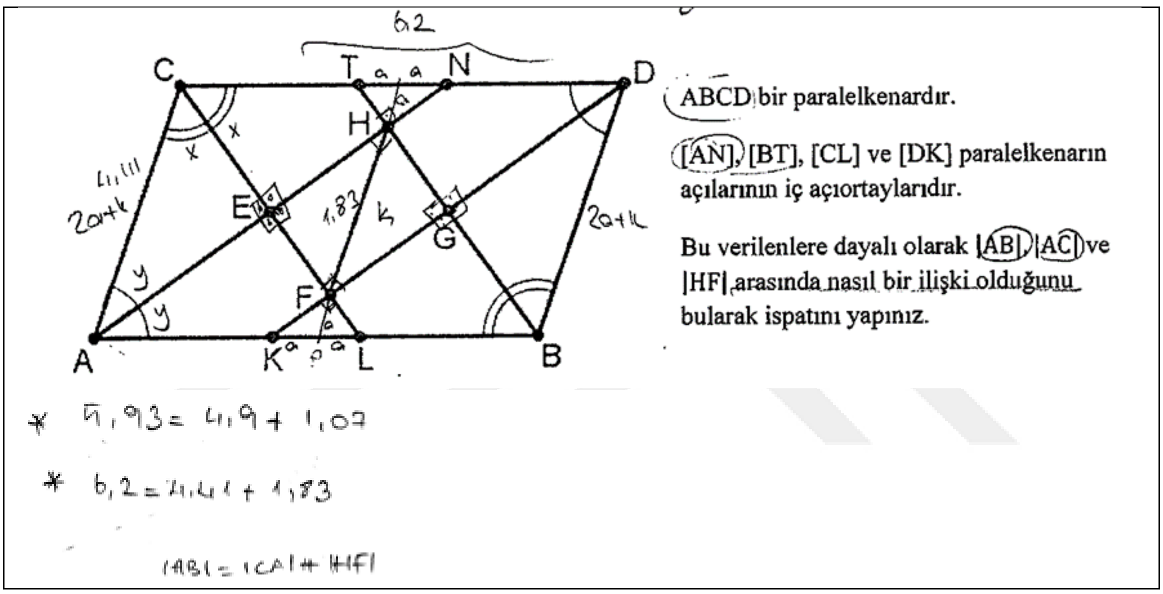
Yukarıda belirtilen konuşmalardan anlaşıldığı üzere Grup 8'de yer alan ÖA22 kodlu öğretmen adayı çizdiği taslak üzerinde incelemeler yapması sonucunda bir varsayımda bulunmuştur. Bunun üzerine diğer grup arkadaşları ile birlikte buna nasıl ulaşacakları konusunda tereddüt içinde kalmışlardır. Grupta yer alan bir diğer öğretmen adayı da öncelikle varsayımın doğruluğunu teyit etmek için ölçüm yapmayı teklif etmiştir. Bununla birlikte ÖA22'nin belirttiği varsayımın doğru olduğuna ulaşmışlardır.

Uygulamalar boyunca öğretmen adayları oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamasında çoğunlukla geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapma göstergesine yönelik davranışlar sergilemişlerdir. Öğretmen adayları geometrik yapı üzerinde bir ya da iki ölçüm yapmaları sonucunda matematiksel ilişkiyi belirleyebildikleri durumlarda bile bu ilişkinin varlığından söz edebilmek için ölçümlere devam etmeyi tercih etmişlerdir. Bu ölçümlerin sayılarını arttırmaları, genellikle ifade ettikleri ilişkinin geçerli olduğunu garanti altına alıp varsayımlarını ifade etmeyi istemelerinden kaynaklanmaktadır. Üçüncü uygulama haftasında ikinci etkinliği yaparken Grup 1'in bu duruma yönelik konuşmaları şu şekildedir:

| | |
|---|---|
| *ÖA3:* | *Onları [ET, BD, FK doğru parçaları] doğru parçası olarak belirlesene. Böylece ölçümleri daha kolay görürüz.* |
| *ÖA2:* | *i, j, k [Yazılım üzerinde ET, BD, FK doğru parçalarına denk gelen ifadeler] başka var mı?* |
| *ÖA3:* | *Tamam, değerleri yazalım.* |
| *ÖA1:* | *Bunların [ET ile FK doğru parçasının uzunlukları] toplamı buna [BD doğru parçasının uzunluğu] eşit oluyor.* |
| *ÖA3:* | *Evet.* |
| *ÖA2:* | *ET, FK, BD neresi? Diğer ölçümlere de bakalım.* |
| *ÖA3:* | *Tamam, bütün değerler bunu [ET ile FK doğru parçalarının uzunlukları toplamı BD doğru parçasının uzunluğuna eşittir.] sağlıyor. Varsayımımızı yazabiliriz.* |

Grup 1'de yer alan öğretmen adayları, matematiksel ilişkiyi bulmak için çeşitli ölçümler yapmıştır. Yaptıkları birkaç ölçüm sonucunda matematiksel bir ilişkinin varlığından söz etmişlerdir. Bunun üzerine ölçümlerini tekrarlayıp testler yaparak ilişkinin diğer ölçümler için de sağlanması ile birlikte varsayımlarını yazmaya karar vermişlerdir.

Uygulamalar ilerledikçe öğretmen adaylarının daha az sayıda ölçüm yapmasıyla var olan matematiksel ilişkiyi bulmaya yönelik bir araştırma süreci geçirdikleri gözlemlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ilerleyen uygulama haftalarında bu aşamaya yönelik çalışmaları daha kısa bir sürede tamamlamaya başladığının ve oluşturulan ispat süreçlerinin deneyim kazanmalarına yardımcı olduğunun bir göstergesidir. Bu bakımdan son haftalara doğru neredeyse sadece bir ölçüm sonucu ile matematiksel ilişkiye ulaşabildikleri durumlarla karşılaşılmaya başlanmıştır. Altıncı uygulama haftasında Grup 1'in birinci etkinlik için sadece bir ölçüm yaparak matematiksel ilişkiye ulaştıklarını gösteren Şekil 91 aşağıda sunulmuştur.




Şekil 91. Grup 1'in geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapma göstergesine yönelik verdiği cevap

Şekil 91 incelendiğinde Grup 1'de yer alan öğretmen adaylarının tek bir ölçüm sonucu elde edip bu ölçüm sonucunun sağladığı matematiksel ilişkiyi yazdıkları görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının sadece bir ölçüm sonucu ile ilişkiyi belirtmeleri üzerine varsayımda bulunduklarını göstermektedir.

Öğretmen adayları geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yapma sonucunda bir matematiksel ilişkiye ulaşıp varsayımda bulunmaları ile birlikte problem durumu üzerinde akıl yürüterek varsayımda bulundukları durumlara da rastlanmıştır. Bu bakımdan öğretmen adaylarının yapılan uygulamalar ile birlikte varsayım üretme anlamında bir anlayış kazandığından bahsedilebilir. Yedinci uygulama haftasının birinci etkinliğini yaparken Grup 2'in bu konuya ilişkin konuşmaları şu şekildedir:

*ÖA4:* *(Çalışma yaprağında geometrik şeklin taslağını E, F, C noktalarını birleştirerek tamamlar.) Arkadaşlar, bu [EFC üçgeni] eşkenar üçgen olmayacak mı? Bence ABCD paralelkenar içinde eşkenar üçgen olacak.*

*ÖA5:* *Ben KAK benzerliği buldum.*

*ÖA4:* *Ben de öyle bir şey sezinledim. Şurada bir eşlik bulacağız ama açı ölçüleri, kenar uzunlukları ile ilgili tam bir şey bulamadım.*

Yukarıda yer alan konuşmalardan anlaşıldığı üzere ÖA4 kodlu öğretmen adayı, problem durumunda belirtilenlere dayalı olarak geometrik şeklin taslağını oluşturmasıyla birlikte varsayım olarak EFC üçgeninin eşkenar olduğunu belirtmiştir. Belirttiği diğer ifadelere göre gerek çizimine gerekse taslak üzerinde yaptığı incelemeler ile birlikte yapılan testler sonucunda varsayımı ifade etme göstergesine yönelik bir davranış sergilediği anlaşılmaktadır.

Uygulamanın ilk haftalarında öğretmen adayları genellikle birden fazla matematiksel ilişki ileri sürerek bunun üzerine çeşitli ölçümler ve testler yapıp ifade ettikleri ilişkinin geçerliliğini inceleme şeklinde araştırma sürecini daha yoğun olarak geçirmişlerdir. Daha sonraki haftalarda ise yaptıkları ölçüm ve testlerde azalmalar meydana gelerek genellikle ileri sürdükleri ilk matematiksel ilişkinin geçerli olduğuna ulaştıkları bir süreç geçirmişlerdir. Öğretmen adaylarının birinci uygulama haftasında Grup 2'nin matematiksel ilişkiyi araştırma süreçlerine yönelik aralarında geçen konuşmalardan bir kesit şu şekildedir:

*ÖA4:* *Biraz değiştir, değiştir, değiştir, tamam bu ölçümü yazalım. AFB… Değiştir şimdi. AFB 88 mi o?*

*ÖA5:* *Bunlar arasında nasıl bir ilişki oluyor ki?*

*ÖA4:* *Dur değişme ortadaki açıyı [ADB açısı] bulamadık.*

*ÖA5:* *O neydi şimdi?*

*ÖA4:* *Tamam, sen onu daha bulamazsın.*

*ÖA5:* *Hiçbir ilişki yok. Toplamları [AEB, ADB ve AFB açılarının ölçüleri]* $180^{\circ}$ *mi acaba?*

*ÖA4:* *Yok, değil topladım.*

*ÖA5:* *Toplamları* $180^{\circ}$

*ÖA4:* *Hadi topla bakalım* $180^{\circ}$ *oluyor mu? Ne 180'i görmüyor musun kaçı geçiyor.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere ÖA5 kodlu öğretmen adayı, ölçüm sonuçlarına dikkat etmeden bir matematiksel ilişkinin var olduğunu ileri sürmüştür. ÖA4 kodlu öğretmen adayı, bu ilişkinin ölçümlere göre sağlamadığını söylemesine rağmen belirttiği ilişki üzerinde ısrar etmiştir. Ancak ÖA4 kodlu öğretmen adayının ölçüm sonuçlarına hâkim olması ile birlikte bahsedilen ilişkinin varlığını çürütmüştür.

Oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamasının göstergelerinden geometrik yapının farklı ve uç durumları için ilişkileri test etmeye yönelik davranışlar, çoğunlukla uygulamanın ilk beş haftasında gerçekleşmiştir. Uygulamanın son haftalarında ise genellikle öğretmen adaylarının geometrik yapının farklı ve uç durumları için ilişkileri test etme ihtiyacını hissetmedikleri fark edilmiştir. İkinci uygulama haftasındaki etkinliklerden birinde eşkenar üçgenler yerine herhangi bir düzgün çokgen yerleştirilmesi durumunun incelenmesinin istenmesi üzerine bazı gruplar sadece bir düzgün çokgeni incelemekle yetinmiştir. Ancak gruplardan bazılarının birden çok düzgün çokgen için incelemeler yaptığı durumlara da rastlanmıştır. Grup 10'un bu uygulama haftasında ikinci etkinlik için kare, düzgün beşgen ve altıgen şekillerine yönelik incelemeler yaptığını yansıtan konuşma şu şekildedir:

*ÖA29:* *Eşkenar üçgenler yerine herhangi bir düzgün çokgen… Herhangi bir düzgün çokgen derken? Kare falan mı?*

*ÖA27:* *Evet.*

*ÖA29:* *Önce şeyi çiz.*

*ÖA27:* *Önce üçgeni çizmiyor muyuz?*

*ÖA29:* *He, tamam. Şimdi düzgün çokgen çiz. Tamam. Şimdi 5 yap*

*ÖA27:* *İkisi de aynı olsun. Bunların ikisi de üçgen ya.*

*ÖA29:* *Tamam, ikisi aynı olsun.*

*ÖA27:* *Tamam şimdi.*

*ÖA29:* *Buradan buraya. Buradan buraya. (Temsili olarak BE ile DC doğru parçalarını oluşturmayı kastetmektedir.)*

*ÖA27:* *Nereden başlayacağız?*

*ÖA29:* *Buradan böyle. (Temsili olarak BE ile DC doğru parçaları için hangi noktadan başlayacaklarını göstermektedir.)*

*ÖA27:* *Şimdi ölçünce.*

*ÖA29:* *Tamam eşit çıktı ki.*

*ÖA27:* *Şimdi şey yazalım. Karede eşit çıktı.*

*ÖA29:* *Bunları sil şimdi. Onun [ABC üçgeni] üzerine yaparız.*

| | |
|---|---|
| *ÖA27:* | *Düzgün beşgen çizince bak yine eşit çıktı. Ama şu kısımdan alınca. Ama beşgenin ilk noktadan çizince mi diyelim? (Temsili olarak BE ile DC doğru parçalarının başlangıç noktasından bahsetmektedir.)* |
| *ÖA29:* | *Zaten demek istediği yer orası.* |
| *ÖA28:* | *O zaman düzgün altıgen de olur herhalde. Tamam, ben çizeyim şimdi.* |
| *ÖA27:* | *Şimdi şu doğru parçaları [Temsili olarak BE ile DC doğru parçaları] çiz.* |
| *ÖA29:* | *Niye farklı çıktı?* |
| *ÖA27:* | *Tamam şuraları birleştir. (Temsili olarak BE ile DC doğru parçalarının oluşumu için noktaları birleştirmekten bahsetmektedir.) Evet, farklı çıktı.* |

Yukarıda belirtilen konuşmalardan anlaşıldığı üzere Grup 10'da yer alan öğretmen adayları, ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerine kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgen yerleştirerek varsayımlarının bu durumlarda geçerli olup olmadığını incelemişlerdir. Kare ve düzgün beşgen olması durumunda varsayımlarının geçerli olduğunu, düzgün altıgen olması durumunda ise geçerli olmadığını dile getirmişlerdir. Ancak ifade ettikleri varsayım, ABC üçgeninin belirtilen kenarlarına yerleştirilen bütün düzgün çokgenler için geçerli olmaktadır. Öğretmen adaylarının ABC üçgeninin A köşesine en yakın noktayı başlangıç kabul ederek doğru parçalarını oluşturmaları gerekirken başka bir noktayı almaları sonucunda bu durum gerçekleşmiştir.

Öğretmen adayları uygulamalar boyunca oluşturdukları geometrik yapının farklı ve uç durumları için incelemeler yapmaları, ileri sürdükleri varsayımların hangi durumlarda geçerli olduğunu görüp ifade edecekleri önermenin sınırlarını belirlemek amaçlıdır. Ancak bazı uygulama haftalarında geometrik yapının farklı ya da uç durumlarına yönelik incelemelerin var olan matematiksel ilişkiye daha kolay bir şekilde ulaşıp varsayımlarını ifade etmek amaçlı yapıldığı görülmüştür. Sekizinci uygulama haftasında bu duruma yönelik Grup 10'un aralarında geçen konuşmalar şu şekildedir:

| | |
|---|---|
| *ÖA29:* | *Üçgeni ikizkenar olarak mı çizdin?* |
| *ÖA28:* | *Evet, ikisi [Dış teğet çemberlerinin yarıçap uzunlukları] eşit çıktı açıkçası ama bunun üzerinden inceleme yapalım. Sonra diğerine de bakarız.* |
| *ÖA29:* | *Tamam.* |
| *ÖA28:* | *Şu 2,29 [AB kenarına ait dış teğet çember yarıçapı]* |
| *ÖA29:* | *Şuraya geç.* |
| *ÖA28:* | *2,29 [AC kenarına ait dış teğet çember yarıçapı]* |

*ÖA29:* *Bir de hipotenüs uzunluğu*

*ÖA28:* *4,58 2 katı*

*ÖA29:* *İkisinin toplamı. [AB ile AC kenar uzunluklarının toplamı hipotenüsün uzunluğuna eşittir.] Bir de ikizkenar olmayan bir üçgen olduğu duruma bakalım.*

*ÖA28:* *Şimdi bakalım. Doğru parçası* $|IK| = m = 1{,}31$ *[AB kenarına ait dış teğet çember yarıçapı] Bunu tut aklında tamam mı?*

*ÖA29:* *Orada yazıyor zaten.*

*ÖA28:* *2,91 [AC kenarına ait dış teğet çember yarıçapı]*

*ÖA29:* *Bir de BC'ye bak.*

*ÖA28:* *4,22*

*ÖA29:* *Toplamı işte yine.*

Yukarıda belirtilen konuşmalardan Grup 10'da yer alan öğretmen adaylarının ABC dik üçgenini ikizkenar olarak çizmeleri üzerine bunu değiştirmeyip bunun üzerinden matematiksel ilişkiyi araştırdıkları anlaşılmaktadır. İlişkiyi bulmaları üzerine herhangi bir dik üçgen olduğunda bu durumun geçerli olup olmadığını incelemek için yapıyı tekrar oluşturarak ilişkinin değişmediği sonucuna varmışlardır.

Öğretmen adayları uygulamaların ilk haftalarında genellikle hipotez ve hükmün ne olduğunu bilmeme ya da iki kavramı birbirine karıştırma gibi nedenlerden dolayı ilişkiyi önerme olarak ifade etme aşamasında zorluklar yaşadıkları fark edilmiştir. Grup 10 da hipotez ve hükmü yazarken iki kavramı karıştırması sonucunda ilk uygulama haftasında bu aşamaya yönelik tereddütler yaşayan gruplardan biridir. Ancak grup içinde hipotez ve hüküm kavramları üzerine kendi aralarında konuşmaları sonucunda bu kavramların yerine ne yazacakları konusunda doğru bir karar verdikleri görülmüştür. Grup 10'un hipotez ve hüküm bilgilerine karar verirken aralarında geçen konuşmalardan bir kesit aşağıda sunulmuştur:

*ÖA27:* *Hipotez nedir? Bu bulduğumuz ilişki mi?*

*ÖA29:* *Yok, şu açıortay falan olduğu değil mi?*

*ÖA28:* *Hipotezimiz ne? Şu AF, CAD açısının açıortayı falan mı?*

*ÖA29:* *Şu soruda verilenleri direkt yazacağız.*

*ÖA27:* *O zaman hüküm bulduğumuz.*

*ÖA29:* *Evet, bizim bulduğumuz ilişkiyi yazacağız.*

Yukarıdaki konuşmalar incelendiğinde Grup 10'da yer alan öğretmen adayları, hipotez ve hüküm kavramlarını tam anlamıyla bilmediği anlaşılmaktadır. Ancak grup içinde öğretmen adaylarının fikir alışverişinde bulunmasıyla birlikte hipotez ve hükmün ne olduğu konusunda bilgi sahibi oldukları görülmektedir. Grup 10'un hipotez ve hükme yönelik yazdıkları Şekil 92'de sunulmuştur.

**Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.**

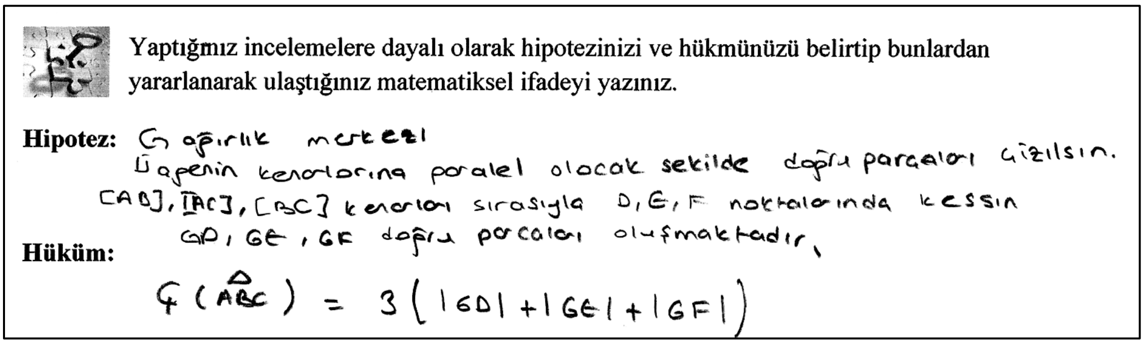
**Hipotez:** [AF], $\widehat{CAD}$ açısının; [BF], $\widehat{CBE}$ açısının açıortayıdır.

**Hüküm:** $\dfrac{m(\widehat{AEB})+m(\widehat{ADB})}{2} = m(\widehat{AFB})$

Şekil 92. Grup 10'un ilişkiyi önerme olarak ifade etme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 92'den görüldüğü üzere öğretmen adayları hipotez ve hüküm için bazı ifadeler yazmıştır. Bunu yazmadan önce hipotez ve hüküm kavramlarının ne olduğuna yönelik aralarında fikir alışverişi yaparak bu kavramlara yönelik uygun bir karar verebilmişlerdir. Ancak hipotez bilgisine yönelik ifadede bazı eksiklikler söz konusudur. Bu eksiklikler, ABC üçgeninin varlığını belirtmemeleri ile D ve E noktalarının hangi kenarlar üzerinde olduğunu ifade etmemeleridir. Dolayısıyla uygulamanın ilk haftalarında hipotez ve hüküm kavramları öğretmen adaylarının zihnine tam anlamıyla yerleşmemiş olan bilgiler olarak nitelendirilebilir.

İlerleyen uygulama haftaları ile birlikte öğretmen adaylarının hipotez ve hüküm kavramlarının ne olduğuna yönelik sorgulamaları bıraktıkları fark edilmiştir. Dolayısıyla bu uygulama süreci sonunda grupların hipotez ve hüküm bilgilerini doğru bir şekilde belirleme ve matematik dilini uygun bir şekilde kullanarak bu bilgileri ifade etme konusunda bir anlayış kazandıklarından bahsedilebilir. Beşinci uygulama haftasında Grup 11'in ikinci etkinliğe yönelik yazdığı hipotez ve hüküm bilgileri Şekil 93'te yer almaktadır.


Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:** G ağırlık merkezi
Üçgenin kenarlarına paralel olacak sekilde doğru parçaları çizilsin.
[AB], [AC], [BC] kenarları sırasıyla D, E, F noktalarında kessin
GD, GE, GF doğru parçaları oluşmaktadır.

**Hüküm:**
$Ç(\widehat{ABC}) = 3(|GD| + |GE| + |GF|)$

Şekil 93. Grup 11'in ilişkiyi önerme olarak ifade etme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 93 incelendiğinde Grup 11'de yer alan öğretmen adayları; G noktasının ağırlık merkezi olduğunu ve ABC üçgeninin kenarlarına paralel olacak şekilde AB, AC, BC kenarlarının sırasıyla D, E, F noktalarında kesmesi sonucunda GD, GE, GF doğru parçalarının oluştuğunu hipotez kısmında belirterek uygun bir tercih yapmıştır. Benzer şekilde ABC üçgeninin çevresinin GD, GE, GF doğru parçalarının uzunluklarının toplamına eşit olduğunu matematiksel sembollerle ifade edip hüküm kısmına yazarak doğru bir karar vermişlerdir.

Öğretmen adaylarından bazılarının uygulama haftalarının bir kısmında ispat yaparken hüküm bilgisini verilenlerden biri olarak kullanma eğiliminde olduğu görülmüştür. Bu durumlara oldukça sınırlı bir sayıda rastlanmakla birlikte grup içinde bu tür ifadelerin geçmesi durumunda hüküm bilgisinin ispatı yapılması gereken bir ifade olduğuna yönelik vurgulamalar yapabildikleri gözlemlenmiştir. Yedinci uygulama haftasında birinci etkinliği yaparken Grup 10'un bu durum ile ilgili aralarında geçen konuşmalar şu şekildedir:

*ÖA29:* *Ne yaptınız? Şöyle yapalım diyorum. Kenarlardan gittim. Paralelkenarda şu [AB kenarı] şuna [DC kenarı] eşit. Şu [AD kenarı] da şuna [BC kenarı] eşit. Eşkenar üçgen olduğu için bunun kenarları da buna [AB kenarı] eşit. Şu üçgen [FBC üçgeni] için paralelkenarın bir kenarına a diğerine b dersek a, b; aynı şekilde bu üçgende [EAF üçgeni] de a, b. Aynı şekilde bu üçgenin [EDC üçgeni] de eş oluyor. Ama ben buraları [EF, EC, FC kenarları] eşit kabul ettim. Böylece KKK'dan eş oluyor.*

*ÖA27:* *Nereleri?*

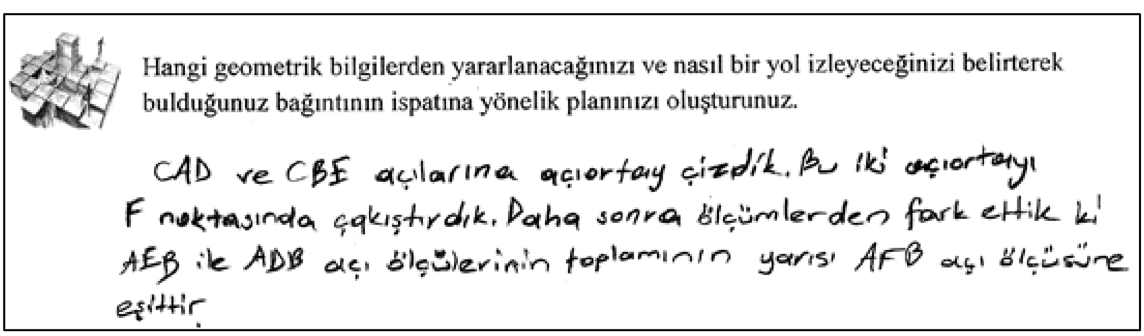
*ÖA29* *(Kâğıdında göstererek) Ben buraları [EF, EC, FC kenarları] eşit kabul ettim*

*ÖA28:* *Biz onun [EFC üçgeni] eşkenar üçgen olduğunu ispat edeceğiz.*

*ÖA27:* *Buraya 60 [EDF açısı] de, buraya 60 [FBA açısı] de sonra alfa [ADC ve ABC açıları] Bak zaten eşit oluyor KAK ile.*

Yukarıda ifade edilenlere göre ÖA29 kodlu öğretmen adayının hüküm bilgisini kullanarak çıkarımlarda bulunması üzerine grup arkadaşları bu duruma müdahale etmişlerdir ve bu bilginin ispatlaması gereken bir ifade olduğuna vurgu yapmışlardır. Dolayısıyla ilerleyen uygulama haftaları ile birlikte öğretmen adaylarında hipotez ve hüküm kavramlarına yönelik bir farkındalığın oluştuğu ve diğer arkadaşlarının bu kavramlara yönelik hatalara düşmeleri durumunda onları uyarabilme bakımından yeterli bir düzeye geldiklerinden bahsedilebilir.

İspatlama aşaması, birinci uygulama haftası hariç bütün uygulama haftaları boyunca öğretmen adaylarının en yoğun şekilde uğraş verdiği aşamadır. İlk uygulama haftasında ispat yapma bakımdan deneyimsiz olmaları ve ispat kavramını tam anlamıyla bilmemeleri, öğretmen adaylarının çoğunlukla ispata başlamak için yaptıkları girişimlerle sınırlı kalmalarına sebep olmuştur. Uygulamalar ilerledikçe ise ispatlama aşamasına yönelik davranışların oranında artışlar gerçekleşmekle birlikte ispatlarını tamamlama, ispat adımlarını doğru bir şekilde belirleme ve belirledikleri ispat adımlarına gerekçeler sunma bakımından bir gelişim elde edilmiştir. Ancak uygulamanın ilk haftalarında öğretmen adaylarının çoğu, yaptıklarından bazılarının ispat anlamında değer taşımadığını ve ispatın nasıl yazıldığını bilmeyen davranışlar sergilemiştir. Bu bakımdan bazı öğretmen adayları varsayımda bulunana kadar yaptıklarını başka bir ifade ile çeşitli ölçümler yaparak matematiksel ilişkiye ulaşmalarını ispat olarak nitelendirdikleri de olmuştur. Bu tür bir düşünceye sahip olarak ispatlama aşamasında varsayımda bulunmadan önceki yaptıklarına yer veren Grup 11'in yazdıkları Şekil 94'te sunulmuştur.


Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

CAD ve CBE açılarına açıortay çizdik. Bu iki açıortayı F noktasında çakıştırdık. Daha sonra ölçümlerden fark ettik ki AEB ile ADB açı ölçülerinin toplamının yarısı AFB açı ölçüsüne eşittir.

Şekil 94. Grup 11'in ispatlama aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 94 incelendiğinde öğretmen adayları, ilk olarak geometrik şeklin dinamik yapısını oluştururken çizdikleri yardımcı elemanlardan bahsetmişlerdir. Ardından ölçümler yaparak mevcut olan matematiksel ilişkiye ulaştıklarını belirtmişlerdir. Başka bir ifade ile matematiksel ilişkiye ulaşıncaya kadar yaptıklarını ifade etmişlerdir. İspatlama aşamasında bu tür ifadelere yer vermeleri, öğretmen adaylarının varsayımda bulunmak için izledikleri adımların tamamını bir ispat olarak nitelendirdiklerini göstermektedir. Öğretmen adayları uygulamanın ilk haftalarında özel bir durumu ele alıp matematiksel ilişkiye ulaşmalarını ispat olarak nitelendirmelerinin yanı sıra hatalı çıkarımlar sundukları durumlarla da karşılaşılmıştır. Hatalı çıkarımlarda bulunmalarına sebep olan durumlardan biri ispat sürecinde uygun olmayan tanım, teorem ya da aksiyomlar kullanarak ispat üretmeye çalışmalarıdır. İkinci uygulama haftasında Grup 2'de yer alan öğretmen adaylarının sadece bir açı ölçüsü ile üçgenlerin eş olduğuna karar vermeye çalışarak hatalı bir çıkarımda bulunma eğiliminde olduklarını gösteren konuşmaları şu şekildedir:

*ÖA4:* *Ben şuraların açılarını eşit buldum.*

*ÖA5:* *Neresi?*

*ÖA4:* *AEB ile DAC açıları*

*ÖA5:* *Evet ben de onların eşit olduğunu buldum.*

*ÖA4:* *Bu eşit olan açıların biri BE'yi diğeri de DC'yi görüyor eşit olurlar mı?*

*ÖA5:* *Öyle diyebilir miyiz?*

*ÖA4:* *Kenarları da mı kullanmalıyım?*

*ÖA5:* *Biraz daha düşünelim.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 2'de yer alan öğretmen adayları, eşit olan açı ölçülerinin gördüğü kenarların uzunluklarının da eşit olacağını düşünmüşlerdir. Bir bakıma sadece bir açı ölçüsünün eşit olması ile üçgenlerin eş olabileceğinden söz edilebileceği gibi yanlış bir gerekçe ileri sürmüşlerdir. Ancak yukarıda yer alan konuşmalardan öğretmen adaylarının bu ileri sürülen çıkarım ve gerekçeyi tam anlamıyla kabullenemedikleri fark edilmektedir.

İlerleyen haftalarda öğretmen adayları özel bir durumu ele alma ya da hatalı çıkarımda bulunma eğiliminde olsalar bile grup arkadaşlarının çeşitli uyarılarda bulunmasıyla bu tür durumları fark etmelerini sağladıkları görülmüştür. Üçüncü uygulama haftasında Grup 2'de yer alan öğretmen adayları birinci etkinlik üzerinde çalışırken özel bir durumu ele alarak çıkarımda bulunup ispata yönelik bir başlangıç yaptıklarını fark etmeleri ile ilgili konuşmaları şu şekildedir:

*ÖA4:* *Şimdi ABCD dörtgeninin köşelerinden bir çember çizsek*

*ÖA5:* *O zaman AC çap olur.*

ÖA4: *Çap olur. Çevre açıdan ve gördüğü yayların aynı olmasından açıları yerleştirirsek böyle olur değil mi?*

ÖA5: *Evet.*

ÖA4: *Bundan sonra devamını nasıl getireceğiz?*

ÖA5: *Şu açıların [AC ile BD doğru parçalarının kesişim noktasına F dersek TFE ile AFD üçgenlerindeki açıları kastetmektedir.] tekini bulsak benzerlikten çıkar. Evet, bu benzerlikten çıkar.*

ÖA4: *Bak sana nasıl bir yanlış yapmışız. ABC açısının ölçüsü* $90^{\circ}$ *olduğu için AC çap olur ama ADC açısının ölçüsü* $90^{\circ}$ *değil ki.*

ÖA5: *Aa, ben her şeyi ona göre yapmıştım.*

Yukarıdaki konuşmalardan Grup 2'de yer alan öğretmen adaylarının matematiksel ilişkinin ispatı için ABCD dörtgeninin köşelerinden geçen bir çember çizerek ispata başlamayı düşündükleri anlaşılmaktadır. Ancak bahsedilen çemberin ABCD dörtgeninin her bir köşesinden geçmesinin her zaman mümkün olmadığını fark edememişlerdir. Dolayısıyla böyle bir girişimde bulunarak özel bir durumu ele alıp çıkarımlarda bulunmuşlardır. Ancak ÖA4 kodlu öğretmen adayının ADC açısının ölçüsünün $90^{\circ}$ olmadığını fark etmesi üzerine farklı ispat yolları bulmanın arayışı içine girmişlerdir.

Benzer şekilde dördüncü uygulama haftasında Grup 1'de yer alan öğretmen adaylarının ikinci etkinliği yapma süreci içerisinde grup içinde yaptıkları tartışmalar sonucunda özel bir durumu ele alıp çıkarımda bulunduklarını ve hatalı çıkarımlar ileri sürdüklerini fark etmelerine yönelik aralarında geçen konuşmalar şu şekildedir:

ÖA1: *Benim dediğim gibi bunlar da [AE ile EC, BD ile DC doğru parçaları] eşit olur her durumunda.*

ÖA3: *Hayır, biz de onu anlatmak istiyoruz ama anlamamakta ısrar ediyorsun.*

ÖA2: *Sen onların hepsine kenarortay diyorsun o zaman.*

ÖA1: *Açı-açı-açı benzerliğinden benim dediğim çıkıyor. O yüzden kenarortay olması şart oluyor.*

ÖA3: *Nasıl oluyor ya Allah aşkına?*

ÖA1: *Açılar aynı değil mi?*

ÖA3: *Tamam.*

ÖA1: *Mesela bunun karşısı 2 ise burası 1 değil mi? (Eşit olan sadece bir açı ölçüsünden benzerlik kurmaktadır.)*

ÖA3: *Değil, nereden çıkarıyorsun onu.*

*ÖA1:* *Sadece bu bunun ha tamam.*

*ÖA3:* *Anladım mı? 3 katı da olabilir orası bilemezsin.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere ÖA1 kodlu öğretmen adayı, ispat adımlarını belirleme süreci içinde bir kısmı özel duruma uygun bir kısmı ise hatalı olan çıkarımlar sunmuştur. BE ile AD doğru parçalarını kenarortay olarak kabul edip özel duruma uygun bir çıkarım ileri sürmüş ve bu çıkarıma ulaşırken sadece bir açı ölçüsünün eşitliğine bağlı olarak benzerlik kurması da hatalı bir çıkarım olmuştur. Ancak grup arkadaşları belirttikleri çıkarımların uygun olmadığını ona anlatarak ikna olması için uğraş vermişlerdir. Bu çıkarımlarının uygun olmadığını anlaması üzerine ispata başlamak için neler yapılabileceğine yönelik farklı çıkarımda bulunmayı denemiştir.

Uygulama haftaları boyunca öğretmen adaylarının ispat süreci içerisinde yapı oluşturma ile oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamalarından geçmeleri, hatalı ya da özel duruma uygun çıkarımlarının farkına varmalarına katkıda bulunduğu belirlenmiştir. Başka bir ifade ile öğretmen adayları ispatlama aşamasındaki hataları ya da özel duruma uygun ispatlarını GeoGebra yazılımı aracılığıyla fark ettiği durumlarla da karşılaşılmıştır. Yedinci uygulama haftasında Grup 10'da yer alan öğretmen adaylarının özel bir durumu ele alarak çıkarımlarda bulunduklarını GeoGebra yazılımı aracılığıyla fark ettiklerini gösteren konuşmalar şu şekildedir:

*ÖA28:* *Şimdi şu üçü eşit mi çıkacak? EF, FC, EC eşit mi çıkacak?*

*ÖA27:* *(Yazılım üzerinde göstererek) Hepsi eşit çıktı ama şurası doğrusal değil. (Paralelkenarın kenarları ile dışına çizilen üçgenlerin kenarlarının doğrusal olmadığını belirtmektedir.) Burası doğrusal değil. Sen doğrusal yapmışşın.*

*ÖA28:* *Neresi doğrusal değil?*

*ÖA27:* *Sen burayı doğrusal olarak dedin ya. Şurasına da 120 demişsin.*

*ÖA28:* *Ama paralelkenar diyor.*

*ÖA27:* *Ama sen şurasıyla şurasını doğrusal olarak birleştirdin ya.*

*ÖA28:* *Hıhı… Kâğıt üzerinde bunu birleştirince öyle düşündüm birden.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 10'da yer alan ÖA28 kodlu öğretmen adayı, paralelkenarın kenarları ile dışına çizilen üçgenlerin kenarlarının doğrusal olduğuna yönelik kâğıt üzerinde bir çizim yapması üzerine özel duruma uygun bir ispat için başlangıç yapmıştır. Ancak ÖA27 kodlu öğretmen adayının yazılım üzerinde yapıyı oluşturması, önceki çizimin bütün durumlar için geçerli olmadığının farkına varılmasına yardımcı olarak grup arkadaşlarıyla birlikte yeni bir ispat arayışına girmişlerdir.

Benzer şekilde öğretmen adaylarının matematiksel ilişkiye ulaşmak için izlediği ispat adımlarına karar verirken hatalı çıkarımlarda bulunduklarını GeoGebra yazılımında yaptıkları incelemeler sonucunda fark ettikleri durumlara da rastlanmıştır. Yedinci uygulama haftasında Grup 1'in birinci etkinlik için önerdiği ispat adımlarında hatalı bir çıkarımın olduğunu yazılım aracılığıyla fark ettiklerini belirten konuşmaları şu şekildedir:

*ÖA1:* *Nereyi sen söylemiştin?*

*ÖA2:* *E 'den BF'ye paralel çizdim. Şimdi BF ile DC'nin kesiştiği yere H dedim. E noktasından çizdiğim paralelin AF'yi kestiği yere N dedim. AEN ile AHF üçgenleri benzer oldu. AEN ile BHC üçgenleri de eş olur dedim ama…*

*ÖA1:* *Senin dediğin gibi olmuyor. Çünkü kenarlar eşit olmuyor.*

*ÖA2:* *Hangi kenarlar eş olmuyor?*

*ÖA1:* *Ben ölçtüm de tamam AE ile BC doğru parçaları eşit verildi ama AN ile HC'nin uzunlukları eşit çıkmadı.*

*ÖA2:* *Zaten gerisi gelmiyordu. AE ile BC'yi ve CBF ile CAF açılarını eşit görünce hemen böyle dedim.*

Grup 1'in aralarında geçen konuşmalardan ÖA2 kodlu öğretmen adayının AEN ve BHC üçgenlerinin bir kenar uzunluğu bir de açı ölçüsünün eşit olmasına bağlı olarak eş olabileceğini düşündüğü anlaşılmaktadır. Bir bakıma öğretmen adayı sadece iki koşulun karşılanmasına rağmen bahsedilen üçgenlerin eş olduklarına karar vermiştir. Ancak ÖA1 kodlu öğretmen adayının yapı üzerinde incelemeler yapması, bu hatalı çıkarımın farkına varılmasına önemli ölçüde katkıda bulunmuştur.

Uygulamaların başlangıcından itibaren öğretmen adaylarının ispat süreci içerisinde birçok kez ispata başlama girişiminde bulundukları gözlenmiştir. Ancak çoğunlukla uygulamanın ilk haftalarında olmak üzere öğretmen adaylarının ispata başlamaya yönelik önerileri arasında uygun olmayan başlangıçların olduğu görülmüştür. Bu uygulama haftalarında ispata başlamak için ilk etapta yanlış ispat adımları seçseler de bu adımlarla ilerlemeyi denedikten sonra uygun ispat adımlarını belirleyebildikleri fark edilmiştir. Grup 1, ikinci uygulama haftasının birinci etkinliğini yaparken birçok kez ispata nasıl başlayacağına yönelik öneriler sunmasının ardından ispata nasıl başlayacağına yönelik uygun adımları belirleyebildiğini gösteren konuşmalarının bir kısmı şu şekildedir:

*ÖA2:* *Bak şurada benzer üçgenler çıkıyor ama bununla alakası olur mu?*

*ÖA3:* *Bakalım.*

*ÖA2:* *Bak şu [AEB üçgeni] var. Şu [DEB üçgeni] var. Şu [ADC üçgeni] var.*

*ÖA1:* *Ama onların üçüncü açısı eşit mi?*

*…………………………………………..*

*ÖA3:* *Şey yapalım mı? Çember çizelim mi?*

*ÖA1:* *Çember hiçbir işimize yaramaz.*

*ÖA3:* *Belki açılardan falan bir şeyler yapabiliriz diye.*

*……………………………………………..*

*ÖA1:* *(Üçgenlerde eşit olan kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini göstererek) kenar, kenar, açı; kenar, kenar, açı*

*ÖA3:* *Nasıl? Bir daha anlatsana.*

*ÖA1:* *Kenar-açı-kenar bağıntısından bunlar [EAB ile DAC üçgenleri] eştir.*

Yukarıda ifade edilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 1'de yer alan öğretmen adayları ispata başlamak için birçok öneride bulunmuşlardır. Bunlardan ilk ikisi matematiksel ilişkinin ispatı için uygun adımlar değildir. İspata yönelik ilk önerilerinde AEB ile ADC üçgenlerini benzer üçgenler arasında belirtseler de belirli bir dayanak olmadığından uygun bir ispat adımı olmamıştır. İspata yönelik ikinci önerilerinde çember çizmeyi teklif etmişlerdir. Ancak ispata başlamaya yönelik ileri sürdükleri bu ispat adımının ispatın devamını getirmeye yardımcı olmayacağını düşünerek bundan vazgeçmişlerdir. İspata yönelik sundukları bu önerilerden sonra ispat için gerekli olan deneysel verileri belirleyerek EAB ile DAC üçgenlerinin eş olacağını ifade edip uygun bir ispat adımı ile başlangıç yapabilmişlerdir.

İlerleyen uygulama haftaları ile birlikte öğretmen adaylarının ispata başlamak için sundukları önerilerin büyük çoğunluğunun ispatın devamını getirmek için uygun adımlar olduğu belirlenmiştir. Bu bakımdan her hafta ispata yönelik çeşitli uygulamaların yapılması, öğretmen adaylarının ispat için birden fazla alternatif başlangıç önerileri sunmalarına katkıda bulunduğundan bahsedilebilir. Grup 8'in dördüncü uygulama haftasının birinci etkinliğini yaparken ispata başlamaya yönelik farklı önerilerde bulunup içlerinden birine karar vererek ispatlarını tamamladıklarını ifade eden konuşmalar şu şekildedir:

*ÖA22:* *Şuna bir yerden benzerlik mi oluşturacağız?*

*ÖA23:* *Dur bir dakika şuradan [A ile B köşelerinden uzatıp üçgene tamamlama] uzatayım. Şurası T noktası [Oluşturdukları üçgenin köşesi] olsun. Şurası C noktası, şurası D noktası büyük bir üçgenmiş [CDT üçgeni] gibi düşüneyim.*

*ÖA22:* *A ile C'yi birleştirsen.*

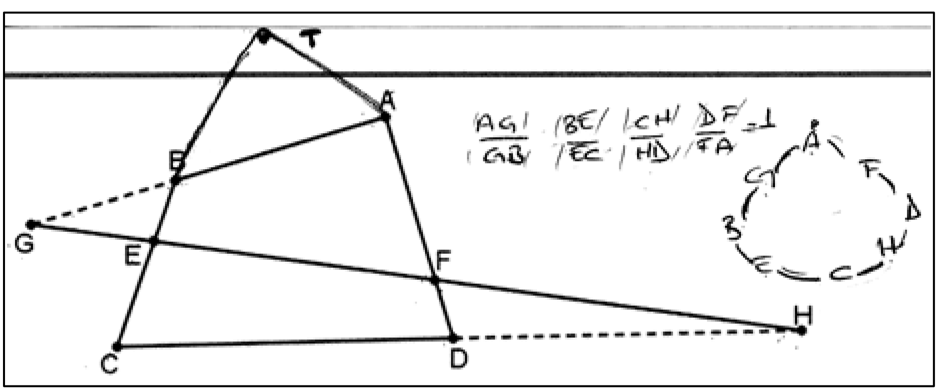
*ÖA23:* *Bir dakika. Sen A ile C'yi mi birleştirdin. Ben üstten birleştirerek üçgen oluşturdum.*

*ÖA22:* *Ya da E'den CH'ye bir paralel çizip yapabilir miyiz?*

*ÖA23:* *Oranlar bulup açı-açı-açı benzerliğinden olabilir belki. Biz bunu direkt üçgenlerden yapsak olmaz mı? Bir daha Menelaus teoremini ispatlamadan üçgenlerde geçerli olanı kullanıp ulaşsak. Tamam, benim dediğim gibi A ile B köşelerinden uzatıp üçgene tamamlayıp iki tane Menelaus teoremi yaparsak ulaşırız.*

*ÖA22:* *Bir daha Menelaus teoremini ispatlamadan üçgenlerde bildiğimizi kullanıp yapalım. Evet, olur bence.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 8'de yer alan öğretmen adayları, matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için birçok öneride bulunmuştur. İspata başlamak için A ile C noktalarını birleştirip ya da A ile B noktalarından uzatıp üçgene tamamlayarak üçgenlerde geçerli olan Menelaus teoremini uygulamak istemeleri uygun ispat adımlarıdır. Üçgenlerde geçerli olan Menelaus teoreminin tekrar ispatlanmasının gerekmesi durumunda açı-açı-açı benzerlik teoremini kullanarak bir yol izleme fikri de uygun ispat adımlarından biridir. Ancak öğretmen adayları kendilerine en uygun gelen ve ispatın devamını getirebileceklerini düşündükleri bir yol ile ispatlarını tamamlamışlardır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispata yönelik önerilerinin her biri ispatı devam ettirebilmelerine imkân sağlayan uygun başlangıçlardır. Grup 8'in ispata başlamak için yaptığı ek çizim Şekil 95'te sunulmuştur.




Şekil 95. Grup 8'in ispata başlamak için yaptığı ek çizim

Uygulamalar boyunca öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımını kullanma imkânına sahip olmaları, ispata başlamak için izleyecekleri adımları belirlemelerine yardımcı olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte ispat süreci içerisinde bu yazılımı kullanmaları öğretmen adaylarının ispata yönelik farklı başlangıç önerilerini daha emin bir şekilde sunmalarını sağladığı görülmüştür. Altıncı uygulama haftasında birinci etkinliği yapma süreci içerisinde Grup 1'in yazılım üzerinde bir durumu fark etmesiyle ispat adımlarını belirleyebildiklerini gösteren konuşmalar şu şekildedir:

*ÖA1:* *Şu ortada oluşan şekil acaba dikdörtgen olabilir mi?*

*ÖA3:* *Olabilir ama bilgisayarda ölçüp mü baksak?*

*ÖA2:* *Evet, o zaman açılarını ölçelim.*

*ÖA1:* *Açıları… Açılarının hepsi gerçekten de 90 çıktı.*

*ÖA2:* *Bir de kenarlarını ölçelim.*

*ÖA1:* *Tamam, kenarları da karşılıklı olanlar birbirine eşit.*

*ÖA3:* *Tamam o zaman kesin dikdörtgen. Ben siz ölçerken düşündüm de HF bunun köşegeni ise EG de buna eşittir. Bu EG; AB ve CD kenarlarına paralel ise bir şeyler çıkabilir.*

*ÖA1:* *Onu da buradan bakayım mı?*

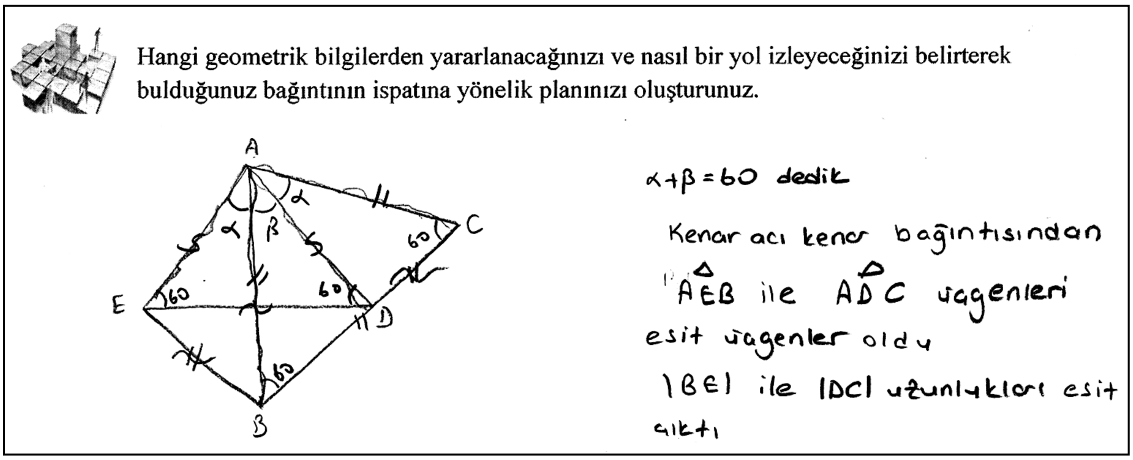
*ÖA2:* *Evet, bak.*

*ÖA1:* *Paralelmiş o da.*

*ÖA3:* *Tamam buradan devam edelim yapmaya bence.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 1'de yer alan öğretmen adayları, matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için ilerlemeyi düşündüğü ispat adımlarını yazılım üzerinde de kontrol etmek istemişlerdir. Bunun üzerine ilk önce HEFG dörtgeninin dikdörtgen olabileceği düşüncesi ile başlayıp EG doğru parçasının AB kenarına paralel olabileceği düşüncesiyle devam etme isteklerini yazılım üzerinde de teyit ederek uygun ispat adımlarını belirleyebilmişlerdir.

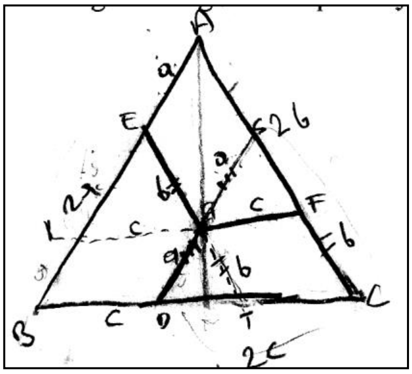
Uygulamanın ilk haftalarında öğretmen adayları genel olarak ispat süreçlerinde tanım, teorem ya da aksiyomlardan yararlansalar da bu matematiksel ifadeleri ispatlarında belirtme konusunda eksik kaldıkları görülmüştür. İlk haftalarda uygulanan etkinliklerde ispatın yapılması için öncül teoremlerin kullanılmasının gerektiği durumlarda öğretmen adaylarının bu teoremleri ifade etme eğiliminde oldukları fark edilmiştir. Ancak ispat adımlarının hangi amaçla izlendiği ve bu adımlara nasıl karar verildiği konusundaki gerekçelere genel anlamda yer vermedikleri belirlenmiştir. Örneğin ikinci uygulama haftasında Grup 11'in hangi kenar uzunlukları ve açı ölçülerinin eşit olduğu ve neden eşit olduklarına yönelik açıklamaları formal olarak yapmadığı ispatı Şekil 96'da sunulmuştur.




Şekil 96. Grup 11'in ispatlama aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 96 incelendiğinde Grup 11'de yer alan öğretmen adayları, AEB ile ADC üçgenlerinin kenar-açı-kenar eşlik aksiyomundan eş olduklarını belirterek sonuca ulaşmak için gerekli olan ispat adımlarını belirleyebilmişlerdir. Ancak hangi kenar uzunluklarının ve açı ölçülerinin eşit olmasına bağlı olarak üçgenlerin eş olduğuna karar verildiği ile ilgili herhangi bir gerekçe sunulmamıştır. Sadece geometrik şekil üzerinde eşit olan kenar uzunlukları ve açı ölçülerini belirterek formal bir gerekçeye yer vermemişlerdir. Bununla birlikte matematiksel sembollere yer vermeyip izledikleri ispat adımlarını sözel olarak yazmayı tercih etmişlerdir. Dolayısıyla böyle bir yazım tercih etmeleri, uygulamanın ilk haftalarında ispat yapmaya yönelik fazla bir deneyime sahip olmamalarına bağlı olabilir.

Uygulamalar ilerledikçe öğretmen adaylarının çoğu kez izledikleri ispat adımlarına yönelik gerekçeler sunma ve çıkarımlarda bulunurken kullandıkları tanım, teorem ve aksiyomları belirtme gereksinimi duydukları belirlenmiştir. İspatlama aşaması içerisinde ispat sürecinde tanım, teorem ve aksiyomlardan yararlanma ile ulaşılan ara ve nihai sonuçları gerekçelendirme göstergelerinin oranlarının uygulamanın son haftalarına doğru artması bu durumu desteklemektedir. Bazı gruplarda yer alan öğretmen adayları, ispatlarını tam anlamıyla tamamlayabilmeleri için sundukları çıkarımlara yönelik gerekçeler sunmaları gerektiğini özellikle ifade ettikleri durumlara da rastlanmıştır. Grup 2 bu gruplardan biri olmakla birlikte ispat sürecinde sunduğu çıkarımlardan birinin doğruluğunu GeoGebra yazılımı aracılığıyla görerek ifade etmiştir. Ancak bununla kalmayıp çıkarımının doğruluğuna yönelik gerekçesini sunması gerektiğini dile getirmiştir. Beşinci uygulama haftasında Grup 2'nin ikinci etkinliği yaparken bu duruma yönelik yaptığı konuşmalar şu şekildedir:



ÖA4: *Şimdi şurası [EG doğru parçası] ile şurası [GT doğru parçası] eşittir.*

ÖA5: *Evet.*

ÖA4: *Şurası [EG doğru parçası] b ise şurası [AF doğru parçası] 2b'dir.*

ÖA5: *Nasıl? Tamam, paralel olduğundan benzerlik var.*

ÖA4: *Ama şöyle bir şey var. LE'nin a olup o çizdiğime göre BL, LE, EA doğru parçalarının her birinin nasıl eşit olduğuna anlam veremedim. Bu bütün kenarlar için de geçerli. Çünkü AF ile EG doğru parçaları arasında 2'ye 1'lik bir oran var mı diye her kenar için baktım ve doğru çıktı.*

ÖA5: *Evet o orana nasıl ulaştık?*

ÖA4: *GeoGebra'dan baktım oldu. Ama bulacağım niye olduğunu?*

ÖA5: *O zaman üzerinde düşünelim birlikte.*

Yukarıdaki konuşmalardan anlaşıldığı üzere Grup 2'de yer alan öğretmen adaylarından ÖA4 kodlu öğretmen adayı, ispatı nasıl yapacağı üzerine düşünürken ağırlık merkezinden başlayarak doğru parçalarının çizilmesi durumunda kenarlar arasında belirli bir oranın oluşabileceğini belirtmiştir. Bu oranın olup olmadığını kontrol etmek için GeoGebra yazılımına başvurmuştur ve incelediği kısımlarda 2'ye 1'lik bir oran olduğunu görerek ABC üçgeninin kenarlarının üç eşit parçaya bölündüğü çıkarımında bulunmuştur. Ancak bu duruma anlam verememesi üzerine bunun gerekçesini bulması gerektiğini ifade ederek araştırmaya başlamıştır. Dolayısıyla öğretmen adayları GeoGebra yazılımı üzerinde bu çıkarımlarının doğru olduğunu görmelerine rağmen bunun gerekçesinin ne olduğunu belirtme ihtiyacı duymuşlardır.

İlerleyen uygulama haftaları ile birlikte öğretmen adaylarının ispat sürecinde tanım, teorem ya da aksiyomları yanlış amaçlarla kullanma eğiliminde olanları fark ederek çeşitli uyarılarda bulunabildikleri gözlemlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat sürecinde çıkarımda bulunma ve bu çıkarımlara yönelik gerekçeler sunma bakımından deneyimli bir hale geldiklerini göstermektedir. Beşinci uygulama haftasının birinci etkinliğini yaparken Grup 10'un belirtilen duruma yönelik yaptığı konuşmalar şu şekildedir:

ÖA28: *Şimdi iki açı aynı olunca diyelim ki birinin karşısında t varsa diğerinin karşısında da t olması gerekmez mi?*

ÖA27: *O dediğin eş üçgen de olur.*

ÖA28: *Ama üçgenlerin açıları aynı.*

ÖA27: *Açıları eş olan üçgenler eş mi olur? 90, 60, 30 açı ölçülerine sahip olan her üçgen eş mi olur?*

ÖA28: *Olmaz.*

ÖA27: *O zaman bu söylediğin durum da olmaz.*

Yukarıda ifade edilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 10'da yer alan öğretmen adaylarından birinin üçgenlerin eş olduğunu açı ölçülerinin her birinin eşit olması ile açıklamıştır. Böyle bir açıklama yapması üzerine ÖA27 kodlu öğretmen adayı kullandığı teorem ile üçgenlerin eş olduğunun belirtilemeyeceğini sorular sorarak anlatmaya çalışmıştır. ÖA28 kodlu öğretmen adayının bu durumu fark etmesini sağlayabilecek bir örneği içeren sorunun sorulması ile belirtilen teoremin hatalı bir şekilde kullanılmasının önüne geçilebilmiştir.

İspatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik çalışmalar, özellikle uygulamanın ilk iki haftasında grupların büyük çoğunluğu tarafından gerçekleştirilememiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ispatlama aşamasına gelememeleri ya da ispata yönelik birçok girişimde bulunup asıl izleyecekleri ispat adımlarına geç karar vermelerine bağlı olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca ispatı nasıl yazacaklarına yönelik zihinlerinde bir yapının tam anlamıyla oluşmaması da bu durum üzerinde etkili olmuştur. Bu uygulama haftalarında sınırlı sayıda olsa da bazı gruplar tarafından ispat değerlendirme çalışmaları yapılmıştır. Ancak bu grupların genellikle kendi ispatlarında izledikleri adımlarla benzer olması, sonuca ulaşma ve matematiksel ifadeleri kullanma gibi değerlendirme ölçütlerine odaklandıkları görülmüştür. Üçüncü uygulama haftasında Grup 11'de yer alan öğretmen adaylarının Grup 10'un birinci etkinliğe yönelik yaptığı ispatı değerlendirirken sadece kendi izledikleri ispat adımlarla benzer olmasına dikkat ettiklerini gösteren konuşmaları şu şekildedir:

ÖA30: *Biz gibi yapmışlar.*

ÖA31: *Kenar-açı-kenar yazmış.*

ÖA30: *Evet, kenar-açı-kenar teoremini kullandığını yazmış.*

ÖA31: *Evet kesin doğru ulaşmışlar.*

ÖA30: *Bence de.*

ÖA31: *Benzerlik oranını yazmamış.*

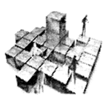
ÖA30: *İşte iki katı demişler.*

ÖA31: *Bizim gibi yaparak sonuca ulaşmışlar o zaman.*

ÖA30: *Evet, öyle diyebiliriz.*

Yukarıda belirtilenlerden anlaşıldığı üzere Grup 11’de yer alan öğretmen adayları, Grup 10’un ispatını değerlendirirken öncelikle kendi izledikleri ispat adımları ile aynı olup olmadığına dikkat etmişlerdir. Dolayısıyla öğretmen adayları sadece ispat için izledikleri yolun aynı olması ölçütüne bağlı olarak bir değerlendirme yapmıştır. Böyle bir bakış açısı ile değerlendirme yapmaları, ispatı geniş çaplı incelemelerini engellemiştir.

Uygulamanın ilk haftalarında öğretmen adaylarının bir ispatın nasıl yazılacağını tam anlamıyla bilmemelerine bağlı olarak matematiksel sembolleri kullanmayarak başka bir ifade ile sadece sözel ifadelerle ispatlarını yazmayı tercih ettikleri durumlarla da karşılaşılmıştır. Bu tür ispatları değerlendirme sürecinde ise öğretmen adaylarının kendi izledikleri ispat adımlarına benzer olmalarına dikkat etmelerinin yanı sıra matematiksel ifadelerin kullanımına da dikkat ettikleri görülmüştür. İkinci uygulama haftasında Grup 4’ün birinci etkinliğe yönelik belirtilen şekildeki ispatı ile birlikte Grup 2’in bu ispat ile ilgili değerlendirme sonuçları Şekil 97’de sunulmuştur.



**Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.**

⇒ Üçgenin iç açıları toplamı 180° dir. özelliğini kullanarak açılar doldurulur. Eşkenar üçgenin her bir açısı 60° olmalıdır. ve tüm kenarları birbirine eşittir. ABC üçgeninin tüm kenarlar x, ADE üçgeninin tüm kenarları y olsun

EAB üçgeni ile DAC üçgeni y-(60-α)-x (Kenar-açı-Kenar) özelliğine göre eş üçgenler çıkar.

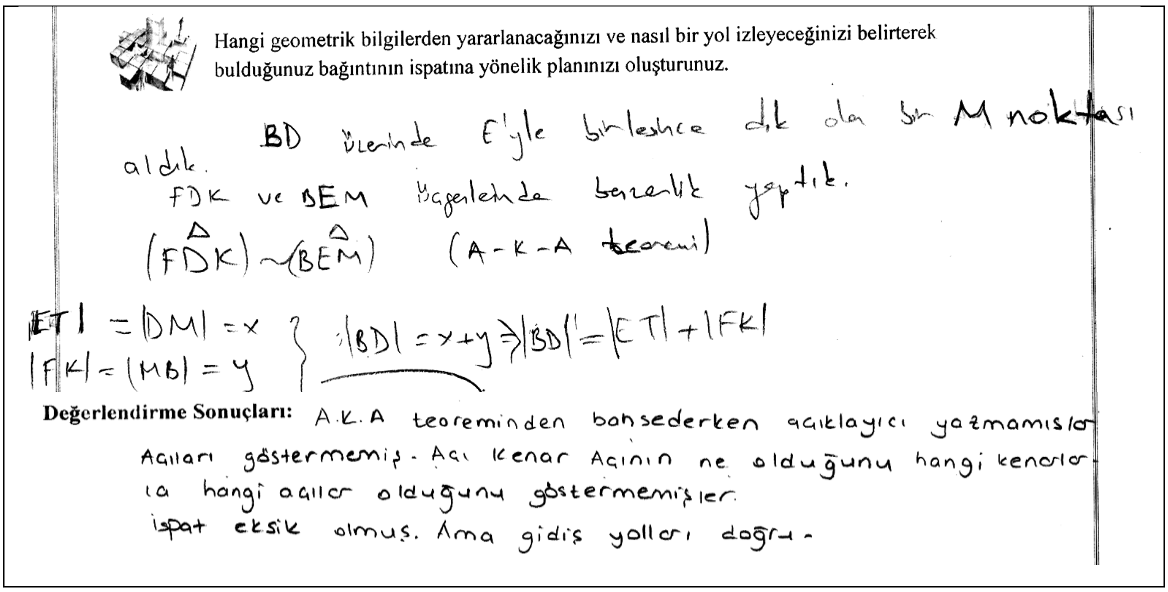
m(BAD)=α , m(AED)=60-α , m(DAC)=60-α

**Değerlendirme Sonuçları:** Matematiksel ifadeler az kullanılmış, üçgen ve açı sembolleri yok. fakat ispatta hatalar yok.

Şekil 97. Grup 2’nin ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 97 incelendiğinde Grup 4’te yer alan öğretmen adaylarının ispatlarında matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için gerekli olan tanım, teorem ve aksiyomlara yer verdiği görülmektedir. Ancak grubun herhangi bir matematiksel sembol kullanmayıp sözel ifadeler şeklinde belirli bir sıra takip etmeksizin bir ispat yapması okuyucunun yapılanları anlamasına engel olacak niteliktedir. Grup 2, bu ispata yönelik yaptığı incelemeler esnasında matematiksel ifadelerin az kullanıldığı, üçgen ve açı ölçüleri ile ilgili sembollere yer verilmediğinden bahsederek uygun bir değerlendirme yapmıştır. Ancak bu ispatta açı ölçüleri ifade edilirken derece işaretinin bazen kullanılıp bazen de kullanılmaması Grup 2 tarafından göz ardı edilmiştir. Ayrıca Grup 4'ün hangi kenar uzunlukları ve açı ölçülerinin eşit olmasına dayalı olarak EAB ile DAC üçgenlerinin eş olduğuna karar verdiklerine yönelik gerekçelere yer vermemesi Grup 2 tarafından bir eksiklik olarak görülmemiştir.

Özellikle üçüncü uygulama haftasından itibaren öğretmen adayları, ispatın tutarlılığını inceleme aşamasında ispatı yapmak için izlenen adımlara yönelik gerekçeler sunma bakımından da değerlendirmeler yapmaya başladıkları görülmüştür. Üçüncü uygulama haftasında Grup 3'ün ikinci etkinliğe yönelik ispatı ile birlikte Grup 11'in ispat adımlarına yönelik gerekçelerin sunulmasına dikkat ettiğini gösteren değerlendirme sonuçları Şekil 98'de yer almaktadır.


Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

BD üzerinde E'yle birleşince dik olan bir M noktası aldık.
FDK ve BEM üçgenlerinde benzerlik yaptık.
$(F\hat{D}K) \sim (B\hat{E}M)$ (A-K-A teoremi)

$|ET| = |DM| = x$
$|FK| = |MB| = y$ } $|BD| = x + y \Rightarrow |BD| = |ET| + |FK|$

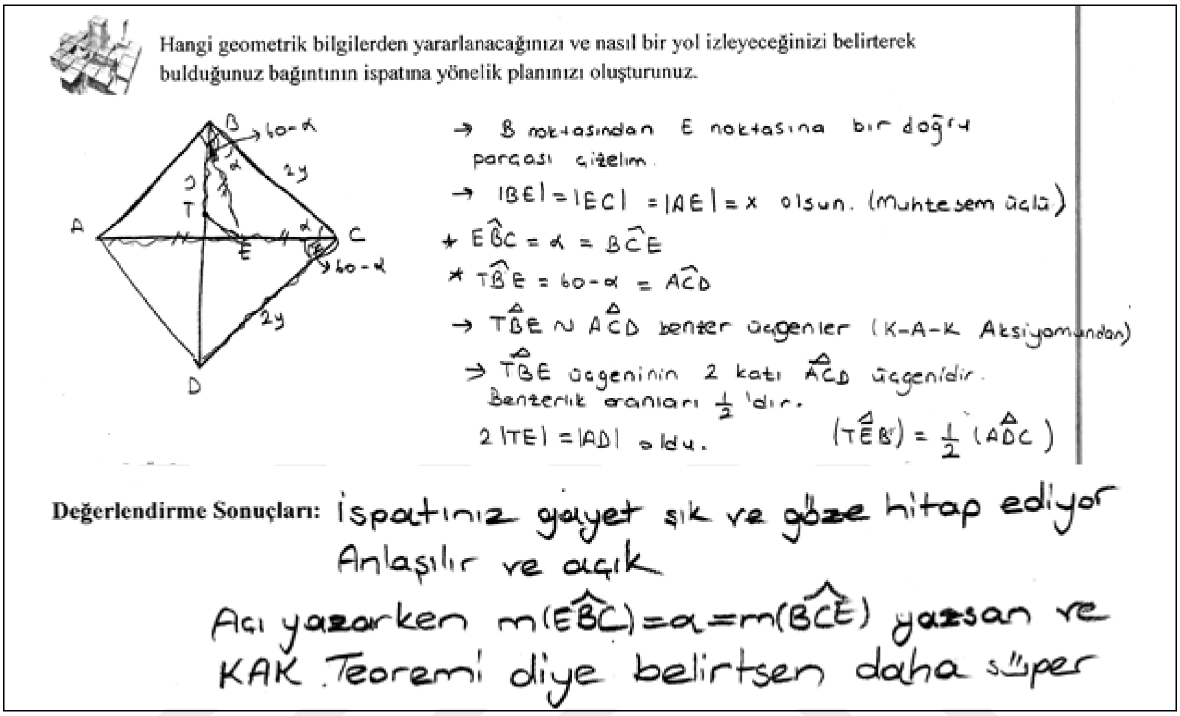
**Değerlendirme Sonuçları:** A.K.A teoreminden bahsederken açıklayıcı yazmamışlar. Açıları göstermemiş. Açı kenar açının ne olduğunu hangi kenarlarla hangi açılar olduğunu göstermemişler.
İspat eksik olmuş. Ama gidiş yolları doğru.

Şekil 98. Grup 11'in ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 98'den görüldüğü üzere Grup 3'te yer alan öğretmen adayları, açı-kenar-açı teoremini kullanarak FDK ile BEM üçgenlerinin benzer olduğunu açıklamışlardır. Ancak ispat için yararlandıkları bu teoremi benzerlik teoremlerinden biri olarak ifade etmişler ve üçgenleri eş olarak belirtmeleri gerekirken benzerlik sembolünü kullanmışlardır. Eş olan her bir üçgenin benzer olduğu düşüncesi ile bir hata yapmamışlardır. Ancak bu benzerliğe nasıl ulaştıkları konusunda herhangi bir bilgi vermeyip ET ile DM doğru parçalarının uzunluklarının neden eşit olduğunu da belirtmemişlerdir. Grup11'in bu ispata yönelik yaptığı değerlendirmede de açı-kenar-açı teoremini kullanma gerekçesini sunmaları gerektiği ile ilgili bir ifade yer almaktadır. Bu durum Grup 11'in ispatları değerlendirirken ispat adımlarına yönelik gerekçeler sunulup sunulmadığına dikkat ettiğini göstermektedir.

Dördüncü uygulama haftasına kadar öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken genellikle matematik diline yönelik eksiklik ya da hataları göz ardı ettikleri fark edilmiştir.

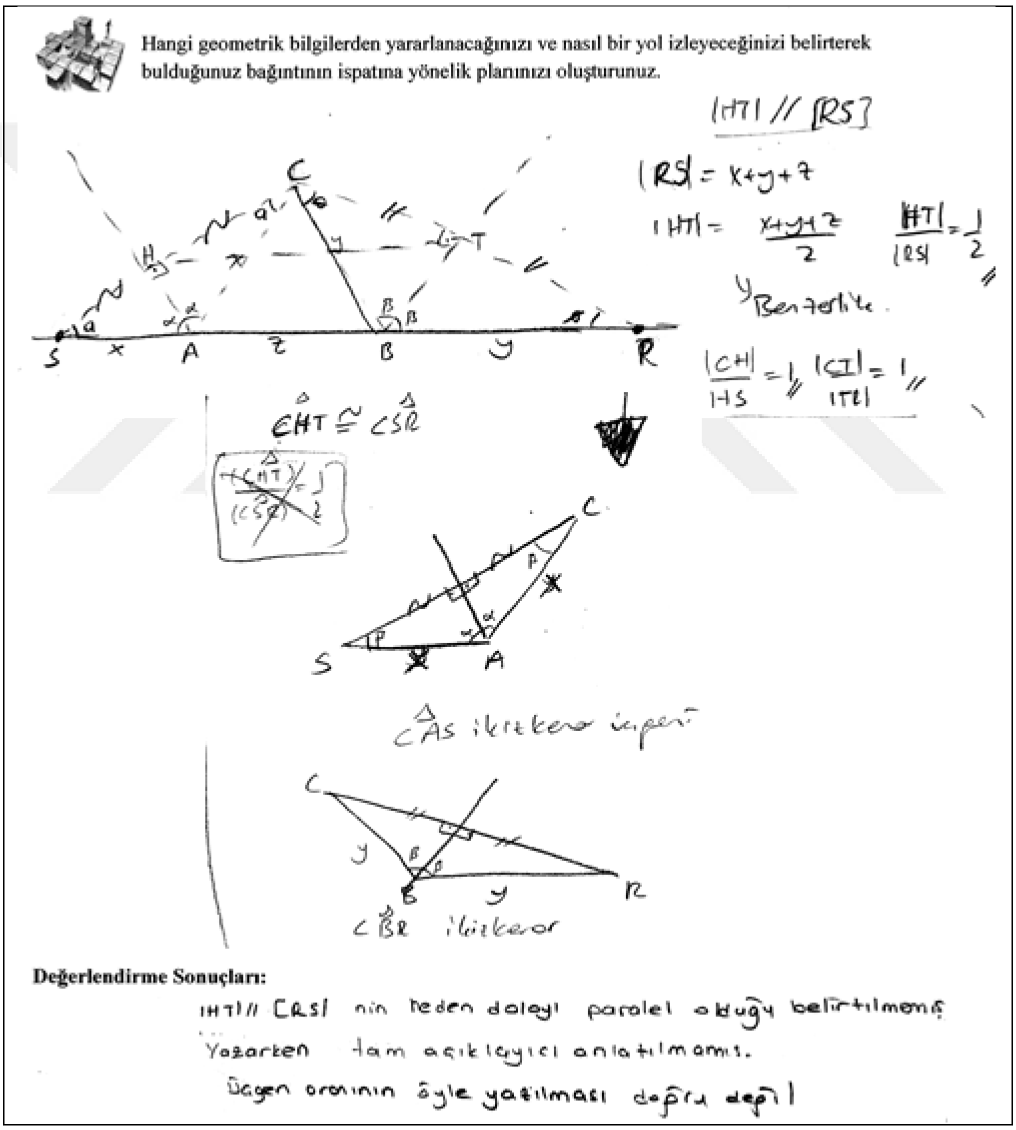
Üçüncü uygulama haftasında Grup 10'un matematiksel semboller ile ilgili bazı hataları belirtip bazılarını belirtmediği Grup 11'in birinci etkinliğe yönelik ispatı ve değerlendirme sonucu Şekil 99'da verilmiştir.




Şekil 99. Grup 10'un ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 99 incelendiğinde Grup 11'de yer alan öğretmen adayları, kenar uzunlukları ve açı ölçülerinden eşit olanları belirleyip kenar-açı-kenar benzerlik teoreminden yararlanarak ispat için uygun bir başlangıç yapmıştır. BE, EC, AE doğru parçalarının eşit olduğunu muhteşem üçlü, TBE ile DCA üçgenlerinin benzer olduğunu kenar-açı-kenar teoremi, TBE ile DCA üçgenlerinin arasındaki benzerlik oranından sonuca ulaştığını belirterek her bir ispat adımı için uygun gerekçeler sunmuştur. Bu durum, ispatı değerlendiren grubun da dikkatini çekerek ispatın açık ve anlaşılır olduğunu dile getirmiştir. Ancak bu ispatta matematik dilinin kullanımına yönelik bazı hatalar yapılmıştır. Bu hatalar, açı ölçülerini "$\widehat{EBC} = \alpha = \widehat{BCE}$" şeklinde ifade etme, sayısal değer olarak verilen açı ölçülerinde derece işaretini kullanmama, benzer üçgenleri ifade ederken üçgen isimlerindeki harf sıralamasına dikkat etmeme ve üçgenler arasında benzerlik oranı olduğu şeklinde bir gösterime yer verme gibi sembolik dilin kullanımı ile ilgilidir. Grup 10, bu ispatı değerlendirirken açı ölçülerinin gösterimine yönelik hatayı fark edip belirtebilmiştir. Ayrıca kenar-açı-kenar benzerlik teoremi yerine "*kenar-açı-kenar aksiyomu*" ifadesini kullanmaları üzerine bu ifadenin değiştirilmesine yönelik bir değerlendirme yapmışlardır. Ancak matematik diline yönelik diğer hataları göz ardı etmişlerdir.

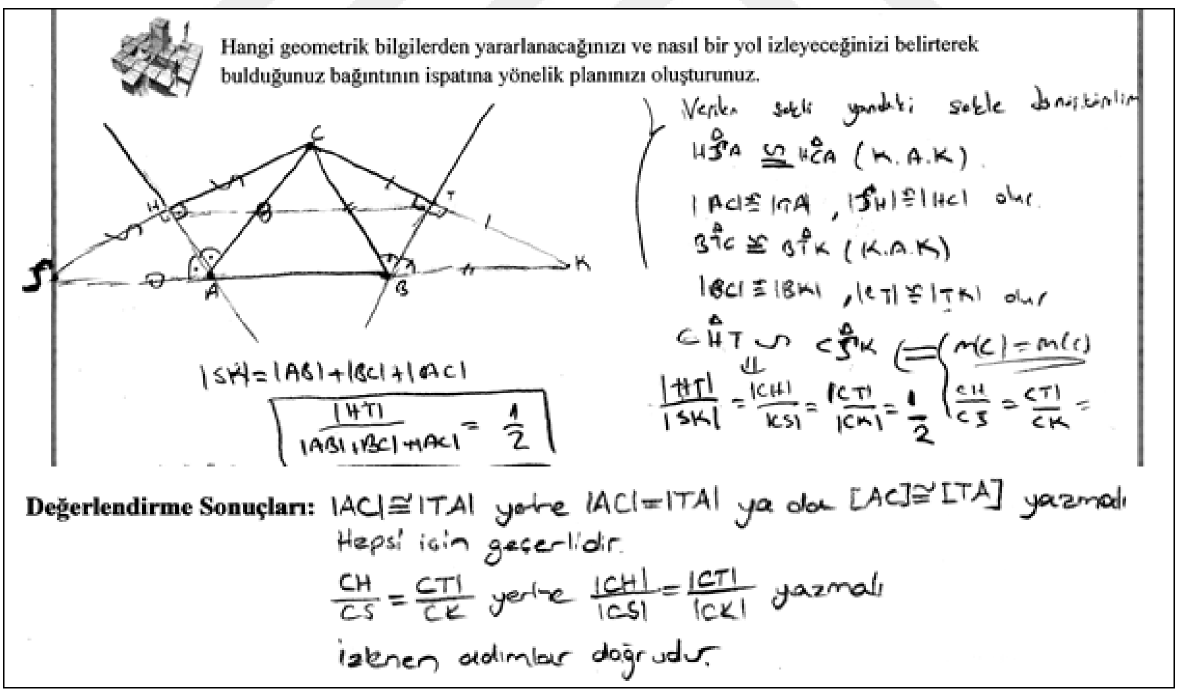
Uygulamalar ilerledikçe öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken bazı eksiklik ya da hataları göz ardı etme durumlarında önemli ölçüde bir azalmanın olduğu görülmüştür. Özellikle dördüncü uygulama haftasından itibaren öğretmen adaylarının ispat değerlendirme süreci içerisinde matematiksel ilişkiye ulaşmak için izlenen adımlar, ispat adımlarına yönelik gerekçeler ve kullanılan matematik dili bakımından çoklu yönlü incelemeler yaptıkları belirlenmiştir. Beşinci uygulama haftasında Grup 4'ün birinci etkinlik ile ilgili ispatı ve Grup 11'in çıkarımlara yönelik sunulan gerekçeler bakımından yaptığı değerlendirmeler Şekil 100'de yer almaktadır.




Şekil 100. Grup 11'in ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 100 incelendiğinde Grup 4'te yer alan öğretmen adayları, SAC ile CBR üçgenlerinin ikizkenar olduğunu görsel olarak ayrı bir geometrik şekil üzerinde göstermeyi tercih etmişlerdir. Bu gösterimden farklı olarak üçgenlerin ikizkenar olmalarına yönelik herhangi bir gerekçe sunmamışlardır. HT ile RS doğru parçalarının neden paralel olduğunu belirtmeksizin benzerlik oranlarını yazmaya geçmişlerdir. Bunun sonucunda izledikleri ispat adımlarına bağlı olarak matematiksel ilişkiye ulaşmışlardır. İspatlarını yazarken HT doğru parçasını uzunluk sembolünü kullanarak belirtip matematik dili bakımından uygun olmayan bir gösterim gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte CHT ile CSR üçgenlerinin benzer olduğunu belirtmek isterken eşlik sembolünü kullanarak hata yapmışlardır. Ayrıca üçgenlerin benzerlik oranlarını üçgenlerin birbirine göre oranlarını alır gibi bir gösterim tercih ederek yapmaları yanlış bir gösterim olmuştur. Bu ispat içerisindeki matematik dili bakımından doğru parçasının gösterimi ve eşlik sembolünü kullanmaya yönelik hatalar Grup 11'in gözünden kaçarken üçgenleri oranlar gibi yaptıkları durumu fark edip grubun yanlışını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte HT ile RS doğru parçalarının paralel olmasını açıklamaları gerektiğini ve ispatın daha açıklayıcı olmasını isteyerek gerekçe sunmalarının gerekliliğini belirterek uygun bir değerlendirme yapmışlardır.

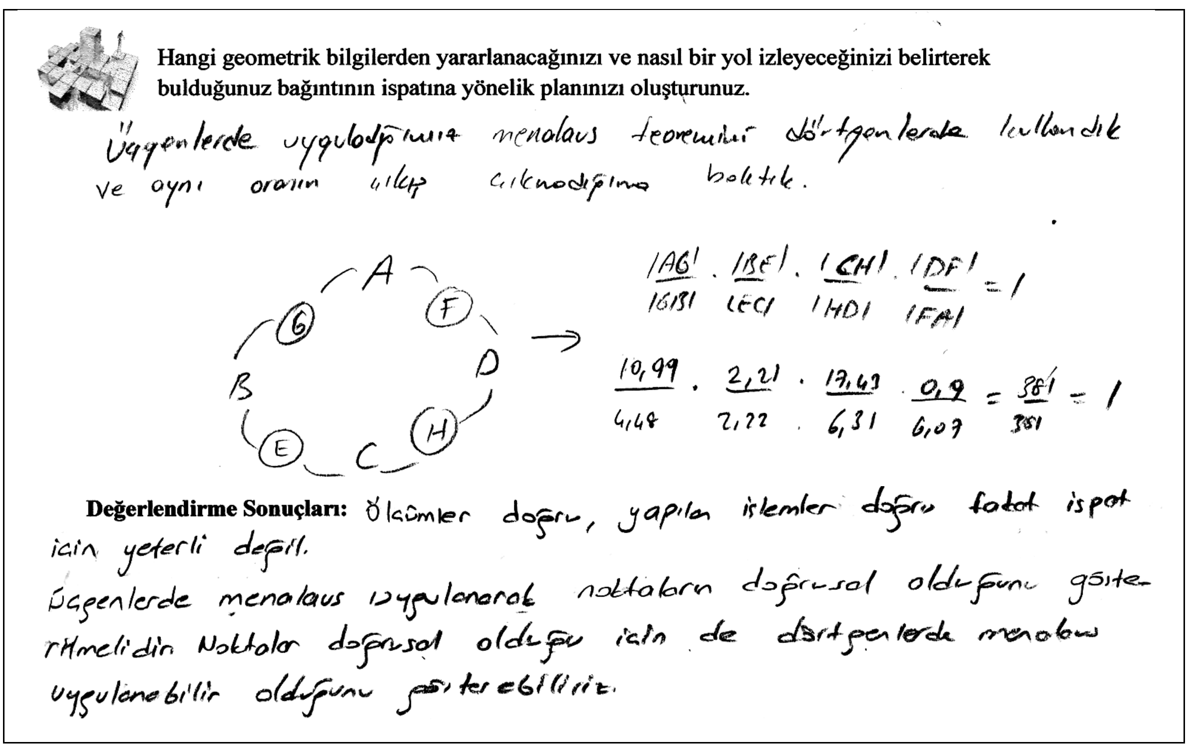
Beşinci uygulama haftasında Grup 2'nin birinci etkinlik ile ilgili ispatı ve Grup 1'in ispatta kullanılan matematik diline yönelik değerlendirmeleri Şekil 101'de sunulmuştur.




Şekil 101. Grup 1'in ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 101'den görüldüğü üzere Grup 2'de yer alan öğretmen adayları SAC ile CBK üçgenlerinin ikizkenar olduğuna kenar-açı-kenar eşlik aksiyomunu kullanıp üçgenleri eş bulmaları sonucunda ulaşmışlardır. CHT ile CSK üçgenlerinin benzer olduğunu ileri sürmelerine rağmen buna nasıl ulaştıklarını ifade etmemişlerdir. İspatı yazarken matematik dilinin kullanımı bakımından bazı hatalar yapmışlardır. Doğru parçalarının uzunluklarının eşit olduğunu belirtmek için “=” sembolünü kullanmaları ya da doğru parçalarının eş olduğunu belirtmek için “[ ]” sembolü ile doğru parçalarını ifade edip aralarına “≅” sembolünü koymaları gerektiğinin aksine bir kullanım gerçekleştirmişlerdir. Bazı doğru parçalarının uzunluklarını belirtmek isterken de uzunluk sembolünü kullanmayarak uygun olmayan bir gösterim tercih etmişlerdir. İspatı değerlendiren Grup 1 ise matematik diline yönelik bu hataları fark edebilmelerine rağmen üçgenlerin benzer olmaları ile ilgili gerekçe sunmadıklarını fark edememişlerdir.

İlerleyen uygulama haftaları ile birlikte oldukça sınırlı sayıda olsa da öğretmen adaylarından bazılarının matematiksel ilişki üzerinde sayısal değerlerle yapılan denemeleri ispat olarak nitelendirdikleri durumlarla karşılaşılmıştır. Ancak bu tür ispatları değerlendirme durumunda kalan grupların, sayısal değerlerle yapılan denemelerin bir ispat için yeterli olmadığına yönelik değerlendirmelerde bulundukları görülmüştür. Bu durum ölçüm sonuçları kullanılarak bir matematiksel ilişkinin doğruluğuna yönelik yapılan sağlamaların ispat olmadığına yönelik bir kanının öğretmen adaylarının zihninde yerleşmeye başladığının bir göstergesidir. Dördüncü uygulama haftasında Grup 4’ün birinci etkinlik için sayısal değerleri denemeye yönelik yaptığı ispat ile Grup 5’in bu ispat ile ilgili değerlendirme sonuçları Şekil 102’de sunulmuştur.




Şekil 102. Grup 5’in ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 102 incelendiğinde Grup 4'te yer alan öğretmen adayları, belirtilen duruma yönelik bir matematiksel ilişkiyi belirleyip üzerinde çeşitli ölçüm sonuçlarını deneyerek ilişkinin doğru olduğuna ulaşmayı ispat olarak nitelendirmiştir. Aslında öğretmen adayları sayısal bir değere dayalı olarak ilişkinin sadece sağlamasını yapmıştır. Grup 5'in bu yapılanların bir ispat için yeterli olmadığı, üçgenlere Menelaus teoremi uygulayıp noktaların doğrusal olduğuna ulaşarak dörtgenlerde bu teoremin uygulanabilirliğinin gösterilebileceğini ifade etmiştir. Dolayısıyla bu öğretmen adayları, sayısal değerler kullanarak matematiksel ilişkinin doğruluğunun gösterilmesinin ispat olmadığının farkında olup uygun bir değerlendirme yapmıştır.

Uygulamanın son haftalarına doğru özellikle de yedinci ve sekizinci uygulama haftalarında ispatın tutarlılığını inceleme aşamasının kapsamında bir değişiklik meydana gelmiştir. Önceki uygulama haftalarında gruplar arasında ispatlar değiştirilirken son iki haftaya doğru sadece grup içinde ispata yönelik değerlendirmeler yapmaya başladıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adayları ilerleyen uygulama haftaları ile birlikte diğer gruplarla ispatları değiştirmek yerine kendi ispatlarını değerlendirmenin yeterli olduğunu düşünmeye başlamışlardır. Bu tür bir düşünceye sahip olmalarının nedeni olarak kendilerinin ispat yapmada daha deneyimli hale geldiklerini ve diğer grupların da benzer ispat adımlarını takip etmeleri olduğunu ileri sürmüşlerdir. Bu açıklamaları ile birlikte ispat sürecinde yaptıklarının da uyumlu olduğu fark edilmiştir. İspatı formal hale dönüştürürken grup içinde gerek çıkarımlarına yönelik gerekçeler sunma gerekse matematik dilini kullanma bakımından birbirlerine verdikleri öneriler bu durumu destekler niteliktedir. Sekizinci uygulama haftasında Grup 8'in ispatı yazarken hem gerekçeleri sunmaya hem de matematik dilini uygun bir şekilde kullanmaya dikkat edilmesi gerektiğini belirten konuşmaları şu şekildedir:

*ÖA23:* *Ben şey dedim.* $m(\widehat{KAT}) = m(\widehat{LAS})$ *diye eşitledim. Oradan yaptım. Burada yöndeşlikten dedim. Hoca diyor ya belirtin diye.*

*ÖA22:* *Tamam, onu da belirteyim. Ama bunlar yöndeş değil de ters açılar galiba.*

*ÖA23:* *Aa evet, ters açılar. Şöyle a kenarına ait dış teğet çember çizersek şurası B noktasından C'ye doğru u-c, şurası da C noktasından B'ye doğru u-b ya Yani zaten şu u-b, u-c'nin toplamının yarıçapların toplamına eşit olduğunu nereden gördüğümüzü yazalım ki nereden topladığımızı bildirelim. O yüzden toplamamızın bir nedeni… Nereye onu yazacağım ya…*

*ÖA22:* *Onu belirtmesek zaten ilişki istiyor ya. O yüzden ne bileyim.*

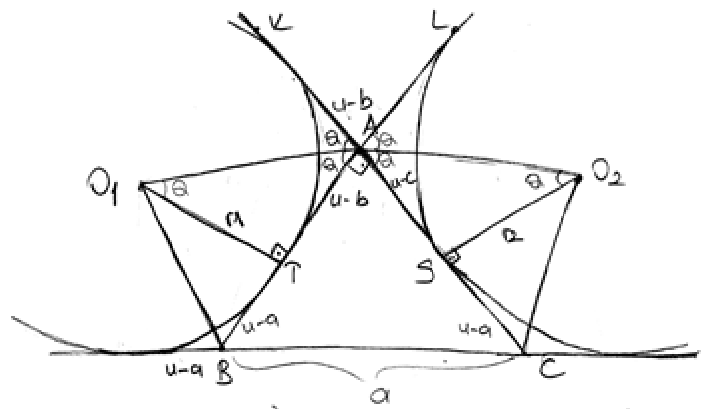
| | |
|---|---|
| *ÖA23:* | *Toplamayı nerden gördün? Bir anda toplamak gelmiş olamaz ki.* |
| *ÖA21:* | *(Kâğıdının sonunu göstererek) Ya da şuraya not düşülebilir.* |
| *ÖA22:* | *Şu matematiksel sembollere de dikkat edelim ha. Ben mesela geçen üçgen yazarken şöyle yazdım. (Bir etkinlikte ABC üçgeninin bir ölçüsü olabilecek şekilde uygun olmayan bir ifade kullanmıştı, onu belirtmektedir.)* |

Grup 8'in konuşmalarından da anlaşıldığı üzere ispatlarını formal hale dönüştürürken çıkarımlarının her birinin gerekçelerini belirtmeleri gerektiğine özenle dikkat etmişlerdir. Bununla birlikte belirttikleri hatalı gerekçelerin farkına vararak ispatlarını düzeltme imkânı bulmuşlardır. Bu anlamda ÖA22 kodlu öğretmen adayının grup arkadaşlarından birinin kullandığı yöndeş açı ifadesinin uygun olmadığını fark ederek kendi ispatlarını değerlendirmeye yönelik önemli bir adım atmıştır. Ayrıca matematiksel sembolleri doğru bir şekilde kullanıp kullanmadıklarını kontrol etmeleri gerektiğini de ifade etmişlerdir. Bu durumları göz önünde bulundurarak birinci etkinliğe yönelik oluşturdukları ispat Şekil 103'te sunulmuştur.

m(Â) = 90° olan bir BAC dik üçgeni verilsin. Bu üçgeninin dik kenarlarının dış teğet çemberleri çizilmiş olsun.

Bu verilenlere dayalı olarak çemberlerin yarıçapları ve dik üçgenin hipotenüs uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

**Not:** İspat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz.




1) $|AB| = b$
$|BC| = a$
$|AC| = c$
$|O_1T| = r_1$
$|O_2S| = r_2$
$|TB| = u-a$
$|AT| = u-b$
$|AS| = u-c$
$|SC| = u-a$

$\frac{a+b+c}{2} = u$ (Çevrenin yarısı) B noktasını düşündüğümüzde $|BT|$ uzunluğunun A noktasına olan tarafı u-a ile gösterilir.

$m(O_1\hat{A}T) = \theta$ olsun. $m(K\hat{A}O_1) = \theta$ dur (dışaçıortay)

$2\theta = 90°$ olduğundan $m(A\hat{O_1}T) = \theta$ olur. Bu durumda $r_1 = u-b$

$m(K\hat{A}T) = 2\theta$ $m(L\hat{A}S) = 2\theta$ (ters açılar)

$m(L\hat{A}O_2) = \theta$ $m(O_2\hat{A}S) = \theta$ (dışaçıortay)

$m(A\hat{O_2}S) = \theta$ olur. Bu durumda $r_2 = u-c$

$r_1+r_2 = u-b+u-c = \underline{2u-(b+c)}$ , $a+b+c = 2u$

2u yerine a+b+c yazarsak $\rightarrow r_1+r_2 = a+\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{b}-\cancel{c} = a = |BC|$

$r_1+r_2 = a = |BC|$

NOT: [BC]'ye bir dış teğet çember çizdiğimizi varsayarsak değme noktasına P dersek $|PB| = u-c$ $|PC| = u-b$
$a = 2u-(b+c)$

Şekil 103. Grup 8'in ispatı formal hale dönüştürme aşamasına yönelik verdiği cevap

Şekil 103'ten görüldüğü üzere öğretmen adayları ispatlarını oluşturmak için ileri sürdükleri ispat adımlarının her birini gerekçeleri ile birlikte ayrıntılı bir şekilde ifade etmeye özellikle dikkat etmişlerdir. Bunun yanı sıra ispatlarını yazarken matematik dilini uygun bir şekilde kullanmaya özen göstermişlerdir. Bu anlamda uygulamanın son haftalarına doğru öğretmen adaylarının grup içinde ispata yönelik değerlendirmeler yapmaları sonucunda ispatlarını formal hale dönüştürdükleri anlaşılmaktadır.

Uygulamaların sonrasında öğretmen adaylarının yapı oluşturma anlamında daha deneyimli bir hale geldiği gözlenmiştir. Bu duruma bağlı olarak geometrik yapıyı oluşturan alt figürlerin çizimine yönelik daha az soru sormaya ve sordukları soruları grup içinde çözmeye başladıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra öğretmen adayları çoğunlukla geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yaparak matematiksel ilişkilere ulaşıp varsayımda bulunmalarına rağmen kendi çizdikleri taslak şekil üzerinde muhakemelerde bulunarak varsayımda bulunmaya başladıkları da fark edilmiştir. Ancak bu süreç içinde doğrudan ispat yaparak matematiksel ilişkiye ulaştıkları durumların da olduğu görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının kendilerini ispat yapma konusunda yeterli olduklarını ve ispat yapmadan önce ne tür bir matematiksel ilişkinin olduğunun bilinmesinin gerekli olmadığını düşündüklerine işaret etmektedir. Birkaç uygulama haftasından sonra ilişkiyi önerme olarak ifade etme anlamında hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırma ya da bu kavramları bilmeme gibi durumlarla karşılaşılmamıştır. Bu durum öğretmen adaylarının ilişkiyi önerme olarak ifade etme bakımından daha bilinçli bir hale geldiğini göstermektedir. Uygulamaların ilerlemesiyle birlikte öğretmen adaylarının birçok farklı ispat adımları izledikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, yaşanan ispat sürecinin öğretmen adaylarının ispat yapma anlamında bakış açılarının genişlemesine yardımcı olduğuna işaret etmektedir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat için gerekli bütün çıkarımları ifade etme, bu çıkarımlara yönelik gerekçeleri sunma ve matematik dilini kullanma bakımından dikkatli davranmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının çok boyutlu düşünerek ispat yapmaya başladığının bir göstergesidir. Uygulamaların ilerlemesiyle öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken daha fazla ayrıntıya dikkat ettikleri fark edilmiştir. İzlenen ispat adımları, bu adımlara yönelik sunulan gerekçeler, sunulan gerekçelerin ve kullanılan matematiksel ifadelerin uygunluğu bakımından matematik dilinin kullanımı olmak üzere çok yönlü bir inceleme yapmaya başladıkları gözlemlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat yapmanın yanı sıra ispat değerlendirme konusunda da gelişimler elde ettiğini göstermektedir. Özellikle uygulamanın son iki haftasında ispatların tutarlılığını inceleme bakımından öğretmen adaylarının gruplar arası bir değerlendirmenin yapılmasına gerek duymadığı fark edilmiştir. Grup içinde kendi ispatlarına yönelik yaptığı değerlendirmelerin ispatlarında gerekli olan bütün çıkarımları belirtme, gerekçeleri sunma ve matematik dilini kullanma bakımından düzenlemeler yapmak için yeterli olduğu düşüncesinde oldukları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kendi ispatlarını formal hale dönüştürürken kullandıkları tanım, teorem ve aksiyomları uygun bir şekilde belirleme, ispat adımlarının her birine yönelik gerekçeler sunma, matematik dilini kullanma bakımından dikkatli davranmaları da bu durumu desteklemektedir.

### 4. 4. Tasarlanan Öğrenme Ortamının Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açıları Üzerine Etkisi ile İlgili Bulgular

Bu kısımda tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalar yapılmadan önce ve uygulamalar yapıldıktan sonra deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik sahip oldukları bakış açıları ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Bu bulgular uygulama öncesi öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açıları ile ilgili bulgular ve uygulama sonrası öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açıları ile ilgili bulgular olmak üzere iki alt başlık altında sunulmuştur.

#### 4. 4. 1. Uygulama Öncesi Öğretmen Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açıları ile İlgili Bulgular

Deney grubunda yer alan öğretmen adaylarına tasarlanan öğrenme ortamı kapsamında yer alan uygulamalar yapılmadan önce ispat ile ilgili çeşitli sorular sorularak ispatın rollerine yönelik bakış açıları ile ilgili görüşleri elde edilmiştir. Elde edilen bu görüşlerin analizi sonucunda öğretmen adaylarının uygulamalardan önce matematiksel ispatın hangi rollere sahip olduğunu düşündükleri ile ilgili kategoriler belirlenmiştir. İspatın rolleri ile ilgili belirlenen kategoriler; *Doğrulama, Kabul ettirme-Nesnellik, Kavrama-Anlama, Açıklama, İlişkilendirme, Sistemleştirme* şeklindedir. Bu kategorilere bağlı olarak mülakat yapılan her bir öğretmen adayının uygulamalar öncesinde ispatın rolleri ile ilgili bakış açılarını yansıtan Tablo 38 aşağıda sunulmuştur.

Tablo 38. Uygulama Öncesinde Öğretmen Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açıları

| İspatın rolleri ile ilgili kategoriler | Öğretmen adayları | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ÖA3 | ÖA4 | ÖA5 | ÖA22 | ÖA27 | ÖA31 |
| Doğrulama | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Kavrama-Anlama | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Kabul ettirme-Nesnellik | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Açıklama | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | |
| İlişkilendirme | | | ✓ | | ✓ | ✓ |
| Sistemleştirme | | ✓ | | | | |

Tablo 38 incelendiğinde uygulamalar öncesinde öğretmen adaylarının her biri doğrulama ve kavrama-anlama kategorilerini ispatın rolleri olarak nitelendirmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ispatın öncelikli amacının bir matematiksel ilişinin doğruluğunun gösterilmesi olduğunu düşündükleri anlaşılmaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarının her biri ispat yapmanın ezber bilgiyi ortadan kaldırıp anlamayı kalıcı hale getirdiği düşüncesini paylaşmaktadır. Kabul ettirme-nesnellik kategorisi ise öğretmen adaylarından biri hariç büyük bir çoğunluğu tarafından ispatın bir rolü olarak kabul edilmiştir. Dolayısıyla öğretmen adayları matematiksel bir ilişkinin varlığının başka insanlar tarafından kabul edilmesinin ispatın önemli bir rolü olduğu düşüncesindedir. Sistemleştirme ise sadece ÖA4 kodlu öğretmen adayı tarafından ispatın rolü olarak belirtilen bir kategoridir. Bu durum öğretmen adaylarından sadece birinin ispatın tanım, aksiyom ve teoremleri adım adım yazmayı sağladığı düşüncesinde olduğunu göstermektedir. İlişkilendirme ve açıklama kategorileri sırasıyla üç ya da dört öğretmen adayı tarafından ispatın bir rolü olarak görülmüştür. Bu durum, öğretmen adaylarından bazılarının ispatın aksiyom, tanım, teorem ve kavramlar arasında ilişkilendirme yapmayı sağladığı düşüncesinde olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispatın rollerinden bir diğerinin, matematiksel bir ilişkinin neden doğru olduğu sorusuna cevap bulabilmek olduğunu belirttikleri anlaşılmaktadır.

Uygulama öncesinde öğretmen adayları matematiksel bir ilişkinin doğruluğunun test edilmesinde ispatın önemine özellikle vurgu yapmaktadır. Öğretmen adaylarının her biri kesin bilgi elde etmede, hataların ve şüphelerin ortadan kalkmasında ispatın gerekli olduğuna yönelik düşüncelerini belirterek doğrulama rolünü ön planda tuttukları anlaşılmaktadır. ÖA4 kodlu öğretmen adayı, ispatın doğrulama rolüne sahip olduğunu şu şekilde ifade etmiştir: "*…tabi ispatlanması her zaman daha iyidir. Çünkü çok az bir hata payı bile ortadan kalkmış olur ve %100 doğru bir ifade haline gelir*." ÖA4 kodlu öğretmen adayının ispat yapmanın hata payını ortadan kaldırdığına yönelik düşüncelerine benzer şekilde ÖA5 kodlu öğretmen adayı şüpheleri ortadan kaldırdığına yönelik ifade ettiği düşünceleri şu şekildedir: "*…Her ne kadar biz, aklımızdan değerler verip bu ifadenin doğruluğunu görsek de sağlamayan değerlerin olup olmadığı şüphesinin ortadan kalkması için ispat gerekir.*" ÖA31 de *"…ispatını görmeden belirtilen durumun kesinliği bilinemez. Bilgisayarda birçok sayı üzerinde bunu doğrulasak bile, kesin olduğunu bilemeyiz bence. Çünkü çok fazla sayı var ve tüm sayıları deneyemeyiz. Deneyemediğimiz için de ispatını görmemiz gerekir. Bu nedenle ispat arayışlarının anlamlı olduğunu düşünüyorum, ispatı yapılmayan şeyin kesin bir yargı olduğuna inanmıyorum.*" şeklinde bir ifadede bulunarak kesinlik elde etmede ispatın önemli bir role sahip olduğuna vurgu yapmaktır. Dolayısıyla diğer öğretmen adayları gibi ispatın doğrulama rolü ile ilgili düşüncelerine benzer ifadelerde bulunmuştur.

Öğretmen adaylarının tamamı, ispatın doğrulama rolü üzerine vurgulamalar yaptıkları gibi ispatın kavrama-anlama rolü olduğuna yönelik vurgulamalar da yapmışlardır. Kavrama-anlama rolüne yönelik düşüncelerini, çoğunlukla ispatın bilgilerin kalıcı, anlaşılmayan durumların anlamlı hale geldiğine yönelik ifadelerle belirttikleri belirlenmiştir. ÖA4 kodlu öğretmen adayı, bu düşünceyi destekleyen sözlerini şu şekilde dile getirmiştir: "*…ispat yapmak bir nevi bilgilerin hatırlanmasını ve akılda kalmasını sağlıyor. Kişi formülü unutsa bile bir şekilde ispat yoluyla tekrar o formüle ulaşabiliyor…"* ÖA27 kodlu öğretmen adayı, ispat yapmanın öğrenmenin kalıcı olmasına katkıda bulunduğunu "*…Mesela öğretmenlerimin ispatını yaptığı bilgiler daha kalıcıdır bende. Bu nedenle bir ifadenin ispatını bilmek kalıcılık açısından daha yararlı olur…*" ÖA3 kodlu öğretmen adayı, ispat yapmanın gelecekteki öğretmenlik hayatlarında bir konuya yönelik donanımlı hale gelmelerine sağladığını belirterek ispatın kavrama-anlama rolünü mesleki açıdan değerlendirmiştir. Öğretmen adayı, bu konudaki düşüncelerini şu şekilde belirtmiştir: "*…Bizler de ileride öğretmenlik yaparken konuları tamamıyla bilerek anlatabilmemiz ve konuya hâkim olabilmemiz için gereklidir…"*

Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu, matematiksel bir ilişkinin diğer insanlar tarafından kabul edilmesi ve bilimsel olarak herkes için anlamlı hale gelmesi için ispatın gerekli olduğu düşüncesiyle ispatın rolleri arasında kabul ettirme-nesnelliği de sıralamıştır. ÖA4 kodlu öğretmen adayı, bu konu ile ilgili düşüncesini şu şekilde belirtmiştir: "*…Yeni bir şeyler bulunca genel geçerlik kazandırmak için tüm dünyaya kabul ettirebilmek için ispatı yapılmalıdır. Çünkü insanlar bu yeni bulunan konuya eleştiri yapabilirler, bu durumda ispatı yapılarak insanlara bu ifade kanıtlanır.*" ÖA27 ise " *…ispatının olması onu bilimsel bir konu yapar*." şeklinde bir ifadede bulunarak ispatın matematiksel bir ilişkinin bilimsel bir bilgi haline gelmesine imkân sağladığına yönelik vurgu yapmıştır. Ayrıca "*Karşımızdaki kişi inanmadığında veya sonuca güvenmediğinde ispat yaparız.*" şeklinde belirterek ispatın diğer insanları ikna etme ile ilgili olan kabul ettirme rolüne dikkat çekmiştir.

İspatın açıklama rolüne yönelik vurgulamalar bütün öğretmen adayları tarafından yapılmasa da bu vurgulamaları yapan öğretmen adaylarının çoğunlukta olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları bir matematiksel ilişkinin ispatının yapılmasıyla bu ilişkiyi oluşturan alt yapının daha anlaşılır hale geldiğine yönelik düşünceler ifade etmişlerdir. ÖA31 kodlu öğretmen adayı, ispatın bu rolüyle ilgili düşüncelerini ilerideki meslek hayatına da vurgu yaparak şu şekilde dile getirmiştir: "*…mesela öğrencilerim "Nasıl böyle oluyor, bunu anlamadım?" dediğinde ona nasıl ve nereden geldiğini anlatmak için ispatını yapmak gereklidir. Çocuk ifadenin nereden geldiğini merak ettiğinde ona ispatını yapamazsak kafası karışır, ezberci olur..."* ÖA4 ise ispatın açıklama rolüne şu şekilde vurgu yapmıştır: *"Mesela bir sorunun çözümünü anlatmak ve birine aktarmak için ispat yapılır… Bir konu veya bir çözüm karşı tarafa ispatı yapılınca daha iyi açıklanır, böylece konuyu daha iyi anlatabiliriz…"*

Öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ispatın matematiksel bilgiler arasında ilişkilendirme sağlama rolüne sahip olduğuna yönelik düşünceleri de ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarından üçü ilişkilendirme rolüne yönelik ifadede bulunmuştur. Ancak öğretmen adaylarının bu role yönelik vurgulamaları oldukça azdır. ÖA31 kodlu öğretmen adayının, ispata ilişkilendirme rolünü yüklediği ifadeler şu şekildedir: "*…birbiriyle bağdaştırıp formülün çıkış noktasını ve aradaki ilişkiyi anlıyoruz…*" ÖA27 ise ispat yaparak farklı bilgilere ulaştığını belirterek ilişkilendirme rolüne yönelik yaptığı vurgulamaları şu şekilde ifade etmiştir: "*…Ayrıca sonuçlarıyla farklı şeylere de ulaşabiliriz, mesela sonuç1, sonuç2 gibi buluyoruz. Bunlarla başka bilgilere de ulaşabiliriz ve bağlantı kurabiliriz…*"

İspatın sistemleştirme rolü olduğu düşüncesinde olan sadece bir öğretmen adayının olduğu görülmüştür. Bu durumdan diğer öğretmen adaylarının ispat yapmanın sistemleştirme rolü olduğuna yönelik bir düşünceyi paylaşmadığı anlaşılmaktadır. ÖA4 kodlu öğretmen adayının ispatın sistemleştirme rolüne sahip olduğuna yönelik düşüncelerini şu şekilde ifade etmiştir: "*…bazı zor durumlarda konuyu anlayamadığımız oluyor ve bu durumda ispatını görünce adım adım görmüş oluyoruz… Çünkü ispat yaptıkça her şeyin adım adım ve daha düzenli olduğunu fark ettim…*"

Genel olarak uygulama öncesinde öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematiksel bir ilişkinin doğruluğunu gösterme rolüne sahip olduğu düşüncesindedir. Ayrıca öğretmen adaylarının çoğunun ispat yapmanın matematiksel bir ilişkinin herkes tarafından kabul görmesine olanak sağladığı ve bunun sonucunda bir teorem haline dönüştüğü düşüncesinde oldukları görülmüştür. İspat yapmanın matematiksel bir bilginin kalıcı hale gelmesinde ve bu bilgilerin zihinlerinde anlamlı bir hal almasında etkili olduğu konusunda hem fikirlerdir. Matematiksel ispatın yapılmasının bilginin temelinin anlaşılmasına ve neden bu bilginin oluştuğuna yönelik açıklık getirilmesine yardımcı olduğunu düşünen öğretmen adayları da bulunmaktadır. Bütün öğretmen adayları tarafından olmasa da ispatın matematiksel tanım, teorem ve kavramlardan başka bilgilere ulaşılabileceği düşüncesini ifade etmişlerdir. İspatın tanım, aksiyom ve teoremleri tümdengelim sistem içinde düzenlemeyi sağladığını belirten sadece bir öğretmen adayı olmakla birlikte oldukça sınırlı sayıda belirtilmiştir.

### 4. 4. 2. Uygulama Sonrasında Öğretmen Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açıları ile İlgili Bulgular

Tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalar yapıldıktan sonra ispat ile ilgili olarak uygulamalar öncesinde öğretmen adaylarına yöneltilen sorulara benzer sorular, deney grubunda yer alan öğretmen adaylarına sorulmuştur. Bu sorular aracılığıyla öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açıları ile ilgili görüşleri elde edilmiştir.

Elde edilen bu görüşlerin analizi sonucunda öğretmen adaylarının uygulamalar yapıldıktan sonra ispatın hangi rollere sahip olduğunu düşündükleri ile ilgili kategoriler belirlenmiştir. İspatın rolleri ile ilgili belirlenen kategoriler; *Doğrulama, Kabul ettirme-Nesnellik, Kavrama-Anlama, Açıklama, İlişkilendirme, Sistemleştirme, Genelleme, Keşfetme, Somutlaştırma* şeklindedir. Bu kategorilere bağlı olarak mülakat yapılan her bir öğretmen adayının uygulama sonrasında ispata yönelik bakış açılarını yansıtan Tablo 39 aşağıda sunulmuştur.

Tablo 39. Uygulama Sonrasında Öğretmen Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açıları

| İspatın rolleri ile ilgili kategoriler | Öğretmen adayları | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ÖA3 | ÖA4 | ÖA5 | ÖA22 | ÖA27 | ÖA31 |
| Doğrulama | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Kavrama-Anlama | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Kabul ettirme-Nesnellik | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Açıklama | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| İlişkilendirme | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Sistemleştirme | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ |
| Genelleme | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Keşfetme | | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| Somutlaştırma | ✓ | | | | | |

Tablo 39'dan görüldüğü üzere uygulama sonrasında öğretmen adayları, kavrama-anlama, kabul ettirme-nesnellik, açıklama ve genelleme kategorilerine yönelik ortak bir düşünceye sahip olup bu kategorileri ispatın bir rolü olarak nitelendirdiği belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematiksel bilginin özümsenerek kalıcı olmasına yardımcı olduğu ve bütün bireyler tarafından kabul görmesi durumunda bilimsel bilgi haline geldiği düşüncesinde olduğunu göstermektedir. Ayrıca ispat yapılarak matematiksel bir ilişkinin neden doğru olduğuna yönelik açıklamalar sunulabileceği düşüncesindedirler. Herhangi bir matematiksel ilişkinin sadece belirli durumlar için değil, bütün durumlar için geçerli olduğunu ileri sürmeye katkıda bulunduğu konusunda da hem fikirlerdir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu tarafından doğrulama ve ilişkilendirme kategorileri ispatın rolleri olarak nitelendirilmektedir. Bu durum, ispatın bir matematiksel ilişkinin doğruluğunu test etme ve matematiksel bilgiler arasında ilişki kurma işlevlerine sahip olduğunu belirten öğretmen adaylarının çoğunlukta olduğunu göstermektedir. Keşfetme ve sistemleştirme kategorileri bütün öğretmen adayları tarafından belirtilmese de üç ya da dört öğretmen adayı tarafından ifade etmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının yarısı ya da yarısından fazlası ispat yaparak farklı matematiksel ilişkilere ulaşılabileceği ve belli bir düzene göre birbirini takip eden ispat adımlarının yazılmasına imkân verdiğini belirtmektedir. İspatın soyut kavramları somut hale getirdiğine yönelik ifadelerde bulunarak somutlaştırma kategorisini ispatın bir rolü olarak belirten sadece bir öğretmen adayı olduğu belirlenmiştir.

Uygulama sonrasında öğretmen adayları gerek ispatı yapılan matematiksel ilişkinin gerekse bu ilişkinin ispatında kullanılan tanım, aksiyom ve teoremlerin zihinlerde yerleşmesi, kalıcılığın sağlanması bakımından ispat yapmanın önemli olduğuna yönelik vurgu yapmışlardır. Öğretmen adayları ispatın kavrama-anlama rolüne sahip olmasını, genellikle matematiksel bilgileri anlamayı kolaylaştırdığı, pekiştirdiği ya da kalıcı hale getirdiği şeklindeki ifadelerle açıklamışlardır. ÖA27 kodlu öğretmen adayı, ispat yapmanın ezber öğrenmeyi ortadan kaldırdığı ve ispatın kullanılan tanımların anlaşılmasını sağladığını şu şekilde ifade etmiştir: "*…bilgileri ezbere verdiğimizde kafasında soru işareti kalır. Matematiksel ispat sayesinde kalıcı olur; bir daha da unutmaz. Bence ezber bilgi unutulur, ispatlanan bilgi unutulmaz… İspatta kullanılan tanımları, ne nedir ne değildir gibi her şeyi de öğreniyoruz.*" ÖA3 kodlu öğretmen adayı, ispatın matematiksel bilgileri özümsemeyi sağladığını "*…Matematiksel ispat benzer soruları daha mantıklı yapabilmemiz için; yani kural böyle diyerek değil de daha anlayarak, içimize sinerek soruları çözebilmemiz için yapılır*." şeklinde ifade ederek ispatın kavrama-anlama rolüne vurgu yapmıştır. ÖA31 ise "*…İspatını yaparak öğretirsek hem çocukların aklında daha iyi kalır…*" şeklinde bir ifadede bulunarak ispata öğretimde yer verilmesinin anlamayı arttırdığını belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının her biri, ispatın yapılmasıyla matematiksel bir ilişkinin bütün insanlar tarafından kabul edilip bilimsel hale geldiği düşüncesindedir. Öğretmen adayları ispatın kabul ettirme-nesnellik rolüne sahip olduğunu genellikle bir matematiksel ilişkinin varlığından söz edilebilmesi için ispat yapmanın gerekli olduğuna vurgu yaparak ifade etmişlerdir. ÖA4 kodlu öğretmen adayı, bu düşünceyi destekleyen sözlerini şu şekilde dile getirmiştir: "*İspat gereklidir. Çünkü başkalarına kanıtlamak için… Bir de var olan bir teoremi kabul ettirmek için de olabilir.*" ÖA3 ve ÖA27 ise ispatın matematiksel bir ilişkinin varlığının kabul edilmesine katkıda bulunduğunu sırasıyla "*Bir kuralın hayal ürünü olmayıp gerçekten var olduğunu göstermek için ispat yapılır...*" ve "*…İspat sayesinde varlığını kabul ediyoruz...*" şeklinde belirtmiştir.

İspatın açıklama rolüne sahip olduğu, bütün öğretmen adayları tarafından benimsenen bir düşüncedir. Öğretmen adayları açıklama rolüne yönelik düşüncelerini genellikle matematiksel bir ilişkinin neden doğru olduğu, nasıl bu matematiksel ilişkiye ulaşıldığının anlaşılmasında ispatın önemine vurgu yaparak ifade etmişlerdir. ÖA4 kodlu öğretmen adayı, bu konuyla ilgili düşüncelerini "*Dinamik geometri yazılımında incelemeler yaparak sonuçta bir eşitlik çıkıyor; ama bunun nerden geldiğini bilmiyoruz. Nerden* *geldiğini görmek için ispat gereklidir...*" ifadelerinde bulunarak belirtmiştir. ÖA3 kodlu öğretmen adayı, ispatın açıklama rolüne "*İspat mantıklı sebepleri olduğuna inanmak için…bu nereden geldi, niye böyle oldu gibi soru işaretleri oluyor akılda. İspatlanınca ise bu mantığa yatıyor…*" şeklindeki ifadeleri ile vurgu yapmıştır. ÖA31 ise bir teoremin temelinin ispat aracılığıyla açıklığa kavuştuğunu şu ifadeleri ile belirtmiştir: "*Teoremin nasıl bulunduğunu göstermek için gereklidir…neyin nerden geldiğini görmek için ispat gereklidir.*"

Öğretmen adaylarının tamamı, bir matematiksel ilişkinin ispatının yapılmasının olası durumların her biri için geçerliliğini göstermeye olanak sağladığını belirtmiştir. Öğretmen adayları ispatın genelleme rolüne sahip olduğunu çoğunlukla bir matematiksel ilişkinin varlığından söz edebilmek için sadece belirli değerlere bakılmasının yeterli olmayıp bütün değerler için geçerli olduğunun gösterilmesi gerektiğine vurgu yaparak belirtmiştir. ÖA27 kodlu öğretmen adayı, yapılan görüşmenin genelinde ispatın bu rolüne yönelik ifadelerde bulunmuştur. Bu öğretmen adayının bu konuyu destekleyen sözleri şu şekildedir: "*Ben böyle bir ilişki buldum ama her şekilde de bu böyle bulunur mu? Şunlar yerine getirildiği zaman şurası şuraya eşit, bununla bunun toplamı şuna eşit diyebilmek için. Başka bir ifade ile her durumda bu böyle olur durumunu kanıtlamak için ispat yapılır.*" Öğretmen adayının ispatın genelleme rolüne vurgu yaptığı diğer sözleri ise şu şekildedir: "*Her sayıya bakmak zorundayız, milyonlarca sayı var, hepsine bakamayacağımıza göre yani biz sınırsıza bakacağız; o yüzden genel ifadeler kullanmak zorundayız. Bu nedenle bence ispatlanmalı. Yani bütün sayılara bakma olasılığımız olmadığı için ispata gerek vardır.*" ÖA22 kodlu öğretmen adayının genelleme rolüne vurgu yaptığı benzer sözler şu şekildedir: "*Bu durumda ispata gerek vardır. Çünkü bütün sayıların sağlayıp sağlamadığını deneyemeyiz. Ayrıca bu durumun her durumda sağlanıp sağlanmadığını ispat sayesinde görebiliriz.*"

İspatın rollerinden birinin doğrulama olduğuna yönelik düşüncelerini belirten öğretmen adayları da çoğunluktadır. Ancak yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarının bu role yönelik vurgulamaları daha az sıklıktadır. Öğretmen adayları ispatın doğrulama rolünü belirtirken genellikle bilginin kesin olması, bilgiden şüphe duyulmaması ve doğruluğunu gösterme amaçlı olarak ispatın yapıldığına yönelik vurgulamalar yapmışlardır. ÖA3 kodlu öğretmen adayı, ispatın şüpheleri ortadan kaldırdığını "*…Yeni öğrendiğim şeylerin her zaman geçerli olduğu konusunda şüphe duymamak için ispatını isterim…*" şeklinde ifade etmiştir. ÖA5 kodlu öğretmen adayı, ispatın bir matematiksel ilişkinin doğruluğunu gösterdiğine yönelik ifadesi şu şekildedir: "*İspatını yapmaya gerek var. Yani dinamik geometri yazılımı ile ilişkiye ulaşsak da belki de bir şekilde hata oluştu, belki de bulunan ilişki yanlıştır. İspatı yapılınca tam anlamıyla doğruluğunu sağlarız*."

ÖA27 de ispatın doğruluğu test etmeyi sağladığını "*İspat doğruluğunu göstermek, her şekilde de öyle olduğunu kanıtlamak için yapılır.*" şeklindeki ifadesiyle belirtmiştir.

Öğretmen adaylarından biri hariç ispatın matematiksel tanım, aksiyom ve teoremler arasında ilişki kurmayı sağladığına yönelik ifadelerde bulunmuşlardır. Öğretmen adayları genellikle ispat sürecinde farklı teoremlerin kullanılmasından bahsederek ispatın ilişkilendirme rolü olduğuna vurgu yapmışlardır. ÖA5 kodlu öğretmen adayı, bu konuyla ilgili düşüncelerini "*…ispat sırasında başka teoremlerden de yararlanılarak bunlar arasında ilişkiler kurulur…* " şeklindeki ifadelerle belirtmiştir. ÖA27 de bu durumu destekleyen benzer sözleri şu şekilde ifade etmiştir: "*İspatı yaparken başka teoremler de kullanırız… benzer konular hakkında da yorum yapmamızı sağlar…*"

Öğretmen adaylarından bazıları, ispatın kullanılan matematiksel tanım, aksiyom ve teoremlerin belirli bir sıra dâhilinde yazmayı gerekli kıldığına ve böylece belirli bir düzenin oluşmasına katkıda bulunduğuna yönelik ifadelerde bulunarak ispatın sistemleştirme rolüne vurgu yaptıkları görülmüştür. ÖA4 öğretmen adayı, bu konuyla ilgili düşüncelerini "*…İspat bilgileri daha düzenli hale getiriyor. Önceden karambole yazıyorduk, hiç sıralama yoktu;  ama ispatta öyle değil. Daha sıralı, daha düzgün.*" şeklinde ifade etmiştir. ÖA5 ise sistemleştirme rolüne yönelik düşüncelerini "*Pisagor teoremi gibi bildiğimiz teoremler de olsa ispat yapılmalı. Çünkü ispatı yapılırken aşama aşama ilerliyor.*" şeklinde belirtmiştir. Öğretmen adayları sahip oldukları bu düşünceler ile aslında ispat aracılığıyla tümdengelim sistem içinde düzenlemeler yapılabildiğine dikkat çekmişlerdir.

Öğretmen adaylarının yarısı, uygulama sonrasında gerçekleştirilen mülakatlarda ispatın keşfetme rolü olduğuna yönelik ifadelerde bulunmuştur. ÖA31 kodlu öğretmen adayı, ispatın bu role sahip olduğuna yönelik "*Sadece soru çözme amacında değil de farklı şeyler bulma, farklı bilgilere ulaşma amacında olurlar. Sonuçta ispatı yaparken kendileri bir şeyler deniyorlar, farklı şeyler üretiyorlar, buluyorlar*." şeklindeki bir ifadeyle değinmiştir. ÖA27 ise "*İspat yeni buluşlar için de yapılabilir.*" şeklindeki ifadesi ile ispatın keşfetme amaçlı da kullanılabileceğini belirtmiştir.

Öğretmen adaylarından sadece biri, ispatın soyut olan durumları somut hale getirdiğine yönelik bir ifadede bulunduğu görülmüştür. ÖA3 kodlu öğretmen adayı, ispatın somutlaştırma rolüne sahip olduğunu şu sözleri ile dile getirmiştir: "*Matematiksel ispat daha gerçekçi somut görünmesi için yapılır.*"

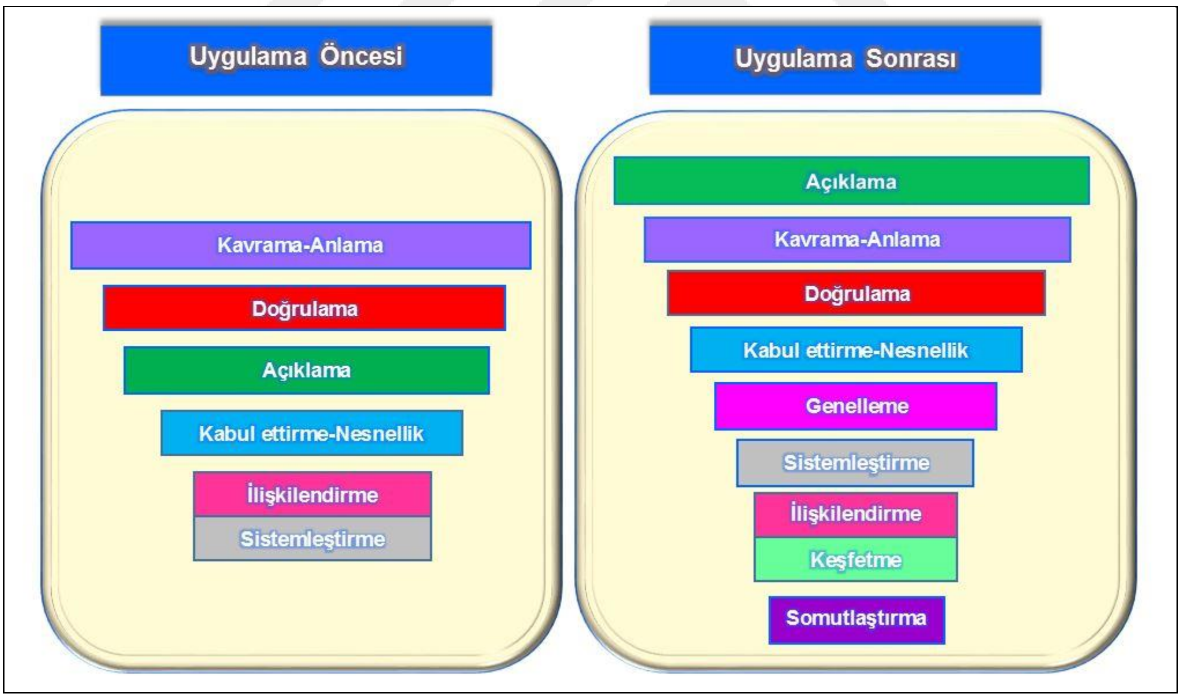
Uygulama sonrasında genel olarak öğretmen adaylarının tamamının ispatın matematiksel kavramların anlamlı hale gelmesini sağladığı düşüncesinde oldukları görülmüştür. İspatın yapılmasının, matematiksel bir ilişkinin başkaları tarafından kabul edilmesini sağladığı ve bilimsel hale dönüştüğü konusunda da hem fikirlerdir. Ayrıca ispatın matematiksel bir ilişkinin neden doğru olduğu soruna cevap niteliğinde olduğu ve bütün olası durumlar için geçerli bir matematiksel ilişkinin temellerinin atıldığına yönelik düşünceleri her bir öğretmen adayının paylaştığı fark edilmiştir. Bir matematiksel ilişkinin doğruluğunu gösterme ve matematiksel bilgiler arasında ilişkiler kurma anlamında etkili olduğunu belirten öğretmen adaylarının da çoğunlukta olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarından bazıları da ispatın matematiksel tanım, aksiyom ve teoremlerin belli bir düzene bağlı olarak belirtilmesini sağladığı konusunda ortak düşünceleri paylaştıkları belirlenmiştir. Yeni bilgilerin ortaya çıkmasını sağladığı ile ilgili düşünceler ifade ederek ispatın keşfetme rolüne vurgu yapan öğretmen adaylarının da olduğu görülmüştür. Sadece bir öğretmen adayı ise ispatın soyut kavramları somut hale getirdiği konusunda düşüncelere sahip olduğu dikkat çekmiştir.

Deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulamalardan önce ve sonrasında ispatın rollerine yönelik bakış açılarının frekans ve yüzde bakımından karşılaştırılması Tablo 40’ta sunulmuştur.

Tablo 40. Öğretmen Adaylarının Uygulama Öncesi ve Sonrasındaki İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açılarının Karşılaştırılması

| İspatın rolleri ile ilgili kategoriler | Uygulama Öncesi | | Uygulama Sonrası | |
|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % |
| Doğrulama | 43 | 31,16 | 22 | 14,57 |
| Kavrama-Anlama | 45 | 32,61 | 31 | 20,53 |
| Kabul ettirme-Nesnellik | 20 | 14,5 | 19 | 12,58 |
| Açıklama | 24 | 17,39 | 43 | 28,48 |
| İlişkilendirme | 3 | 2,17 | 6 | 3,97 |
| Sistemleştirme | 3 | 2,17 | 8 | 5,3 |
| Genelleme | - | - | 15 | 9,94 |
| Keşfetme | - | - | 6 | 3,97 |
| Somutlaştırma | - | - | 1 | 0,66 |

Tablo 40 incelendiğinde öğretmen adayları uygulama öncesinde kavrama-anlama ve doğrulama kategorilerinin ispatın rolleri olduğunu belirten ifadelere daha çok yer verirken uygulama sonrasında açıklama kategorisinin ispatın rolü olduğunu belirten ifadelere yer vermişlerdir. Bu durum, uygulama öncesinde öğretmen adaylarının daha çok ispatın matematiksel bilgilerin anlaşılmasını kolaylaştırdığı ve matematiksel bir ilişkinin doğruluğunu göstermeyi sağladığı düşüncesinde olduklarını göstermektedir. Uygulama sonrasında ise öğretmen adaylarının daha çok matematiksel bir ilişkinin neden doğru olduğunu açıklamaya olanak sağladığını dile getirmiştir. Ayrıca ispatın kavrama-anlama ve doğrulama rollerine sahip olduğunu belirttikleri durumlarda azalmalar görülmüştür. Özellikle de ispatın doğrulama rolüne sahip olduğu düşüncelerinde neredeyse yarı yarıya bir düşüş olmuştur. Öğretmen adaylarının ispat yaparak bir matematiksel ilişkinin herkes tarafından kabul edilmesi ve bilimsel bir bilgiye dönüşmesini sağladığını belirten düşüncelerinde ise uygulama öncesi ve uygulama sonrasında pek fazla bir farklılık olmamıştır. Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının ispatın ilişkilendirme ve sistemleştirme rollerine sahip olduğu ile ilgili düşüncelerinde uygulama öncesine göre az da olsa bir artış olmuştur. Öğretmen adayları uygulama öncesinde ispatın genelleme, keşfetme ve somutlaştırma rollerine sahip olduğunu düşünmemelerine rağmen uygulama sonrasında ispatın bu rollere de sahip olduğunu düşündükleri fark edilmiştir. Uygulama sonrasında ispatın daha farklı rollere sahip olduğunu belirtmeleri, ispata yükledikleri anlamlarda bir değişimin olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarında bir değişimin olması, öğrenme ortamında yapılan uygulamaların düşünceleri üzerinde etkili olduğunu ortaya çıkarmaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik sınırlı bir bakış açısından sıyrılıp daha geniş bir yelpazede ispatın rollerini ele aldıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrası ispatın rollerine yönelik bakış açılarındaki değişimi özetleyen Şekil 104 aşağıda sunulmuştur.




Şekil 104. Öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarındaki değişim

# 5. TARTIŞMA

Araştırmanın temel amacı, ilköğretim matematik öğretmenliği programında yer alan geometri dersine yönelik ispat öğretimi için bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesidir. Bu amaç doğrultusunda ispat öğretimine yönelik bir model (İSMAT Modeli) tanımlanarak bu modele dayalı olarak bir öğrenme ortamı tasarlanmış ve tasarlanan bu öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmalarına etkisi incelenmiştir. Bunun yanı sıra İSMAT Modelinin aşamaları dikkate alınarak öğretmen adaylarının öğrenme ortamında yaşanan zorluklar ve ispatın rollerine yönelik bakış açılarında nasıl bir değişimin olduğu belirlenmiştir. Bu bölümde öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları ve varsayımda bulunmalarının gelişimine yönelik tartışmalara yer verilmiştir. Öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarılarına etkisi muhakeme süreci ve matematik dili bakımından tartışılırken, varsayımda bulunmalarına etkisi doğruluk ve matematik dili bakımından tartışılmıştır. Ayrıca İSMAT Modelinin aşamalarının değerlendirilmesi ve öğretmen adaylarının ispata bakış açılarındaki değişim ile ilgili tartışmalara da yer verilmiştir.

## 5. 1. İSMAT Modeline Göre Tasarlanan Öğrenme Ortamının Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapma Başarıları Üzerine Etkisi ile İlgili Tartışma

Araştırmanın alt problemlerinden biri, İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma başarıları üzerine etkisinin incelenmesidir. Bu problem doğrultusunda uygulama öncesi ve sonrası öğretmen adaylarının muhakeme süreci ve matematik dili bakımından ispat yapma başarıları belirlenerek deney ve kontrol grupları arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları da belirlenmiştir. Öğrenme ortamının ispat yapma başarısı üzerindeki etkisi aşağıda belirtilen başlıklar halinde tartışılmıştır.

### 5. 1. 1. Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Kullandıkları Muhakemedeki Değişime Yönelik Tartışma

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yürütülen 8 haftalık uygulamalar sonucunda genel olarak uygulamaya dâhil olan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları muhakemenin düzeyi ile ilgili bir gelişimin olduğu görülmüştür. Uygulama sonrasında muhakeme süreci kategorilerinden alt düzeydekilere (MHS0, MHS1) yönelik yapılan ispatların sayısında bir azalma ya da yaklaşık olarak sabit kalma, üst düzeydekilere (MHS2, MHS3, MHS4) yönelik yapılan ispatların sayısında ise artış tespit edilmiştir. Uygulama öncesinde deney grubunda MHS0 kategorisi (*Boş bırakma, Hipotez ve hüküm bilgilerini yazma, İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadeler veya çıkarımlarda bulunma*) içerisinde değerlendirilen durumların oranı % 39 iken uygulama sonrasında bu oran % 14,06'ya düşmüştür. Bu ise MHS0 kategorisine dâhil edilen durumlarda yarıdan fazla bir azalmanın olduğunu göstermektedir. Kontrol grubunda ise bu kategori içerisinde değerlendiren durumların oranı uygulama öncesinde % 51,47 iken uygulama sonrasında bu oran % 43,45'e düşmüştür. Ancak bu düşüş oldukça az olup pek fazla bir değişimin olmadığına işaret etmektedir. Dolayısıyla deney grubunun hem kendi içinde hem de gruplar arasında olan değişimi açıkça ortaya çıkmaktadır. Bunun sebebi araştırmacının öğrenme ortamında verilenler ve istenenleri ayırt etmelerine yönelik vurgular yaparak ilk önce belirtilen koşulları düşünmekle ispata başlanması gerektiğini belirten ifadelerde bulunması olabilir. Uygulamalar esnasında öğretmen adaylarının buldukları matematiksel ilişkinin ispatına yönelik herhangi bir girişimde bulunamamaları durumunda araştırmacının onlardan ellerinde var olan durumları gözden geçirmelerini istemesi bu duruma bir örnek olarak gösterilebilir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının herhangi bir matematiksel ilişkinin ispatına başlama konusunda yaşadıkları zorlukların da azaldığından söz edilebilir. MHS0a ve MHS0b göstergeleri ile ilgili durumların uygulama öncesindeki toplam oranı % 33,3 iken uygulama sonrasında % 10,16'a düşmüştür. Bu durum yaklaşık olarak 3 kat bir azalma olduğunu göstererek ispata başlama girişimlerinde bir artışın olduğunu göstermektedir. İspata başlama girişimlerinin olumlu sonuçlar vermesi ise kendilerinin de ispat yapabildiği düşüncesini hissetmelerine katkıda bulunmuştur. Böylece diğer uygulamalarda kendilerine daha fazla özgüven duyarak boş bırakma eğilimlerinin ortadan kalktığı belirtilebilir. Bu bakımdan öğrencilerin olumlu duygular geliştirmeleri ve güdülenme düzeylerinin artması daha ayrıntılı bir şekilde çalışmalarını sağladığı ve öğrenme çabaları üzerinde etkili olduğundan söz edilebilir (Heinze ve Reiss, 2009). Ayrıca öğretmen adaylarının kendilerine olan özgüvenlerinin artmasıyla birlikte bazen ispatlarını yarıda bıraksalar da en azından ispata başlangıç niteliğinde çıkarımlarda bulunabilecek bir muhakeme anlayışına sahip oldukları görülmüştür. Uygulama haftaları ilerledikçe öğretmen adaylarının matematiksel ilişkinin ispatına yönelik sundukları başlangıç önerilerinin çoğunun uygun olması da ispat yapmadaki girişimlerinin arttığı ve ispat anlamında kullanışlı olan birçok çıkarımda bulunabildiklerine işaret etmektedir. Dördüncü uygulama haftasında Grup 8'de yer alan öğretmen adaylarının ABCD dörtgeninin A ile C köşelerini birleştirip ya da A ile B köşelerinden bir üçgene tamamlayarak üçgenlerde geçerli olan Menelaus teoremini uygulama ve çeşitli paralel doğrular çizmeleri ile açı-açı-açı benzerlik teoremini kullanma gibi üç farklı ispata başlangıç önerisinde bulunmaları bu durumu destekleyen örneklerden biridir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasında ispata başlamak adına farklı muhakemeler geliştirebilen bireyler haline geldiği söylenebilir. Moore (1994) öğrencilerin kavramsal anlama bakımından yetersiz olmalarının ispata başlama ve ispat yapma bakımından da yetersiz olmalarına sebep olabileceğini belirtmiştir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasında kavramsal anlamalarının arttığından söz edilebilir.

İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunma (MHS0c) göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatların oranı uygulama öncesinde % 5,7 iken uygulama sonrasında bu oran % 3,9'a düşmüştür. Bu durum fazla bir azalma olmadığını gösterse de ispat içerisindeki ilgisiz ifadeleri fark etmeye başladıklarından söz edilebilir. Kontrol grubunda ise bu göstergeye dâhil edilen ispatların oranının uygulama öncesinde % 3,27 iken uygulama sonrasında bu oran % 5,06'a yükselmiştir. Deney grubunda MHS1c göstergesine dâhil edilen ispatların azalmasında öğrenme ortamında etkinliklerin sonunda farklı ispat örnekleri anlatılırken tanım, teorem, aksiyomların uygunluğu, gerekçelerin uygun bir şekilde ifade edilip edilmediği gibi durumlara yönelik incelemelerin yapılması etkili olabilir. Öğrenme ortamında gerçekleştirilen grup çalışmasının da ispat sürecinde tanım, teorem, aksiyomların amacına uygun bir şekilde kullanılmasını sağlayarak yapılan ispatlarda ilgisiz ya da yanlış ifadelerin yer almasını engelleyebileceği kanısına varılmıştır. Çünkü öğretmen adayları arasında gerçekleşen etkileşimlerde ileri sürdükleri gerekçelerin; kullandıkları tanım, teorem, aksiyomların uygunluğu üzerine tartışılmaktadır. Beşinci uygulama haftasında birinci etkinliği yaparken ÖA27 kodlu öğretmen adayının, grup arkadaşlarından birinin açı-açı-açı benzerlik teoremini amacına uygun kullanmaması üzerine "*Açıları eş olan üçgenler eş mi olur? 90, 60, 30 açı ölçülerine sahip olan her üçgen eş mi olur?*" şeklinde bir soru ile arkadaşını uyarması bu durumu destekleyen örneklerden biridir. Bununla birlikte uygulamalar esnasında gruplar arasında ispatların değiştirilmesiyle birlikte ispat adımları; sunulan gerekçe; belirtilen tanım, teorem, aksiyomların uygunluğu gibi incelemeler yapılarak ispatları değerlendirmeleri de ispatlarda yer alan ilgisiz ve uygun olmayan ifadeleri daha kolay fark etmelerini sağlamış olabilir. Öğrencilerin tanım, teorem ve aksiyomları bilmenin yanı sıra ispat yaparken bunları ne zaman ve nasıl kullanmaları gerektiğine yönelik bir farkındalık kazanmaları gereklidir (Knapp, 2006; Weber, 2001). Bu bakımdan öğretmen adaylarının ispatlarında yer alan ilgisiz ya da yanlış ifadelerin azalmasında öğrenme ortamında matematiksel ifadeleri nasıl ve nerede kullanacaklarına yönelik bir farkındalık kazanmalarının etkili olduğu düşünülmektedir.

Uygulama öncesinde MHS1 kategorisi (*Birbirinden bağımsız en az bir doğru çıkarımda bulunma, Çıkarımlarını yetersiz gerekçelerle birlikte özel durumlar üzerinden yürütme, Hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunma*) içerisinde değerlendirilen ispatların oranı % 31; uygulama sonrasında ise % 31,78 olmak üzere oldukça yakın bir oranla ortaya çıkmıştır. Bu durum MHS1 kategorisine dâhil edilen ispatların sayısının yaklaşık olarak sabit kaldığını göstermektedir. Kontrol grubunda ise bu kategoriye dâhil edilen ispatların oranı % 28,88 iken uygulama sonrasında bu oran % 36,31'e yükselmiştir. Dolayısıyla deney grubunda muhakeme süreci boyutunda yer alan kategorilerden alt düzeydekilere (MHS0, MHS1) yönelik ispatların oranlarının azalması ya da yaklaşık olarak sabit kalması, uygulama sonrasında daha fazla çıkarımda bulunma eğiliminde olduklarını ve çıkarımda bulunmak için çaba sarf ettiklerini göstermektedir. Deney grubunda MHS1 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların sayısının yaklaşık olarak sabit kalması, öğrenme ortamında ispatı tamamlayamasalar da gelebilecekleri yere kadar yazmalarının istenmesine bağlı olabilir. Başka bir ifade ile ispat için yapmayı düşündüklerini daha iyi görebilmek için çıkarımlarından bazıları yanlış ya da özel bir duruma uygun olsa bile bunları ifade etmelerinin istenmesinden kaynaklı olarak ortaya çıkmış olabilir. Bununla birlikte hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunma (MHS1c) göstergesine dâhil edilen ispatların oranı uygulama öncesinde % 1,8 iken uygulama sonrasında bu oran % 0,78'e düşmüştür. Bu durum da MHS1 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların yaklaşık olarak sabit kalma sebepleri arasındadır. Bu göstergeye dâhil edilen ispatların sayısında az da olsa bir düşüşün olmasında öğrenme ortamında hipotez ve hüküm kavramlarının tanımlarının sıklıkla ifade edilmiş olması etkili olabilir. Ayrıca uygulamalar esnasında grup içinde gerçekleşen etkileşimlerde öğretmen adaylarından bu kavramlara yönelik farkındalık kazananların diğer arkadaşlarını bu konuda aydınlatmaları da hükümden başlayarak yaptıkları ispatları engellemiş olabilir. Benzer şekilde Sarı (2011) öğretmen adaylarının aktif ve birbiriyle etkileşim içinde olabileceği bir ortamda çalışmalarını yürütmesi ile birlikte hükümden başlayarak ispat yaptıkları durumlarda azalmanın gerçekleştiğini ve hatta bu tür durumların gerçekleşmediğini ifade etmiştir. Dolayısıyla hipotez ve hüküm kavramları arasında ayrım yapmalarını sağlamanın yanı sıra öğrenme ortamında öğretmen adaylarının ispat sürecinde gruplar halinde çalışmalarının da hükümden başlayarak ispat yaptıkları durumlarda bir azalmanın gerçekleşmesine sebep olmuş olabilir. Yedinci uygulama haftasında yapılan gözlemler esnasında Grup 1'de yer alan bir öğretmen adayının EF, EC, FC kenarlarını eşit kabul ederek çıkarımda bulunduğunu belirten bir ifadede bulunması üzerine grup arkadaşının "*Biz onun [EFC üçgeni] eşkenar üçgen olduğunu ispat edeceğiz.*" diye karşılık verip hükümden başlayarak ispat yapmasını engellemeye çalışması bu düşünceyi destekler niteliktedir. Kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının MHS1c göstergesine dâhil edilen ispatlarının oranı % 0,6’dan % 2,08 oranına yükselmesi ise öğrenme ortamından dolayı bir farklılaşmanın olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

Uygulama öncesinde MHS2 kategorisi (*Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunup sonuca ulaşamama, Özel durumlar üzerinden ardı ardına çıkarımlarda bulunup sonuca ulaşma, İspat aşamalarını formal olarak gerekçelendirmeme ya da yanlış gerekçelendirme ile sonuca ulaşma*) içerisinde değerlendirilen ispatların oranı % 18,3 iken bu oran uygulama sonrasında % 27,08’e yükselmiştir. Bu durum deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama sonrasında ispat için gerekli olan bütün adımları belirleyip sonuca ulaşabildikleri durumlarda bir artışın olduğuna işaret etmektedir. Dolayısıyla çıkarımlarını birbirini destekleyecek şekilde bir araya getirerek bir bütün halinde sunma anlamında bir değişimin meydana geldiğinden bahsedilebilir. Ayrıca bu değişim öğretmen adaylarının muhakemede bulunmalarında olumlu bir etki oluşturarak geniş ve bütünsel bir bakış açısına sahip olmalarına yardımcı olduğundan söz edilebilir. Yapılan bazı çalışmalarda (Driscoll, 1987; Lee, 1999; Moore, 1994; Schoenfeld, 1985) ispat adımlarını sadece açıklama olarak ya da ispata katkı sağlamayan ifadeleri çıkarım olarak sunan öğrencilerin yapılan uygulamalara göre muhakemelerinde olumlu değişimler gerçekleştiğinin ifade edilmesi belirtilen sonuçla benzerlik göstermektedir. Bu tür bir sonucun ortaya çıkması ise öğrenme ortamında etkinliklerin sonunda yapılan ispata yönelik sunumlarda belirtilen çıkarımların birbiri ile ilişkisi üzerine tartışmalar yapılarak ispat adımları arasında boşluklar oluşup olmadığının sorgulanmasına bağlı olabilir. Weber, Maher, Powell ve Lee (2008) öğrenme ortamında yapılan bu tür tartışmaların öğrencileri çıkarımda bulunmak için çaba sarf etmelerine ve arkadaşlarının çıkarımlarını sorgulamalarına katkıda bulunduğunu ifade ederek bu durumu desteklemektedir. Bu bakımdan öğrenme ortamında yapılan tartışmaların öğretmen adaylarının ispat sürecinde birbirini destekleyen çıkarımları daha fazla ifade edebilmelerinde etkili olduğundan bahsedilebilir. Muhakeme sürecinde yer alan kategorilerden üst düzeydekilere (MHS2, MHS3, MHS4) dâhil edilen ispatların uygulama öncesine göre toplam olarak oranında bir artışın olması da bu durumu desteklemektedir. Bu kategorilere dâhil edilen ispatların toplam oranının uygulama öncesinde % 30, uygulama sonrasında ise % 54,16 olması durumu açıkça ortaya koymaktadır. Öğrenme ortamında tanım, teorem ve aksiyomların kullanım amaçlarının uygunluğu üzerine tartışılması da çıkarımların birbirini destekleyecek şekilde ifade edilmesine katkıda bulunmuş olabilir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının tanım, aksiyom ve teoremler arasında ilişkilendirme yapma konusunda yeterli bir düzeye geldiğinden söz edilebilir. Ayrıca ispatın matematiksel bilgiler arasında ilişkilendirme yapma rolüne sahip olması (Hanna ve Barbeau, 2008; Mariotti ve Balacheff, 2008) düşüncesine bağlı olarak ispat öğretimine yönelik yapılan uygulamaların öğretmen adaylarının bu role yönelik kazanımlar elde etmesine olanaklar sağladığı belirtilebilir. Bu bakımdan ispat sürecinde tanım, teorem ve aksiyomları uygun bir şekilde kullanarak birbirini destekleyen çıkarımlarda bulundukları durumlarda bir artışın meydana gelmesinde öğrenme ortamının etkili olduğu düşünülmektedir. Kontrol grubunun MHS2, MHS3, MHS4 kategorileri içerisinde değerlendirilen ispatların oranları incelendiğinde uygulama öncesinde % 19,65 ve uygulama sonrasında % 20,24 gibi birbirine oldukça yakın oranlar çıkmıştır. Bu durum öğrenme ortamının etkisini doğrulamaktadır.

Muhakeme süreci boyutunda yer alan üst düzeydeki kategoriler (MHS2, MHS3, MHS4) içerisinde değerlendirilen ispatların toplam sayısında bir artışın olması aynı zamanda öğretmen adaylarının matematiksel ilişkiye ulaşmak için ispat adımlarını daha iyi bir şekilde belirleyebildiklerini göstermektedir. İspat adımlarını belirlemede bir gelişimin elde edilmesi, öğretmen adaylarının öğrenme ortamında GeoGebra yazılımı aracılığıyla incelemeler yaparken kenar uzunlukları, açı ölçüleri gibi deneysel verilerle karşılaşmalarının çeşitli çıkarımlar ileri sürmelerine olanak vermesine bağlı olarak ortaya çıkmış olabilir. Geometrik yapı üzerinde ölçümler ve sürükleme işlemleri yapma fırsatı tanıyan dinamik geometri yazılımları, bir matematiksel ilişkinin ispatı için görsel ve deneysel temelleri oluşturmayı sağlamaktadır (Battista ve Clements, 1995). Bu bakımdan öğretmen adaylarının izleyecekleri ispat adımlarına karar vermelerinde öğrenme ortamında GeoGebra yazılımı üzerinde geometrik yapıyı oluşturarak yaptıkları incelemelerin etkili olduğundan söz edilebilir. Öğrenme ortamında yapılan gözlemlerde öğretmen adaylarının bazı ispat adımlarını GeoGebra yazılımı aracılığıyla belirleyip ispatlarının devamını getirmesi bu durumu açıkça ortaya koymaktadır. Yedinci uygulama haftasının ikinci etkinliğini yaparken Grup 11'de yer alan ÖA31 kodlu öğretmen adayının "*GeoGebra'da ED ile DC doğru parçalarının eşit olduğunu bulmamız ile E ve F noktalarını birleştirmek aklımıza geldi. Bundan sonra da EFC ikizkenar üçgen olması gerektiğini gördük. EF ile FC doğru parçalarının eşit olması için de eş üçgenleri araştırdık. Bunun sonucunda ispatı yaptık.*" şeklinde ifadede bulunması yazılımın ispat adımlarını belirlemedeki etkisini ortaya çıkarmaktadır.

Uygulama öncesinde MHS1b (*Çıkarımlarını özel durum üzerinden yürüterek yetersiz gerekçelendirme yapma*) ve MHS2b (*Özel durumlar üzerinden sonuca ulaşma*) göstergeleri içerisinde değerlendirilen ispatların oranı toplam olarak % 14,4 iken uygulama sonrasında bu oranın % 13,81 olması yaklaşık olarak sabit kaldığını göstermektedir. Bu ise özel durumlar üzerinden çıkarımda bulunma ve bu durumları ele alarak matematiksel ilişkiye ulaşmaya yönelik davranışlarında bir değişimin olmadığına işaret etmektedir. Kontrol grubunda ise MHS1b ve MHS2b göstergelerine dâhil edilen ispatların oranları toplam olarak uygulama öncesinde % 14,58 iken uygulama sonrasında % 9,82 olması bu grup için bir değişimin olduğunu göstermektedir. Deney grubunda herhangi bir değişimin olmaması, öğrenme ortamında GeoGebra yazılımı üzerinde yapı oluşturarak farklı durumlara yönelik incelemeler yapmaları sonucunda matematiksel ilişkiye ulaşmalarına bağlı olabilir. Ancak öğrenme ortamında grup çalışması yapılmasının, öğretmen adaylarının özel durumlar üzerinden çıkarımlarda bulunduğu ve bunlardan yola çıkarak matematiksel ilişkiye ulaştıkları durumların farkına varmalarını sağladığından bahsedilebilir. Çünkü bu tür bir çıkarımda bulunma ya da bunlardan yola çıkarak sonuca ulaşmaları durumunda grup içinde öğretmen adayları arasında gerçekleşen tartışmalarla bu durumun farkına vardıkları da görülmüştür. Dolayısıyla grup çalışmasının öğretmen adaylarının özel durumları ele alarak çıkarımda bulundukları ya da bunlar üzerinden sonuca ulaştıkları durumlar için farkındalık kazanmalarını sağladığından bahsedilebilir. Örneğin yedinci uygulama haftasında birinci etkinliği yaparken Grup 1'de yer alan ÖA3 kodlu öğretmen adayı, ABCD paralelkenarının AB ve AD kenarları üzerine dışarı doğru çizilen eşkenar üçgenlerinin kenarları ile paralelkenarın kenarlarını doğrusal alarak ispata yönelik bir gidişat izlemiştir. Bunun üzerine grup arkadaşları onun yaptığı ispatı değerlendirirken paralelkenar ve üçgenlerin kenarları için "*Her zaman doğrusal olmak zorunda değil.*" ifadesini kullanarak bu gidişattan vazgeçmesini sağlamaları grup çalışmasının bir farkındalık kazandırdığına işaret etmektedir.

Uygulama öncesinde MHS3 kategorisi (*İspat aşamalarının bir kısmını gerekçelendirip bir kısmını gerekçelendirmeden sonuca ulaşma, İspat aşamalarının önemli bir kısmına yönelik gerekçeler sunup bu gerekçelerin bazılarında sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hatalar yaparak sonuca ulaşma*) içerisinde değerlendirilen ispatların oranı % 7 iken uygulama sonrasında bu oran % 16,92'a yükselmiştir. Bu ise MHS3 kategorisine dâhil edilen ispatların oranında iki kattan daha fazla bir artışın olduğunu göstermektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının farklı çıkarımlarda bulunup bunları bir bütün halinde sunma ile birlikte çıkarımların gerekçelerini de belirtmenin önemli olduğunu kavramaya başladıklarına işaret etmektedir. Bu durum ispat sürecinde ileri sürdükleri çıkarımları neye dayalı olarak ifade ettiklerine yönelik sorgulama yapma eğiliminde olduklarını da göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının matematiksel ifadeleri kullanma bakımından bir farkındalık kazandığından söz edilebilir. Bu tür kazanımların elde edilmesi, gerek öğretmen adayları ispat yaparken gerekse etkinliklerin sonunda ispata yönelik yapılan sunumlarda kullanılan matematiksel ifadeler ve belirtilen gerekçeler üzerine tartışılmasına bağlı olabilir. Başka bir ifade ile öğrenme ortamında matematiksel ifadelerin uygunluğu üzerine tartışılması, sunulan ispatlarda yer alan çıkarımların neye dayalı yazıldığı üzerine düşündürme ve yazılan gerekçelerin uygunluğunu sorgulamaya yönelik çalışmaların yapılması bu gelişimi sağlayabilir. Lee (1999) öğrenme ortamında ileri sürülen çıkarımların neye dayalı olarak ve niçin belirtildiğinin sorulmasının öğrencilerin ispat yazmalarında gelişime sebep olacağını belirterek bu duruma vurgu yapmaktadır. Ancak MHS3 kategorisine dâhil edilen ispatların sayısının beklenen düzeyde olmaması ise grup çalışmasında belli başlı kişilerin ispat adımlarını belirlemesi ve bunlara yönelik gerekçeler sunma görevlerini üstlenip diğerleri bu yapılanları incelese bile kâğıdına geçirme noktasında kalmasına bağlı olabilir. Dolayısıyla grup çalışmasında ilk önce her bir öğretmen adayı bireysel olarak ispat adımları ile ilgili düşünseler de genellikle belli kişilerin ispata yönelik gidişatı bulup anlatması şeklinde gerçekleşmesi bu duruma yönelik daha fazla bir gelişimin oluşmasına engel olmuş olabilir İspat yapma başarı testlerinde ispatlarını bireysel olarak yapmaları da bu kategori içerisinde değerlendirilen ispatların sayısında daha az bir artış olmasına sebep olmuştur.

Uygulama öncesinde MHS4 kategorisi (*İspat aşamalarının her biri ile ilgili gerekçelendirmeler yaparak sonuca ulaşma*) içerisinde yer alan ispatların oranı % 4,7 iken uygulama sonrasında bu oran % 10,16'a yükselmiştir. Bu ise MHS4 kategorisine dâhil edilen ispatların oranında yaklaşık olarak iki kat bir artışın olduğunu göstermektedir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat için gerekli olan bütün çıkarımları belirtme ve bu çıkarımlara yönelik gerekçeleri sunma konusunda bir farkındalık kazandığını göstermektedir. Hem bütün çıkarımları ifade etme hem de bunlara yönelik gerekçeleri sunma eğiliminde olmaları muhakeme süreçlerine hâkim olduklarına işaret etmektedir. Ayrıca ispat sürecinde muhakemede bulunmalarına yönelik pozitif yönde bir gelişim elde ettikleri açıkça görülmektedir. Öğrenme ortamında yapılan etkinliklerin sonunda genellikle farklı ispat örneklerinin sunulmasına imkân verilerek belirtilen çıkarımların doğruluğu, çıkarımların birbiri ile olan ilişkisi, çıkarımlara sunulan gerekçelerin uygunluğu gibi durumlar üzerine tartışmalar yapılması bu gelişime sebep olmuş olabilir. Bu gelişimin yeterli düzeyde olmaması ise bu çalışmanın ek çizim yapma gibi uzamsal yetenekleri geliştirmeye yönelik olmamasına bağlı olabilir. Başka bir ifade ile ispat için ek çizim yapılması gereken soruların farklı boyutlardan düşünerek daha derin muhakemede bulunulmasını gerektirdiğinden bu kategori içerisinde değerlendirilen ispatların sayısında beklenen artış gerçekleşmemiş olabilir. Bununla birlikte ispat sürecinde grup çalışması yapılırken görev dağılımında bazı öğretmen adaylarının ispat adımlarını belirleme ve bu adımlara yönelik gerekçeleri belirtme anlamında daha çok uğraş vermesi de bu durum üzerinde etkili olabilir.

Uygulama öncesinde MHS3 ve MHS4 kategorileri içerisinde değerlendirilen ispatların toplam oranı % 11,7 iken uygulama sonrasında bu oran % 27,08'e yükselmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmak için ifade ettikleri çıkarımların her biri için gerekçe sunma ihtiyacı duymaya başladıklarına işaret etmektedir. Yapılan gözlemler sonucunda öğretmen adaylarının uygulamaların öncesinde ispat adımlarına yönelik gerekçeleri sunmaktan kaçınırken, uygulamaların sonrasında her bir ispat adımı için gerekçeler sunmaya çaba göstermeleri bu durumu desteklemektedir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının ispat yaparken ifade ettikleri her bir çıkarıma yönelik gerekçe sunmanın gerekli olduğunun bilincinde olmaya başladıklarından bahsedilebilir. Bununla birlikte hangi tanım, aksiyom ya da teoremi niçin kullandıklarına yönelik bir farkındalık kazandıklarından söz edilebilir. Kontrol grubunda uygulama öncesinde MHS3 ve MHS4 kategorilerine dâhil edilen ispatların toplam oranı % 6,26 iken uygulama sonrasında bu oran % 8,04'e yükselmiştir. Bu ise çok az bir artışın olduğunu göstermekle birlikte öğrenme ortamlarında yapılan uygulamaların farklılaşmasının bu durum üzerinde etkili olabileceğine işaret etmektedir. Bu bakımdan öğrenme ortamında gerek araştırmacının grupların ispat için izledikleri adımları açıklamalarını istemesi gerekse etkinliklerin sonunda ispat adımları ve bu adımlara yönelik gerekçeler ile ilgili tartışma ortamının oluşturulması gerekçe sunma ihtiyacı duymalarını arttırmış olabilir. Erdem (2015) yaptığı çalışmada tasarlanan öğrenme ortamında öğrencileri açıklama yapmaya teşvik etmenin ve buna imkân tanımanın öğrencilerin matematiksel muhakemelerinin gelişmesine katkıda bulunduğu sonucuna ulaşması bu durum ile benzerlik göstermektedir. Generazzo (2011) öğrenme ortamında ispat yapan öğrencilere yeni fikirler ve stratejiler önerme, iddialarını savunma, diğer öğrencilerin fikirleri üzerine düşünme ve gözden geçirme, sonuçları değerlendirme fırsatlarının tanınmasının gerekçe sunmalarına katkıda bulunacağını belirterek tartışma ortamının oluşturulmasının gerekliliğini vurgulamıştır. Bunun yanı sıra dinamik geometri yazılımı üzerinde öğretmen adaylarının yaptıkları incelemelerin de ulaştıkları durumların nedenini araştırma gereksinimi duymalarını sağlayarak gerekçe sunmalarını pekiştirdiği düşünülmektedir. Öğrenme ortamında yapılan gözlemler esnasında öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımında bulduğu bir ilişkinin neden kaynakladığını araştırmaya koyulması bu durumu destekler niteliktedir. Örneğin beşinci uygulama haftasında Grup 2'de yer alan ÖA4 kodlu öğretmen adayı ikinci etkinliğe yönelik ispat yapmaya çalışırken ağırlık merkezinden çizilen doğru parçaları ile kenarlar arasında belirli bir oran oluşabileceğini düşünmesi ile birlikte GeoGebra yazılımına başvurmuştur. İncelediği kısımlarda 2'ye 1'lik bir oran olduğunu görerek ABC üçgeninin kenarlarının üç eşit parçaya bölündüğü çıkarımında bulunmuştur. Bunun üzerine "*GeoGebra'dan baktım oldu. Ama bulacağım niye olduğunu?.*" ifadesinde bulunması, yazılım üzerinde ilişkiyi bulmasının onu bu ilişkinin nedenini araştırmaya yönelttiğini göstermektedir. Bu bakımdan dinamik geometri yazılımını kullanmalarının, buldukları ilişkilerin gerekçelerini sorgulamalarına katkıda bulduğundan söz edilebilir.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yer alan deney grubu ile mevcut uygulamalarına müdahale edilmeyen bir öğrenme ortamında yer alan kontrol grubunun ön test puanları kontrol altına alınarak yapılan ANCOVA analizi sonucunda ispat sürecinde muhakemede bulunmaya yönelik başarıları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olduğu belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları muhakemelerdeki gelişimin İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamına bağlı olduğunu göstermektedir. Ayrıca kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrasında muhakeme süreci boyutunda yer alan kategoriler içerisinde değerlendirilen ispatların sayıları incelendiğinde bu durumu desteklediği görülmektedir. Bu incelemeye göre MHS0 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların sayısının uygulama sonrasında da büyük bir çoğunluğu kapladığı ve bu kategoriden sonra MHS1 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca MHS3 kategorisine dâhil edilen ispatların sayısında az bir miktarda artış olsa da MHS2 kategorisi ile ilgili bir azalma ve MHS4 kategorisi ile ilgili bir sabit kalma durumunun söz konusu olduğu görülmüştür. Bu durum, kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarına yönelik yapılan ispat öğretiminin muhakemede bulunmalarına pek fazla bir katkı sağlamadığı anlamına gelmektedir. Dolayısıyla deney grubunda yer alan öğretmen adaylarına yapılan ispat öğretiminin amacına ulaştığı ve gruplar arasında bir farklılaşma oluşturarak farklı muhakemelerde bulunmaları bakımından önemli katkılar sağladığı belirtilebilir. Benzer şekilde öğrenme ortamında kullanılan yaklaşımlar, yöntemler ve uygulamaların öğrencilerin kullandıkları muhakemelerde gelişime sebep olduğunu belirten çalışmalar da bulunmaktadır (Erdem, 2015; Francisco ve Maher, 2005; Generazzo, 2011; Hiebert ve Grouws, 2007; Hsu, 2010; Lee, 1999; Martin ve McCrone, 2009; Pulley, 2010; Reiss, Hellmich ve Reiss, 2002).

Öğrenme ortamında ispat değerlendirme çalışmalarının gerçekleştirilmesinin de farklı muhakemelerde bulunmalarına bir katkı sağladığından söz edilebilir. Pulley (2010) matematiksel çıkarımların değerlendirilmesine yönelik yapılan çalışmaların gerek matematiksel içerik gerekse ispat anlamında sahip oldukları kavram yanılgılarını ortadan kaldırdığını ifade etmiştir. Bu tür bir ifadede bulunarak ispat değerlendirme çalışmalarının muhakemede bulunmalarında bir gelişim elde edilmesine katkıda bulunduğuna vurgu yapmıştır. Bu bakımdan ispat değerlendirme çalışmaları; diğer grupların izledikleri ispat adımları üzerine incelemeler yapma, kendi ispatlarında ileri sürdükleri çıkarımlarla karşılaştırmalar yapma ve farklı ispat yollarından haberdar olmalarına fırsat tanıdığından öğretmen adaylarının muhakemede bulunmalarına önemli katkılar sağladığı düşünülmektedir. Altıncı uygulama haftasının birinci etkinliğini yaparken Grup 11'de yer alan ÖA31 kodlu öğretmen adayının "*Farklı bir yol izlemişler. Ancak ispat adımları* *doğrudur.*" şeklinde bir ifade kullanması farklı ispat yollarını görme fırsatı yakaladıklarını göstermektedir. Dolayısıyla bu tür fırsatlar yakalamalarının muhakemede bulunma anlayışlarının kapsamının genişlemesine yardımcı olduğu düşünülmektedir.

Uygulama haftalarında yapılan etkinliklerin sonunda öğretmen adaylarının ispatlarına yönelik sunumların gerçekleştirilmesinin de muhakemede bulunma anlayışlarında bir değişime yol açtığı düşünülmektedir. İspata yönelik sunumlarda farklı ispat yollarını takip eden grupların anlatımına izin verilmesi ve izledikleri adımlar üzerine tartışmalar yapılmasının bakış açılarının kapsamının genişlemesine yardımcı olduğu düşüncesi bu durumu destekler niteliktedir. Benzer şekilde sınıf tartışmalarının ispat süreci içinde olumlu etkiler oluşturduğunu belirtilen birçok çalışma mevcuttur (Generazzo, 2011; Weber vd., 2008; Pulley, 2010). Generazzo (2011) öğrencilerin muhakemede bulunma ve ispat yapma bakımından gelişimlerinin ispat öğretiminde sınıf tartışmalarına yer verilmesiyle sağlanabileceğini belirterek ispat yapma anlamında bakış açılarının olumlu yönde değişebileceğine vurgu yapmaktadır. Bu bakımdan öğretmen adaylarının gruplar halinde birbirleriyle etkileşim içinde çalışmaları, her birinin elde ettikleri kazanımları diğer arkadaşları ile paylaşması, birbirlerinin eksiğini ya da hatalarını görerek bunları düzeltme imkânı bulmaları ispat sürecinde kullandıkları muhakemelerin gelişimine katkıda bulunduğu tahmin edilmektedir. Benzer şekilde araştırmacıların birçoğu da ispat öğretimi için grup çalışmasının önemli olmasının yanı sıra öğrenciler arasında etkileşimi artıran ve onların aktif olmasını sağlayan ortamların muhakemelerinin gelişmesinde önemli bir rol oynadığını belirtmiştir (Generazzo, 2011; Haralambos, 2000; Lee, 1999; Moreno, 2003; Pulley, 2010; Tinto, 1999). Yankelewitz, Mueller ve Maher (2010) de öğrencilerin birbirleriyle etkileşim halinde olmalarına ve matematiksel fikirlerini rahatlıkla paylaşabilmelerine fırsat tanıyan yerlerin matematiksel muhakemenin gelişimi için ideal ortamlar olduğunu ifade ederek bu durumu desteklemektedir. Bu bakımdan bir çocuğun muhakeme sürecinin akranlarıyla yaşadığı ve sosyal etkileşime girdiği ortamlarda geliştiği (Vygotsky, 1978) düşüncesiyle bu tür ortamlarda her bireyin diğerlerinin muhakemesinden etkilenmesi (Maher ve Davis, 1995) sonucunda gelişimin elde edilebileceği belirtilebilir.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarına kazandırdığı durumlardan birinin de ispat adımlarının sıralamasını nasıl yapacakları ve bunu okuyucuya nasıl aktaracakları konusunda bilgi sahibi olmalarını sağlamak olabilir. Deney grubunda uygulama öncesinde olduğu gibi sonrasında da çoğunlukla geometrik ve paragraf ispatın birlikte kullanımı tercih edilirken kontrol grubunda ispat yapmadıkları durumların her iki durumda da çoğunlukta olması bu durumu desteklemektedir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının ispat sürecinde tercih ettikleri ispat yapıları bakımından gruplar arasında bir farklılaşma olduğundan söz edilebilir. Gruplar arasında ispat yapısı bakımından bir farklılaşmanın oluşması ise İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yürütülen uygulamalarda ispat adımlarını yazma ve bunlara yönelik gerekçeler sunmaya yönelik çalışmaların yapılmasına bağlı olabilir.

### 5. 1. 2. Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Kullandıkları Matematik Dilinin Değişimine Yönelik Tartışma

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yürütülen 8 haftalık uygulamalar sonucunda genel olarak uygulamaya dâhil olan öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları matematik dilinin düzeyi ile ilgili bir gelişimin olduğu belirlenmiştir. Uygulama öncesinde matematik dili kategorilerinden en üst düzeydeki kategoriye yönelik kullanımlar çoğunluğu oluşturmazken uygulama sonrasında bu çoğunluğa sahip olduğu belirlenmiştir. Deney grubunda uygulama öncesinde matematik dilini kullanma bakımından MD2 (*Açıklamalar anlaşılmakla birlikte sembollerin kullanımında hataların olması*) göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatların oranı % 38,54 iken uygulama sonrasında MD3 (*Hem kavramların hem de sembollerin uygun bir şekilde kullanımı*) göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatların oranının % 55,21 olması bu durumu göstermektedir. Kontrol grubunda da uygulama öncesinde ispatların çoğunun MD2 kategorisi içerisinde yer alıp uygulama sonrasında MD3 kategorisinde yer alması öğrenme ortamından kaynaklanan bir değişimin olmadığı düşüncesini oluşturmaktadır. Ancak deney grubunda MD3 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların oranları uygulama öncesinde % 26,56 iken uygulama sonrasında % 55,21'e yükselmiştir. Bu ise iki kattan daha fazla bir artışı göstererek pozitif yönde bir gelişimin olduğuna işaret etmektedir. Bunun yanı sıra yapılan ANCOVA analizi sonucu, ispat sürecinde matematik dili kullanımına yönelik gelişimin İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamı ile ilişkili olduğunu belirterek durumu daha açık ve kesin olarak ortaya koymaktadır. Bu durum ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik bir gelişimin elde edilmesinde İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının etkisinin olduğu anlamına gelmektedir. Yapılan bazı çalışmalar da matematik öğretiminde yürütülen sınıf içi uygulamalarının öğrencilerin matematiksel semboller ve kavramları öğrenmeleri ve kullanmaları üzerinde etkili olduğunu özellikle belirtmektedir (Capraro ve Joffrion, 2006; Mercer ve Sams, 2006; Pimm, 1987; Woods, 2009).

İspat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik elde edilen bu gelişimde, öğrenme ortamında etkinliklerin sonunda ispatlara yönelik yapılan sunumların pozitif yönde bir etki oluşturduğu düşünülmektedir. Gerek öğretmen adayları ispatlarını anlatırken ya da ispatını tekrar tahtaya yazarken matematiksel kavram ve sembollerin kullanımlarına tanık olmaları gerekse araştırmacının ispat üzerindeki hatalar ya da doğru kullanımlara dikkat çekmesi öğretmen adaylarında bir farkındalık oluşturmuş olabilir. Bu farkındalık sonucunda ise kendi ispatlarında bunları uygulama fırsatı bularak bu gelişimin elde edildiği düşünülmektedir. Uygulamaların grup çalışmasıyla yürütülmesinin de ispat sürecinde matematiksel kavram ve sembolleri uygun bir şekilde kullanmaya yönelik bir gelişimin oluşmasına katkılar sağladığı tahmin edilmektedir. Öğretmen adayları grup halinde çalışırken ispat yapmaya yönelik aralarında geçen konuşmalar ve ispatlarını yazarken birbirlerinin kullandıkları matematiksel kavramlar ve sembollerden haberdar olmaları ile matematik dilini kullanma bakımından kazanımlar elde etmiş olabilirler. Öğrenme ortamında yapılan gözlemlerde öğretmen adaylarının matematiksel sembol kullanımı açısından birbirine danışması bu durumu destekler niteliktedir. Örneğin üçüncü uygulama haftasında birinci etkinliği yaparken Grup 10'da yer alan ÖA28 kodlu öğretmen adayının grup arkadaşlarından birine "*Eşliği şöyle mi yoksa şöyle mi gösteriyoruz?*" diye sorması ile birlikte bu sorusunun karşılığını alması belirtilen durumu açıkça ortaya koymaktadır. Mercer ve Sams'in (2006) yaptığı çalışmada grup çalışması ve öğretmenin rehberliğine dayanan bir program dâhilinde yürütülen derslerin sonunda öğrencilerin muhakemede bulunurken kullandıkları matematik dilinde bir gelişim elde edildiğine ulaşmıştır. Benzer şekilde öğrencilerin muhakeme ve öğrenmelerinde gelişim elde etmek için birbiriyle etkileşim halinde olacakları farklı yaklaşımları içeren bir programın uygulanması ile birlikte matematik dilini kullanma bakımından bir gelişimin sağlandığına yönelik sonuca ulaşan çalışmalar da mevcuttur (Mercer, Wegerif ve Dawes, 1999; Mercer, Dawes, Wegerif ve Sams, 2004). Bu bakımdan öğrenme ortamında öğretmen adaylarının gruplar halinde çalışmasının matematik dilini kullanma anlamında bir gelişimin sağlanmasında etkili olduğundan söz edilebilir.

Öğrenme ortamında gerçekleştirilen ispat değerlendirme çalışmalarında öğretmen adaylarının matematik diline yönelik incelemeler de yaptıkları belirlenmiştir. Değerlendirdikleri ispatlara sundukları sonuçların içerisinde matematik diline yönelik eksiklikleri tamamlama ve var olan hataları düzeltme ile ilgili önerilere yer vermişlerdir. Bu önerileri alan gruplar ise matematik diline yönelik hatalarını gidermek ve eksiklerini tamamlamak için bu önerilere bağlı olarak ispatlarında düzeltmeler yapmışlardır. Öğretmen adaylarının hem kendilerinin ispatları matematik dili bakımından değerlendirmesi hem de başka grupların onlardan matematiksel sembol ya da kavramlara yönelik ispatlarında düzeltmeler yapmalarını istemesi matematik dilinin kullanımı ile ilgili kazanımlar elde etmelerine katkıda bulunduğu düşünülmektedir. Bu açıdan ispat değerlendirme çalışmalarının öğretmen adaylarının matematiksel kavram ve sembollerin uygun bir şekilde kullanımı ile ilgili bilgilerinin pekişmesine katkıda bulunduğundan söz edilebilir.

Uygulama öncesinde matematik dilini kullanma bakımından MD2 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların oranı % 38,54 iken uygulama sonrasında bu oran % 33,59'a düşmüştür. Bu durum fazla bir azalmanın olmadığını gösterse de öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel sembolleri uygun bir şekilde kullanmaya yönelik bir farkındalık kazandıklarından söz edilebilir. MD2 kategorisi içerisinde gerçekleşen bu azalmanın istenen düzeyde olmaması, öğrenme ortamında matematik dilini kullanma ile ilgili vurgulamalar yapılsa da daha çok öğretmen adaylarının ispat yapmalarını geliştirmeye odaklanılmasına bağlı olabilir. Ancak öğretmen adaylarının ispat sürecinde daha çok matematiksel sembolleri kullanmalarına bağlı olarak MD3 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların sayısındaki artış bir bakıma sembolik dil kullanımındaki gelişimi göstermektedir. Kontrol grubunda da uygulama sonrasında matematik dilini kullanma bakımından MD2 göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatların sayılarında bir azalma görülürken MD3 göstergesi içerisinde değerlendirilen ispatların sayısında ise bir artış görülmüştür. Dolayısıyla her iki grupta da matematik dilini kullanma bakımından MD2 ve MD3 kategorilerinde gerçekleşen bu değişim sadece öğrenme ortamından kaynaklanan bir durum olmayabilir. Kontrol grubunda öğretimi gerçekleştiren öğretim üyesinin deneyimi ve matematik dilini kullanmadaki yeterliliği her iki grupta da bu kategorilere yönelik değişimin dengede kalmasına sebep olmuş olabilir.

Matematiksel sembollerin kullanımında hataların olduğu durumlarda pek fazla bir azalmanın görülmemesi, bazı sembollerin uygun bir şekilde kullanımında daha çok gelişim elde edilip diğerlerinde bu durumun geçerli olmamasına bağlı olabilir. Öğretmen adaylarının matematiksel sembollerden bazılarını uygun bir şekilde kullanmaya başlamalarında öğrenme ortamında yapılan uygulamalara bağlı olarak bu semboller ile ilişkili olan kavramların tanımlarını daha fazla özümsemelerinin etkili olduğu düşünülmektedir. Birçok araştırmacının (Dickson, Brown ve Gibson, 1993; Çakmak, 2013; Philipp, Thanheiser ve Clement, 2002; Yeşildere, 2007) da öğrencilerin matematiksel kavramlara yönelik bilgilerinde eksikliklerin olmasının, matematik dilini etkili bir şekilde kullanmalarına engel olduğu sonucuna ulaşmaları, kavramları özümsemelerinin matematiksel sembollerin uygun bir şekilde kullanılmasını etkileyebileceğine işaret etmektedir.

Uygulamaların başında öğretmen adayları eşlik ve benzerlik sembollerini birbiriyle karıştırmaları çoğu kez karşılaşılan durumlardan biridir. Bu durumlarla karşılaşılması üzerine araştırmacı, üçgenlerde eşlik ve benzerliğin tanımını ifade edip semboller ile bu kavramlar arasında ilişki kurarak bunların öğrencilerin zihninde netleşmesi için açıklamalar yapmıştır. Ayrıca matematiksel sembollere yönelik çağrışım sağlayabilecek benzetmelerde bulunmuştur. Örneğin araştırmacı "*Üçgenlerde eşlikten söz ediyorsanız* *eşlik sembolündeki eşitliği hatırlayınız. Benzerlikten bahsediyorsanız da yaklaşık olma durumu aklınıza gelsin.*" gibi benzetmelerle sembollerin karışmasını engellemeye çalışması belirtilen durumu desteklemektedir. Yeşildere (2007) matematiksel terimlerin anlamları kavramsal olarak edinilmeden ezberlendiği takdirde öğrencilerin bunları niçin kullandıklarını bilemeyip matematik dili kullanımında hatalar yapabildiklerini belirtmiştir. Bu duruma bir çözüm olarak öğretmenlerin benzetimlerden (analojiler) ve uygun metaforlardan yararlanabileceklerini ifade etmiştir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının eşlik ve benzerlik sembollerini karıştırmamaya başlamalarında yapılan bu uygulamanın etkili olduğu düşünülmektedir.

Deney grubunun ispat sürecinde matematik dilini kullanmasına bağlı olarak MD1 göstergesi (*Semboller doğru olmakla birlikte açıklamaların anlaşılır olmaması*) içerisinde değerlendirilen ispatların uygulama öncesi ve sonrasında % 0,78 oranına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu ise MD1 kategorisine dâhil edilen ispatların oranının uygulama öncesi ve sonrasında sabit kaldığını göstermekle birlikte sembolik olmayan dilin kullanımına yönelik bir değişimin yaşanmadığına işaret etmektedir. Ancak uygulama öncesi ve sonrasında MD1 göstergesi ile ilgili kullanımlar gerçekleştiren öğretmen adayları incelendiğinde uygulama öncesindeki kişilerle sonrasındaki kişilerin farklılaştığı görülmektedir. Bu durum uygulama öncesinde matematiksel kavramlara yönelik hatalar yapan kişilerin bu tür bir kullanımda bulunmayarak bir gelişim elde ettiklerini göstermektedir. Matematiksel açıklamaların anlaşılır olmadığı ifadelerde bulunan yeni kişilerin olması ise genel anlamda bir gelişimin elde edilmediğini ortaya çıkarmaktadır. Ancak sembolik olmayan dil bakımından ortaya çıkan yeni durumlar, öğretmen adaylarının daha çok sembolik dil kullanmaları ve öğrenme ortamında hataya düştükleri bu durumlara rastlanmamış olmasına bağlı olabilir. Bunun bir sonucu olarak da durumun düzeltilmesine yönelik önerilerde bulunma anlamında müdahalelerin gerçekleştirilememesinden kaynaklı olarak ortaya çıkmış olabilir.

Uygulama öncesi ve sonrasında matematiksel kavramların ifade edilmesinden çok matematiksel sembollerin kullanımında hatalar yaptıkları görülmüştür. Bununla birlikte sembolik dilin uygun bir şekilde kullanılmasına yönelik gelişimin sembolik olmayan dilin kullanımına göre daha fazla olduğu belirlenmiştir. Matematiksel sembollerin kullanımı ile ilgili hataları, uygulama öncesi ve sonrasında daha fazla yapmaları ispat sürecinde çoğunlukla sembolik dil kullanmalarına bağlı olabilir. Dolayısıyla sembolik olmayan dilin daha az kullanılması da matematiksel kavramların ifade edilmesine yönelik hataların yapılmasını engellemiş olabilir. Sembolik dilin kullanımında gerçekleşen gelişimin daha fazla olmasında da öğretmen adaylarının matematik dilinin uygun bir şekilde kullanımını genellikle matematiksel sembollerin yazımına dikkat etme olarak algılamalarına bağlı olabilir.

Uygulama öncesinde matematik dilini kullanma bakımından MD0 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların oranı % 34,12 iken uygulama sonrasında bu oran % 10,42’e düşmüştür. MD0 kategorisinde meydana gelen bu azalma, MHS0a göstergesinde gerçekleşen değişime bağlı olarak ortaya çıkmıştır. MHS0a göstergesine dâhil edilen ispatların oranı uygulama öncesi % 33,34 iken bu oranın % 10,16’a düşmesi bu durumu açıkça ortaya koymaktadır. Bu durum öğretmen adaylarının boş bırakma eğilimlerini ispat yapmaya doğru dönüştürürken matematik dilini kullanma anlamında da donanımlı bir hale geldiğini göstermektedir. Bir başka ifade ile ispat yapma sayılarını artırırken matematik dilinin kullanımına yönelik yeni hatalar yapmadıklarına ya da eksiklikler oluşturmadıklarına işaret etmektedir. Kontrol grubunda ise MD0a göstergesine dâhil edilen ispatların oranı uygulama öncesinde % 48,2 iken uygulama sonrasında bu oran % 38,39’a düşmüştür. Dolayısıyla bu durum grupların yer aldığı öğrenme ortamlarının farklılaşmasına bağlı olarak ortaya çıkmış olabileceğini göstermektedir. Başka bir ifade ile bu durum öğrenme ortamında grup çalışmasının yürütülmesi, etkinliklerin sonunda ispata yönelik sunumlarda tercih edilen matematiksel kavram ve sembollerin görülmesi ve bunlar üzerine tartışmalar yapılması, ispat değerlendirme çalışmalarına yer verilmesinin matematik dilinin kullanımını pozitif yönde etkilediği düşüncesini pekiştirmektedir. Üçüncü uygulama haftasında yapılan gözlemlerde birinci etkinliği yapma süreci içerisinde Grup 10’un bir grubun ispatını değerlendirirken açı ölçülerinin gösterimine yönelik hatanın düzeltilmesi ile ilgili bir ifadede bulunması, grup çalışmasının matematik dilinin kullanımında etkili olduğunu gösteren bir örnek niteliğindedir. MD0b göstergesi ise MD0a göstergesi kadar olmasa da MD0 kategorisi içerisinde değerlendirilen ispatların sayılarının azalmasına katkıda bulunmuştur. Bu göstergeye dâhil edilen ispatların oranı uygulama öncesinde % 0,78 iken uygulama sonrasında bu oranın % 0,26’ya düşmesi bu durumu desteklemektedir. Bu ise öğretmen adaylarının hem matematiksel semboller hem de matematiksel kavramlar anlamında gelişim elde ettiklerini göstermektedir. Kontrol grubunda bu gösterge içerisinde değerlendirilen ispatların oranının uygulama öncesinde % 0,6 olup uygulama sonrasında bu oranın % 1,19 oranına yükselmesi ise öğrenme ortamının farklılaşmasından meydana gelen bir değişim olabileceğine işaret etmektedir. Dolayısıyla genel anlamda İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yürütülen uygulamaların matematik dilini kullanma bakımından gelişim elde edilmesinde etkili olduğundan söz edilebilir.

## 5. 2. Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Sürecinde Ürettikleri Varsayımların Değişimine Yönelik Tartışma

Araştırmanın alt problemlerinden biri, İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının varsayımda bulunmalarına etkisinin incelenmesidir. Bu probleme cevap bulabilmek adına öğretmen adaylarının uygulamalar sonrasındaki varsayımları doğruluk ve matematik diline bağlı olarak değerlendirilerek deney ve kontrol grupları arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu karşılaştırmaları yapmak için kullanılan Ki-Kare testi sonucunda varsayım üretme sayılarının deney ve kontrol grubu ile ilişkili olmadığı belirlenmiştir. Deney grubunun varsayım üretme sayısının 222, kontrol grubunun ise 227 olması birbirine oldukça yakın olduğunu göstermekle birlikte bu durumu desteklemektedir. Grupların öğrenme ortamlarının farklı olmasına rağmen bu tür bir sonucun ortaya çıkması, deney grubunun varsayımda bulunmak için ispat sürecinde GeoGebra yazılımını kullanmasına bağlı olabilir. Çünkü öğretmen adaylarının ispat sürecinde geometrik yapı üzerinde ölçümler ve testler yaparak varsayımda bulunmaya alışkın olmaları onların daha az varsayım üretmelerine sebep olmuş olabilir. Yapılan çalışmaların çoğu, dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı ve keşfetmeye olanak sağlayan ortamların varsayımda bulunmayı geliştirdiğini ifade etmektedir (Arcavi ve Hadas, 2000; Couco ve Golderberg, 1996; Furinghetti, Olivero ve Paulo, 2001; Santos-Trigo ve Espinosa-Perez, 2002; Yerushalmy, 1987). Bununla birlikte öğrenme ortamının tasarımında dinamik geometri yazılımlarından yararlanılmasına rağmen öğrencilerin varsayımda bulunmalarına yönelik gelişimin elde edilemediği çalışmalar da mevcuttur (Bell, 1998; Elchuck, 1992). Ancak Elchuck (1992) yaptığı çalışmada yazılım üzerinde daha çok zaman harcayan öğrencilerin varsayımda bulunma bakımından daha iyi olduğu sonucuna ulaşması ile birlikte geometrik kavramları öğrenme ve öğretmede mümkün olduğu sürece dinamik geometri yazılımlarından yararlanılmasını önermiştir. Ayrıca geometrik bir araç kullanımı ile varsayımda bulunma çalışmaları yapan öğrencilerin varsayım üretmelerine yönelik yapılacak bir değerlendirmenin bilgisayar kullanılmayan bir ortamda yapılmaması gerektiğini ifade etmiştir. Buna dayalı olarak varsayımda bulunma testinin yapıldığı yerin, öğretmen adaylarına dinamik geometri yazılımını kullanma fırsatı veren bir ortamda gerçekleşmemesinin bu durum üzerinde etkili olduğundan söz edilebilir.

Varsayımların doğruluğu ile ilgili kategorilere yönelik dağılımın deney ve kontrol grubu içinde ilişkili olup olmadığını belirlemek için yapılan Ki-Kare testi sonucunda bu kategorilerin her bir grup içinde ilişkili olduğu belirlenmiştir. Ancak Ki-Kare testi sonucuna göre doğruluk boyutundaki kategorilerin dağılımı bakımından deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir farkın olmadığı belirlenmiştir. Ayrıca doğruluk boyutunda yer alan her bir kategori incelendiğinde bu kategoriler içerisinde değerlendirilen varsayımların oranlarının deney ve kontrol gruplarında yakın değerlere sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu durumlar dikkate alındığında öğretmen adaylarının ürettiği varsayımların doğruluğunun gruplara bağlı olmadığı anlaşılmaktadır. Gruplar arasında varsayımların doğruluğu bakımından bir farklılaşmanın olmaması, varsayımda bulunma testinin deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının alışkın olduğu dinamik geometri yazılımlarını kullanabilecekleri bir ortamda gerçekleşmemesine bağlı olabilir.

Doğruluk boyutunda yer alan kategorilerden biri olan VD3 kategorisine (*Doğru varsayım üretme*) dâhil edilen varsayımlar deney grubunda % 29,94 oranında ortaya çıkmıştır. Bu ise öğretmen adaylarının çoğunlukla doğru varsayımlar üretebildiğini göstermektedir. Varsayımların çoğunlukla doğru olması, öğrenme ortamında varsayımda bulunmaya yönelik yapılan çalışmalara bağlı olabilir. Bu bakımdan öğrenme ortamında öğretmen adaylarının varsayımda bulunmak için genellikle GeoGebra yazılımı üzerinde incelemeler yapmaları, var olan matematiksel ilişkileri belirlemek adına onlara bir bakış açısı kazandırmış olabilir. Haralambos (2000) öğrenme ortamında keşfetme çalışmalarının yürütülmesinin anlamayı kolaylaştırarak ispat öğretimini etkili hale getirdiğinden bahsederek bu durumun etkili olabileceğine işaret etmektedir. Öğretmen adaylarının öğrenme ortamında varsayım kavramının tanımına yönelik bilgiler edinmeleri de doğru varsayımlar üretmeleri üzerinde etkili olduğundan bahsedilebilir. Başka bir ifade ile bu kavrama yönelik zihinlerinde bir şema oluşması, kavramla ilişkili olan davranışları sergilemelerine yardımcı olduğu düşünülmektedir. Ancak kontrol grubunda bu kategori içerisinde değerlendirilen varsayımlar % 28,12 oranında ortaya çıkarak üretilen varsayımların çoğunluğunu doğru varsayımların oluşturduğu belirlenmiştir. Bu ise doğru varsayım üretme bakımından gruplar arasında pek fazla bir değişimin olmadığını göstermektedir. Dolayısıyla kontrol grubunda yapılan öğretimde yürütülen uygulamaların da varsayımda bulunmaları üzerinde etkili olduğu anlaşılmaktadır. Grupların doğru varsayım üretmelerinin yakın oranlarda ortaya çıkması, varsayımda bulunma testinin kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının öğretim içerisinde varsayım üretme çalışmalarını yaptıkları koşullarda gerçekleştirilmesine bağlı olabilir. Ayrıca klinik mülakatlardan elde edilen sonuçlara göre deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının matematiksel ilişkinin varlığından emin olmadığı sürece bu ilişkiyi varsayım olarak ifade etmemelerine de dayalı olabilir. Bir bakıma herhangi bir yazılım üzerinde matematiksel ilişkiyi araştırmaya yönelik çalışmalar yapamamalarına bağlı olarak ispat yapma ihtiyacı duymaları bu durum üzerinde etkili olabilir.

Varsayımın doğruluğu ile ilgili kategorilerden VD2 (*Varsayımını özel bir durumu ele alarak üretme*) içerisinde değerlendirilen varsayımların oranı deney grubunda % 25,75 olmak üzere VD3 kategorisinden sonra gelen en yüksek oran olduğu görülmüştür.

Dolayısıyla öğretmen adaylarının doğru varsayımlar ürettiği durumlardan sonra özel durumları ele alarak ifade ettikleri varsayımların çoğunlukta olduğu anlaşılmaktadır. Bunun sebebi, deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı üzerinde geometrik yapı oluşturmaları ile birlikte farklı durumlar üzerinde incelemeler yapmalarına bağlı olabilir. Ancak kontrol grubunda da VD3 kategorisinde değerlendirilen varsayımlardan sonra % 27,48 oranla VD2 kategorisinin geldiği görülmüştür. Her iki grupta da bu tür bir durumun gerçekleşmesi ve hatta deney grubundan biraz daha fazla bir orana sahip olması, varsayım üretemedikleri durumlarda özel bir durumu ele alarak herhangi bir varsayıma ulaşmalarının daha kolay olmasına bağlı olarak gerçekleşmiş olabilir. Bir bakıma özel bir durumu zihinlerinde daha kolay canlandırabilecek olmaları varsayım üretirken bu durumları ele almalarına sebep olmuş olabilir.

Temel düzeyde bilinen bir önermeyi varsayım olarak yeniden ifade etme (VD0b) göstergesine yönelik durumlara deney grubunda % 14,67; kontrol grubunda ise % 10,54 oranında rastlandığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının var olan bütün ilişkileri belirtme ihtiyacı duymaları, bilinen ya da bilinmeyen önerme ayrımı yapmaksızın bu tür ifadelerde bulunmalarına sebep olmuş olabilir. Bununla birlikte özellikle de deney grubunda olmak üzere ifade ettikleri temel düzeyde bilinen bir önermenin doğruluğunu kesin bir şekilde bilmelerine de bağlı olabilir. Bu durum öğretmen adaylarının VBT üzerine yapılan klinik mülakatlardaki ifadeleri ile desteklenmektedir. Örneğin ÖA22 kodlu öğretmen adayının klinik mülakat esnasında "*…Kesin bir şeyler bulup ona göre varsayımda bulunmak istedim…*" şeklinde bir ifadede bulunması bu durumu açıkça ortaya koymaktadır. Dolayısıyla kesin olarak doğruluğundan emin olmaları durumunda varsayımlarını ifade etme gereği duymaları, temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade etmeleri üzerinde etkili olmuş olabilir.

Deney grubunda VD1 (*Yanlış bir varsayım üretme*) kategorisi içerisinde değerlendirilen varsayımların % 10,78 oranına sahip olduğu belirlenerek diğer kategoriler arasında en az rastlanan durum olduğu görülmüştür. Bu bakımdan öğretmen adaylarının genellikle yanlış varsayımda bulunmaktan kaçındıkları belirtilebilir. Kontrol grubunda ise VD1 kategorisine dâhil olan varsayımların % 16,93 oranına sahip olduğu ve en az karşılaşılan durum olmadığı tespit edilmiştir. Bu durum gruplar arasında farklılaşmanın öğrenme ortamında yapılan uygulamalardan kaynaklanabileceğini göstermektedir. Deney grubunda her ne kadar varsayımlarına dinamik geometri yazılım üzerinde ulaşsalar da ispat yapma sonucunda matematiksel ilişkinin varlığından söz edilebileceği düşüncesini kazanmaları bu durum üzerinde etkili olabilir. Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının destekleyici durumlar bularak doğru olduğunu düşündükleri matematiksel ilişkileri varsayım olarak ifade etmek istemeleri yanlış varsayım üretmelerini engellemiş olabilir.

Öğretmen adaylarının klinik mülakat esnasında sıklıkla varsayımda bulunmaları için destekleyici durumlar bulmalarının gerektiğini ifade etmeleri bu durumu desteklemektedir. ÖA4 kodlu öğretmen adayının "…*İspatını yapmayınca ilişkiyi belirtmek anlamlı gelmiyor*..." şeklinde bir ifadede bulunması destekleyici ve kesin bilgiler bulma durumunda varsayımda bulunabileceğini ima etmesi bu durumu destekleyen örneklerden biridir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının genellikle varlığından emin oldukları ilişkileri varsayım olarak ifade ettiklerinden söz edilebilir.

Öğretmen adayları VBT'de yer alan soruların geneline yönelik doğru ya da özel bir duruma uygun varsayımlar üretmelerine rağmen bazı sorulara yönelik bu durumların geçerli olmadığı görülmüştür. Bu sorular için doğruluk boyutunda yer alan VD2 ve VD3 kategorilerine yönelik varsayımların oranlarının toplamının diğer kategorilerin toplam oranlarına göre azınlıkta olması bu durumu desteklemektedir. VD2 ve VD3 göstergelerinde yer alabilecek varsayımların üretilmediği sorularda, öğretmen adayları geometrik şekilleri çizerken izdüşüm alma, diklik merkezi ve çevrel çemberin merkezinin yerini belirleme gibi sorunlarla karşılaşmışlardır. Dolayısıyla geometrik şekli zihinlerinde canlandırıp bir taslağını oluşturamamaları ya da özellikle deney grubunda olmak üzere dinamik geometri yazılımının yokluğuna bağlı olarak doğru varsayımlar üretememiş olabilirler. Bu bakımdan deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının özellikle de bu sorular için bir dinamik geometri yazılımına ihtiyaç duyduklarından bahsedilebilir.

Öğretmen adaylarının ürettikleri varsayımlar, matematik dili boyutunda değerlendirildiğinde yapılan Ki-Kare testi sonucunda matematik dilinin kullanımı ile ilgili kategorilerin her bir grup içinde ilişkili olduğu belirlenmiştir. Ancak Ki-Kare testi sonucuna göre matematik dili boyutunda yer alan kategorilerin dağılımı bakımından deney ve kontrol grubu arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılığın olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca matematik dili boyutunun kategorilerine dâhil edilen varsayımların oranları büyüklüklerine göre sıralandığında deney ve kontrol gruplarında bu sıralamanın aynı olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının varsayımlarını ifade ederken kullandıkları matematik dilin gruplara göre bir farklılık göstermediği belirtilebilir. Her iki grubun yer aldığı öğrenme ortamlarında yürütülen uygulamalarda matematik dilinin uygun bir şekilde kullanılması ve matematik dilinin kullanımına yönelik vurgulamalar yapılması gruplar arasında farklılık oluşmamasına sebep olmuş olabilir. Bunun yanı sıra deney grubunda gerek etkinliğin sonunda gerçekleştirilen ispata yönelik sunumlarda gerekse ispat değerlendirme çalışmalarında matematik dilinin kullanımına yönelik vurgu yapılması, öğretmen adaylarının daha çok ispat yazarken matematik diline dikkat etmesine yol açarak varsayımları ifade ederken bu dikkati göstermemelerine sebep olmuş olabilir.

Varsayımları ifade ederken uygun bir matematik dili kullanmalarının gruplara bağlı olup olmadığını belirlemek için yapılan Ki-Kare testi sonucunda istatistiksel olarak anlamlı bir farklılığın olmadığı belirlenmiştir. Bu ise varsayımları uygun bir dil ile ifade etmenin gruplar ile ilişkili olmadığını göstermektedir. Bununla birlikte deney ve kontrol grubunun ürettikleri varsayımların matematik dili boyutunda yer alan VMD2 (*Varsayımın uygun bir dille ifade edilmesi*) kategorisine yönelik dağılımın benzer olduğu belirlenmiştir. Bu bakımdan varsayımların uygun bir dil ile ifade edilmesinin gruplara göre değişiklik göstermediğinden söz edilebilir. Grupların yer aldığı öğrenme ortamlarında matematiksel ifadelerin kullanılmasına özen gösterilmesi herhangi bir farklılaşmanın oluşmamasına yol açmış olabilir.

Matematik dilini kullanma bakımından VMD2 kategorisi içerisinde değerlendirilen varsayımların oranının deney grubunda % 51,93 ve kontrol grubunda % 45,86 olduğu belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının varsayımlarını çoğunlukla uygun bir dille ifade ettiklerini göstermektedir. Dolayısıyla varsayımları ifade ederken uygun bir dil kullandıkları durumlar bakımından pek fazla bir değişim görülmemiştir. Deney grubunun yer aldığı öğrenme ortamında matematik diline yönelik yapılan vurgulamalar ve ispat değerlendirme çalışmalarında inceleme yaparken ölçütlerinden birinin matematik dilinin kullanımına yönelik olmasına bağlı olarak varsayımlarını çoğunlukla uygun bir dil ile ifade etmiş olabilirler. Ancak gruplar arasında çok fazla bir farklılığın olmaması, ispat ya da varsayımın yazımında matematik dili kullanımı değişmese de öğrenme ortamında ispat yazmaya yönelik vurgulamaların daha fazla yapılmasına bağlı olabilir. VMD2 kategorisinin göstergeleri incelendiğinde VMD2a (*Sembolik bir dil kullanırken matematiksel sembollerin tamamen doğru bir şekilde ifade edilmesi*) göstergesine dâhil edilen varsayımların oranı % 34,13 ve VMD2b (*Sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimelerin tamamen uygun bir şekilde tercih edilmesi*) göstergesine dâhil edilenlerin oranı ise % 17,8 olarak belirlenmiştir. Kontrol grubunda ise VMD2a göstergesi içerisinde değerlendirilen varsayımların oranı % 28,66 ve VMD2b göstergesi içerisinde değerlendirilenlerin ise % 17,2 oranına sahip olduğu görülmüştür. Dolayısıyla her iki grupta da öğretmen adaylarının matematiksel sembollerin doğru bir şekilde kullanılmasına daha çok dikkat ettikleri anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmen adaylarının matematik dilinin uygun bir şekilde kullanımını matematiksel kavramlardan daha çok matematiksel sembollerin kullanımına özen gösterme olarak algılamalarına bağlı olarak ortaya çıkabilir.

Varsayımlarını ifade ederken kullandıkları matematik dili bakımından VMD1 göstergesine dâhil edilen varsayımların oranının deney grubunda % 29,38 ve kontrol grubunda % 37,26 olduğu görülmüştür. Bu ise varsayımlarını uygun bir dil kullanarak ifade etmeleri dışında en çok kısmen uygun bir dil kullandıklarını göstermektedir. Ayrıca deney grubunun kontrol grubuna göre sembolik ya da sembolik olmayan dil kullanımında yer alan eksikliklere ya da hatalara biraz daha fazla dikkat ettiği anlaşılmaktadır. Bu durum, deney grubunun yer aldığı öğrenme ortamında ispat değerlendirme çalışmalarında matematik dilini kullanma bakımından da inceleme yapılması gerektiğine yönelik vurgulamalara ve bunları uygulamaya geçirme fırsatı bulmalarına bağlı olarak ortaya çıkmış olabilir. Varsayımlarını ifade ederken kısmen uygun bir dil kullanımını gerçekleştirdikleri durumların çoğunun her iki grupta da VMD1c (*Sembolik olmayan bir dil kullanırken hangi geometrik kavramın betimlendiğinin belirsiz olması*) göstergesine ait olduğu belirlenmiştir. Matematik dili boyutunda yer alan kategoriler arasında deney grubunda VMD1 kategorisi içerisinde % 21,96 ve kontrol grubunda ise % 32,17'lik bir orana sahip olması bu durumu göstermektedir. VMD1 kategorisi içerisinde bu göstergenin grupların her ikisinde de büyük bir çoğunluğa sahip olması, öğretmen adaylarının soruda varsayım üretilmesi gereken ifadelerin yer almasına bağlı olarak varsayımlarını ifade ederken anlaşılacağı düşüncesinin ağır basmasıyla tekrar belirtme gereği duymamalarına dayalı olabilir. Ayrıca çizdikleri geometrik şekilde isimlendirmelerine bağlı olarak neresinden bahsedildiğinin şekil üzerinde görülebileceği düşüncesiyle yeniden belirtmek istememiş olabilirler.

### 5. 3. İSMAT Modelinin Aşamalarının Değerlendirilmesi ile İlgili Tartışma

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarının ispat yapma ve varsayım üretmelerini geliştirmek amacıyla öğrenme ortamı İSMAT Modelinin aşamalarına göre tasarlanmıştır. Bu kısımda öğrenme ortamında İSMAT Modeli aşamalarının gerçekleşmesi ve bu aşamalarda yaşanan zorluklara göre tartışılmıştır.

İSMAT Modelinin aşamaları, öğretmen adayları tarafından ispat sürecinde genel anlamda doğrusal olarak izlenmesine rağmen aşamalar arasında geçişler yaptıkları da görülmüştür. Öğretmen adaylarının yapı oluştururken problem durumuna başvurması, ispat için plan yaparken buldukları ilişkinin yanlış olduğunu fark edip varsayım ifadesi üzerine tekrar düşünmesi gibi aşamalar arasında geçişlerde bulunmaları bu durumu destekleyen örneklerdir. Bu model tanımlanırken aşamalar arasında ileri ya da geri geçişler yapılmasına fırsat tanıyacak şekilde dinamik bir yapıya sahip olmasına yönelik var olan düşüncenin bu süreç içerisinde gerçekleştiği açıkça görülmektedir.

Öğretmen adaylarının ilerleyen uygulama haftaları ile birlikte modelin bazı aşamalarını es geçerek diğer aşamalara yönelik çalışmalar yaptıkları görülmüştür. Ancak aşamalardan bazılarını es geçmeleri, bu aşamalara yönelik davranışlar sergilemedikleri anlamına gelmemektedir. Bu aşamalara yönelik davranışları, bir bakıma gizil olarak sergiledikleri ifade edilebilir. Çünkü öğretmen adaylarının uygulamalarda kazandıkları deneyimlere bağlı olarak geometrik yapıyı oluşturup bu yapı üzerinde ölçüm ve testler yapmaksızın problem durumu ve geometrik şekil üzerinde düşünerek varsayımda bulunmaları bu durumu destekler niteliktedir. Bunun dışında herhangi bir varsayımda bulunmayıp doğrudan ispatlama aşamasına geçerek ispat aracılığıyla matematiksel ilişkiye ulaşan öğretmen adayları olduğu da görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının var olan matematiksel ilişkiyi görmeden de ispat yapabilecek kadar deneyim sahibi olduklarını göstermektedir. Bir bakıma varsayım ifadesini belirtmeseler de zihinlerinde var olan ilişkiye dair bir silüet oluşturarak ispata başladıklarının da bir göstergesidir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat sürecinde modelin her bir aşamasından geçtiklerinden söz edilebilir. Ayrıca her bir aşamanın gerektirdiği eylemleri davranış haline getirdikleri belirtilebilir.

İSMAT Modelinin aşamalarından biri olan problem durumunu anlama aşamasının genellikle yapı oluşturma aşaması ile eş zamanlı olarak gerçekleştiği görülmüştür. Başka bir ifade ile yapıyı oluştururken verilenler hakkında bilgi sahibi olmak amacıyla problem ifadesine başvurmuşlardır. Ayrıca geometrik yapıyı tam anlamıyla oluşturamadıkları ya da yapıyı oluştururken verilenlere yönelik yanlış algılamalarını telafi etmek amacıyla çoğu kez bu aşamaya geri dönmüşlerdir. Aşamaya yönelik davranışlar ise problemde geometrik şeklin yer almamasına bağlı olarak taslağını çizme ya da verilenleri taslak üzerinde yerleştirme şeklinde ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla bu aşama genel olarak yapı oluşturma aşaması ile eş zamanlı gerçekleşse bile aşamanın göstergelerine yönelik davranışların sergilendiğinden bahsedilebilir.

Uygulamaların ilk haftalarında yapı oluşturma aşamasında öğretmen adaylarının genel olarak problemde yer alan geometrik şeklin dinamik yapısını oluşturmakta zorluk yaşadıkları görülmüştür. Bu tür durumları, genellikle ilk kez oluşturacakları geometrik şekiller için yaşadıkları belirlenmiştir. Ancak ilerleyen haftalarda yapı oluşturmaya yönelik yaşadıkları zorlukların üstesinden gelebilecek şekilde geometrik temellere dayanan önerilerde bulunabilmişlerdir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının yapı oluştururken öğrendikleri geometrik bilgileri bu sürece dâhil etme ve kullanabilme gibi deneyimleri öğrenme ortamında kazanma fırsatı bulmalarının yaşadıkları zorlukları aşmalarına yardımcı olduğundan bahsedilebilir. Uygulamalar boyunca öğretmen adaylarının çoğunlukla geometrik yapı oluşturmayı tercih etmeleri de bu konuda deneyim kazandıklarına işaret etmektedir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının uygulamalar esnasında genellikle GeoGebra yazılımından yararlandığı belirtilebilir. Yazılımı kullanım amaçlarının ise genellikle matematiksel ilişkiyi araştırmak olduğu görülmüştür. Dinamik geometri yazılımlarının geometrik şekiller çizip örüntüler oluşturma ve bunlar arasındaki ilişkileri inceleme fırsatı tanımasına bağlı olarak ortaya çıktığı belirtilebilir. Güven (2002) de dinamik geometri yazılımlarının keşfetme, varsayımda bulunma, test etme, reddetme, formülize etme ve açıklama olanağı sunduğunu belirtmesi bir ilişkiyi araştırmak için kullanılmasının beklenen bir durum olduğuna işaret etmektedir. Dolayısıyla bu aşamanın keşfetme girişiminde bulunma ve ispat yapmaya yönelik ipucu yakalama gibi fırsatlar tanıyan uygulamalar yapılmasına olanak sağladığından bahsedilebilir.

Oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamasında öğretmen adaylarının çoğunlukla çeşitli ölçümler ve testler yaparak matematiksel ilişkiye ulaştıkları belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının genellikle GeoGebra yazılımını kullanıp yapı üzerinde birçok denemeler yaparak matematiksel ilişkilere ulaştıklarından söz edilebilir. Öner (2006) de dinamik geometri yazılımlarının yapı üzerindeki nesneleri sürükleyip hareket ettirme ve görsel olarak çeşitli kontroller yapma gibi özelliklere bağlı olarak denemeler yapmaya imkân tanıdığından bahsederek bu yönde bir kolaylık sağladığını belirtmiştir. Uygulamalar ilerledikçe yaptıkları ölçümlerde azalmalar olduğu görülmüştür. Bu durum aşamanın gerektirdiği davranışları yerine getirebilmelerinin varsayımda bulunma bakımından deneyim kazanmaları ve bakış açılarının genişlemesi yönünde etkili olduğundan söz edilebilir. Bunun yanı sıra bir ya da iki ölçüm sonucuna göre matematiksel ilişkiyi belirlemeye başlasalar da dinamik geometri yazılımının sürükleme özelliğinden yararlanarak farklı durumlarda geçerli olup olmadığına yönelik kontrol yapmaları sonucunda varsayımda bulundukları belirlenmiştir. Goldenberg ve Cuoco (1998) dinamik geometri yazılımının en bilinen özelliklerinden sürüklemenin koşulları değiştirerek araştırmaya imkân sağladığını belirterek bu duruma dikkat çekmiştir. Kaput (1992) da tümevarıma dayalı bir yaklaşımla geometrik bilgilere ulaşmayı sağladığından bahsederek varsayımda bulunmayı kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu aşamada genel olarak GeoGebra yazılımının sağladığı bütün olanaklardan yararlandıklarından bahsedilebilir.

İSMAT Modelinin aşamaları, bireysel ve grup halinde çalışma esaslarına dayalı olarak tanımlanmıştır. Bu aşamalar dâhilinde öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarından biri olan GeoGebra yazılımını kullanma fırsatı bulması, bireysel olarak çalışmalarına imkân sağlayan durumlardan biridir. Ancak öğretmen adayları gerek yapı oluştururken gerekse oluşturulan yapı üzerinde çalışırken geometrik yapının alt figürleri ve ölçüm sonuçlarının gösterdiği durumlara yönelik aralarında bilgi alışverişleri gerçekleşmektedir. Böylece mevcut olan durumu anlama ve matematiksel ilişkiye ulaşma anlamında aralarında sosyal bir etkileşim oluşabilmektedir. Bununla birlikte hem kendilerinin hem de grup arkadaşlarının ispat süreci içerisinde aktif olması da sağlanabilmektedir. Dolayısıyla bu süreç içinde dinamik geometri yazılımının kullanılması her ne kadar öğrenmeyi bireysel hale getirse de İSMAT Modelinin aşamaları dâhilinde gerçekleştirilen davranışlar bireysel ve grup halinde yapılan çalışmaları bütünleştirebilmektedir.

Beşinci uygulama haftasından sonra İSMAT Modelinin aşamalarına yönelik yönergelerin yer almadığı çalışma yapraklarının uygulanmasıyla birlikte genellikle öğretmen adaylarının geometrik yapının farklı ve uç durumlarını incelemek için herhangi bir şey yapmadıkları görülmüştür. Ancak yapı üzerinde sürüklemeler yapıp geometrik şeklin farklı durumlarını görme fırsatı bularak matematiksel ilişkiye ulaşmaya çalıştıkları incelemeler bu kapsamın dışında ele alınmıştır. Çünkü öğretmen adaylarının sürükleme işlemi ile yaptıkları sadece farklı ölçümleri elde etmek içindir. Geometrik yapının farklı ve uç durumları için ilişkileri test etme ile problemde verilen koşulların değiştirilmesi sonucunda yapıyı tekrar oluşturmayı gerektiren durumlar kastedilmektedir. Öğretmen adaylarının bu yönde bir inceleme yapmamaları problemin içeriğinden kaynaklanabilir. Bununla birlikte yapılan mülakatlara dayalı olarak öğretmen adaylarının bir an önce ispat adımlarını belirleyerek ispatlarını tamamlama düşüncesiyle farklı durumları inceleme gereksinimi duymamaları da bu durum üzerinde etkili olabilir.

Uygulamalar ilerledikçe öğretmen adaylarından bazılarının yapı üzerinde incelemeler yaparak varsayımda bulunmak yerine problem durumu ve geometrik şekil üzerinde düşünerek varsayımlarına ulaşmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının yapı oluşturmayı tercih etmemelerine rağmen bu süreç içinde matematiksel düşünme anlamında kazanımlar elde ettiklerini göstermektedir. Dolayısıyla öğrenme ortamındaki uygulamalara bağlı olarak öğretmen adaylarının farklı bakış açılarından bakarak düşünme yelpazelerini genişlettiklerinden bahsedilebilir. Bu bakımdan oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma aşamasının doğasına uygun eylemleri yerine getirmelerinin matematiksel düşünme anlamında gelişim elde etmelerine yardımcı olduğundan söz edilebilir.

İlişkiyi önerme olarak ifade etme aşamasında uygulamaların başında öğretmen adaylarının hipotez ve hüküm kavramlarını karıştırmalarına bağlı olarak zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Ancak uygulamaların ilerlemesi ile birlikte kavramlar arasında ayrım yaparak ilişkiyi önerme olarak ifade edebildikleri görülmüştür. Birkaç uygulama sonrasında elde edilen bu durumun, öğrenme ortamında hipotez ve hüküm kavramlarının tanımlarının uygulamalardaki örnekler ile ifade edilerek verilmesinin bu kavramları özümsemeleri üzerinde etkili olduğu düşünülmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarından bazılarının hipotez ve hüküm kavramlarının tam anlamıyla ayrımını yapamadıkları durumlarda ise grup çalışmasının önemli katkılar sağladığından bahsedilebilir.

İspatlama aşamasında özellikle ilk uygulamada olmak üzere buldukları matematiksel ilişkinin ispatını nasıl yazacaklarına yönelik zihinlerinde bir yapı olmadığından çeşitli zorluklar yaşamışlardır. Bazı öğretmen adaylarının bu aşamaya kadar yaptıklarını ispat olarak nitelendirdikleri bile olmuştur. Başka bir ifadeyle yapı üzerinde yaptıkları ölçümler ve testler sonucunda matematiksel ilişkiye ulaşmaları ile bu ilişkinin ispatını yaptıklarını düşünmüşlerdir. İspat adımlarını belirleyebilen öğretmen adaylarının ise özellikle ilk uygulamalarda olmak üzere bunları aktarmakta ve bu adımlara yönelik gerekçeler sunmada zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Ancak ilerleyen uygulama haftaları ile birlikte ispat olarak nitelendirdikleri durumlarda, ispat adımlarını belirlemede ve bu adımlara yönelik gerekçeler sunmada gelişimler elde ettikleri gözlemlenmiştir. Öğrenme ortamlarında etkinlikler sonunda yapılan sunumlar ve bu sunumlar esnasında gerek ispat adımlarını belirtme gerekse bu adımlara yönelik gerekçeler sunma bakımından yapılan vurgulamaların bu durumlar üzerinde etkili olduğu düşünülmektedir.

İspatın tutarlılığını inceleme aşamasının özellikle ilk uygulamalarda tam anlamıyla gerçekleşmediği görülmüştür. Bu durum, öğretmen adaylarının ispatı nasıl yazacaklarını bilememelerine bağlı olarak etkinliği tamamlama sürelerinin çok uzun olmasından kaynaklanarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca sadece sonuca bakarak ya da kendi izledikleri ispat adımlarına olan benzerliğe göre değerlendirmeler yapmaları da bu durum üzerinde etkili olmuştur. Ancak ilerleyen uygulama haftaları ile birlikte ispatlara yönelik değerlendirmeler yaparken dikkat ettikleri ölçütlerde artışlar meydana gelmiştir. Dolayısıyla daha geniş kapsamlı düşünerek değerlendirmeler yapmaları sonucunda bu aşamaya yönelik çalışmaları daha iyi bir şekilde gerçekleştirdiklerinden bahsedilebilir. Bunun sebebinin ispat değerlendirme çalışmalarını pekiştirecek şekilde etkinliklerin sonunda sunulan ispatların eksiklikleri ve hatalarının; izlenen ispat adımları, bu adımlara yönelik sunulan gerekçeler ve matematik dili bakımından belirtilmesi olabilir.

Son uygulamalara doğru ispatın tutarlılığını inceleme aşamasında gruplar arasında ispatların değiştirilmesiyle gerçekleştirilen ispat değerlendirme çalışmaları yerine grupların kendi ispatlarını değerlendirmeye başladıkları görülmüştür. Bir bakıma ispatın tutarlılığını inceleme aşamasının kapsamında bir değişiklik meydana gelmiştir. Son uygulamalardaki etkinliklerin İSMAT Modeli aşamalarını içeren yönergelere sahip olmaması bu durumun ortaya çıkmasında etkili olabilir. Ayrıca yapılan gözlemlere bağlı olarak öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların, diğerlerinin ispatları ile benzer olduğunu ve bunun sonucunda herhangi bir eksiklik ya da hatanın bulunamayacağı düşüncesiyle gruplar arasında ispat değerlendirme çalışmaları yapmadıkları tahmin edilmektedir.

İspatı formal hale dönüştürme aşamasının uygulamalar ilerledikçe ispatlama aşaması içerisinde gerçekleştiği görülmüştür. Başka bir ifade ile ispatların değerlendirilmesi sonucunda herhangi bir eksiklik ya da hatanın bulunmamasına bağlı olarak ispat üzerinde düzenleme yapılmasını gerektiren bir durumun oluşmaması sonucunda bu aşamanın ispatlama aşaması içerisinde yer aldığından bahsedilebilir. Bu bakımdan uygulamalar yapıldıkça öğretmen adaylarının ispat için gerekli olan bütün çıkarımları ifade etme ve bu çıkarımlara yönelik gerekçeler sunma anlamında geliştiğinden söz edilebilir.

İSMAT Modelinin aşamalarının bir matematikçinin izlediği adımlara benzemesi ile ispatın rolleri ve ispatın doğasında yer alan eylemleri yansıtması öğretmen adaylarının ispat sürecinde kendi matematik dünyalarını oluşturabilecekleri anlayışını kazanmalarına katkıda bulunduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bu durumun öğretmen adaylarının ispat sürecinde yaptıkları hataları ve kendi eksiklerini fark etmelerini sağlayarak anlayışlarında ve davranışlarında değişimler meydana getirdiği tahmin edilmektedir. Generazzo (2011) bireyler arasındaki etkileşim, matematiksel kaynaklar ve sınıfın yapısı, sınıfta kullanılan etkinlik türleri gibi durumların öğrencilerin anlamalarının gelişimi ve öğrenmelerini kolaylaştırmada önemli bir role sahip olduğunu belirterek öğrenme ortamında kullanılan modelin de ispat sürecinde etkili olabileceğine işaret etmektedir. Pulley (2010) daha özele indirgeyip sınıf kültürünün ispat sürecinde kullandıkları muhakemeleri ve sahip oldukları düşünceleri belirtme anlamında teşvik edici bir rol oynadığına vurgu yaparak bu durumu desteklemektedir.

### 5. 4. Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açılarındaki Değişime Yönelik Tartışma

Uygulama öncesi ve uygulama sonrasında yapılan mülakatlardan elde edilen veriler incelendiğinde öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik düşünceleri arasında bir değişimin olduğu belirlenmiştir. Uygulama öncesinde ispatın doğrulama, kavrama-anlama, kabul ettirme-nesnellik, açıklama, ilişkilendirme, sistemleştirme gibi 6 farklı role sahip olduğunu düşünürken uygulama sonrasında bunlara ek olarak genelleme, keşfetme ve somutlaştırma rollerinin olduğunu düşünmeleri bir değişimin olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarının sınırlarında bir genişlemenin olduğundan bahsedilebilir. Öğretmen adayları uygulama öncesinde daha sınırlı bir bakış açısına sahipken uygulama sonrasında daha geniş bir yelpazede düşünerek ispatın farklı rollere sahip olduğunu belirtmelerinde uygulamaların gerçekleştiği öğrenme ortamı etkili olabilir. Yapılan çalışmalar da öğrenme ortamının bilişsel ve kültürel olgulardan ayrı olamayacağını belirtmekle birlikte bu ortamda yaşanan deneyimlerin bireylerin ispata yönelik bakış açılarında değişiklik oluşturabileceğine vurgu yapmaktadır (Alibert, 1988; Almeida, 2000; Carlson, 1997; Lee, 1999; Tinto, 1999; Yoo, 2008). Bu bakımdan öğrenme ortamının ispatın doğasında yer alan keşfetme, varsayımda bulunma, ilişkilendirme, genelleme gibi eylemleri barındıran İSMAT Modeline göre tasarlanıp bu model dâhilinde uygulamaların yapılması, öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarında bir çeşitliliğin oluşmasına sebep olmuş olabilir.

Öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ispatın doğrulama rolüne sahip olduğuna yönelik ifadelerinin oranı % 31,16 iken uygulama sonrasında bu oran % 14,57'e düşmüştür. Bu ise öğretmen adaylarının matematiksel ispatın rollerinden birinin doğrulama olduğuna yönelik ifadelerde bulunma sıklıklarında bir azalma olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte bazı öğretmen adaylarının ispatın bu rolü ile ilgili herhangi bir fikir beyan etmediği belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının geleneksel olan bakış açılarında bir değişimin olduğundan söz edilebilir. Ayrıca ispatın kesin bilgiler elde edilmesini, hatalar ve şüpheleri ortadan kaldırmayı sağladığı gibi düşüncelerinde esneklikler oluştuğundan bahsedilebilir. Öğrenme ortamında doğrulama rolü dışında diğer ispat rollerini barındıran eylemlerin de gerçekleşmesi bu rol ile ilgili düşüncelerinde azalmalar meydana getirmiş olabilir.

Uygulama öncesinde ispatın açıklama rolüne sahip olduğu ile ilgili ifadelerin oranı % 17,39 iken uygulama sonrasında bu oran % 28,48'e yükselmiştir. Ayrıca öğretmen adayları uygulama öncesinde ispatın kavrama-anlama ve doğrulama rolleri ile ilgili ifadelere daha çok yer verirken uygulama sonrasında açıklama rolü ile ilgili ifadelere daha çok yer verdikleri görülmüştür. Bu durum göz önünde bulundurulduğunda ispat yaparak matematiksel bir ilişkinin neden doğru olduğu ve bu ilişkiye nasıl ulaşıldığının açıklığa kavuştuğuna yönelik düşüncelerinde artışlar olduğu ve her bir öğretmen adayının bu düşünceyi paylaştığı anlaşılmaktadır. Başka bir ifade ile öğretmen adaylarının ispatın açıklama rolüne yönelik düşüncelerinde bir pekişme ve artışın olduğu belirtilebilir. Bunun sebebi öğrenme ortamında her bir ispat adımı için gerekçeler sunulması ve ulaşılan sonuçların nasıl ortaya çıktığının açıklanmasının önemli olduğuna yönelik vurgulamaların yapılması olabilir. Bu vurgulamalar, öğretmen adaylarının ispatın matematiksel bilgiler arasında ilişkilendirmeyi sağladığına yönelik düşüncelerinin gelişiminde de etkili olabilir. Çünkü ispat adımlarının arasında bir boşluk oluşturmamak adına gerekçelerin ifade edilmesi gerektiğinin özellikle belirtilmesi ilişkilendirme rolünün öğretmen adaylarının zihinlerinde oluşmaya başlamasında etkili olmuş olabilir.

İspatın kavrama-anlama ve kabul ettirme-nesnellik rollerine sahip olduğunu belirtme sıklıklarında bir azalma olmasına rağmen uygulama sonrasında her bir öğretmen adayının bu rollerin varlığından söz etmeye devam ettikleri belirlenmiştir. Genel anlamda bireylerin ispat kavramı ile ilgili insanları ikna etme, bilimsel bilginin oluşumu ve bilgilerin kalıcılığını sağlama gibi algılara sahip olması, uygulama öncesinde öğretmen adaylarının da bu tür düşüncelere sahip olmasında etkili olmuş olabilir. Ancak uygulama sonrasında bu rollere yönelik düşüncelerin devam etmesi, öğrenme ortamında öğretmen adaylarının ispat yapmaları sonucunda varsayımlarının kabul gördüğüne yönelik bir anlayışın yerleşmesi bu düşüncelerinde pek fazla bir değişimin oluşmamasına sebep olmuş olabilir.

İspat yapmanın; tanım, teorem ve aksiyomların tümdengelim sistem içinde düzenlemeyi sağladığını düşünen öğretmen adaylarının sayılarında bir artış olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla ispatın rollerinden birinin de sistemleştirme olduğu düşüncesini paylaşan öğretmen adaylarında bir artış olduğu açıkça ortaya çıkmaktadır. Bu artışın olmasında öğrenme ortamında uygulamalar boyunca ispat için gerekli olan tüm çıkarımları belirli bir sıraya göre adımlar halinde yazmaları gerektiğinin birçok kez belirtilmesi etkili olabilir. Ayrıca etkinliklerin sonunda bütün çıkarımların gerekçeleri ile birlikte belli bir sıraya göre ifade edildiği ispatlara yönelik örneklerin sunumunun yapılması da öğretmen adaylarının ispatın sistemleştirme rolüne yönelik düşüncelerinin artmasına sebep olmuş olabilir.

Uygulama sonrasında öğretmen adaylarının ispatın rolleri arasında genellemeyi de ifade etmeye başladıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra bütün öğretmen adaylarının ispatın genelleme rolüne sahip olduğu düşüncesini paylaştığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları bir matematiksel ilişkinin varlığından söz edebilmek için sadece belirli değerlere bakılmasının yeterli olmadığını, bu ilişkiye yönelik ispatın yapılmasıyla bütün değerler için geçerli olduğunun gösterilebileceğini belirterek bu rol ile ilgili düşüncelerini ifade etmişlerdir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının bu düşünceye sahip olmasında öğrenme ortamında bir matematiksel ilişkinin ispatını yapmak için sadece özel durumların incelenmesinin yeterli olmadığına yönelik örneklere yer verilerek farkındalık kazanmalarının etkili olduğu düşünülmektedir. Goetting (1995) deneysel verilerle birlikte yapılanları ispat olarak nitelendiren öğrenciler olsa bile sınıf içerisinde bu tür örneklere yer verilerek bu durumun üstesinden gelinebileceğini belirtmiştir. Bu ifadesi ile öğrenme ortamında bu tür örneklere yer verilmesinin özel durumlar ele alınarak yapılanların tam anlamıyla bir ispat olmadığı düşüncesini kazanmalarını sağladığına vurgu yapmıştır. Dolayısıyla bu durum öğrenme ortamında yapılanların öğretmen adaylarının ispat ile ilgili düşüncelerinde değişiklikler oluşturabileceğine işaret etmektedir.

Öğretmen adaylarından bazılarının uygulama sonrasında ispatın yeni bilgilerin ortaya çıkmasını sağladığına yönelik ifadelerde bulunmaya başladıkları belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının keşfetmeyi de ispatın rolleri arasında belirtmeye başladıklarını göstermektedir. Öğrenme ortamında yapılan etkinliklerin sonunda farklı ispat yolları tercih ederek sonuca ulaşan her bir grubun sunum yapmasına bağlı olarak ispatın keşfetme rolüne sahip olduğuna yönelik düşüncelerinin ortaya çıktığı tahmin edilmektedir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarından sadece birinin uygulama sonrasında ispatın somutlaştırma rolüne sahip olduğunu belirttiği görülmüştür. Öğretmen adayının ispatı yapılan bir matematiksel ilişkinin daha anlamlı olacağını düşünmesine bağlı olarak bu durumun ortaya çıktığı tahmin edilmektedir.

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

## 6. 1. Sonuçlar

Bu çalışma ile İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde nasıl bir farklılık oluşturduğunun incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat yapma ve varsayımda bulunmalarını nasıl etkilediği, ispatın rollerine yönelik bakış açılarında nasıl bir değişime yol açtığı hakkında detaylı bilgi verilmiştir. Bu doğrultuda çalışmada elde edilen sonuçlar tasarlanan öğrenme ortamının ispat sürecinde muhakeme bulunma ve matematik dilini kullanma bakımından nasıl bir etki oluşturduğu, varsayımların doğruluğu ve varsayımları ifade ederken matematik dilini kullanmaya yönelik gelişimi nasıl etkilediği ve ispatın rollerine yönelik bakış açılarında nasıl bir değişim meydana getirdiği bağlamlarında ele alınmıştır.

### 6. 1. 1. İSMAT Modeline Göre Tasarlanan Öğrenme Ortamının Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Muhakemede Bulunmalarına Olumlu Yönde Etki Etmiştir.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecindeki davranışları grup olarak, bireysel ve mevcut uygulamalara müdahale edilmeyen öğrenme ortamında yer alan öğretmen adayları ile karşılaştırılarak muhakemede bulunmaları ile ilgili gelişimleri incelenmiştir. Araştırma sonucunda İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yer alan deney grubu ile mevcut uygulamalarına müdahale edilmeyen kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ön test puanları kontrol altına alınarak gerçekleştirilen ANCOVA analizi sonucuna göre son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmuştur. Bu durum öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmaları ile ilgili bir gelişimin sağlanmasının İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamı ile ilişkili olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yapılan uygulamaların öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunma başarıları üzerinde etkili olduğu anlaşılmaktadır. Muhakeme sürecinde yer alan kategoriler dikkate alındığında ise MHS1 kategorisine yönelik ispatların çoğunlukta olduğu görülse de üst düzeydeki kategorilerde (MHS2, MHS3, MHS4) önemli artışların olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat adımlarını belirleme, bu adımların sıralamasına karar verme ve bu adımlara yönelik gerekçeler sunma anlamında bir gelişimin olduğu belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının ön test ve son testte yaptığı ispatlar arasında yapılan karşılaştırmalar ve ispat süreçleri ile ilgili incelemeler sonucunda muhakemede bulunma bakımından önemli kazanımlar elde ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunma ile ilgili elde ettikleri kazanımlar şu şekilde sıralanabilir:

1. Öğretmen adaylarının zihinlerinde ispat kavramının netleşmesiyle birlikte ispata başlama girişimlerinin arttığı görülmüştür. Bununla birlikte ispata başlamak için sundukları önerilerin çoğunun uygun olduğu ve ispat anlamında kullanışlı olan birçok çıkarımda bulunabildikleri belirlenmiştir.
2. İspat sürecinde tanım, teorem ve aksiyomlar gibi matematiksel ifadeleri uygun bir şekilde kullanmaya yönelik bir farkındalık kazandıkları görülmüştür. Dolayısıyla matematiksel ifadeleri nasıl ve nerede kullanacaklarına yönelik daha iyi karar verebildikleri belirlenmiştir.
3. Öğretmen adaylarının hipotez ve hüküm kavramlarının ayrımını yapabilmelerine bağlı olarak hükümden başlayarak ispat yaptıkları durumlarda bir azalmanın olduğu görülmüştür.
4. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde birbirini destekleyen çıkarımları daha fazla ifade edebildikleri görülmüştür. Dolayısıyla ispat adımlarının birbiri ile bağlantılı olmasına özen göstererek muhakeme boşluklarının oluşmasına engel olabildikleri belirlenmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının tanım, aksiyom ve teoremler arasında ilişkilendirme yapabildikleri fark edilmiştir.
5. Matematiksel bir ilişkinin ispatına ulaşırken hangi ispat adımlarını hangi sıraya bağlı olarak takip edeceklerine daha iyi karar verebildikleri görülmüştür.
6. Öğretmen adaylarının özel durumları ele alarak çıkarımda bulundukları ya da bunlar üzerinden sonuca ulaştıkları durumlar için farkındalık kazandıkları belirlenmiştir. Ancak bu durumlara yönelik yapılan ispatların oranlarının hemen hemen sabit kalması, özel duruma yönelik çıkarımda bulunma ve ispat yapmalarında pek fazla bir değişimin olmadığını göstermektedir.
7. Matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmak için ileri sürdükleri her bir ispat adımı için gerekçe sunma ihtiyacı duymaya başladıkları belirlenmiştir. Dolayısıyla ispat adımlarının nasıl ve hangi amaçla yazıldığını gösterme eğilimlerinde artışlar olduğu görülmüştür.

### 6. 1. 2. İSMAT Modeline Göre Tasarlanan Öğrenme Ortamının Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinde Matematik Dilini Kullanmalarına Olumlu Yönde Etki Etmiştir.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yer alan öğretmen adaylarının ispat sürecinde ifade ettikleri matematiksel kavram ve semboller grup olarak, bireysel ve mevcut uygulamalara müdahale edilmeyen öğrenme ortamında yer alan öğretmen adayları ile karşılaştırılarak matematik dilini kullanmaya yönelik gelişimleri incelenmiştir. Araştırma sonucunda İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında uygulamaların yapıldığı deney grubu ile mevcut uygulamalarına müdahale edilmeyen kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarının ön test puanları kontrol altına alınarak gerçekleştirilen ANCOVA analizi sonucuna göre son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmuştur. Bu durum öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik bir gelişimin olduğunu göstermekle birlikte İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamı ile ilişkili olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla deney grubu için tasarlanan öğrenme ortamında ispat öğretimine yönelik yürütülen dersler öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematik dilini kullanmaya yönelik başarılarının gelişimine katkıda bulunmuştur. Matematik dilini kullanmaya yönelik kategoriler dikkate alındığında ise uygulama öncesinde MD2 kategorisine yönelik ispatlar çoğunlukta iken uygulama sonrasında MD3 kategorisinin çoğunlukta olduğu görülmüştür. Dolayısıyla yapılan uygulamalar ile birlikte öğretmen adaylarının ispat sürecinde matematiksel kavram ve sembollerin her birini uygun bir şekilde kullanma eğilimlerinde bir artış meydana geldiği belirlenmiştir. Ön test ve son testte yapılan ispatlar ile öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde matematik diline yönelik kullanımları incelendiğinde matematiksel sembollere yönelik yaptıkları hatalarda azalmanın olduğu görülmüştür. Dolayısıyla ispat sürecinde sembolik dil kullanımına yönelik bir farkındalık kazandıkları anlaşılmıştır. Bununla birlikte uygulama öncesinde matematiksel kavramlara yönelik hata yapan öğretmen adaylarının uygulama sonrasında bu tür hataları yapmaktan kaçındığı görülmüştür. Ancak uygulama sonrasında matematiksel kavramlara yönelik hata yapan farklı öğretmen adaylarının ortaya çıkması ve bu hatayı yapma oranının uygulama öncesi ve sonrasında aynı olması ile birlikte sembolik olmayan dil kullanımı bakımından pek fazla bir değişimin olmadığı belirlenmiştir.

### 6. 1. 3. Varsayım Üretme ve Varsayımları İfade Ederken Matematik Dilini Kullanmaya Yönelik Gruplar Arasında Bir Farklılaşma Olmamıştır.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yer alan deney grubu ile mevcut uygulamalara müdahale edilmeyen öğrenme ortamında yer alan kontrol grubu arasında varsayımda bulunma bakımından bir farklılık olmadığı görülmüştür. Uygulamaların sonrasında yapılan Ki-Kare testi sonuçlarına göre öğretmen adaylarının varsayımlarının doğruluğunun gruplara bağlı olarak değişmediği belirlenmiştir. Dolayısıyla varsayım üretmeme, temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade etme, yanlış varsayım üretme, özel bir durumu ele alarak varsayım üretme, doğru bir varsayım üretme gibi durumlar bakımından gruplar arasında bir farklılaşmanın oluşmadığı sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte toplam varsayım üretme sayısı ile sadece doğru varsayım üretme sayısının da gruplara göre değişim göstermediği Ki-Kare testi aracılığıyla belirlenmiştir. Ancak her iki grupta da belirtilen durumlara yönelik doğru varsayımlar ürettikleri durumların çoğunlukta olup doğruluk kategorilerine yönelik dağılımın her bir grup içinde ilişkili olduğu görülmüştür. Dolayısıyla gruplarda yapılan uygulamalar kendi içinde olmak üzere öğretmen adaylarının varsayımda bulunmalarına katkıda bulunduğundan bahsedilebilir.

Öğretmen adayları ürettikleri varsayımları ifade ederken matematik dilini kullanma bakımından da gruplar arasında bir farklılık olmadığı tespit edilmiştir. Uygulamalar sonrasında gerçekleştirilen Ki-Kare testi sonuçlarına göre öğretmen adaylarının varsayımlarını ifade ederken kullandıkları matematik dilinin gruplara bağlı olarak değişiklik göstermediği belirlenmiştir. Dolayısıyla varsayımı uygun bir dil, kısmen uygun bir dil ya da uygun olmayan bir dil ile ifade etme bakımından gruplar arasında bir farklılaşma olmadığı görülmüştür. Bununla birlikte grupların her ikisinde de öğretmen adaylarının varsayımlarını gerek sembolik gerekse sembolik olmayan bir dil ile ifade ederken uygun kullanımlar gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Ancak sembolik olmayan bir dil kullanırken hangi geometrik kavramın betimlendiğinin belirsiz olduğu varsayımların da önemli ölçüde ortaya çıktığı görülmüştür.

### 6. 1. 4. Öğretmen Adaylarının İspatın Rollerine Yönelik Bakış Açılarında Hem Farklılaşma Olmuş Hem de Çeşitlilik Artmıştır.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamına yönelik uygulamalar yapılmadan önce öğretmen adaylarının ispatın rolleri olarak ileri sürdükleri ifadelerin uygulamalar yapıldıktan sonra sayılarında bir artış olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları uygulama öncesinde ispatın doğrulama, kavrama-anlama, kabul ettirme-nesnellik, açıklama, ilişkilendirme, sistemleştirme gibi 6 farklı role sahip olduğunu ileri sürerken uygulama sonrasında bunlara ek olarak genelleme, keşfetme ve somutlaştırma rollerinin de olduğunu ileri sürdükleri görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispatın rollerine yönelik bakış açılarında çeşitliliğin arttığı ve ispatı daha geniş bir yelpazede değerlendirdikleri belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının uygulama sonrasında doğrulama gibi geleneksel bir bakış açısından sıyrılarak genelleme, keşfetme, ilişkilendirme gibi ispatın kapsamını genişleten rollere yönelik bakış açılarını geliştirdikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmen adayları özel durumları ele alarak ispatın yapılmasının yeterli bir ispat olmadığına yönelik bir bakış açısı geliştirerek ispatın rollerinden birinin genelleme olduğunu benimsedikleri belirlenmiştir. Uygulamalar esnasında öğretmen adayları matematiksel ilişkiye ulaşmak için ifade edilen çıkarımlar ile birlikte bu çıkarımlara yönelik sunulan gerekçelerin oluşturduğu yapının ispat kavramı ile eşdeğer olduğuna yönelik bir anlayış geliştirerek ise ispatın açıklama rolünü daha çok benimsemeye başladıkları görülmüştür. Bununla birlikte ispat için gerekli olan tüm çıkarımların belirli bir sıraya göre yazılması gerektiği anlayışının zihinlerine yerleşmesiyle ispatın sistemleştirme rolünün olduğunu daha fazla dile getirdikleri belirlenmiştir.

## 6. 2. Öneriler

Öğretmen adaylarının ispat süreçlerini İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında incelemeyi amaçlayan bu çalışmanın sonunda ispat yapma ve ispatın rollerine yönelik bakış açıları bakımından bir gelişimin olduğu, varsayımda bulunmaları bakımından ise gruplar arasında bir farklılaşmanın olmadığı tespit edilmiştir. Bu bölümde ulaşılan sonuçlara dayalı olarak yapılan öneriler başlıklar halinde sunulmuştur.

### 6. 2. 1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

Matematik eğitiminin temel amaçlarından biri matematiksel düşünmenin gelişimini sağlamaktır. Matematiksel düşünmenin gelişimini sağlayan en önemli kaynak ise ispattır. Dolayısıyla ispat bireylerin matematiksel kavram ve terimleri tam anlamıyla zihinlerinde oturtarak matematiksel alt yapılarının sağlamlaştırılmasında önemli bir adımdır. Ancak ispat öğretiminde genellikle teorem-ispat dizgesinden öteye geçilmeyerek geleneksel bir yaklaşım izlenmektedir. Dolayısıyla bu durum ispatı farklı öğretim kademesindeki her bireyin zorluk yaşadığı bir kavram haline getirmektedir. Literatürde hâkim olan görüş, ispat öğretiminde bu tür yaklaşımlardan vazgeçilerek öğrenciyi sürece dâhil edebilecek yaklaşımların izlenmesi gerektiğidir. Bu görüşten hareketle bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatın doğasında yer alan bütün eylemleri içeren bir süreci yaşayabilmeleri için İSMAT adı verilen modelin aşamalarının izlendiği bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar, İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğretmen adaylarının ispat sürecinde muhakemede bulunmalarına olumlu yönde etki ettiğini göstermektedir. Bu bakımdan ispat öğretiminde izlenebilecek yeni bir yaklaşım olarak İSMAT Modelinin kullanımı önerilmektedir.

Matematikçilerin gerçek yaşamındaki aktiviteleri, ispatın doğasında yer alan eylemler ve matematik içerisindeki rollerini yansıtacak şekilde tanımlanan İSMAT Modeli, geometri dersi kapsamında kullanılmıştır. İspatın doğasında yer alan eylemler ile bir matematikçinin ispat yaparken izledikleri adımlara matematik derslerinde de yer verilebileceği göz önünde bulundurulduğunda İSMAT Modelinin bu dersler içerisinde de yararlanılabilecek bir model olduğuna işaret etmektedir. Ancak bu modelin matematik derslerine entegre edilebilmesi için yapı oluşturma aşamasına yönelik uygulamalar yerine yazılım üzerinde ölçüm sonuçları üzerine karşılaştırmalar yapabilecekleri uygulamalar tasarlanabilir.

İspat öğretimi içerisinde İSMAT Modelini kullanarak derslerini yürütmek isteyen öğretmen ve öğretim elemanları öğrencilerin yaptıkları davranışlar ya da yaşadıkları zorluklardan daha iyi haberdar olabilmek adına grup sayısında bir azaltma yapabilirler. Ayrıca bu modele göre tasarlanan öğrenme ortamlarında yürütülen öğretim etkinlikleri daha geniş bir yelpazeye yayılarak yapılabileceği gibi belirli sayıdaki gruplarla farklı seanslarda uygulamalar da gerçekleştirilebilir. Böylece öğrencilerin davranışları daha kolay ve ayrıntılı bir şekilde gözlemlenebilir.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında yapılan değerlendirme çalışmaları, ispatın tutarlılığını inceleme aşamasına bağlı olarak grupların birbirlerinin ispatlarını incelemelerine yöneliktir. Bu modelin tekrar uygulanması durumunda sadece yapılan ispatların değerlendirilmesinin dışında İSMAT Modelinin her bir aşamasına yönelik grupların değerlendirme yapmasına imkân sağlayacak bir ortam oluşturulabilir. Böylece modelin aşamaları dâhilinde yapılanlara yönelik grupların ne tür gelişimler elde ettikleri konusunda daha ayrıntılı bir bilgi sahibi olunabilir. Bir bakıma öğrencilerin ispatın doğasına uygun her bir eyleme yönelik yaptıkları ile ilgili meydana gelen değişimlerden daha kolay bir şekilde haberdar olunabilir.

Tasarlanan öğrenme ortamında yürütülen uygulamalar boyunca öğretmen adaylarının genel anlamda İSMAT Modeline yönelik aşamaların her birinden geçtikleri belirlenmiştir. Ancak beşinci uygulama haftasından sonra İSMAT Modelinin aşamalarına yönelik yönergelerin yer almadığı çalışma yapraklarının uygulanmasıyla birlikte ispatın tutarlılığını inceleme aşamasının kapsamında bir değişiklik meydana gelmiştir. Uygulamaların başında bu aşamada gruplar arasında ispatlar değiştirilerek ispata yönelik değerlendirmeler yapılırken uygulamaların sonuna doğru kendi ispatlarını değerlendirmeye başlamışlardır. Bu bakımdan derslerinde bu modelden yararlanmak isteyen öğretmen ve öğretim elemanlarının bu aşamanın işlerliğini artırmak adına bu aşamaya yönelik bir yönerge ifadesine yer vermesi özellikle önerilmektedir. Bununla birlikte varsayımlarının farklı durumlar için geçerli olup olmadığını incelemelerine teşvik etmek için etkinliğin içerisinde bu durumları kendilerinin belirlemesini sağlayabilecek şekilde düşündürücü sorulara yer verilebilir.

Öğretmen adaylarının ispat sürecinde dinamik geometri yazılımlarını kullanma amaçları çoğunlukla yapı oluşturma, varsayımda bulunma ve farklı durumları inceleme olmasına rağmen ispat adımlarını belirleme amaçlı olarak da yazılımlardan yararlandıkları görülmüştür. Dolayısıyla ispat sürecinde dinamik geometri yazılımlarını kullanmaları, matematiksel bir ilişkinin ispatını yapmak için gerekli olan çıkarımları ifade etmelerini kolaylaştırarak muhakemede bulunmalarının gelişimine katkıda bulunmuştur. Bu bakımdan ispat sürecinde dinamik geometri yazılımlarının kullanımı önerilmektedir.

İspat sürecinin önemli bileşenlerinden biri olan varsayımda bulunma, İSMAT Modeli aşamaları içerisinde yer almasına rağmen varsayımda bulunma bakımından gruplar arasında bir farklılaşmanın oluşmadığı görülmüştür. Bu durum uygulamalarda kullanılan etkinliklerde kenar uzunluğu, açı ölçüleri gibi hangi geometrik kavramlar arasında ilişkinin araştırılacağına yönelik bilgi verilmesine bağlı olarak ortaya çıkmış olabilir. Bu bakımdan etkinliklerin hangi geometrik kavramlara yönelik ilişkileri araştıracakları ile ilgili öğrencilerin kendilerinin karar vermelerini sağlayabilecek şekilde hazırlanması önerilmektedir. Ayrıca etkinliklerde birden fazla matematiksel ilişkiye ulaşılmasını sağlayan problem durumlarına yer verilmesi varsayımda bulunma bakımından gelişim sağlanmasına yardımcı olabilir.

Çalışmanın bütün sonuçları göz önünde bulundurulduğunda ispatın insan etkinliklerinin bir ürünü ve matematik yapmanın bir parçası olduğu düşüncesiyle ispat öğretimi matematikçilerin gerçek yaşamda ispata yönelik yaptıkları aktivitelere göre şekillendirilmesi önerilmektedir. Ayrıca ispatın doğasında yer alan eylemlere yer verilerek öğrencilerin sürece dâhil edilebileceği öğrenme ortamlarının tasarlanması tavsiye edilmektedir.

### 6. 2. 2. İleride Yapılabilecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

Gerek matematiği öğretme gerekse matematiği öğrenme bakımından öğretim kademelerinin her birinde ispat yapmayı öğrenmenin önemi öğretim programları ve matematik eğitimi üzerine yazılan raporlarda özellikle vurgulanmaktadır. Ancak öğretim kademelerinin genelinde ispat kavramına sınırlı düzeyde yer verilmekte ya da hiç yer verilmemektedir. Yapılan bu çalışma öğretmen adaylarının ilerideki meslek hayatlarında ispat öğretimine yönelik uygulamalar yapabilmelerine katkıda bulunan önemli bir adım olmasına rağmen mevcut sistemdeki matematik öğretmenlerinin de ispat yapma anlamında donanımlı hale gelmesi gerekmektedir. Bu bakımdan matematik öğretmeni adaylarının İSMAT Modeli gibi ispat öğretiminde kullanabilecekleri öğretim modellerinden haberdar olmalarını ya da derslerinde ispat öğretimi için neler yapabileceklerine yönelik farkındalık kazanmaları için hizmet içi eğitimler düzenlenebilir.

İspat yapma ve varsayımda bulunmayı geliştirmeyi amaçlayan bu çalışma öğretmen adayları üzerinde yürütülmüştür. Bu amacı gerçekleştirebilmek adına ispat sürecine öğrencilerin aktif bir şekilde katılabileceği, ispatın matematik içerisindeki rollerini (keşfetme, varsayımda bulunma, genelleme, ilişkilendirme vb.) öğrencilerin yaşayabileceği, bir matematikçinin ispat yaparken izlediği adımlardan geçebileceği ispat öğretimine yönelik bir model olan İSMAT Modeli tanımlanmıştır. İspat öğretiminin sadece üniversite kademesinde değil, ilköğretim ve ortaöğretim kademelerinde de önemli olması ve bu modelin diğer kademelere uyarlanabilir olması İSMAT Modelinin etkililiğine yönelik diğer örneklemler üzerinde de çalışmalar yapılabileceğini göstermektedir.

İSMAT Modeline göre tasarlanan öğrenme ortamında uygulamalar grup çalışması ile yürütülerek her bir etkinliğin sonunda grupların yaptıkları ispatlara yönelik sunumlar yapılmıştır. Bu bağlamda farklı ispat yolları tercih eden her bir grubun sunum yapmasına dikkat edilerek kullanılan matematik dili, ispat adımları ve her bir adıma yönelik sunulan gerekçelerin uygunluğu ile ilgili sınıf tartışmaları yapılmıştır. Ancak her bir öğretmen adayının ispat süreci sonucunda elde ettiği kazanımlar, bu süreçte yaşanan zorluklar ile ilgili düşüncelerini yansıtan herhangi bir veri toplanmamıştır. Bu bakımdan gelecekte yapılacak olan benzer çalışmalarda öğrencilerin kendi ispat süreçlerini bireysel olarak değerlendirmeleri için ispat süreci sonunda yansıtıcı yazılar yazmaları istenebilir. Böylece öğrencilerin ispat süreçlerine yönelik daha kapsamlı bilgiler elde edilmesinin önü açılabilir.

Araştırma sonucunda varsayımda bulunma bakımından gruplar arasında bir farklılaşmanın olmadığı görülmüştür. Bu durum deney grubunun yer aldığı öğrenme ortamında öğretmen adaylarının varsayımda bulunmak için dinamik geometri yazılımını kullanmalarına bağlı olabilir. İspat sürecinde bu tür bir uygulama yapılırken varsayımda bulunmalarının yazılım kullanılmayacak bir ortamda açık uçlu bir sınav aracılığıyla ölçülmesi, varsayım üretme bakımından bir değişim olsa da bu değişimin ortaya çıkmasını engellemiş olabilir. Bu bakımdan gelecekte yapılacak olan benzer çalışmalarda öğrencilerin varsayımda bulunmalarını değerlendirmede kullanılacak açık uçlu sınavın dinamik geometri yazılımlarından yararlanılabilecek bir ortamda yürütülmesi önerilmektedir.

## 7. KAYNAKLAR


Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 31-35, 43.

Alibert, D. and Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything*? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479-488.

Arcavi, A. and Hadas, N. (1996). *Promoting changes in the curriculum by means of dynamic technologies-an example.* Retrieved February 9, 2012 from http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/ overig/Icme-8/WG13_13.html

Arcavi, A. and Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of the approach. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 5*, 25-45.

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. and Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2 (pp.32-39). Stellenbosch, South Africa.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. and Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom* (pp. 305-322). Rotterdam: Sense Publishers.

Avigad, J. (2005). *Mathematical method and proof*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Baki, A. (1996). Okul matematiğinde ne öğretelim nasıl öğretelim? *Milli Eğitim Dergisi, 130*, 72-76.

Baki, A. (2000). Bilgisayar donanımlı ortamda matematik öğrenme. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*, 186-193.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik.* İstanbul: Ceren Yayın- Dağıtım.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. and Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education Press.

Battista, M. T. and Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher, 88*(1), 48-54.

Bayazıt, N. (2009). Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University, Florida.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Bell, M. D. (1998). Impact of an inductive conjecturing approach in a dynamic geometry-enhanced environment. Unpublished doctoral dissertation, Georgia State University, Georgia.

Birinci, K. S. (2010). Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Bobango, J. C. (1987). Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: The effect of phase-based instruction. Unpublished doctoral dissertation, Pennsylvania State University, Pennsylvania.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Retrieved October 23, 2012 from http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. and Scali, E. (1995). Aspects of the mathematics–culture relationship in mathematics teaching–learning in compulsory school. *Proceedings of the XIX International conference of PME* (vol. 1, pp. 151–166). Recife: PME.

Boero, P., Garuti, R. and Mariotti, M.A. (1996). Some dynamic mental process underlying producing and proving conjectures. In A. Gutierrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 121- 128). Valencia.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 35-49.

Capraro, M. M. and Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology, 27*(2), 147-164.

Carlson, M. (1997). Views about mathematics survey: Design and results. *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting/North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 395-402.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Chazan, D. and Houde, R. (1989). *How to use conjecturing and microcomputers to teach geometry.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics. (2004). *Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics. (2015). *2015 CUPM Curriculum Guide to Majors in the Mathematical Sciences.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Couco, A. A. and Goldenberg, E. P. (1996). A role for technology in mathematics education. *The Journal of Education, 178*(2), 15-32.

Çakmak, Z. (2013). Sekizinci sınıf öğrencilerinin istatistik konusundaki matematiksel dil becerilerine ilişkin değişkenlerin yapısal eşitlik modeli ile incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Erzincan Üniversitesi, Erzincan.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with Geometer's Sketchpad.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

de Villiers, M. (2002). Developing understanding for different roles of proof in dynamic geometry. *ProfMat 2002*, Visue, Portugal.

de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(5), 703-724.

de Villiers. M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing* *understanding of geometry and space* (pp. 369-393). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Dean, E. E. (1996). Teaching the proof process. *College Teaching, 44*(2), 52-55.

Derek, M. (2011). Teaching and learning of proof in the college curriculum. Unpublished master’s thesis, San José State University, California.

DeTurck, D. (1993). Software reviews. *The College Mathematics Journal, 24,* 370-376.

Dickson, L., Brown, B. ve Gibson, O. (1993). *Children learning mathematics: A teacher’s guide to recent research.* London: Cassell.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can’t prove? *Educational Studies in Mathematics, 38*(1/3), 85-109.

Driscoll, M. (1987). *Research within reach: Secondary school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Duatepe, A. ve Ersoy, Y. (2002). *Effects of using calculators (TI-92) on learning transformational geometry.* Paper presented at 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonissos, Crete, Greece.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P.Boero (Eds.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom* (pp:137-161). Rotterdam: Sense Publishers.

Easterday, K. and Galloway, L. (1995). A comparison of sentential logic skills: Are teachers sufficiently prepared to teach logic? *School Science and Mathematics, 95*(8), 431-436.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: students’ generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*, 187–215.

Elchuck, L. M. (1992). The effects of software type, mathematics achievement, spatial visualization, locus of control, independent time of investigation, and van Hiele level on geometric conjecturing ability. Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, Pennsylvania.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly, 110*(10), 886-899.

Erdem, E. (2015). Zenginleştirilmiş öğrenme ortamının matematiksel muhakeme ve tutuma etkisi. Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education,* London: Routledge Falmer Publishing

Ferrari, P. L. (2004). Mathematical language and advanced mathematical learning. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.383-390). Bergen, Norway.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics, 8*(5), 269–274.

Forman, E. A., Joernes, J. L., Stein, M. K. and Brown, C. A. (1998). You’re going to want to find out which and prove it: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*, 527–548.

Francisco, J. M. and Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 361–372.

Frasier, B. J. (2010). Secondary school mathematics teachers’ conceptions of proof. Unpublished doctoral dissertation, University of Massachusettes Lowell, Massachusettes.

Frerking, B. G. (1994). Conjecturing and proof-writing in dynamic geometry. Unpublished doctoral dissertation, Georgia State University, Georgia.

Furinghetti, F., Olivero, F. and Paulo, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: Snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*, 319-335.

Garderen, D. V. and Montague, M. (2003). Visual spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(4), 246-254.

Generazzo, S. D. (2011). Proof and reasoning in an inquiry-oriented class: The impact of classroom discourse. Unpublished doctoral dissertation, University of New Hampshire, New Hampshire.

Gillis, J. M. (2005). An investigation of student conjectures in static and dynamic geometry environments. Unpublished doctoral dissertation, Auburn University, Alabama.

Goetting, M. M. (1995). The college student's understanding of mathematical proof. Unpublished doctoral dissertation, The University of Maryland, Maryland.

Goldenberg, E. P. (1999). Principles, art, and craft in curriculum design: The case of connected geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4*, 191-224.

Goldenberg, P. and Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* Hilldale, NJ: LEA.

González, G. and Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*, 153-182.

González, G. and Herbst, P. G. (2006). Competing arguments for the geometry course: Why were American high school students supposed to study geometry in the twentieth century? *International Journal for the History of Mathematics Education, 1*(1), 7-33.

Greenberg, M.J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history.* New York: W.H. Freeman.

Güven, B. (2002). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek öğrenme. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2005). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile oluşturmacı öğrenme ortamı tasarımı: Bir model*. İlköğretim Online, 4*(1), 62-72.

Güven, B., Çelik D. ve Karataş İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 316*, 35–45.

Hadas, N., Hershkowitz, R. and Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 127-150.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.

Hanna, G. and Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. ZDM Mathematics Education, *40*, 345–353. doi: 10.1007/s11858-008-0080-5

Hanna, G. and Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives (pp. 85-100). New York: Springer.

Hanna, G. and Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (2, pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., Bruyn, Y., Sidoli, N., and Lomas, D. (2004). Teaching proof in the context of physics. *ZDM Mathematics Education, 36*(3), 82–90.

Hanna, G., Jahnke, H. N. and Pulte, H. (Eds.). (2010). Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives. New York: Springer.

Haralambos, V. (2000). A qualitative comparative study of tenth-grade students' geometric proofs. Unpublished doctoral dissertation, University of Illinois, Chicago.

Hardy, G. H. (1997). *A mathematician's apology.* Cambridge: University Press.

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *American Mathematical Monthly, 105*, 497-507.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 3, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Hart, E. W. (1986). An exploratory study of the proof-writing performance of college students in elementary group theory. Unpublished doctoral dissertation, The University of Iowa, Iowa.

Haverhals, N. J. (2011). Students’ development in proof: A longitudinal study. Unpublished doctoral dissertation, The University of Montana, Missoula, MT.

Hazzan, O. and Leron, U. (1996). Students’ use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics 16*(1), 23-26.

Healy L. and Hoyles C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey.* Institute of Education, University of London.

Healy, L. and Hoyles, C. (2001). Software tools for geometric problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 235-256.

Heinze, A. and Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp.191-203), London: Routledge Publishers.

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 283-312.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24,* 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Hiebert, J. and Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A. M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., MANASTER, C., Gonzales, P. and Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study* (NCES 2003-013). U.S. Department of Education, Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hoyles, C and Jones, K. (1998), Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7- 16.

Hoyles, C. and Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice.* Sense Publishers.

Hsu, H. (2010). The study of Taiwanese students' experiences with geometric calculation with number (GCN) and their performance on GCN and geometric proof. Unpublished doctoral dissertation, The University of Michigan, Michigan.

İmamoğlu, Y. (2010). Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispata ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.

İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proofand theoretical physics. G. Hanna ve diğerleri (Ed.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 17-32). New York: Springer.

Jones, K. (1995). Dynamic geometry contexts for proof as explanation. In L. Healy & C. Hoyles (Eds), *Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 142-154). London: Institute of Education.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2004). 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme becerilerinin belirlenmesi: Bir özel durum çalışması. *Milli Eğitim Dergisi, 163.*

Knapp, J. (2006). A framework to examine definition use in proof. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 15-22.

Knuth, E. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Knuth, E. and Elliott, R. (1997). Preservice secondary mathematics teachers' interpretations of mathematical proof. *Proceedings of the 19th Conference of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, 545-551.

Knuth, E. J. (1999). The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Unpublished doctoral dissertation, Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, USA.

Knuth, E. J. (2000). *The rebirth of proof in school mathematics in the united states?* Retrieved May 5, 2013 from http://www.lettredelapreuve.it/newsletter/000506theme /00506themeuk.html

Knuth, E. J. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher, 95*(7), 486–490.

Knuth, E. J. and Elliot, R. L. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher, 91*(8), 714-717.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151-161.

Lakatos, I. (1961). *Essays in the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of Mathematics discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978). *The methodology of scientific research programmes: Philosophical Papers Volume 1.* Cambridge: Cambridge University Press.

Larson, R., Boswell, L. and Stiff, L. (2001). *Geometry.* Evanston, IL: McDougal Litell, Inc.

Leddy, J. F. J (2001). Justifying and proving in secondary school mathematics. Unpublished doctoral dissertation, University of Toronto, Canada.

Lee, K. (2011). Students' logical reasoning and mathematical proving of implications. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, Michigan.

Lee, W. (1999). The relationship between students' proof-writing ability and Van Hiele Levels of geometric thought in a college geometry course. Unpublished doctoral dissertation, University of Northern Colorado, Greeley, Colorado.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *The Mathematics Teacher*, *96*(6), 416-421.

Lucast, E. (2003). Proof as method: A case for proof in mathematics curricula. Unpublished master's thesis, Carnegie University, Pittsburgh, PA.

Maher, C. A. and Davis, R. B. (1995). Children's explorations leading to proof. In C. Hoyles & L. Healy (Eds.), *Justifying and proving in school mathematics* (pp. 87-105). London: Mathematical Sciences Group, Institute of Education, University of London.

Manaster, A. B. (1998). Some characteristics of eight grade mathematics classes in the TIMMS videotape study. *American Mathematical Monthly, 108*(9), 793-805.

Mariotti M. A. (2002) Influence of technologies advances on students' math learning. In L. English, et al. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.695-723). New Jersey: Lawrence Erbaum Associates.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 257-281.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Sense publishers.

Mariotti, M. A. and Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education, 40*, 341–344.

Marrades, R. and Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Martin, G. and Harel, G. (1989) Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41–51.

Martin, T. and McCrone, S. (2009). Formal proof in high school geometry: Students perceptions of structure, validity and purpose. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp.191-203), London: Routledge Publishers.

Matsuda, N. (2004). The impact of different proof strategies on learning geometry theorem proving. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Mayer, R. E. (1982). The Psychology of mathematical problem solving. In F. K. Lester & Garofalo (Eds), *Mathematical Problem Solving: Issues in Research* (pp. 1-13). Philadelpia: Franklin Institute Press.

McCrone, S. M. S. and Martin, T. S. (2004). Assessing high school students' understanding of geometric proof. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 4*(2), 223-242.

McCrone, S. M. S., Martin, T. S., Dindyal, J. and Wallace, M. L. (2002). *An investigation of classroom factors that influence proof construction ability.* Paper presented at Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens, GA.

Mercer, N. and Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education, 20*(6), 507-528.

Mercer, N., Dawes, L., Wegerif, R. and Sams, C. (2004) Reasoning as a scientist: ways of helping children to use language to learn science. *British Educational Research Journal 30*(3), 359-377.

Mercer, N., Wegerif, R. and Dawes, L. (1999) Children's talk and the development of reasoning in the classroom. *British Educational Research Journal, 25*(1), 95-111.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları.

Mogetta, C., Olivero, F. and Jones K. (1999), Designing dynamic geometry tasks that support the proving process, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp 97-102).Warwick: University of Warwick.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Moreno, G, A. (2003). Relationships between interaction, definitions and proof. Unpublished master’s thesis, University of Texas, Austin.

Nasibov, F. ve Kaçar, A. (2005). Matematik ve matematik eğitimi hakkında. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *13*(2). 339- 346.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nguyen, D. N. (2012, March). *Understanding the development of the proving process within a dynamic geometry environment.* 46. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Weingarten, Germany.

Nordström, K. (2004). *A pilot study on five mathematicians’ pedagogical views on proof*. Paper presented at TSG 14 on argumentation and proof, ICME 10, Copenhagen.

Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings learning cultures and computers.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Olivero, F. (1999, August). *Cabri Geometry as a mediator in the process in the process of transition to proofs in open geometric situations: An exploratory study.* Paper presented at Proceedings of the Fourth International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT4). Plymouth, UK: University of Plymouth.

Öner, D. (2006). A comparative analysis of high school geometry curricula: What do technology-intensive, standards-based, and traditional curricula have to offer in terms of mathematical proof reasoning. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison.

Peled, I. and Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*, 49-61.

Perry, P., Molina, Ó., Camargo, L. and Samper, C. (2011, February). *Analyzing the proving activity of a group of three students.* Paper presented at Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7), Poland.

Philipp R., Thanheiser, E. ve Clement, L. (2002). The role of a children's mathematical thinking experience in the preparation of prospective elementary school teachers. *International Journal of Educational Research, 37*, 195-210.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* London: Routledge and Kegan Paul.

Polya, G. (1957). *How to solve it?* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Popper, K. (1979). *Objective Knowledge*. Oxford University Press.

Pulley, C. A. (2010). Using instruction to investigate the effects of assessing reasoning tasks on students' understanding of proof. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.

RAND Mathematics Study Panel. (2002). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: RAND.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5-41.

Reiss, K. and Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Matematik (ZDM), 34*(1), 29-35.

Reiss, K., Hellmich, F. and Reiss, M. (2002). Reasoning and proof in geometry: Prerequisities of knowledge acquisition in secondary school students. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for Psychology Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 113-120). Norwich, UK.

Remillard, K. S. (2009). The mathematical discourse of undergraduate mathematics majors: The relation to learning proof and establishing a learning community. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University of Pennsylvania.

Romberg, T. A. (1992). Problematic features of the school mathematics curriculum. In P. W. Jackson (Ed.), *Handbook of research on curriculum: A project of the American Educational Research Association* (pp. 749-788).New York: MacMillan.

Ron, G. and Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 4*, 113-120.

Santos-Trigo, M. and Espinosa-Perez, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33*, 37-50.

Sarı, M. (2011). Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi. Yayınlanmamış doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Schabel, C. (2005). An instructional model for teaching proof writing in the number theory classroom. *PRIMUS, 15*(1), 45-58. doi: 10.1080/10511970508984105

Schoenfeld, A H. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego, CA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Alan H. Schoenfeld, (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-69) Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword. In M. L. B. D. A. Stylianou ve E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Selden, A. and Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

Selden, A. and Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Selden, J. and Selden, A. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E.J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics.

Selden, J., Selden, A. and McKee, K. (2008). *Improving advanced students proving abilities*. Paper presented at 11th International Congressof Mathematical Education (ICME-11). Monterrey, Mexico.

Senk, S. L. (1983). Proof-writing achievement and Van Hiele levels among secondary school geometry students. Unpublished doctoral dissertation, The University of Chicago, Chicago-Illinois.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78*(6), 448-456.

Serra, M. (1997). *Discovering geometry: An inductive approach* (2nd ed.). Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Shipley, A. J. (1999). An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs. Unpublished doctoral dissertation, University of American, Washington.

Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behaviour, 25*, 73-90.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective* (Vol. 38). Springer Science & Business Media.

Stoyanova, E. (2005). Problem-problem strategies used by years 8 and 9 students. *AAMT Standards for Excellence in Teaching Mathematics in Australian Schools, 61*(3), 6-11.

Stylianides, A. J. and Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: The case of reasoning and proving. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 201-208). Prague: PME.

Stylianides, A. J. and Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 237-253. doi: 10.1007/s10649-009-9191-3

Stylianou, D. A., Blanton, M. L. and Knuth, E. J. (Eds.). (2010). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. Routledge.

Subramanian, L. (1991). An investıgatıon of high school geometry students' proving and logical thinking abilities and the impact of dynamic geometry software on student performance. Unpublished doctoral dissertation, Univesity of Mumbai, Florida.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127*, 28-32.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp: 495-511). New York, NY: Macmillan.

Tinto, P. P. (1999). Students’ views on learning proof in high school geometry: An analytic-inductive approach. Unpublished doctoral dissertation, Syracuse University, New York.

Toluk, Z. (2003) Üçüncü uluslararası matematik ve fen araştırması (TIMMS): Matematik nedir? *İlköğretim Online Dergisi, 2*(1), 36-41.

Tubridy, A. F. (1992). An instructional strategy to enhance proof-writing ability in secondary school geometry. Unpublished doctoral disertation. The University of Texas, Texas.

Turğut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *6*(13), 227-252.

Uğurel, I. (2010). Ortaöğretim matematik programının temel ögeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

VanSpronsen, H. (2008). Proof processes of novice mathematics proof writers. Unpublished doctoral dissertation, The University of Montana, Montana.

Vatansever, S. (2007). İlköğretim 7. sınıf geometri konularını dinamik geometri yazılımı Geometer`s Sketchpad ile öğrenmenin başarıya, kalıcılığa etkisi ve öğrenci görüşleri. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wares, A. (2004). Conjectures and proofs in a dynamic geometry environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(1), 1-10.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101–119.

Weber, K. (2005). A procedural route toward understanding aspects of proof: Case studies from real analysis. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 5*(4), 469–483.

Weber, K. (2006). Investigating and teaching the thought processes used to construct proofs. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 6, 197-232.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. and Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group dissussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247-261.

Woods, G. (2009). An investigation into the relationship between the understanding and use of mathematical language and achievement in mathematics at the Foundation Stage. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*, 2191–2196.

Yankelewitz, D., Mueller, M. and Maher, C. A. (2010). A task that elicits reasoning: A dual analysis. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*, 76-85

Yerushalmy, M. (1987). Induction and generalization: An experiment in teaching and learning high school geometry. Unpubllished doctoral dissertation, Harward University, Cambridge, Massachusetts.

Yeşildere, S. (2007). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterlikleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi, 24*(2), 61-70.

Yoo, S. (2008). Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas, Austin.

Zaimoğlu, Ş. (2012). 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu.

# 8. EKLER

## Ek 1. İspat Yapma Başarı Ön Testi

KTÜ

İSPAT YAZMA SINAVI-1

FATİH EĞİTİM FAKÜLTESİ

ADI:

SOYADI:

NUMARASI:

SINIFI:

ŞUBESİ:

SINAVA BAŞLAMADAN ÖNCE AŞAĞIDAKİ YÖNERGELERİ MUTLAKA OKUYUNUZ.

1. Verilen matematiksel problemleri dikkatlice okuyunuz.
2. Problemlerde verilen ve istenenleri yazınız.
3. Problemlerde yer alan ifadelerin ispatlarını yazınız.
4. İspatları yazarken gerekçelerinizi de belirtiniz.

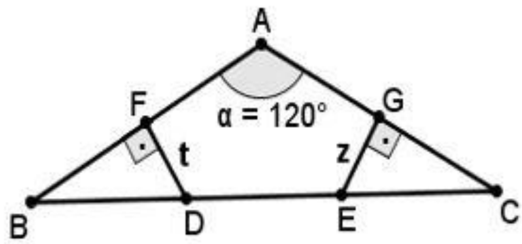
SINAV SÜRESİ: 120 DK

BAŞARILAR

Ek 1'in devamı

<table>
<tr><td rowspan="3">

**1.**




Şekilde ABC ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{A}) = 120^0$'dir. t ve z doğruları sırasıyla [AB] ve [AC] nin orta dikmeleri ve $t \cap [BC] = \{D\}$, $z \cap [BC] = \{E\}$ olduğuna göre $|BD| = |DE| = |EC|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.

</td><td>

**Verilenler:**

</td></tr>
<tr><td>

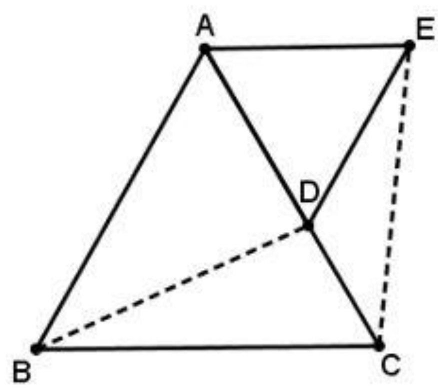
**İstenenler:**

</td></tr>
<tr><td>

**İspat:**

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

**2.**




Şekilde D noktası [AC] kenarı üzerinde bir nokta olmak üzere; ABC ve ADE üçgenleri birer eşkenar üçgendir. Buna göre $|BD| = |EC|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.

</td><td>

**Verilenler:**

</td></tr>
<tr><td>

**İstenenler:**

</td></tr>
<tr><td>

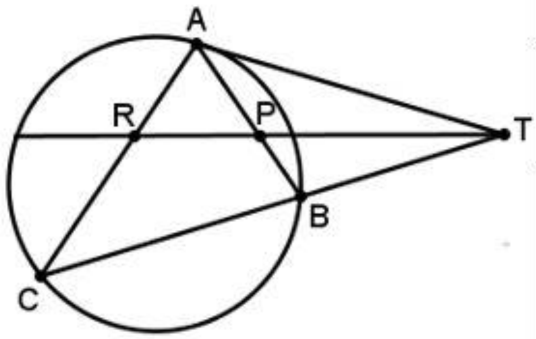
**İspat:**

</td></tr>
</table>

Ek 1'in devamı

<table>
<tr>
<td rowspan="3">

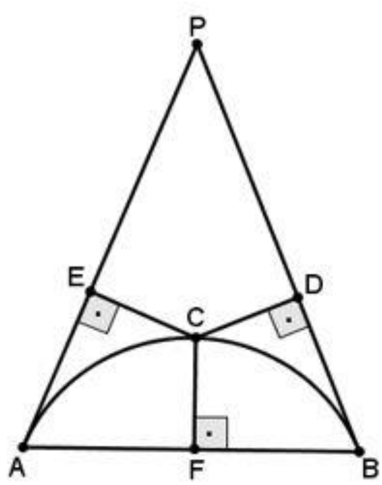
**3.**




Şekilde görüldüğü üzere bir çembere dışındaki T noktasından çizilen teğetin değme noktası A, çizilen kesenin çemberi kestiği noktalar B ve C'dir. BTA açısının açıortayı [AB] ve [AC]'yi sırasıyla P ve R noktalarında kesiyorsa, $|\mathbf{AP}| = |\mathbf{AR}|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.

</td>
<td>**Verilenler:**</td>
</tr>
<tr><td>**İstenenler:**</td></tr>
<tr><td>**İspat:**</td></tr>
<tr>
<td rowspan="3">

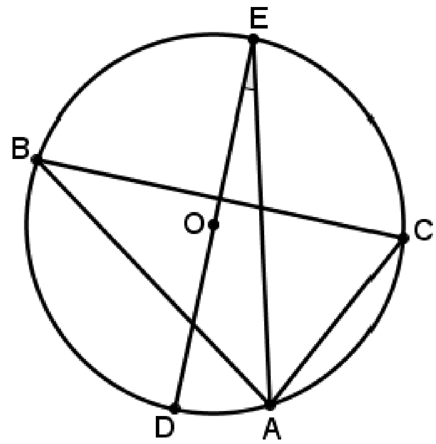
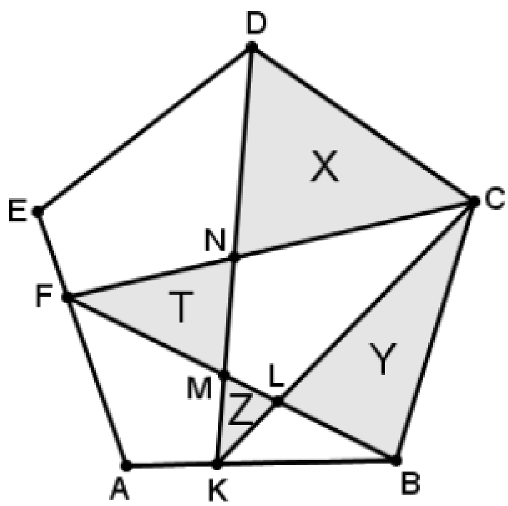
**4.**



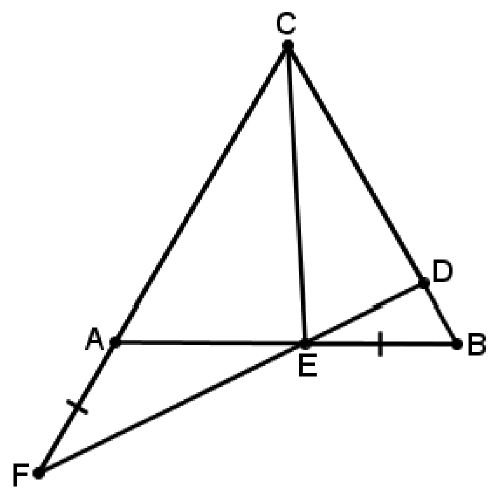
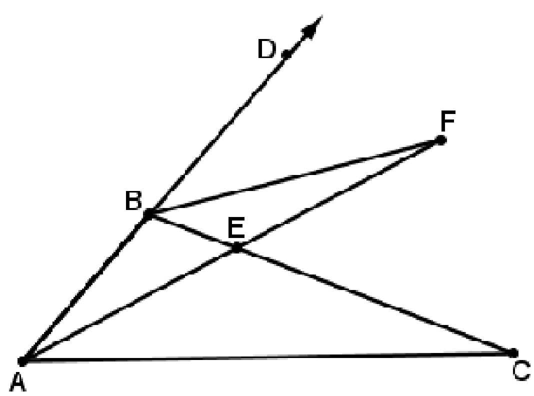

A, C, B noktalarının üzerinde bulunduğu çember yayına A ve B noktalarından çizilen teğetler P noktasında kesişmektedir. C noktasından [AB], [PA] ve [PB] kenarlarına çizilen yükseklik ayakları sırasıyla F, D ve E ise $|\mathbf{CF}|^2 = |\mathbf{CD}|.|\mathbf{CE}|$ dir. Gerekçelerinizi de ifade ederek gösteriniz.

</td>
<td>**Verilenler:**</td>
</tr>
<tr><td>**İstenenler:**</td></tr>
<tr><td>**İspat:**</td></tr>
</table>

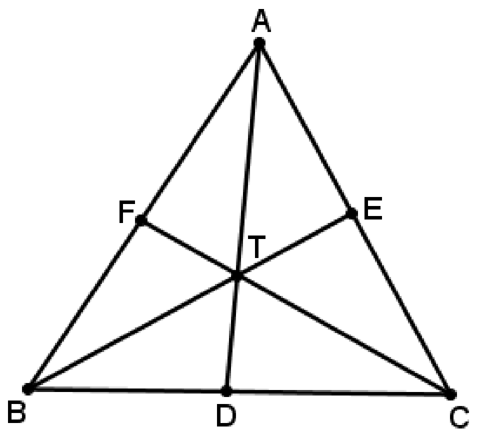
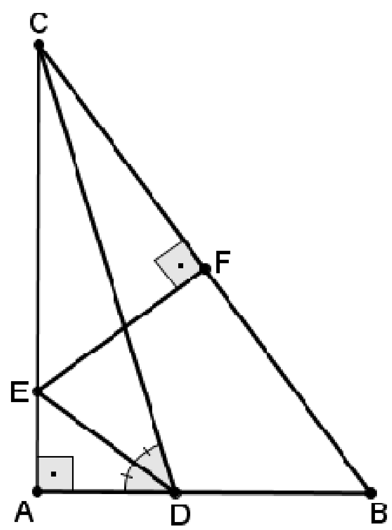
Ek 1'in devamı

| | |
|---|---|
| **5.** <br><br>ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde, A noktasının karşısındaki BC yayının ortasında bir E noktası alınıp, [ED] çapı çiziliyor. Buna göre $m(\widehat{DEA}) = \frac{\lvert m(\widehat{B})-m(\widehat{C})\rvert}{2}$ olduğunu gerekçelerinizle birlikte gösteriniz. | **Verilenler:**<br><br>**İstenenler:**<br><br>**İspat:** |
| **6.** <br><br>ABCDE bir düzgün beşgen, $\lvert AF\rvert = \lvert KB\rvert$, A(DNC) = X br$^2$, A(BCL) = Y br$^2$, A(KLM) = Z br$^2$, A(MNF) = T br$^2$ olduğuna göre X + Z = T + Y olduğunu gerekçelerinizle birlikte gösteriniz. | **Verilenler:**<br><br>**İstenenler:**<br><br>**İspat:** |

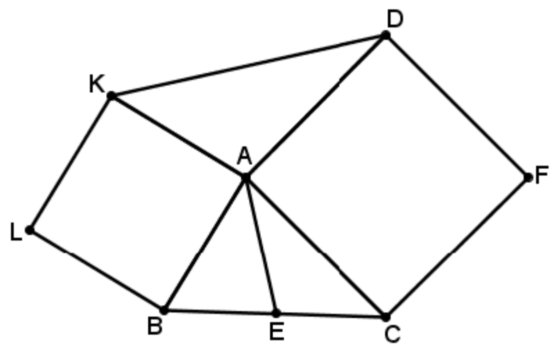
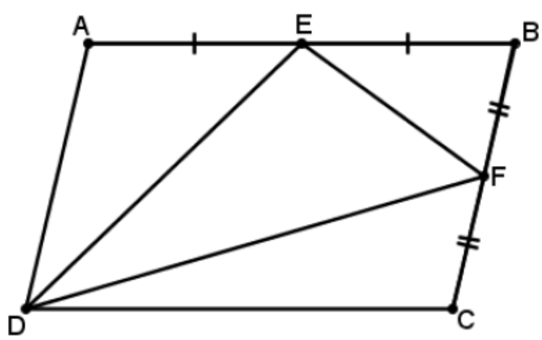
Ek 1'in devamı

<table>
<tr><td rowspan="3">7.<br><br>Şekilde ABC üçgeni eşkenardır.<br>$|AF| = |EB|$ ise $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{ACE})$ olduğunu gerekçelerinizi de sunarak gösteriniz.</td><td>Verilenler:</td></tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat</td></tr>
<tr><td rowspan="3">8.<br><br>Şekilde $|BC| = 2|AB|$,<br>$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACB})$,<br>$m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{CBF})$ dir.<br>$|AF| = |AC|$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz.</td><td>Verilenler:</td></tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat</td></tr>
</table>

Ek 1'in devamı

| | |
|---|---|
| **9.**<br><br><br>Şekilde doğru parçaları aynı noktada kesişmektedir. Buna göre $\frac{\lvert AT\rvert}{\lvert TD\rvert} = \frac{\lvert AF\rvert}{\lvert FB\rvert} + \frac{\lvert AE\rvert}{\lvert EC\rvert}$ olduğunu gerekçelerinizi de belirterek gösteriniz. | **Verilenler:**<br>**İstenenler:**<br>**İspat:** |
| **10.**<br><br><br>ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$, $[EF] \perp [BC]$, $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{CDE})$, $\lvert CF\rvert = \lvert BF\rvert$'dir. $\lvert DC\rvert = 2\lvert AD\rvert + \lvert DB\rvert$ olduğunu gerekçelerinizi belirterek gösteriniz. | **Verilenler:**<br>**İstenenler:**<br>**İspat:** |

Ek 1'in devamı

<table>
<tr><td rowspan="3">11.<br><br>ABC üçgeninin [AB] ve [AC] kenarları üzerine ABKL ve ACDF kareleri kuruluyor. [AE] kenarortay ise $2|AE| = |KD|$'dir. Gerekçelerinizi de sunarak kenarlar arasındaki bu ilişkiyi gösteriniz.</td><td>Verilenler:</td></tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">12.<br><br>ABCD paralelkenarında E ve F sırasıyla [AB] ve [BC] kenarlarının orta noktaları ise $A(DEF) = \frac{3}{8}A(ABCD)$ olduğunu gösteriniz.</td><td>Verilenler:</td></tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
</table>

**Ek 2. İspat Yapma Başarı Son Testi**

KTÜ

FATİH EĞİTİM FAKÜLTESİ

İSPAT YAZMA SINAVI-2

ADI:

SOYADI:

NUMARASI:

SINIFI:

ŞUBESİ:

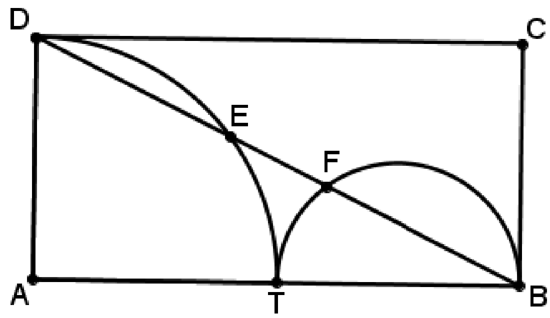
SINAVA BAŞLAMADAN ÖNCE AŞAĞIDAKİ YÖNERGELERİ MUTLAKA OKUYUNUZ.

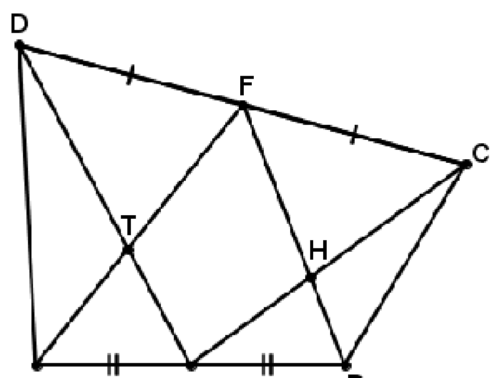
1. Verilen matematiksel problemleri dikkatlice okuyunuz.
2. Problemlerde verilen ve istenenleri yazınız.
3. Problemlerde yer alan ifadelerin ispatlarını yazınız.
4. İspatları yazarken gerekçelerinizi de belirtiniz.

SINAV SÜRESİ: 120 DK

BAŞARILAR

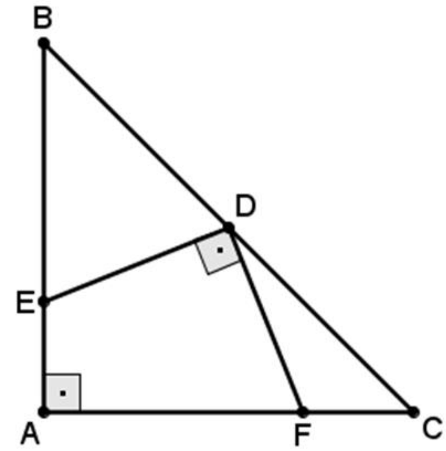
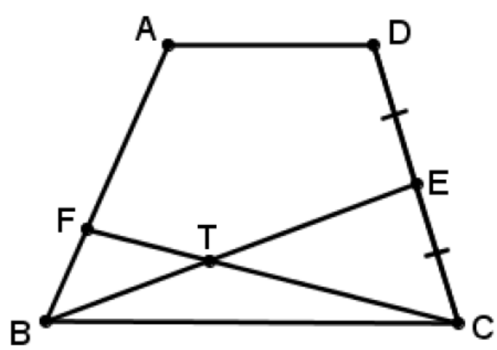
Ek 2'nin devamı

<table>
<tr>
<td rowspan="3">
1.<br>


ABCD dikdörtgen, A merkez, [TB] çap, [BD] köşegen, $|AT| = |TB|$ olarak verilmektedir. Buna göre $|DE| = 2|EF|$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.
</td>
<td>Verilenler:</td>
</tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
<tr>
<td rowspan="3">
2.<br>


ABCD bir dörtgen ve bu dörtgenin [AB] ve [CD] kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F'dir. $[DE] \cap [AF] = \{T\}, [BF] \cap [CE] = \{H\}$ olduğuna göre $A(TEHF) = A(ATD) + A(BHC)$ olduğunu gerekçelerinizle birlikte gösteriniz.
</td>
<td>Verilenler:</td>
</tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
</table>

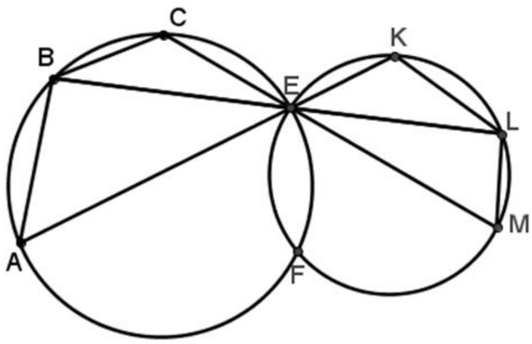
Ek 2'nin devamı

| | |
|---|---|
| **3.** <br>ABC ikizkenar dik üçgeninin hipotenüsünün orta noktası D'dir. [AB] ve [AC] kenarları üzerinde sırasıyla E ve F noktaları $m(\widehat{EDF}) = 90^0$olacak şekilde alınıyor. A(ABC) = 2.A(AEDF) olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | **Verilenler:**<br>**İstenenler:**<br>**İspat:** |
| **4.** <br>ABCD bir yamuk, $\lvert BC \rvert = 2\lvert AD \rvert$, $\lvert AF \rvert = 2\lvert BF \rvert$, $BE \cap CF = \{T\}$ olarak verilmektedir. Buna göre $\lvert CT \rvert = 2\lvert TF \rvert$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | **Verilenler:**<br>**İstenenler:**<br>**İspat:** |

Ek 2'nin devamı

<table>
<tr>
<td rowspan="3">

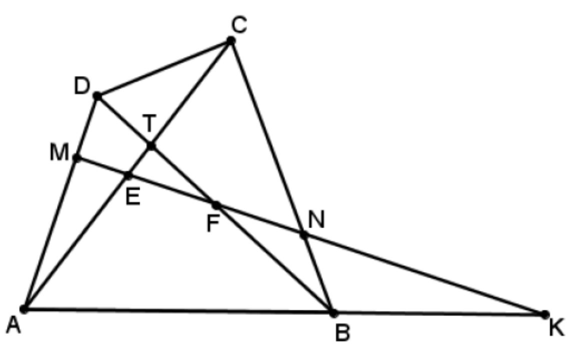
**5.**




Şekilde iki çember E ve F noktalarında kesişmektedir. Kesişme noktalarından biri olan E noktasından rastgele olarak üç doğru çizilmiştir. Buna göre $|BC|.|KL| = |AB|.|LM|$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.

</td>
<td>Verilenler:</td>
</tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
<tr>
<td rowspan="3">

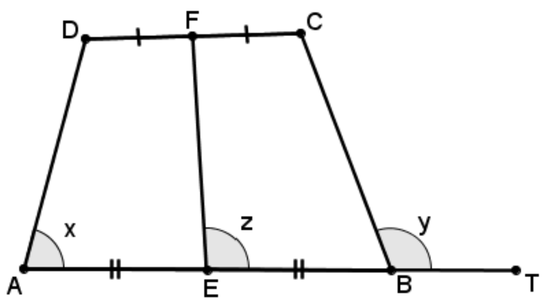
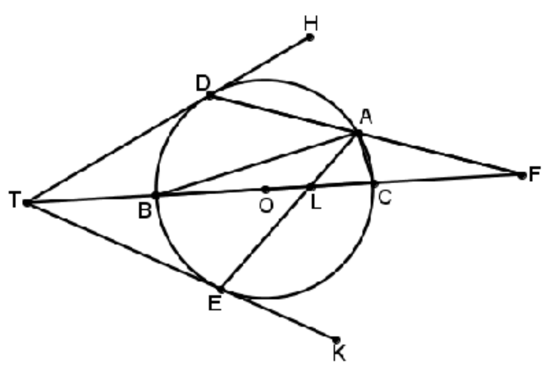
**6.**




ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegenlerinin orta noktaları sırasıyla E ve F'dir. M, E, F, N, K noktaları doğrusal olduğuna göre $\frac{|DM|}{|MA|} = \frac{|NB|}{|CN|}$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.

</td>
<td>Verilenler:</td>
</tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
</table>

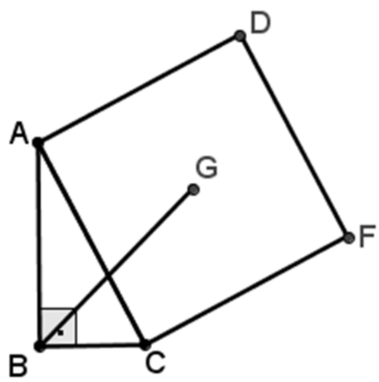
Ek 2'nin devamı

| | |
|---|---|
| **7.**  ABCD dörtgeninde $\lvert AD\rvert = \lvert BC\rvert$, $\lvert DF\rvert = \lvert FC\rvert$, $\lvert AE\rvert = \lvert EB\rvert$, $m(\widehat{DAE}) = x$, $m(\widehat{CBT}) = y$ ve $m(\widehat{FEB}) = z$ olarak verilmektedir. Buna göre $z = \frac{x+y}{2}$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | **Verilenler:**<br><br>**İstenenler:**<br><br>**İspat:** |
| **8.**  ABC üçgeni ve O merkezli bir çember verilmektedir. Çembere dışındaki bir T noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları ise D ve E noktalarıdır. Buna göre $\frac{1}{\lvert BL\rvert} + \frac{1}{\lvert BF\rvert} = \frac{2}{\lvert BC\rvert}$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz. | **Verilenler:**<br><br>**İstenenler:**<br><br>**İspat:** |

Ek 2'nin devamı

<table>
<tr><td rowspan="3">

**9.**




ABC bir dik üçgen, ACFD bir kare, G ise karenin merkezidir. $AB \perp BC$ 'dir. Buna göre $|BG| = \frac{\sqrt{2}}{2}(|AB| + |BC|)$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz

</td><td>

**Verilenler:**

</td></tr>
<tr><td>

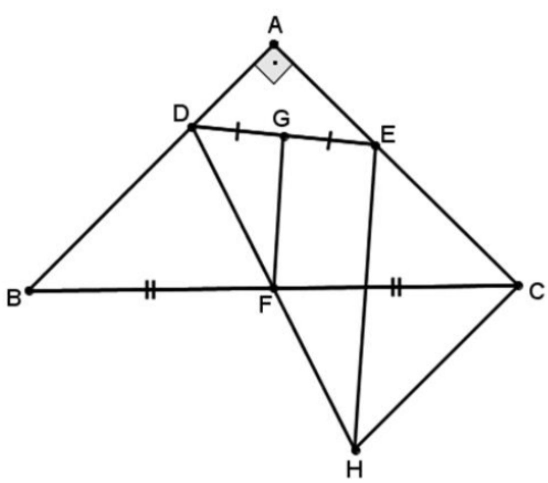
**İstenenler:**

</td></tr>
<tr><td>

**İspat:**

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

**10.**




ABC bir dik üçgen, $AB \perp AC$, $|DG| = |GE|$, $|BF| = |FC|$ olduğuna göre $|BD|^2 + |EC|^2 = 4|GF|^2$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.

</td><td>

**Verilenler:**

</td></tr>
<tr><td>

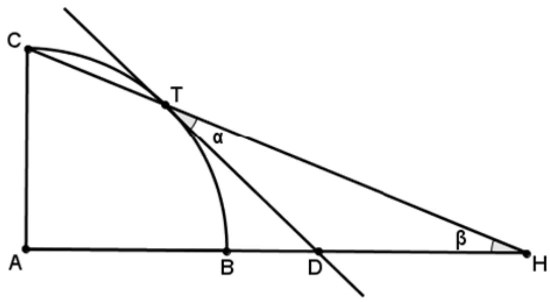
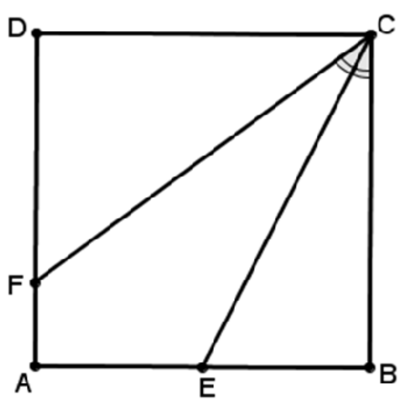
**İstenenler:**

</td></tr>
<tr><td>

**İspat:**

</td></tr>
</table>

Ek 2'nin devamı

<table>
<tr><td rowspan="3">11.<br><br><br>A merkezli çeyrek bir çember verilmektedir. Bu çembere dışındaki bir D noktasından çizilen teğetin değme noktası T'dir. $m(\widehat{DTH}) = \alpha,\ m(\widehat{THD}) = \beta$ olduğuna göre α=β olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.</td><td>Verilenler:</td></tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">12.<br><br><br>ABCD bir kare, $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{FCE}}) = \mathrm{m}(\widehat{\mathrm{ECB}})$ $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{EB}|$ olarak verilmektedir. Buna göre $|\mathrm{DF}| = 3|\mathrm{FA}|$ olduğunu gerekçeleriniz ile birlikte gösteriniz.</td><td>Verilenler:</td></tr>
<tr><td>İstenenler:</td></tr>
<tr><td>İspat:</td></tr>
</table>

## Ek 3. Varsayımda Bulunma Testi

**Numara:** **Adı Soyadı:** **Şube:**

**1)** Bir ABC üçgeninin kenarortaylarını çizerek kenarortayların kesişim noktasını G ve ayaklarını ise D, E, F olarak adlandırınız. D, E, F noktaları ile [GA], [GB], [GC] doğru parçalarının orta noktalarını birleştirerek bir altıgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz altıgenin sahip olabileceği özelliklerle ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

**2)** ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktalarını belirleyiniz. P, R, S, T olarak adlandırıp bir dörtgen oluşturunuz. Oluşturduğunuz PRST dörtgeninin sahip olabileceği özellikler ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

Ek 3'ün devamı

**3)** Herhangi bir ABCD dörtgeni oluşturarak AB kenarı üzerinde sırasıyla E, F; BC kenarı üzerinde sırasıyla N, M; CD kenarı üzerinde sırasıyla G, H; DA kenarı üzerinde sırasıyla L, K olacak şekilde kenarları üç eşit parçaya bölen noktalar belirleyiniz. E ile H; F ile G; N ile K; M ile L noktalarını birleştirmek üzere [EH], [FG], [NK], [ML] doğru parçalarını çiziniz. Doğru parçalarının kesişmesiyle oluşan PRST dörtgeninin alanına yönelik varsayımlar üretiniz. ABCD dörtgeninin kenarlarını beş, yedi, dokuz vs. parçaya bölerek incelemeler yapınız ve kenarları n parçaya böldüğünüzde oluşan PRST dörtgeninin alanı ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız.
(1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

Ek 3'ün devamı

**4)** Bir ABC üçgeninin yükseklik ayaklarını D, E, F olarak adlandırınız. Bu noktaların üçgenin diğer kenarları üzerine izdüşümlerini alarak G, H, I, J, K, L noktalarını belirleyiniz. Bu noktaların sahip olabileceği ortak özelliklere yönelik varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

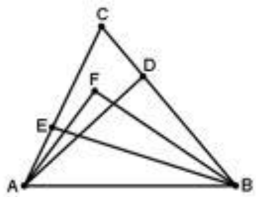
**5)** Herhangi bir ABC üçgeninin kenarları üzerinde $BCA'$, $CAB'$, $ABC'$ eşkenar üçgenlerini oluşturarak $AA'$, $BB'$, $CC'$ doğru parçalarını çiziniz. Çizilen bu doğru parçalarının sahip olabileceği özellikler ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız. (1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

Ek 3'ün devamı

**6)** Herhangi bir ABC üçgeninin diklik merkezi, ağırlık merkezi ve çevrel çemberinin merkezini belirleyerek sırasıyla H, G, O olarak adlandırınız. H, G, O noktalarının sahip olabileceği ortak özellikler ve bu noktaların oluşturduğu doğru parçaları ile ilgili varsayımlar üretiniz. Varsayımlarınıza olan güveninizi ifade etmek için varsayımlarınızı 1 ile 5 arasında puanlayınız.
(1: Hiç emin değilim - 5: Kesinlikle eminim)

## Ek 4. Öğrenme Ortamında Kullanılan Etkinlikler

### Ek 4.1. Birinci Hafta Etkinliği




ABC herhangi bir üçgen olmak üzere D ve E noktaları sırasıyla [BC] ve [AC] kenarları üzerinde noktalardır.
[AF], $\widehat{CAD}$ açısının; [BF], $\widehat{CBE}$ açısının açıortayıdır.

Bu verilenlere dayalı olarak $m(\widehat{AEB})$, $m(\widehat{ADB})$ ve $m(\widehat{AFB})$ arasında herhangi bir bağıntı olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** AEB, ADB ve AFB açılarını ölçünüz ve ölçüm sonuçlarınıza göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| $m(\widehat{AEB})$ | $m(\widehat{ADB})$ | $m(\widehat{AFB})$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre $m(\widehat{AEB})$, $m(\widehat{ADB})$ ve $m(\widehat{AFB})$ arasında nasıl bir bağıntı vardır? Belirlediğiniz bu bağıntıyı aşağıya yazınız.

D ve E noktaları C noktası ile çakıştığında varsayımınız geçerli olur muydu? Açıklayınız.
**Not:** Bu durumu D ve E noktası için ayrı ayrı inceleyiniz.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı

Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

İspat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** İspat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

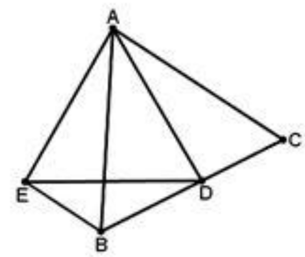
**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

## Ek 4.2 İkinci Hafta Etkinlikleri

### Ek 4.2.1. İkinci Haftanın 1. Etkinliği




ABC ve ADE üçgenleri eşkenar üçgenlerdir.

Bu verilenlere dayalı olarak |BE| ve |DC| arasında herhangi bir bağıntı olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** BE ve DC kenarlarının uzunluklarını ölçünüz ve ölçüm sonuçlarınıza göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| **\|BE\|** | **\|DC\|** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre |BE| ve |DC| arasında nasıl bir bağıntı vardır? Belirlediğiniz bu bağıntıyı aşağıya yazınız.

ABC ve ADE üçgenleri birbirinden farklı ikizkenar üçgenler olsaydı belirlediğiniz bağıntı geçerli olur muydu? Açıklayınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı

Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

İspat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** İspat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

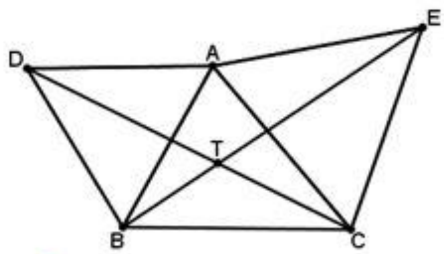
**Değerlendiren Grup Elemanları:**

**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

## Ek 4.2.2. İkinci Haftanın 2. Etkinliği




ABC bir üçgen, BDA ve AEC birer eşkenar üçgen

$BE \cap CD = \{T\}$

Bu verilenlere dayalı olarak $|BE|$ ve $|CD|$ arasında herhangi bir bağıntı olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** BE ve CD doğru parçalarının uzunluklarını ölçünüz ve ölçüm sonuçlarınıza göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| $\|BE\|$ | $\|CD\|$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre $|BE|$ ve $|CD|$ arasında nasıl bir bağıntı vardır? Belirlediğiniz bu bağıntıyı aşağıya yazınız.

Eşkenar üçgenler yerine herhangi bir düzgün çokgen yerleştirilirse varsayımınız geçerli olur muydu? Açıklayınız. **Not:** Yerleştirdiğiniz düzgün çokgenleri belirterek açıklamanızı yapınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı

Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

İspat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** İspat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

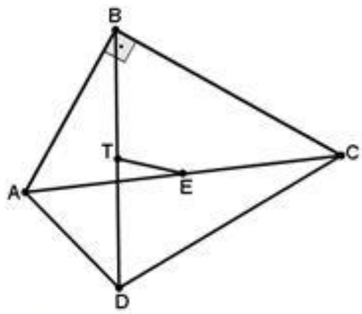
**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

## Ek 4.3. Üçüncü Hafta Etkinlikleri

### Ek 4.3.1. Üçüncü Haftanın 1. Etkinliği




ABC bir dik üçgen, BDC eşkenar bir üçgen

T ve E sırasıyla BD ve AC kenarlarının orta noktalarıdır.

Bu verilenlere dayalı olarak |TE| ve |AD| arasında herhangi bir bağıntı olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** TE ve AD doğru parçalarının uzunluklarını ölçünüz ve ölçüm sonuçlarınıza göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| **\|TE\|** | **\|AD\|** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre |TE| ve |AD| arasında nasıl bir bağıntı vardır? Belirlediğiniz bu bağıntıyı aşağıya yazınız.

BCD eşkenar bir üçgen olmasaydı varsayımınız geçerli olur muydu? Açıklayınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı

Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

İspat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** İspat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

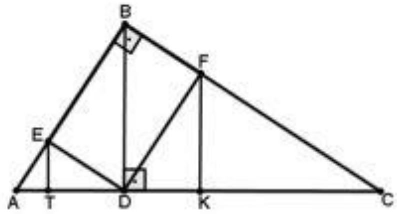
**Değerlendiren Grup Elemanları:**

**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

**Ek 4. 3. 2. Üçüncü Haftanın 2. Etkinliği**




ABC bir dik üçgen, BEFD bir dikdörtgen

[AB] ⊥ [BC], [BD] ⊥ [AC], [ET] // [BD] // [FK]

Bu verilenlere dayalı olarak |ET|, |BD| ve |FK| arasında herhangi bir bağıntı olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** ET, BD ve FK kenarlarının uzunluklarını ölçünüz ve ölçüm sonuçlarınıza göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| **\|TE\|** | **\|BD\|** | **\|FK\|** |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre |ET|, |BD| ve |FK| arasında nasıl bir bağıntı vardır? Belirlediğiniz bu bağıntıyı aşağıya yazınız.

BEFD bir kare olsaydı varsayımınız geçerli olur muydu? Açıklayınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı

Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

İspat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** İspat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

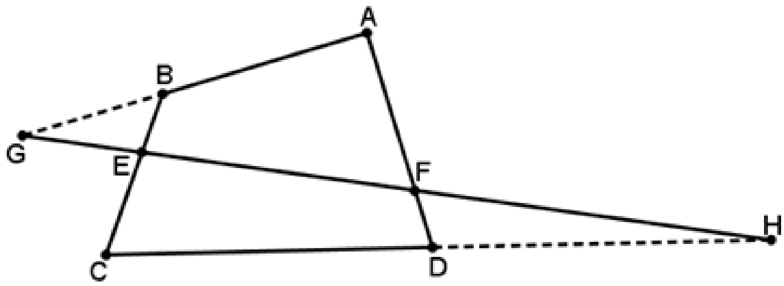
**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

## Ek 4.4. Dördüncü Hafta Etkinlikleri

### Ek 4.4.1. Dördüncü Haftanın 1. Etkinliği




ABCD dörtgenin kenarları (veya uzantıları) bir doğru tarafından G, E, F, H noktalarında kesmektedir.

- Bu verilenlere dayalı olarak aşağıdaki adımları takip ediniz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

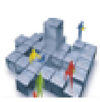
**a)** Geometrik yapı üzerinde incelemeler yaparak üçgenler üzerinde geçerli olan Menelaus teoreminin dörtgenler üzerine genellenebilir olup olmadığını araştırınız.

**b)** Dörtgenler üzerine genellenebilir olduğuna ulaştıysanız belirlediğiniz bağıntıyı aşağıya yazınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**



Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

Ek 4'ün devamı

Ispat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.

**Not:** Ispat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

**Ek. 4.4.2. Dördüncü Haftanın 2. Etkinliği**

Bir ABC bir üçgeninin [BC] ve [AC] kenarları üzerinde [DE] // [AB] olacak şekilde D ve E noktaları alınsın. AD ve BE doğruları K noktasında kesişsin. C ve K noktalarından geçen doğru AB doğru parçasını F noktasında kessin.

Bu verilenlere dayalı olarak |AF| ve |BF| arasında herhangi bir ilişki olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** AF ve BF doğru parçalarının uzunluklarını ölçünüz ve ölçüm sonuçlarınıza göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| **\|AF\|** | **\|BF\|** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre |AF| ve |BF| arasında nasıl bir ilişki vardır? Belirlediğiniz bu ilişkiyi aşağıya yazınız.

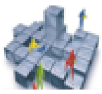
DE ile AB doğru parçalarının paralel olmaması durumunda varsayımınız geçerli olur muydu? Açıklayınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı



Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

Ispat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** Ispat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

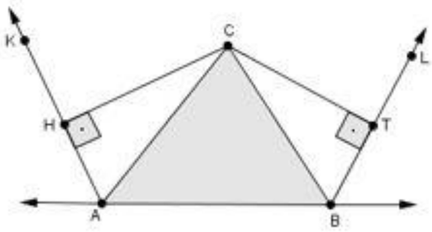
**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4’ün devamı

## Ek. 4.5. Beşinci Hafta Etkinlikleri

### Ek. 4.5.1. Beşinci Haftanın 1. Etkinliği




[AK ve [BL, ABC üçgeninde sırasıyla A ve B açılarının dış açıortaylardır.

$[CH] \perp [AK]$, $[CT] \perp [BL]$’dir.

Bu verilenlere dayalı olarak $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ ve $|HT|$ arasında herhangi bir bağıntı olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ ve $|HT|$ kenarlarının uzunluklarını ölçünüz ve aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| **\|AB\|** | **\|AC\|** | **\|BC\|** | **\|HT\|** |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ ve $|HT|$ arasında nasıl bir ilişki vardır? Belirlediğiniz bu ilişkiyi aşağıya yazınız.

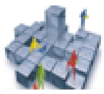
CHA ve CTA açılarının ölçüsü $90^0$ olmasaydı belirlediğiniz ilişki geçerli olur muydu? Açıklayınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4'ün devamı



Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

Ispat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** Ispat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

Ek 4'ün devamı

## Ek. 4.5.2. Beşinci Haftanın 2. Etkinliği

Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezinden üçgenin kenarlarına paralel olacak şekilde kenarları kesene kadar doğru parçaları çizilmiş olsun ve [AB], [AC], [BC] kenarları sırasıyla D, E, F noktalarında kessin. Bunun sonucunda GD, GE ve GF doğru parçaları oluşmaktadır.

Bu verilenlere dayalı olarak ABC üçgeninin çevresi ve $|GD|, |GE|, |GF|$ arasında herhangi bir ilişki olup olmadığını aşağıdaki adımları takip ederek bulunuz.

Verilen bilgilere dayalı olarak yukarıdaki geometrik yapıyı oluşturunuz.

**a)** ABC üçgeninin çevresi ve $|GD|, |GE|, |GF|$ kenarlarının uzunluklarına yönelik ölçümler yapınız ve aşağıdaki tabloyu doldurunuz

| $Ç(\widehat{ABC})$ | $\|GD\|$ | $\|GE\|$ | $\|GF\|$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**b)** Yaptığınız ölçüm ve incelemelerinize göre $Ç(\widehat{ABC})$ ve $|GD|, |GE|, |GF|$ arasında nasıl bir ilişki vardır? Belirlediğiniz bu ilişkiyi aşağıya yazınız.

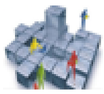
GD, GE ve GF doğru parçalarının kenarlara paralel olma şartlarından en az biri kaldırılırsa belirlediğiniz ilişki geçerli olur muydu? Açıklayınız.

Yaptığınız incelemelere dayalı olarak hipotezinizi ve hükmünüzü belirtip bunlardan yararlanarak ulaştığınız matematiksel ifadeyi yazınız.

**Hipotez:**

**Hüküm:**

Ek 4’ün devamı



Hangi geometrik bilgilerden yararlanacağınızı ve nasıl bir yol izleyeceğinizi belirterek bulduğunuz bağıntının ispatına yönelik planınızı oluşturunuz.

Ispat planlarınızın taslaklarını diğer gruplarla değiştirerek değerlendirmelerinizi yapınız.
**Not:** Ispat planına yönelik değerlendirme sonuçlarınızı aşağıya yazınız.

**Değerlendiren Grup Elemanları:**

**Değerlendirme Sonuçları:**

Gruplar arasında yapılan değerlendirmeler sonucunda ispat planınızda gerekli değişiklikleri yaparak ispatınızı yazınız.

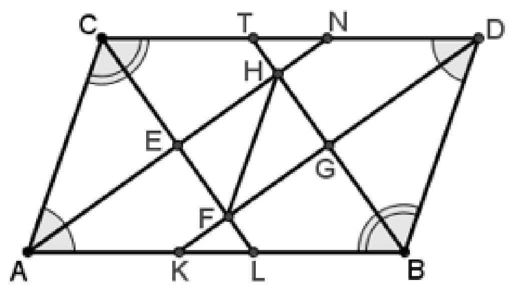
Ek 4'ün devamı

## Ek 4.6. Altıncı Haftanın Etkinlikleri

### Ek 4.6.1. Altıncı Haftanın 1. Etkinliği

**Numara:** **Adı ve Soyadı:**

**Diğer grup üyeleri:**




ABCD bir paralelkenardır.

[AN], [BT], [CL] ve [DK] paralelkenarın açılarının iç açıortaylarıdır.

Bu verilenlere dayalı olarak $|AB|$, $|AC|$ ve $|HF|$ arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

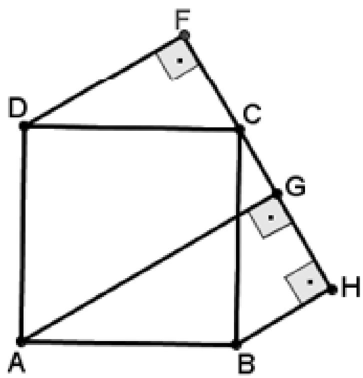
**Not:** Ispat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz.

Ek 4'ün devamı

**Ek 4.6.2. Altıncı Haftanın 2. Etkinliği**

**Numara:** **Adı ve Soyadı:**

**Diğer grup üyeleri:**




ABCD bir kare

C ∈ [FE]

[DF] ⊥ [FH], [AG] ⊥ [FH], [BH] ⊥ [FH]'dir.

Bu verilenlere dayalı olarak |DF|, |AG| ve |BH| arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

**Not:** Ispat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz.

Ek 4'ün devamı

## Ek 4.7. Yedinci Hafta Etkinlikleri

### Ek 4.7.1. Yedinci Haftanın 1. Etkinliği

**Numara:** **Adı ve Soyadı:**

**Diğer grup üyeleri:**

Bir ABCD paralelkenarı ile [AB] ve [AD] kenarları üzerine sırasıyla dışa doğru ABF ve ADE eşkenar üçgenleri çizilmiş olsun. E, F ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşan üçgenin kenar uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

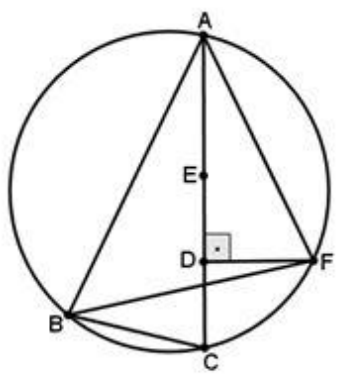
**Not:** Ispat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz

Ek 4'ün devamı

**Ek 4.7.2. Yedinci Haftanın 2. Etkinliği**

**Numara:** **Adı ve Soyadı:**

**Diğer grup üyeleri:**




F noktası, ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde AB yayının tam ortasında ve $|AE| = |BC|$ 'dir. F'den AC kenarına inen dikme ayağı ise D'dir.

Bu verilenlere dayalı olarak $|BC|$, $|CD|$ ve $|AD|$ arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

**Not:** İspat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz.

Ek 4'ün devamı

**Ek 4.8. Sekizinci Haftanın Etkinlikleri**

**Ek 4.8.1. Sekizinci Haftanın 1. Etkinliği**

**Numara:** **Adı ve Soyadı:**

**Grubun diğer üyeleri:**

$m(\widehat{A}) = 90°$ olan bir BAC dik üçgeni verilsin. Bu üçgeninin dik kenarlarının dış teğet çemberleri çizilmiş olsun.

Bu verilenlere dayalı olarak çemberlerin yarıçapları ve dik üçgenin hipotenüs uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

**Not:** Ispat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz.

Ek 4'ün devamı

**Ek 4.8.2. Sekizinci Haftanın 2. Etkinliği**

**Numara:** **Adı ve Soyadı:**

**Grubun diğer üyeleri:**

$m(\widehat{B}) = 90°$ olan bir ABC dik üçgeni verilsin. Bu dik üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I, çevrel çemberinin merkezi O olsun. Iç teğet çemberinin çapı r, çevrel çemberinin çapı ise R olarak adlandırılsın.

Bu verilenlere dayalı olarak çemberlerin çapı olan R ile r ve üçgenin dik kenarları olan AB ile BC kenarlarının uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olduğunu bularak ispatını yapınız.

**Not:** Ispat yaparken izlediğiniz adımları ve kullandığınız tanım, teoremleri ayrıntılı olarak belirtiniz.

**Ek 5. İspat Yapmayı Değerlendirmeye Yönelik Kategorik Puanlama Cetveli**

| | | |
|---|---|---|
| **Muhakeme Süreci (MHS)** | 0-<br>a. Boş bırakmıştır.<br>b. Hipotez ve hüküm bilgilerini yazmıştır.<br>c. İspata hiçbir katkısı olmayan ilgisiz ifadelerde veya çıkarımlarda bulunmuştur. | **0a.** Ne hipotez ve hüküm bilgilerini yazmış ne de herhangi bir çıkarımda bulunmuştur. |
| | | **0b.** Sadece verilen ya da istenen bilgilerini yazmıştır. Bunun dışında verilen ve istenenleri geometrik şekilde göstermesi de bu alt kategoride değerlendirilmektedir. |
| | | **0c.** İspat niteliği taşımayan ifadelerde bulunmuş ya da ardı ardına hatalı çıkarımlarda bulunmuştur. |
| | 1-<br>a. Birbirinden bağımsız en az bir tane doğru çıkarımda bulunmuştur.<br>b. Çıkarımlarını özel durum üzerinden yürütmüştür. Ancak bunu yaparken yetersiz gerekçelendirme yapmıştır.<br>c. Hükümden başlayarak en az bir çıkarımda bulunmuştur. | **1a.**<br>• Bir matematiksel ispat için hazırlık niteliğinde olan çıkarımlarda bulunmuştur. Örneğin geometrik şekilde açıları yerleştirme gibi ispata giriş niteliğinde olan çıkarımlarda bulunup devamının getirilmediği durumlar bu alt kategoride yer almaktadır.<br>• Birbirini ile ilişki olmayan çıkarımlarda bulunmuştur. Bir bakıma birbirini takip eden ispat adımları olarak kabul edilemeyecek çıkarımlarda bulunmuştur. (Not: İspat adımları arasında boşlukların olduğu durumlar da bu alt kategoride değerlendirilmektedir.)<br>• Sadece bir çıkarımda bulunup bu çıkarıma yönelik gerekçe sunmuştur.<br>• Çıkarımların bir kısmı hatalı iken bir kısmı ise doğrudur. |
| | | **1b.** Sayısal değerleri ya da bazı özel durumları dikkate alarak çıkarımlarda bulunup ispata devam etmemiştir. Örneğin üçgen eşkenar ya da ikizkenar olarak verilmese de bu şekilde kabul ederek çıkarımlarda bulunup ispata devam etmedikleri durumlar bu alt kategoride yer almaktadır. |
| | | **1c.** İspatı yapılması istenen matematiksel ilişkiden başlayarak ispata başlamıştır. Bir bakıma hüküm bilgisi verilenlerden biri olarak kabul edilmiştir. |
| | 2-<br>a. Birbirini destekleyen ardı ardına çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak sonuca ulaşamamıştır. | **2a.** Birbiri ile ilişkili olan çıkarımlarda bulunup ispatın hemen hemen yarısını tamamlamıştır. Bir başka ifade ile birbirini takip eden ispat adımları yazmıştır. Ancak sonuca ulaşamamıştır. |

Ek 5'in devamı

| | | |
|---|---|---|
| | b. Sonuca özel durum üzerinden ardı ardına çıkarımlarla ulaşmıştır.<br>c. Sonuca ulaşmış ancak bu ulaşma sürecindeki aşamalarını formal olarak gerekçelendirmemiş ya da yanlış gerekçelendirme yapmıştır. | **2b.** Sayısal değerleri ya da bazı özel durumları dikkate alarak ispatı tamamlamıştır. Örneğin doğru parçalarının kesiştiği noktayı ağırlık merkezi kabul ederek ispatın tamamlanması bu alt kategoriye girmektedir. |
| | | **2c.**<br>• İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak çıkarımlara yönelik gerekçeler bir açıklama olarak sunulmamıştır. Örneğin gerekçeler geometrik şeklin üzerinden ya da yapılanlara bağlı olarak anlaşılmaktadır.<br>• İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak çıkarımlarına yönelik gerekçeleri sunarken açıklamaların yetersizliğinden ziyade belirtilen ifadeler ile çıkarımların kesinlikle açıklanamayacağı durumlar mevcuttur. Örneğin üçgenlerin eşliğine AAA benzerlik teoremi ile karar verilmesi bu alt kategoriye girmektedir. (**Not:** Bir ispatta çıkarımlara yönelik uygun gerekçelerle birlikte bu tür bir gerekçenin bulunması durumunda bu alt kategori içinde değerlendirilmektedir.)<br>• İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak sunulan gerekçe belirtilen çıkarımdan sonra ifade edilebilecek bir çıkarımdır. |
| | 3-<br>a. Sonuca ulaşmış ancak ispat aşamalarının bir kısmı gerekçelendirilmiş bir kısmı gerekçelendirilmemiştir.<br>b. Sonuca ulaşmış, ispat aşamalarının önemli bir kısmını gerekçelendirmiş. Ancak bazı sözcük ve teoremlerin isimlendirilmesinde hata yapmıştır. | **3a.** İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak çıkarımların bazılarına yönelik gerekçeler sunmamıştır. |
| | | **3b.** İspat için bütün çıkarımlarda bulunmuştur. Ancak bu çıkarımların büyük bir kısmı için gerekçeler sunarken bazı gerekçeler için teoremleri ifade ederken eksikliğin olması ya da sözcüklerde hataların olması gibi durumlar mevcuttur. Örneğin "açı benzerliği" ifadesinde bulunarak aslında her iki üçgenin aynı açılara sahip olmasının kast edilmesi gibi |
| | 4- Sonuca ispat aşamalarının her birine yönelik gerekçelendirmeler yaparak ulaşmıştır. | **4.** İspat için gerekli olan bütün çıkarımlarda bulunmuş ve çıkarımların her birine yönelik uygun gerekçeler sunmuştur. |

Ek 5'in devamı

| | |
|---|---|
| **Matematik Dili (MD)** | 0- a. Boş bırakma ya da sadece verilen ve istenenleri yazma<br>b. Hem kavramların hem de sembollerin kullanımında çok sayıda hatalı durum söz konusudur. |
| | 1- Semboller doğru olmakla birlikte açıklamalar anlaşılır değildir. |
| | 2- Açıklamalar anlaşılmakla birlikte sembollerin kullanımında hatalar vardır. |
| | 3- Hem kavramlar hem de semboller uygun bir şekilde kullanılmıştır. |
| **İspat Yapısı** | G- Geometrik ispat |
| | P- Paragraf ispat |
| | G, P- Geometrik ve paragraf ispat |
| | Y- İspat yok |

## Ek 6. Varsayımları Değerlendirmeye Yönelik Kategorik Puanlama Cetveli

| | | |
|---|---|---|
| **Doğruluk (VD)** | 0-<br>0a. Herhangi bir varsayımda bulunmamıştır.<br><br>0b. Temel düzeyde bilinen bir önermeyi yeniden ifade etmiştir. | 0a. PRST dörtgeninin özelliği ABCD dörtgeninin özelliğine göre değişir. / Dörtgeni kare, dikdörtgen ve paralelkenar dörtgen şekli aldığımızda TR ve PS köşegenlerini çizdiğimizde dörtgenin içinde oluşan kareler hep orantılı oluyor birbirine / Ağırlık, çevrel çember vb. tanımları…<br><br>0b. Ağırlık merkezinin kenarortay uzunluğunu 2'ye 1'lik bir oranda bölmesi $\|GA\| = 2\|GB\|$ / Verilenlerden kolaylıkla ortaya çıkarılan bir durum<br>ABCD dörtgenin köşegenleri, PRST dörtgeninin köşegenlerinin kesiştiği nokta olan O noktasında kesişir.<br><br>**Not:** 0a. Varsayım niteliği taşımayan ve ilgisiz olan ifadeleri de içermektedir.<br>0b. Temel düzeyde olan özel ya da genel bir durum ayırt etmeksizin doğru ya da yanlış olan varsayımları içermektedir. |
| | 1- Yanlış bir varsayım üretmiştir. | 1- Altıgenin içinde 3 eş üçgen oluştu. / GHO eşkenar üçgendir.<br>(G: Ağırlık merkezi, H: Diklik Merkezi, O: Çevrel Çember Merkezi) |
| | 2- Varsayımını özel bir durumu ele alarak üretmiştir. | 2- ABC eşkenar üçgen olsaydı altıgen düzgün bir altıgen olurdu. / PRST dörtgeni eşkenar dörtgendir. |
| | 3- Doğru bir varsayım üretmiştir. | 3- A(ABCD) = 2.A(PRST) / AA', BB', CC' doğru parçaları bir noktada kesişir. |

Ek 6'nın devamı

| | | |
|---|---|---|
| **Matematik Dili (VMD)** | 0- Varsayım uygun bir dille ifade edilmemiştir.<br>• Sembolik dille ifade ederken matematiksel semboller uygun bir şekilde kullanılmamıştır.<br>• Sembolik olmayan bir dil kullanırken tamamen yanlış kelimeler kullanılmıştır. | 0-<br>• $\lvert TS\rvert \parallel \lvert PR\rvert$ / RS = TP /<br>• Altıgen [GA], [GB], [GC]'nin orta noktalarından oluştuğundan düzgün altıgendir. |
| | 1- Varsayım kısmen uygun bir dille ifade edilmiştir.<br>• Sembolik dil kullanırken matematiksel sembollerin bir kısmı uygun, bir kısmı ise uygun olmayacak şekilde ifade edilmiştir.<br>• Sembolik bir dil kullanırken varsayım ifadesinin bir kısmı sembolik olmayan bir dil ile ifade edilmiştir.<br>• Sembolik olmayan bir dil kullanırken hangi geometrik kavramın ifade edildiği belirsizdir. | 1-<br>• $\lvert PE\rvert = PD, \lvert EK\rvert = \lvert PR\rvert$<br>• A(ABC) = 2 (Altıgenin alanı)<br>• Altıgenin alanı, üçgenin alanının 1/2'si kadardır |
| | 2- Varsayım uygun bir dille ifade edilmiştir.<br>• Sembolik bir dil kullanırken matematiksel semboller tamamen doğru bir şekilde ifade edilmiştir.<br>• Sembolik olmayan bir dil kullanırken kelimeler tamamen uygun bir şekilde tercih edilmiştir. | 2-<br>• $Ç(\mathrm{ABCD}) = \lvert BD\rvert + \lvert AC\rvert$<br>• ABCD dörtgeninin köşegen uzunluklarının toplamı PRST dörtgeninin çevre uzunluğuna eşittir. |

**Ek 7. Muhakeme Süreci ve Matematik Dili Boyutlarına Göre İspat Yapma Başarı Testlerinden Alınan Ham ve Lineer Puanlar**

| | | Ön Test | | | | Son Test | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Muhakeme Süreci | | Matematik Dili | | Muhakeme Süreci | | Matematik Dili | |
| | | Ham Puan | Lineer Puan | Ham Puan | Lineer Puan | Ham Puan | Lineer Puan | Ham Puan | Lineer Puan |
| DENEY GRUBU | ÖA1 | 14 | -0,17 | 19 | -0,12 | 26 | 0,45 | 27 | 0,53 |
| | ÖA2 | 7 | -1,17 | 13 | -0,52 | 27 | 0,54 | 31 | 1,04 |
| | ÖA3 | 14 | -0,17 | 16 | -0,32 | 23 | 0,19 | 26 | 0,44 |
| | ÖA4 | 11 | -0,51 | 15 | -0,38 | 23 | 0,19 | 27 | 0,53 |
| | ÖA5 | 8 | -0,97 | 16 | -0,32 | 17 | -0,36 | 26 | 0,44 |
| | ÖA6 | 10 | -0,64 | 18 | -0,18 | 19 | -0,16 | 28 | 0,63 |
| | ÖA7 | 10 | -0,64 | 16 | -0,32 | 21 | 0,02 | 26 | 0,44 |
| | ÖA8 | 18 | 0,21 | 17 | -0,25 | 18 | -0,26 | 20 | -0,04 |
| | ÖA9 | 6 | -1,42 | 11 | -0,67 | 16 | -0,46 | 30 | 0,88 |
| | ÖA10 | 16 | 0,02 | 29 | 0,79 | 16 | -0,46 | 27 | 0,53 |
| | ÖA11 | 12 | -0,39 | 22 | 0,09 | 23 | 0,19 | 29 | 0,74 |
| | ÖA12 | 15 | -0,07 | 19 | -0,12 | 21 | 0,02 | 29 | 0,74 |
| | ÖA13 | 19 | 0,3 | 25 | 0,33 | 24 | 0,27 | 25 | 0,35 |
| | ÖA14 | 9 | -0,79 | 14 | -0,45 | 17 | -0,36 | 25 | 0,35 |
| | ÖA15 | 0 | -4,26 | 2 | -1,88 | 14 | -0,7 | 24 | 0,27 |
| | ÖA16 | 16 | 0,02 | 17 | -0,25 | 16 | -0,46 | 28 | 0,63 |
| | ÖA17 | 12 | -0,39 | 19 | -0,12 | 17 | -0,36 | 29 | 0,74 |
| | ÖA18 | 12 | -0,39 | 16 | -0,32 | 17 | -0,36 | 25 | 0,35 |
| | ÖA19 | 12 | -0,39 | 22 | 0,09 | 20 | -0,07 | 32 | 1,26 |
| | ÖA20 | 16 | 0,02 | 18 | -0,18 | 20 | -0,07 | 27 | 0,53 |
| | ÖA21 | 15 | -0,07 | 21 | 0,02 | 20 | -0,07 | 28 | 0,63 |
| | ÖA22 | 20 | 0,39 | 22 | 0,09 | 34 | 1,33 | 33 | 1,57 |
| | ÖA23 | 15 | -0,07 | 17 | -0,25 | 29 | 0,73 | 31 | 1,04 |
| | ÖA24 | 13 | -0,28 | 16 | -0,32 | 15 | -0,58 | 23 | 0,19 |
| | ÖA25 | 17 | 0,12 | 24 | 0,24 | 22 | 0,1 | 29 | 0,74 |
| | ÖA26 | 10 | -0,64 | 23 | 0,16 | 20 | -0,07 | 33 | 1,57 |
| | ÖA27 | 20 | 0,39 | 27 | 0,53 | 31 | 0,94 | 30 | 0,88 |
| | ÖA28 | 10 | -0,64 | 24 | 0,24 | 23 | 0,19 | 31 | 1,04 |
| | ÖA29 | 11 | -0,51 | 19 | -0,12 | 25 | 0,36 | 33 | 1,57 |
| | ÖA30 | 10 | -0,64 | 22 | 0,09 | 21 | 0,02 | 25 | 0,35 |
| | ÖA31 | 21 | 0,48 | 24 | 0,24 | 30 | 0,83 | 30 | 0,88 |
| | ÖA32 | 13 | -0,28 | 22 | 0,09 | 16 | -0,46 | 30 | 0,88 |
| KONTROL GRUBU | ÖA33 | 9 | -0,83 | 19 | -0,06 | 25 | 1,54 | 29 | 0,66 |
| | ÖA34 | 12 | -0,41 | 17 | -0,18 | 10 | -0,57 | 20 | 0,02 |
| | ÖA35 | 8 | -0,99 | 14 | -0,36 | 9 | -0,71 | 17 | -0,14 |
| | ÖA36 | 8 | -0,99 | 12 | -0,49 | 8 | -0,87 | 11 | -0,48 |
| | ÖA37 | 5 | -1,63 | 15 | -0,3 | 4 | -1,79 | 17 | -0,14 |
| | ÖA38 | 5 | -1,63 | 8 | -0,79 | 12 | -0,31 | 24 | 0,26 |
| | ÖA39 | 9 | -0,83 | 10 | -0,63 | 6 | -1,26 | 8 | -0,69 |
| | ÖA40 | 12 | -0,41 | 20 | 0 | 6 | -1,26 | 17 | -0,14 |
| | ÖA41 | 11 | -0,54 | 26 | 0,42 | 11 | -0,44 | 23 | 0,2 |
| | ÖA42 | 9 | -0,83 | 19 | -0,06 | 10 | -0,57 | 22 | 0,14 |
| | ÖA43 | 10 | -0,68 | 13 | -0,42 | 18 | 0,36 | 22 | 0,14 |
| | ÖA44 | 5 | -1,63 | 11 | -0,56 | 0 | -4,75 | 0 | -2,37 |
| | ÖA45 | 6 | -1,38 | 9 | -0,71 | 8 | -0,87 | 18 | -0,09 |
| | ÖA46 | 6 | -1,38 | 12 | -0,49 | 8 | -0,87 | 27 | 0,47 |
| | ÖA47 | 10 | -0,68 | 14 | -0,36 | 16 | 0,13 | 20 | 0,02 |
| | ÖA48 | 0 | -4,16 | 2 | -1,73 | 1 | -3,46 | 13 | -0,36 |

Ek 7'nin devamı

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ÖA49 | 3 | -2,38 | 8 | -0,79 | 10 | -0,57 | 25 | 0,32 |
| | ÖA50 | 8 | -0,99 | 13 | -0,42 | 11 | -0,44 | 27 | 0,47 |
| | ÖA51 | 8 | -0,99 | 15 | -0,3 | 12 | -0,31 | 23 | 0,2 |
| | ÖA52 | 9 | -0,83 | 17 | -0,18 | 16 | 0,13 | 23 | 0,2 |
| | ÖA53 | 19 | 0,35 | 25 | 0,34 | 19 | 0,48 | 28 | 0,56 |
| | ÖA54 | 23 | 0,77 | 21 | 0,07 | 20 | 0,61 | 21 | 0,08 |
| | ÖA55 | 6 | -1,38 | 11 | -0,56 | 2 | -2,66 | 7 | -0,77 |
| | ÖA56 | 11 | -0,54 | 21 | 0,07 | 18 | 0,36 | 26 | 0,39 |
| | ÖA57 | 3 | -2,38 | 12 | -0,49 | 1 | -3,46 | 2 | -1,44 |
| | ÖA58 | 11 | -0,54 | 20 | 0 | 12 | -0,31 | 26 | 0,39 |
| | ÖA59 | 13 | -0,29 | 8 | -0,79 | 7 | -1,05 | 7 | -0,77 |
| | ÖA60 | 16 | 0,04 | 26 | 0,42 | 10 | -0,57 | 17 | -0,14 |

## 9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Tuğba ÖZTÜRK, 1987 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlkokulu 24 Şubat İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Cumhuriyet Ortaokulu'nda ve lise öğrenimini Trabzon Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında kazandığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği programını 2010 yılında bölüm birinciliği ile bitirdi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim dalı Matematik Eğitiminde doktora eğitimine başladı. 2011 yılında ÖYP kapsamında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup yabancı dili İngilizcedir.

**İLETİŞİM BİLGİLERİ**

**Adres :** Tuğba ÖZTÜRK, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi A.B.D., Trabzon.

**E-Posta :** tugbaozturk@ktu.edu.tr & tugbaozturk061@gmail.com